

**Секция 1. ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС И САМООРГАНИЗАЦИЯ
В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ
DYNAMIC CHAOS AND SELF-ORGANIZATION IN NONLINEAR SYSTEMS**

УДК 536.75+622.73+681.513.8

**ЭНТРОПИЯ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ КАК ОБЩЕСИСТЕМНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА
ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В МЕЛЬНИЦАХ**

В.П. Малышев, Ю.С. Зубрина
Химико-металлургический институт им. Ж. Абишева, Караганда, Казахстан

Математическая энтропия измельчения (H – функция Больцмана)

$$H = - \sum_{j=1}^n P_j \ln P_j. \quad (1)$$

в формальном отношении представляет собой средневзвешенный по долевым распределению (P_j)

логарифм обратной долевого величины, $\ln \frac{1}{P_j}$, что непосредственно следует из формулы для средневзвешенного

$$\frac{\ln \frac{1}{P_j}}{\sum_{j=1}^n P_j} = \frac{\sum_{j=1}^n P_j \ln \frac{1}{P_j}}{\sum_{j=1}^n P_j} = - \sum_{j=1}^n P_j \ln P_j = H, \quad (2)$$

поскольку $\sum_{j=1}^n P_j = 1$.

В свою очередь, по представлениям Шеннона К.Э. [1], пришедшего к идентичному выражению для информационной энтропии, выражение $\ln \frac{1}{P_j}$ имеет смысл неопределенности, неожиданности вероятного события с вариацией её от ∞ до 0 при изменении вероятности от 0 до 1.

Это позволяет рассматривать формулу (1) применительно к любому множеству вероятных событий с любыми носителями признаков различимости (цвет, уровень энергии и т.п.), так как в любом случае величина H будет характеризовать средневзвешенную неопределенность некоторого множества вероятных событий (обнаружения, присутствия, принадлежности, реализации) в соответствующей хаотизированной системе. Кроме того, средневзвешенность энтропии придает ей смысл энтропии *смешения* различных уровней для данного признака различимости, что однозначно делает её применимой как для характеристики неопределенности самой смеси, так и для описания её эволюции, в том числе в сторону уменьшения энтропии и проявления самоорганизации [2,3].

Всем этим условиям вполне удовлетворяет процесс измельчения материалов в любых устройствах, обеспечивающих постоянное перемешивание с одновременным воздействием мелющих тел. Как показано сотрудниками Химико-металлургического института [4-7], наиболее ярко вероятностные закономерности измельчения проявляются при *работе* шаровых барабанных мельниц в водопадном (катарактном) режиме при циклических соударениях стальных шаров и рудных зерен с постепенным изменением фракционного состава измельчаемого материала. Для этого потребовалось создать вероятностную теорию и модель данного процесса на основе обобщения теории молекулярных соударений и кинетики последовательных необратимых реакций на механический процесс последовательного дробления зерен с раскрытием единых вероятностных факторов: совместного присутствия реагирующих тел (молекул или шаров и зерен) – концентрационного фактора ($P_{конц}$); возможности непосредственного контакта этих тел – стерического фактора ($P_{ст}$); преодоления энергетического барьера разрушения (P_a) – активационного фактора; частоты соударений – частотного фактора. В результате получено обобщенное выражение для скорости химических или механических взаимодействий

$$v = Z P_{конц} P_{ст} P_a, \quad (3)$$

При этом раскрытие вероятностных факторов проводилось с учетом закономерностей для представления вероятности совместных событий через произведение вероятностей элементарных событий (для концентрационного фактора); геометрических соотношений размера шаров и зерен (для стерического фактора); совместного воздействия тепловой и механической энергии на разрушение зерен (для активационного фактора); цикличности соударений при водопадном режиме движения смеси шаров и зерен (для частотного фактора).

В свою очередь, скорость измельчения фракций на основе обобщенной формулы (3) с подстановкой туда концентрационного фактора в виде

$$P_{конц} = P_u P_3 P_j \quad (4)$$

где P_u - объёмная доля шаров, P_3 - объёмная доля зернового измельчаемого материала в мельнице, P_j - доля фракций со средним размером d_j (единственная переменная в процессе измельчения), позволила более детально выразить скорость убыли этой фракции как

$$-\frac{dP_j}{d\tau} = ZP_{ст} P_a P_{ш} P_3 P_j. \quad (5)$$

Здесь произведение $ZP_{ст} P_a P_{ш} P_3 P_j$ является константой скорости разрушения для данной фракции материала d_j , которая после раскрытия каждого фактора приобрела вид [6,7]:

$$k_j = \frac{8 \left[(d_j/d_u) - (d_j/d_u)^2 \right] \omega G_u G_3}{(1 - 2\omega\sqrt{2D/g}) (G_u/\gamma_u + G_3/\gamma_3 + G_6/\gamma_6)^2 \gamma_u \gamma_3} \exp \left(- \frac{E_a}{RT + MgD(\gamma_u/\gamma_3)(d_u/d_3)^3} \right), \quad (6)$$

где d_u - диаметр мелющего шара, м; G_u - масса шаровой загрузки в мельнице, кг; γ_u - плотность материала шара, кг/м³; G_3 - масса рудной (зерновой) загрузки, кг; γ_3 - плотность материала зерен, кг/м³; γ_6 - плотность воды, кг/м³; G_6 - масса воды в мельнице, кг; ω - частота вращения мельницы, с⁻¹; D - внутренний диаметр мельницы, м; g - ускорение силы тяжести, м/с²; E_a - энергия активации разрушения зерна (в первом приближении равная теплоте плавления материала) Дж/моль; M - средневзвешенная молекулярная масса материала зерна кг/моль; R - универсальная газовая постоянная, Дж·моль⁻¹·К⁻¹; T - абсолютная температура, К.

Тем самым в рамках вероятностных представлений скорость процесса впервые получила конкретное выражение через измеряемые параметры работы мельницы и свойства материала с учетом их физически обоснованного влияния.

Гораздо сложнее решалась задача для учета не только разрушения, но и накопления каждой фракции зерен за счет прибавления соразмерных осколков от разрушения предыдущих фракций. Для этого потребовалось решить систему дифференциальных уравнений скорости изменения содержания каждой фракции и найти явную зависимость для выхода любой фракции в любой момент времени. Математическое решение этой задачи представлено как выражение общего члена ряда при последовательном интегрировании дифференциальных уравнений методом интегрирующих множителей [8], для чего оказалось необходимым найти общий вид разложения сложной дробной функции и соответствующих ей интегралов [9].

В результате получена математическая модель измельчения материалов, связывающая выход любой заданной фракции (P_n , в долях единицы, д.е.) с продолжительностью процесса (τ , с) с учетом констант скоростей разрушения предыдущих фракций (k_j (6)) и начального содержания этих фракций (P_{0j} , д.е.), а также с такими же характеристиками целевой фракции (k_n , с⁻¹, и P_{0n}):

$$P_n = P_{0n} e^{-k_n \tau} + \sum_{j=1}^{n-1} P_{0j} \prod_j^{n-1} k_j \sum_j^n \frac{e^{-k_j \tau}}{\prod_{\substack{j,i=1 \\ i \neq j}}^n (k_i - k_j)}. \quad (7)$$

Важной особенностью этой формулы является возможность расчета полного фракционного состава, вплоть до самых тонких фракций, выход которых учитывается (как и всех других) с некоторой заданной точностью, например, до 0,001 (0,1%). В этом случае строгость интегральной модели (7) обеспечивает суммарное содержание всех фракций, равное единице, с любой заданной точностью. Этим обеспечится столь же строгий расчет энтропии по формуле (1) по полному фракционному составу в любой момент времени. Поэтому расчет по формуле (7) проводится до

нулевого выхода нижних, прогрессивно убывающих по размеру фракций, с принятой точностью вычислений.

Таким образом, для расчета эволюции энтропии измельчения по формуле (1) в качестве признака различимости следует использовать средний размер фракций d_j со своим статистическим весом P_j , который находится по интегральной модели (7), аккумулирующей вероятностное и функциональное влияние 15 факторов:

$$P_j = f(d_{1...j}, \gamma_3, G_3, \gamma_w, G_w, \gamma_6, G_6, D, \omega, E_a, M, T, P_{01...0j}, \tau). \quad (8)$$

Это позволяет полагать, что при расчете энтропии смешения материала, а вместе с ней энтропии процесса измельчения, используемые данные будут достаточно объективными. При этом ввиду строго аналитического выражения интегральной зависимости (7) определяемая ею функция энтропии (1) будет также аналитически строгой, что дает возможность представлять результаты расчетов в виде точечных графиков в соответствии с использованным интервалом вариации продолжительности и объединять их общей зависимостью при строгом прохождении соответствующей кривой через каждую точку множества.

Убедившись в достаточно адекватном описании фракционного состава с помощью интегральной модели измельчения (7) применительно к работе действующей промышленной шаровой мельницы [10], в дальнейшем проводили анализ эволюции энтропии процесса измельчения в модельных условиях, соответствующих характерным параметрам работы таких мельниц.

Предварительно было установлено, что самый существенный парадокс измельчения – крутой спад содержания («неизмельчаемость») тонких фракций по мере продолжения процесса и формирование в связи с этим логарифмически нормального распределения фракций – вполне четко отображается интегральной моделью (7) независимо от начальных условий [11]. При этом формирование подобного распределения вызывается в основном противодействием стерического и активационного факторов, первый из которых доминирует по отношению к тонким фракциям, приводя к их сохранности ввиду уменьшения вероятности попадания шара во всё более мелкое зерно при всей неизбежности его разрушения в узкой зоне зажатия между шаром и ударной площадкой.

Попытка разрешения того парадокса предпринималась еще в 1941 г. академиком Колмогоровым А.Н. с получением логарифмически нормального распределения при допущении независимости скорости дробления зерна от их размера [12]. В противном же случае выражалось сомнение в сохранении подобного распределения, хотя и подчеркивался интерес к рассмотрению данного случая. При использовании предложенной вероятностной модели измельчения, как оказалось, константа скорости (6) весьма сложным образом зависит от размера зерна d_j , и тем не менее логарифмически нормальный закон распределения фракций определенно соблюдается. Это свидетельствует о более адекватном отображении процесса измельчения с помощью обобщенной вероятностной модели скорости взаимодействий в хаотизированной системе (3), а также столь же обобщенной математической модели последовательных необратимых превращений химических и механических процессах (7).

Так или иначе, обсуждаемый парадокс измельчения указывает на какую-то регулярность этого процесса, связанную со стремлением к определенной симметрии, особой выраженности стационарного состояния. В этом случае энтропийный анализ мог бы помочь до конца раскрыть смысл данного парадокса.

С этой целью проведены расчеты при различных начальных условиях с вариацией исходного фракционного состава материала от полной его однородности (для монофракции) до полного равенства содержаний каждой фракции, а также для случайного состава исходного материала. Дополнительно менялась и кратность последовательного дробления зерна по правилам $d_{j+1} = d_j/2$ и $d_{j+1} = d_j/3$, но основанием которых задавался перечень средних размеров фракций.

В качестве общих типичных условий были использованы характеристики рабочей шаровой мельницы МШР Жезказганской обогатительной фабрики: $d_{ш} = 0,06 \text{ м}$, $\gamma_{ш} = 7874 \text{ кг/м}^3$, $G_{ш} = 60000 \text{ кг}$, $\gamma_{з} = 2650 \text{ кг/м}^3$, $G_{з} = 18760 \text{ кг}$, $w = 0,267 \text{ с}^{-1}$, $G_{в} = 7500 \text{ кг}$, $\gamma_{в} = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Как видно из полученных результатов, во всех случаях происходит выход на логарифмически нормальное распределение фракций, сопровождающийся понижением энтропии до некоторого стационарного в области значений $H = 1,25 \div 1,50$.

