

КІРІСПЕ

Аспан механикасы - әртүрлі табиғат құбылыстарының күштері әсерінен болатын аспан денелерінің қозғалысын зерттейтін ғылым. Әсер етуші күштердің көптеген түрлері бар, мысалы денелердің өзара тартылыс күштері, ортаның кедергісінен, жарықтық қысымнан, электромагниттік әсерлесуден, аспан денесі құралған заттың сублимациясынан пайда болатын күштер. Жұлдыздар мен үлкен планеталардан бастап кішкентай шаң бөлшегіне дейін денелер бір - бірінен құрылымы мен өлшемі бойынша ажыратылады. Денелер табиғи және жасанды болуы мүмкін. Жасанды денелерге Жердің, Айдың және үлкен планеталардың жасанды серіктері мен планетааралық ғарыштық аппараттары жатады. Аспан механикасында аспан денелерінің орбиталдық қозғалысымен қоса олардың айналмалы қозғалысы мен осы денелердің фигуралары және гравитациялық өрістері зерттеледі.

Ғылым тарихында аспан механикасы маңызды рөл атқарған. Оның алдында қойылған мақсаттар, математиканың дамуына үлкен әсер етті. Сондықтан, бұл ғылымды дамытқан ғалымдардың көбі - математиканың дамуына көп үлесін қосқан ғалымдар.

Аспан механикасының негізін қалаушы ғалым - Исаак Ньютон. Ол бүкіләлемдік тартылыс заңын ашқан және бір біріне тартылатын екі нүктелік массалардың орбитасын анықтап, осы орбита бойындағы қозғалыстын Кеплер заңдарына бағынатынын көрсеткен. Және механиканың дифференциалдық теңдеулерін құрастыру арқылы ұйтқымалы қозғалысын зерттеу жолдарын көрсеткен. Осыған байланысты И. Ньютон қажетті дифференциалдық және интегралдық есептеулерді жасады.

И. Ньютоннан кейін аспан механикасының дамуына келесі әйгілі математик-ғалымдар үлес қосқан: Клеро, Эйлер, Лагранж, Лаплас, Гаусс, Леверье, Адамс, Пуанкаре, Ляпунов, Зундман, Колмогоров, Арнольд, Мозер және т. б..

Алғаш рет «аспан механикасы» терминін 1799 ж. Пьер Лаплас енгізді.

19 ғасырда аспан механикасының негізгі мақсаты ретінде Ньютонның тартылыс заңын дәлелдеу болды. Сол үшін үлкен планеталар мен Айдың қозғалыстарының жаңа және дәлірек қозғалыс теориялары құрастырылып бақылау нәтижелерімен салыстырылды.

Ең әсерлі нәтижеге Леверье қол жеткізді: ол анықтаған үлкен планеталардың теориялары толық және дәл болғандықтан, Францияның астрономиялық жылнамасында жарияланды. Леверье Уран планетасының қозғалысының ауытқуын анықтап, ол Уранның ар жағында орналасқан белгісіз планетаның нәтижесі деген шешімге келді. Бұл ауытқуды зерттеу арқылы ол белгісіз планетаның орбитасын анықтап, оның аспандағы орнын анықтады. Леверьенің мәліметтері бойынша планета табылып, Нептун атауына ие болды. Сол уақытта осындай зерттеулерімен айналысып, бірақ басқа әдіс арқылы, Леверье мағлұматтарынан дәлірек мәліметтерді бір ай бұрын анықтаған ағылшын ғалым Адамс болды. Леверье жаңа планеталардың жылдамдық ашу

жолына көбірек көңіл бөлгендіктен, бұл жаңалық Леверьеге тиесілі болды. Бұл драмалық оқиға "қауырсын ұшындағы Нептунның ашылуы" атын алды. Кейінірек, 20 ғасырда сондай әдіспен Плутон планетасының ашылуы болды.

Леверьеден кейін үлкен планеталардың қозғалыс теориясын дәлірек құрастыру жұмыстарын Ньюком (АҚШ) қолына алды. 19 ғасырдың соңында Айдың қозғалысының жаңа теориясының құрылуын қолға алған Браун болатын. Осы жаңа теориялар да ұзақ жылдар бойы астрономиялық жылнамалардың негізін қалады. Осы теориялардың жоғары дәлдігі арқылы Ай және үлкен планеталардың қозғалыстарындағы аз мөлшердегі ауытқуларын астрономдар анықтады.

Осы әдіс арқылы Жердің айналмалы қозғалысының біртекті еместігі анықталды. Ал оның алдында Галлея кометасын осындай әдістер қолдана отырып зерттеген. 18 ғасырда Клеро (Франция) өзінің көмекшісі Гортензия Лепотпен бірге, есептеулер арқылы, Галлея кометасының ұйтқымалы орбитасын анықтады. Кометаның Күнді айналу периоды 75 жыл және қайтадан қай жақтан көрінетінін болжады. Ол кометаның перигелий арқылы өтуінде 4 тәулікке ғана қателесті. Бұл қателік негізгі екі факторға байланысты болды: біріншіден, кометаның бастапқы орбиталдық элементтері дәлірек болмады; екіншіден, кометаның қозғалысына әсер ететін күштер толығымен ескерілмеді, сол кезде үлкен планеталар Нептун мен Плутон ашылмаған. Кейінірек, 20 ғасырдың басында Коуэлл (Англия) Галлея кометасының орбитасын жоғары дәлдікпен анықтап, кометаның 1910 жылы пайда болғанын болжады. Оның болжамы перигелий арқылы өту мезеті 1 тәулікке қателік берді.

1801 жылдың басында Пиацци (Италия) ең алғаш кіші планета - Церераны ашты. Осы планетаның бірнеше бақылаулары алынды, бірақ ол кезде орбитаны аз бақылаулардың нәтижесінде ешкім есептей алмады. Планетаның қозғалысын болжай алмағандықтан, оны жоғалтып алу қорқынышы туды. Осы мәселені шешумен жас математик К. Ф. Гаусс айналысты. Қысқа уақыт ішінде ол ұйтқысыз орбитаны үш бақылау арқылы анықтаудың әйгілі әдісін тапты. Ол өзінің әдісі арқылы Церераның орбитасын анықтап, эфемеридасын берді. Оның қозғалыс болжамы бойынша, ауа райына байланысты көп уақыт көрінбей кеткен, планета қайтадан табылды. К. Ф. Гаусстың осыдан басқа көптеген еңбектері, астрономиядан бөлек, көп ғылымдардың негізгі құраушысы ретінде қолданылады. Қазіргі таңда 50 000 астам кіші планеталар ашылды. Олардың басым бөлігі Марс және Юпитер орбиталардың арасында қозғалады және астероидтардың негізгі жолағының құрамына кіреді. Күн жүйесінің шеткі алыс аймақтарында, Уран, Нептун және Плутон орбиталардың ар жағында ашылған астероидтардың бөлігі қозғалады. Бұл астероидтардың жиынтығы - Койпер белдеу деп аталады. Юпитер және Уран орбиталардың арасында Кентавр атты астероидтардың жиынтығы бар. Қазіргі уақытта олардың саны 20-ға жуық. Болашақта тағы осы топтын астероидтары ашылуы мүмкін. Тағы Жер орбитасына жақын және кейбіреулерінің орбиталары қиылысатын астероидтар бар. Оларды Жерге жақындайтын астероидтар деп атайды. Сонғы жылдары ғалымдар астероидтардың Жермен соқтығысу қауіптілігіне көңіл бөлуде.

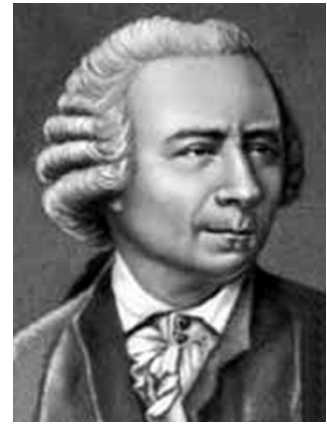
Өйткені, есептеулер бойынша, үлкен емес астероидтармен соқтығысу кезінде, Жер табиғатына зияны өте үлкен болады. Осыған байланысты барлық мемлекеттерде арнайы зерттеулер мен бақылаулар өткізіліп жатыр.



а) Сэр Исаак Ньютон
(1643-1727)



ә) Клеро Алекси Клод
(1713-1765)



б) Леонард Эйлер
(1707-1783)



в) Жозеф Луи Лагранж
(1736-1813)



г) Лаплас Пьер
(1749 - 1827)



ғ) Урбен Жан Жозеф
Леверье (1811-1877)



д) Карл Фридрих Гаусс
(1777-1855)



е) Альберт Эйнштейн
(1879-1955)



ж) Шази Жан Франсуа
(1882-1955)

1 сурет – Аспан механикасының негізін қалаушы-ғалымдар

Аспан механикасының қызықты объектілер ретінде кометалар қарастырылады. Олардың орбиталары ұзаққа созылған және Күн айналу периодтары өте үлкен болады. Күн радиация әсерінен комета затының сублимациясы байқалады, осы кезде реактивті күш пайда болады. Комета қозғалысына әсер ететін гравитациялық емес эффектілердің пайда болуы осы күшке байланысты. Бұл күш көптеген факторларға тәуелді болады: ядроның айналуына, комета затының химиялық құрамына, ядроның пішініне, комета бетін шаң бөлшектерінің жамылу дәрежесіне. Қазіргі уақытта аспан механикасының өзекті бағыты - гравитациялық емес күштерді және олардың эффектілерін зерттеу.

Алғашқы жасанды Жер серігін 1957 жылы Совет Одағы мемлекеті ғарышқа ұшырды. Содан кейін басқа да мемлекеттерден де жасанды серіктер мен ғарыштық аппараттары іске қосылды. Алғаш рет Апполон американдық жобасы бойынша адамдар Айдың бетіне түсті. Жасанды серіктерден мәліметтерді алу арқылы және аспан механикасының әдістерін қолдана отырып көптеген мәселелер шешілді.

20 ғасырдың басында А. Эйнштейн салыстырмалық теориясын құрастырды. Бұл жаңа физиканың фундаменті болды. Осының арқасында көптеген бұрын сипатталмаған құбылыстарға түсініктеме берілді. Ең атақтысы Меркурий планетасының перигелийдің қозғалысы болды. Бастапқы бақылау дәлдігі төмен болғандықтан, осы теория аспан механикасында аз мөлшерінде қолданылды. Қазіргі уақытта, бақылау дәлдігі жоғарлаған сайын және бақылаудың жаңа түрлері қолданыста болғандықтан, салыстырмалық теориясының эффектілерін ескеру қажетті болды. Осы бағытта көп үлес қосқандардың бірі В. А. Брумберг болды.

Аспан механикасының жетістіктері теоретикалық мәселелерді шешумен де байланысты болды. Лагранж, үш дене есебімен айналысқанда, үш дененің эллипстік қозғалыстары ортақ инерция центрі айналысында болу мүмкіндігін анықтаған. Бұл жағдай – периодтық ұйытқымалы қозғалыстың айқындалуы, алғашқы рет аспан механикасы тарихында болды. Осы Лагранж қозғалысы көптеген астероидтардың қозғалысына сәйкес келді.

19 ғасырдың соңында, Пуанкаре үш дене есебінің периодты шешімінің бірнеше жаңа класстарының болуын дәлелдеді.

20 ғасырдың ортасында КАМ (Колмогоров, Арнольд, Мозер) теориясы пайда болды. Бұл теорияда жаңа тәсілдер арқылы аспан механикасындағы көптеген денелердің периодтық шешімдері дәлелденді.

Үш дене есебі мәселесін шешуге Зудманның зерттеулері көп үлес қосты. Ол, егер үш дене есебінде үштік соқтығысу болмаған кезінде, қозғалыс теңдеулерді регулярлы ретінде қарастыру мүмкіндігін көрсетті. Сонда осы теңдеулердің шешімін уақыттың шексіз интервалында жинақталатын қатарлар ретінде алуға болады. Зудман идеялары Кустаанхеймо мен Штифельдің құрастырған қозғалыс зерттеу әдістерінде қолданылады, әсіресе кіші дененің үлкен планетаға жақындау кезіндегі қозғалыста.

20 ғасырдың бірінші жартысында Шази (Франция) екі дененің үш дене есебінде әсерлесуін қарастырды. Ол осы денелердің мүмкін болатын қозғалыстарын топтастырып көрсетті. Кейінірек, Шази теориясының кейбір қателіктері О. Ю. Шмидттің есептеулері арқылы дәлелденді.

Осы мәселенің шешімін табу үшін көп үлес қосқан Г. Ф. Хильми және Г. А. Мерман болды. Кейіннен бұл мәселенің шешімі В. М. Алексеевтің, Л. Л. Соколовтың жұмыстарында қарастырылады. Шази және оның жұмыстарын жалғастырушылардың нәтижелері ғарыштық аппараттардың гравитациялық маневрлердің заманауи теориясында қолданыста. Гравитациялық маневр ретінде ғарыштық аппараттың үлкен планета маңында ұшу кезіндегі траекторияның бұрылуы. Бұрылу - планетаның гравитациялық өрісінен іске асады және ғарыш аппаратының энергия шығындары азаяды, бірақ ұшы уақыты ұлғаяды.

1959 жылы бір уақытта бірнеше басылымдарда ЖЖС қозғалысының аналитикалық теориялары Д. Брауэр (АҚШ), Й. Козаи (АҚШ), В.Ф. Проскурин және Ю. В. Батраков (КСРО) мақалаларында жарияланды. Осы теориялардың барлығы бақылаулар бойынша алғашқы ЖЖС орбиталарын анықтау үшін қолданылған.

1959 жылы ең алғаш америкалық ЖЖС Питер Музен анықтаған теория арқылы жіберілгенін және Ганзен идеясымен қолданғанын айта өткен жөн. Музен теориясы бойынша кез келген қажетті дәлдігін алу мүмкіндігі болатын, бірақ бір ғана кемшілігі болды – әр ЖЖС үшін теория қайтадан құрастырылады. Сондықтан, көптеген серіктердің бақылаулардың нәтижелерін бірден өңдеу үшін қолдануға болмайды. Осы себептен Брауэр теориясы қолданылды.

20-шы ғасырдың 60-шы жылдарында аспан механикасын зерттеушілердің мәскеулік тобы жалпыланған екі қозғалмайтын орталық есебі негізінде ЖЖС қозғалыс теориясын құрастырды.

Соңғы уақытта ұйытқымалы қозғалысты жанасатын қозғалыс ретінде қарастыру теориясы қайтадан жаңадан даму кезеңіне өтті. Осы теорияның негізгі қалаушылары Ньютон, Эйлер, Лагранж және Гаусс ғалымдары болған. Соңғы кезде осы бағытта Ю. В. Батраков пен В. А. Шефер кейбір жағдайлар үшін жалпы теориясын құрастырды.

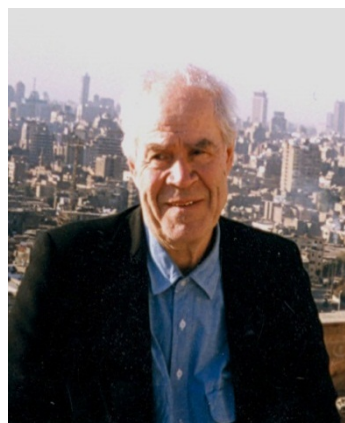
Қазақстан Республикасында аспан механикасының мәселелерімен қазақ ғалымы Т. Б. Омаров айналысты. Оның маңызды зерттеулері галактикалардың динамикасы және олардың жүйелері саласында болды. Ол диссипациядағы жұлдыз жүйесі үшін Лагранж-Якоби теңдеуінің жалпыламасын, азайып жатқан гравитациясы бар әлемінде галактикалар шоғырланулардың динамикалық қасиеттерін, сақталмайтын жалпы энергиясы бар гравитациялық жүйесінің таралу функциясының құрастыру тәсілін анықтады.

Тағы аспан механикасының Қазақстанда дамуына үлес қосқан қазақстандық ғалым Г. М. Идлис болды. Ол жұлдыз жүйесінің динамикасын зерттеді. О. Ю. Шмидттің планеталар қашықтық заңының бұрыс екенін және В. Г. Фесенковтың планеталардың регулярлы серіктері үшін планеталар

қашықтық заңын дұрыс екенін көрсетті. 1954 жылы алғашқы рет Галактиканың екі соңғы - сфералық және жазық аналитикалық модельдерін дәлделдеген потенциалымен ұсынды. Осы модельдер «Идлис модельдері» деп атанды.



а) Тукен Бегалыұлы
Омаров
(1935-2013)



ә) Григорий
Моисеевич Идлис
(1928-2010)

2 сурет – Қазақстандағы аспан механикасының негізін қалаушы-ғалымдар

I. АСПАН МЕХАНИКАСЫНА КІРІСПЕ

1.1 Негізгі ұғымдар

Табиғи күштер әсерінен аспан денелерінің қозғалысын зерттейтін астрономияның бөлімін *аспан механикасы* деп айтамыз.

Зерттеу объектісі ретінде ғарыштық шаңның кішкентай бөлшектерден құрылған материалдық құрылымдардан бастап гиганттік жұлдыздардың шоғырлануы, галактикалар мен галактикалардың жиынтығына дейін қарастырылады.

Аспан механикасының мақсаты - аспан денелерінің механикалық қозғалыстырын басқаратын табиғаттың заңдарын түсіндіру.

Зерттеу әдістері ретінде аналитикалық, сандық және сапалық әдістер қолданылады. Аспан денелерінің белгіленген уақыт мезетіндегі жылдамдығы мен кеңістікте орналасуын есептейтін аналитикалық теңдеулерінің жиынтығын *аналитикалық әдістер* арқылы құрастыруға болады. Бірақ осы әдістің кемшіліктері бар, ол теңдеулердің күрделілігі, ұзақ және күрделі шығару жолдары, қолдануы шектеулі (ғарыштық объектілеріне байланысты), ұзақ уақыт интервалдарында зерттеліп жатқан қозғалыстардың қасиеттерін анықтау мүмкіндігі жоқ. Алдын ала берілген дәлділігімен аспан денелерінің және олардың жүйелерінің қозғалыстарын есептеу үшін *сандық әдістер* арналған. Осы әдісте де келесі кемшіліктер кездеседі: интегралдау интервалдарының өсуімен қателіктердің көбеюі; қозғалыстың күйін сипаттауға мүмкіндігі жоқ, өйткені нәтижелері сан ретінде болады. Аналитикалық және сандық әдістерімен теңдеулердің толығымен шешімін анықтамай, аспан денелерінің қозғалыстарының қасиеттерін білу үшін *сапалық әдістер* қолданылады. Аспан механикасында барлық әдістер кең қолданылады.

Классикалық аспан механикасының *физикалық негіздері* ретінде Ньютон механикасы, кеңістік, уақыт және тартылыс теориясы болады.

Аспан механикасында аспан денелерінің белгілі жағдайларына тәуелді қозғалыстарын сипаттау үшін, әртүрлі *физикалық модельдер* - *идеалдалған ғарыштық объектілер* қолданылады. Ал реалды аспан денелер жүйесінің қозғалыстарын жақындатып сипаттайтын *механикалық модель*. Механикалық модельде қозғалыстағы объектілердің құрамы, қасиеттері және модельдің компоненттеріне әсерететін күштер қарастырылады. Механикалық модель аспан денелерінің қозғалыстарын жақындатып бейнелеу үшін және қозғалыстың дәлірек әдістерін әзірлеу үшін қолданылады.

Аспан механикасының есебі: әртүрлі механикалық модельдерді құрастыру мен зерттеу және реалды аспан денелерінің қозғалыстарын зерттеу мен сипаттау.

Аспан механикасында қолданылатын *негізгі түсініктер*:

1. *Материалдық нүкте*

Егер массасы мен жылдамдығы бар дененің өлшемі, пішіні және ішкі құрылымы қарастырылып жатқан есебінде ескерілмесе бұл дене - *материалдық нүкте* деп аталады.

2. Санақ денесі мен жүйесі

Егер нақты аспан денесін көрсететін материалдық нүктенің орналасуы, кез келген таңдаулы аспан денесін салыстырмалы ретінде анықтайтын денені – *санақ денесі* деп айтамыз.

Қарастырылған уақыт мезетінде зерттеу объектінің орналасуы мен жылдамдығын сипаттайтын санақ денесі, координат және сағат жүйесінің жиынтығын *санақ жүйесі* деп айтамыз.

3. Орбита

Материалдық нүктенің сызығын кеңістікте сипаттайтын немесе қарастырылған уақыт интервалында аспан дененің орналасу геометриялық орның *аспан денесінің қозғалу траекториясы* немесе *орбита* деп айтамыз.

4. Қозғалыс заңдары

Кинематикалық теңдеулерімен берілген зерттеу объектінің қозғалыс күйінің уақытқа белгілі тәуелділігі немесе траекторияның параметрлік теңдеулері *қозғалыс заңдары* деп айтамыз.

Аспан механикасында ілгерілемелі-айналмалы, салыстырмалы, барицентрлік, жазықтық және шеңберлік қозғалыстардың түрлері қарастырылады. Егер аспан денелерінің пішіндері мен өлшемдері ескеретін болса *ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс* туралы айтады. Екі дене есебінде, егер санақ жүйесі бір дененің масса центріне орналасса *салыстырмалы қозғалысты* қарастырады. Екі дене есебінде, егер есептеу жүйесі екі дененің масса центріне орналасса *барицентрлік қозғалыс* туралы айтамыз. Үш одан да көп материалдық нүктелерінің қозғалыстарын қарастыратын қозғалыс *жазықтық қозғалыс*. Шектеулі үш денелерінің есебінде екі ғана дененің қозғалысын *шеңберлік қозғалыс* ретінде қарастырады.

5. Бақылау

Аспан денелері туралы *негізгі ақпарат* - *бақылаулар* арқылы алынады. Бақылау кезінде әртүрлі шамалар өлшенеді. Өлшеулерді әртүрлі құралдар мен қондырғылар арқылы жасайды. Мысалы: фототаспаларында аспан денелерінің бейнелерінің арасындағы арақашықтығы, шалаөткізгіш заттан жасалынған жарық қабылдағыштың бөлек пиксельдің жарық түсіру қарқындылығы және т.б..

Бақылау құралдардың қателіктері болады. Оларды систематикалық қателіктері деп айтады.

Өлшеулердің және бақылауды жасап отырған адамның қателіктері болуы мүмкін. Бір ғана өлшеудің қателігі белгісіз болады. Қателіктерді кездейсоқ пайда болады деп қарастырады. Сондықтан нақты нәтижені алу үшін өлшеулердің статистикасын толықтырады. Астрономияда көбінесе өлшенетін шаманың ортаквадраттық қателіктерін ескереді. Осы барлық қателіктерді бақылау қателіктері деп атайды.

6. Уақыт

Аспан денелері қозғалыста болғандықтан уақыт бойынша өлшенетін шамалар өзгермелі болады. Өлшеулерді белгілі уақытта жасайды. Уақыт мезетін обсерватория сағатымен бастап санайды. Уақыт – абстракты түсінік, оны анықтау үшін арнайы өлшеуіш құралдар қажет. Кез келген құралдың өлшеу қателігі болады.

Жалпыәлемдік уақыт – UT – Жердің айналу бұрышымен өлшенетін уақыт. Жердің айналуы біртекті болғандықтан, теорияның бақылауменен айырмашылығы байқалған соң осы уақытты кең қолданбайды.

Эфемеридалық уақыт – ET – Айдың қозғалысын бақылауменен өлшенетін уақыт. Бірақ Айдың бақылау дәлдігі шектеулі.

Атомдық сағат – IAT – халықаралық атомдық уақыт - дәлдігі жоғары бірнеше атомдық сағат бойынша уақыттың орташа мәні.

Қазіргі уақытта астрономиялық өлшеулердің дәлдігі жоғары деңгейіне жеткендіктен, Ньютон механикасының аспан денелерінің бақыланатын қозғалыстарымен айырмашылығы байқалатын болды. Жалпы салыстырмалы теориясында кеңістіктегі екі әртүрлі нүктенің уақыты әртүрлі болатыны белгілі. Олардың уақыттардың шкаласын байланыстыру үшін денелердің массасы мен қозғалысын ескеру қажет.

7. Қозғалыс параметрлері

Планеталарды және олардың серіктерін, жұлдыздарды және галактикаларды зерттеу кезінде, біз аспан денелердің және қозғалыстардың кейбір параметрлерін уақыт бойынша тұрақты болып қалады деп болжау ретінде қарастырамыз. Бұл параметрлер: дененің массасы, өлшемі және пішіні; орбитаның сипаттамалары және т.б.. Осы параметрлерді тікелей өлшеуге болмайды, бірақ олар аспан денелерінің бақыланатын қозғалысында өздерін нақты көрсетеді.

Аспан денелерінің қозғалыс кезінде көрінетін тұрақты сипаттамалары: дененің массасы, өлшемі, пішіні, орбитаның параметрлері және т.б. ***қозғалыс параметрлері*** деп аталады.

8. Координаттар жүйесі

Жалпы қозғалыс заңдардың теңдеулерін құрастыруға және денелер жүйесінің конфигурациясын көрнекі бақылауға өлшенетін шамалар бере алмайды. Денелердің кеңістікте орналасуын және аспан шырақтарына бағытталуын көрсететін ыңғайлы бейнелеу әдісі – координаттар жүйесі. Кейбір координаттар жүйесіндегі шырақтың орналасуы немесе дененің бағытталуы туралы айтқан кезінде, аспандағы сызықтары ойдағы және координат осьтері абстракты екенің ұмытпау қажет.

Аспан денелерінің қозғалыс қасиеттері мен заңдылықтарын анық көрсету үшін сәйкестік координаттар жүйесін таңдайды. Координаттар жүйесін таңдауы әр аспан денесіне байланысты. Координата басын және координат осьтерін: объектінің бөліктерімен; объектінің динамикалық қасиеттерімен; қозғалыс қасиеттерімен; белгілі уақыт мезетіндегі дененің кеңістікте орналасуымен; басқа арнайы әдістерімен байланыстырады.

Практикалық аспан механикасындағы қолданылатын координаттар жүйесі: *тікбұрышты немесе декарт, сфералық, топоцентрлік (гео, гелио-центрлік)*. Кейбір жағдайларда аспан механикасында горизонталдық, экваториалдық, эклиптикалық, галактикалық координат жүйелері қолданылады.

1.2 Тартылыс теориясының негіздері

1.2.1 Ньютонның тартылыс заңы

Кез келген материалдық бөлшектер арасындағы тартылыс күшінің шамасын анықтайтын заң, И. Ньютонның 1666 ж. шыққан “Натурал философияның математикалық негіздері” еңбегінде баяндалған.

Ньютон заңның тұжырымдасы: *кез келген екі материалдық бөлшек бір-біріне өздерінің массаларының (m_1, m_2) көбейтіндісіне тура пропорционал, ал арақашықтығының квадратына (r^2) кері пропорционал күшпен (F) тартылады:*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

мұндағы G — гравитациялық тұрақты. Гравитациялық тұрақтының (G) сан мәнін 1798 ж. ағылшын ғалымы Г. Кавендиш анықтаған:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{H \cdot M^2}{K^2}.$$

Айдың Жерді, планеталардың Күнді айнала қозғалуын зерттеу нәтижесінде И. Ньютон ашқан бұл заң табиғаттағы барлық денелерге және олардың барлық бөліктеріне қолданылады. Аспан денелерінің қозғалысы жайындағы ғылым - аспан механикасының іргетасын қалайды. Осы заңның көмегімен аспан денелерінің қозғалу траекториясы есептелінеді және олардың аспан күмбездіндегі орындары алдын ала анықталады. Мысалы:

✓ Уран планетасының осы заңға сәйкес есептелінген орбитадан ауытқуы бойынша 1846 ж. Нептун планетасы ашылды.

✓ Плутон планетасы да 1930 ж. осындай тәсілмен анықталды.

✓ 19 - 20 ғасырларда бұл заңды алдымен қос жұлдыздарға, кейін шалғай орналасқан галактикаларға да пайдалануға болатындығы белгілі болды.

Жалпы салыстырмалық теориясының ашылуы (1916 ж.) нәтижесінде тартылыс күшінің табиғаты одан әрі айқындала түсті. Шындығында, кез келген дене кеңістікте тартылыс өрісін туғызады. Денелердің арасындағы тартылыс күші осы өріс арқылы беріледі. Табиғаттағы барлық денелер бір-біріне тартылады. Осыған бағынатын тартылыс заңды *бүкіләлемдік тартылыс заңы* деп атайды.

m массасы бар M және μ массасы бар P материалдық нүктелерді эвклид кеңістігінде қарастырайық. Осы материалдық нүктелер бір бірінен r арақашықтығында орналасқан. Егер M -ді тартылу центрі, ал P -ні - тартылатын нүкте ретінде қарастырсақ және оның массасы $\mu=1$ болса. Сонда бірлік массасы бар P материалдық нүктені M материалдық нүкте осындай тартылыс күшіпен әсеретеді:

$$F = G \frac{m}{r^2}. \quad (1.2)$$

(1.1) мен (1.2) формулалар координат жүйесіне тәуелсіз.

O - координат басы кезкелген кеңістіктің нүктесінде орналасқан және осьтері тұрақты бағытталған тікбұрышты декарт координат жүйесін қарастырайық. P - тартылатын нүктенің координаттарын x', y', z' , ал M - тартылу нүктесінің координаттарын x, y, z ретінде белгілейміз. Сонда

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (1.3)$$

тартылыс күшінің әр ось бойынша құраушылары

$$\begin{aligned} X &= Gm \frac{x - x'}{r^3}, \\ Y &= Gm \frac{y - y'}{r^3}, \\ Z &= Gm \frac{z - z'}{r^3}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Егер x', y', z' - тұрақты шамалар болса, ал x, y, z - ағымды координаттар болса, сонда

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

1.2.2 Күштік функция

$U(x, y, z) = U(P) = G \frac{m}{r}$ функцияны енгіземіз, оны дербес түрінде x координатасы бойынша дифференциалдайық

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -G \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x' - x}{r}. \quad (1.5)$$

Сонда

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.6)$$

L кейбір бағытындағы күштің проекциясы

$$F_L = F \cos(F, L) = X \cos(L, x) + Y \cos(L, y) + Z \cos(L, z),$$

$$F_L = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(L, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(L, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(L, z) = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (1.7)$$

ал дербес жағдайда – радиус-вектор бағытындағы P нүктесіне әсерететін тартылыс күштің проекциясы

$$F_r = \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (1.8)$$

U - m массаның күштік функциясы немесе m нүктелік массаның потенциалы.

Күштік функцияның қасиеттері:

1. Бүкіл кеңістік бойынша $U(P)$ күштік функция шектеулі, бірімәнді және үздіксіз, тек M нүктесінде ол шексізге ұмтылады.

