

УДК 530.1

НОВЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ РЕЖИМОВ ПО РЕАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

З.Ж. Жанабаев., С.Н.Ахтанов

Научно - Исследовательский Институт Экспериментальной и Теоретической Физики, Казахский Национальный Университет им. аль - Фараби, Алматы, Казахстан; sayataktanov@mail.ru

Предложена новая характеристика хаоса - эволюционный параметр порядка. Этот параметр позволяет определить бифуркационные режимы по реализации динамической системы. В отличие от существующих методов построения бифуркационных диаграмм, данный метод более точно определяет состояние динамической системы.

В качестве генератора сигналов выбраны модели динамических систем, как логистическое отображение, отображение Хенна, новое отображение «накопления - выброса», модифицированная система Лоренца. Приведены их бифуркационные диаграммы по эволюционному параметру порядка.

Введение

Бифуркационная диаграмма нелинейной динамической системы строится, как правило по известному параметру, который меняет состояние самой динамической системы. Поэтому нет общего метода построения бифуркационной диаграммы динамической системы, не зная параметр порядка динамической системы. Многие природные явления можно описать как динамическую систему. Например, астрофизические процессы, изменение погоды, магнитуды землетрясения и.т.д., однако они явно не содержат параметра порядка.

В современных исследованиях [1-4] рассматриваются бифуркации в разных динамических системах, которые определяют качественные изменения состояния системы. Бифуркационные диаграммы строятся как зависимость максимальных и минимальных значений физической величины от управляющего параметра, заданного в уравнениях динамической системы.

Однако не всегда известны уравнения динамической системы и возникает естественный вопрос, можно ли определить режимы бифуркации по реализациям (по временному ряду, по фотографическим изображениям и.т.д.). Поэтому в настоящей работе ставится цель определить соответствующий параметр порядка, изменение которого привело бы к бифуркациям.

Для этой цели предлагается новое выражение для параметра порядка эволюционного процесса. Этот параметр позволяет построить бифуркационную диаграмму по реализации, не зная уравнения динамической системы.

1. Эволюционный параметр порядка сильно неоднородных хаотических сигналов.

Существование метрических характеристик (длины, площади, объема) следует из выполнения известного интегрального неравенства Гельдера для любых функций $x_i(t), x_j(t)$, записанного в виде

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T |x_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |x_j(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq K_{x_i, x_j}^{p, q} \frac{1}{T} \int_0^T |x_i(t) \cdot x_j(t)| dt, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (1)$$

где $K_{x_i, x_j}^{p, q}$ - коэффициент, при постоянном значении которого выполняется равенство в (1). В формуле (1) использовано усреднение по времени t . Обозначив через угловые скобки более общее усреднение по ансамблю из (1) имеем

$$K_{x_i, x_j}^{p, q} = \frac{\left(\langle |x_i|^p \rangle \right)^{1/p} \left(\langle |x_j|^q \rangle \right)^{1/q}}{|\langle x_i x_j \rangle|}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2)$$

Выражение (2) назовем обобщенно – метрической характеристикой согласно работе [5], где впервые была введена эта характеристика хаоса. Формула (2) отличается от обратного коэффициента нецентрированной автокорреляции: усредняется модуль произведения функций, учитывается возможность $p \neq q \neq 2$. В случае $p = q = 2$ искомая характеристика определяется евклидовой метрикой. Если $x_i(t) \equiv x(t)$, $x_j(t) = 1$, $p = q = 2$, то мы получим $K_x^{2,2} = \langle x^2 \rangle^{1/2} / \langle |x| \rangle$ - коэффициент формы сигнала, который используется в радиофизике.