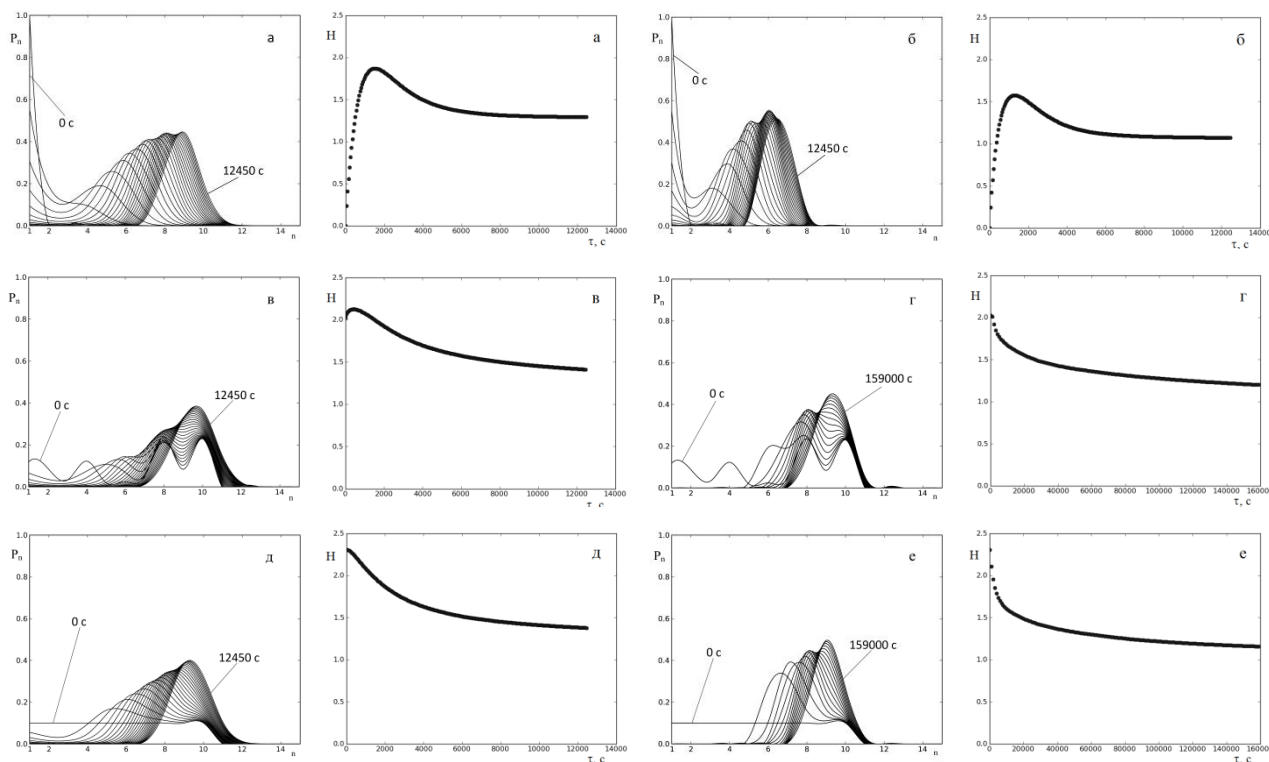


Рисунок 1 - Зависимость фракционного состава и энтропии от продолжительности измельчения при различных начальных условиях: а) $d_{j+1} = d_j/2$, $P_{0j}=1,0$; б) $d_{j+1} = d_j/3$, $P_{0j}=1,0$; в) $d_{j+1} = d_j/2$, P_{0j} – случайная; г) $d_{j+1} = d_j/3$, P_{0j} – случайная; д) $d_{j+1} = d_j/2$, $P_{0j}=0,1$; е) $d_{j+1} = d_j/3$, $P_{0j}=0,1$.

Это свидетельствует о том, что логарифмически нормальное распределение является своеобразным аттрактором рассматриваемой динамической системы, а модель (7) – оператором эволюции этой системы. Понижение энтропии до стационарного значения в результате приобретения определенной симметрии в виде логарифмически нормального распределения фракций указывает на самоорганизацию процесса измельчения, тем более что он осуществляется при постоянном подводе и рассеянии механической энергии за счет вращения мельницы и падения шаров на измельчаемый материал – хаотизированную полифракционную среду.

Литература

1. Шеннон К.Э. Математическая теория связи // Работы по теории информации и кибернетики. – М.: ИЛ, 1963. – с. 243-332.
2. Деменок С.Л. Просто хаос. – СПб.: ООО «Страта», 2013. – 232 с.
3. Малышев В.П., Турдукожаева (Макашева) А.М. Распределение признаков различимости в объектах и процессах как основа возникновения диссипативных структур и самоорганизации // Энциклопедия инженера-химика. – 2012. – N12. – с. 19-25.
4. Малышев В.П. Разработка теории соударений для измельчения материалов // Комплексное использование минерального сырья. – 1992. – № 12. – С. 43-49.
5. Малышев В.П. Новый аспект в теории измельчения руд и управления этим процессом // Обогащение руд. – 1995. – № 4-5. – С. 4-14.
6. Малышев В.П., Турдукожаева А.М., Кайкенов Д.А. Развитие теории измельчения руд на основе молекулярной теории соударений и формальной кинетики последовательных реакций // Обогащение руд. – 2012. – № 4. – С. 29-35.
7. V.P. Malyshev, A.M. Turdukozhaeva (Makasheva). What Thunder There and is not Heard When Using Ball Mills? // Journal Materials Science and Engineering A. – 2013. – № 2. – V. 3. – P. 131-144.
8. Малышев В.П., Турдукожаева А.М., Кайкенов Д.А. Разработка математической модели последовательной деструкции вещества методом прямого интегрирования // Доклады НАН РК. – 2012. – № 4. – С. 5-13.
9. Малышев В.П., Макашева А.М., Зубрина Ю.С. Общий вид интегралов при разложении сложной дробной функции на элементарные // ДАН РК. – 2014. – N6. – с. 3-11.

10. Малышев В.П., Бектурганов Н.С., Токбулатов Т.Е., Кравченко В.Г., Кайкенов Д.А. использование вероятностной модели измельчения для анализа и прогнозирования результатов работы промышленной мельницы // Обогащение уд. -2014. – №4. – с. 3-7.

11. Малышев В.П., Турдукожаева (Макашева) А.М., Бектурганов Н.С., Кайкенов Д.А. Логарифмически нормальное распределение фракций при измельчении материалов как аттрактор в вероятностной модели процесса // ДАН РК. – 2013. – № 6. – С. 46-53.

12. Колмогоров А.Н. О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // Докл. АН СССР. – 1941. – Т. 31. – № 2. – С. 99-101.

УДК 550.388.2

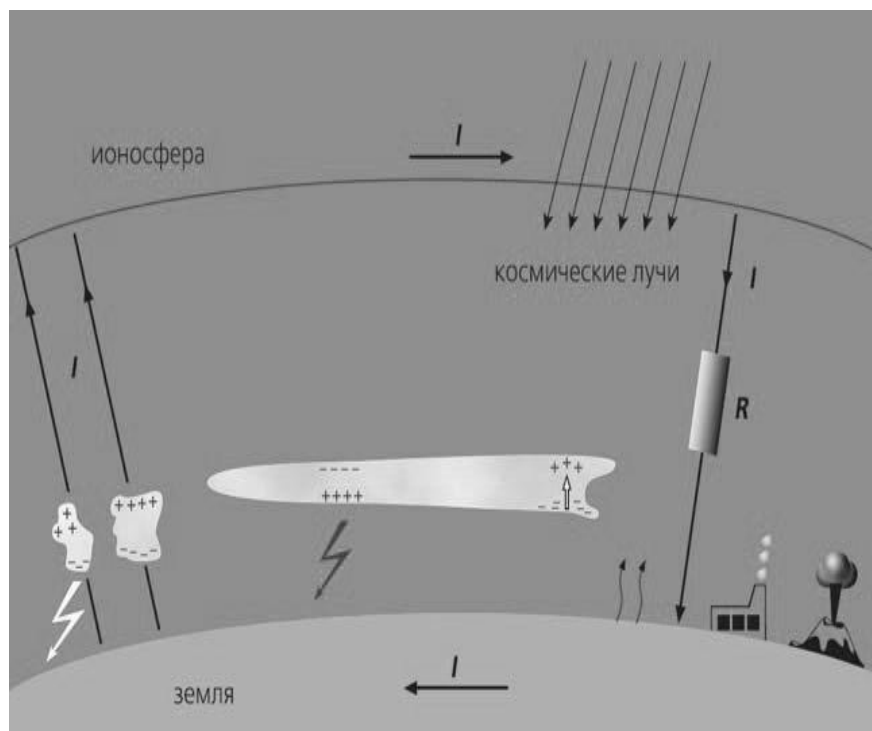
О СПЕКТРЕ ФРАКТАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ НОВЫХ ВИДОВ ГРОВОВЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАЗРЯДОВ (ЭЛЬФЫ, ДЖЕТЫ И СПРАЙТЫ) В ИОНОСФЕРЕ

А.А. Потапов

ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия, potapov@cplire.ru

1. Атмосферная глобальная электрическая цепь

Глобальная электрическая цепь или ГЭЦ (рис. 1) представляет собой распределенный токовый контур, которые “замкнуты” электрически проводящей атмосферой [1, 2]. ГЭЦ состоит из совокупности твердых и газоплазменных оболочек, объединенных непрерывностью плотности электрического тока, с грозовыми генераторами в качестве основных источников электродвижущих сил и невозмущенными областями свободной атмосферы в качестве зон возвратных токов. Физической причиной формирования ГЭЦ в атмосфере служит резкий рост проводимости воздуха с высотой. Вблизи поверхности Земли проводимость воздуха очень мала и составляет $(2\div 3) \cdot 10^{-14}$ См/м, что соответствует концентрации легких ионов около 10^3 см⁻³.



С ростом высоты благодаря увеличению уровня ионизации, определяемого до 40 км галактическими космическими лучами, а выше – ультрафиолетовым и рентгеновским излучением Солнца, проводимость растет почти экспоненциально с характерным масштабом 6 км. Уже на высоте H слоя ионосферы (около 80 км) она увеличивается более чем на 10 порядков по сравнению с тропосферой. Проводимость земли в поверхностном слое (и тем более воды в океане) тоже превышает проводимость пограничного слоя атмосферы на 10 ... 12 порядков.

Рис. 1. Схема атмосферной глобальной электрической цепи.

Таким образом, постоянно функционирующие грозовые генераторы оказываются сосредоточенными в достаточно узком слабопроводящем слое между земной поверхностью и ионосферой. Часто при упрощенном описании ГЭЦ земная поверхность и нижняя граница ионосферы (около 60 - 70 км) рассматриваются как обкладки гигантского сферического

конденсатора, который разряжается в областях хорошей погоды и заряжается в областях грозовой активности. При этом квазистационарные токи зарядки не замыкаются полностью на землю вблизи грозовых облаков, а частично “затягиваются” в вышележащую область высокой проводимости и растекаются по ионосфере. Считается, что именно квазистационарные токи в первую очередь “несут ответственность” за поддержание разности потенциалов ≈ 350 кВ между ионосферой и землей. Так как верхняя часть большинства грозовых облаков имеет положительный заряд, потенциал ионосферы также оказывается положительным, и в областях хорошей погоды электрическое поле направлено вниз, обуславливая тем самым токи проводимости, замыкающие ГЭЦ. Если бы действие генераторов прекратилось, разность потенциалов между поверхностью Земли и ионосферой исчезла бы за время около 8 мин. Наряду с грозовыми генераторами, потенциально важным источником атмосферного электричества может служить планетарный электрический генератор, обусловленный нетвердотельным характером вращения плазменной оболочки планеты.

По гипотезе Вильсона, тропосферные грозовые генераторы обеспечивают зарядку сферического конденсатора Земля - ионосфера и определяют квазистационарное электрическое состояние невозмущенных атмосферных областей [3]. Разность потенциалов между огромными обкладкам сферического конденсатора составляет 300 ... 400 киловольт. Под действием этого напряжения к земле по воздуху постоянно течет электрический ток силой около 1000 ампер. Эта цифра может показаться внушительной, но ток распределен по всей поверхности планеты, так что на каждый квадратный километр воды или суши приходится всего пара микроампер, а по мощности вся атмосферная цепь сравнима с одной турбиной крупной гидроэлектростанции. Вот почему несостоятельна идея (восходящая еще к Николе Тесле) использовать атмосферную разность потенциалов для получения энергии.