2. Егер P нүктесі M нүктесінен шексіз қашықтыққа орын ауыстыратын болса, $U(P)$ күштік функцияның мәні оң болса да шексіз төмендейді

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r \cdot U) = Gm \quad (1.9)$$

3. $U(P)$ күштік функцияның кез келген дәрежедегі барлық дербес туындылар P нүктесінің координатары бойынша бүкіл кеңістікте шектеулі, бірімәнді және үздіксіз болады.

4. Егер $P \rightarrow \infty$ $U(P)$ күштік функцияның кез келген дербес туындысының шегі 0 болады

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -Gm \quad (1.10)$$

M нүктесінен басқа бүкіл кеңістікте $U(P)$ күштік функциясы осы теңдеуге сәйкес келеді:

Лаплас теңдеуі

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1.11)$$

Лаплас операторы

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.12)$$

Сонда $\nabla U = 0$,

$$\nabla U = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div}F \quad (1.13)$$

- **вектордың дивергенциясы** немесе **таралғыштығы**.

Кеңістіктегі нүктелердің геометриялық орыны **деңгейдің беті** немесе **изопотенциалдық бет** деп аталады, егер осы орындарда күштік функциясы бір ғана C мәніне ие болса.

Деңгейдің беті осы теңдеу арқылы анықталады

$$U(x, y, z) = C \quad (1.14)$$

Осыға дейін біз тек екі (M, P) материалдық нүкте бар және M – бекітілген нүкте, ал P -кеңістікте кез келеген орынға орналасуы мүмкін деп есептедік. Сол кезде U - күштік функция P нүктенің координаттар функциясы ретінде қарастырылды.

Бірақ кейбір жағдайларда екі материалдық нүкте тең әсерлі ретінде қарастыру қажет. m_1 массасы бар M_1 және m_2 массасы бар M_2 материалдық нүктелердің күштік функциясы

$$U = G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (1.15)$$

$$r = \overline{M_1 M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.16)$$

Күштік функция екі материалдық нүктенің алты координаттар функциясы ретіне алынады

$$U = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2).$$

Тартылыс күштердің координаттар осьтеріне проекциялары

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial U}{\partial x_1} = G m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^3}, & Y_1 &= \frac{\partial U}{\partial y_1} = G m_1 m_2 \frac{y_2 - y_1}{r^3}, & Z_1 &= \frac{\partial U}{\partial z_1} = G m_1 m_2 \frac{z_2 - z_1}{r^3}, \\ X_2 &= \frac{\partial U}{\partial x_2} = G m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3}, & Y_2 &= \frac{\partial U}{\partial y_2} = G m_1 m_2 \frac{y_1 - y_2}{r^3}, & Z_2 &= \frac{\partial U}{\partial z_2} = G m_1 m_2 \frac{z_1 - z_2}{r^3}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Осы кезде U – екі массаның күштік функциясы немесе m_1 және m_2 екі нүктелік массаларының өзара тартылыстың күштік функциясы.

Материалдық нүктелер жүйесінің күштік функциясы

Жүйенің n материалдық нүктелері $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ тартылыс центрлері ретінде қарастырамыз. M_i нүктенің массасын - m_i және $OXYZ$ жүйдегі координаттарын - x'_i, y'_i, z'_i және бірлік массасы ($\mu=1$) бар, M_i нүктелерімен

сәйкес келмейтін нүктені - $P(x, y, z)$ арқылы белгілегенде, келесі теңдеуді аламыз

$$r_i = \sqrt{(x - x'_i)^2 + (y - y'_i)^2 + (z - z'_i)^2}. \quad (1.18)$$

P нүктенің M_i материалдық нүктелер жүйесі әсерінен тартылуын қарастырайық. M_i нүктесі P нүктесіне әсерететін тартылыс күштің координаттық осьтеріне проекциялары

$$X_i = Gm_i \frac{x'_i - x}{r_i^3}, \quad Y_i = Gm_i \frac{y'_i - y}{r_i^3}, \quad Z_i = Gm_i \frac{z'_i - z}{r_i^3}. \quad (1.19)$$

Сонда P нүктесіне әсерететін барлық тартылыс күштердің теңәрекетті күштің проекциясы

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n X_i = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{x'_i - x}{r_i^3}, \\ Y &= \sum_{i=1}^n Y_i = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{y'_i - y}{r_i^3}, \\ Z &= \sum_{i=1}^n Z_i = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{z'_i - z}{r_i^3}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

$L(1, \alpha, \beta, \gamma)$ кейбір берілген бағытындағы теңәрекетті күштің проекциясы

$$F_L = \sum_{i=1}^n F_{iL} = \sum_{i=1}^n (\alpha X_i + \beta Y_i + \gamma Z_i) \quad (1.21)$$

n нүктелік массасы бар жүйенің күштік функциясы

$$U = \sum_{i=1}^n U_i, \quad U_i = G \frac{m_i}{r_i}. \quad (1.22)$$

1.2.3 Аспан денелерінің гравитациялық өрістері

M массасы және $\rho(\vec{r}')$ тығыздығы бар T дененің кеңістікте орналасуы x, y, z координаттарымен белгіленсін (3 сурет).

Тартылыс күші потенциалды (тек қана тартылатын денелердің координаттарына тәуелді) болғандықтан, T дененің V гравитациялық потенциалын анықтаймыз.

$$\vec{F} = \text{grad}V \quad (1.23)$$

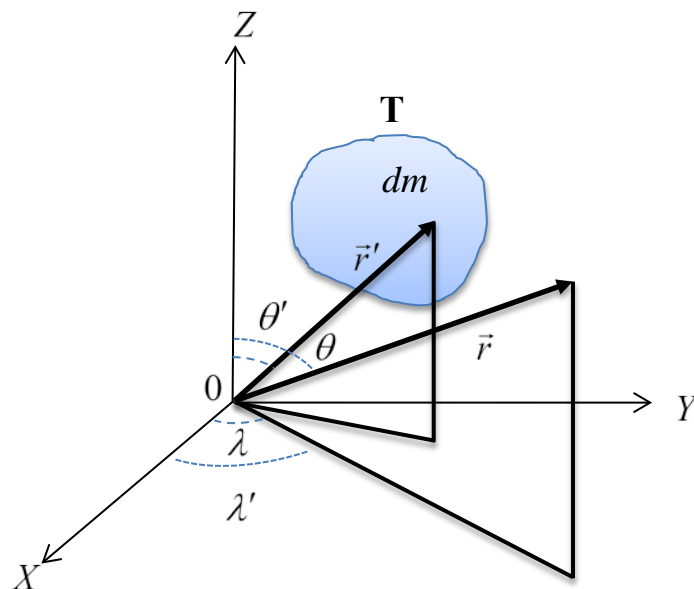
dV' көлемінде dm массасы бар дененің элементі \vec{r}' радиус-векторы бар P нүктесіндегі потенциал

$$dV = G \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.24)$$

егер T дененің көлемі бойынша интеграл алып косинус теоремаларын қолданғанда

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}. \quad (1.25)$$

$\psi - \vec{r}, \vec{r}'$ - радиус-векторлар арасындағы бұрыш.



3 сурет – Кез келген аспан дененің гравитациялық потенциалын анықтау

(1.25)- ші формуладағы оң жағын Лежандр полиномдары арқылы жазамыз

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \psi) \left(\frac{r'}{r}\right)^n. \quad (1.26)$$

r, θ, λ сфералық координаталар арқылы **гравитациялық потенциалы**

$$\begin{aligned}
V = \frac{G}{r} & \left[P_n(t) \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n(t') \left(\frac{r'}{r} \right)^n d\nu' + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \cos m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^n d\nu' + \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \sin m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^n d\nu' \right].
\end{aligned} \tag{1.27}$$

осында $t = \cos \theta$, $t' = \cos \theta'$, **Лежандр полиномдары**

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \tag{1.28}$$

және қосылған **Лежандр функциялары**

$$P_n^m(t) = (-1)^m (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} (P_n(t)) \tag{1.29}$$

a - аспан дененің сызықтық өлшемі (жұлдыздың немесе планетаның экваториалдық радиусы) болса, сонда (1.27) формуланы $a^n M$ шамасына көбейтеміз және бөлеміз

$$J_n = \frac{1}{a^n M} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n(t') (r')^n d\nu' \tag{1.30}$$

- қатардың **зоналдық коэффициенттері**. Зоналдық коэффициенттері λ бойлыққа тәуелсіз және параллельдерде 0 айналады.

$$C_n^m = \frac{2}{a^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' d\nu', \tag{1.31}$$

$$S_n^m = \frac{2}{a^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' d\nu'$$

- **секториалды гармоникалар** - θ полярлық арақашықтыққа тәуелсіз және меридиандарда 0 айналады.

Егер $m < n$ болса, параллель және меридианардың доғаларымен құрастырылған қисықсызықты трапецияларында 0 айналады. Сонда осы коэффициенттер **тессералдық** деп аталады.

Дененің, оны қоршаған кеңістіктегі, гравитациялық потенциалы (1.27) формула арқылы анықталады.

Жұлдыздар мен планеталардың гравитациялық өрістері

Гравитациялық денелердегі тығыздықтың таралуының дербес жағдайларын қарастырайық.

1. Егер массаның таралуы сфералық симметрия заңына бағынса:

$$\rho(\vec{r}') = \rho(r')$$

Сонда барлық коэффициенттер 0 тең болады, тек қана $J_0=1$. Осы жағдайда дененің гравитациялық өрісі дененің масса центріне орналасқан M бірлік массасының өрісімен сәйкес келеді:

$$V = \frac{GM}{r}.$$

Мысалы: Күн немесе төменгі спектралдық кластағы жалғыз жұлдыздар (егер олардың ось бойынша айналу жылдамдығы аса жоғары болмаса).

2. Егер гравитациялық өрісті денеден аса үлкен арақашықтықта қарастырсақ. Денелер материалдық нүктелер ретінде аламыз.

$$V = \frac{GM}{r}.$$

1 кесте. Күн жүйесінің денелердің гравитациялық өрістері

Объект	GM, см ³ /с ²	J _n · 10 ⁶				
		n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
Күн	1,33 · 10 ²⁶	<10	-	-	-	-
Меркурий	2,17 · 10 ¹⁹	~-10	-	-	-	-
Шолпан	3,25 · 10 ²⁰	~-4	-	-	-	-
Жер	3,99 · 10 ²⁰	-1083	2,54	1,58	0,22	0,59
Марс	4,30 · 10 ¹⁹	-1959	30	-10	-6	-3
Юпитер	1,27 · 10 ²³	-14733	-	-587	-	5
Сатурн	3,79 · 10 ²²	-16479	-	-937	-	11
Уран	5,8 · 10 ²¹	-3352	-	-29	-	-
Нептун	7,05 · 10 ²¹	-3411	-	-50	-	-
Ай	4,9 · 10 ¹⁸	-206	-37	33	-5	-

3. Егер дене осьтік симметрия заңына бағынса:

$$\rho(\vec{r}') = \rho(r', \theta')$$

Осы жағдайда барлық секториалды мен тессералды гармоникалар 0 тең болады, ал гравитациялық потенциал зоналдық гармоникаларға ие болады:

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n P_n(t) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right].$$

4. Егер массаның таралуы осьтік және экваториалдық жазықтыққа байланысты симметрия заңына бағынса (тығыздық – ендіктің жұп функциясы ретінде қарастырылса): барлық тақ зоналдық гармоникалар 0-ге тең болады. Гравитациялық потенциал

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_{2n} P_{2n}(t) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right].$$

3 пен 4 –ші пункт бойынша мысал ретінде газдық және сұйықтық денелерді алуға болады: ертегі спектралды кластағы тез айналатын жұлдыздар, қос жүйенің компоненттері, алып-планеталар. Қаттыденелі планеталар және олардың үлкен серіктеріне аз дәлділігімен орындалады.

Дененің қозғалысын қарастырған жағдайда міндетті түрінде қарастырып отырған уақыт аралығын ескеру қажет

Бақылау сұрақтары

1. Аспан механикасының негізгі мақсаты мен міндеттері.
2. Аспан механикасында қолданылатын негізгі ұғымдар мен түсініктер.
3. Ньютонның тартылыс заңы.
4. Күштік функциясы.
5. Аспан денелерінің гравитациялық потенциалы.
6. Жұлдыздар мен планеталардың гравитациялық өрістері.

II. ЕКІ ДЕНЕ ЕСЕБІ

2.1 Екі дене есебінің жалпы шешімі

2.1.1 Екі дене есебінің теңдеулері

X, Y, Z инерциалды координат жүйесіндегі екі M_0 және M_1 денелерінің қозғалысын қарастырамыз. m_0, \vec{R}_0 - бірінші және m_1, \vec{R}_1 - екінші дененің массалары және радиус-векторлары. Осы материалдық нүктелердің қозғалыс теңдеулері

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\vec{R}}_0 &= Gm_0 m_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_0|^3}; \\ m_1 \ddot{\vec{R}}_1 &= Gm_0 m_1 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_0 - \vec{R}_1|^3}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Осы теңдеулердің жалпы шешімін анықтау үшін Коши есебі бойынша: барлық радиус векторлардың және жылдамдық векторларының t_0 - бастапқы уақыт мезетінде және t_1 мен t_2 - уақыт кезеңдерінде мәндері белгілі болу қажет. Сол үшін *бастапқы шарттар*

$$\vec{R}_{0,1}^{(0)} = \vec{R}_{0,1}(t_0), \quad \dot{\vec{R}}_{0,1}^{(0)} = \dot{\vec{R}}_{0,1}(t_0)$$

және *шеткі шарттар*

$$\vec{R}_{0,1}^{(1)} = \vec{R}_{0,1}(t_1), \quad \vec{R}_{0,1}^{(2)} = \vec{R}_{0,1}(t_2)$$

енгізіледі.

Екі дене есебі *барицентрлік* және *салыстырмалы* координат жүйесінде қарастырылады. *Барицентрлік координат жүйесінде* екі дененің масса центрі ρ_0 және ρ_1 арақашықтықта $M_0 M_1$ кесіндінің бойында орналасқан:

$$\begin{aligned} \rho_0 + \rho_1 &= |M_0 M_1|, \\ m_1 \rho_0 &= m_0 \rho_1, \\ \vec{\rho}_0 &= \frac{m_1}{m_0 + m_1} (\vec{R}_0 - \vec{R}_1), \quad \vec{\rho}_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} (\vec{R}_1 - \vec{R}_0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

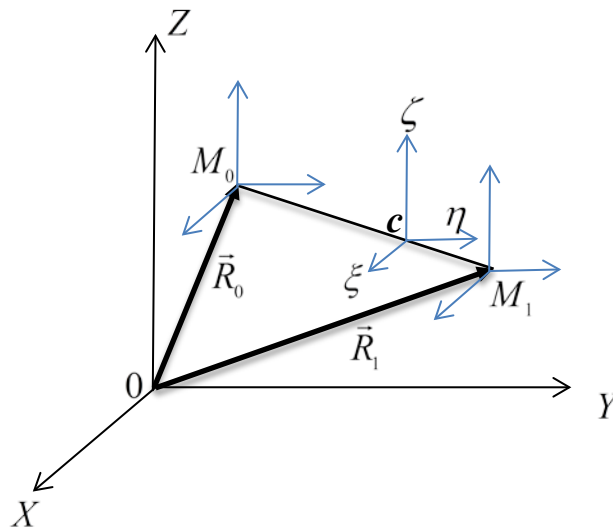
Сонда қозғалыс теңдеулері

$$\ddot{\vec{\rho}}_0 + \mu_0 \frac{\vec{\rho}_0}{\rho_0^3} = 0; \quad (2.3)$$

$$\ddot{\vec{\rho}}_1 + \mu_1 \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} = 0,$$

μ_0, μ_1 - тұрақты шамалар

$$\mu_0 = \frac{Gm_1^3}{(m_0 + m_1)^2}, \quad \mu_1 = \frac{Gm_0^3}{(m_0 + m_1)^2} \quad (2.4)$$



4 сурет – Инерциалды және барицентрлік координат жүйесіндегі екі дене есебі

Салыстырмалы координат жүйесіндегі екі дененің қозғалысын қарастырамыз. M_0 денесіне салыстырмалы M_1 денесінің радиус-векторын - $\vec{r}_{1/0}$ және M_1 денесіне салыстырмалы M_0 денесінің радиус-векторын - $\vec{r}_{0/1}$ белгілейміз. Сонда қозғалыс теңдеулері

$$\ddot{\vec{r}}_{1/0} + \mu \frac{\vec{r}_{1/0}}{r_{1/0}^3} = 0; \quad (2.5)$$

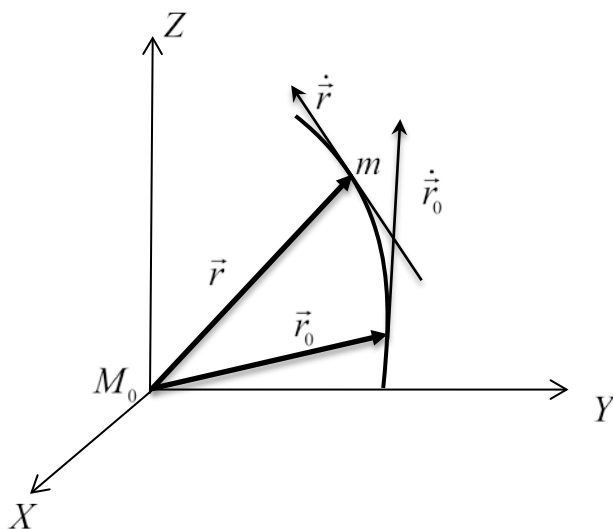
$$\ddot{\vec{r}}_{0/1} + \mu \frac{\vec{r}_{0/1}}{r_{0/1}^3} = 0; \quad (2.6)$$

μ - тұрақты шама

$$\mu = G(m_0 + m_1) \quad (2.7)$$

(2.5)-ші және (2.6)-ші формулалар бір біріне тәуелсіз, өйткені олар әртүрлі координат жүйесіне байланысты жазылған.

Егер (2.3) – (2.7) формулаларды салыстырсақ, сонда олардың құрылымдары бірдей екені байқалады, тек қана тұрақты шамалары әртүрлі болады. Сондықтан, қай жүйесін қарастыратын болсақ-та, денелер геометриялы ұқсас орбиталар бойынша қозғалады. Ал салыстырмалы қозғалыс кезінде бірдей орбиталар арқылы, бірақ қарама қарсы бағытта екі дене қозғалады. Барлық жағдайларда екі дененің қозғалысына массаларының мәндері әсеретеді. Барицентрлік координат жүйесінде M_0 және M_1 материалдық нүктелердің орбиталарының өлшемі және пайда болған үдеулері массаларына кері пропорционал болады. Себебі үлкен массамен байланыстырған координат жүйесі инерциалды болады, ал кіші массамен байланыстырған жүйе - инерциалды емес болады.



5 сурет – Екі дененің салыстырмалы есебі

Сондықтан, екі дене есебінде үлкен дененің массасын - M және кіші дененің массасын - m арқылы белгілейміз. X, Y, Z координат жүйесіндегі m материалдық нүктенің M нүктесіне салыстырмалы қозғалысын қарастырамыз

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0; \quad \mu = G(m_0 + m_1). \quad (2.8)$$

Бастапқы шарттар

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0).$$

μ - екі дене есебіндегі гравитациялық тұрақтысы. Күн жүйесіндегі денелердің қозғалысын қарастырған кезінде ұзындықты астрономиялық бірліктерімен (а.б.), уақытты - орташа күн тәулігімен, массаны – Күн массасының бөлігімен өлшейміз. Сонда **гравитациялық тұрақтысы**

$$G = 0.0029591,$$

Гаусс тұрақтысы

$$k = \sqrt{G} = 0.0172021.$$

2.1.2 Екі дене есебінің бірінші интегралдары

Салыстырмалы қозғалысын қарастыратын болғандықтан **момент интегралын** және **энергия интегралын** енгізу қажет. Егер

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0;$$

теңдеудің интегралын анықтаған кезінде

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \quad (2.9)$$

Сонда m нүктенің кинетикалық моменті сақталады, ал \vec{c} - *интегралдау тұрақтысы* массаның бірлігіне есептелген моментіне тең. (2.9) – ші формула **момент интегралы**.

\vec{r} - радиус-вектор және $\dot{\vec{r}}$ - оның бірінші туындысы \vec{c} - момент векторына перпендикуляр орналасады. \dot{r} - r шамасының өзгеру жылдамдығы, $\dot{\vec{r}}$ вектордың \vec{r} вектор бағытындағы проекциясына тең және жылдамдық $V = |\dot{\vec{r}}|$ болғанда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (V^2) = -\frac{\mu}{r^2} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right),$$

теңдеудің интегралын анықтауға болады

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h \quad (2.10)$$

(2.10) формуласы – **энергия интегралы**. h – m нүктенің бірлік массасына келетін *екі еселенген жалпы энергия*.

Екі дене есебінде тағы бірінші интегралын қарастыру қажет. Егер

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} \times \vec{c} + \mu \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} &= 0; \\ \ddot{\vec{r}} \times \vec{c} &= \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}); \\ \frac{\vec{r} \times \vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{r^3} &= \frac{\vec{r} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} \times \vec{r}^2}{r^3} = -\frac{\vec{r}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right); \end{aligned}$$

Лаплас интегралы

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{c} - \mu \frac{\vec{r}}{r} = \vec{\lambda}. \quad (2.11)$$

$\vec{\lambda}$ - Лаплас векторы.

$$\vec{c} \cdot \vec{\lambda} = \vec{c} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) - \mu \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} = 0, \quad (2.12)$$

$$\lambda^2 = hc^2 + \mu^2.$$

2.1.3 Екі дене есебіндегі орбита теңдеуі және қозғалыс заңы

Екі дене есебінде екі материалдық нүктенің (m , M) қозғалысын қарастырамыз. m нүктенің \vec{r} - радиус-векторы және $\dot{\vec{r}}$ - оның жылдамдығы \vec{c} - момент векторына перпендикуляр болғандықтан, кеңістікте осы векторларымен анықталған жазықтықтың бағыттауы тұрақты болады. \vec{r} векторы жазықтықта болғандықтан, осы жазықтықта M_0 - координат басы белгіленеді. Жазықтықта m нүктесі қозғалады, бірақ X, Y, Z координат жүйесінде жазықтық қозғалыссыз болады. Жазықтықтың теңдеулерін векторлық және координаттық түрінде жазуға болады:

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = 0,$$

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0,$$

c_1, c_2, c_3 - \vec{c} вектордың компоненттері.

$\vec{\lambda}$ - Лаплас векторы \vec{c} - қозғалыс жазықтықтың нормаль векторына перпендикуляр болғандықтан, осы жазықтықта орналасады. Сонда қозғалыс жазықтығына ξ, η - *тікбұрышты* және r, ν - *полярлы координат жүйелерін* енгізуге болады. ξ - осі $\vec{\lambda}$ - Лаплас векторының бойымен бағытталған, ν - *полярлы бұрыш (шын аномалиясы)* $\vec{\lambda}$ векторының бағытынан есептеледі. Егер \vec{c} момент векторының бойымен бағытталған ζ - осьті енгізген кезінде, *орбиталдық координат жүйесі* пайда болады. Осы ξ, η, ζ - координат жүйесі қозғалыс жазықтығымен байланыста болады.

Көбінесе бастапқы координат жүйесі ретінде гелиоцентрлік эклиптикалық немесе геоцентрлік экваториалды жүйелер қарастырылады. Қажетті жағдайларда селеноцентрлік немесе планетоцентрлік координат жүйелерін таңдайды. Егер қос жұлдыз жүйесі қозғалысын қарастырғанда, көбінесе аспан сферасына жанама болатын бейнелік жазықтығын бастапқы координат жүйесінің негізгі жазықтығы ретінде алады.

r, ν полярлы жүйедегі m нүктенің орбита теңдеуін анықтау үшін $\vec{\lambda}$ Лаплас интегралы мен \vec{r} радиус векторының скалярлы көбейтіндісі алынады:

$$r\lambda \cos \nu = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) - \mu \frac{\vec{r}^2}{r} = c^2 - \mu r.$$

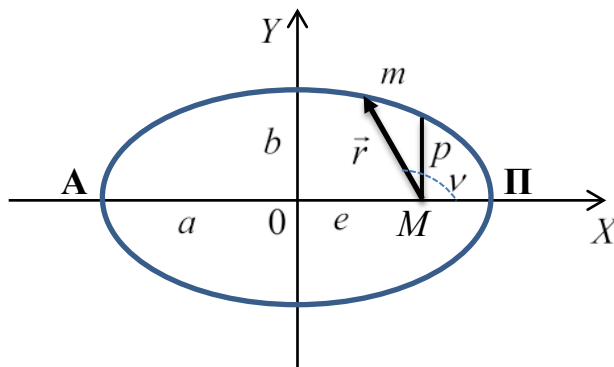
Осыдан

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} \cos \nu}$$

немесе

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.13)$$

p - қисықтың фокалды параметрі - фокус арқылы өтетін эллипстің үлкен осіне, гиперболаның нақты осіне немесе параболаның симметрия осіне перпендикуляр орналасқан фокалды жартылай хорданың ұзындығына тең болады.



6 сурет – Эллипстік орбита бойымен материалдық нүктенің қозғалысы

e – **эксцентриситет**, екінші дәрежедегі қай қисыққа байланыстығын анықтайды. Егер эксцентриситеттің мәні $e = 0$ болса, сонда қисықтың түрі – дөңгелек, $e < 1$ - эллипс, $e = 1$ - парабола, $e > 1$ - гипербола. Орбитаның түрлері осындай болу мүмкін, егер параметрі $p \neq 0$ және кинетикалық параметр $c \neq 0$ болса. $c = 0$ болған кезінде \vec{r} мен $\dot{\vec{r}}$ бір біріне коллинеарлы, сонда координат басы арқылы өтетін сызық - орбита болады.

Осыдан **жалпыландырылған Кеплердің бірінші заңының** тұжырымдамасы орын алады:

Екі дененің салыстырмалы есебінде материалдық нүкте тартылыс центрі фокустардың біреуінде орналасқан екінші дәрежедегі қисығы бойымен қозғалады.

Егер координат жүйесінің центрі эллипс немесе гипербола, немесе парабола төбесімен сәйкес келсе және эллипстің үлкен осімен, гиперболаның нақты осімен немесе параболаның симметрия осімен *x* осі бағытталса каноникалық теңдеулер:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.14)$$

- эллипс,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.15)$$

- гипербола,

$$y^2 = 2px \quad (2.16)$$

- парабола үшін анықталады. a мен b - эллипстің үлкен және кіші немесе гиперболаның нақты мен жорамал жартылай остерінің ұзындығы.

Эллипс немесе гипербола центрінен фокустарына дейін арақашықтығы c – **фокустық арақашықтық** деп аталады. Сонда

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a}, \quad (2.17)$$

«-» таңбасы эллипсқа, «+» - гиперболаға байланысты. Орбитаның фокалды параметрі: эллипс

$$p = a(1 - e^2). \quad (2.18)$$

және гипербола үшін

$$p = a(e^2 - 1). \quad (2.19)$$

Лаплас векторы тартылыс центрі орналасқан фокустан *орбитаның перицентріне* - ең жақын орналасқан төбеге бағытты көрсетеді. Эллипстік орбита кезінде тартылыс центрінен ең алыс орналасқан нүктені - *апоцентр* деп атайды. Перицентр мен апоцентр – *апсидтер*, осы екі нүктені қосатын сызық – *апсидтер* сызығы деп аталады. Егер жеке денелер айналасындағы қозғалыс болса, сонда апсидтер центрлік дененің көне грек сөзімен құрастырылады. Мысалы: Күн маңындағы орбиталар үшін – перигелий және афелий, Жер маңындағы орбиталар үшін – перигей және апогей, Ай маңындағы орбиталар үшін – периселений және апоселений, Марс маңындағы орбиталар үшін – периарий және апоарий нүктелері қарастырылады.

Орбита теңдеуінен басқа осы орбитадағы қозғалыс заңын қарастыру қажет. Басқаша айтқанда v - шын аномалияның немесе r - радиустың t - уақытқа тәуелділігін анықтау керек. Момент интегралының модулін қарастырайық

$$rV \sin(\dot{\vec{r}}, \vec{r}) = c.$$

Радиус-векторына перпендикуляр орналасқан жылдамдықтың құраушысы немесе шеңберлік жылдамдық

$$V \sin(\dot{\vec{r}}, \vec{r}) = r\omega, \quad (2.20)$$

$\omega = \dot{\nu}$ - бұрыштық жылдамдық,

$$r^2 \dot{\nu} = c. \quad (2.21)$$

Қозғалыс теңдеуін (2.21)-ші формуланы интегралдау арқылы анықтаймыз

$$\int_0^{\nu} \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.22)$$

τ - тәуелсіз тұрақтысы. Егер $t = \tau$, шын аномалияның мәні $\nu = 0$ болғанда, τ - m нүктенің орбита перицентрін өту моменті.

Орбиталдық координат жүйесінде m нүктенің радиус-векторы - $\vec{\rho} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ және орбиталдық координаталар

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \nu, \\ \eta &= r \sin \nu, \\ \zeta &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Бастапқы X, Y, Z координат жүйесінде, екі дене есебінің шешімін табу немесе \vec{r} радиус-векторын анықтау үшін, жүйеге салыстырмалы ξ, η, ζ координат жүйесінің бағытталған косинустар матрицаларын $\vec{\rho}$ векторына көбейту керек. ξ, η, ζ өстерінің бірлік векторлары - $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$. Бағытталған косинустар матрицалары $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ векторлардың құраушыларынан тұрады. \vec{r} радиус-вектордың теңдеуі

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \\ \vec{R} \end{pmatrix} \cdot \vec{\rho}, \quad (2.24)$$

осында

$$\vec{P} = \frac{\vec{\lambda}}{\lambda}, \quad \vec{Q} = \frac{\vec{c} \times \vec{\lambda}}{c\lambda}, \quad \vec{R} = \frac{\vec{c}}{c}. \quad (2.25)$$

Екі дене есебінің жалпы шешімін $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, e, p, \tau$ тұрақты шамаларымен анықтауға болады.

Астрономияда аспан дененің орбитасының интегралдау тұрақтыларын және орбита бойымен қозғалысын – **орбита элементтері** деп атайды. $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ - орбитаның векторлық элементтері.

