Қ.ЖҰБАНОВ АТЫНДАҒЫ АҚТӨБЕ ӨҢІРЛІК МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ

АКТЮБИНСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К.ЖУБАНОВА

AKTOBE REGIONAL STATE UNIVERSITY NAMED AFTER K. ZHUBANOV

«АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР: ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ БЕРУДЕГІ ИННОВАЦИЯЛАР» ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ-ПРАКТИКАЛЫҚ КОНФЕРЕНЦИЯ МАТЕРИАЛДАРЫ

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ: ИННОВАЦИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ»

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC-PRACTICAL CONFERENCE «INFORMATION TECHNOLOGIES: INNOVATIONS IN SCIENCE AND EDUCATION»

Ақтөбе, 2015
Aktobe, 2015

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ және ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Қ.ЖҰБАНОВ атындағы
АҚТӨБЕ ӨҢІРЛІК МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ
Ministry of Science and education of the Republic of Kazakhstan
Aktobe Regional State University named after K. Zhubanov

«АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР: ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ БЕРУДЕГІ ИННОВАЦИЯЛАР»
«Information Technologies: Innovations in Science and Education»

ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ-ПРАКТИКАЛЫҚ КОНФЕРЕНЦИЯ

INTERNATIONAL SCIENTIFIC-PRACTICAL CONFERENCE

МАТЕРИАЛДАРЫ
PROCEEDINGS

АҚТӨБЕ – 2015
АКТОВЕ – 2015

УДК 51:004
ББК 22.1
А37

А37 «Ақпараттық технологиялар: ғылым және білім берудегі инновациялар» халықаралық ғылыми-практикалық конференция материалдары. Ақтөбе, Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, 2015. - 545 б.

ISBN 978-9965-631-25-2

Жинақтағы жарияланған материалдар мазмұны бағдарламалық қамсыздандыруды және аппараттық құралдарды құру және енгізу, дифференциалдық теңдеулер және математиканың қолданбалы мәселелері, математикалық және компьютерлік модельдеу, білім берудегі ақпараттық технологиялар проблемаларының әртүрлі бағыттағы өзекті мәселелерді қамтиды.

ISBN 978-9965-631-25-2

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.С. Касымбекова
Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, Алматы

В работе доказаны теоремы об ограниченности решений краевой и сопряженной задач для нагруженных уравнений параболического типа. Доказанные теоремы представляют интерес с точки зрения теории нагруженных уравнений и могут быть использованы при дальнейшем исследовании задач.

Ключевые слова: нагруженные уравнения, пространства Соболева, обобщенная разрешимость, ограниченность решения.

Постановка задачи. Пусть $\Omega \in R^n$ - ограниченная область с границей Γ, $Q = \Omega \times (0,T),\ \Sigma = \Gamma \times (0,T)$, Γ находится локально по одну сторону от области Ω.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$D_t^1 u = \sum_{i,j=1}^{n} D_{x_i}^1 (a_{ij} D_{x_j}^1 u) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i(t) \int_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) u(\xi,t) d\xi + f \ \ на\ Q, \qquad (1)$$

$$u(x,t) = 0 \quad на\ \ \Sigma, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u_0 \ \ на\ \ \Omega, \qquad (3)$$

где $e_i \in L^\infty(0,T; L^4(\Omega \times \Gamma_i)); \nu_i(t) \in V(0,T), i = 1,...,p, V(0,T)$ - выпуклое, замкнутое подмножество $L^2(0,T)$; Γ_i–$(n-1)$–мерные многообразия из $\overline{\Omega}, n \le 3$ (при $n = 1, \Gamma_i$ - фиксированные точки из $\overline{\Omega}$); $\Gamma_i, i = 1,..,n$ вместе с Γ из $C^2; a_{ij} \in L^\infty(0,T; C^1(\Omega)), a_{ij} = a_{ji}, i,j = 1,...,p$ для почти всех $\{x,t\} \in Q$:

$$\beta_2 \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 \ge \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \zeta_i \zeta_j \ge \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2, \qquad (4)$$

$$\beta_1, \beta_2 = const > 0, \forall \zeta \in R^n,\ \ f \in L^2(Q), u_0 \in H_0^1(\Omega).$$

Вопросы обобщенной разрешимости в пространствах Соболева краевых задач с нерегулярными коэффициентами были рассмотрены в работах [1,2,3]. Были получены априорные оценки, согласно которым доказана корректность и точность выбранных функциональных пространств [3]. Приведем здесь формулировки этих теорем.