2. История открытия новых динамических природных структур в ионосфере и краткая их характеристика

Каждые сутки небо прочерчивают 4 миллиона молний, ежесекундно – примерно 50. А над свинцовыми грозовыми фронтами, в верхних слоях атмосферы разворачивается световое шоу “призрачных молний”: голубые джеты, красно-фиолетовые спрайты, красные кольца парящих в вышине эльфов. Это разряды очень высокой энергии, которые бьют не в землю, а в ионосферу. Таким образом, высотные электрические разряды (20 ... 100 км) подразделяются на несколько основных типов: эльфы, джеты, спрайты, гало и т.д. – рис. 2.

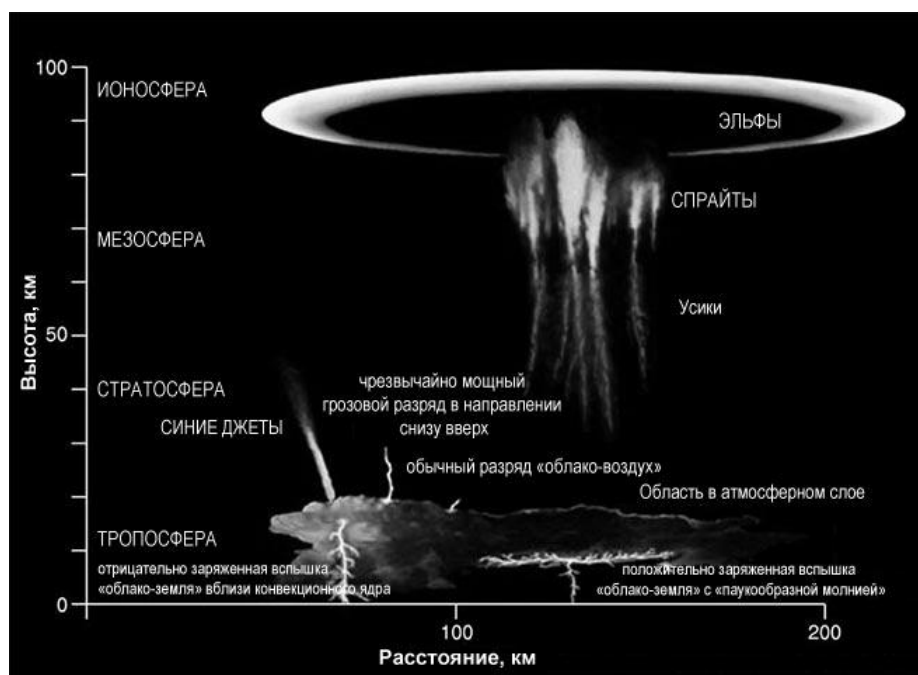


Рис. 2. Динамические фрактальные структуры в атмосфере.

Краткая их история - в ночь с 5 по 6 июля 1989 года, в истории изучения Земли произошло важное событие. Джон Рандольф Уинклер, отставной профессор, 73-летний ветеран NASA, направил на грозовые облака высокочувствительную видеокамеру, а потом, просматривая запись, кадр за кадром, обнаружил две яркие вспышки, которые в отличие от молний шли не вниз, к земле, а вверх, к ионосфере. Так были открыты *спрайты* - самые крупные из высотных разрядов в атмосфере Земли. Они наглядно подтвердили существование на нашей планете ГЭЦ и дали новые возможности для ее исследования. Его статьи буквально вызвали шок у специалистов по астрономии, атмосферному электричеству, радиофизике, атмосферной акустике, физике газового разряда и аэрокосмической безопасности. После этих публикаций в NASA уже не могли отмахнуться от возможной угрозы космическим кораблям и начали развернутое исследование высотных разрядов.

Самые короткоживущие высотные разряды - *эльфы* возникают в нижней ионосфере на высотах 80 ... 100 км. Возникнув в центре, свечение расширяется до 300 ... 400 км, меньше чем за миллисекунду, а затем угасает. Рождаются эльфы через 300 микросекунд после сильной молнии, ударившей из грозового облака в землю. Ствол молнии становится “передающей антенной”, от которой со скоростью света “стартует” мощная сферическая электромагнитная волна очень низкой частоты. За 300 микросекунд она добирается до высоты 100 км, где “возбуждает” красное свечение молекул азота.

Самые загадочные высотные разряды – *голубые джеты*, это также свечение молекул азота в ультра-фиолетово-голубой полосе. Они выглядят как голубой узкий перевернутый конус, “стартующий” с верхней границы грозового облака. Иногда джеты достигают высоты 40 км, скорость распространения их от 10 до 100 км/с. Их появление не всегда связано с разрядами молний. Кроме голубых джетов выделяют “голубые стартеры” (распространяются до высот ≤ 25 км) и “гигантские джеты” (распространяются до высот нижней ионосферы примерно 70 км). Гигантские джеты наблюдаются очень редко; к настоящему времени насчитывают не более дюжины таких событий. Интерес физиков к гигантским джетам под стать их размерам, ведь эти разряды совершают “беспосадочный перелет” из тропосферы прямо в ионосферу.

Спрайты - очень яркие объемные вспышки длительностью порядка миллисекунд, возникающие на высоте 70 - 90 км и спускающиеся вниз на 30 - 40 км. Их ширина достигает в верхней части десятки километров. Спрайты вспыхивают в мезосфере примерно через сотую долю секунды после разряда мощных молний “облако - земля”, иногда на удалении несколько десятков километров по горизонтали от канала молнии. Красно-фиолетовый цвет спрайтов, как и эльфов, связан с атмосферным азотом. Частота появления спрайтов – порядка нескольких тысяч событий в сутки по всему земному шару. Им посвящено наибольшее количество работ высотным разрядам в ионосфере. Тонкая структура нижней части спрайтов характеризуется множеством светящихся каналов с поперечными размерами от десятков до сотен метров – рис. 1. Возникновение спрайтов связано с образованием высокого дипольного момента нескомпенсированного заряда, после особенно мощных молниевых разрядов облако-земля, обычно положительной полярности.

Гало - это однородное красновато-фиолетовое свечение на высоте около 80 километров. Гало представляет собой светящийся диск в мезосфере непосредственно над областью тропосферного разряда. Причина разряда, видимо, та же, что и у верхней части спрайтов, но в отличие от них гало всегда возникает прямо над вспышкой молнии “облако - земля”. Существует, видимо, некая связь между спрайтами и гало, но ее механизм пока неясен. Они появляются то вместе, то порознь. Возможно, гало и есть верхняя часть спрайтов, когда напряженности электрического поля не хватило, чтобы разряд распространился в более плотный нижний воздух.

Для ученых является загадкой, что разряды в ионосфере достаточно многочисленны, появляются не только там, где присутствуют грозовые облака, и не над всей поверхностью Земли. Их не видно над Сибирью, океанами и пустынями. Однако большое их количество зафиксировано над Австралией, Африкой и Латинской Америкой. Регистрация высотных разрядов и диагностика их характеристик осложнены из-за их малого времени жизни.

3. Некоторые подходы к моделированию ионосферных структур

Физические модели спрайтов, эльфов и джетов до сих пор остаются предметом острых дискуссий (см., “Материалы Первой Всероссийской конф. “Глобальная электрическая цепь” (Геофизическая обсерватория “Борок” – филиал Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта, 28 октября – 01 ноября 2013 г.)- Ярославль: ГО “Борок” ИФЗ РАН, 2013”). Хотя этап накопления данных, характеризующих морфологию этих явлений, отнюдь не завершен, уже можно перейти к

исследованию более тонких особенностей структуры и динамики высотных разрядов и их роли в глобальной электрической цепи и балансе малых составляющих атмосферы [1, 2, 4 - 14].

Динамические пространственно-временные особенности и морфология спрайтов могут быть объяснены, в частности, фрактальной геометрией разрядов и перколяцией. Мы имеем здесь еще один пример самоорганизованной критичности, когда динамика системы (в данном случае высотного разряда) обусловлена достижением порога так называемой направленной перколяции, которая характеризует формирование разветвленных (фрактальных) проводящих каналов, перекрывающих всю длину спрайта.

4. Первые результаты фрактальной обработки спрайта и джета в ионосфере

Иначе обстоит дело с вопросами статистической обработки данных. Здесь по традиции используют классические методы. Это *не позволяет* извлечь всю информацию о таких новейших атмосферных структурах. Другими словами, в [6 - 14] автором показано, что применение математической теории дробной меры и фракталов открывает для физиков и экспериментаторов целый ряд новых методологических принципов – примеры см., например, рис. 3 и рис. 4. Кстати, это *первые в мире* результаты фрактальной обработки таких структур (начальная обработка была проведена в начале 2013 г., итоговая обработка – в 2014 г.).

Здесь также применимо моделирование на основе фрактальных лабиринтов, которые хорошо отражают физику и морфологию таких ионосферных структур [14, 15].

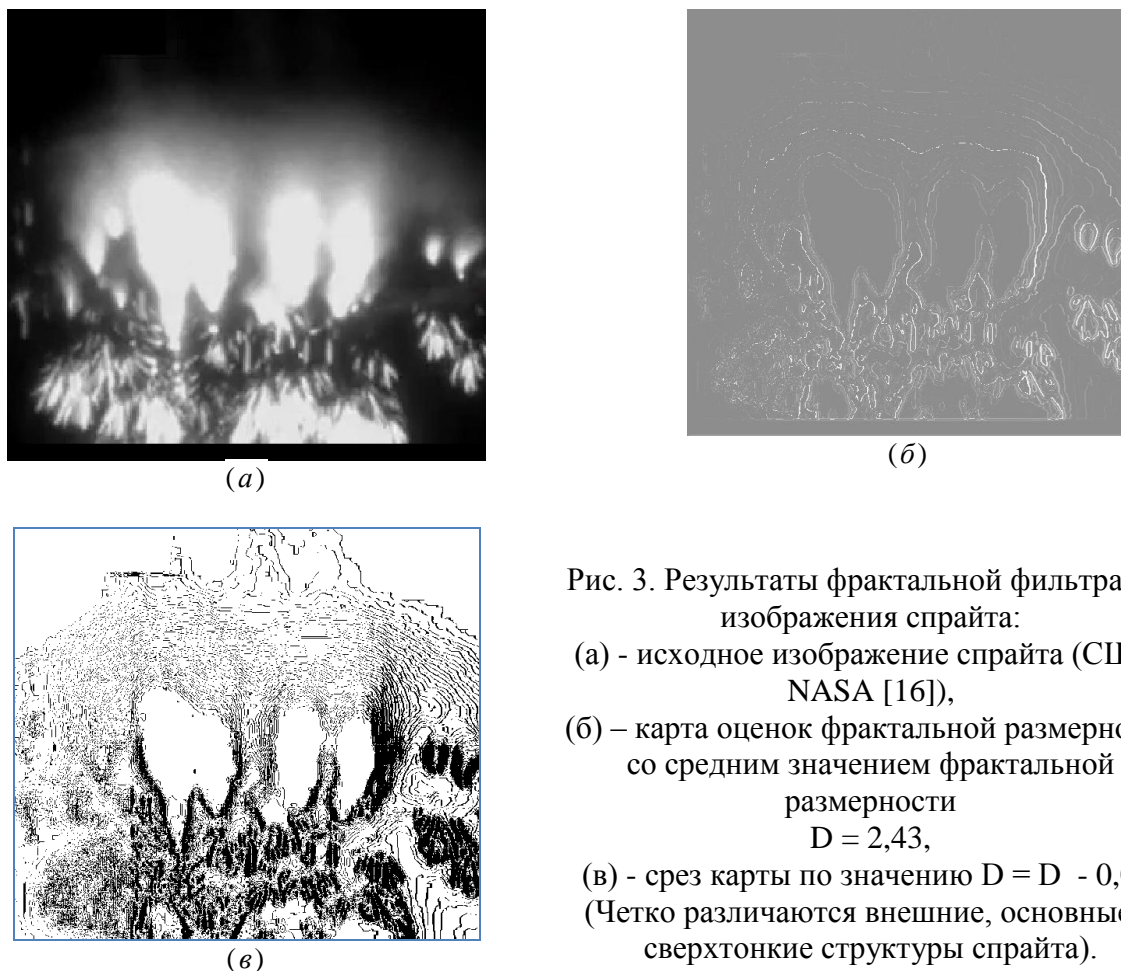


Рис. 3. Результаты фрактальной фильтрации изображения спрайта:

- (а) - исходное изображение спрайта (США, NASA [16]),
- (б) – карта оценок фрактальной размерности со средним значением фрактальной размерности $D = 2,43$,
- (в) - срез карты по значению $D = D - 0,05$. (Четко различаются внешние, основные и сверхтонкие структуры спрайта).