Момент интегралының басқаша жазылуы:

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \vec{c} dt. \quad (2.26)$$

Егер \vec{r} және $\vec{r} + d\vec{r}$ векторларымен құрастырылған үшбұрыштың ауданы S болса, сонда \vec{r} радиус-вектор dt уақыт аралығында өтетін ауданның секторы

$$dS = \frac{1}{2} c dt \quad (2.27)$$

және аудан

$$S = \frac{1}{2} ct + c_0. \quad (2.28)$$

(2.27), (2.28) теңдеулер **Кеплердің екінші заңын** тұжырымдайды: **Кеплер қозғалысының секториалды жылдамдығы тұрақты болады** немесе **нүктенің радиус-векторы бірдей уақыт аралығында бірдей аудандары болатын секторлардан өтеді.**

2.1.4 Орбитаның Кеплер элементтері

$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, e, p, \tau$ - орбита элементтері үш топқа бөлуге болады. Бірінші (векторлық элементтері - $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$) орбита жазықтықтың кеңістіктегі орналасуын және орбитаның бағыттауын көрсетеді. Екінші топ (e, p) орбитаның пішіні мен өлшемін анықтайды. Үшінші топта бір элемент - τ , ол материалдық нүктенің орбита бойымен қозғалуын сипаттайды, сондықтан осы элемент **динамикалық** деп аталады.

Қазіргі уақытта орбитаның орналасуын Эйлер бұрыштары арқылы қарастырады.

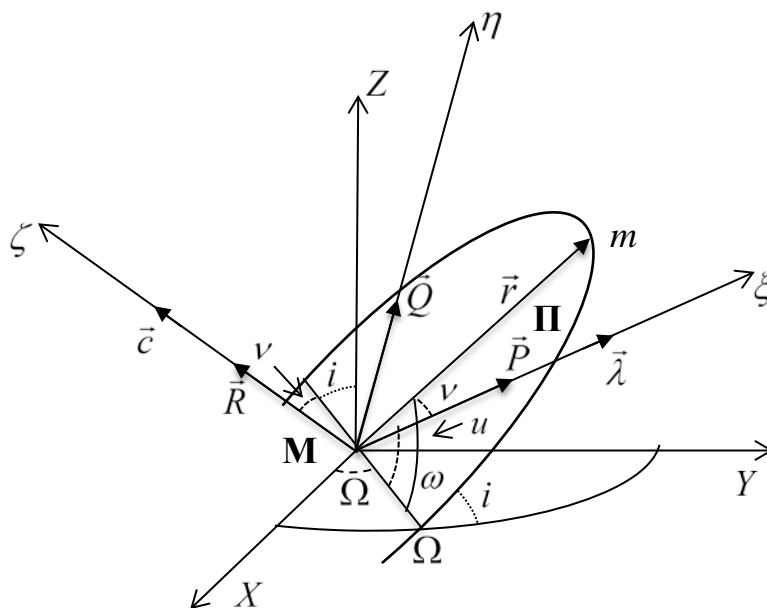
Негізгі x, y, z координат жазықтығын орбита жазықтығы қиылысу нүктелері орналасқан бір түзу сызығымен кесіп өтеді. Бұл нүктелер **орбита түйіндері**, ал сызық – **түйіндер сызығы** деп аталады. Қозғалыс жағдайда m дененің z -координатасының (аппликатының) «-» таңбасынан «+» таңбасына ауысу кезіндегі немесе солтүстік бағытындағы қиылысу нүктесін - **жоғары түйіні Ω немесе солтүстік түйіні**, «+» таңбасынан «-» таңбасына ауысу кезіндегі немесе оңтүстік бағытындағы қиылысу нүктесін – **төменгі түйіні немесе оңтүстік түйіні** деп атайды.

Эйлердің бірінші бұрышы: бастапқы координат жүйесінің x осінің оң бағыты және орбитаның солтүстік түйін арасындағы бұрыш – **солтүстік** немесе **жоғары түйіннің бойлығы** деп аталады. Түйіннің бойлығы x осінен y осі бағытына есептейді. $0^\circ - 360^\circ$ дейін мәні өзгереді.

Эйлердің екінші бұрышы: солтүстік түйін мен орбита перицентрі бағыттары арасындағы бұрыш – ω - **перицентрлік арақашықтық** деп аталады. Перицентрлік арақашықтық түйін сызықтарынан m нүктенің қозғалу бағытына қарай есептейді. $0^\circ - 360^\circ$ дейін мәні өзгереді.

Эйлердің үшінші бұрышы: x, y, z координат пен орбита жазықтықтарының арасындағы бұрыш - **i орбита еңкею** деп аталады. $0^\circ - 180^\circ$ дейін мәні өзгереді.

Егер m нүктенің xu жазықтығына проекциясы ширектің бірінші бөлігінде қозғалса – *тура қозғалыс* болады және *орбита еңкею* $i < 90^\circ$. *Кері қозғалыс* болса: $i > 90^\circ$.



7 сурет – Орбиталдық координат жүйесі мен Эйлер бұрыштары

Екі дене есебінде $\Omega, \omega, i, e, p, \tau$ - *орбитаның кеплер элементтері* ретінде алынады. Бұл жиынтық кез келген қисықсызықты орбита үшін жарамды. Кейбір жағдайларда p параметр орнына a эллипстік орбитаның үлкен жарты осін енгізуге болады.

Орбитаның кеплер элементтері арқылы екі дене есебінің шешімін анықтаймыз. Радиус-вектордың бағыттау косинустары:

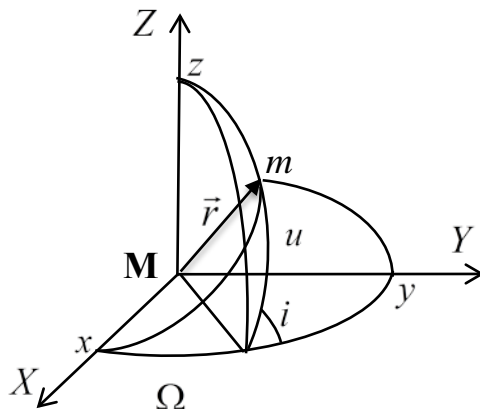
$$\frac{\vec{r}}{r} \equiv (\alpha, \beta, \gamma).$$

Аспан сферасына орбитаның проекциясын қарастырған кезінде $x\Omega m$ сфералық үшбұрышының қабырғалары мен бұрышы:

$$x\Omega = \Omega, \quad \Omega m = \omega + v = u, \quad x\Omega m = 180 - i. \quad (2.29)$$

u - *еңдік аргументі* (түйін сызықтарымен m нүктенің радиус-векторы арасындағы арақашықтық), ω – перицентрдің аргументі.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos(xm) = \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i, \\
\beta &= \cos(ym) = \sin \Omega \cos u - \cos \Omega \sin u \cos i, \\
\gamma &= \cos(zm) = \sin u \sin i.
\end{aligned}
\tag{2.30}$$



8 сурет – Радиус-вектордың бағыттау косинустарын есептеу

Бастапқы координат жүйесінде m нүктенің координаттары

$$\begin{aligned}
x &= r\alpha = r \cos(xm) = r(\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i), \\
y &= r\beta = r \cos(ym) = r(\sin \Omega \cos u - \cos \Omega \sin u \cos i), \\
z &= r\gamma = r \cos(zm) = r \sin u \sin i.
\end{aligned}
\tag{2.31}$$

Егер $u = \omega$ және $u = \omega + 90^\circ$ болса \vec{P} және \vec{Q} векторлары \vec{r}/r тең болады.

Сонда

$$\begin{aligned}
P_x &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i, \\
P_y &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i, \\
P_z &= \sin \omega \sin i,
\end{aligned}
\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
Q_x &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i, \\
Q_y &= -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i, \\
Q_z &= \cos \omega \sin i.
\end{aligned}
\tag{2.33}$$

x, y, z осьтеріне \vec{R} вектордың проекциясы

$$\begin{aligned}
 R_x &= \sin \Omega \sin i, \\
 R_y &= -\cos \Omega \sin i, \\
 R_z &= \cos i.
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

Сонда екі дене есебінің жалпы шешімі

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \xi + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \eta.
 \tag{2.35}$$

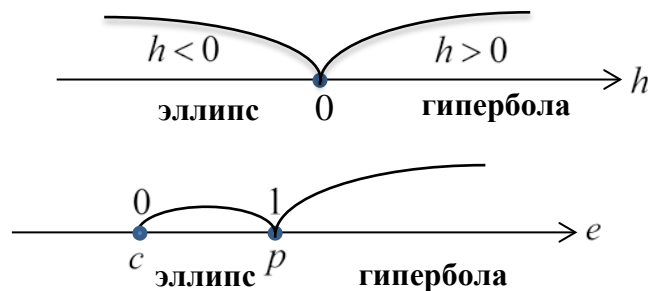
(2.31) және (2.35) теңдеулерді t бойынша дифференциалдау арқылы жылдамдық векторының компоненттерін $\dot{\vec{r}} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ анықтауға болады. Жылдамдық векторының құраушылары: $V_r = \dot{r}$ - **радиалды** және $V_n = r\dot{\nu}$ - **нормалды** (тангенциалды):

$$\begin{aligned}
 V_r &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu, \\
 V_n &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu), \\
 V &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

2.1.5 Екі дене есебіндегі қозғалыстың классификациясы

Шеңберлік және эллипстік қозғалыстар – финитті қозғалыстар (қозғалыс жазықтықтың шектеулі аймағында болады), жалпы энергияның мәні «-» болады – тартылыс центрдің гравитациялық әсерінен шығу үшін кинетикалық энергияның мәні жеткіліксіз болу керек.

Параболалық және гипербодалық қозғалыстар – инфинитті қозғалыстар, жалпы энергия 0-ден жоғары және қозғалатын нүкте тартылыс күшіне қарамастан шексізге кетеді.



9 сурет – Кеплер қозғалысының түрлері

Шеңберлік жылдамдық $V_c = \sqrt{\mu/r}$ және параболалық жылдамдық $V_p = \sqrt{2\mu/r}$ арқылы бірінші және екінші ғарыштық жылдамдықтырын анықтауға болады. Егер r арақашықтықты R - орталық дененің радиусы және H - ұшу биіктігі арқылы, ал μ – гравитациялық тұрақтысын - дененің радиусы мен оның бетіндегі ауырлық күшінің үдеуі (g) арқылы ауыстырсақ

$$V_c = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H}}, \quad (2.37)$$

сонда $H=0$ жағдайда *бірінші және екінші ғарыштық жылдамдықтары*

$$V_1 = \sqrt{gR}, \quad V_2 = \sqrt{2gR}. \quad (2.38)$$

2 кесте.

Қозғалыстың түрі	e	c	λ	h	V, r	$\delta = (r, V)$
Шеңберлік	0	$\neq 0$	0	$-\mu/r$	$V^2 = \mu/r$	90°
Эллипстік	$0 < e < 1$	$\neq 0$	$< \mu$	$-\mu/a$	$V^2 < 2\mu/r$	$0^\circ < \delta \leq 180^\circ$
Параболалық	1	$\neq 0$	μ	0	$V^2 = 2\mu/r$	$0^\circ < \delta \leq 180^\circ$
Гиперболалық	> 1	$\neq 0$	$> \mu$	μ/a	$V^2 > 2\mu/r$	$0^\circ < \delta \leq 180^\circ$
Түзусызықты	1	0	<i>кез келген</i>	<i>кез келген</i>	<i>кез келген</i>	0° немесе 180°

2.2 Кеплер қозғалысының арнайы түрлері

Екі дене есебінде қозғалыстың түрлері:

- ✓ Негізгі - эллипстік және гиперболалық;
- ✓ Шектеулі – шеңберлік және параболалық;
- ✓ Нұқсанды – түзусызықты қозғалыс.

2.2.1 Эллипстік қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c \neq 0$, $0 < \lambda < \mu$, $h < 0$, $p \neq 0$, $0 < e < 1$ мәндерге ие болса - эллипстік қозғалыс болады.

Екі дене есебін шешу үшін шын аномалиямен уақыттың байланысы осы интеграл арқылы анықталады

$$\int_0^{\nu} r^2 d\nu = c(t - \tau). \quad (2.39)$$

Интегралды шешу үшін тағы негізгі параметрлерді еңгізу қажет.

Эллипстік орбитаның a - үлкен жарты осіне радиусы тең шеңберді сызамыз және орбита бойымен қозғалатын дененің сол кездегі орналасу нүктесінен эллипстің үлкен жарты осіне перпендикуляр өткізгенде E - **эксцентрлік аномалия** анықталады. **Эксцентрлік аномалия E** дегеніміз эллипстің үлкен жарты осі және перпендикулярдың шеңбермен қиылысу нүкте бағыты арасындағы бұрыш (10 сурет). E қозғалыс бағытында 0° ден 360° арасында өлшенеді.

Сонда

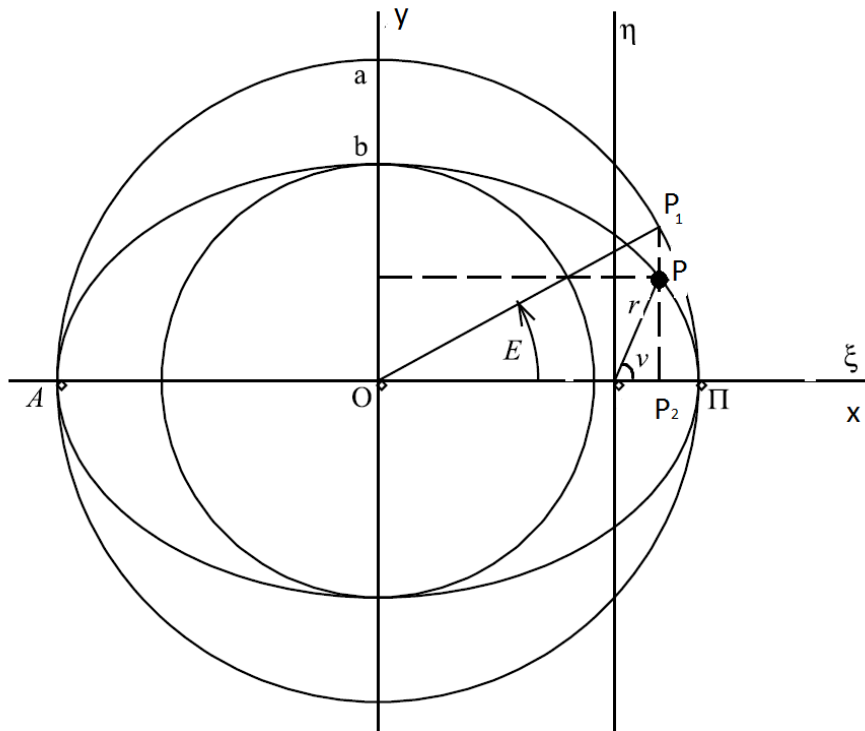
$$a \cos E = ae + r \cos \nu. \quad (2.40)$$

Егер $\frac{y_c}{y_e} = \frac{a}{b}$ және $r \sin \nu = a\sqrt{1-e^2} \sin E$ болса, дененің орбиталдық координаттары:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \nu = a(\cos E - e), \\ \eta &= r \sin \nu = a\sqrt{1-e^2} \sin E, \end{aligned} \quad (2.41)$$

және радиус-векторы

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.42)$$



10 сурет – Эксцентрлік аномалия

Егер

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin \nu = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad (2.43)$$

болса, шын және эксцентрлік аномалиялар арасындағы байланысы

$$\operatorname{tg} \nu = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.44)$$

(2.43) дифференциалдаған кезінде

$$d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE. \quad (2.45)$$

(2.42) мен (2.45)-ті (2.39)-ші формулада ескерген кезде

$$\int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau) \quad (2.46)$$

немесе

$$E - e \sin E = n(t - \tau). \quad (2.47)$$

Осында $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ - эллипстік орбита бойымен қозғалатын дененің орташа бұрыштық жылдамдығы немесе орташа қозғалыс деп аталады. (2.47) формула - эллипстік қозғалыс кезіндегі екі дене есебінің шешімі – **Кеплер теңдеуі**.

Егер M – **орташа аномалия** болса және

$$M = n(t - \tau), \quad (2.48)$$

сонда (2.47)

$$E - e \sin E = M. \quad (2.49)$$

Егер a радиусы бар шеңбер арқылы кез келген нүкте тұрақты жылдамдылығымен қозғалса, және бір уақытта аспан денесімен бірге перицентр арқылы өтетін болса, сонда осы нүктенің радиус-векторы және перицентр бағыты арасындағы бұрыш M - **орташа аномалия** болады. M аспан денесінің қозғалыс бағытына қарай 0° дан 360° өлшенеді.

Эллипстік қозғалысында энергия тұрақтысы

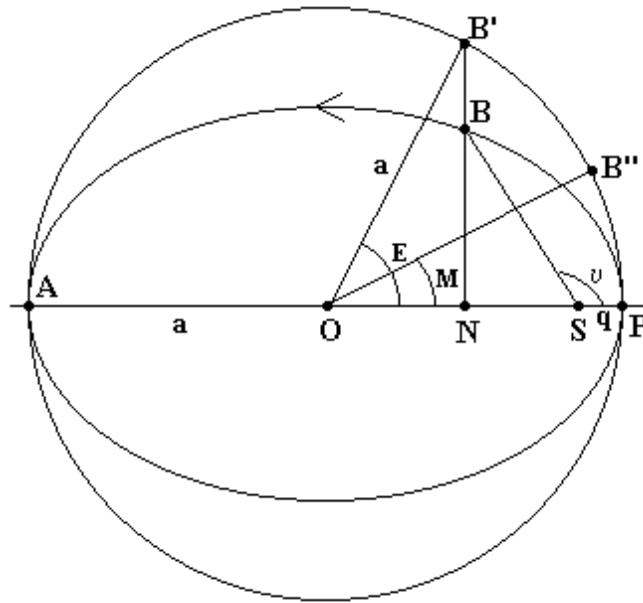
$$h = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2} = \mu \frac{e^2 - 1}{p} = -\frac{\mu}{a}, \quad p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.50)$$

Эллипстік орбита бойымен қозғалатын материалдық нүктенің айналу периоды

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G(m_0 + m)}}. \quad (2.51)$$

Осыдан жалпыландырылған Кеплердің үшінші заңы

$$\frac{T^2}{a^3} (m_0 + m) = \frac{4\pi^2}{G} = const. \quad (2.52)$$



S – эллипстің фокусы, O – эллипстің центрі, P - перицентр, A - апоцентр, $\omega = |SP|$ - перицентрлік арақашықтық, $a = |OA|$ - эллипстің үлкен жарты осі

11 сурет – Орташа аномалия

Сонда екі дене есебінің шешімі бойынша эллипстік орбита бойымен қозғалатын нүктенің координаттары

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (\cos E - e) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \right] \quad (2.53)$$

және жылдамдық компоненттері

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{na^2}{r} \left[- \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \sin E + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E \right]. \quad (2.54)$$

Энергия сақталу заңынан эллипстік қозғалыс кезіндегі жылдамдықтың модулі

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.55)$$

немесе

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}. \quad (2.56)$$

Эллипстік қозғалыс кезінде кейбір параметрлерді басқаларымен ауыстырады: *перицентрлік арақашықтықты – перицентрдің бойлығымен ауыстырады*

$$\pi = \Omega + \omega, \quad (2.57)$$

τ - перицентр арқылу өту моментін – t_0 - бастапқы дәуірдегі M_0 - орташа аномалиямен; M_0 – бастапқы дәуірдегі орташа бойлығымен

$$\varepsilon = \pi + M_0 = \Omega + \omega + M_0. \quad (2.58)$$

Сонда эллипстік қозғалыс кезіндегі *эллипстік кеплер элементтері* - $\Omega, \pi, i, e, a, \varepsilon$.

3 кесте. Үлкен планеталардың негізгі орбита элементтері

Планета	a	T	S	n	i	e	Ω	π	M_0
Меркурий	0,387	0,240	116	4,09°	7,00°	0,206	48°	77°	252°
Шолпан	0,723	0,615	584	1,60°	3,40°	0,007	77°	131°	182°
Жер	1,000	1,000	-	0,99°	0,00°	0,17	-	103°	100°
Марс	1,524	1,881	780	0,524°	1,85°	0,093	49°	336°	335°
Юпитер	5,203	11,86	399	0,083°	1,30°	0,048	100°	14°	32°
Сатурн	9,555	29,54	378	0,034°	2,48°	0,056	113°	93°	50°
Уран	19,218	84,25	370	0,012°	0,76°	0,047	74°	173°	314°
Нептун	30,110	165,2	368	0,006°	1,77°	0,009	132°	48°	304°
Плутон	39,53	250,1	367	0,004°	17,50°	0,250	110°	223°	130°

4 кесте. Кейбір кіші планеталардың негізгі орбита элементтері

Планета	a	T	S	n	i	e	Ω	π	M_0
Церера	2,78	4,60	467	0,214°	10,6°	0,077	81°	152°	8°
Паллада	2,77	4,61	467	0,214°	34,8°	0,235	173°	123°	355°
Юнона	2,67	4,36	474	0,226°	13,0°	0,257	171°	57°	243°
Веста	2,36	3,63	504	0,272°	7,1°	0,090	104°	254°	341°
Икар	43,19	283,82	366	0,003°	17,2°	0,051	273°	10°	87°
Варуна	39,43	247,61	367	0,004°	19,8°	0,241	71°	11°	262°

3 және 4 кестелерде үлкен мен кіші планеталардың орбита элементтерінің мәндері көрсетілген (белгіленулер: a – үлкен жарты осі, а.б.; T – сидерикалық период, жылдар; S – синодикалық период, тәулік; n – тәулік бойынша орташа қозғалыс, градус; e – эксцентриситет; i – эклиптикаға еңкею, градус; Ω – түйіннің бойлығы, градус; π – перигелийдің бойлығы, градус; M_0 – орташа аномалия (2000 дәуір), градус).

2.2.2 Гиперболалық қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c \neq 0, \lambda > \mu, h > 0, p \neq 0, e > 1$ мәндерге ие болса *гиперболалық қозғалыс* болады.

Эллипстік және гиперболалық қозғалыстардың бір бірінен айырмашылығы көп болса да, олардың қозғалысын сипаттайтын теңдеулердің құрылымы ұқсас екенін байқалады. Сондықтан эллипстік теңдеулерде осындай өзгерістер еңгіземіз:

$$\sin E \rightarrow shH, \cos E \rightarrow chH, tgE \rightarrow thH,$$

осында H - өлшемі жоқ айнымалы шама, $-\infty$ -ден $+\infty$ дейін өзгереді. Сонда, шын аномалиямен H шаманың байланысы

$$tg v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} th \frac{H}{2}. \quad (2.59)$$

Гиперболалық қозғалыс үшін Кеплер теңдеуінің аналогы

$$e \cdot chH - H = n(t - \tau). \quad (2.60)$$

Орбиталдық координаттар (a – гиперболаның жарты осінің нақты мәні)

$$\begin{aligned} \xi &= a(e - chH), \\ \eta &= a\sqrt{e^2 - 1} \cdot shH, \\ r &= a(e \cdot chH - 1). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Қозғалыс жылдамдығы

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{e \cdot chH + 1}{e \cdot chH - 1}. \quad (2.62)$$

Егер материалдық нүкте гипербола бойымен шексізге ұмтылса, оның жылдамдығы

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (2.63)$$

бұл теңдеу жылдамдықтың *гиперболалық артығы* деп аталады.

Сонда екі дене есебінің шешімі бойынша гиперболалық орбита бойымен қозғалатын нүктенің координаттары

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (e - chH) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{e^2 - 1} \cdot shH \right]. \quad (2.64)$$

2.2.3 Шеңберлік қозғалыс

Егер $c \neq 0, \lambda = 0, h < 0, p \neq 0, e = 0$ болса, сол кезде екі дене есебіндегі қарапайым қозғалыстың түрі - *шеңберлік қозғалыс* болады. Тек шеңберлік қозғалыс үшін қозғалыстағы дененің жылдамдығының координаттары мен компоненттері айқын уақыт функцияларымен анықталады. Осы қозғалыста перицентр және апоцентр сипаттамалары болмайды, сондықтан ω - перицентрлік арақашықтықтың мағынасы болмайды.

Шеңберлік орбитада дененің орналасу бұрышын орбитаның *жоғары (солтүстік) түйіннен* есептеуге болады. Сол кезде ν - шын аномалия бір жағынан u - ендік аргументімен, екінші жағынан E - эксцентрлік аномалиямен және M - орташа аномалиямен сәйкес келеді. Орбитаның векторлық элементтерінің мағынасы болмайды.

Шеңберлік қозғалыс орбитаның төрт элементтерімен анықталады:

r - орбитаның радиусы,

Ω - бұрыштың бойлығы,

i - орбита еңкеюі,

τ - материалдық нүктенің жоғары түйін арқылы өту мерзімі (немесе t_0 - бастапқы дәуіріндегі M_0 - орташа аномалия).

Аспан денесі шеңберлік орбита бойымен қозғалса ($r = p = a$), бастапқы тікбұрышты координаттары

$$\begin{aligned} x &= a(\cos \Omega \cos M - \sin \Omega \sin M \cos i), \\ y &= a(\sin \Omega \cos M - \cos \Omega \sin M \cos i), \\ z &= a \sin M \sin i, \end{aligned} \quad (2.65)$$

мен орбиталдық тікбұрышты координаттары және жылдамдық компоненттері:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a \cos M, & \dot{\xi} &= -an \sin M, \\ \dot{\eta} &= a \sin M, & \dot{\eta} &= an \cos M, \end{aligned} \quad (2.66)$$

осында

$$M = n(t - \tau) = n(t - t_0) + M_0, \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} \quad (2.67)$$

n - қозғалыстың тұрақты бұрыштық жылдамдық.

(2.67) формула арқылы шеңберлік қозғалыс үшін Кеплердің үшінші заңын және қозғалыстың сызықты жылдамдығын анықтауға болады

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{3/2}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (2.68)$$

Табиғатта әрдайым ұйытқу факторлары аспан денесінің қозғалысына әсеретеді. Сондықтан шеңберлік қозғалыс табиғатта болмайды, оны бірақ эксцентриситеті төменгі эллипстік қозғалыстың қарапайым жуықтауы ретінде қарастырады.

2.2.4 Параболалық қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c \neq 0, \lambda = \mu, h = 0, p \neq 0, e = 1$ мәндерге ие болса **параболалық қозғалыс** болады.

Қозғалыс заңы

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.69)$$

Егер

$$\cos v = \frac{1 - tg^2 \frac{v}{2}}{1 + tg^2 \frac{v}{2}}, \quad (2.70)$$

болса

$$\int_0^v \left(1 + tg^2 \frac{v}{2}\right) \sec^2 \frac{v}{2} dv = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.71)$$

p - орбита параметрінің орнына $2q$ (q – параболаның төбесінен фокусқа дейін арақашықтық немесе *парабола үшін перицентрлік арақашықтық*) және $\sigma = tg\left(\frac{v}{2}\right)$ теңдеуге енгізгенде, интегралдын шешімі – **Баркер теңдеуі**

$$\sigma^3 + 3\sigma - 3n(t - \tau) = 0, \quad (2.72)$$

осында

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2} q^{-3/2}}. \quad (2.73)$$

Орбита теңдеуіне енгізгенде

$$r = q(1 + \sigma^2),$$

және егер

$$\sin \nu = \frac{2tg \frac{\nu}{2}}{1 + tg^2 \frac{\nu}{2}},$$

болса, орбиталды координаттар:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \nu = q(1 - \sigma^2), \\ \eta &= r \sin \nu = 2q\sigma. \end{aligned} \quad (2.74)$$

және бастапқы тікбұрышты координат жүйесінің координаттары

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (1 - \sigma^2) + 2 \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sigma \right]. \quad (2.75)$$

Параболалық қозғалыс кезіндегі жылдамдықтың модулі

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}. \quad (2.76)$$

Табиғатта ұйытқулар болғандықтан, параболалық қозғалыс болу мүмкін емес. Бірақ эллипстік және гиперболалық қозғалыс кезінде эксцентриситетің мәні 1-ге жақындаса осы қозғалысты қарастырады. Мысалы кометалардың қозғалысы.

2.2.5 Түзусызықты қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c = 0, \lambda = \mu, h \neq 0, p = 0, e = 1$ мәндерге ие болса **түзусызықты қозғалыс** болады.

Орбитаның сызығы координат басы нүктесінен өтеді, өйткені $\vec{r} \updownarrow \dot{\vec{r}}$. Бағыттау векторы ретінде бастапқы вектор \vec{r}_0 алынады.

Осы жағдайда векторлық теңдеу

$$\vec{r}_0 \times \vec{r} = 0,$$

және скалярлық теңдеулер

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}. \quad (2.77)$$

Сонда

$$V^2 = \dot{r}^2$$

және энергия интегралын табу арқылы осы траекторияның қозғалыс заңын анықтауға болады.

Интегралдың шешімін қарапайым жолымен анықтау үшін берілген шамаларды басқа шамаларымен ауыстырамыз

$$\sqrt{|h|} dt = \sqrt{\frac{\mu}{a}} dr = rd\eta, \quad (2.78)$$

осында

$$a = \frac{\mu}{|h|},$$

η - жаңа өлшемі жоқ айнымалы шама. Сонда

$$\eta = \int \frac{dr}{\sqrt{2ar + \text{sign}(h) \cdot r^2}}. \quad (2.79)$$

$r_0 = 0$ кезінде келесі шамаларды анықтауға болады

$$\begin{aligned} a(1 - \cos \eta), & \quad h < 0, \\ r = \frac{a}{2} \eta^2, & \quad h = 0, \\ a(ch\eta - 1), & \quad h > 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Осы жағдайда t уақыт η аргументімен осындай байланыста болады

$$\begin{aligned} \eta - \sin \eta, & \quad h < 0, \\ \frac{\eta^3}{6} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_0), & \quad h = 0, \\ sh\eta - \eta & \quad h > 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Егер $e \rightarrow 1$, $a = \text{const}$ болса η - эксцентрлік аномалияның және оның гиперболалық аналогының шектеулі мәні болады. (2.81)-дің бірінші және үшінші қатынастары – Кеплер теңдеуінің және оның гиперболалық аналогының шектеулі формалары. a - эллипстің үлкен жартылай осінің немесе гиперболаның нақты жартылай осінің шектеулі мәні. Егер $h < 0$ болса, $a = \max(r)$. Осы теңдеулер Ньютонның тартылыс өрісіндегі бір материалдық нүктенің қозғалысын және сфера-симметриялық шаңды бұлттың эволюциясын сипаттайды.

Бақылау сұрақтары

1. Барицентрлік және салыстырмалы координат жүйелеріндегі екі дене есебінің қозғалыс теңдеулері.
2. Екі дене есебіндегі орбита теңдеуі және қозғалыс заңы.
3. Кеплер заңдары.
4. Орбитаның Кеплер элементтері.
5. Екі дене есебіндегі қозғалыстың классификациясы.
6. Кеплер қозғалысының арнайы түрі: эллипстік қозғалыс.
7. Кеплер қозғалысының арнайы түрі: гиперболалық қозғалыс.
8. Кеплер қозғалысының арнайы түрі: шеңберлік қозғалыс.
9. Кеплер қозғалысының арнайы түрі: параболалық қозғалыс.
10. Кеплер қозғалысының арнайы түрі: түзусызықты қозғалыс.