Теорема 1.*Пусть выполнены условия (4), тогда задача (1)- (3) при любых* $f \in L^2(Q)$ *и* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *имеет единственное решение* $u \in Y(0,T)$. *Более того, это решение непрерывно зависит от исходных данных, т.е. отображение* $\{f, u_0\} \to u$ *прямого произведения пространств* $L^2(Q) \times H_0^1(\Omega)$ *в пространство* $Y(0,T)$ *непрерывно, где*

$$Y(0,T) = \left\{ u / u \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q) \right\}.$$

Рассмотрим задачу, сопряженную к задаче (1)-(3) при условиях:

$$r \in Y_0', Y_0 = \{u / u \in Y(0,T), r(0) = 0\}, p_1 \in H^{-1}(\Omega). \qquad (5)$$

$$D_t^1 p + \sum_{i,j=1}^{n} D_{x_j}^1 \left(a_{ij} D_{x_i}^1 p\right) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i(t) \delta(x - \Gamma_i) \int_{\Omega} e_i(\xi,x,t) p(\xi,t) d\xi = r(x,t)$$

$$на\ \ Q, \qquad (6)$$

$$p(x,t) = 0 \qquad на\ \ \Sigma, \qquad (7)$$

$$p(x,T) = p_1, \tag{8}$$

где $\delta(x-\Gamma_i)$ - функция Дирака [4]. Для доказательства разрешимости задачи (6)-(8) используется схема 2 из [5].

При условиях теоремы 1 оператор задачи (1)-(3)

$$u \to \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{p} \nu_i(t)\int_{\Gamma_i} e_i u(\xi,t)d\xi$$

определяет гомеоморфизм $Y(0,T) \to L^2(Q)$ [4]. Так как $\nu_i(t) \in V(0,T)$ имеет место гомеоморфизм $Y(0,T) \to V(0,T)$. Следовательно, если $\sigma(u)$ линейная непрерывная форма над $Y(0,T)$, то по теореме Рисса существует единственный элемент $p(\nu) \in L^2(Q)$, для которого

$$\left(p(\nu), \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{p} \nu_i(t)\int_{\Gamma_i} e_i u(\xi,t)d\xi\right) = \sigma(u),\ \forall u \in Y_0. \tag{9}$$

Зададим линейную непрерывную форму:

$$\sigma(u) = \left\langle\left\langle r(x,t), u(x,t)\right\rangle\right\rangle + \left\langle p_1, u(x,T)\right\rangle, \tag{10}$$

где $\langle\langle\ .\ ,.\ \rangle\rangle$ u $\langle\ .\ ,.\ \rangle$ - соотношения двойственности между пространствами Y_0' u Y_0, $H^{-1}(\Omega)$ u $H_0^1(\Omega)$ соответственно. Тогда можно сформулировать утверждение.

Теорема 2**.** *Задача (6)-(8) при любых* $\{r, p_1\}$, *выбранных согласно(5), имеет единственное решение* $p(x,t) \in L^2(Q)$, *удовлетворяющее интегральному тождеству (9)-(10).*

Ниже приведены формулировки теорем, позволяющие оценить состояние системы во всей области. На исходные данные задачи наложены дополнительные условия:

$$f(x,t,\nu) : Q \times R^p \to R^1. \tag{11}$$

Теорема 3. *Пусть для задачи (1)-(3) выполнены условия (4) и* $\nu_i(t) \in L^4(0,T), i = \overline{1,p},$ $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, *тогда для любого обобщенного решения* $u(x,t)$ *из* $Y(0,T)$ *уравнения (1), не превосходящего* $\hat{k}$ *на* $\Sigma_0 = \Gamma \times [0,T]$ *выполнено:*

$$vrai\max_Q u(x,t) \le const.$$

Аналогичное утверждение можно доказать и для сопряженной задачи.