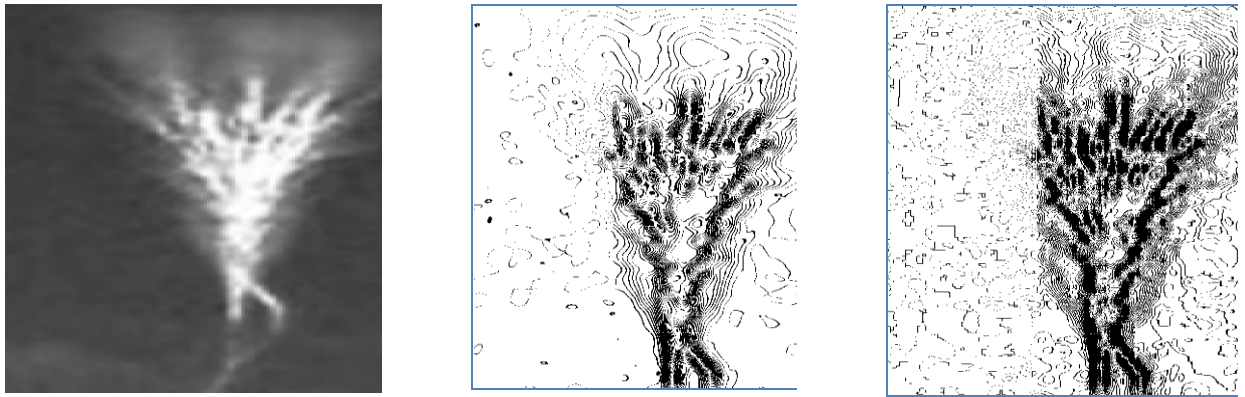


Рис. 4. Результаты фрактальной фильтрации изображения гигантского джета (съемка в Китае, 12 августа 2010 г.): (а) - изображение джета [17], (б) и (в) – срезы оценок фрактальной размерности D . (Четко видны ветви и каналы).

Полная серия результатов фрактальной фильтрации одно мгновенного кадра изображения спрайта по исходным данным из [16] приводится на рис. 5.

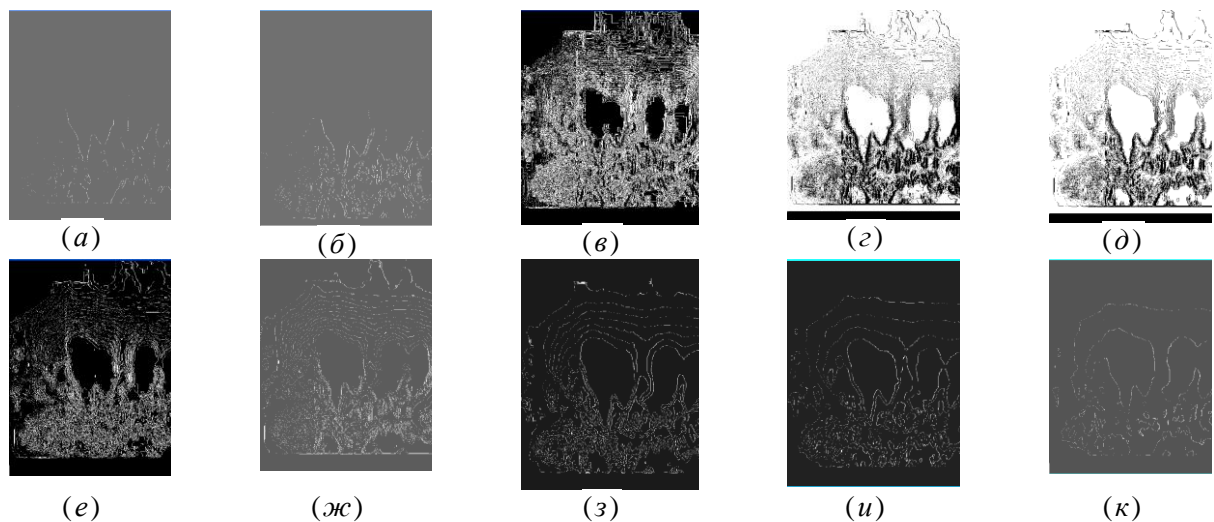


Рис. 5. Полная серия результатов фрактальной фильтрации изображения спрайта: (а) - карта фрактальной размерности со средним значением $D = 2,1$; (б) – 2,2; (в) – 2,3; (г) – 2,4; (д) – 2,5; (е) – 2,6; (ж) – 2,7; (з) – 2,8; (и) – 2,9; (к) – 3,0.

5. Заключение

Одним из новых видов мощных импульсных помех являются специфические разряды атмосферного электричества, открытые совсем недавно. Фрактально-скейлинговая методология, примененная для описания морфологии джетов, спрайтов и эльфов, может быть успешно использована для оценки их характеристик и динамики их развития. Такая оценка будет полной и объективной - она основана на количественных оценках фрактальной размерности D при оконтуривании связанных структур, и она оперативна, так как обработка данных выполняется легко на компьютерах. Затем решаются задачи математической физики.

Полученные в данной работе результаты дают основу для более глубокого действия такого рода помех на функционирование современных наземных и космических радиосистем. Приведем некоторые характеристики спрайтов [4, 5]: характерный объем $30 \times 30 \times 30$ км; пространственные масштабы неоднородностей – внешний порядка 10 км, основных структур порядка 1 км, сверхтонкой структуры менее 100 м; концентрация электронов $N_e \sim 10^4 \text{ см}^{-3}$, длительность вспышки $\tau_s \sim 10$ мс;

время релаксации электронной концентрации $\tau_r \sim 1 \dots 10$ с; температура электронов $T_e \sim 2$ эВ во время вспышки и $T_e \sim 0,02$ эВ в период релаксации; полный момент тока в разряде $p_s \sim 100$ кА × км.

Автор считает, что открыл очередную точку соприкосновения нелинейной электродинамики ГЭЦ с разработанным им глобальным фрактально-скейлинговым методом [6 - 14, 18].

Литература

1. *Мареев, Е.А., Трахтенгерц В.Ю.* Загадки атмосферного электричества//Природа, 2007. № 3.
2. *Анисимов С.В.* Глобальная электрическая цепь геосферных оболочек // Материалы Всероссийской конф. “Глобальная электрическая цепь” (Геофизическая обсерватория “Борок”, 28 октября – 01 ноября 2013 г.).- Ярославль: ГО “Борок” ИФЗ РАН, 2013. С. 6 - 7.
3. *Wilson C.T.R.* Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms // Phil. Trans. Roy. Soc. A, vol. 221, pp. 73 – 115, 1920.
4. *Мареев, Е.А., Клименко В.В.* Нелинейная динамика высотного грозового разряда // Нелинейные волны’ 2006 / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова, В.И. Некоркина. - Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2007. С. 337 - 359.
5. Sprites, Elves and Intense Lightning Discharges // NATO Science Series. V.225 / Eds. *M. Fullekrug, E. Mareev, M. Rycroft.* Dordrecht, The Netherlands, 2006.
6. *Потапов А.А.* Фрактально-скейлинговый метод обработки данных о глобальной электрической сети: эльфы, джеты, спрайты // Материалы Всероссийской конф. “Глобальная электрическая цепь” (Геофизическая обсерватория “Борок” – филиал ИФЗ им. О.Ю. Шмидта, 28 октября – 01 ноября 2013 г.).- Ярославль: ГО “Борок” ИФЗ РАН, 2013. С. 70.
7. *Потапов А.А.* О фрактально-скейлинговых характеристиках тропосферы и ионосферы // Материалы Междунар. конф. “Аэрозоль и оптика атмосферы” (Москва, 21 - 24 октября 2014 г.).- М.: ИФА РАН, 2014. (<http://ifaran.ru/science/conferences/Rozenberg2014.html>).
8. *Potapov A.A.* Research of the fractal and scaling properties of tropospheric and ionospheric turbulence with artificial perturbations // Сб. тр. Междунар. конф. “Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность: МСС-14”, посв. памяти профессора Моисеева Семёна Самойловича в связи с 85-летием со дня его рождения (Москва, ИКИ РАН, 24 - 27 ноября 2014 г.).- М.: ЛЕНАНД, 2014. С. 334 – 339.
9. *Потапов А.А.* Особенности мультифрактальной структуры высотных грозовых разрядов в ионосфере: эльфы, джеты, спрайты // Сб. докл. VIII Всероссийской НТК “Радиолокация и радиосвязь” (Москва, 24 – 26 ноября 2014 г.).- М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2014. С. 316 – 320.
10. *Потапов А.А.* О фрактальной структуре высотных грозовых разрядов в ионосфере: джеты и спрайты // Сб. тез. докл. XXIII научной сессии Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 22 – 23 декабря 2014 г.).- М.: Совет РАН по нелинейной динамике, 2014. С. 56.
11. *Герман В.А., Потапов А.А.* Об измерении фрактальных характеристик и структур атмосферных эльфов, джетов и спрайтов // Труды восьмой Всероссийской конф. “Необратимые процессы в природе и технике” (Москва, 27 - 29 января 2015 г.).- М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. Часть I. С. 112 – 115.
12. *Потапов А.А.* Элементы глобальной электрической цепи атмосферы (эльфы, джеты, спрайты) как фракталы // Труды восьмой Всероссийской конф. “Необратимые процессы в природе и технике” (Москва, 27 - 29 января 2015 г.).- М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. Часть I. С. 116 – 121.
13. *Потапов А. А.* Фрактальная радиолокация: промежуточные итоги и новые задачи // Сб. докладов XXI Междунар. НТК “Радиолокация, навигация, связь” (Воронеж, 14 – 16 апреля 2015 г.).- Воронеж: НПФ “Саквеев”, 2015. Т. 2. С. 560 - 581.
14. *Потапов А.А.* Колебания, волны, структуры и системы на примерах глобального фрактально-скейлингового метода (множества меры нуль, сингулярности, скейлинг, топология выборки, спрайты, джеты, эльфы, мемристоры, осцилляторы, фрактальные лабиринты, робастные антенные решетки и фрактальные обнаружители) // Нелинейный мир. 2014. Т. 12. № 4. С. 3 – 38.
15. *Потапов А.А.* Фрактальный метод и фрактальная парадигма в современном естествознании. Воронеж: ИПЦ “Научная книга”, 2012. 108 с.
16. [HTTP://SCIENCE.COMPULENTA.RU/701264/](http://SCIENCE.COMPULENTA.RU/701264/)
17. *Yang Jing, and Feng GuiLi,* A gigantic jet event observed over a thunderstorm in mainland China // Chinese Science Bulletin, vol. 57, no. 36, pp. 4791 - 4800, December 2012.
18. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.

УДК 530.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРФОЛОГИИ КВАНТОВО-РАЗМЕРНЫХ СТРУКТУР ДИНАМИЧЕСКИМ ХАОСОМ

А.Ж. Турмухамбетов¹, Т.Ю. Гревцева², Р.Б. Асилбаева¹

1 – АО «Казахский национальный технический университет им. К.И.Сатпаева»,
rahila_asilbaeva@mail.ru

2 – Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Tatyana.Grevtseva@kaznu.kz

На основе уравнения фрактальной эволюции меры получены модели морфологии поверхностей наноструктурированных полупроводниковых пленок. Показано, что теория позволяет описывать структуру пленок, содержащих различные квантово-размерные структуры, в том числе квантовые точки, квантовые нити и квантовые ямы. Исследовано влияние различных параметров на морфологию поверхностей нанокластерных полупроводниковых пленок. Построены гистограммы распределения полупроводниковых наноструктур по высоте. Результаты численного анализа сопоставлены с соответствующими экспериментальными данными.

Введение

Нанокластерные полупроводниковые пленки являются перспективным материалом современной электроники. Характерные размеры наноструктур сопоставимы с длиной волны де Бройля, что приводит к возникновению в наноструктурах характерных квантово-размерных эффектов. Даже незначительное различие в структуре нанокластерных пленок приводит к заметному изменению их электрических и оптических свойств [1-3]. В связи с этим вопрос изучения строения полупроводниковых пленок с различным нанокластерным строением представляет определенный научный интерес.