III. КЕПТЕР ҚОЗҒАЛЫС ТЕОРИЯСЫНЫҢ ҚОСЫМША БӨЛІМДЕРІ

3.1 Ұйытқысыз қозғалыстың эфемеридаларын анықтау

Эфемерида дегеніміз - аспан денесінің уақыт бойынша геоцентрлік орналасуы координаттарының жиынтығы.

Аспан сферасында қозғалыстағы денелердің орналасуын аспан экваториалдық координаттары арқылы сипаттауға болады: тік шарықтауымен (α), еңкеюмен (δ). Кеністікте дененің орналасуын анықтау үшін тағы ρ -геоцентрлік арақашықтық қажет.

Екі дене есебінің жалпы шешімі аспан шырақтарының (планеталар, астероидтар және кометалар) ұйытқысыз эфемеридаларын анықтауға мүмкіндік береді.

Мысалы: $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$ белгілі кептер элементтерімен ұйытқысыз орбита бойымен Күн айналасында дене қозғалады. Егер $t_1, t_2 \dots t_k$ уақыт мезетінде Күннің X, Y, Z - тікбұрышты геоцентрлік экваториалды координаттары берілсе осы уақыт мезетіндегі дененің p, α, δ сфералық геоцентрлік экваториалды координаттарын анықтау керек. Осы есептің ерекшелігі, бұрыштың кептер элементтері эклиптикалық координат жүйесіне жатады, ал бізге дененің экваториалдық координаттарын анықтау қажет.

Есептің шешімін табу үшін TM_0M үшбұрышты қарастырамыз (T - Жер, M_0 - Күн, M - аспан денесі орналасу нүктелері).

Сонда

$$\vec{\rho} = \{\rho \cos \delta \cos \alpha, \rho \cos \delta \sin \alpha, \rho \sin \delta\} \quad (3.1)$$

- M дененің геоцентрлік радиус-векторы;

$$\vec{r}_{\text{экс}} = \{x_{\text{экс}}, y_{\text{экс}}, z_{\text{экс}}\}$$

- гелиоцентрлік экваториалдық координат жүйесіндегі M дененің радиус-векторы;

$$\vec{R} = \{X, Y, Z\}$$

- геоцентрлік экваториалды координат жүйесіндегі Күннің радиус-векторы.

Үш вектордың байланысы:

$$\vec{\rho} = \vec{r}_{\text{экс}} + \vec{R}. \quad (3.2)$$

$\vec{r}_{\text{экс}}$ векторды \vec{r} радиус-вектор арқылы анықтауға болады

$$\begin{vmatrix} x_{\text{эке}} \\ y_{\text{эке}} \\ z_{\text{эке}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

ε - экватормен эклиптика жазықтары арасындағы екіжақты бұрыш.

Сонда

$$\begin{vmatrix} x_{\text{эке}} \\ y_{\text{эке}} \\ z_{\text{эке}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{\tau} & A'_{\tau} \\ B_{\tau} & B'_{\tau} \\ C_{\tau} & C'_{\tau} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}, \quad (3.4)$$

осында

$$\begin{vmatrix} A_{\tau} & A'_{\tau} \\ B_{\tau} & B'_{\tau} \\ C_{\tau} & C'_{\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{\tau} & \alpha'_{\tau} \\ \beta_{\tau} & \beta'_{\tau} \\ \gamma_{\tau} & \gamma'_{\tau} \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

Бағыттау косинустары $\alpha_{\tau}, \beta_{\tau}, \dots, \gamma'_{\tau}$ және орбиталдық координаттар ξ, η эллипстік қозғалыс теңдеулері арқылы есептелінеді.

Тік шарықтау, еңкею және геоцентрлік арақашықтық төменгі теңдеулер жүйесі арқылы анықталады:

$$\begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x_{\text{эке}} + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y_{\text{эке}} + Y, \\ \rho \sin \delta &= z_{\text{эке}} + Z. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Еңкею $-90^{\circ} \leq \delta \leq 90^{\circ}$, тік шарықтау $[0, 24^h]$ диапазондарында анықталады.

Осындай теңдеулер арқылы Күн жүйесіндегі кіші денелердің эфемеридалары анықталып, арнайы астрономиялық жылнамаларға енгізіледі.

3.2 Эллипстік қозғалысының қатарлары

Ұйытқысыз қозғалыс теңдеуінің жалпы шешімін белгілі бір формадағы теңдеу ретінде қарастыруға мүмкін емес (тек қана шеңберлік және параболалық түріндегі түсусыздықты қозғалыс кезінде жазуға болады).

Себебі, эксцентрілік аномалия уақытқа тәуелділігі Кеплер теңдеуімен

$$E - e \sin E = n(t - \tau). \quad (3.7)$$

ξ, η - орбиталдық координаттар және r - полярлық радиус

$$\begin{aligned}\xi &= a(\cos E - e), \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2} \sin E, \\ r &= a(1 - e \cos E)\end{aligned}\tag{3.8}$$

теңдеулерімен анықталады.

Бірақ ұйытқысыз қозғалыстың аналитикалық теориясын құрастыру үшін X, Y, Z координаттары мен $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ жылдамдықтарының уақытқа тәуелділіктері айқын болу керек. Осындай тәуелділіктерді тек қана шексіз қатарлар формасында жазу мүмкін.

Эллипстік қозғалыстың сандық сипаттамаларын қатарларға жіктейді. Ең бірінші сипаттама – эксцентрлік аномалия: $E - e \sin E = M$. Кеплер теңдеуі – трансцендетті (тригонометриялық құраушысы бар), сондықтан эксцентрлік аномалияны M және e аргументтері бар элементарлы функция ретінде анықтауға мүмкіндік болмайды.

Үлкен және көптеген кіші планеталар, өздерінің табиғи серіктері және Жердің жасанды серіктері үшін орбиталар эксцентриситеті кіші болады: $e \ll 1$. Осы жағдай үшін Кеплер теңдеуінің сандық шешімі итерация әдісімен табылады. Сонда

$$E_{n+1} = e \sin E_n + M\tag{3.9}$$

E_0 - алғашқы жуықтау ретінде M - орташа аномалияның мәні алынады.

Сонда итерациялық процестің жинақтылық шарты орындалады

$$|e \sin E| \leq e < 1.\tag{3.10}$$

Итерация санын азайтуға болады, егер алғашқы жуықтау ретінде арнайы кестелерден Кеплер теңдеудің жуықтау шешімі алынса. Бірақ қолданбалы және теориялық есептерінде Кеплер теңдеудің аналитикалық шешімі қажет. Сол кезде шешімді e эксцентриситеттің дәрежесі бойынша қатарлары арқылы табады. Ал E - эксцентрлік аномалия M - орташа аномалияның периодтық функциясы болады. Осы жағдай E шамасын орташа аномалия бойынша Фурье қатарына жіктеуге болатынын көрсетеді.

3.2.1 Кеплер теңдеуінің шешімі

Кеплер теңдеудің шешімін

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^k\tag{3.11}$$

дәрежелік қатар арқылы табу үшін, осы қатардың E_k коэффициенттерін анықтау қажет

$$E_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{dE(e)}{de} \right|_{e=0}. \quad (3.12)$$

Бірақ кез-келген дәрежедегі туындысын анықтау үшін Лагранж теоремасы қолданылады.

Кеплер теңдеуінің шешімін эксцентрлік аномалияның комплекстік мәндері үшін және M - орташа аномалияның тұрақты нақты мәні кезіндегі e - эксцентриситеттің мәні үшін қарастырамыз

$$F(E, e) = E - e \sin E - M = 0. \quad (3.13)$$

Осы теңдеудің $E = E(e, M)$ шешімі Лагранж қатары ретінде табылады

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\sin^n M). \quad (3.14)$$

$e = 0$ кезінде эксцентрлік аномалия орташа аномалияның мәніне тең болады: $E = M$. Кеплер теңдеулерінде M - орташа аномалия – тұрақты параметр, оның мәндері кез келген болу мүмкін. Сондықтан $E = E(M, e)$.

Кеплер теңдеуін e және M бойынша дифференциалдаған кезінде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial e} (1 - e \cos E) - \sin E &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial M} (1 - e \cos E) - 1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

дербес туындылар үшін тәуелділіктері анықталады

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \sin E \frac{\partial E}{\partial M} \quad (3.16)$$

немесе

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}. \quad (3.17)$$

Осыдан

$$E - e \sin E = M,$$

$$1 - e \cos E = 0,$$

сонда

$$e = \frac{1}{\cos E}. \quad (3.18)$$

Осыдан Лагранж қатарларының жинақтылық радиусы

$$e_0 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma_0\right)} = \frac{1}{sh\sigma} = 0.6627. \quad (3.19)$$

Осы теңдеу *Лаплас шегі* деп аталады. Егер $e < e_0$ - Лагранж қатарлары жинақталады; $e \gg e_0$ - қатарлардың таралғыштығы байқалады.

Сонда (3.11) формуламен берілген қатардың коэффициенттері

$$E_0 = M, E_1 = \sin M, E_2 = \frac{1}{2} \sin 2M. \quad (3.20)$$

және Кеплер теңдеуінің шешімі

$$E = M + e \sin M + e^2 \frac{1}{2} \sin 2M + \dots \quad (3.21)$$

3.2.2 Эллипстік қозғалыстың дәрежелік қатарлары

$e \ll 1$ болған жағдайда дәрежелік қатарларды жазуға болады. Сол үшін $\cos E$ және $\sin E$ қатарларын қолдану қажет

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^k, \quad \sin E = \sum_{k=0}^{\infty} S_k e^k. \quad (3.22)$$

осында

$$C_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (-\sin^{k+1} M). \quad (3.23)$$

(3.23) формула бойынша бірінші коэффициенттерін анықтаған кезінде

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2} (\cos 2M - 1) + \frac{3}{8} e^2 (\cos 3M - \cos M) + \dots \quad (3.24)$$

Кеплер теңдеуінен

$$\sin E = \frac{E - M}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^{k-1} - \frac{M}{e}. \quad (3.25)$$

(3.22) және (3.25) салыстырған кезінде

$$S_k = E_{k+1}. \quad (3.26)$$

Егер кейінгі қатарлардың коэффициенттерін E_k - негізгі қатардың коэффициенттері арқылы және C_k қатарларын эксцентрлік аномалиямен оның косинустары арқылы жазылса, сонда орбита теңдеулері

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E. \quad (3.27)$$

Негізгі қатарлардың коэффициенттерінің өлшемі болмайды, сондықтан барлық шамаларды өлшемі жоқ түріне келтіріледі. (3.27) формула қатар ретінде жазылады

$$\frac{r}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k e^k, \quad (3.28)$$

осында

$$R_k = C_{k-1} \quad (k \neq 0), \quad R_0 = 1. \quad (3.29)$$

Өлшемсіз орбиталдық координаттардың теңдеулері

$$\frac{\xi}{a} = \cos E - e, \quad \frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2} \sin E \quad (3.30)$$

және олардың дәрежелік қатарлары

$$\frac{\xi}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \Xi_k e^k, \quad \frac{\eta}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k e^k. \quad (3.31)$$

Осында

$$\Xi_k = C_k \quad k \neq 1, \quad \Xi_1 = C_1 - 1$$

және

$$H_k = \sum_{s=0}^k \alpha_s S_{k-s} = \sum_{s=0}^k \alpha_s E_{k-s+1} \left(\alpha_0, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_{2j} = (-1)^j \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}, \alpha_{2j+1} = 0 \right).$$

Бастапқы координат жүйесінің координаттарының қатарлары

$$\frac{x}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k e^k, \quad \frac{y}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k e^k, \quad \frac{z}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k e^k \quad (3.32)$$

және орбиталдық координаттарымен байланысы

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \Xi_k + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot H_k. \quad (3.33)$$

Өлшемсіз жылдамдықтың қатарын анықтау үшін энергия интегралы қолданылады

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a}{r} - 1. \quad (3.34)$$

M бойынша Кеплер теңдеуі дифференциалдағанда

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r} \quad (3.35)$$

кері арақашықтық қатарының коэффициенттері анықталады. Кері арақашықтық қатары

$$\frac{a}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{R}_k e^k, \quad \tilde{R}_k = \frac{dE_k}{dM}. \quad (3.36)$$

(3.34) теңдеуді қатар арқылы жазғанда

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^{(2)} e^k, \quad (3.37)$$

қатардың коэффициенттері

$$V_k^{(2)} = 2\tilde{R}_k \quad (k \neq 0), \quad V_0^{(2)} = 1. \quad (3.38)$$

Сонда

$$\frac{V_n}{na} = \frac{r \dot{v}}{na} = \frac{\sqrt{\mu p}}{nar} = \frac{a}{r} \cdot \sqrt{1 - e^2}, \quad (3.39)$$

және

$$\frac{\dot{v}}{n} = \frac{V_n}{nr} = \frac{a}{r} \cdot \frac{V_n}{na}. \quad (3.40)$$

теңдеулерді қолданып, қатарларды өзара бір-біріне көбейтіп, уақыт бойынша көбейтіндінің интегралын анықтау арқылы шын аномалияның қатары табылады

$$v = \sum_k v_k e^k. \quad (3.41)$$

Бұл теңдеу – *центр теңдеуі* деп аталады. Осы қатардың бірінші құраушылары

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots \quad (3.42)$$

3.2.3 Эллипстік қозғалыстың тригонометриялық қатарлары

$0 < e < 1$ болған жағдайда тригонометриялық қатарларды жазуға болады, сонда M - орташа аномалия бойынша Фурье қатарлары алынады. Эллипстік қозғалыс кезінде эксцентрлік аномалия және оған тәуелді сипаттамалар, орташа аномалияға тәуелді периодтық функциялар болады.

2π периоды бар жұп периодты функциялар үшін Фурье қатары:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (3.43)$$

осында Фурье коэффициенттері

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx. \quad (3.44)$$

Тақ функциялар үшін

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (3.45)$$

осында Фурье коэффициенттері

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (3.46)$$

Эксцентрлік аномалия және оның косинусы үшін негізгі қатарларының Фурье коэффициенттерін анықтауға болады. $E - M$ шамасы үшін

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (E - M) \sin kM dM. \quad (3.47)$$

(3.47) теңдеуін E айнымалы шамасы бойынша бөліп интегралдау арқылы Фурье қатарының коэффициенттері анықталады

$$b_k = \frac{2}{k\pi} \left[-(E - M) \cos kM \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos kM (dE - dM) \right] = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(kE - ke \sin E) dM, \quad (3.48)$$

$$a_k = \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)]. \quad (3.49)$$

Бессель функциясын $J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (k\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$ қолданған кезінде

$$b_k = \frac{2}{k\pi} J_k(ke), \quad (3.50)$$

$$a_k = \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)]. \quad (3.51)$$

Фурье қатары эксцентрлік аномалия және оның косинусы үшін төменгі теңдеулерімен анықталады

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM, \quad (3.52)$$

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM. \quad (3.53)$$

Енді эллипстік қозғалыстың басқа сипаттамалары үшін Фурье қатарлары

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} - e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM, \\ \frac{\xi}{a} &= -\frac{3}{2}e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM, \\ \frac{\eta}{a} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Бессель функциясы абсолютті жинақтықлық дәрежелік қатарларына жіктеледі

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2j}}{k!(k+j)!} \quad (3.55)$$

Егер $(x = ke)$ (3.55) теңдеуін (3.52), (3.53) және (3.54) теңдеулеріне енгізгенде, эксцентриситет дәрежесі бойынша тригонометриялық қатарларын алуға болады.

3.3 Екі дененің шектеулі есебі. Орбитаны анықтау

Екі дене есебін бастапқы және шектеулі шарттар арқылы шешуге болады.

Астрометриялық бақылаулар тек қана аспан денесіне бағытын көрсетеді. Аспан денесінің екі бұрыштық координаттары беріледі. Сондықтан орбитаның 6 элементін анықтау үшін кемінде үш бақылаудың нәтижесі қажет (тек шеңберлік орбита кезінде екі бақылау жеткілікті). Орбита элементтерін анықтау үшін шектеулі шарттар қажет: $t_{1,2}$ уақыт мезетінде бұрыштық координаттар (экваториалды α_k, β_k) арқылы $\vec{r}_{1,2}$ радиус-векторларының мәндері.

Үш бақылау арқылы *эллипстік орбитаны Гаусс әдісімен* анықтайды. Радиус-векторлар бір жазықта орналасқандықтан

$$\vec{r}_0 = c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2,$$

c_1, c_2 коэффициенттерінің мәндері \vec{r}_k векторлар арқылы құрастырылған үшбұрыштар аудандарының қатынастарына тең. Және осы кезде Кеплердің екінші заңы бойынша эллипстік секторлар үшін аудандардың қатынасы белгілі болады. Сонда, үшбұрыштың ауданының эллипстік сектордың ауданына қатынасы негізгі есеп ретінде қарастырылады. Бірақ эллипстік сектордың ауданы оның төбесінің координаттары арқылы берілмегендіктен, бұл есе өте күрделі болады. Есептің шешімін бірінші жуықтау (қозғалыс шеңберлік орбита бойымен болады) арқылы анықтайды. Осындай жуықтауды тек кіші планеталардың орбиталарын анықтау кезінде алады. Сонда бақылауларда орбита доғасының кіші бөлігі көрінеді және эксцентриситеттің мәні үлкен болмайды.

Параболалық орбитаны Ольберс әдісі арқылы анықтайды.

Орбитаны анықтаудың тағы бір әдісі – Ламберт теоремасы қолдану. Бұл теорема эллипс орбитаның бірнеше сипаттамасын байланыстырады:

1. a - үлкен жарты осін;
2. Екі нүктенің радиустарын $r_{1,2}$;
3. Екі нүкте арасындағы хорда ұзынғын c ;
4. Қозғалыстағы материалдық нүктенің r_1 және r_2 нүктелер арасындағы

орбита доғасын өту уақытын $\Delta t = t_2 - t_1$.

Осы кезде доғаның мәні 180° кіші немесе үлкен болуын және $\vec{r}_{1,2}$ нүктелерді қосатын хорда, эллипстің үлкен осін қиып өту немесе өтпеуін ескеру қажет. Сол үшін қосымша шаманы енгіземіз: a_m - шектеулі эллипстің үлкен жарты осін. Осы шектеулі эллипстің ерекшелігі: P_1P_2 хорда оның басқа фокусы арқылы өтеді. Сонда

$$a_m = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + c). \quad (3.56)$$

Осы шектеулі орбита арқылы ұшып өту мерзімі

$$\Delta t_m = \frac{a_m^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\pi - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)]. \quad (3.57)$$

Сонда Ламберт теоремасы

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = a^{3/2} [\pi + \text{sign}(\Delta t_m - \Delta t)(\varepsilon - \sin \varepsilon) - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)], \quad (3.58)$$

осында

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{a_m}{a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{a_m - 2c}{a}}, \quad c = \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2}, \quad (3.59)$$

$$\Phi = \nu_2 - \nu_1, \quad (3.60)$$

Φ - $\vec{r}_{1,2}$ векторлар арасындағы бұрыш. Осы кезде $0 < \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Егер $\vec{r}_{1,2}$ векторлар белгілі болса, $\sin \Phi$ және $\cos \Phi$ осы векторлардың векторлық және скалярлық көбейтіндісі арқылы анықталады. Сонда a - үлкен жарты осіне байланысты теңдеу ретінде қарастыруға және сан ретінде шешімін табуға болады.

a шамасы белгілі болса, орбита параметрін анықтауға болады

$$p = \frac{r_1 r_2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{a \sin \frac{\varepsilon - \gamma}{2}}, \quad (3.61)$$

осында

$$\gamma = (\text{sign}(\Delta t_m - \Delta t) \cdot \text{sign}(\sin \Phi)) \cdot \delta. \quad (3.62)$$

Орбитаның векторлық элементтері

$$\vec{P} = \frac{e + \cos \nu_{1,2}}{p} \cdot \vec{r}_{1,2} - \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \cdot \sin \nu_{1,2} \cdot \dot{\vec{r}}_{1,2}, \quad (3.63)$$

$$\vec{Q} = \frac{\sin \nu_{1,2}}{p} \cdot \vec{r}_{1,2} - \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \cdot \cos \nu_{1,2} \cdot \dot{\vec{r}}_{1,2}. \quad (3.64)$$

Осы теңдеулерден $\vec{r}_{1,2}$ жою арқылы, Ω, ω, i элементтерді анықтауға болады. \vec{P} мен \vec{Q} векторларды жою арқылы \vec{r}_2 және $\dot{\vec{r}}_2$ анықтауға болады

$$\vec{r}_2 = \left[1 - \frac{r_2}{p}(1 - \cos \Phi) \right] \cdot \vec{r}_1 + \frac{r_1 r_2}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_1 \quad (3.65)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \left[\frac{\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1}{p r_1} (1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi \right] \cdot \vec{r}_1 + \left[1 - \frac{r_1}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_1. \quad (3.66)$$

Осы теңдеулерінде «2» индексін жазбағанда және «1» индексі орнына «0» индексін қойғанда, кез келген уақыт мезеті үшін, бастапқы шартына байланысты, радиус-вектор және жылдамдық векторының тәуелділіктері анықталады

$$\vec{r} = \left[1 - \frac{r}{p}(1 - \cos \Phi) \right] \cdot \vec{r}_0 + \frac{r r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_0, \quad (3.67)$$

$$\dot{\vec{r}} = \left[\frac{\vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0}{p r_0} (1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi \right] \cdot \vec{r}_0 + \left[1 - \frac{r_0}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_0, \quad (3.68)$$

осында $\Phi = \nu - \nu_0$. Егер Ламберт теоремасында $a \rightarrow \infty$ кезінде шектеулі ауысу жасағанда Эйлер теоремасы пайда болады

$$6\sqrt{\mu}\Delta t = (r_1 + r_2 + c)^{3/2} - \text{sign}(\Phi)(r_1 + r_2 - c)^{3/2}. \quad (3.69)$$

Осы теорема Ольбертс әдісі бойынша параболалық орбитаны анықтау кезінде қолданылады.

Ламберт және Эйлер теоремалары орбита бойындағы бір нүктеден екіншісіне дейін кеткен ұшу уақытын есепетеу үшін қолданылады. Қазіргі уақытта қос жұлдыз жүйесінің орбитасын анықтау аспан механикасының негізгі есебі ретінде қарастырылады. Жүйе компоненттерінің қозғалысы бейнелік жазықтықтағы проекция ретінде бақыланады, сондықтан бұл есептің шешімі оңай жолмен табылмайды. Шешімін анықтау үшін қос жүйенің типін ескеру қажет. Аспан механикасының тағы бір арнайы есебі – Күннің және Айдың тұтылуының уақытын анықтау.

3.4 Гамильтон-Якоби әдісі арқылы екі дене есебін интегралдау

Екі дене есебінің шешімін анықтау үшін алдыңғы дәрістерде бірінші интегралдар әдісі бойынша анықтауға мүмкіндігі көрсетілді. Енді екі дене есебінің шешімін Гамильтон-Якоби әдісін қолдана отырып сфералық координаттар арқылы табамыз.

Есептің потенциалы $V = \frac{\mu}{r}$ бір координатаға тәуелді болғандықтан, сфералық координат жүйесін қолданамыз. Осында бұрыштық координаттары φ

- ендік, λ - бойлық. Бұл әдісті қолданар алдында r, λ, φ координаттарының R, Λ, Φ - жалпыландырылған импульстерін анықтау қажет.

q_i жалпыландырылған координатаға сәйкес келетін p_i жалпыландырылған импульсі

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (3.70)$$

осында L - Лагранж функциясы. Ол T - кинетикалық және V - потенциалды энергияларының айырмасына тең, немесе $L = T + V$.

Сфералық координаттары арқылы жазылған кинетикалық энергия

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2). \quad (3.71)$$

Сонда Лагранж функциясы

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2) + \frac{\mu}{r}. \quad (3.72)$$

Осыдан

$$R = \dot{r}, \quad \Phi = r^2\dot{\varphi}, \quad \Lambda = r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}. \quad (3.73)$$

Консервативті есептерінде екі дене есебінің Гамильтон функциясы

$$H = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (3.74)$$

Гамильтон-Якоби теңдеуін жазу үшін S - әрекет шамасының уақыт және Гамильтон функциясы бойынша дербес туындылары қолданылады. Әрекеттің формуласы

$$S = W(q_i) - \alpha_1 t, \quad (3.75)$$

осында W - қисынды әрекет. Сонда Гамильтон-Якоби теңдеуі

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.76)$$

Енді осы теңдеудің жалпы интегралын табу үшін айнымалы шамаларын бөлеміз

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda) \quad (3.77)$$

және (3.76) теңдеуге енгізу арқылы

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}\left(\frac{\partial W_3}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.78)$$

Егер

$$\frac{\partial W_3}{\partial \varphi} = \alpha_3 \text{ және } \left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi} = \alpha_2^2$$

болса

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.79)$$

Осыдан қисынды әрекет

$$W = \alpha_3 \lambda + \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \int \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr. \quad (3.80)$$

Есептің жалпы шешімі

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (3.81)$$

біздің жағдай үшін

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = t + \alpha_1, \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - \alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2, \quad (3.83)$$

$$\lambda - \alpha_3 \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = \beta_3. \quad (3.84)$$

α_i, β_i - интегралдаудың алты тұрақтысы, Гамильтон –Якоби формасындағы екі дене есебінің жалпы шешімін береді және **Якоби элементтері** деп аталады.

Осы Якоби элементтерінің Кеплер элементтерімен байланысын анықтау қажет. Сол үшін (3.82)-(3.84) интегралдарын есептеу керек.

Егер $\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} = \cos^2 i$ ретінде қарастырсақ (3.84) теңдеуінде сәйкес ауыстырып,

интегралдау және түрлендіру арқылы келесі байланысын аламыз

$$\tan \varphi = \tan i \cdot \sin(\lambda - \beta_3). \quad (3.85)$$

(3.85) формуласын $r \cos \varphi \cos i$ шамасына көбейтіп, декарт және сфералық белгілі байланыстарын ескере отырып

$$\sin \beta_3 \sin i \cdot x - \cos \beta_3 \sin i \cdot y + \cos i \cdot z = 0 \quad (3.86)$$

қозғалыс жазықтығының теңдеуін аламыз. Осында β_3 - түйіннің бойлығы және i бұрышы орбитаның еңкеюіне тең болады.

(3.83) теңдеуінің бірінші интегралын табу үшін интегралдау айнымалы шамасын ауыстырамыз

$$\sin \varphi = \sin i \sin u, \quad (3.87)$$

осында $u = \omega + \nu$. Сонда интегралдау арқылы келесі теңдеуін аламыз

$$\alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = u - \beta_2. \quad (3.88)$$

$s = 1/r$ ауыстыру арқылы (3.88) интегралын есептейміз, сонда

$$r = \frac{\frac{\alpha_2^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2} \cos(u - \beta_2)}}. \quad (3.89)$$

Салыстыру арқылы Кеплер элементтерін анықтаймыз

$$\frac{\alpha_2^2}{\mu} = p, \quad \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}} = e, \quad \beta_2 = \omega, \quad (3.90)$$

осыдан

$$\alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_1 = \frac{\mu}{2p} (e^2 - 1). \quad (3.91)$$

Қосымша есептеулер арқылы келесі элементтерді анықтаймыз

$$\alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i \quad \text{немесе} \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \quad (3.91)$$

және

$$\beta_1 = -\tau, \quad \Omega = \beta_3. \quad (3.91)$$

3.5 Орталық күш әсерінен пайда болатын қозғалыс

Екі дене есебінде күштің негізгі ерекшелігі – күштің әрекет сызығы бір ғана нүкте - тартылыс орталығы (центрі) арқылы өтеді. Сонда күшті осы түрінде жазуға болады

$$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{r}^0, \quad (3.94)$$

\vec{r}^0 - \vec{r} радиус-вектордың орты, $F(r)$ - күш функциясы. Оның модулі - күштің шамасын, таңбасы - әрекеттің сипаттамасын анықтайды.

Кез келген орталық күш әсерінен пайда болатын қозғалыстың есебін қарастырамыз. Осы күштің функциясы

$$F = F(r, \dot{r}, t), \quad (3.95)$$

r - арақашықтық, оның өзгеру жылдамдығына \dot{r} және t уақытқа тәуелді болады. Осы есепті шығару арқылы орталық күш әсерінен және арақашықтыққа байланысты пайда болатын екі дене есебінің қасиеттерін анықтауға болады. Сонымен қатар осы есеп кейбір жағдайларда практикалық қолданыста болады. Мысалы: жұлдыздардың домалақ шоғырлануының ішіндегі жұлдыздың қозғалысын қарастырғанда F функцияның түрі осы шоғырланудағы жұлдыздар тығыздығының таралуымен анықталады.

Осы есептің салыстырмалы қозғалыс кезіндегі теңдеу

$$\ddot{\vec{r}} - F(r, \dot{r}, t) \cdot \vec{r}^0 = 0 \quad (3.96)$$

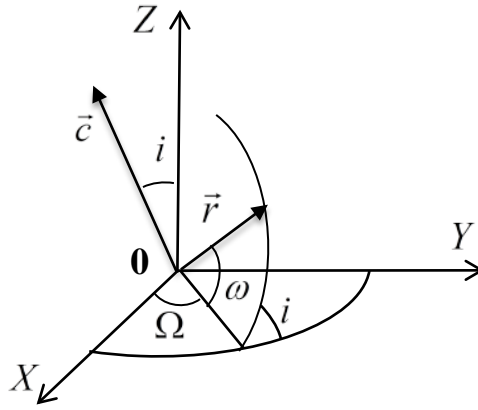
Осы теңдеудің сол жағындағы шамасын \vec{r} радиус-векторына көбейткенде момент интегралы пайда болады

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \quad (3.97)$$

Осыдан қозғалыстың жазықтық сипаттамасы орталық күш әрекетінен екенін байқалады.

$\vec{c} \cdot \vec{r} = 0$ - қозғалыс жазықтығының теңдеуі. Қозғалыс жазықтығы болғандықтан, түйін сызығы және жазықтықтың кеңістіктегі орналасуын анықтайтын орбита элементтері (жоғарғы түйіннің бойлығы, орбита еңкею) туралы түсініктерді енгізуге болады (12 сурет). Сонда кинетикалық момент векторының компоненттері

$$\begin{aligned} c_1 &= c \sin \Omega \sin i, \\ c_2 &= -c \cos \Omega \sin i, \\ c_3 &= c \cos i. \end{aligned} \quad (3.98)$$



12 сурет – Орталық күш әсерінен пайда болатын қозғалыс

Және r, w полярлы орбиталды координаттарын енгізуге болады, осында полярлы бұрыш w жоғарғы түйінге бағытынан есептелінеді. w екі дене есебіндегі u ендік аргументінің аналогы ретінде болады.

