Международная научная конференция

«Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их приложения»

посвящается 60-летию академика НАН РК
Джумадильдаева Аскара Серкуловича

Тезисы докладов

Алматы - 2016 года

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Председатель Организационного Комитета:
академик НАН РК Кальменов Т.Ш.

[illegible]:
[illegible] (СДУ), член-корр. НАН РК Байжанов Б.С. (ИММ М), [illegible] (КазНУ)

Члены Организационного Комитета:
[illegible], профессор Асанова А.Т. (ИММ М), акаде- [illegible] Ш.А. ([illegible], Институт математики), профессор [illegible], профессор [illegible] Д.Б. (ИММ М), доцент Бекенов М.И. [illegible], профессор Вербовский В.В. (ИММ М, [illegible], профессор [illegible] Н.С. (ИММ М, КБТУ), [illegible], профессор [illegible] Д.С. (ИММ М), про- [illegible] (ЕНУ), член-корр. НАН РК [illegible], профессор [illegible] А.Б. (КазНУ), про- [illegible], член-корр. НАН РК [illegible] Р.О. (ЕНУ), [illegible], член-корр. НАН РК Садыбеков М.А. [illegible], академик РАН [illegible] И.А. (Россия, [illegible]), профессор [illegible] Д.А. (ЕНУ), член-корр. НАН РК [illegible], академик НАН РК Харин С.Н. [illegible], профессор [illegible] Н.Г. ([illegible] технический [illegible]), профессор [illegible] ([illegible], Университет Сан Пауло).

СЕКЦИИ

1. Алгебра, [illegible] логика и геометрия
Руководитель секции — д.ф.-м.н., профессор Б.С. Байжанов

2. Теория функций и функциональный анализ
Руководитель секции — д.ф.-м.н., профессор Д.Б. Базарханов

3. Теория дифференциальных уравнений и их приложения
Руководитель секции —д.ф.-м.н., профессор М.Т. Дженалиев

4. Математическое моделирование и уравнения математической физики
Руководитель секции —д.ф.-м.н., профессор Л.А. Алексеева

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Литература

1. *Гончаров С.С., Сорби А.* Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. - 1997. - Т. 36, №6. - С. 621-641

2. *Бадаев С.А., Гончаров С.С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. - 2001. - Т. 40, №5. - С. 507-522

3. *Бадаев С.А., Гончаров С.С.* Обобщенно вычислимые универсальные нумерации // Алгебра и логика. - 2014. - Т. 53, №5. - С. 555-569

4. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. - Москва: Наука, 1977. - 416 с.

5. *Issakhov A.* A-computable numberings of the families of total functions // Book of abstracts of the International Conference Logic Colloquium. - Helsinki, Finland, August 3-8, 2015. - P.745.

6. *Soare R.I.* Recursively enumerable sets and degrees // - Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1987. - 437 p.

7. *Miller W., Martin D.A.* The degree of hyperimmune sets // Z. Math. Logik Grundlag. Math. - 1968. - Vol.14. - P.159-166.

Калмурзаев Б.С.

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби (Казахстан, Алматы)

e-mail: birzhan_mm@mail.ru

О полурешетках Роджерса двухэлементных семейств множеств 2-го уровня иерархии Ершова

Исследование вычислимых семейств множеств иерархии Ершова было инициировано работами [1], [2], в которых был предложен общий подход к введению понятия вычислимой нумерации для широкого класса семейств конструктивных объектов и сформулирована программа их изучения в терминах свойств так называемых полурешеток Роджерса. В работе [3] показано что полурешотка Роджерса двухэлементного семейства вложенных вычислимо перечислимых (в.п.) множеств бесконечно. А если в конечном семействе в.п. множеств любая пара множеств не вложены, тогда полурешетка Роджерса этого семейства будет одноэлементной.

Полученные к настоящему времени результаты о полурешетках вычислимых нумераций семейств множеств иерархии Ершова выявили новые феномены, не присущие классическим вычислимым нумерациям семейств в.п. множеств. В частности, было доказано существование семейств, состоящих из двух вложенных множеств, полурешетка Роджерса которых одноэлементна [4].

Понятие n-вычислимо перечислимого (n-в.п.) множества было предложено C.J. Ash, J.F. Knight в индуктивной форме [5]: 1-*в.п.* множества – это в точности в.п. множества, а каждое $(n+1)$-*в.п.* множество – это разность некоторого в.п.

и некоторого n-в.п. множеств. n-в.п. множества образуют уровень Σ_n^{-1} иерархии Ершова [6], о них также говорят как о Σ_n^{-1}-множествах.