Рассмотрим вопрос о возможности использования формулы (2) для хаотических сигналов, которые являются сильно неоднородными и ассиметрично перемежаемыми. Перемежаемые функции являются сильно неоднородными относительно друг друга (x_i, x_j) и относительно аргумента (x, t). В терминах теории подобия, масштабной инвариантности перемежаемые сигналы не обладают свойством самоподобия, а могут быть самоаффинными. Чтобы учесть такую неравновесность в силу произвольности функций $x_i(t), x_j(t)$ в формуле (2) мы можем выбрать одну из них в качестве определяющей переменной. Если нас интересует эволюция по времени $x_i(t)$, то можно выбрать $x_j(t) = t$. Тогда выражение (2) имеет вид

$$K_{x,t}^{p,q} = (\langle |x(t)|^p \rangle)^{1/p} \cdot (\langle t^q \rangle)^{1/q} / \langle |x(t) \cdot t| \rangle. \quad (3)$$

Выражение (3) назовем эволюционным параметром порядка. Этот параметр имеет смысл безразмерного времени и является пропорциональным номеру шага дискретных отображений динамических систем. Если принять $q = 2 + D_C$, $p = q/(q-1)$ в (2), то можно повысить разрешающую способность обобщенно – метрической характеристики, так как важной количественной характеристикой аттрактора, несущей информацию о степени сложности поведения динамической системы, является корреляционная размерность D_C [6]. Алгоритм расчета D_C основан на вычислении корреляционного интеграла $C(\delta)$ для нормированного числа пар точек рассматриваемого объекта, расстояние между которыми не превосходит δ :

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \theta(\delta - |x_i - x_j|), \quad (4)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда для всех пар значений i и j . Величина суммы зависит от δ , причем, если эта зависимость имеет степенной вид

$$C(\delta) \approx \delta^{D_C}, \quad (5)$$

то исследуемое множество фрактально.

2. Результаты численного анализа

Широко используемые известные характеристики сигнала дисперсия и база определяемые формулами

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6)$$

$$B = 2\tau \cdot \Delta w, \quad (7)$$

где $\Delta w = \frac{1}{E_{\max}} \int_0^\infty E(w) dw$, $\tau = \frac{1}{R(0)} \int_0^\infty R(\tau) d\tau$, $R(\tau) = \int_0^\infty x(t-\tau) \cdot x(t) dt$, не учитывают

информацию о фазе, форме колебаний, т.е. они являются менее информативными, чем эволюционный параметр порядка. Этот вывод мы проверили на разных хаотических сигналах. Были выбраны наиболее известные, как логистическое, одномерное отображение [6],

$$x_{i+1} = rx_i(1-x_i), \quad (8)$$

где r – управляющий параметр, двумерное отображение Хенона [7],

$$x_{i+1} = 1 - ax_i^2 - by_i, \quad y_{i+1} = x_i, \quad (9)$$

где a и b – управляющие параметры.

Мы предлагаем новое отображение, описывающее хаотическое чередование мелкомасштабных и крупномасштабных осцилляций типа «накопление- выброс», которое наглядно иллюстрирует эффективность введения параметра $K_{x,t}^{p,q}$:

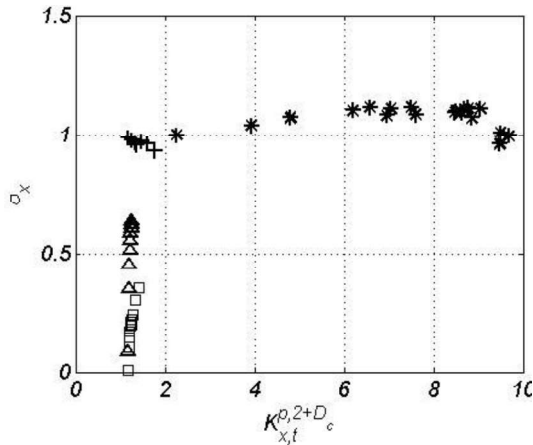
$$x_{i+1} = \left(\frac{1}{c} + \mu_i\right) |x_i|^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \mu_{i+1} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{c} + \mu_i\right) |x_i|^{-\frac{1}{\gamma} - 1}, \quad (10)$$