Сонда радиус-вектор және оның ортының теңдеулері

$$\vec{r} = r(t) \cdot \vec{r}^0(w(t)), \quad \vec{r}^0 \equiv (\alpha(w(t)), \beta(w(t)), \gamma(w(t))). \quad (3.99)$$

Егер (3.99) уақыт бойынша дифференциалын анықтағанда

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}^0 + r\dot{\vec{r}}^0, \quad \ddot{\vec{r}} \equiv \ddot{r}\vec{r}^0 + 2\dot{r}\dot{\vec{r}}^0 + r\ddot{\vec{r}}^0 + r\dot{\vec{r}}^0\dot{w} + r\ddot{\vec{r}}^0w'^2 + r\dot{\vec{r}}^0\ddot{w}. \quad (3.100)$$

Осында «штрих белгісі» w бойынша туынды. Сонда

$$\vec{r}^{0'} = \vec{r}_\perp^0, \quad \vec{r}^{0''} = -\vec{r}^0, \quad (3.101)$$

\vec{r}_\perp^0 - \vec{r}^0 ортына перпендикуляр, қозғалыс жазықтығындағы орт.

Осы теңдеулерді бір біріне енгізу арқылы

$$(\ddot{r} - r\dot{w}^2 - F)\vec{r}^0 + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\vec{r}_\perp^0 = 0. \quad (3.102)$$

\vec{r}^0 және \vec{r}_\perp^0 бір бірінен сызықты тәуелсіз болғандықтан

$$\ddot{r} - r\dot{w}^2 = F, \quad (3.103)$$

$$r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w} = 0.$$

Сонда

$$r^2\dot{w} = c. \quad (3.104)$$

r радиус үшін теңдеу

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = F(r, \dot{r}, t) \quad (3.105)$$

және қозғалыс заңы

$$w = w_0 + c \int_{t_0}^t \frac{dt}{r(t)} = 0. \quad (3.106)$$

Егер F функциясы t уақытқа тәуелсіз болса, w - жаңа аргументке ауысу қажет. Осымен қатар, бейсызық құраушысын $r = \frac{1}{u}$ тәуелді шамасымен алмастыруға болады.

\dot{r} және \ddot{r} туындылары

$$\dot{r} = -cu', \quad \ddot{r} = -c^2u^2u'', \quad (3.107)$$

және осы теңдеуді (3.105) теңдеуіне енгізгенде, u кері арақашықтығы үшін теңдеуін аламыз

$$u'' + u = -\frac{1}{c^2u^2} F\left(\frac{1}{u'} - cu'\right). \quad (3.108)$$

Бұл теңдеу – **Бине теңдеуі**. Осы теңдеудің интегралын анықтауға болады, егер F функциясы тек u шамасына тәуелді болса. Осы кезде $p(u) = u'$ алмастыру жасалынады.

Сонда Бине теңдеуі

$$p \frac{dp}{du} + u = -\frac{1}{c^2u^2} F(u) \equiv \Phi(u). \quad (3.109)$$

Осы теңдеудің айнымалы шамалары бөлінеді, интегралдау арқылы

$$p^2 = p_0^2 - u^2 + u_0^2 + 2 \int_{u_0}^u \Phi(u) du. \quad (3.110)$$

$p(u) = u'$ теңдеуді шешу арқылы

$$w = w_0 + \int_{u_0}^u \frac{du}{p(u)} \quad (3.111)$$

және (3.104) теңдеуін қолдану арқылы келесі тәуелділікті анықтаймыз

$$\int_{w_0}^w \frac{dw}{u^2(w)} = s(t - t_0). \quad (3.112)$$

Осы теңдеу – орталық күш әрекетінен пайда болатын қозғалыс есебінің жалпы шешімі. Осы кезде тәуелділік тек $r = \frac{1}{u}$ болады және алты тәуелсіз интегралдау тұрақтыларын - \vec{c} , p_0 , u_0 , w_0 қолданамыз.

Сонда есептің шешімін басқа жолмен анықтауға болады, егер күштік функцияны келесі теңдеумен енгізсек

$$F(r) = \frac{dU}{dr}. \quad (3.113)$$

Бине теңдеуін u' шамасына көбейту арқылы, оның бірінші интегралын табамыз

$$c^2 u'^2 + c^2 u^2 = 2U + h. \quad (3.114)$$

(3.113) теңдеуінде r және t айнымалы шамаларына ауысамыз, сонда энергия интегралы

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{w}^2 = 2U + h. \quad (3.115)$$

Екі дене есебінде F функцияны келесі теңдеуімен аламыз

$$F = -\frac{\mu}{r^2} = -\mu u^2, \quad (3.116)$$

Сонда

$$u = \frac{\mu}{c^2} + A \cos(w + \omega), \quad (3.117)$$

осында $A = \frac{e\mu}{c^2}$, $\frac{\mu}{c^2} = p$ кеплер орбитасының белгілі теңдеуін аламыз

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(w - \omega)}. \quad (3.118)$$

3.6 Екі дененің релятивистік есебі

3.6.1 Салыстырмалылықтың жалпы теориясының (СЖТ) элементтері

Кез келген физикалық дененің инертті және гравитациялық массалары тең екенін жоғары дәлділігімен алынған эксперименталдық факт негізінде СЖТ құралған. Инерция әсерінен және гравитациялық өрісіндегі қозғалыстарының терең байланысы бар. Бұл байланыс инерциалды емес есептеу жүйесіндегі еркін қозғалыстың және инерциалды есептеу жүйесіндегі гравитациялық өрісіндегі қозғалыстың эквиваленттік принципіне көрсетілген. Кез келген гравитациялық өрісінде қозғалыс біртекті және қисықсыздықты болады. Осы себептен Минковскийдің арнайы СЖТ–ғы кеңістік-уақыттың жазықтық

төртөлшемді алуандылығынан қисайған кеңістік-уақыт алуандығына ауысу қажет. Өйткені гравитациялық өрісіндегі қозғалысты инерциалды емес есептеу жүйесіндегі еркін қозғалысына ауысқан кезінде, кеңістіктің шеткі бөлігінде қисықсыздықты координат жүйесінің орнына декарт жүйесін енгізуге болмайды. Сондықтан, интервал үшін белгілі теңдеуді

$$ds^2 = c^2 t^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (3.119)$$

Басқа теңдеумен алмастырамыз

$$ds^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik} dx^i dx^k, \quad (3.120)$$

Осында коэффициенттер

$$g_{ik} = g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (3.121)$$

Фундаменталды немесе **метрикалық** тензорды құрайды. Осы теңдеулерде

$$ct = x^0$$

және кеңістік-уақыттың қисайғаны мен гравитациялық өрісін g_{ik} тензор бейнелейді. (3.118)-(3.121) теңдеулерінде жоғары және төмен индекстері әртүрлі жазылуы себебі – қисықсыздықты координат жүйесінде векторлық және тензорлық шамалардың екі түрлі көрсету: *ковариантты және контравариантты*.

Контравариантты вектор - x'^k координат жүйесінен x^i жүйесіне ауысу кезінде

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k \quad (3.122)$$

дифференциал түріне айналатын вектор

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k \quad (3.123)$$

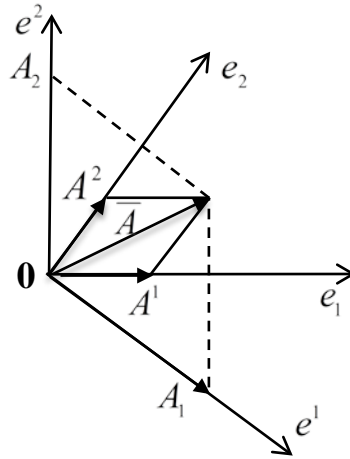
Коварианттық вектор - x'^k координат жүйесінен x^i жүйесіне ауысу кезінде скалярлы функцияның градиенті ретінде

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x'^k} \quad (3.124)$$

ауысатын вектор

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \quad (3.125)$$

Геометриялық жағынан қарастырғанда векторлардың **контраварианттық формасы** – координат остерінің орттары бойынша вектордың жіктелу коэффициенттері, **коварианттық формасы** - координат остеріне вектордың проекциялары. Осы екі жазылу формасы тікбұрышты координат жүйесінде бірдей болғанымен, қисықбұрыштық координат жүйесінде әртүрлі болады (13 сурет).



13 сурет – Вектордың ковариантты және контравариантты компоненттері

Бір түрінен екінші түріне ауысу

$$A_i = g_{ik} A^k \quad (3.126)$$

формула бойынша болады. A_{ik} - ковариантты, A^{ik} - контравариантты және A_k^i - аралас тензорлар болады. Ковариантты және контравариантты метрикалық тензорлар өзара кері, сонда

$$g_{il} \cdot g^{kl} = \delta_i^k$$

δ_i^k - бірлік вектор.

Кеңістік-уақыттың қисайғандығы - координат функциялары ретінде қарастырылған векторлар және тензорлардың дифференциалдауына қиындығына әсер етеді. Туындысын анықтау үшін екі жақын орналасқан нүктелерде функцияның айырмасын табу қажет. Егер функция – вектор болса, онда вектордың басын бір нүктеден екіншісіне ауыстыру керек (14 сурет). Сонда қисықсызықты координат жүйесіндегі контраварианттық вектордың толық дифференциалы

$$DA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} dx^k + \Gamma_{kl}^i A^l dx^k, \quad (3.127)$$

осында Γ_{kl}^i - коэффициенттер жиынтығы – *Кристофель символдары* деп аталады. Осы теңдеуді dx^k шамасына бөлгенде, *вектордың контраварианттық туындысы* пайда болады

$$A^{ik} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l. \quad (3.128)$$

Коварианттық вектор үшін коварианттық туындысы

$$A_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l A_l. \quad (3.129)$$

Γ_{kl}^i - Кристофель символдары, кеңістік-уақыт қисайғандығының өлшемі. Олар метрикалық тензордың туындысының сызықты функциялары

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (3.130)$$

Коварианттық дифференциалдаудың формулалары тензор жағдайлары үшін жалпы күйінде жазылады

$$A_{kl}^i = \frac{\partial A_k^i}{\partial x^l} - \Gamma_{kl}^m A_m^i + \Gamma_{ml}^i A_k^m. \quad (3.131)$$

Берілген жағдайлар үшін тек жазықтық кеңістікте кеңістік-уақытың қисайғандығының өлшемі нөлге тең болу керек және тензорлық сипаттамаға ие болу қажет. Осындай өлшем – *қисайғандықтың тензоры* деп аталады.



14 сурет – Қисықсыздықты координат жүйесіндегі вектордың параллельді орын ауыстыру

Егер тұйықталған контурдың бойымен векторды параллельді орын ауыстырғанда және осы вектордың өзгеру шамасының ауданға қатынасы жоғары болса, кеңістіктің қисайғаны жоғары болады. Сонда L тұйықталған контурды айналу кезіндегі вектордың өзгеруі

$$\Delta A_k = \oint_L \Gamma_{kl}^i A_i dx^l \quad (3.132)$$

Стокс теоремасы бойынша, қисықсызықты интегралынан L контурымен шектелген S бет i бойынша интегралды қарастырамыз

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R_{klm}^i A_i \Delta S^{lm}, \quad (3.133)$$

осында S^{lm} координаттық беттің ΔS^{lm} элементі екі индекс арқылы беріледі – осы бетте орналасқан координаттық сызықтарының индекстерімен.

Енді $\frac{\Delta A_k}{A_i \Delta S^{lm}}$ шамасы L контурдың және S бетінің жинақталу нүктесіндегі кеңістік – уақыттың қисайғандығының өлшемі ретінде болады. Сонда қисайғандықтың тензоры немесе Риман-Кристофель тензоры

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n. \quad (3.134)$$

Осы тензорды i және m индекстері бойынша түрлендіргенде – Риччи тензоры пайда болады

$$R_{kl} = \frac{\partial \Gamma_{km}^m}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^m}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^m \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^m \Gamma_{kl}^n. \quad (3.135)$$

Сонда *скалярлы қисықтық* $R = g^{kl} R_{kl}$ және барлық қисықтық тензорының компоненттері жазықтық кеңістік-уақытта 0 айналады.

ЖСТ-ның негізгі идеясы бойынша кеңістік-уақыттың қисықтық сипаттамалары тартылатын материяның қозғалысымен және таралуымен анықталады. Бұл таралу мен қозғалыс энергия-импульс тензорымен сипатталады

$$T_{ik} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \frac{W_1}{c} & \frac{W_2}{c} & \frac{W_3}{c} \\ \frac{W_1}{c} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ \frac{W_2}{c} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ \frac{W_3}{c} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.136)$$

T_{00} - энергия тығыздығы, $T_{ok} (k \neq 0)$ - аралас компоненттері \vec{W} энергия ағынының векторын (Умов-Пойнтинг векторы) құрастырады. Энергия-импульс тензорының кеңістік бөлімі - $p_{ik} (i, k = 1, 2, 3)$ үшөлшемді кернеу тензоры. Оның

диагоналды компоненттері – координат остері бойындағы қысым, $p_{ik} (i \neq k)$ - диагоналды емес компоненттері - x^i остеріне перпендикуляр жазықтықтарының ығысу кернеуінің k -компоненттері. Бұл тензор тұтас орта және физикалық өрістер үшін қолданылады. Дискретті жүйелер үшін Дирактың δ -функциясы қолданылады.

ЖСТ негізгі теңдеуінің компоненті кіші гравитациялық өріске ауысу кезінде $\frac{V}{c^2} \ll 1$ болады және Пуассонның теңдеуіне айналады

$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho,$$

сонда g_{ik}, R_{ik}, T_{ik} тензорға байланысты теңдеу сызықты түрінде болады

$$R_{ik} + a g_{ik} = b T_{ik} \quad (3.137)$$

a және $V \ll c^2$ болған кезінде b коэффициенттерін анықтауға болады. Сонда кеңістік-уақыт өлшемін және гравитация әсерінен пайда болатын қозғалысын анықтайтын теңдеу – Эйнштейн теңдеуі

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \quad (3.138)$$

3.6.2 Орталық – симметриялық өріс

Материалдық нүктенің немесе сфера-симметриялық таралуы бір дененің гравитациялық өрісін қарастырамыз. Осы кезде сфералық координат жүйесін қолданамыз

$$x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = \theta, \quad (3.139)$$

осында φ - бойлық, θ - полярлық қашықтық. Осы кезде радиус-векторына перпендикуляр бағыттарында кеңістік қасиеттері бірдей болады. Сонда метрикалық тензорының кеңістік диагональ емес компоненттері 0-ге тең және бұрыштық координаттарына тәуелділігі жазықтық кеңістіктегі тәуелділігімен бірдей болу керек.

Сонда интервал теңдеуі

$$ds^2 = h(r,t)c^2 dt^2 - l(r,t) dr^2 - k(r,t)(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) + \alpha(r,t) dt dr. \quad (3.140)$$

Есептеу жүйесі ретінде кез келген жүйені таңдауға болады, сондықтан $r = f_1(r',t')$ және $t = f_2(r',t')$ координаттарды өрнектеуге болады, сол кезде $\alpha(r,t) = 0$ және $k(r,t) = r^2$ болады. Сонда $h(r,t) = e^v$ және $l(r,t) = e^\lambda$ белгіленулерін енгізу арқылы интервал теңдеуі

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (3.141)$$

Осы теңдеуден метрикалық тензор компоненттерінің мәндері

$$g_{00} = e^{\nu}, \quad g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{33} = -r^2. \quad (3.142)$$

Енді Кристофель символдарын анықтауға болады

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2}, & \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \theta, \\ \Gamma_{33}^1 &= r e^{-\lambda} \sin^2 \theta, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.143)$$

«штрих» белгісі r шамасы бойынша, ал «нүкте» ct шамасы бойынша туындыны көрсетеді.

Сфера-симметриялық дене үшін Риччи тензорының компоненттерін анықтау арқылы ν және λ функциялары бойынша теңдеулері жүйесі жазылады

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \left(\nu' + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} &= 0, \\ e^{-\lambda} \left(\lambda' - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} &= 0, \\ \dot{\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Соңғы теңдеуден: λ функция уақытқа тәуелсіз болады. Бірінші және екінші теңдеулердің қосындысы уақытқа тәуелді функцияны $f(t) = \lambda + \nu$ береді, осыдан e^{ν} және e^{λ} функциялары бір бірінен уақыттық көбейту коэффициентімен ерекшеленеді. Егер уақытты түрлендіріп, функцияның мәні $f(t) = 0$ болса, сонда $e^{\nu} = e^{\lambda}$ болады және екінші теңдеудің интегралын табу арқылы

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r} \quad (3.145)$$

интегралдау тұрақтысы

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

- дененің гравитациялық радиусы деп аталады. Сонда интервал теңдеуі

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (3.146)$$

Бұл теңдеу – сфера-симметриялық дененің айналасындағы кеңістіктің өлшемі - Шварцшильд өлшемі деп аталады. Осыған сәйкес гравитациялық өріс – Шварцшильд өрісі аталады.

Сонда меншікті уақыт (егер есептеу жүйесінің басы сол мезетте дене орналасқан кеңістіктің нүктесінде болса)

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \cdot t < t \quad (3.147)$$

Осында t - Шварцшильд өрісін тудыратын дененің центрімен есептеу жүйесінің басы байланыстырғандағы уақыт. Кез келген радиалды бағыты бойында орналасқан r_1 және r_2 нүктелер арасындағы қашықтық

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1. \quad (3.148)$$

Бақылау сұрақтары

1. Ұйытқысыз қозғалыстың эфемеридалары.
2. Кеплер теңдеуінің шешімі.
3. Эллипстік қозғалыстың дәрежелік қатарлары.
4. Эллипстік қозғалыстың тригонометриялық қатарлары.
5. Екі дененің шектеулі есебі. Орбитаны анықтау әдістері.
6. Гамильтон-Якоби әдісі арқылы қозғалыс жазықтығының теңдеуін анықтау.
7. Якоби элементері және олардың кеплер элементтерімен байланысы.
8. Орталық күш әсерінен пайда болатын қозғалыс.
9. Екі дененің релятивистік есебі: салыстырмалылықтың жалпы теориясының (СЖТ) элементтері.
10. Екі дененің релятивистік есебі: орталық – симметриялық өріс.

IV. ҰЙЫТҚЫМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСТЫҢ ТЕОРИЯЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ

Ұйытқымалы және ұйытқысыз қозғалыстардың теңдеулері

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{F} \quad (4.1)$$

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad (4.2)$$

Егер $\vec{F} \ll \frac{\mu}{r^2}$ шарты орындалса, ұйытқысыз қозғалыс ретінде кеплер қозғалысын қарастырады. Ұйытқысыз қозғалыс теңдеуінің жалпы шешімі

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i \\ \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i \\ \sin u \sin i \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

осында

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad u = \omega + \nu, \quad \int_0^\nu \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (4.4)$$

4.1 Жанасатын элементтер әдісі (кіші параметр әдісі)

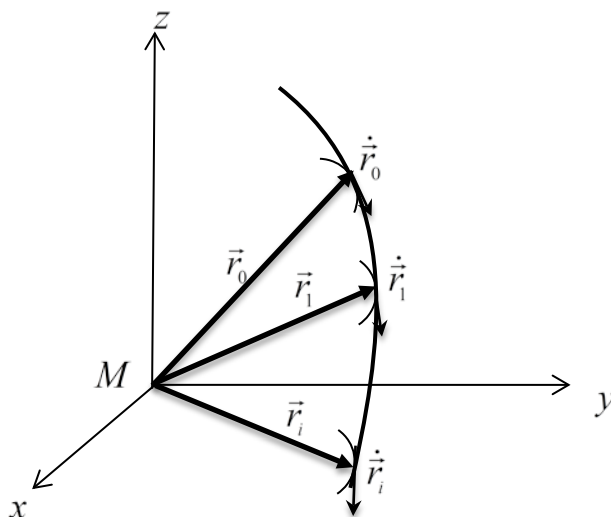
4.1.1 Әдістің негіздері

Егер бастапқы шарттар

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) \quad \text{және} \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0) \quad (4.5)$$

болса, ұйытқымалы мен ұйытқысыз қозғалыстардың орбиталары \vec{r}_0 нүкте арқылы өтеді және осы нүктеде олардың $\dot{\vec{r}}_0$ жанама қисығы бірдей болады. Сондықтан $t_0 - \Delta t < t < t_0 + \Delta t$ кіші уақыт интервалында ұйытқымалы орбита ұйытқысыз орбитадан айырмашылығы аз болады. Сандық ретінде белгілі Δt интервал кезінде орбитаның айырмашылығының аз болуы $F \ll \frac{\mu}{r^2}$ теңсіздіктің орындалу дәрежесіне тәуелді. \vec{r}_1 және $\dot{\vec{r}}_1$ бастапқы шарттар үшін осы қозғалыстардың теңдеулерінің шешімін анықтағанда, $t_1 = t_0 + 2\Delta t$ уақыт мезетінде де орбиталардың айырмашылығы аз болады. $t_0 < t < t_n$ уақыт аралығында ұйытқымалы қозғалысты - $t_k - \Delta t < t < t_k + \Delta t$ аралықтарындағы ұйытқысыз кеплер қозғалыстардың жиынтығы ретінде қарастырады. Жиынтықтағы әр қозғалыстың бастапқы шарттары мен орбита элементтерінің мәндері жеке болады (15 сурет).

Шеткі ауысу кезінде $\Delta t \rightarrow 0$, әр t уақыт үшін Кеплер қозғалысының \vec{r} радиус-векторы мен $\dot{\vec{r}}$ жылдамдық векторыны ұйытқымалы қозғалыстың радиус-векторы мен жылдамдық векторына сәйкес келеді. Әр кеплер қозғалыстың орбита элементтері үздіксіз функция ретінде болады: $\Omega(t), \omega(t), \dots, \tau(t)$. Осы кезде кеплер орбиталарының шексіз жиынтығы қарастырылады және әр қайсысы белгілі нүктелерде ұйытқымалы қозғалысқа жақын болады (15 сурет).



15 сурет – Ұйытқымалы мен жанасатын орбиталар

Сонда ұйытқымалы орбитасы ұйытқысыз кеплер орбиталар жиынтығының айналатын қисығы ретінде болады. Ұйытқымалы қозғалыстың шешімін анықтау үшін – ұйытқысыз қозғалыстың орбита элементтерін вариация әдісі арқылы анықтауға болады. Осы әдіс, аспан механикасында, *жанасатын орбиталар* немесе *жанасатын элементтер әдісі* деп аталады.

Егер әр t уақыт мезетінде ұйытқысыз қозғалыстың \vec{r} радиус-векторы мен $\dot{\vec{r}}$ жылдамдық векторыны қарастырылып отырған ұйытқымалы қозғалыстың радиус-векторы мен жылдамдық векторына сәйкес келсе, осы ұйытқысыз қозғалысты *жанасатын қозғалыс* деп атайды. Оның орбита элементтері - айнымалы шамалар болады және олар *жанасатын элементтер* деп аталады. Осы орбитаны - *жанасатын орбита* деп атайды.

Осы әдісте координаттар арқылы жазылған (4.1) теңдеуден жанасатын элементтер арқылы жазылған алты дифференциалдық теңдеулеріне ауысады:

$$\frac{dE_i}{dt} = \Phi_i(t, E_j(t)), \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.6)$$

осында E_i, E_j - кеплер орбита элементтерінің бірі. Жанасатын орбита ретінде эллипстік, гиперболалық немесе басқа кез келген орбита болу мүмкін.

Планеталар және олардың серіктерінің қозғалыстарының қарастырғандықтан, жанасатын орбита ретінде - эллипстік орбита алынады.

Осы әдісті қолдану үшін жанасатын элементтерінің теңдеулерін айқын түрінде алу қажет. Сол үшін алғашқы интегралдарды қолданамыз.

Егер функция $\Psi(t, \vec{r}(t, E_i), \dot{\vec{r}}(t, E_i)) = C$ (4.2) ұйытқысыз қозғалыс теңдеуінің алғашқы интегралы болса, сонда $\Psi(t, \vec{r}(t, E_i(t)), \dot{\vec{r}}(t, E_i(t))) = C$ (4.1) ұйытқымалы қозғалыс теңдеуінің алғашқы интегралы болады.

Осы алғашқы интегралдардың уақыт бойынша бірінші туындылары

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dots = 0, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dots + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Екі теңдеуде де координаталары мен жылдамдықтары тең, ал үдеулердің айырымы \vec{F} ұйытқы жасайтын үдеуіне тең болады, сонда

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{x}} F_x + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{y}} F_y + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{z}} F_z = 0. \quad (4.8)$$

(4.8) теңдеу – жанасатын элементтерінің уақыт бойынша туындыларына байланысты сызықты алгебралық теңдеу.

4.1.2 Жанасатын элементтер үшін Лагранж теңдеулері

Осында екі дене есебіндегі Якоби элементтерінің Кеплер элементтерімен байланысын қолданамыз

$$\Omega = \beta_3, \quad \omega = \beta_2, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \quad \tau = -\beta_1; \quad (4.9)$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1), \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i, \quad \beta_1 = -\tau, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \quad (4.10)$$

Якоби элементтері ұйытқымалы қозғалыста Гамильтон функциясына тең болады: $H = H_0 - R$, осында H_0 - ұйытқысыз қозғалыстың Гамильтон функциясы, $U_1 = -R$ - ұйытқудың потенциалдық энергиясы. α_i, β_i элементтері ұйытқымалы қозғалыста каноникалық түйіндес айнымалы шамалар, сондықтан олар *каноникалық элементтер* деп аталады. Егер Якоби элементтеріне кез

келген каноникалық түрлендіруді қолдансақ, жаңа каноникалық элементтер жүйесін аламыз. Аспан механикасында Делоне каноникалық элементтері, Пуанкаренің бірінші және екінші каноникалық элементтерінің жүйесі қолданылады.

α_i, β_i каноникалық айнымалы шамаларға сәйкес келетін Гамильтон теңдеулері

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}. \quad (4.11)$$

Ұйытқысыз қозғалыстың гамильтон функциясы H_0 - α_i, β_i элементтерінің тұрақты шамаларын береді, сондықтан

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \quad (4.12)$$

Осы теңдеудегі жанасатын Якоби элементтерінен жанасатын Кеплер элементтеріне ауысу қажет. Сонда

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\beta_3}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\beta_2}{dt}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\beta_1}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad (4.13a)$$

$$\sin i \frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_3}{dt} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{p}{\mu e} \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}. \quad (4.13\text{ә})$$

Ұйытқу потенциалынан Якоби элементтері бойынша туындыларын анықтағанда

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = -\frac{\partial R}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_3} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad (4.14a)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -\frac{\mu(e^2 - 1)}{2p^2} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{\mu e}{p} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (4.14\text{ә})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos i \frac{\partial R}{\partial p} - \sqrt{\mu p} \sin i \frac{\partial R}{\partial i}. \quad (4.14\text{б})$$

Сонда жанасатын кеплер элементтері үшін дифференциалдық теңдеулер - **Лагранж теңдеулері** анықталады

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p \sin i}} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad \frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (4.15a)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu p \sin i}} \frac{\partial R}{\partial i} - 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (4.15\text{ә})$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu p \sin i}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p \sin i}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial \tau}. \quad (4.15\text{б})$$

Бұл теңдеулерді кез-келген жанасатын қозғалыс үшін қолдануға болады. Алғашқы дәуір үшін орташа бойлығы мен перицентр бойлығы

$$\varepsilon = \pi + M_0, \quad \pi = \Omega + \omega \quad (4.16)$$

және

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, \quad p = a(1 - e^2) \quad (4.17)$$

теңдеулерін қолданып, эллипстік элементтер үшін теңдеулерді алуға болады. Сонда эллипстік жанасатын элементтер үшін Лагранж теңдеулері

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad (4.18a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad (4.18\text{ә})$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (4.18\text{б})$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \quad (4.18\text{в})$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial e}. \quad (4.18\text{г})$$

Лагранж теңдеулеріндегі оң жағында тұрған бөліктерінің структурасына көңіл бөлейік. Оң жақтағы бөліктері - жанасатын элементтері бойынша ұйытқу потенциалының дербес туындыларының сызықты функциялары болады. Осы

жерде E_2 элементінің теңдеуінде E_1 элементі бойынша туындының коэффициенті – тек таңбасымен E_1 элементінің теңдеуіндегі E_2 элементі бойынша туындының коэффициентінен айырмашылығы болады.

(4.15) және (4.18) теңдеулер – квазиканоникалық қасиетке ие. (4.18) теңдеулерінде a, e, i элементтеріне Ω, π, ε элементтері бойынша R потенциалдың туындылары кіреді және керісінше байланыс болады. (4.15) теңдеулерінде осындай квазиканоникалық топтар p, e, i және Ω, ω, τ элементтері бойынша қарастырылады.

Егер ұйытқу күші ретінде – тартылыс күші болса, онда Лагранж теңдеулері қолданылады.

4.1.3 Жанасатын элементтер үшін Ньютон теңдеулері

Егер ұйытқу күші ретінде – ортаның кедергі күші (мысалы: жасанды серіктің қозғалысына әсер ететін планета атмосферасының кедергі күші) болса, Лагранж теңдеулерін қолдану мүмкіндігі болмайды. Сондықтан жалпы жағдайды қарастыру қажет: егер x, y, z кез келген координат жүйесінде \vec{F} ұйытқу күші X, Y, Z компоненттері арқылы берілсін.

Осы кезде ұйытқу күшінің компоненттері арқылы алынған жанасатын элементтері үшін теңдеулер жүйесінің түрі - осы күш потенциалды немесе потенциалды емес қасиетінен тәуелсіз болады. Сонда, (4.15) теңдеуінде ұйытқу потенциалының туындыларынан, ұйытқу күшінің компоненттеріне $\vec{F} = gradR$ шарты негізде ауысамыз

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, Y = \frac{\partial R}{\partial y}, Z = \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (4.19)$$

Жанасатын орбитаның кез келген элементін E арқылы белгілейміз

$$\frac{\partial R}{\partial E} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial E} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial E} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial E} = X \frac{\partial x}{\partial E} + Y \frac{\partial y}{\partial E} + Z \frac{\partial z}{\partial E}. \quad (4.20)$$

\vec{r} радиус-векторының модулі - p, e, τ және оның бағыттау косинустары α, β, γ - Ω, π, i элементтеріне тәуелді болады. Сондықтан, p, e, τ элементтері үшін

$$\frac{\partial x}{\partial E} = \alpha \frac{\partial r}{\partial E}, \frac{\partial y}{\partial E} = \beta \frac{\partial r}{\partial E}, \frac{\partial z}{\partial E} = \gamma \frac{\partial r}{\partial E} \quad (4.21)$$

және Ω, ω, i элементтері үшін

$$\frac{\partial x}{\partial E} = r \frac{\partial \alpha}{\partial E}, \frac{\partial y}{\partial E} = r \frac{\partial \beta}{\partial E}, \frac{\partial z}{\partial E} = r \frac{\partial \gamma}{\partial E} \quad (4.22)$$

туындылары болады.