Сюръективное отображение α множества натуральных чисел ω на непустое множество $\mathcal{A}$ называется нумерацией множества $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}$ – семейство множеств из уровня Σ_n^{-1}, $n \geq 1$, иерархии Ершова. Нумерация $\alpha : \omega \to \mathcal{A}$ называется Σ_n^{-1}-*вычислимой*, если

$$\{\langle x, n\rangle | x \in \alpha(n)\} \in \Sigma_n^{-1}.$$

Ясно, что понятие Σ_1^{-1}-вычислимой нумерации совпадает с классическим понятием вычислимой нумерации семейства в.п. множеств [3]. Множество всех Σ_n^{-1}-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$. Нумерация α семейства $\mathcal{A}$ *сводится* к нумерации β этого семейства (символически $\alpha \leq \beta$), если существует рекурсивная функция f, для которой $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то нумерации α и β называются эквивалентными ($\alpha \equiv \beta$). Обозначим через $\deg(\alpha)$ *степень нумерации* α, т.е. совокупность нумерации $\{\beta | \beta \equiv \alpha\}$. Отношение сводимости нумерации является предпорядком на $\mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$ и индуцирует отношение частичного порядка на множестве степеней нумерации из $\mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$, которое также будем обозначать через $\leq$. Частично упорядоченное множество

$$\mathcal{R}_n^{-1}(\mathcal{A}) \rightleftharpoons \langle\{\deg(\alpha) | \alpha \in \mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})\}, \leq\rangle$$

является верхней полурешеткой, и называется полурешеткой Роджерса семейства $\mathcal{A}$.

Следующая теорема утверждает, что существуют Σ_2^{-1}-вычислимые семейства такие, что полурешетка Роджерса 2-го и 3-го уровня иерархии Ершова этого семейства не изоморфны.

Теорема 1. *Найдется двухэлементное семейство Σ_2^{-1}-множеств $S = \{A, B\}$ такое, что $|\mathcal{R}_2^{-1}(S)| = 1$ и $|\mathcal{R}_3^{-1}(S)| > 1$.*

В то же время не для всех двухэлементных семейств Σ_2^{-1}-множеств утверждение теоремы 1 остаётся верной.

Теорема 2. *Найдется двухэлементное семейство Σ_2^{-1}-множеств $S = \{A, B\}$ такое, что $|\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})| = |\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})| = 1$.*

Следствие. *Существуют бесконечно много различных двухэлементных семейств такие как в теореме 1 и бесконечно много различных двухэлементных семейств такие как в теореме 2.*

Литература

1. *Гончаров С.С., Сорби А.* Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. -1997, -Т. 36, No 6. -С. 621-641.

2. *Badaev S.A., Goncharov S.S.* Theory of numberings: open problems// Computability theory and its applications. -2000. -T. 257, C. 23-38.

3. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. Москва: Наука, 1977. -416 с.

4. *Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T.* Computable numberings in the hierarchy of Ershov // in: Goncharov, S.S. (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian logic conference (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005), NJ, World Scientific, -2006, -C. 17-30.

5. *Ash C.J., Knight J.F.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. -Amsterdam etc.: Elsevier, 2000. -346 c.

6. *Ершов Ю.Л.* Об одной иерархии множеств I// Алгебра и логика. -1968. -Т. 7, No 1. -С. 47-74.

УДК 512.714

Керімбаев Р.К., Нұрпейіс Ж.
әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті (Қазақстан, Алматы)
e-mail: Ker_im@mail.ru; aladinnur@mail.ru

Сызықты тәуелді көпмүшелер

Көпмүшелердің алгебралық тәуелсіз болуы үшін олардың Якобианы нөлден өзгеше болуы қажетті және жеткілікті болатындығы белгілі. Бізді қызықтыратыны көпмүшелердің сызықты тәуелді болуы. Бір айнымалы жағдайында көпмүшелер сызықты тәуелді болу үшін ең алдымен олардың дәрежелері бірдей болуы қажет. Мәселен, дәрежелері бірдей бір айнымалы екі көпмүше сызықты тәуелді болу үшін олардың сәйкес коэффициенттері пропорционал болуы қажетті және жеткілікті. Енді осы тұжырымды көпмүшелердің қандай да бір көбейту амалы арқылы өрнектеуге бола ма деген сұрақ туындайды? Бұл сұрақтың жауабы оң болады екен. Дәлелдеу үшін біз көпмүшелердің келесі көбейту амалын енгіземіз:

$$[f(x), g(x)] = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \tag{1}$$

мұндағы $f'(x), g'(x)$ - берілген функциялардың туындылары.