1. Уравнение фрактальной эволюции меры

Для описания сложной картины поверхностей полупроводниковых пленок, содержащих наноструктуры, может быть поставлен вопрос об использовании динамического хаоса. Обоснованием этого служит тот факт, что динамический хаос может иметь статистическую характеристику, практически неразличимую от стохастического процесса. Т.е. необходимо описать картину динамического хаоса с перемежаемой и фрактальной структурой, близкой к структуре нанопленок.

С этой целью мы используем новое уравнение фрактальной эволюции меры (аддитивной величины), реализующее хаотические колебания с характеристиками, соответствующими критериям самоорганизации [2, 3]. Таким образом, распределение электронов, дырок и примесей в наноструктурированном полупроводнике может быть описано следующей системой отображений в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{i+1} = \left(\frac{1}{C_n} + \mu_i \right) \left| \frac{n_i}{n_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_n}} ; \quad p_{i+1} = \left(\frac{1}{C_p} + \mu_i \right) \left| \frac{p_i}{p_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_p}} ; \quad a_{i+1} = \left(\frac{1}{C_a} + \mu_i \right) \left| \frac{a_i}{a_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_a}} ; \\ \mu_{n_{i+1}} = -\frac{1}{\gamma_n} \left(\frac{1}{C_n} + \mu_i \right) \left| \frac{n_i}{n_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_n}-1} ; \quad \mu_{p_{i+1}} = -\frac{1}{\gamma_p} \left(\frac{1}{C_p} + \mu_i \right) \left| \frac{p_i}{p_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_p}-1} ; \\ \mu_{a_{i+1}} = -\frac{1}{\gamma_a} \left(\frac{1}{C_a} + \mu_i \right) \left| \frac{a_i}{a_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_a}-1} ; \quad \mu_i = \mu_{n_i} + \mu_{p_i} + \mu_{a_i} . \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь n, p, a – неравновесные (фрактальные) концентрации электронов, дырок и примесей соответственно, C_n, C_p, C_a – степень точности разрешения, $\gamma_n, \gamma_p, \gamma_a$ – разность между фрактальной и топологической размерностями множеств электронов, дырок и примесей, n_0, p_0, a_0 – равновесные (не фрактальные) концентрации носителей заряда и примесей, μ_n, μ_p, μ_a – знаковая функция.

Концентрации носителей заряда и примесей могут рассматриваться как нелинейные фрактальные меры, поэтому для учета наличия иерархически самоподобных мелкомасштабных структур в пленке мы можем использовать второе поколение системы (1) в виде

$$\left\{ \begin{aligned} n_{i+1} &= \left(\frac{1}{C_n} + \mu_i \right) \left(\left(\frac{1}{C_n} + \mu_i \right) \left| \frac{n_i}{n_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_n}} \right)^{-\frac{1}{\gamma_n}} ; p_{i+1} = \left(\frac{1}{C_p} + \mu_i \right) \left(\left(\frac{1}{C_p} + \mu_i \right) \left| \frac{p_i}{p_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_p}} \right)^{-\frac{1}{\gamma_p}} ; \\ a_{i+1} &= \left(\frac{1}{C_a} + \mu_i \right) \left(\left(\frac{1}{C_a} + \mu_i \right) \left| \frac{a_i}{a_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_a}} \right)^{-\frac{1}{\gamma_a}} ; \mu_{n_{i+1}} = -\frac{1}{\gamma_n} \left(\frac{1}{C_n} + \mu_i \right) \left| \frac{n_i}{n_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_n}-1} ; \\ \mu_{p_{i+1}} &= -\frac{1}{\gamma_p} \left(\frac{1}{C_p} + \mu_i \right) \left| \frac{p_i}{p_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_p}-1} ; \mu_{a_{i+1}} = -\frac{1}{\gamma_a} \left(\frac{1}{C_a} + \mu_i \right) \left| \frac{a_i}{a_0} \right|^{\frac{1}{\gamma_a}-1} ; \mu_i = \mu_{n_i} + \mu_{p_i} + \mu_{a_i} . \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Фрактальные размерности множеств электронов, дырок и примесей могут быть заданы с учетом критериев самоорганизации сложных систем [1-3]. Для получения трехмерного изображения поверхности пленки был использован алгоритм реконструкции динамического хаоса по одномерной последовательности данных [4]. В качестве последовательности данных, к которой применяется этот алгоритм, выбирается зависимость концентрации электронов от пространственного шага, определяемая формулами (1) и (2). Необходимо определить необходимый набор фазовых переменных, образующих фазовое пространство. Для этого нужно развернуть исходную последовательность $n_{i+1} = f(n_i)$ в ряд наборов с последовательно возрастающими сдвигами, определенными как величины, кратные некоторой фиксированной задержке τ . Таким образом, мы можем записать следующий набор дискретных переменных:

$$\begin{aligned} n_1 : n_1(t_1), \dots, n_1(t_N) \\ n_2 : n_1(t_1 + \tau), \dots, n_1(t_N + \tau) \\ \dots \\ n_{j-1} : n_1(t_1 + (j-1)\tau), \dots, n_1(t_N + (j-1)\tau) \end{aligned} \quad (3)$$

При должном выборе τ можно ожидать, что эти переменные будут линейно независимыми, а это все, что требуется для определения фазового пространства. И все эти переменные можно получить из единственной последовательности, относящейся к $n_{i+1} = f(n_i)$. Таким образом, применение описанного алгоритма позволяет выйти за пределы одномерного пространства исходной последовательности и развернуть динамику системы в многомерном пространстве.

2. Результаты численного анализа

Теория описывает морфологию поверхностей наноструктурированных полупроводниковых пленок, идентичных экспериментальным фотографиям, полученным при помощи современных видов микроскопии (атомно-силовой, сканирующей туннельной и т.д.). Использование системы уравнений (2) в отличие от системы (1) позволяет получать модели поверхностей с более сглаженным рельефом поверхности.

При помощи описанного выше подхода возможно моделирование различных квантово-размерных структур, в том числе квантовых точек, квантовых нанонитей и квантовых ям. Так, на рисунках 1-3 представлены компьютерные модели морфологии нанокластерных полупроводниковых пленок. Нить имеет топологическую размерность $d=1$, размерность фрактального объема $D>3$, следовательно, для нитевидной морфологии $\gamma = D - d > 2$. Аналогично, топологическая размерность квантовых ям $d=2$. Поэтому разность между фрактальной и топологической размерностями $\gamma = D - d > 1$. Модели поверхностей полупроводниковых квантово-размерных структур, приведенные на рисунках 1-3, наблюдаются в эксперименте [5-9].

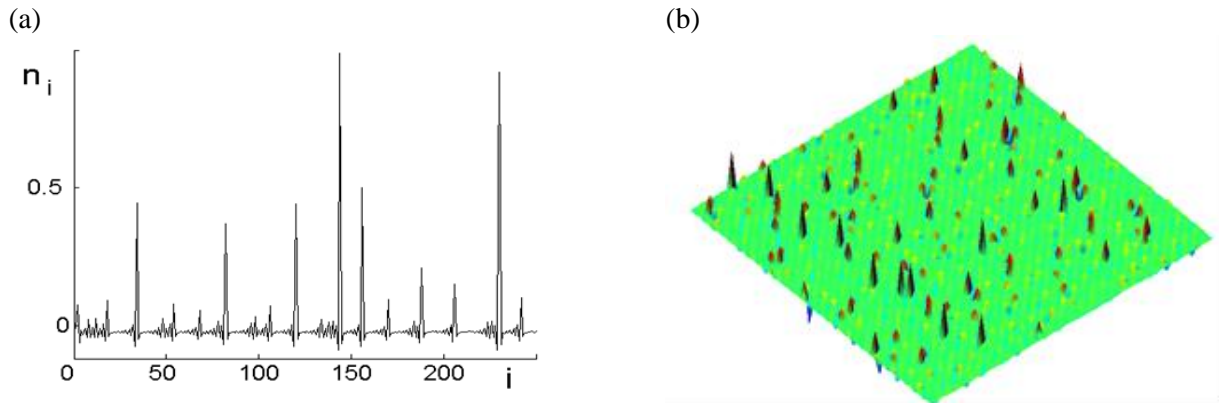


Рис.1. Реализация (a) и морфология (b) квантовых точек.
 $C_n = C_p = C_a = 0.9$; $\gamma_n = \gamma_p = \gamma_a = 3.806$; $n_0 = p_0 = 1/4$, $a_0 = 1$; $\mu = -1$, $\tau = 15$.

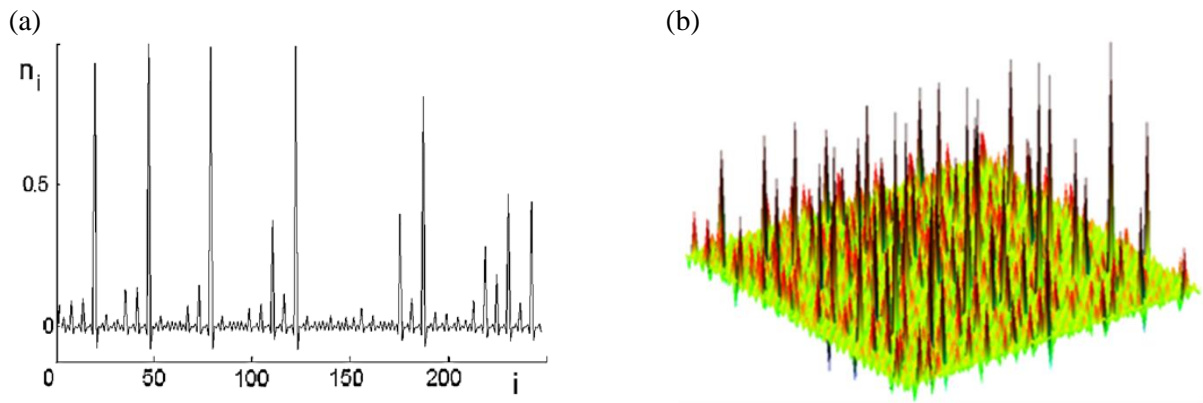


Рис.2. Реализация (a) и морфология (b) квантовых нитей.
 $C_n = C_p = C_a = 0.9$; $\gamma_n = \gamma_p = \gamma_a = 2.806$; $n_0 = p_0 = a_0 = 1$; $\mu = -1$, $\tau = 15$.

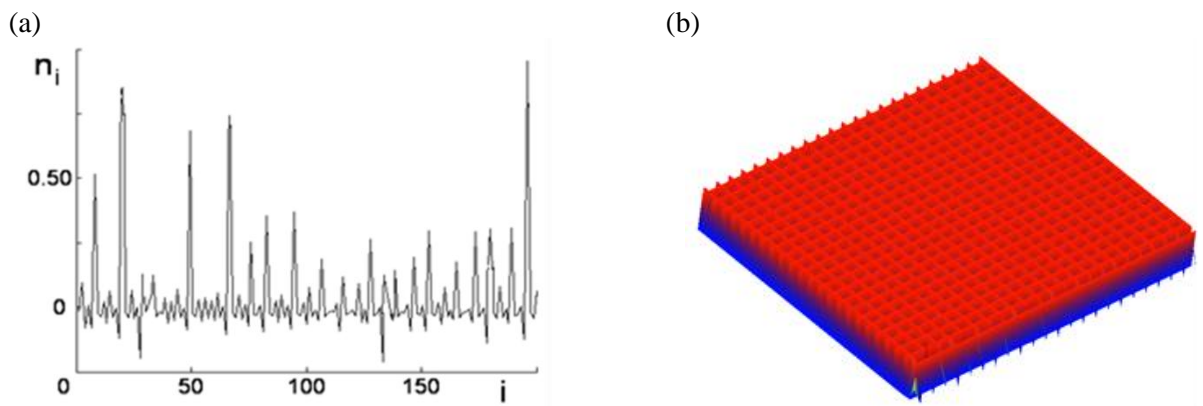


Рис.3. Реализация (a) и морфология (b) поверхности, содержащей квантовые ямы.
 $C_n = C_p = C_a = 0.9$; $\gamma_n = 1.806$, $\gamma_p = 1.567$, $\gamma_a = 1.433$; $n_0 = p_0 = 1/4$, $a_0 = 1$; $\mu = -1$, $\tau = 15$.