α, β, γ шамалардың Ω, ω, i элементтері бойынша туындыларын анықтағанда

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega}, \frac{\partial \beta}{\partial \Omega}, \frac{\partial \gamma}{\partial \Omega} \right) = (-\beta, \alpha, 0), \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \omega}, \frac{\partial \beta}{\partial \omega}, \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} \right) = (\alpha', \beta', \gamma'), \quad (4.24)$$

осында α', β', γ' - \vec{r}_{\perp}^0 ортының компоненттері. \vec{r}_{\perp}^0 орты - жанасатын орбита жазықтығында бағытталған және \vec{r}^0 ортына перпендикуляр орналасқан.

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial i}, \frac{\partial \beta}{\partial i}, \frac{\partial \gamma}{\partial i} \right) = (\alpha'', \beta'', \gamma''), \quad (4.25)$$

осында $(\alpha'', \beta'', \gamma'') = \vec{R} = \vec{c}/c$ - жанасатын орбита жазықтығына перпендикуляр орты.

Егер $\vec{r}^0, \vec{r}_{\perp}^0, \vec{R}$ орттар арқылы анықталатын S, T, W координат жүйесін енгізгенде, матрица

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

x, y, z жүйеге байланысты S, T, W координат жүйесінің бағыттау косинустарының матрицасы болады. Сонда

$$\begin{vmatrix} S \\ T \\ W \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \cdot X + \begin{vmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{vmatrix} \cdot Y + \begin{vmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{vmatrix} \cdot Z \quad (4.26)$$

Енді (4.20)-ші теңдеуді (4.23)-(4.25) теңдеулерімен байланыстырғанда, Ω, ω, i элементтері бойынша R ұйытқу потенциалының туындылары

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \omega} &= rT, & \frac{\partial R}{\partial i} &= r \sin u \cdot W, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= r(-\beta X + \alpha Y) = r(\cos i \cdot T - \cos u \sin i \cdot W) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Осы теңдеулерді (4.15) теңдеулеріне енгізген жағдайда Ω, π, i жанасатын элементтері үшін теңдеулерін аламыз. p, e, τ элементтері бойынша r қашықтықтың туындыларын анықтаған кезінде r қашықтықтың p, e тәуелділігімен бірге, $\nu(p, e, \tau)$ шын аномалияның тәуелділігін ескеру қажет.

Кез келген ұйытқу күші кезіндегі жанасатын элементтерінің дифференциалдық теңдеулері

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{p \sin i} \tilde{W}, \quad \frac{di}{dt} = \frac{r}{p} \cos u \tilde{W}, \quad \frac{dp}{dt} = 2r\tilde{T}, \quad (4.28a)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos \nu}{e} \tilde{S} + \frac{\sin \nu}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} - \frac{r}{p} \sin u \cot i \tilde{W}, \quad (4.28a)$$

$$\frac{de}{dt} = \sin \nu \tilde{S} + \left[\cos \nu + (\cos \nu + e) \frac{r}{p} \right] \tilde{T}, \quad (4.28b)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{r^2}{e\sqrt{\mu p}} \left[(eN \sin \nu - \cos \nu) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right], \quad (4.28b)$$

осында

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W, \quad N = \int_0^\nu \frac{\cos \nu}{(1 + \cos \nu)^3} d\nu.$$

(4.28) теңдеулер – **жанасатын элементтері үшін Ньютон теңдеулері**.

(4.15), (4.18), (4.28) теңдеулерінің оң жағындағы коэффициенттері r, ν орбиталдық координаттары арқылы уақытқа тәуелді болады. r қашықтық орбита теңдеуі көмегімен ν шамасы арқылы жазылады, сондықтан осы коэффициенттер ν шын аномалияның функциялары болады. Сонда жанасатын элементтер теңдеулерінде t тәуелсіз айнымалы шамасынан ν тәуелсіз айнымалы шамасына ауысамыз. Сол үшін толық туындысын анықтау қажет

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} + \frac{\cos \nu}{e} \tilde{S} - \frac{\sin \nu}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T}. \quad (4.29)$$

Ньютон теңдеулерінен басқа элемент теңдеулеріне ауысуға болады, мысалы, эллипстік элемент теңдеулеріне. Жанасатын элементтерінің барлық дифференциалдық теңдеулерінің түрі арнайы анықтамалықтарында жазылады. Мысалы, үлкен жарты осіне осы теңдеудің түрі

$$\frac{da}{dt} = \frac{2ae \sin \nu}{1 - e^2} \tilde{S} + \frac{2a^2}{r} \tilde{T}. \quad (4.30)$$

4.2 Ұйытқымалы қозғалыс теңдеулерін интегралдау

4.2.1 Жанасатын элементтер теңдеулерін жуықтау интегралдауы

(4.15), (4.18) және (4.28) теңдеулері аргумент және белгісіз функция бойынша бейсызықты болады. Сондықтан, кез келген жуықтау интегралдау әдісін қолданған кезде жанасатын элементтер арқылы қозғалыс теңдеулерін қолданған тиімдірек болады (координаттар арқылы жазылған теңдеулеріне қарағанда). Негізгі жуықтау интегралдаудың аналитикалық әдістері ретінде итерация әдісі мен кіші параметр әдісі қолданылады.

Итерация әдісінде келесі жуықтау қолданылады

$$E_i^{(k)} = E_{i0} + \int_{t_0}^t \Phi_i(t, E_j^{(k-1)}(t)) dt. \quad (4.31)$$

$E_i^{(0)}$ бастапқы жуықтау ретінде E_{i0} бастапқы шарт қолданылады. Егер (4.6) теңдеудің оң жағы σ кіші параметрге тәуелді болса, сонда

$$\Phi_i(t, E_j, \sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \Phi_i^{(k)}(t, E_j), \quad (4.32)$$

теңдеу арқылы келесі қатарды алуға болады

$$E_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \tilde{E}_i^{(k)}(t), \quad (4.33)$$

осында

$$\tilde{E}_i^{(k)}(t) = \int_{t_0}^t E_i^{(k)}(t, \tilde{E}_j^{(0)}, \dots, \tilde{E}_j^{(k-1)}) dt \quad (4.34)$$

$E_i^{(k)}$ - $\tilde{E}_j^{(0)}, \dots, \tilde{E}_j^{(k-1)}$ белгілі уақыт функциялардың полиномдары. Екі жуықтау интегралдау кезінде бастапқы жуықтаулары бірдей

$$E_i^{(1)} = E_{i0} + \int_{t_0}^t \Phi_i(t, E_{j0}) dt, \quad (4.35)$$

ал жоғары дәрежедегі жуықтаулары әр түрлі болады.

Осы әдістер координаттар арқылы жазылған теңдеулерге де қолдануға болады. Жанасатын элементтер арқылы жазылған теңдеулердің интегралын

анықтау үшін (4.31) формуланың итерация саны азаяды және алдыңғы теңдеулерге қарағанда дәлдігі артады.

Берілген уақыт интервалына байланысты қозғалыс теңдеуінің интегралын анықтау кезінде, $\frac{dE_i}{dt}$ туындының мәні төмен болғандықтан, интегралдау қадамын үлкен мөлшерде алуға болады. Әр орбита элементі қозғалыс туралы белгілі ақпарат береді, сондықтан, ұйытқымалы күштің ерекшеліктеріне байланысты, осы әдістер бөліп интегралдауды немесе жанасатын элементтер үшін жазылған теңдеулер жүйесін оңайлатуға мүмкіндік береді.

4.2.2 Ғасырлық және периодтық ұйытқулар

Егер жанасатын элементтер арқылы жазылған теңдеулерді эллипстік қозғалыс барлық сипаттамаларын қатарларға жіктеу мүмкіндігін қолданылғанда, ұйытқымалы күш ньютонның орталық күшіне қарағанда аз мөлшері эффектікті байқалады. Осы кезде орташа аномалия бойынша Фурье қатарлары қолданылады, өйткені орбитаның жанасатын эксцентриситеті басында белгісіз болады.

Жанасатын элементтері арқылы жазылған теңдеулердің Фурье қатарына жіктелуі келесі теңдеумен жазылады

$$\frac{dE}{dt} = A_0(E_j) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(E_j) \cos kM + B_k(E_j) \sin kM). \quad (4.36)$$

Егер теңдеулердің оң жақтағы бөліктері кіші болса, (4.36) қатарының коэффициенттері кіші болады. (4.36) теңдеудің бастапқы жуықтауын алу үшін E_{j_0} элементтердің бастапқы мәндері кезінде A_k, B_k коэффициенттерін анықтау қажет. Сонда келесі теңдеуді аламыз

$$\frac{dE^{(1)}}{dt} = A_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(0)} \cos kM + B_k^{(0)} \sin kM). \quad (4.37)$$

$M = n_0(t - t_0) + M_0$ ескерген жағдайда (4.37) теңдеуді интегралдау оңайға түседі, сонда E элементі үшін бастапқы жуықтау төменгі формуламен анықталады

$$E^{(1)} = E_0 + A_0^{(0)}(t - t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{A_k^{(0)}}{kn_0} \sin kM + \frac{B_k^{(0)}}{kn_0} \cos kM \right) \Bigg|_{t_0}^t. \quad (4.38)$$

Теңдеудің құрылымын қарастырғанда, E_0 - тұрақты құраушысы, $A_0^{(0)}(t - t_0)$ - уақытқа сызықты түрде тәуелді құраушысы және көптеген периодтық

құраушылары бар екенін көреміз. $A_0^{(0)}$ коэффициентінің мәні модуль бойынша аз болғанымен, $A_0^{(0)}(t - t_0)$ көбейтіндісі уақыт бойынша шексіз жоғарылайды.

$\delta E^{(1)} = E^{(1)} - E_0$ айырмасы - E элементінің ұйытқысы, осы жағдайда бірінші дәрежедегі ұйытқы. Сызықты құраушының және периодтық құраушыларының қосындысының ұйытқуға әсері әр түрлі болады. Периодтық құраушылар ұйытқымалы қозғалыстың ұйытқысыз қозғалыстан аз мөлшердегі сандық ауытқуларын сипаттайды. Сызықты құраушыларының әсерінен ұзақ уақыт ішіндегі орбита элементінің өзгеруі ұйытқымалы қозғалыстан үлкен өзгерісте енгізіледі. Мысалы, бастапқы шеңберлік орбита қатты созылған эллипске айналады, орбитаның еңкеюі өзгереді және тағы осыған сәйкес өзгерістер болады. *Бірінші дәрежедегі ұйытқудың сызықты құраушылары – ғасырлық ұйытқу, ал периодтық құраушылары – периодтық ұйытқу деп аталады.*

Егер (4.38) жуықтауды (4.36) теңдеуіне енгізгенде, екінші дәрежедегі ұйытқуларды алуға болады. Сол теңдеулерде екінші дәрежедегі ғасырлық ұйытқуы, периодтық ұйытқуы және *сызықты құраушылар мен тригонометриялық құраушылардың көбейтіндісінен – аралас ұйытқулар* пайда болады. Аралас ұйытқулар – периодтық ұйытқулар болады, олардың барлығының амплитудалары уақыт өсуімен жоғарылайды.

Екі планеталық есебіне көңіл бөлейік. m_1 планета қозғалысының m_2 планетамен өзара ұйытқуы және керісінше есебін қарастырамыз. Сонда ұйытқымалы күш және оның потенциалы екі планетаның координаттарына тәуелді функциялары болады, олар планеталардың M_1 және M_2 орташа аномалия бойынша периодтық функциялар ретінде қарастырылады. Сонда m_1 ұйытқымалы планетаның кез келген орбита элементінің бастапқы жуықтаудың теңдеуі

$$\frac{dE_1^{(1)}}{dt} = A_0^{(0)}(M_2) + \sum_{k_1=1}^{\infty} (A_{k_1}^{(0)}(M_2) \cos k_1 M_1 + B_{k_1}^{(0)}(M_2) \sin k_1 M_1). \quad (4.39)$$

осында $A_{k_1}^{(0)}$ коэффициенті орташа аномалия бойынша Фурье қатарына жіктеледі

$$A_{k_1}^{(0)} = A_{k_1,0}^{(0)} + \sum_{k_2}^{\infty} (A_{k_1,k_2}^{(0)} \cos k_2 M_2 + B_{k_1,k_2}^{(0)} \sin k_2 M_2). \quad (4.40)$$

Осыған ұқсас қатарды $B_{k_1}^{(0)}$ коэффициенттер үшін алуға болды. егер $A_{k_1}^{(0)}$, $B_{k_1}^{(0)}$ қатарларын (4.39) теңдеуіне енгізгенде және қажетті түрлендіру арқылы Фурьенің екілік қатарын аламыз

$$\frac{dE_1^{(1)}}{dt} = A_{0,0}^{(0)} + \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} (A_{k_1,k_2}^{(0)} \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) + B_{k_1,k_2}^{(0)} \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2)) \quad (4.41)$$

(4.41) теңдеуін интегралдау арқылы E_1 элементінің бастапқы жуықтаудың теңдеуін аламыз

$$E_1^{(1)} = E_1^{(0)} + A_{0,0}^{(0)}(t - t_0) + \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \left[-\frac{A_{k_1, k_2}^{(0)}}{k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}} \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2) + \frac{B_{k_1, k_2}^{(0)}}{k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}} \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) \right] \Bigg|_{t_0}^t. \quad (4.42)$$

n_1, n_2 - орташа қозғалыстардың мәндері әр есепке байланысты анықталады және баяу болса да уақыт бойынша өзгереді. Егер $n_1/n_2 \cong k_1/k_2$ болса, жүйе резонансты күйге жақын болады. Осы кезде m_2 планетаның ұйытқымалы күшінің жиілігі m_1 планета қозғалысының меншікті жиілігіне жақын болады. Бұл жағдай m_1 планетаның m_2 планетаға ұйытқымалы әрекетіне де қатысты болады. Осы кезде (4.42) қатарының гармоникалары мен ұйытқымалы периодттары жоғарылайды

$$T_{k_1, k_2} = \frac{2\pi}{|k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}|}. \quad (4.43)$$

Осындай резонансты ұйытқулар **ұзақпериодты ұйытқулар** деп аталады. Мысалы, $|k_1|=2$ және $|k_2|=5$ жиіліктеріндегі Юпитер мен Сатурн қозғалыстарындағы өзара ұйытқу - ұзақпериодты ұйытқу болады, себебі Юпитердің орбиталдық периоды 12 жылға, ал Сатурнның периоды – 30 жылға жақын. Осы ұйытқулардың периоды – 900 жыл.

Бақылау сұрақтары

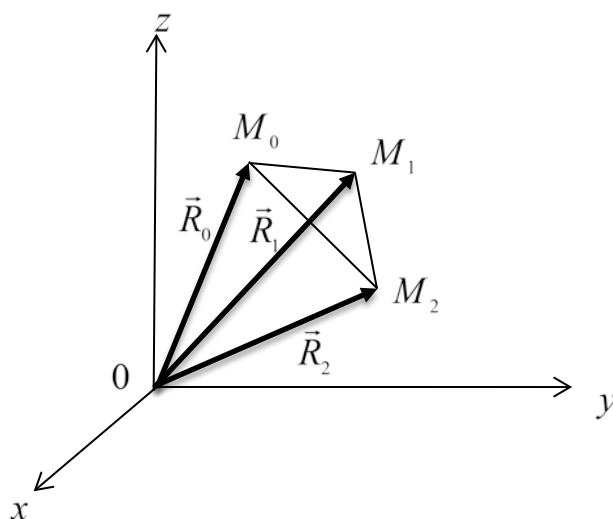
1. Ұйытқымалы қозғалысты зерттеу: жанасатын элементтер әдісі.
2. Жанасатын элементтер үшін Лагранж теңдеулері.
3. Жанасатын элементтер үшін Ньютон теңдеулері.
4. Жанасатын элементтер теңдеулерін жуықтау интегралдауы.
5. Ғасырлық және периодтық ұйытқулар.

V. ҮШ ДЕНЕ ЕСЕБІ

Нақты аспан денелер жүйесінің қозғалыс моделін алу үшін үш дене есебі қарастырылады. Бұл есеп – өзара тартылыс күштер өрісіндегі үш материалдық нүктенің қозғалысын сипаттайды. Бұл үштік жұлдыздық жүйелер: «Жер-Ай-Күн», «Күн-планета-комета», «Жер-Ай-ЖЖС» және тағы басқалар.

Инерциалды координат жүйесіндегі үш дене есебінің теңдеулерін көп дене есебінің дербес жағдайы ($n = 2$) ретінде қарастыруға болады (16 сурет):

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_0 &= Gm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{\Delta_{01}^3} + Gm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_0}{\Delta_{02}^3}, \\ \ddot{\vec{R}}_1 &= Gm_0 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_1}{\Delta_{01}^3} + Gm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{\Delta_{12}^3}, \\ \ddot{\vec{R}}_2 &= Gm_0 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_2}{\Delta_{02}^3} + Gm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_2}{\Delta_{12}^3}.\end{aligned}\tag{5.1}$$



16 сурет – Инерциалды координат жүйесіндегі үш дене есебі

Бұл 18-ші дәрежелі жүйе. Осы жүйені арнайы жуықтау әдісі арқылы интегралдауға болады. Бірақ үш дене есебінде өте маңызды және жүйені оңайлататын жағдай ерекше қарастырылады. Осы жағдайда бір материалдық нүктенің массасы басқаларға қарағанда көп кіші болады.

5.1 Үш дененің шектеулі есебі

$m \equiv m_0 \lll m_1, m_2$ жағдай – үш дененің шектеулі есебі деп аталады. Алғашқы рет осы есепті кометалардың алып-планеталардың маңында қозғалысын зерттеу кезінде П. Лаплас қарастырды.

Материалдық нүктелердің біреуі - ғарыштық аппарат болған кезінде, үш дененің қозғалысы осы есеп бойынша анықталады. Кіші массасы бар материалдық нүкте басқа екі дененің («ауыр нүктелер») гравитациялық өрістерінде қозғалады және солардың қозғалыстарына ешқандай әсер етпейді, бұл осы есептің негізгі физикалық мағынасы. Сонда басқа екі дененің қозғалысы белгілі кеплер қозғалысы болады. Осыған сәйкес үш дененің шектеулі есебі шеңберлік, эллипстік және тағы басқа түрлерінде болады.

5.1.1 Үш дененің шектеулі шеңберлік есебі

m_1, m_2 массасы бар екі ауыр нүктелер M_1, M_2 бір-бірінен a - тұрақты арақашықтықта орналасқан және бір дене екіншісін немесе олардың масса центрін айналып, тұрақты бұрыштық жылдамдығымен

$$n = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^{3/2}} \quad (5.2)$$

қозғалады.

(5.1) үш дене есебінің соңғы екі теңдеуінде оң жағындағы бірінші қосындылары болмайды және осы теңдеулер белгілі шешімі бар екі дене есебінің теңдеулер жүйесін құрастырады. Бірінші теңдеу m - кіші массасы бар нүктенің қозғалыс теңдеуі

$$\ddot{\vec{R}} = Gm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}}{\rho_1^3} + Gm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}}{\rho_2^3}, \quad (5.3)$$

осында $\rho_{1,2}$ - M нүктенің $M_{1,2}$ нүктелерге дейінгі қашықтық. Бұл есепте n бұрыштық жылдамдығымен масса центрін айналатын барицентрлік координат жүйесін қолдану тиімді, сонда үш дененің шектеулі есебі екі жылжымайтын центр есебіне ұқсас болады. Бірақ бұл есептердің принципіалды айырмашылығы болады:

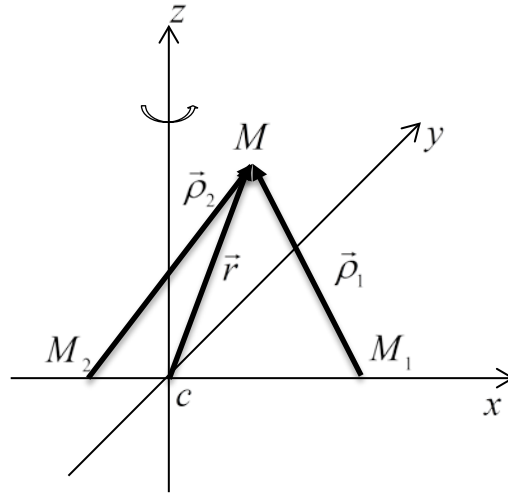
1. екі жылжымайтын центр есебінде үшінші нүктенің қозғалысы инерциалды координат жүйесінде болады және екі ауыр нүктенің күйіне есептің шарты бойынша үшінші нүкте әсер етпейді;

2. үш дененің шектеулі есебінде үшінші нүкте инерциалды емес координат жүйесінде қозғалады және екі ауыр нүктенің күйіне, массасы кіші болғандықтан, үшінші нүкте әсер етпейді.

Инерциалды емес координат жүйесіндегі M нүктенің қозғалыс теңдеуін алу үшін, бірқалыпты айналатын координат жүйесіндегі материалдық нүктеге әсер ететін инерция күштерін (Кориолис күші $(2\vec{n} \times \dot{\vec{r}})$ және ортадан тепкіш күш $(\vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r})$) ескеру қажет. Сонда

$$\ddot{\vec{r}} = -2\vec{n} \times \dot{\vec{r}} - \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r} - Gm_1 \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} - Gm_2 \frac{\vec{\rho}_2}{\rho_2^3}, \quad (5.4)$$

осында \vec{n} - координат жүйесінің бұрыштық жылдамдығының векторы, \vec{r} - M нүктенің радиус-векторы, $\vec{\rho}_{1,2} = \vec{r} - \vec{r}_{1,2}$ - M нүктенің $M_{1,2}$ ауыр нүктелерге қарағанда орналасуын анықтайтын радиус-векторлары, $\vec{r}_{1,2}$ - $M_{1,2}$ нүктелердің радиус-векторлары (17 сурет).



17 сурет – Үш дененің шеңберлік шектеулі есебі

Осы жағдайда координат жүйесінің z осі \vec{n} вектордың бойымен бағытталған және x осі M_1 мен M_2 нүктелер арқылы өтеді. Сонда координаттық формасында жазылған (5.4) теңдеуі

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2x + Gm_1 \frac{x_1 - x}{\rho_1^3} + Gm_2 \frac{x_2 - x}{\rho_2^3}, \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2y - Gm_1 \frac{y}{\rho_1^3} - Gm_2 \frac{y}{\rho_2^3}, \\ \ddot{z} &= -Gm_1 \frac{z}{\rho_1^3} - Gm_2 \frac{z}{\rho_2^3}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Арнайы бірлік (каноникалық) жүйесін енгіземіз: ұзындық бірлігі ретінде a қашықтықты, масса бірлігі ретінде - $m_1 + m_2$ массалар қосындысын және уақыт бірлігі ретінде – координат жүйесі 1 радианға бұрылған кезіндегі кететін уақытты аламыз. Сонда n бұрыштық жылдамдығының шамасы 1 тең және осы бірлік жүйесінде G гравитациялық тұрақтысы да 1 тең болады. M_1 нүктенің массасын осы бірлік жүйесінде μ арқылы белгілегенде, M_2 нүктенің массасы $1 - \mu$ тең болады. Сонда M_1 нүктесі - $(1 - \mu, 0, 0)$ және M_2 нүктесі - $(-\mu, 0, 0)$

координаттарымен беріледі. Егер $m_1 < m_2$ немесе $\mu < 1/2$ болса, (5.5) теңдеулер жүйесі келесі түріне айналады

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + x + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - x) + \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu - x), \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{\mu}{\rho_1^3}y - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{\rho_1^3}z - \frac{\mu}{\rho_2^3}z.\end{aligned}\quad (5.6)$$

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ салыстырмалы жылдамдық векторының компоненттеріне (5.6) теңдеулер жүйесін көбейту және оларды өзара қосу арқылы келесі теңдеуді аламыз

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2}\right), \quad (5.7)$$

осында $v^2 = \left|\dot{\vec{r}}\right|^2$. (5.7) теңдеуді интегралдау арқылы үш дененің салыстырмалы шектеулі шеңберлік есебінің бірінші интегралын – **Якоби интегралын** аламыз

$$v^2 = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right) - c. \quad (5.8)$$

Якоби интегралы энергия интегралының аналогы болады, себебі теңдеудің оң жағынан есептің жалпыланған потенциалы бар. Бұл интеграл үш дене есебіндегі орнықтылықты зерттеу үшін қолданылады.

5.1.2 Үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебі

Егер үш дененің шектеулі есебінде бастапқы шарттар: $t = t_0$ кезінде $z_0 = \dot{z}_0 = 0$ болса, қозғалыс жазықты болады. Осы жағдай үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебі ретінде қарастырылады. Осы есепті зерттеу үшін $Z = x + iy$ комплекстік координатаға ауысу қажет.

(5.6) теңдеуді i жалған бірліке көбейтіп бірінші теңдеумен қосу арқылы, үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебінің теңдеуін аламыз

$$\ddot{Z} = -2i\dot{Z} + Z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - Z) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu + Z). \quad (5.9)$$

осында $\rho_{1,2} = |Z - Z_{1,2}|$. Сонда Якоби интегралы келесі түріне айналады

$$|\dot{Z}|^2 = |Z|^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right). \quad (5.10)$$

Үш дене есебінде материалдық нүктелердің өзара соқтығысуы болуы мүмкін, сол кезде үдеулері кенет жоғарылайды және қозғалыс теңдеуінің оң жақтағы бөліктерінің үздіксіздігі сақталмайды. Осындай әрекетті жою үшін *T. Тиле* астрономы (5.9) теңдеуінде *айнымалы шамалардың арнайы алмастыру тәсілін* ұсынды. Біріншіден, M_1M_2 кесіндінің ортасына координат жүйесінің басы орналасады

$$z = \zeta + \mu - \frac{1}{2}. \quad (5.11)$$

Осыдан кейін ζ комплекстік координатасынан w - жаңа комплекстік айнымалы шамасына ауысады

$$\zeta = \cos w. \quad (5.12)$$

Осы кезде t уақыттың τ жаңа айнымалы шамасына дифференциалдық алмастыруы жасалынады

$$dt = \rho_1 \rho_2 d\tau. \quad (5.13)$$

Осындай Тиле түрлендіруді бір денеден аппаратты ұшырып екіншісіне қондыру траекториясын есептеулерінде қолданылады.

5.2 Либрация нүктелері

Бір сызық бойымен бағытталмаған екі ауыр нүктенің күш әсерінен инерциалдық жүйеде үш дене есебіндегі кіші массасы бар дене ауыр нүктелерге қарағанда тепе-теңдік жағдайында бола алмайды. Салыстырмалы жүйеде осындай нүкте әр түрлі бағытталған үш күш әсерінде болады (екі гравитациялық күштер және ортадан тепкіш күш), сондықтан осында да тепе-теңдік күйі болуы мүмкін емес. Үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебінде кіші массасы бар нүктенің тепе-теңдік күйі кейбір орналасу кезінде болады. Осы *салыстырмалы тепе-теңдік орналасу нүктелерін – либрация нүктелері деп атайды.*

Тепе-теңдік күйінде \ddot{Z} үдеуі және \dot{Z} жылдамдығы 0 тең болады. Сондықтан Z комплекстік координата осы теңдеуге сәйкес келу керек

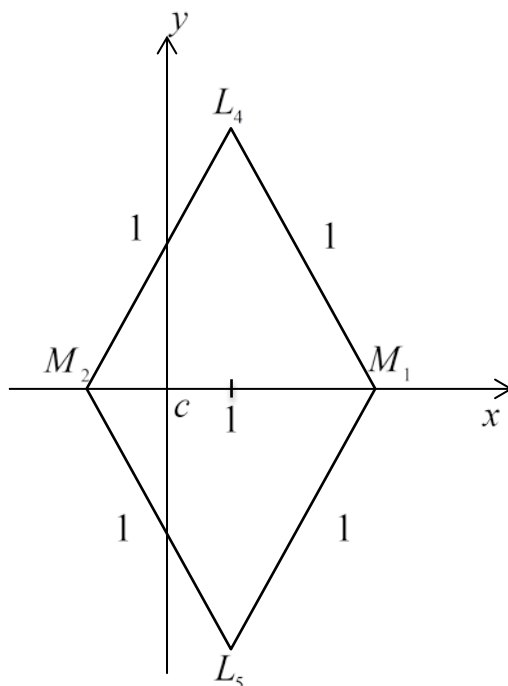
$$Z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - Z) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu + Z) = 0 \quad (5.14)$$

немесе

$$Z \left(1 - \frac{\mu}{\rho_1^3} - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3} \right) = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3} \right). \quad (5.15)$$

(5.15) теңдеудің оң жақ бөлігі нақты болса, Z координатасы нақты болу керек немесе оң жақтағы бөлігі мен сол жақтағы жақша ішінде орналасқан нақты көбейтіндісі 0 тең болу керек.

Егер (5.15) оң жақ бөлігі 0 тең болса, $\rho_1 = \rho_2$ және егер (5.15) сол жақтағы жақша ішінде орналасқан нақты көбейтіндісі 0 тең болса, $\rho_1 = \rho_2 = 1$ болады. M_1 мен M_2 нүктелер арасында қашықтық 1 тең болады және осы үш нүкте теңқабырғалы үшбұрышты құрайды. Осы кезде екі конфигурация болу мүмкін – біреуі - $y > 0$, екіншісі - $y < 0$ координаттарында. Бұл нүктелер либрацияның үшбұрыш нүктелері деп аталады және L_4 мен L_5 арқылы белгіленеді.



18 сурет – Либрацияның үшбұрыш нүктелері

Егер Z координатасы нақты болса, барлық либрация нүктелері бір сызықтың бойында орналасады. Осы кезде $M_{1,2}$ нүктелерге дейінгі қашықтықтары мен координаттары белгілі бір теңдеулерімен байланысады. Теңдеулердің түрлері кіші массасы бар нүктенің орналасуына байланысты болады. Нүктенің әр түрлі орналасу жағдайларын қарастыруға болады.