где γ – дробная часть фрактальной размерности множества значений рассматриваемой физической величины, c – точность наблюдения, μ_i – имеет смысл мультипликатора. С целью применения настоящего метода к анализу нового вида бифуркации «склеивания» мы воспользовались модифицированной системой Лоренца [8,9]

$$\frac{dy}{dt} = R \cdot x - y - x \cdot z, \quad \frac{dx}{dt} = \sigma \cdot (y - x) + A \cdot y \cdot z, \quad \frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z, \quad (11)$$

где σ, A, R, b -параметры.

На рисунках 1 и 2 представлены результаты обработки сигналов вышеперечисленных динамических систем. Дисперсия и база сигнала почти не меняются, при $K_{x,t}^{p,2+D_c} \geq 5$, т.е. эволюционный параметр более чувствительный. Это видно также из рисунка 3.



(□) – Логистическое отображение при $r=[3:0.1:4]$, (Δ) – отображение Хенона при $b=0.1, a=[0.61:0.05:1.3]$, (*) - отображение «накопление - выброс» при $c=2.806, \gamma=[1:0.01:2]$, (+) – модифицированная система Лоренца при $R=3, b=8/3, \sigma=10, A=[10.5:0.5:16]$

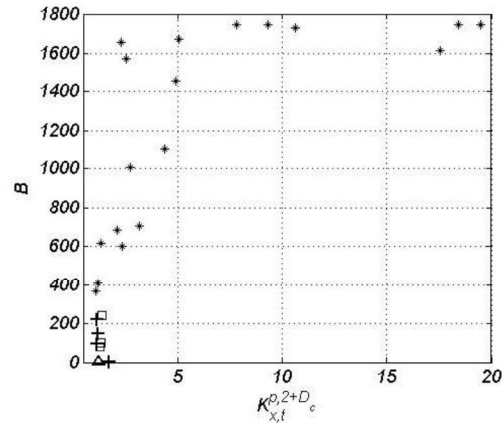


Рисунок 2 – Зависимость базы от эволюционного параметра порядка

Рисунок 1 - Взаимосвязь дисперсии с эволюционным параметром порядка

Бифуркационная диаграмма, построенная по формуле (8) по стандартному методу приведена на рисунке 4. При изменении параметра r отображения Фейгенбаума соответствующая система меняет свои режимы эволюции с каскадом удвоений периодов, приводящих к хаосу.

Используя реализации (8) для различных значений r мы построили бифуркационную диаграмму через эволюционный параметр порядка, определенный по формуле (3) при $p = q = 2$. В результате мы получили бифуркационную диаграмму, показанную на рисунке 5. На рисунке 5 видны только удвоение и утроение периода. Чтобы увеличить разрешающую способность, то есть увидеть остальные режимы, использовали формулу (3) $q = 2 + D_c$ и заново построили бифуркационную диаграмму, которая показана на рисунке 6.

Из рисунка 6 отчетливо видны все циклы и переход к хаосу. При этом все периодические реализации собираются в левой части, а хаотические - в правой части бифуркационной диаграммы. Появляется возможность классификации разных бифуркаций в динамических системах с неизвестными параметрами.

Отображение Хенона также демонстрирует переход к хаотическому поведению через последовательность бифуркаций удвоения периода, как логистическое отображение. Из уравнения (9) меняя параметр a получаем бифуркационную диаграмму (рисунок 7).

При вариации параметра a в системе (9) может наблюдаться явление мультистабильности, т.е. сосуществование двух и более различных динамических режимов, например, хаотического аттрактора и цикла периода n или 2-х различных по структуре хаотических множеств.