Рассмотрим влияние примесей на морфологию поверхностей наноструктурированных полупроводниковых пленок. На рисунках 4(a-c) показаны модели поверхностей с различными концентрациями примесей, а на рисунках 4(d-f) – соответствующие им гистограммы распределения квантово-размерных структур по высоте. Из рисунков видно, что даже незначительное изменение концентрации примесей существенно влияет на рельеф поверхности пленки (рис. 4(a, b)). Увеличение

концентрации примесей может приводить к утолщению пленки (рис. 4(с)), при этом поверхность пленки становится мелкозернистой. Среднеквадратическое отклонение, вычисленное для поверхностей, приведенных на рисунках 4(а-с), 0.018, 0.012 и 0.469 соответственно.

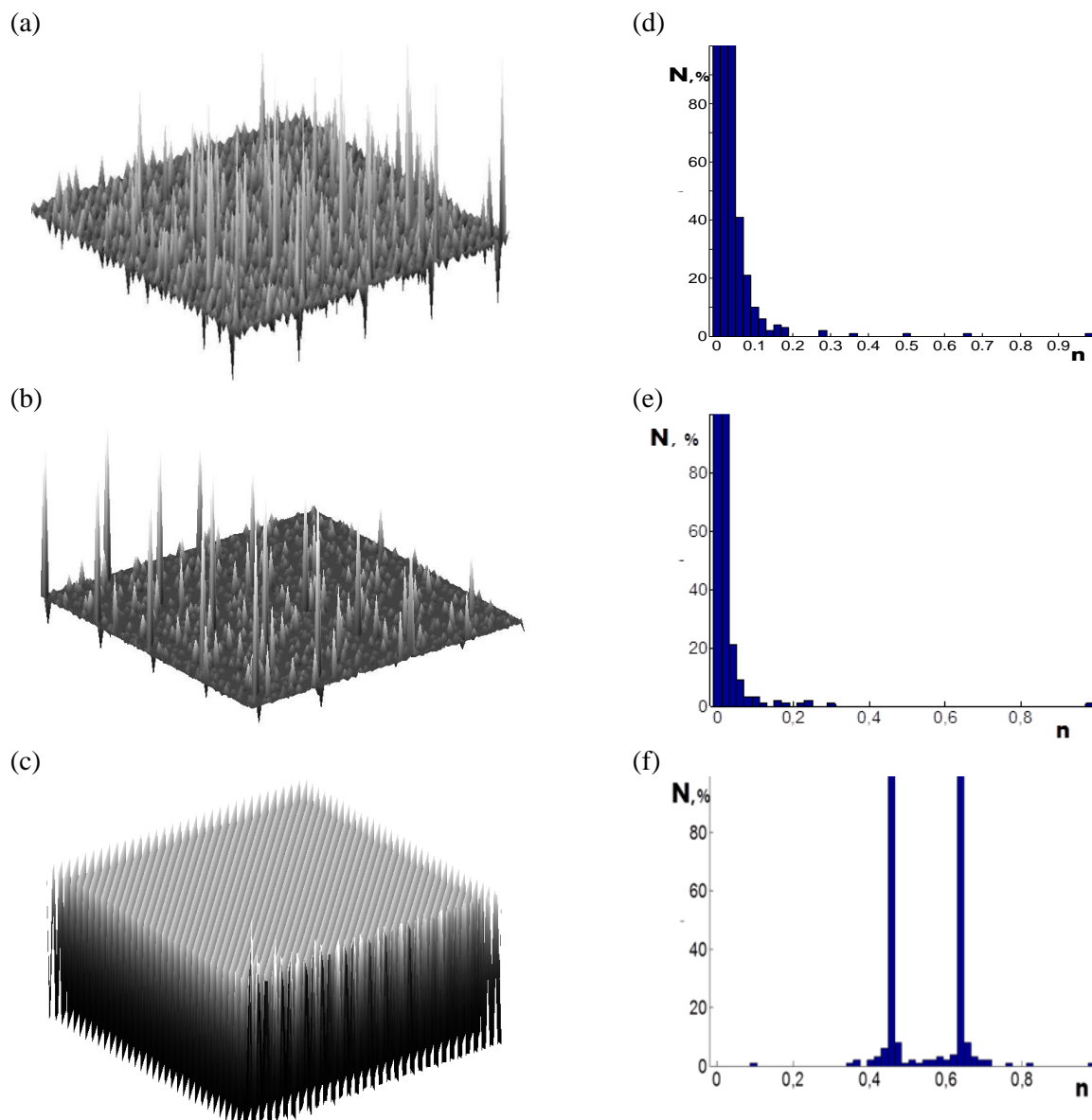


Рис. 4. Влияние примесей на морфологию поверхностей нанокластерных пленок

$$\gamma_n = \gamma_p = \gamma_a = 2.806, \quad n_0 = p_0 = 0.25, \quad C_n = C_p = C_a = 0.999, \quad \tau = 15.$$

(а) - $a_0 = 1.00$; (b) - $a_0 = 1.4$; (с) - $a_0 = 1.8$.

На рисунках 5(а-с) показано влияние показателя скейлинга, представляющего собой разность между фрактальной и топологической размерностями множеств носителей заряда и примесей, на рельеф поверхностей полупроводниковых пленок и соответствующие гистограммы распределения в этих пленках наноструктур по высоте (рисунки 5(д-ф)). При малых значениях показателя скейлинга возможно образование отдельных относительно крупных наноструктур (рис.5(а)). Можно отметить, что увеличение показателя скейлинга приводит к появлению наноструктур с различной высотой. Среднеквадратическое отклонение, соответствующее поверхностям, показанным на рисунках 5(а-с), имеет значения 0.080, 0.030 и 0.041 соответственно.

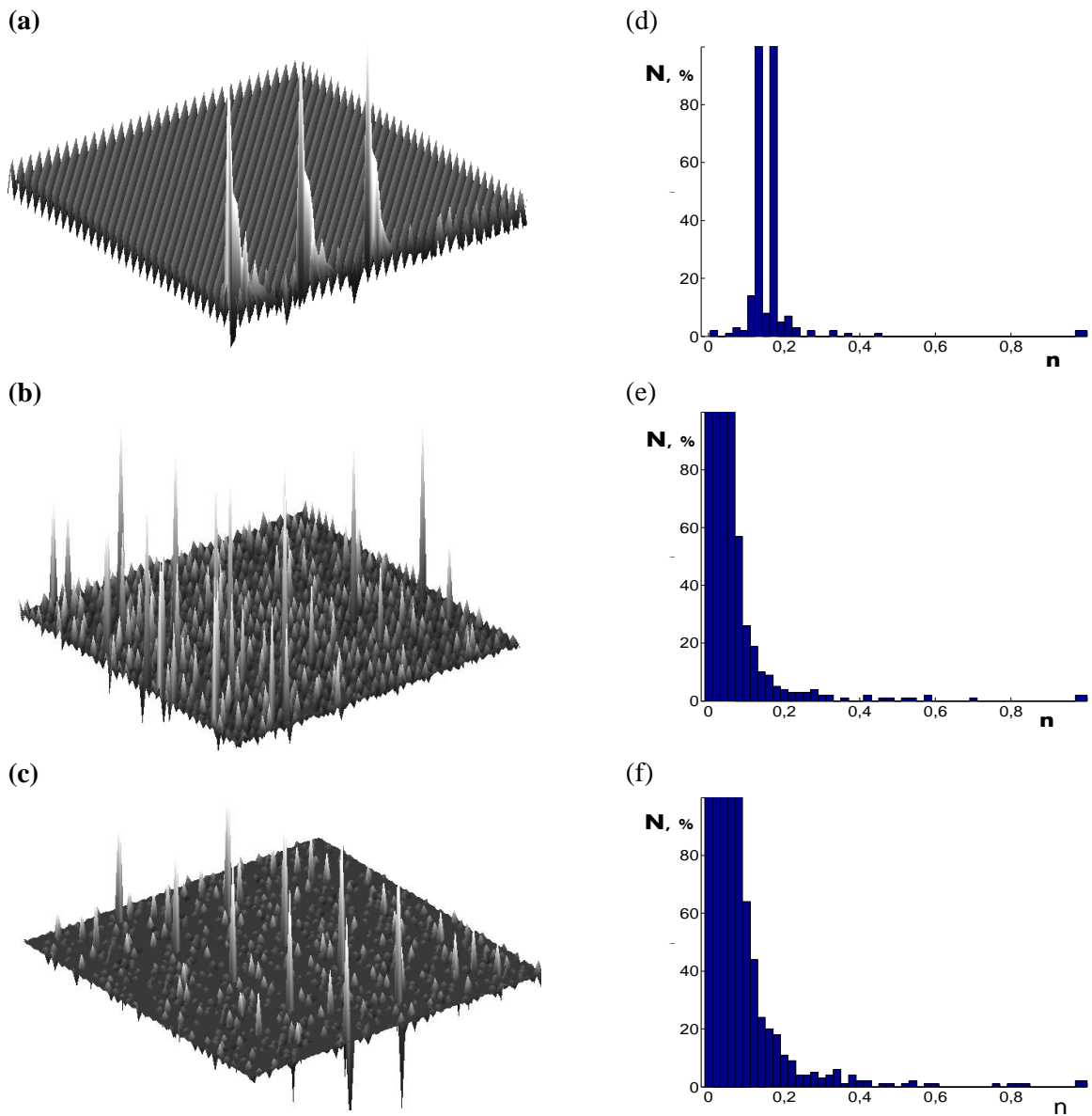


Рис. 5. Влияние показателя скейлинга на рельеф поверхностей полупроводников
 $n_0 = p_0 = 0.25$, $a_0 = 1.00$, $C_n = C_p = C_a = 0.999$, $\tau = 15$,
 (a) - $\gamma_n = \gamma_p = \gamma_a = 1.5$; (b) - $\gamma_n = \gamma_p = \gamma_a = 2.5$; (c) - $\gamma_n = \gamma_p = \gamma_a = 3.5$.

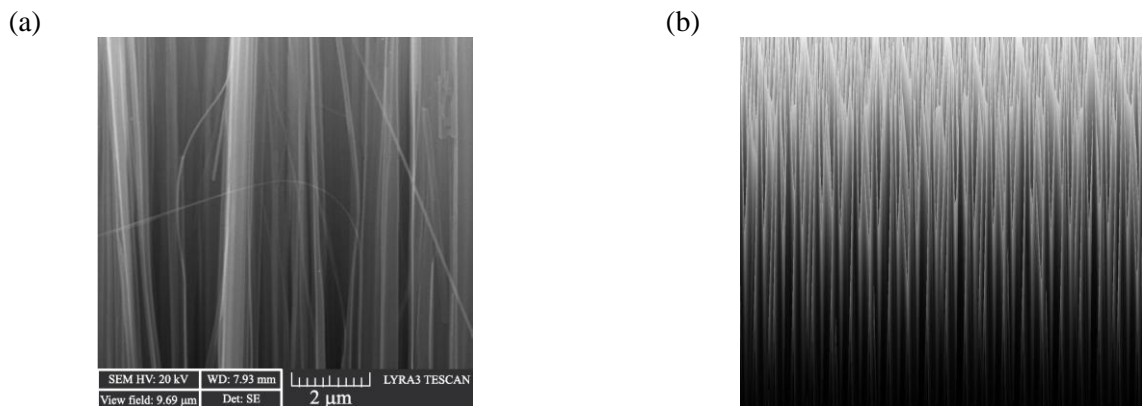


Рис. 6. Кремниевые квантовые нанонити.
 а) эксперимент; б) результат моделирования:
 $C_n = C_p = C_a = 0.99$; $\mu = -1$; $n_0 = 0.7$, $p_0 = 0.51$; $a_0 = 1.01$; $\gamma_n = 2.806$; $\gamma_p = 2.618$; $\gamma_a = 2.655$, $\tau = 15$.