$f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелері сызықты тәуелді болу үшін олардың (1) формуламен берілген көбейтіндісі нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті. Біз өріс үстіндегі сызықтық тәуелділікті қарастырамыз.

$f(x,y), g(x,y)$ - екі айнымалылы екі көпмүше болсын. Осы көпмүшелердің сызықты тәуелді болу жағдайын зерттейміз. Келесі теорема орынды.

Теорема 1. Егер $f(x,y)$ және $g(x,y)$ дәрежелері бірдей біртекті көпмүшелер болса, онда олардың сызықты тәуелді болуы үшін олардың Якобианы нөлдік көпмүше болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Қажеттілік. Егер олар сызықты тәуелді болса, онда олардың Якобиандарының қатарлары да сызықты тәуелді. Сондықтан олардың Якобиандары нөлдік көпмүше. Жеткіліктік. Енді олардың Якобианы нөлдік көпмүше болсын. Егер $deg(f) = deg(g) = n$ болса, онда $f(x,y) = y^n f(t), g(x,y) = y^n g(t)$ болады, мұндағы $t = \frac{x}{y}$. Енді Якобианды есептейміз.

$$0 = f_x g_y - f_y g_x = \begin{vmatrix} y^n f'(t)\cdot t_x & ny^{n-1}f(t) + y^n f'(t)\cdot t_y \\ y^n g'(t)\cdot t_x & ny^{n-1}g(t) + g^n f'(t)\cdot t_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y^n f'(t)\cdot t_x & ny^{n-1}f(t) \\ y^n g'(t)\cdot t_x & ny^{n-1}g(t) \end{vmatrix} = ny^{2n-1}\cdot t_x(f'(t)g(t) - f(t)g'(t)).$$

мұндағы $t_x = \frac{1}{y}, t_y = -\frac{x}{y^2}$. Осыдан $f'(t)g(t) - f(t)g'(t) = 0$

Бұдан $lnf(t) = lncg(t)$ теңдігін аламыз. Ендеше $f(t) = cg(t)$, мұндағы -тұрақты сан. Сонымен $f(x,y) = y^n f(t) = cy^n g(t) = cg(x,y)$.

Ягни $f(x,y)$ пен $g(x,y)$ көпмүшелері сызықты тәуелді. Теорема дәлелденді.

Егер $f(x,y)$ және $g(x,y)$ дәрежесі бірдей, бірақ біртекті көпмүшелер болмаса, онда олар сызықты тәуелді болу үшін, олардың Якобианы нөлдік көпмүше болуы жеткіліксіз. Мәселен $f(x,y) = x + x^2, g(x.y) = x + 2x^2$

Бұл көпмүшелер сызықты тәуелсіз, себебі

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Бірақ

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2x & 0 \\ 1+4x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Теорема 2. $f(x,y), g(x,y)$ көпмүшелері сызықты тәуелді болу үшін олардың Якоби матрицасы нильпотентті болуы жеткілікті.

Бұл теорема көпмүше екі айнымалылы жағдайында орындалғанымен көпмүше үш айнымалылы жағдайында орындалмайды. Жалпы жағдайда келесі теорема орындалады.

Теорема 3. Егер $f_1, f_2, \ldots, f_n$ көпмүшелері n-айнымалы біртекті, дәрежелері бірдей және Якоби матрицасы нильпотентті көпмүшелер болса, онда олар сызықты тәуелді [1].

Егер $f_1, f_2, \ldots, f_n$ көпмүшелері біртекті болмаса, онда олар сызықты тәуелді болуы үшін, олардың Якоби матрицасы нильпотентті болуы жеткіліксіз [1].

Әдебиеттер

1. *Arno Van den Essen.* Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture., Birkhauser., 2000.

Керимбаев Р.К.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, (Казахстан, Алматы)
e-mail: ker_im@mail.ru

Максимальные идеалы и автоморфизмы кольца многочленов

Речь идет о максимальных идеалах и P-автоморфизмах кольцо многочленов $P[x_1, x_2, ..., x_n]$. Если многочлены $f_1, f_2, ..., f_n \in P[x_1, x_2, ..., x_n]$ задают P-автоморфизмы кольцо многочленов, то они образуют максимальные идеалы в кольце многочленов. Более того, данные многочлены имеют единственный общий корень кратности 1 для всех многочленов $f_1, f_2, ..., f_n$ и эти многочлены обладают обратимым якобианом. Как известно, максимальные идеалы являются простыми. А идеал является простым тогда и только тогда, когда соответствующее алгебраическое многообразие неприводим. Над алгебраически замкнутым полем алгебраическое многообразие максимальных идеалов состоит из одной точки. В