Бифуркационная диаграмма на рисунке 8, построенная по новому методу, содержит все режимы бифуркационной диаграммы, полученные через известный параметр a (рисунок 7). Наглядно видно преимущество предлагаемого нашего метода (рисунок 8). При некоторых значениях $K_{x,t}^{p,q}$ отсутствуют значения $X(i+1)$. Это означает, что отсутствуют некоторые бифуркационные циклы из возможного набора S1 (предельный цикл), S2 (бифуркация удвоения периода), S3 (бифуркация утроения периода) и их образований.

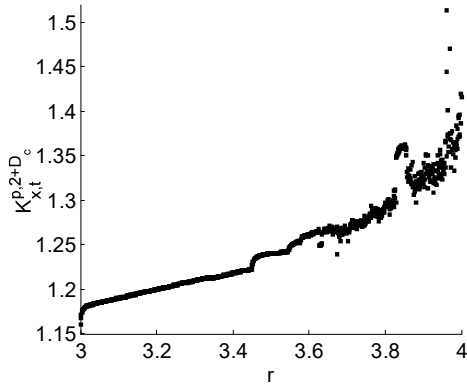


Рисунок 3 - Нелинейная зависимость параметра порядка от параметра r уравнения (8), $r=3:0.001:4$

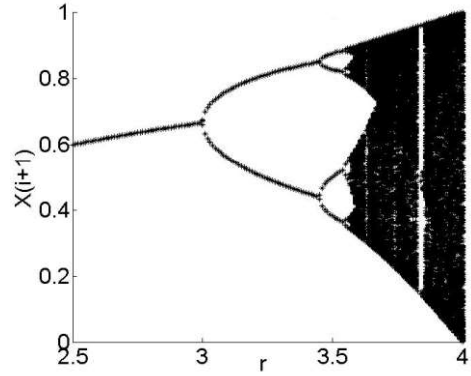


Рисунок 4. Бифуркационная диаграмма логистического отображения

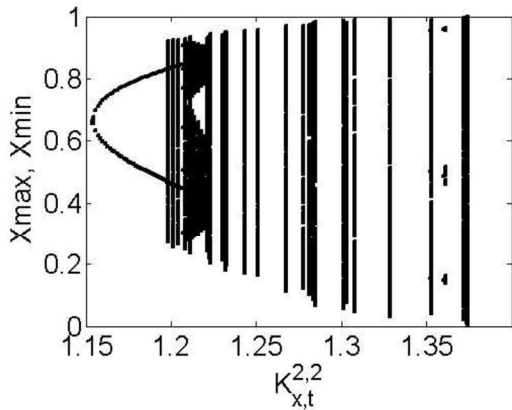


Рисунок 5 - Бифуркационная диаграмма логистического отображения, построенная по формуле (2) при $r=2.5:0.001:4$

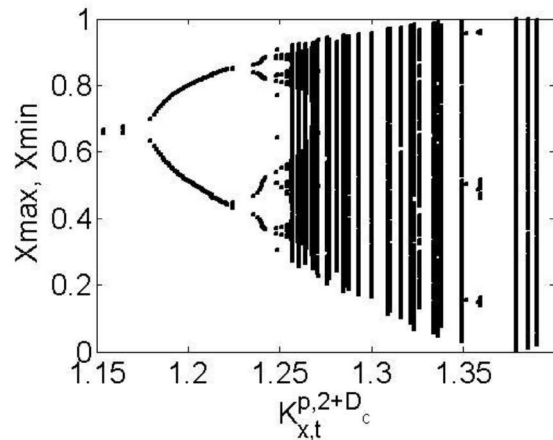


Рисунок 6 - Бифуркационная диаграмма логистического отображения, построенная по эволюционному параметру порядка при $q=2+D_c$; $p=q/(q-1)$; $r=2.5:0.001:4$