а) M нүктесі M_1 және M_2 ауыр нүктелер арасында орналасқанда (19,а сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_1 + \rho_2 = 1, \quad \mu + Z + \rho_1 = 1. \quad (5.16a)$$

(5.15) теңдеуінен (5.16) көмегімен ρ_2 және Z жоққа шығару арқылы келесі теңдеуді аламыз

$$(1 - \mu - \rho_1) \left(1 + \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1 - \mu}{(1 - \rho_1)^3} \right) = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{(1 - \rho_1)^3} \right). \quad (5.17)$$

(5.17) теңдеуін түрлендіру арқылы ρ_1 қашықтық үшін бесінші дәрежедегі алгебралық теңдеуін аламыз

$$\rho_1^5 - (3 - \mu)\rho_1^4 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(1 - \rho_1)^2 = 0. \quad (5.18)$$

ә) M нүктесі M_1 ауыр нүктенің оң жағынан орналасқанда (19,ә сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_2 = 1 + \rho_1, \quad \mu + Z - \rho_1 = 1. \quad (5.16ә)$$

Осы кезде ρ_1 қашықтық үшін бесінші дәрежедегі алгебралық теңдеуін аламыз

$$\rho_1^5 + (3 - \mu)\rho_1^4 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(1 + \rho_1)^2 = 0. \quad (5.19)$$

б) M нүктесі M_2 ауыр нүктенің сол жағынан орналасқанда (19,б сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_1 = 1 + \rho_2, \quad \rho_2 = \mu + Z. \quad (5.16б)$$

Осыдан ρ_2 қашықтық үшін бесінші дәрежедегі алгебралық теңдеуін аламыз

$$\rho_2^5 + (2 + \mu)\rho_2^4 + (1 - 2\mu)\rho_2^3 - (1 - \mu)(1 + \rho_2)^2 = 0. \quad (5.20)$$

Сонда 3 либрацияның түзусызықты нүктелері болады. Әр жағдайға сәйкес L_1 , L_2 , L_3 белгіленулер енгізіледі. ρ_1 мен ρ_2 қашықтықтар итерация әдісімен анықталады. Мысалы, L_1 нүктесі үшін

$$\rho_1^{(k)} = \left(\frac{\mu(1 - \rho_1^{(k-1)})^2}{(\rho_1^{(k-1)})^2 - (3 - \mu)\rho_1^{(k-1)} + 3 - 2\mu} \right)^{1/3}. \quad (5.21)$$

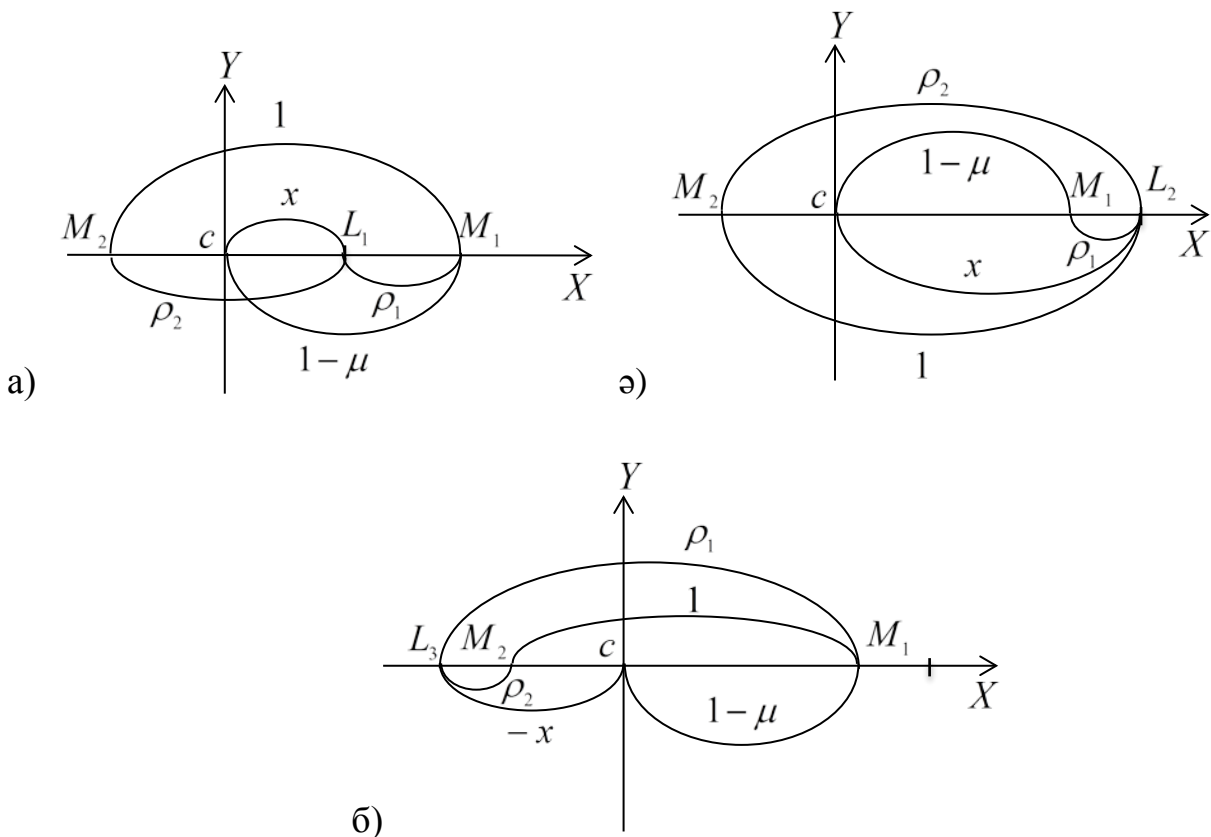
$\mu^{1/3}$ дәрежесі бойынша ρ_1 мәндері үшін және μ дәрежесі бойынша ρ_2 мәндері үшін келес қатарларды алуға болады

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \mu^{1/3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \mu^{2/3} - \frac{1}{27} \mu + \dots, \quad (L_1)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \mu^{1/3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \mu^{2/3} - \frac{1}{27} \mu + \dots, \quad (L_2) \quad (5.21)$$

$$\rho_2 = \frac{7}{12} \mu - \frac{1127}{20736} \mu^3 + \dots \quad (L_3)$$

$\mu \ll 1$ мәндерінде L_1 мен L_2 либрация нүктелері M_1 нүктесіне бірдей қашықтықта жақын орналасады.



19 сурет – Либрацияның түзусызықты нүктелері

5.3 Хилл сызықтары

Якоби интегралы үш дененің шектеулі шеңберлік есебін сапалық түрінде зерттеу мүмкіндігін береді: кіші массасы бар нүктенің бастапқы шарттар кезіндегі қозғалыс болатын және қозғалыссыз аймақтарын анықтайды.

Қозғалыс кезінде нүктенің салыстырмалы жылдамдығы $v = 0$ болады. Сонда нүктелердің кеңістіктегі орналасу нүктелердің геометриялық орны келесі теңдеумен беріледі

$$2U(x, y) - c = r^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} - c = 0. \quad (5.22)$$

x, y жазықтықта нүктелердің геометриялық орны сызық болады, оны Хилл сызығы немесе нольдік жылдамдығының сызығы. Осы жағдайда үдеу $\dot{v} \neq 0$, сондықтан Хилл сызығындағы нүктелер $U(x, y)$ функцияның экстремум нүктелері ретінде болмайды. Егер M нүктесі өзінің қозғалыс кезінде Хилл сызығын кесіп өтсе, функцияның таңбасы өзгеру керек. Сонда осы сызықтың бір жағында v^2 теріс таңбасымен болу қажет, бірақ бұл мүмкін емес. Сондықтан кіші массасы бар нүкте тек осы шарт орындалатын жазықтың бөлігінде қозғалуы мүмкін

$$2U(x, y) - c \geq 0. \quad (5.23)$$

Либрация нүктелерінің координаттарын $U(x, y)$ функцияның экстремум нүктелері ретінде табуға болады.

c - Якоби интеграл тұрақтысының әр түрлі мәндері кезіндегі Хилл сызықтарын талдауға болады.

1. Егер $c \gg 1$ болса, $r \gg 1$ немесе $\rho_{1,2}$ қашықтықтардың біреуі кіші болу керек. Бірінші жағдайда (5.22) теңдеудің екінші мен үшінші қосылғыштар c мәніне қарағанда төмен болады, осы кезде M нүктесі $M_{1,2}$ нүктелерден алыс орналасады. Сондықтан, Хилл сызығының теңдеуі жуықтау түрінде - $r^2 = c$ және сызық \sqrt{c} радиусы бар шеңбердің түріне жақын болады. Екінші жағдайда (5.22) теңдеудің екінші мен үшінші қосылғыштар 1-ден көп есе жоғары болады, ал $r^2 \approx 1$. Осы жағдай үшін Хилл сызығының теңдеуі

$$\frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \quad (5.24)$$

Осы теңдеу арқылы екі түйықталған қисық сызықтарын аламыз: бірі - M_1 , екіншісі - M_2 нүктелерін қоршайды. Бұл қисық сызықтары геометрияда «сопақ» деп атайды және түрлері эллипстерге ұқсайды. Осы сопақтар $r^2 = c$

шеңберімен бірге 20,а суретінде көрсетілген. Кіші массасы бар дененің қозғалысы тек келесі жағдайларда болу мүмкін:

- \sqrt{c} үлкен радиусы бар шеңбердің шекарасынан тыс аймақтарында;
- сопақтың ортасында немесе $M_{1,2}$ нүктелердің маңында.

2. c тұрақтысын азайту кезінде, сопақтардың түрі өзгереді және квазишеңбердің ауданы азаяды, ал квазисопақтардың – ұлғаяды. Белгілі бір $c = c_1$ сыни мәнінде сопақтар бір-бірімен жанасады. Бұл жағдай L_1 либрацияның ішкі нүктесінде болады (20,ә сурет).

3. c тұрақтысын тағы азайту кезінде - $c < c_1$, сопақтардың жанасу нүктесінің ауданы үлкейеді. Осы жағдайда M нүктесінің қозғалыс аймағы екібайланысты болады (20,б сурет).

4. $c = c_2$ сыни мәнінде ішкі мен сыртқы Хилл сызықтары L_2 либрация нүктесінде жанасады (20,в сурет).

5. Егер $c > c_2$ болса, L_2 нүктесінің маңында M нүктесінің қозғалыс аймағы бірбайланысты болады (20,г сурет).

6. c тұрақтысын сыни мәніне дейін азайту кезінде - $c = c_3$, ішкі мен сыртқы Хилл сызықтары L_3 либрация нүктесінде жанасады (20,ғ сурет).

7. $c < c_3$ мәндерінде Хиллдің бірыңғай сызығы қайтадан екі тұйықталған сызықтарына бөлінеді. Осы жағдайда M нүктесінің қозғалысы, L_4 пен L_5 либрацияның үшбұрыш нүктелерін қоршайтын аймақтарынан басқа, барлық аймақтарында болады (20,д сурет).

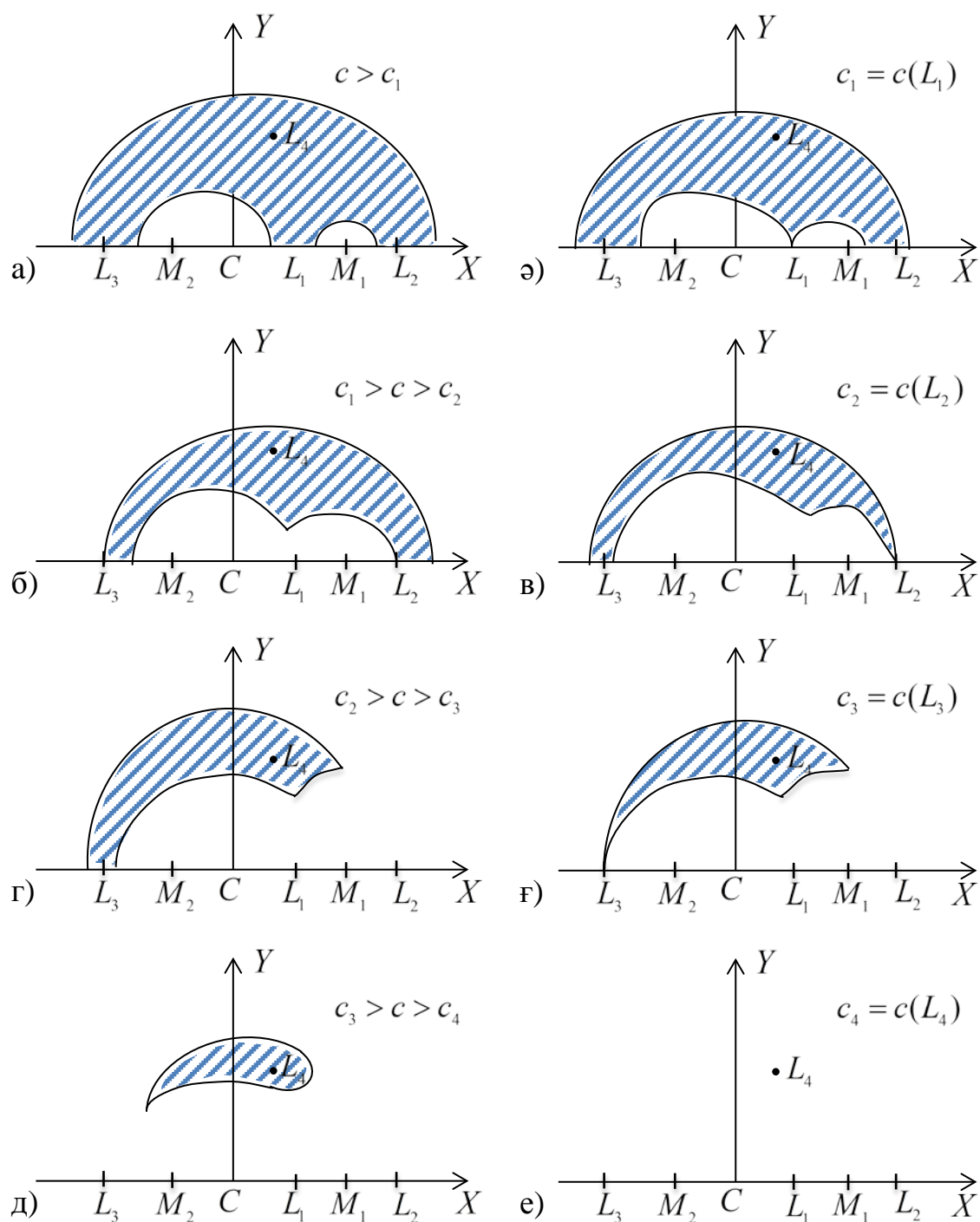
8. c тұрақтысын сыни мәніне дейін азайту кезінде - $c = c_4$, $L_{4,5}$ Хилл сызықтарына жинақталады (20,е сурет).

Осы талдау арқылы Хилл сызықтарының структурасына либрация нүктелерінің әсері маңызды екенін көрініп тұр. Либрацияның түзусызықты нүктелерінде Хилл сызықтарының бір мағыналылығы сақталмайды – бұл өздік қиылысу нүктелері. Үшбұрыш нүктелері – Хилл сызықтар жиынтығының сыни нүктелері. x_k, y_k - либрация нүктелерінің координаттар мәндерін (5.22) теңдеуіне қою арқылы c_k - Якоби тұрақтысының сыни мәндерін анықтауға болады. c_k мәндері мен либрация нүктелердің координаттары μ параметріне немесе M_1 және M_2 ауыр нүктелер массаларының қатынасына тәуелді болады.

Үш дененің кеңістік шектеулі есебінде нөльдік салыстырмалы жылдамдығының геометриялық орнын алған кезінде – Хилл беттері қарастырылады. 20 суретте Хилл беттерінің $z = 0$ жазықтығымен қисындылардың структурасы туралы мәлімет береді (z - аппликата).

Хилл беттерінің $y = 0$ жазықтығымен қисындылардың структурасы (21 сурет) келесі теңдеумен анықталады

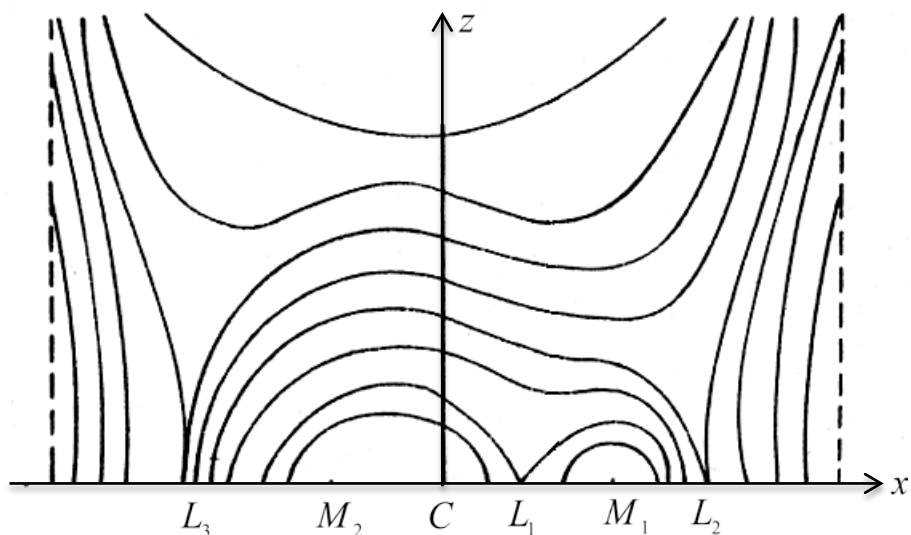
$$x^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \quad (5.25)$$



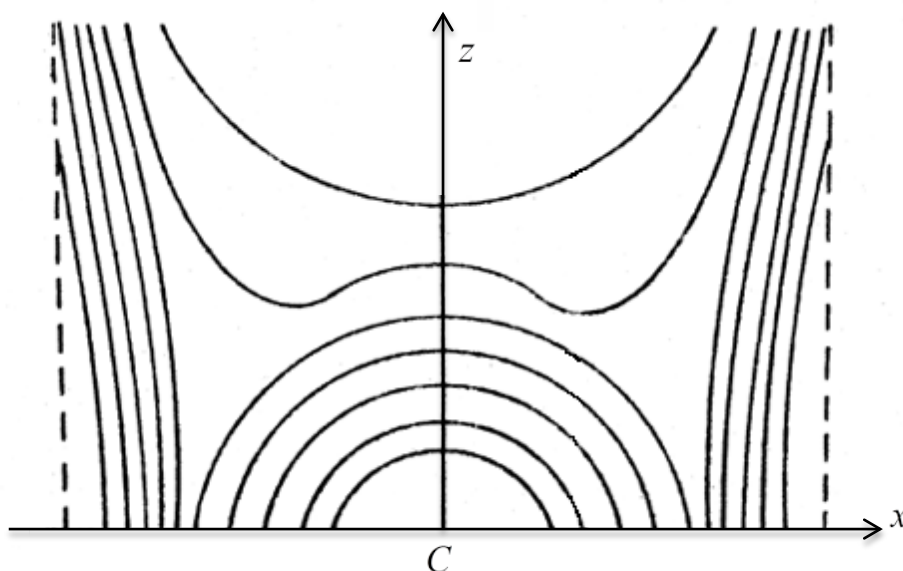
20 сурет – Якоби интеграл тұрақтысының әр түрлі мәндері кезіндегі Хилл сызықтары

$x = 0$ жазықтығы мен қисындылардың структурасы (22 сурет) келесі теңдеумен анықталады

$$y^2 + \frac{2\mu}{\rho_2} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \quad (5.26)$$



21 сурет – Үш дененің кеңістік шектеулі есебіндегі $y = 0$ жазықтықтығы мен Хилл беттерінің қисындылары



22 сурет – Үш дененің кеңістік шектеулі есебіндегі $x = 0$ жазықтықтығы мен Хилл беттерінің қисындылары

c_1 - Якоби тұрақтысының сыни мәндері кезіндегі Хилл беттері қос жұлдыздар жүйесі физикасында аса маңызды болады. Осы кезде M_1 мен M_2 ауыр нүктелерінің маңында бір-біріне жанасатын жұмыртқа-тәріздес аймақтар – **Рош қуыстары** пайда болады. Егер қос жүйенің бір компоненті өзінің Рош қуысын толтырса, сонда заттың бір компоненттен басқасына эффективті ағып өтуі мүмкін болады. Осы жағдайда қос жүйе **тығыз қос жүйесі** (ТҚЖ) деп аталады. Егер басқа компонент ретінде – эволюцияның соңғы кезеңіне жеткен массивті жұлдыз (пульсар немесе қара құрдым) болса, ТҚЖ қызықты құбылыстар болады. Осы объектке түсетін заттың үдеуі өте жоғары мәндерге ие болады. Осы себептен заттың температурасы жоғарылайды, ал компоненттің

осьтік айналу әсерінен пайда болатын аккрециялық диск - рентген сәулеленудің көзі ретінде болады. Осындай қос жүйедегі прецессиялық қозғалыс объектінің бақыланатын айнымалылығына алып келеді.

Кез келген үш дененің кеңістік шектеулі есебінің теңдеуін x, y, z координаттарынан жаңа ξ, η, ζ координаттарына ауысуға болады

$$x = \frac{r}{p}\xi, \quad y = \frac{r}{p}\eta, \quad z = \frac{r}{p}\zeta, \quad (5.27)$$

осында p - M_1 және M_2 ауыр нүктелерге қарағанда салыстырмалы кеплер қозғалысының фокалды параметрі.

Сонда үш дененің шектеулі есебінің теңдеуі – *Нехвил теңдеуі* арқылы беріледі

$$\begin{aligned} \xi'' &= 2\eta' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi}, \\ \eta'' &= -2\xi' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

осында потенциалдың теңдеуі

$$\bar{U} = \frac{r}{p} \left[\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2}e\zeta^2 \cos \nu + p^3 \left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2} \right) \right], \quad (5.29)$$

ал «штрих» белгісі ν - шын аномалия бойынша туындысын көрсетеді.

Хилл сызықтары мен беттер ұғымдары қозғалысты зерттеу үшін және аспан механикасының т.б. мәселелерінде қолданылады.

5.4 Үш дененің шектелмеген есебі

«Шектеулі есеп» термині тек үш дене есебінде ғана емес, сонымен қатар кез келген кіші массасы бар нүктесінің қозғалыс есебінде, егер осы нүкте өзіне әсер ететін басқа денелердің қозғалысына үлесін қоспаса, қолданылады. Егер әсерлесетін материалдық нүктелердің және денелердің массаларына ешқандай шек қойылмаса, олардың қозғалысын қарастыратын есептер – «шектелмеген есептер» деп аталады. Осы есептердің ішінде ең кең таралған **үш дененің шектелмеген есебі**. Оның теңдеулері инерциалды координат жүйесінде (5.1) формуласымен берілген. Үш дененің шектелмеген есебінде де либрация нүктелер - бес дербес лагранж шешімдері болады. Сондықтан, осы

шешімдерінің орнықтылығын және периодтылығын зерттеу мәселелері пайда болады.

1912 жылы алғаш рет К. Зудманмен дәрежелік қатарлары арқылы үш дененің шектелмеген есебінің интегралын дәл анықтады. Зерттеудің негізгі нәтижесі Зудман теоремасында көрсетілген:

Егер үш дененің шектелмеген есебінде момент интегралының тұрақтысы $c \neq 0$ болса, сонда бастапқы шарттар арқылы l және Ω екі оңтаңбалы тұрақтысын анықтауға болады. Сонда нүктелердің координаттары, олардың арақашықтықтары мен уақыт τ - айнымалы шамасының бүтін оңтаңбалы дәрежелері бойынша қатарларға жіктеледі. Осы қатарлар $|\tau| < 1$ шамаларында абсолютті жинақтылыққа ие болады және t - уақыттың әр түрлі мәндері кезінде үш дене есебіндегі қозғалысты сипаттайды.

l және Ω тұрақтыларын және τ айнымалы шамасын анықтау үшін дифференциалды t - уақытты ω - жаңа айнымалы шамаға алмастыру қажет:

$$dt = \Gamma d\omega, \quad \Gamma = \prod_{k=0}^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{R_k}{l}\right) \right). \quad (5.30)$$

Осылай алмастыру арқылы нүктелердің қозғалысы кезінде соқтығысу процесін сипаттауға мүмкіндік болады. Әр соқтығысу процесінен кейін жана бастапқы шарттар болады, олар соқтығысу дейінгі бастапқы шарттармен анықталады. l тұрақтысы келесі теңдеумен анықталады:

$$l = \frac{1}{3} \sqrt{m_0} \frac{c_1^2 R^{(0)}}{\left(R^{(0)} \dot{R}^{(0)}\right)^2 + c_1^2}, \quad (5.31)$$

осында m_0 - үш нүктенің ең кіші массасы, $R^{(0)}, \dot{R}^{(0)}$ - R шамасының бастапқы мәндері мен оның уақыт бойынша туындысы. R шамасы келесі теңдеу арқылы анықталады

$$R = \sqrt{\frac{\Delta_{12}^2}{m_0} + \frac{\Delta_{02}^2}{m_1} + \frac{\Delta_{01}^2}{m_2}}, \quad (5.32)$$

осында Δ_{ij} және m_k - жүйенің нүктелер арасындағы қашықтық пен нүктелердің массалары. $m = m_0 + m_1 + m_2$, сонда

$$c_1 = \frac{m_0 m_1 m_2}{m} c. \quad (5.33)$$

Ω тұрақтысын анықтау теңдеуі

$$\Omega = \frac{l_1 \sqrt{\frac{3l_1}{\mu}}}{\frac{15}{8} \frac{m}{m_0} + \frac{3G_+^2 l_1}{2\mu_0} + \frac{9G_+ \sqrt{\mu l_1}}{2\mu_0} + \frac{3}{4G} l_1 |K| + 224 \sqrt{\frac{16m}{m_0} + \frac{3l_1}{G} |K|}}, \quad (5.34)$$

осында $l_1 = \frac{2}{29} l$, $\mu = Gm$ - есептің гравитациялық тұрақтысы, $\mu_0 = Gm_0$ - ең кіші массалы нүктенің гравитациялық тұрақтысы. Қосымша тұрақты шама келесі теңдеумен анықталады

$$G_+ = \frac{1}{14l_1} \sqrt{\frac{9c^2}{2m_0^2} + \left(775 + \frac{3m}{m_0}\right) \left(\frac{1}{29} + \frac{m}{4m_0} + \frac{l_1}{16G} |K|\right) \mu l_1}, \quad (5.35)$$

осында

$$K = -\frac{m}{m_0 + m_1 + m_2} h, \quad (5.36)$$

h - энергия интегралының тұрақтысы.

τ - айнымалы шама келесі теңдеумен анықталады

$$\tau = th \left(\frac{\pi \omega}{4\Omega} \right). \quad (5.37)$$

Осындай жолымен алынған нәтижелер күрделі болады, сондықтан Зудман қатарлары практикада қолданылмады. Бірақ Зудман нәтижелерінің принципіалдық мәні өте жоғары, өйткені үш одан да көп денелер есебін аналитикалық зерттеулерге ғалымдарды ынталандырды.

Бақылау сұрақтары

1. Үш дененің шектеулі шеңберлік есебі.
2. Үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебі.
3. Либрация нүктелері.
4. Хилл сызықтары.
5. Үш дененің шектелмеген есебі.

VI. ТАБИҒИ ЖӘНЕ ЖАСАНДЫ АСПАН ДЕНЕ СЕРІКТЕРІНІҢ ҰЙТҚЫМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСЫ

Аспан денесінің серігі - басқа орталық денені материалдық нүкте ретінде айналып қозғалатын кез келген аспан денесін айтады. Серіктің ұйытқысыз қозғалысы - эллипстік кеплер қозғалысы болады. *Қозғалыс ұйытқымалы болу үшін келесі факторлар әсер етеді:*

1. орталық дененің гравитациялық өрісінің материалдық нүктенің өрісінен айырмашылығы;
2. материалдық нүкте ретінде қарастырылатын кез келген үшінші дененің әсері;
3. серіктің қозғалысы болып жатқан орта кедергісінің әсері.

Бірінші жағдайда - тығыздалған планетаның табиғи немесе жасанды серіктің қозғалысы немесе ерте спектралды класс жұлдыздың айналасындағы планетаның қозғалысы болады. Екінші жағдайда - бір планетаның екіншісінің қозғалысын ұйытқуы немесе Күннің планета серігінің қозғалысына әсер етуі. Үшінші жағдай ретінде планетаның жасанды серіктің қозғалысына атмосфера кедергісінің әсері.

6.1 Серіктің қозғалысына орталық дененің тығыздалуының әсері

6.1.1 Серіктің ұйытқымалы қозғалысының бірінші жуықтауы

Орталық дененің гравитациялық өрісі материалдық нүктенің өрісінен айырмашылығы болады, оның *потенциалы*

$$V = \frac{\mu}{r} + R, \quad (6.1)$$

R - ұйытқымалы потенциал. Физикалық тұрғысынан қарағанда, осы жағдайда, осьтік айналу қозғалыс кезінде ортадан тепкіш күш әсерінен экватор бойымен дене созылады. Сонда ε - дененің геометриялық сығылуы, J_2 - гравитациялық потенциалының екінші зоналды гармониканың коэффициенті және q - айналу параметрі келесі байланыста болады

$$q = \frac{\omega^2 a}{\mu}. \quad (6.2)$$

Сонда

$$J_2 = -\frac{2\varepsilon - q}{3}. \quad (6.3)$$

Күн жүйесіндегі планеталар үшін J_2 модуль бойынша $10^{-2} \div 10^{-3}$ шамасына тең болады. Сонда, жанасатын элементтер әдісі арқылы планеталар сығылуының серіктердің қозғалысына әсер етуін зерттеуге болады. Осы кезде

$$R = \mu J_2 \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \cdot \frac{a^2}{r^3}, \quad (6.4)$$

осында μ - орталық дененің гравитациялық параметрі, a - экваториалдық радиус, θ - потенциал анықталатын нүктенің полярлы қашықтығы. (6.4) енгізу арқылы орталық дененің экваториалды жазықтығымен байланысты координат жүйесі алынады.