На рисунке 6 приведен результат сопоставления экспериментальных данных по изучению морфологии поверхностей кремниевых нанонитей [10], с полученной нами при помощи описанной выше методики модели поверхности пленки. Как видно из сопоставления рисунков 6(a) и 6(b), результаты моделирования качественно согласуются с экспериментально полученной фотографией пленки, содержащей кремниевые квантовые нанонити.

Заключение

При помощи уравнения фрактальной эволюции меры возможно моделирование различных видов наноструктур. Варьируя параметры, входящие в системы уравнений (1) и (2), мы можем получить модели поверхностей полупроводниковых пленок, содержащие квантовые ямы, точки и нанонити с различной высотой и взаимным расположением. Построенные нами гистограммы распределения наноструктур по высоте дают представление о размерах наноструктур, содержащихся в нанокластерных полупроводниковых пленках. Полученные нами теоретические результаты качественно согласуются с соответствующими экспериментальными данными.

Теоретические результаты, полученные в настоящей работе, могут быть использованы для описания электрических и оптических свойств наноструктурированных полупроводников.

Литература

1. Zhanabayev Z.Zh., Grevtseva T.Yu. Fractal Properties of Nanostructured Semiconductors // *Physica B: Condensed Matter*. – 2007. - Vol. 391, № 1. - P. 12-17.
2. Zhanabaev Z.Zh., Grevtseva T.Yu., Danegulova T.B., Assanov G.S. Optical Processes in Nanostructured Semiconductors // *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. – 2013. - Vol. 10, No 3. – P.673-678.
3. Zhanabaev Z.Zh., Grevtseva T.Yu. Physical Fractal Phenomena in Nanostructured Semiconductors // *Reviews in Theoretical Science*. – 2014. – Vol. 2, No 3. – P. 211-259.
4. Nicolis G., Prigogine I. *Exploring Complexity. An Introduction*. – New York: W.H. Freeman and Company, 1990. – p. 342.
5. Krylyuk A.V., Davydov A., Levin I. Tapering Control of Si Nanowires Grown from SiCl₄ at Reduced Pressure // *ACS Nano*. – 2010. – Vol. 5, No 1. – P. 656-666.
6. Heo K., Kim Ch.-J., Jo M.-H., Hong S. Massive Integration of Inorganic Nanowire-Based Structures on Solid Substrates for Device Applications // *Journal of Materials Chemistry*. – 2009. – Vol. 19. – PP. 901-908.
7. Golovan L.A., Gonchar K.A., Osminkina L.A., Timoshenko V.Yu., Petrov G.I., Yakovlev V.V. Coherent anti-Stokes Raman Scattering in Silicon Nanowire Ensembles // *Laser Phys. Lett.* – 2004. – No 1. – P.1-5.
8. Tuan N.A., Mizutani G. Metal-Interface Second Harmonic Generation from Pt/Cu Bimetallic Nanowire Arrays on NaCl (110) Faceted Templates // *e-J. Surf. Sci. Nanotech.* – 2009. – Vol. 7. – P. 831-835.
9. Rathmell A.R., Bergin S.M., Hua Y-L., Li Zh.-Y., Wiley B.J. The Growth Mechanism of Copper Nanowires and Their Properties in Flexible, Transparent Conducting Films // *Advanced Materials*. – 2010. – Vol. 22. – P. 3558-3563.
10. Гончар К.А., Осминкина Л.А., Сиваков В., Лысенко В., Тимошенко В.Ю. Оптические свойства нитевидных наноструктур, полученных металл-стимулированным химическим травлением пластин слабо легированного кристаллического кремния // *Физика и техника полупроводников*. - 2014. - Т. 48, вып.12. - С. 1654-1659.

УДК 004.93'1; 004.932, 004.896

МОДЕЛИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СХЕМОТЕХНИКИ (FPGA)

З.Ж. Жанабаев, Е.Т. Кожажулов, Д.Ж.Бурисова, Д.М. Жексебай
 Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
kazgu.kz@gmail.com

Введение. Нейронные сети являются наиболее общим видом реализации интеллектуальных систем. Актуальной задачей является исследование моделей нейронных сетей с помощью современных цифровых приборов - программируемых логических интегральных схем (FPGA), что облегчает структурную реализацию и повышает вычислительную эффективность. Работы [1-7] посвящены моделированию динамики нейронов на основе цифровой техники FPGA. В работах [1-4] приводятся качественные и количественные сравнения FPGA с альтернативными вариантами (к примеру, «xc5v1x330t» в сравнении с Core2/3GHz и GT200/1.2GHz). В случае сложных задач наблюдается явное превосходство по времени и производительности. Так, в работе [5] сделан вывод о том, что реализация на Xilinx Virtex-5 FPGA демонстрирует скорость вычислений в 24,3 раза выше, чем соответствующее программное обеспечение. Ряд новых свойств колебаний нейронов, включая наличие их иерархических уровней, установлено в работе [8]. Например, в отличие от уравнений, использованных в недавних работах [6-7] динамическая система, предложенная в [8], содержит дробные степени переменных. Как нам известно, варианты FPGA не включают операцию возведения в произвольную дробную степень. Целью работы является поиск возможностей интегрально-схемотехнической реализации масштабно инвариантной модели нейронных сетей, в которой учитывается дробная степень.

Теоретические основы и методика исследований

В качестве тестовых объектов исследований мы выбрали известные модели нейронных сетей [6-7] (ФитцХью-Нагумо, Хиндмарш-Роуз) и масштабно-инвариантную модель нейронных сетей [8]. Аппаратная часть реализована на основе отладочной платы ANVYL FPGA с интегральной схемой фирмы XILINX семейства Spartan 6. Цифровой сигнал на выходе FPGA получен в виде восьми битного кода данных. Для получения численных и графических данных использовался программный пакет MATLAB Simulink.

Уравнения колебаний нейронов по модели ФитцХью-Нагумо [6] записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= v - v^3/3 - w + I_{ext} \\ \tau \cdot \dot{w} &= v + a - b \cdot w, \end{aligned} \quad (1)$$

где v – является мембранным потенциалом; w – переменная восстановления; I_{ext} – величина тока стимула; параметры $a, b, \tau > 0$.

Уравнения модели Хиндмарш-Роуз [7] имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - a \cdot x^3 + b \cdot x^2 - z + I \\ \dot{y} &= c - d \cdot x^2 - y \\ \dot{z} &= r \cdot [s \cdot (x - x_R) - z], \end{aligned} \quad (2)$$

где I имитирует входной мембранный ток для биологических нейронов; b позволяет переключаться между берстовыми и спайковыми поведением и контролировать частоту спайков; r контролирует скорость изменения медленной переменной z (т.е., эффективность медленных каналов в обмене ионами); параметры a, b, c, d контролируют скорость изменения переменной x и y ; s регулирует адаптацию; x_R устанавливает потенциал покоя системы.

Вначале мы получили экспериментальные результаты на основе FPGA для системы уравнений (1), (2) и они были сопоставлены с численными реализациями этих динамических систем. Получено удовлетворительное совпадение.

Уравнения масштабной инвариантной модели нейронных сетей включают в себя основные свойства нейрона [8]. Мы рассмотрим только три варианта моделирования нейронных сетей. В первом варианте внешнее поле влияет на каждый исследуемый объект как модуляционно – периодический сигнал:

$$V_{i+1}^{(k)} = V_0^{(k)} \left(1 - F^{(k)}(t) / \sum_{k=1}^N V_i^{(k)} \right)^{-\gamma_k}, \quad (3)$$

где V_i – потенциал действия нейронов, V_0 – пороговые потенциалы возбуждения, k – порядковый номер нейрона. Внешнее поле принято в виде модуляционно – периодического сигнала:

$$F(t) = A(1 + B \sin(\Omega t)), \quad (4)$$

где A, B, Ω – амплитуда, коэффициент (глубина), частота модуляции нейронных колебаний. Дробные числа $\gamma_k = D_k - d_k$, где D_k, d_k – фрактальные и топологические размерности описания геометрии нейрона с номером k .

Во втором варианте потенциал действия нейрона зависит только от соседнего нейрона, а модуляционно-периодическое внешнее поле будет влиять лишь на первый нейрон ($V^{(1)} = F, k \geq 2$):

$$V_{i+1}^{(k)} = V_0^{(k)} \left(1 - V_i^{(k-1)} / \sum_{k=1}^N V_i^{(k)} \right)^{-\gamma_k} \quad (5)$$

Третий вариант учитывает многослойность нейронных сетей в виде иерархической структуры порядка n :

$$V_n = f \left(\dots f \left(\frac{V_0}{n}, V_n \right) \dots \right), \quad f(V_0, V) = V_0 \left(1 - \frac{F(t)}{V} \right)^{-\gamma}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где число скобок равно n , $V_{n,i+1}^{(k)}$ находится по формуле (3).

Блок схема структурно-схемотехнической реализации уравнений (3) показана на рисунке (1). Модель состоит из трех взаимосвязанных нейронов (выделенных пунктиром), которым подается внешнее поле модуляционно–периодического характера.

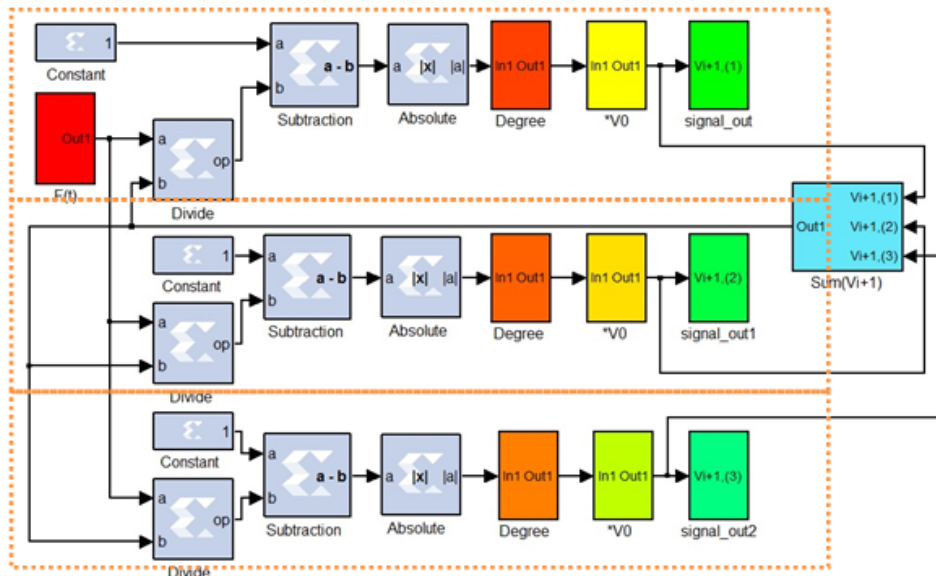


Рисунок 1. Структурная схема реализации на FPGA масштабно-инвариантной модели нейронных сетей по системе уравнений (3).

На рисунке 2 показана структурная схема возведения сигнала в произвольную дробную степень на цифровых логических элементах. В устройствах FPGA нет готовых блоков возведения в произвольную дробную степень, предусмотрено только извлечение корня. Алгоритм вычисления на FPGA дробной степени γ запишем следующим образом:

$$\gamma = \sum_{k=1}^m a_k * (2)^{-k}, \quad (7)$$

где k – номер итерации, a_k – имеет значения $\{0,1\}$. Зная последовательность нужных нам элементов a_k , можно получить любые дробные степени сигнала x^γ с желаемой точностью:

$$x^\gamma = \prod_k x^{\gamma_k} = \prod_{k=1}^m x^{a_k * (2)^{-k}} \quad (8)$$

Для выявления типов физических явлений достаточно использовать значения γ с точностью до 1%. Так, в работе [9] показано, что хаотические процессы с скейлинговыми закономерностями, какими являются нейронные колебания в определенных интервалах параметров, классифицируются значениями γ : $\gamma_1 = 0.567, 1 - \gamma_1$; $\gamma_2 = 0.806, 1 - \gamma_2$; $\gamma_3 = 0.618, 1 - \gamma_3$.