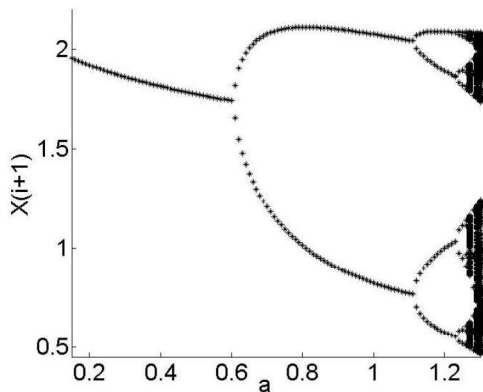


Рисунок 7- Бифуркационная диаграмма отображения Хенона при $a=0.15:0.01:1.3$, $b=0.1$

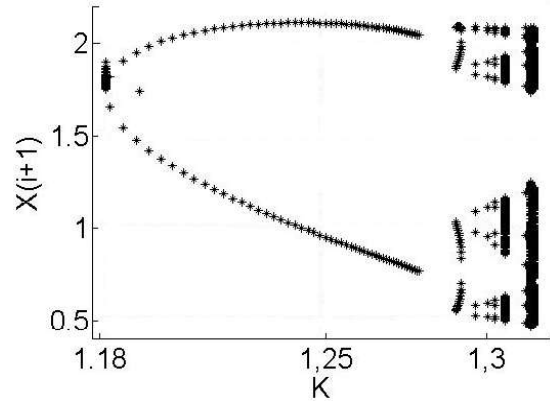


Рисунок 8 - Бифуркационные режимы отображения Хенона построенная по эволюционному параметру порядка при $a=0.61:0.001:1.3$, $b=0.1$, $K \equiv K_{x,t}^{p,q+D_c}$

Этот метод позволяет исследовать и более сложные бифуркационные явления. Бифуркационные режимы хаотических и ассиметрично перемежаемых процессов отличается от известных вышеперечисленных моделей. Для этой цели построена бифуркационная диаграмма отображения «накопление - выброс», реализация которого приведена на рисунке 9. Данное отображение реализует ассиметричную перемежаемость с сильными всплесками, т.е. сигналы типа «накопление - выброс».

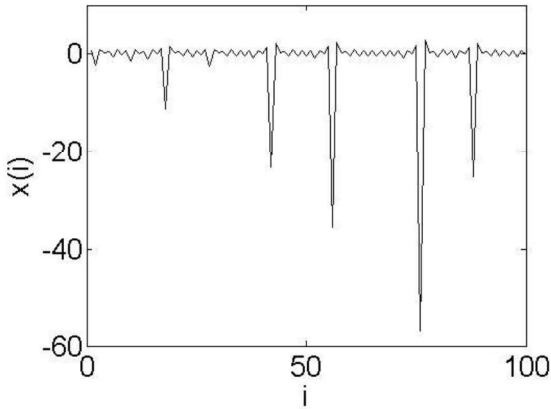


Рисунок 9 - Реализация отображения «накопление - выброс» (формула (10)) при $c=2,806, \gamma=3.33$

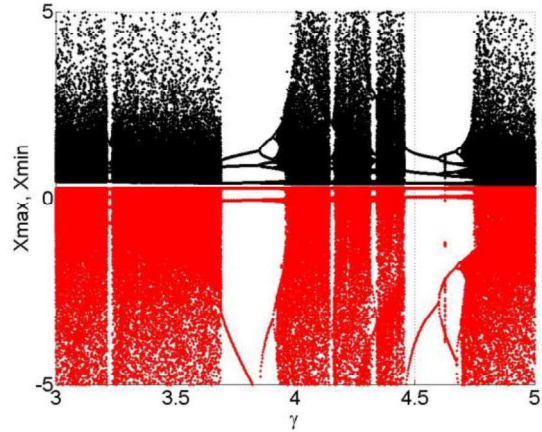


Рисунок 10 - Бифуркационная диаграмма отображения «накопление выброс» при $c=2,806$.