Ұйытқымалы қозғалыстың эволюциялық теңдеулерін анықтау үшін келесі интегралды шешу қажет

$$\bar{R} = \frac{1}{4\pi} n a^2 J_2 \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) \frac{dv}{r}. \quad (6.5)$$

Орбита теңдеуінен r мәнін алғанда және $\cos \theta$ анықтаған кезінде (6.5) келесі теңдеуге айналады

$$\bar{R} = \frac{1}{4\pi} \frac{n a^2 J_2 \sqrt{\mu}}{p^{3/2}} \int_0^{2\pi} [3 \sin^2(\omega + \nu) \sin^2 i - 1] (1 + e \cos \nu) d\nu. \quad (6.6)$$

(6.6) интегралдау арқылы

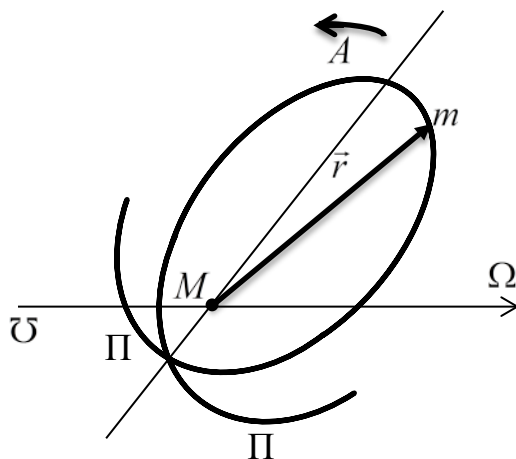
$$\bar{R} = \frac{n a^2 J_2 \sqrt{\mu}}{4 p^{3/2}} (1 - 3 \cos^2 i). \quad (6.7)$$

Орташаландырылған потенциал тек i мен p элементтеріне тәуелді болады.

Жанасатын элементтер үшін жазылған Лагранж теңдеулеріне элемент бойынша потенциалдың туындыларын енгізу арқылы келесі теңдеулерді аламыз

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= 0, \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{e}}{dt} = 0, \\ \frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= \frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{a}{p} \right)^2 \cos i, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{a^2}{p} \right) (1 - 5 \cos^2 i). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Сонымен, i, p, e элементтері ғасырлық ұйытқуларға ие болмайды, орбитаның енкеюі, орбитаның өлшемі мен пішіні орташа мәніне қарағанда өзгермейді. (6.8) теңдеуіндегі соңғы екі теңдеуі бойынша потенциалдың екінші зоналды гармоника әсерінен қозғалыстың ғасырлық ұйытқулары *түйін сызықтарының прецессиясына* және орбита жазықтығындағы *апсид сызықтарының прецессиясына* айналады.



23 сурет – Апсид сызықтарының прецессиясы

Полярлық орбита үшін түйіндер сызықтарының прецессиясының жылдамдығы 0 тең болады және орбитаның енкею мәні азайған сайын үлкееді. $J_2 < 0$ болғандықтан, осы жағдай серіктің орбита бойындағы қозғалысына қарама қарсы бағытта болады. $\cos i = 1/\sqrt{5}$ болған кезінде апсид сызықтарының прецессиясының жылдамдығы 0 тең болады, сонда $i \cong 63.5^\circ$ кезінде оның бағыты қарамақарсы бағытқа ауысады. Орбитаның енкею 60° жақын, төмен орналасқан Жердің жасанды серігі үшін түйіндер сызықтарының прецессиясының периоды үш айға жуық, себебі оның жылдамдығы 4° тәулікке болады.

Ескерту: егер «үлкен» Жер айналасындағы «кіші» жасанды серіктің қозғалысы қарастырылса, онда Жер айналу осі төңірегіндегі серіктің орбита жазықтығына қарай нормаль прецессиясы туралы айтылады. Егер «үлкен» Күнді «кіші» Жер айналу қозғалысы қарастырылса, онда оның орбита жазықтығына қарай нормаль маңындағы Жер айналу осінің прецессиясы туралы айтылады. Осы екі жағдайда да бір физикалық құбылыс туралы айтылады: сығылған дене мен материалдық нүктенің арасындағы олардың салыстырмалы қозғалыс кезіндегі гравитациялық әсерлесуі.

Бұл есеп материалдық нүктенің шекті өлшемі бар денемен әсерлесу әсерінен пайда болатын қозғалысын анықтау есебінің дербес жағдайы ретінде қарастырылған. Аспан механикасында осы есеп Фату есебі деп аталған.

Жер үшін J_2 коэффициенттің шамасы кіші болса да ($|J_2| \cong 10^{-3}$), (6.8) теңдеулері арқылы, қажетті жуықтау дәлділігімен, жасанды Жер серіктерінің координаттарын есептеуге мүмкін болмайды. Сол себептен келесі есеп қарастырылады.

6.1.2 Екі жылжымайтын центр есебі

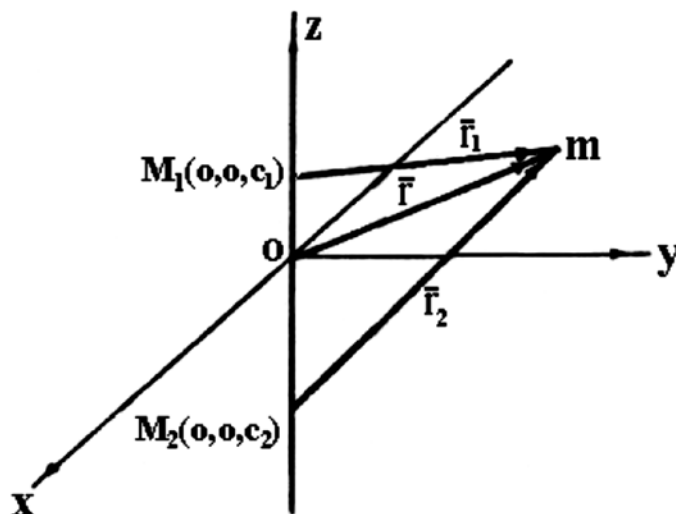
Инерциалды координат жүйесіндегі m_1 және m_2 жылжымайтын екі материалдық нүктені қарастырамыз. Осы нүктелердің ортақ тартылыс өрісіндегі m материалдық нүктенің қозғалысын зерттеу керек. Физикалық көзқарасынан қарағанда осы есептің қойылуы дұрыс емес. Егер m нүктесін m_1 , m_2 нүктелер өзіне тартып жатса, неліктен олар бір-бірін тартпайды және m нүктесімен тартылмайды, ал егер тартылса, сонда қай себептен олар жылжымайтын болады. Бірақ, осы есептің қолдануы кең болу мүмкіндігінен, осы есепті қарастыру керек. Екі жылжымайтын центр есебінің теңдеуі

$$\ddot{\vec{r}} + \mu_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} = 0. \quad (6.9)$$

Егер жылжымайтын нүктелердің масса центріне координат басын орналастырғанда және осы нүктелерді қосатын сызық бойымен z осін бағытаған кезінде, келесі теңдеу алынады

$$r_{1,2} = \sqrt{r^2 - 2rc_{1,2} \cos \gamma + c_{1,2}^2}, \quad (6.10)$$

Осында $c_{1,2}$ - m_1 , m_2 нүктелердің аппликатысы.



24 сурет – Екі жылжымайтын центр есебі

Сонда екі жылжымайтын центр есебінің күштік функциясы

$$V_{12} = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\cos \gamma) \frac{\gamma_k}{r^k} \right], \quad (6.11)$$

осында

$$\gamma_k = \frac{m_1 c_1^k + m_2 c_2^k}{m_1 + m_2} \quad (6.12)$$

- коэффициенттер.

Функция V_{12} - $m_{1,2}$ және $c_{1,2}$ параметрлерімен берілетін гравитациялық дипольдің потенциалы. Сонда дипольдің параметрлері

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= M, \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 &= 0, \\ m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 &= J_2 M a^2, \\ m_1 c_1^3 + m_2 c_2^3 &= J_3 M a^3, \end{aligned} \quad (6.13)$$

осында M және a - дененің массасы мен экваториалды радиус, J_2, J_3 - гравитациялық потенциалдың екінші мен үшінші гармоникалардың коэффициенттері. Алдыңғы екі теңдеуден

$$m_1 = -\frac{M c_2}{c_1 - c_2}, \quad m_2 = \frac{M c_1}{c_1 - c_2}. \quad (6.14)$$

Және (6.14)-ті (6.13) соңғы екі теңдеуіне енгізген кезінде

$$c_1 c_2 = -J_2 a^2, \quad c_1 c_2 (c_1 + c_2) = -J_3 a^3 \quad (6.15)$$

немесе

$$c_1 c_2 = -J_2 a^2, \quad c_1 + c_2 = \frac{J_3}{J_2} a.$$

Виета теоремасы бойынша

$$c_{1,2} = \left(\frac{J_3}{J_2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_3}{J_2} \right)^2 + 4J_2} \right) \frac{a}{2}. \quad (6.16)$$

Егер экваторға қарағанда дене симметриялы болса, сонда $J_3 = 0$ және

$$c_{1,2} = \pm \sqrt{J_2} a. \quad (6.17)$$

Егер (6.14), (6.16) немесе (6.17) формулалар бойынша гравитациялық дипольдің параметрлерін анықтасақ, орталық дене өрісіндегі серіктің қозғалыс есебінің дәл шешімін аламыз.

Экваторға байланысты симметриялы дененің декарт пен λ, μ, w эллипстік координаталарының байланысы

$$\begin{aligned}x &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\cos w, \\y &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\sin w, \\z &= c\lambda\mu,\end{aligned}\tag{6.18}$$

осында $c = |c_{1,2}|$.

Екі жылжымайтын центр есебінің шешімі

$$\begin{aligned}\int \frac{d\lambda}{\sqrt{2(1+\lambda^2)(\alpha_1 c^2 \lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2)c\lambda + \alpha_2) + \alpha_3^2}} &= \tau + \beta_1, \\ \int \frac{d\mu}{\sqrt{2(1-\mu^2)(\alpha_1 c^2 \mu^2 - \alpha_2) - \alpha_3^2}} &= \tau + \beta_2, \\ w &= \alpha_3 \int \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} d\tau + \beta_3, \\ t &= c^2 \int (\lambda^2 + \mu^2) d\tau,\end{aligned}\tag{6.19}$$

осында α_i, β_i -Гамильтон-Якоби әдісінің интегралдау тұрақтылары. Гравитациялық дипольдің параметрлері: 209 км – Жер үшін, 150 км – Марс үшін, 8462 км – Юпитер үшін, 7547 км – Сатурн үшін болады.

6.2 Үшінші дененің серіктің қозғалысына әсері

Екі денені материалдық нүкте ретінде қарастырамыз. M массалы орталық денесіне қарағанда m_1 массалы ұйытқу дене шеңбер бойымен r_1 радиусы бар орбитамен және n_1 бұрыштық жылдамдылығымен қозғалады. Осы қозғалыстың жазықтығын координат жүйесінің негізгі жазықтығы ретінде аламыз.

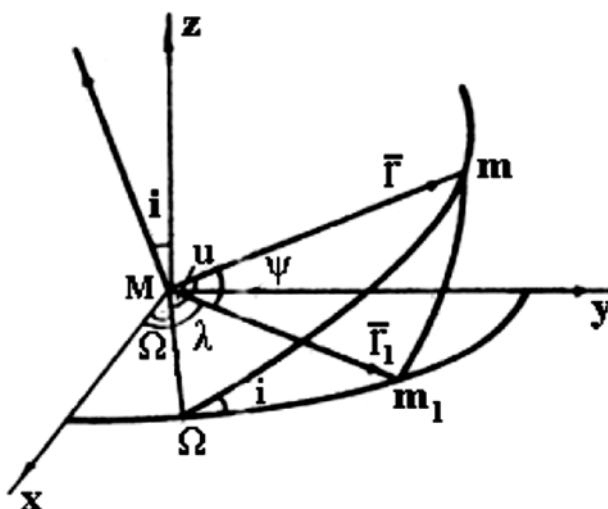
6.2.1 Ұйытқымалы потенциал және оның орташасы

Ұйытқымалы қозғалыстың теңдеуі

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \mu_1 \left(-\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} \right), \quad (6.20)$$

осында оң жақтағы бірінші қосындысы – координат басына (орталық денеге) ұйытқымалы денемен берілетін қарама қарсы таңбасымен үдеу, екінші қосынды – серікке ұйытқымалы денемен берілетін үдеу. Сонда ұйытқымалы потенциал

$$R = \mu_1 \left(-\frac{\vec{r}_1 \vec{r}}{r_1^3} + \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} \right). \quad (6.21)$$



25 сурет – m_1 үшінші денемен m серіктің қозғалысын ұйытқу

(6.21) теңдеуінің бірінші құраушысы \vec{r}_1 радиус-вектор серіктің координаттарына тәуелсіз жағдай үшін жазылған. Серік және ұйытқу дененің арасындағы қашықтық

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}| = \sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos \psi + r_1^2}. \quad (6.22)$$

$r \ll r_1$ шарты орындалады деп есептейміз. Осы жағдай болу мүмкін егер ұйытқу денесі ретінде планетаның табиғи серігі болса немесе егер серіктің қозғалысына Күн - ұйытқымалы дене ретінде әсеретсе. Егер серік пен ұйытқымалы дене арасындағы кері қашықтықты r/r_1 дәрежесі бойынша қатарға жіктесек және μ_1/r_1 шамасын ескермесек, сонда ұйытқымалы потенциал

$$R = \frac{\mu_1 r^2}{2r_1^3} (3 \cos^2 \psi - 1). \quad (6.23)$$

Суреттегі $m\Omega m_1$ сфералық үшбұрыштан

$$\cos \psi = \cos u \cos(\nu_1 - \Omega) + \sin u \sin(\nu_1 - \Omega) \cos i. \quad (6.24)$$

Енді (6.23) арқылы анықталатын ұйытқымалы потенциалды орташалаймыз. Осы жағдайда ол екі айнымалы шамасына тәуелді болады: ν - серіктің шын аномалиясына және ν_1 - ұйытқымалы дененің шын аномалиясына. Егер серік пен ұйытқымалы дененің айналу периодтары әртүрлі болса, сонда әр шамасы бойынша ретімен потенциалды орташалауға болады. Бірінші $\nu_1 = n_1 t$ айнымалы шамасынан бастаймыз.

$$\bar{R} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} R(\nu_1(t)) dt, \quad (6.25)$$

осында $T_1 = 2\pi/n_1$ - период. Осы теңдеудің интегралын анықтағанда

$$\bar{R} = \frac{\mu_1 r^2}{4r_1^3} (1 - 3 \sin^2 u \sin^2 i) \quad (6.26)$$

r радиусын орбита теңдеуінен алған кезінде ν - серіктің шын аномалиясы бойынша орташалау интегралы келесі түріне айналады

$$\bar{\bar{R}} = \frac{1}{2\pi} \frac{n\mu_1 p}{4r_1^3 \sqrt{\mu p}} \int_0^{2\pi} \frac{1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \nu) d\nu}{(1 + e \cos \nu)^4}. \quad (6.27)$$

Осы интегралдың шешімі

$$\bar{\bar{R}} = \frac{3}{8} \frac{\mu_1 a^2}{r_1^3} [(1 - e^2) \cos^2 i + e^2 (2 - 5 \sin^2 \omega \sin^2 i)], \quad (6.28)$$

осында a - серіктің жанасатын орбитасының үлкен жартылай осі.

6.2.2 Эволюция теңдеулері мен олардың алғашқы интегралдары

Эволюциялық теңдеулерін жазу үшін жанасатын орбитаның кеплер элементтерінен каноникалық элементтер жүйесіне - Делоне элементтеріне ауысу керек. Бұл элементтер кеплер элементтерімен келесі байланыста болады

$$L = \sqrt{\mu a}, \quad G = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \quad H = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i, \quad l = \pi + M, \quad g = \omega, \quad h = \Omega. \quad (6.29)$$

Делоне элементтер арқылы жазылған екі рет орташаланған ұйытқымалы потенциал

$$\bar{R} = \frac{3}{8} \frac{\mu_1}{r_1^3} \frac{L^4}{\mu^2} \left[\frac{H^2}{L^2} + \frac{L^2 - G^2}{L^2} \left(2 - 5 \frac{G^2 - H^2}{G^2} \sin^2 g \right) \right]. \quad (6.30)$$

Егер H_0 - ұйытқысыз қозғалыстың гамильтонианы оның толық энергиясына - $\frac{\mu}{a}$ сәйкес келсе және гамильтонианның ұйытқуы H_1 - қарама қарсы таңбасымен берілетін \bar{R} ұйытқу функциясы болса, Гамильтон функциясы $H = H_0 + H_1$ немесе келесі теңдеумен анықталады

$$H = - \left[\frac{\mu^2}{2L^2} + \bar{R}(L, G, H, g) \right]. \quad (6.31)$$

Гамильтон функциясы l мен h айнымалы шамаларына тәуелсіз болғандықтан, $L = L_0$ және $H = H_0$ алғашқы интегралдары болады. Гамильтон функциясы – алғашқы интеграл ретінде алуға болады, себебі уақытқа тәуелсіз немесе $H = const$. Кеплер элементтерін қарастырғанда

$$a = a_0, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1, \quad (6.32)$$

сонда

$$e^2 (2 - 5 \sin^2 \omega \sin^2 i) = c_2. \quad (6.33)$$

Үлкен жарты остерінің ғасырлық ұйытқу болмаған кезіндегі Лаплас теоремасының көрінуі - алғашқы интеграл $a = a_0$.

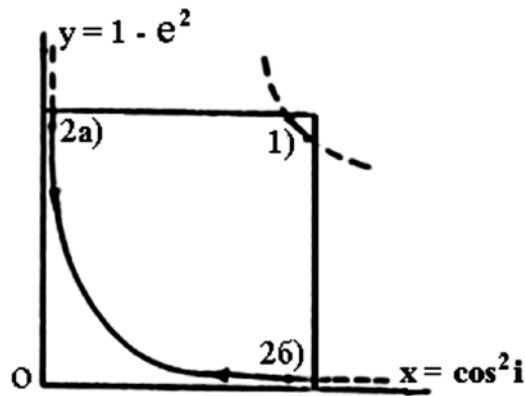
$x = \cos^2 i$ және $y = 1 - e^2$ фазалық жазықтықтағы ұйытқымалы қозғалыстың әрекетін қарастырамыз.

$xy = c_1$ теңбүйірлі гипербола бойымен бейнелейтін нүкте қозғалады. Екі шекті жағдайды қарастырамыз: 1) $c_1 \cong 1, e \ll 1, i \ll \frac{\pi}{2}$ және 2) $c_1 \ll 1$.

Егер e_0 - эксцентриситеттің және i_0 - орбита еңкеюдің бастапқы мәндері кіші болса - бірінші жағдай орындалады.

Екінші жағдайда бейнелейтін нүктенің екі шекті орналасуын белгілейміз:

а) $e \ll 1, i \cong \frac{\pi}{2}$ және б) $e \cong 1, i \ll \frac{\pi}{2}$. Шеңберге жақын түрі және ұйытқу дененің қозғалыс жазықтығына перпендикуляр болатын серіктің орбитасы а) жағдайына сәйкес келеді.



26 сурет – Серіктің ұйытқымалы қозғалыстың орнықты мен орнықсыз жағдайлары: 1 – орнықты - $c \cong 1$; 2 – орнықсыз - $c \ll 1$

Аз мөлшерінде еңкейген, бірақ қатты созылған серіктің орбитасы б) орналасуына сәйкес келеді. Ұйытқымалы қозғалыстың ұзақ уақыт әрекетінде бейнелеу нүктесі а) орналасуынан б) орналасуына ауысады және керісінше болу мүмкін. Сонда екінші жағдайында орбита пішіні мен оның негізгі координат жазықтығына еңкеюіне байланысты ұйытқымалы қозғалыс орнықсыз болады (бұл $(1 - e_0^2) \cos^2 i_0 \ll 1$ бастапқы шарт кезінде болады). Орбита эволюциясы бір шекті күйінен басқасына ауысу тез арада болады. Есептеулер бойынша келесі нәтиже алынды. Егер қазіргі эксцентриситетімен Айдың қазіргі еңкею бұрышын 90° толықтырып, оны осы бұрышқа эклиптикаға еңкейген орбитаға ауыстырсақ, сонда Айдың еңкеюі тез төмендейді, ал орбита эксцентриситеті жоғарылайды. Осы кезде 4,5 жылдан кейін перигейдегі Айдың қашықтығы Жердің радиусына тең болады және Ай Жерге «кұлайды».

Егер (6.33) интегралында (6.32)-нің екінші қатынасы арқылы e мәні жойылса, $x = \cos^2 i$ және $z = \sin^2 \omega$ фазалық жазықтығында ұйытқымалы қозғалыстың әрекетін зерттеуге болады. Сонда

$$z = \frac{(2 - c_2)x - 2c_1}{5(x - c_1)(1 - x)}. \quad (6.34)$$

Осы функцияның әрекеті екі типті болады: а) бірлік шаршы аймағында функцияның экстремум нүктелері болмайды және оның төмен мен жоғары қабырғаларын функция кесіп өтеді; б) функцияның минимумдері болады және бірлік шаршының жоғарғы қабырғасын екі рет кесіп өтеді.

а) жағдайында:

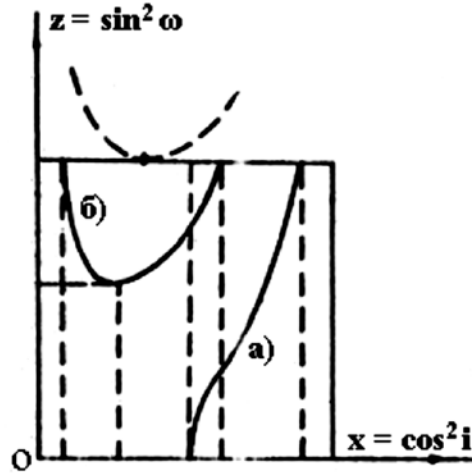
- $\sin^2 \omega$ мәндері 0 мен 1 арасында өзгереді;

- Перигейлік қашықтық өседі – апсид сызықтарының прецессиясы болады;

- i_1 ден i_2 дейін орбита еңкею периодтық түрінде өзгереді.

б) жағдайында:

- Перигентрлік қашықтық тек белгілі аралығында өзгереді: $90^\circ - \Delta\omega_1 \leq \omega \leq 90^\circ + \Delta\omega_2$ немесе $270^\circ - \Delta\omega_1 \leq \omega \leq 270^\circ + \Delta\omega_2$ - апсид сызықтарының либрациясы болады;
- i_1 ден i_2 дейін орбита еңкеюі өзгереді.



27 сурет – Серік орбитасының перигентрлік қашықтықтың ұйытқуы: ротациялық (а) және либрациялық (б)

Орташаланған жанасатын Делоне элементтері - G, g, h арқылы жазылған эволюциялық теңдеулерінің шешімі

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -\frac{15 \mu_1}{8 r_1^3} \cdot \frac{L_0^2}{\mu^2} \cdot \frac{(L_0^2 - G^2)(G^2 - H^2)}{G^2} \sin 2g, \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{3 \mu_1}{4 r_1^3} \cdot \frac{L_0^2}{\mu^2} \cdot G \left(2 - 5 \frac{G^4 - L_0^2 H_0^2}{G^4} \sin^2 g \right), \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{3 \mu_1}{4 r_1^3} \cdot \frac{L_0^2}{\mu^2} \cdot H_0 \left(1 + 5 \frac{G^2 - L_0^2}{L_0^2} \sin^2 g \right). \end{aligned} \quad (6.35)$$

6.3 Планетаның жасанды серік қозғалысына атмосфера кедергісінің әсері

6.3.1 Атмосфера кедергісінің күші

Жылдамдықтардың жоғары мәндерінде орта кедергісінің күші осы ортаның тығыздығы мен қозғалыс жылдамдығының квадратына пропорционал болады және жылдамдық векторына қарама қарсы бағытталады. Кедергі күшінің үдеуі

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{c_x}{m} \rho S_x V \vec{V}, \quad (6.36)$$

Осында c_x - кедергі коэффициенті, m - серіктің массасы, S_x - \vec{V} жылдамдық векторына перпендикуляр серік қисынның ауданы, ρ - атмосфера тығыздығы. Сонда

$$\vec{F} = -c\rho V\vec{V}. \quad (6.37)$$

Атмосфера тығыздығы h биіктікке тәуелді болады. Егер атмосфера гидростатикалық тепе-теңдік күйінде болса

$$dp = -g\rho dh, \quad (6.38)$$

Және идеал газдың күй теңдеуіне сәйкес келсе, сонда келесі теңдеуін алуға болады

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\bar{\mu}g}{RT}dh = -\frac{dh}{H}, \quad (6.39)$$

осында $\bar{\mu}$ - атмосфераның салыстырмалы молекулярлы массасы, T - оның температурасы, R - универсалды газ тұрақтысы, H - атмосфераның биіктік шкаласы. Ауырлық күшінің үдеуі биіктікке тәуелді болады

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(R_0 + h)^2}, \quad (6.40)$$

R_0 - планета радиусы, M - оның массасы. Жоғары атмосфераның (термосфераның) температурасы биіктікке байланысты өзгереді, себебі Күннің қысқатолқынды және корпускулярлы сәулеленуі арқылы атмосфера жылыды. Және биіктікке байланысты $\bar{\mu}$ - атмосфераның салыстырмалы молекулярлы массасы азаяды. Сонымен, жоғары атмосферада атмосфераның биіктік шкаласы өзгереді, биіктікке байланысты үлкееді, сондықтан (5.39) интегралдау арқылы

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\int_0^h \frac{dh}{H(h)}\right). \quad (6.41)$$

Серіктің қозғалысы болатын биіктіктегі атмосфера тығыздығы қарастырамыз, немесе серік орбитасының перицентр мен апоцентр арасындағы биіктіктерді. Егер орбита эксцентриситеті үлкен болмаса, сонда

$$\rho(r) = \rho_\pi \exp\left(-\frac{r - r_\pi}{H_\pi}\right), \quad (6.42)$$

осында ρ_π және H_π - серік орбитасының перицентрдегі тығыздық пен атмосфераның биіктік шкаласы. Орбитаның центріне қашықтық

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (6.43)$$

сонда айырымы

$$r - r_\pi = a(1 - e \cos E), \quad (6.44)$$

ал атмосфера тығыздығы

$$\rho(r) = \rho_\pi \exp(-\alpha(1 - \cos E)), \quad (6.45)$$

және өлшемсіз параметр

$$\alpha = \frac{ae}{H}. \quad (6.46)$$

Атмосфераның жылуы Күннің қысқатолқынды және корпускулярлы сәулеленуінің мөлшері мен планетаның ендігіне, тәуіліктің уақытына, жыл мерзіміне және Күн белсенділік циклдың фазасына байланысты болады. Сондықтан жоғары атмосферасының температурасы және оның биіктік шкаласы кең интервалында өзгеру мүмкін. Жердің жасанды серіктері Жер атмосферасының 200-400 км биіктерінде қозғалады, сонда биіктік шкаласы 30-100 км аралығында өзгереді.

6.3.2 Эволюция теңдеулері

Жанасатын элементтер арқылы теңдеулерін алу үшін атмосфераның кедергі күшінің радиус-векторға байланысты S - радиалды және T - нормалды компоненттерін анықтау керек

$$S = -c\rho \frac{\mu}{p} e \sin \nu \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}, \quad (6.47)$$

$$T = -c\rho \frac{\mu}{p} (1 + e \cos \nu) \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}.$$

Сонда

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= 0, \quad \frac{di}{dt} = 0, \\ \frac{dp}{dt} &= -2c\rho \sqrt{\mu p} \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}, \end{aligned} \quad (6.48a)$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= -2c\rho\sqrt{\frac{\mu}{p}}(\cos\nu + e)\sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -2c\rho\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{\sin\nu}{e}\sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2}.\end{aligned}\tag{6.48ә}$$

(6.48)-дің бірінші екі теңдеу арқылы: $\Omega = \Omega_0, i = i_0$. Осыдан келесі факт айқындалады: жанасатын орбита жазықтығында орналасқан атмосфераның кедергі күші, осы жазықтықтың орналасуын өзгертпейді. Фокалды параметр мен эксцентриситеттің орташа мәндері үшін эволюциялық қозғалыс теңдеулері:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -2cnp^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho\frac{\sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2}}{(1 + e\cos\nu)^2}d\nu, \\ \frac{de}{dt} &= -2cnp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho\frac{(\cos\nu + e)\sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2}}{(1 + e\cos\nu)^2}d\nu.\end{aligned}\tag{6.49}$$

Уақыт өзгеруімен атмосфера кедергінің әсерінен фокалды параметрдің және эксцентриситеттің орташа мәндері азаяды. Сондықтан серіктің ұшу биіктігі төмендейді және оның орбитасы шеңбер түріне жақын болады. Кейінірек, атмосфераның тығыз қабаттарына түскен кезінде кіші серіктер өртеніп кетеді, ал үлкен объектілер жойылады.

Бақылау сұрақтары

1. Серіктің қозғалысына орталық дененің тығыздалуының әсері.
2. Екі жылжымайтын центр есебі.
3. Үшінші дененің серіктің қозғалысына әсері.
4. Планетаның жасанды серік қозғалысына атмосфера кедергісінің әсері.

ӘДЕБИЕТТЕР

Негізгі

1. Александров Ю.В. Небесная механика: Учебник.– Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2006. – 256 с.
2. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. – Алматы, Издат. Эверо, 2009. – 227 с.
3. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2009. – 160 с.
4. Яшкин С.Н. Небесная механика. Учебное пособие М., изд-во МИИГАиК, 2014. – 270 с.
5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007. – 153 с.
6. Ишмухаметова М.Г., Кондратьева Е.Д. Учебно-методическое пособие, предназначенное для практических занятий по дисциплине «Небесная механика». Казань, 2009. – 37 с.

Қосымша

1. Холшевников К.В., Питьев Н.П., Титов В.Б. Притяжение небесных тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2005. – 110 с.
2. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения ИСЗ. Учеб. пособие. Томск: Издательство Томского университета, 2007. – 178 с.
3. Антонов В.А., Никифоров И.И., Холшевников К.В. Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПб: Изд. СПбГУ, 2008. – 207 с.
4. Емельянов Н.В. Основы теории возмущений в небесной механике. Учебное пособие. М: Физический факультет МГУ, 2015. – 126 с.
5. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008. – 72 с.
6. Боннар Б., Фобур Л., Треля Э. Небесная механика и управление космическими летательными аппаратам // Перевод с французского - О.И. Яковенко; Под научной редакцией - д.ф.-м.н., проф. К.В. Холшевникова. Серия - Математика и механика. М. - Ижевск, 2014. – 344 с.
7. Морбиделли А. Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы. М. Ижевск 2014. – 414 с.
8. Шази, Жан. Теория относительности и небесная механика // Т. 1. (пер. с фр. В.В. Шуликовской под ред. К.В. Холшевникова) М.-Ижевск, Ин-т компьютерных исследований, 2011. – 260 с.
9. Игнатюк Т.А., Прошкин В.А., Павловский В.Е. Компьютерный практикум по небесной механике. Концепция и структура. Препринт №73. М., Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2002. – 28 с.
10. Минглибаев М.Д. Динамика нестационарных гравитирующих систем // Алматы, Каз. нац. ун-т им. аль-Фараби, 2009. – 207 с.