Теорема 4.*Пусть для задачи (6)-(8) выполнены условия (4) и* $\nu_i(t) \in L^4(0,T), i = \overline{1,p},$ $z_з \in L^\infty(\Omega)$, *тогда для любого обобщенного решения* $p(x,t)$, *не превосходящего* $\hat{k}$ *на* $\Sigma_0 = \Gamma \times [0,T]$ *выполнено:*

$$vrai\max_Q\ p(x,t) \le const.$$

Теорема 3 для параболических уравнений без нагруженности доказана в работе [6].

Список литературы

1. Дженалиев М.Т. Краевые задачи для нагруженных дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядков // Докл. НАН РК.- 1993. -№3.- С.8-14.

2. Дженалиев М.Т. О разрешимости краевых задач для линейных нагруженных уравнений с нерегулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1991. –Т.27, № 9. –С.1585-1595.

3. Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.-270 с.

4. Колмагоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.

Наука, 1972.- 496 с.

5. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решения граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. - 1959. Т.14, № 3 (87). С. 21-73.

6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967.-736 с.

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ D-УРАВНЕНИЙ

К.К.Кенжебаев, А.Б. Бержанов, Н.Р.Актаев

Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, г. Актобе

Получено достаточное условие устойчивости по временной переменной многопериодического по части переменных решения нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, многопериодическое решение, устойчивость.

Рассмотрим систему уравнений

$$D_e x \equiv \frac{\partial x}{\partial t} + a(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \varphi} + b(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \psi} = \mathrm{P}(t,\varphi,\psi)x + \mu\left\{Q(t,\varphi,\psi,x,\mu) + \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi)\cdot R(t_1,t,\varphi,\psi,x(t_1,\varphi,\psi),\mu)dt_1\right\}, \quad (1)$$

гдеx,Q,R – n – векторы-столбцы; $\varphi, a(t,\varphi,\psi,\varepsilon) = a^0(t) + \varepsilon a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$ - m-векторы;

$\psi, b(t,\varphi,\psi,\varepsilon) = b^0(t) + \varepsilon b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$ - kвекторы; $\mathrm{P}(t,\varphi,\psi)$, $\mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi)$- $n\times n$- матрицы;

$a\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}, b\cdot\frac{\partial}{\partial\psi}$ - скалярные произведения m,k-мерных векторов a,b и символических векторов $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial\varphi_m}\right); \frac{\partial}{\partial\psi} = \left(\frac{\partial}{\partial\psi_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial\psi_k}\right);$

ε, μ- положительные параметры.

Пусть $t,t_1 \in R$, $\varphi \in R^m = \{\varphi : \|\varphi\| < \infty\}$, $\psi \in R^k = \{\psi : \|\psi\| < \infty\}$,

$$x \in R_\Delta = \{x : \|x\| \le \Delta\} \subset R^n,\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0],\ \mu \in [0,\mu_0].$$

Вектор функцию $f(t,\varphi,\psi) \in R^n$, определенную и непрерывную в R^{1+m+k} назовем многопериодической по части переменных, если она многопериодична по t,φ с вектор периодом $(\theta,\omega) \in R^{1+m}$ равномерно относительно $\psi \in R^k$. Очевидно для такой функции $f(t,\varphi,\psi)$ при любых $(t,\varphi,\psi) \in R^{1+m+k}$ имеет место равенство $f(t+\theta,\varphi+q\wedge\omega,\psi) - f(t,\varphi,\psi) = 0$.

При выполнении определенных условий [1], установлено существование и единственность многопериодического по части переменных решения системы (1).

Выясним теперь условия устойчивости такого решения относительно временной переменной t.

Будем полагать, что выполнены условия (S), если вектор функции $a^0(t), b^0(t)$ периодичны по t с периодом θ; a вектор-функции $a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$, $b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$, $\mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi,x,\mu)$, $Q(t,\varphi,\psi,x,\mu)$ и матрицы $P(t,\varphi,\psi)$, $\mathrm{K}(t_1,t,\varphi,\psi)$ ограничены и непрерывны по $t_1,t,\varphi,\psi,x,\varepsilon,\mu$,обладают ограниченными и равномерно непрерывными частными производными до второго порядка по координатами векторов $\varphi,\psi,\tilde{o}$ при всех $t_1,t \in R$, $\varphi \in R^m$, $\psi \in R^k$, $x \in R_\Delta$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $\mu \in [0,\mu_0]$; вектор функция K диагонально периодична