Бифуркационная диаграмма, полученная по формулам (10) и показанная на рисунке 10 описывает реализации с перемежаемой структурой. Отображение накопления - выброса реализует особый тип перемежаемости – односторонние хаотические выбросы большой амплитуды на фоне мелкомасштабных осцилляций. Поэтому на рисунке 10 показан только фрагмент бифуркационной диаграммы для $-5 < x < 5$.

В области периодических колебаний эволюционный параметр порядка имеет наименьшее значение. Максимальное его значение соответствует колебаниям взрывного характера (рисунок 11).

В области периодических колебаний видны типичные удвоения периода, т. е. сценарии перехода Фейгенбаума (рисунок 10). При этом также наблюдается восстановление порядка после возникновения хаоса. Присутствуют узкие интервалы порядка, которые по структуре идентичны с широкими интервалами области порядка. Если увеличить амплитуду мелкомасштабных колебаний, то картина не меняет структуру. Это показывает, что реализация имеет фрактальную структуру.

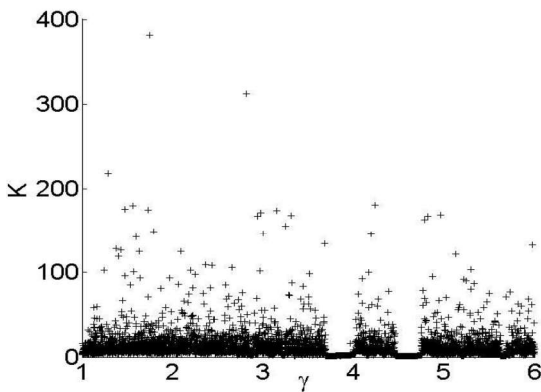


Рисунок 11 - Зависимость эволюционного параметра порядка от γ при $c=2,806$,

$$K \equiv K_{x,t}^{p,q+D_c}$$

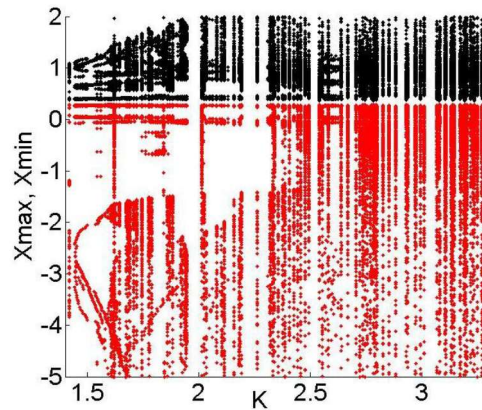


Рисунок 12 - Бифуркационная диаграмма отображения перемежаемости построенная по эволюционному параметру порядка при $q=2+D_c$; $p=q/(q-1); c=2,806, \gamma=3.5:0.01:5, K \equiv K_{x,t}^{p,q}$

Бифуркационная диаграмма (рисунок 12), построенная по новой методике (через $K_{x,t}^{p,q+D_c}$) имеет различие от рисунка 10. Все устойчивые режимы локализованы в левой части бифуркационной диаграммы. Хаотическим структурам соответствуют высокие значения $K_{x,t}^{p,q+D_c}$. Теперь бифуркационная картина становится более простой: качественно различные режимы группируются. Видны типичные картины удвоения периода по Фейгенбауму (цикл S_2). Некоторые ветви наклонных

линий бифуркации удвоения не реализованы, процесс имеет асимметрию. Меняя параметр c при постоянном значении γ мы получим аналогичную бифуркационную картину.

Мы применим наш новый метод построения бифуркационной диаграммы через эволюционный параметр порядка $K_{x,t}^{p,q}$ к исследованию особого типа гомоклинической бифуркации (бифуркации «склеивания» или «gluing bifurcation»). Для этой цели воспользуемся системой дифференциальных уравнений [8].

$$\frac{dx}{dt} = \sigma \cdot (y - x) + A \cdot y \cdot z, \quad \frac{dy}{dt} = R \cdot x - y - x \cdot z, \quad \frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z, \quad (12)$$

где σ, A, R, b -параметры. Выбирая в качестве управляющего параметра A была построена бифуркационная диаграмма по стандартному методу (рисунок 13). Видно, что есть точки «склеивания», которые являются также устойчивыми точками вблизи $x=0$. При этом верхние и нижние бифуркационные диаграммы соответствуют сценарию перехода Фейгенбаума.

На рисунке 14 приведена бифуркационная диаграмма системы (12) по нашему методу. Основное отличие рисунка 14 от рисунка 13 в том, что циклы группируются отдельно и значения $K_{x,t}^{p,q}$ отсутствуют в некоторых полосах, так как согласно рисунку 11 зависимость $K_{x,t}^{p,q}(\gamma)$ является скачкообразным.

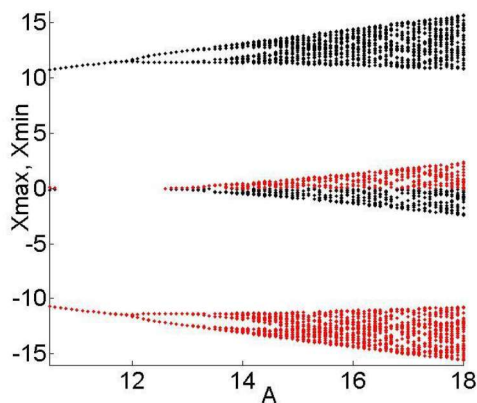


Рисунок 13 - Гомоклиническая бифуркация при $\sigma = 10, b = 2.67, R = 3 A = 10,5; 0,01: 18$.

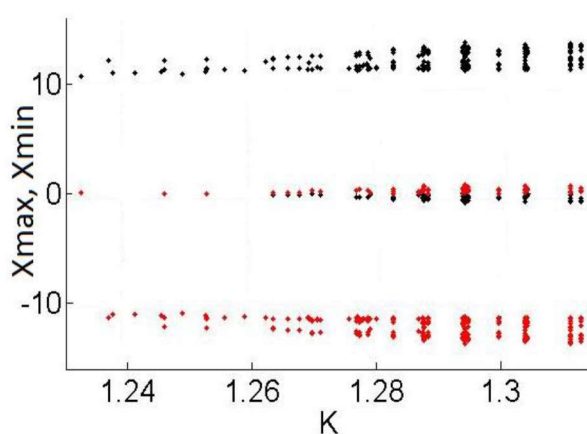


Рисунок 14 - Гомоклиническая бифуркация в координатах (X_{\max}, X_{\min}, K) при $q=2+D_C; p=q/(q-1); \sigma = 10, b = 2.67, R = 3 A = 10,5; 0,01: 18, K \equiv K_{x,t}^{p,q+D_C}$

Заключение

В настоящей работе мы по новому методу построили бифуркационные диаграммы динамических систем: логистического отображения, отображения Хенона, отображения для колебаний типа «накопление - выброс» и для систем с гомоклиническими бифуркациями.

Эти диаграммы мы сопоставили с диаграммами, построенными через параметры уравнений динамической системы. Основным достоинством нашего метода является то, что можно исследовать бифуркационные явления по реализациям, не зная исходные уравнения.

Поэтому данный метод можно применять к анализу различных сложных явлений. Предлагаемый эволюционный параметр порядка является более точным, чем соответствующие известные характеристики хаоса.

Литература

1. Jibin Li, Fengjuan Chen, A. S. Tchakoutio-Nguetcho, Bifurcations and Exact Solutions in a Model of Hydrogen-Bonded-Chains//International Journal of Bifurcation and Chaos Vol. 25, No. 04, 1550062 (2015)
2. J. Kengne, Coexistence of Chaos with Hyperchaos, Period-3 Doubling Bifurcation, and Transient Chaos in the Hyperchaotic Oscillator with Gyrotors//International Journal of Bifurcation and Chaos Vol. 25, No. 04, 1550052 (2015)

3. Desheng Shang, Yaoming Zhang, Bifurcations in a Cubic System with a Degenerate Saddle Point//International Journal of Bifurcation and Chaos Vol. 24, No. 11, 1450144 (2014)
4. Hernán Castro, Bifurcation analysis of a singular nonlinear Sturm–Liouville equation//Communications in Contemporary Mathematics Vol. 16, No. 05, 1450012 (2014)
5. Жанабаев З. Ж., Обобщенная метрическая характеристика динамического хаоса //Материалы VIII Межд. школы "Хаотические автоколебания и образование структур" – Саратов, 2007. с. 67-68
6. Steven Henry Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering// Westview Press, 1994. 498 p.
7. M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor//Communications in Mathematical Physics, 1976, V. 50 (1), pp. 69–77.
8. D.V.Lyubimov, M.A. Zaks., Two mechanisms of the transition to chaos in finite – dimensional model of convection., Physica 9D (1983) 52-64.
9. Akhtanov S. N., Zhanabaev Z. Zh., Zaks M. A., Sequences of gluing bifurcations in an analog electronic circuit // Physics Letters A.-2013.-Vol. 377.-P.1621–1626.

ТРЕХМЕРНОЕ ФРАКТАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОЧАСТИЦ ZrO_2 В ПОЛИМЕРНОЙ МАТРИЦЕ

А.Г. Колмаков, И.Б.Опарина, М.А.Севостьянов
Институт металлургии и материаловедения РАН им. А.А.Байкова,
Москва, Россия, kolmakov@imet.ac.ru

В качестве материала для остекления мобильной техники иногда используется полиметилметакрилат (ПММА), который представляет собой аморфный термопластик с высокой степенью прозрачности (светопропускание 92 %), стойкостью к слабым кислотам, растворам щелочей и солей, спиртам, воде, маслам, жирам, топливу, стойкостью к атмосферному воздействию и УФ-излучению. ПММА характеризуется высокими электроизоляционными свойствами, повышенной (для пластика) прочностью при растяжении (до 80 МПа), и имеет рабочий диапазон температур от $-40^{\circ}C$ до $+90^{\circ}C$ [1 - 3].

Для более широкого спектра применений некоторые свойства ПММА нуждаются в улучшении. Так, ПММА является легко возгораемым материалом и склонен к поверхностному растрескиванию под действием механических напряжений. Как и все пластики, он имеет меньшее сопротивление поверхностному износу по сравнению с силикатными стеклами и прозрачной керамикой и теряет свои электроизоляционные свойства при высоких частотах.

Анализ физико-механических свойств полимерных стекол [4 - 7] свидетельствует, что перспективным направлением улучшения свойств и расширения диапазона применения ПММА может стать создание композиционных материалов на его основе.

Материалы и методики исследований

В настоящей работе представлен новый синтезированный композит на основе ПММА с армирующими сферическими наноструктурными микрочастицами ZrO_2 и проведено исследование некоторых его свойств в сравнении с ПММА без наполнителя.

Сферические частицы ZrO_2 диаметром $0,3 \div 2$ мкм, распределенные в прозрачной матрице ПММА, могут повысить его износостойкость, электроизоляционные и теплоизоляционные свойства, стойкость к возгоранию, снизить поверхностную повреждаемость и, в определенной мере, способствовать рассеиванию лазерного излучения.

Для синтеза композиционного материала в качестве матрицы использовался полиметилметакрилат, полученный путем полимеризации жидкого мономера. Наполнителем служил порошок двуокиси циркония (стабилизированный церием), который был синтезирован в ИМЕТ РАН по новой разработанной технологии получения оксидных неагломерированных керамических порошков на основе ультразвукового пиролиза [8 - 9].

Контрольные лабораторные образцы ПММА без наполнителя готовили путем блочной полимеризации метилметакрилата. Также в качестве контрольных образцов использовали промышленный листовой ПММА марки СО-120.