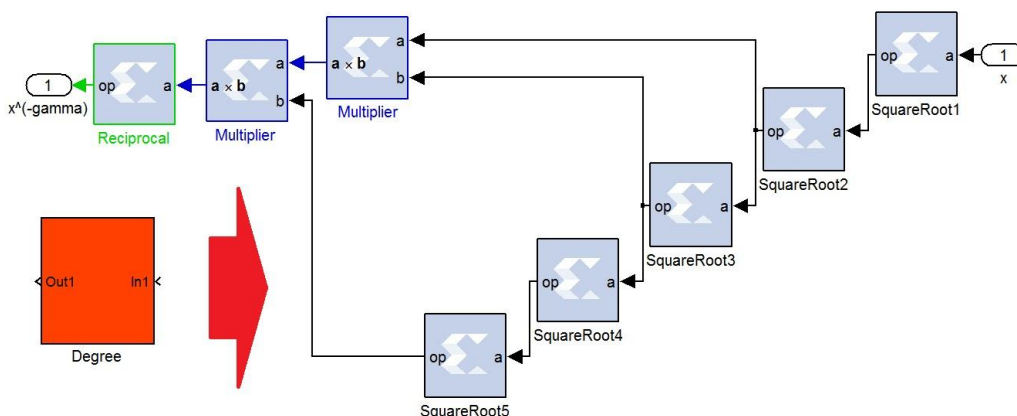


Рисунок 2. Структурная схема блока вычисления произвольной дробной степени

Числа γ_1, γ_2 являются, соответственно, нормированными неподвижными значениями информации и энтропии – критериями самоорганизации. Известное число Фибоначчи (γ_3) является «золотым сечением» динамической меры, оно следует из теории для γ_1, γ_2 .

Из таблицы 1 видно, что для описания различных типов нейронных колебаний (сигналов нейронных сетей) достаточно использовать 9 итераций в формуле (8).

Таблица 1. Значения γ согласно формуле (8) для $m = 9$.

γ m	γ_1	$1 - \gamma_1$	γ_2	$1 - \gamma_2$	γ_3	$1 - \gamma_3$
9	0,567±0.001	0.433±0.001	0.806±0.001	0.194±0.001	0.618±0.001	0.382±0.001

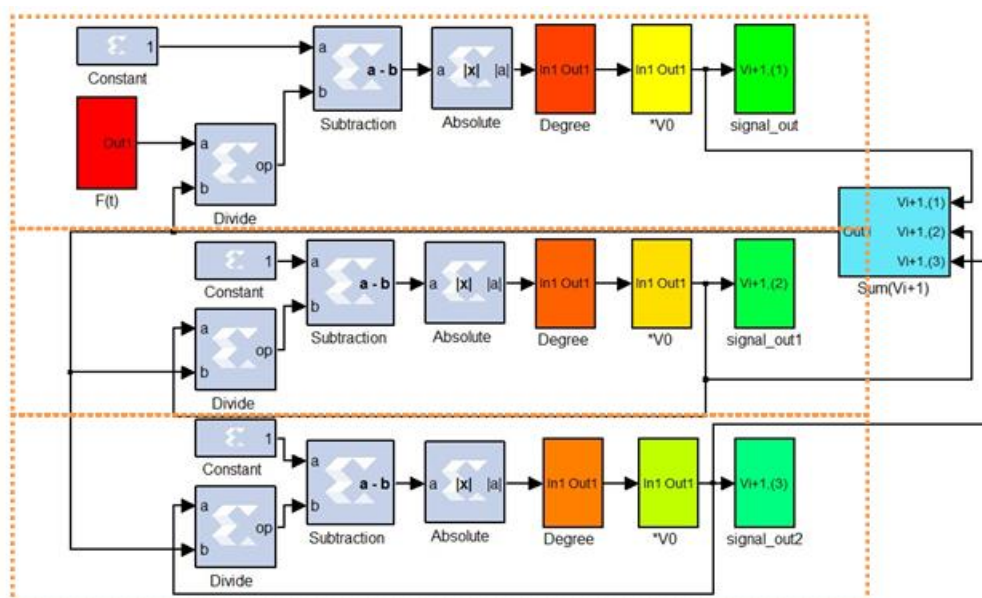


Рисунок 3. Структурная схема цифровой реализации масштабно-инвариантной модели нейронных сетей согласно формуле(5).

Результаты численного и схмотехнического моделирования

Численные и схмотехнические реализации уравнений (4) приведены ниже. Рисунок 4 показывает возможность достаточно точной реализации цифровой техникой FPGA динамической системы (3). Количество осцилляций и амплитуда пиков совпадают в цифровой и схмотехнической реализациях. Здесь и далее приведены значения напряжения в милливольтгах, время – в миллисекундах.

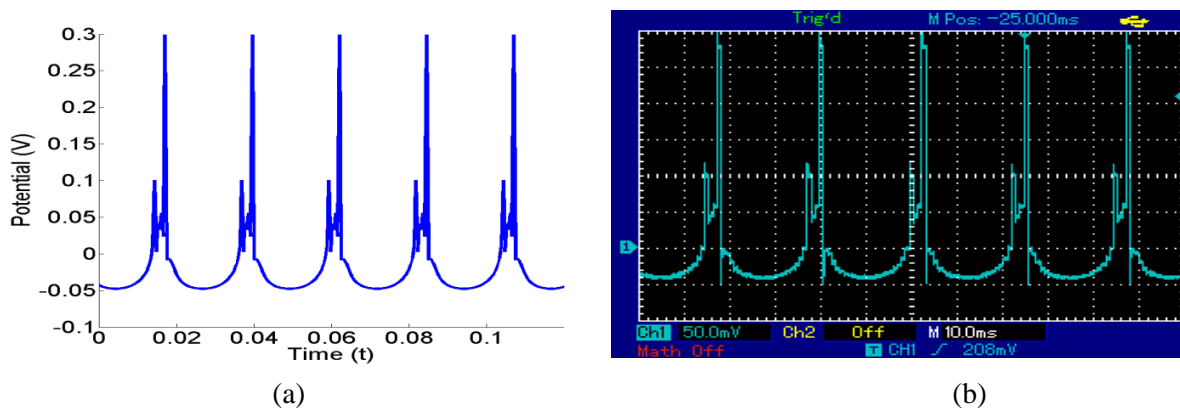


Рисунок 4. Численная реализация (a) и экспериментальный результат (b) для уравнений (3) при $A=0.8$, $B=0.4$, $\Omega=88,8\pi$, $V_0=0.1$, $k=3$, $\gamma=0.433$.

Другой тип колебаний, описываемых уравнениями (5), тоже адекватно реализуется предлагаемой нами цифровой техникой (рис. 5).

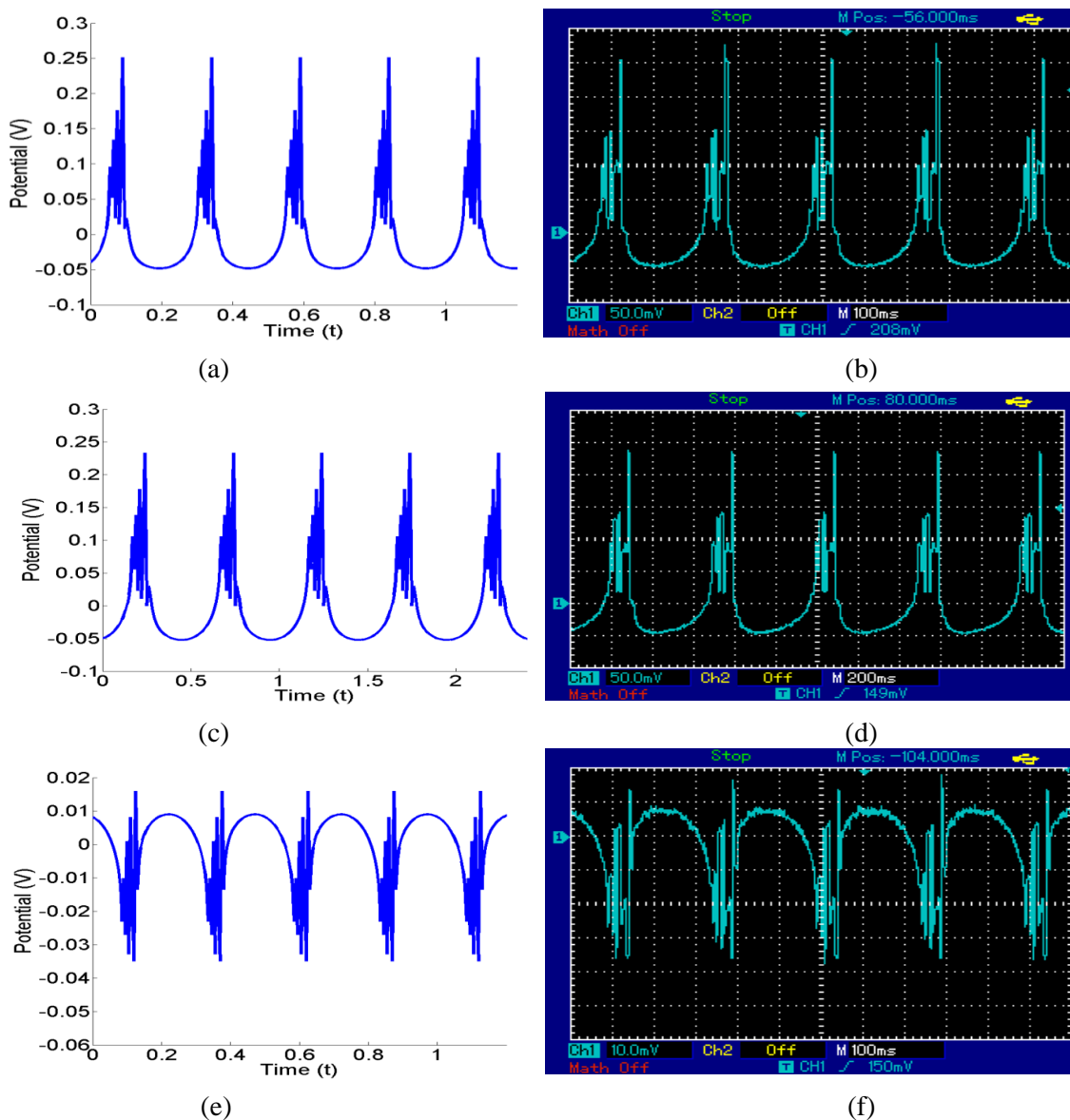
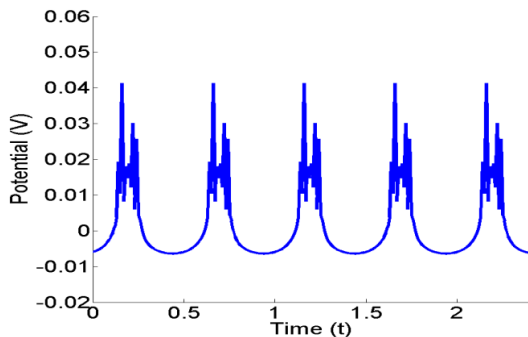
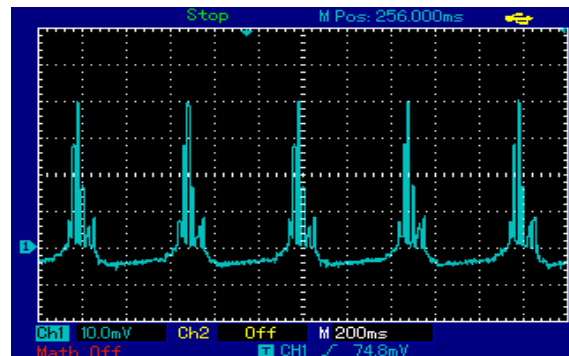


Рисунок 5. Численные реализации (a,c,e) и экспериментальные результаты (b,d,f) масштабно-инвариантной модели нейронных сетей согласно уравнениям (5) $A=0.8$, $B=0.4$, $\Omega=8\pi$; $\gamma=0.5$, $V_0=0.1$, $k=3$;

Реализация трехслойной нейронной сети, описываемой формулой (6), показано на рисунке 6. Сеть имеет три слоя по три нейрона на каждом слое. Такого рода задачи моделирования многослойных нейронных сетей требуют большой объем памяти FPGA. Так, использованная нами интегральная схема семейства Spartan 6 позволяет реализовать только иерархические уровни порядка $n=3$ и дробность степени в вариациях $m = 1,2$.



(a)



(b)

Рисунок 6. Численная реализация (a) и экспериментальный результат (b) по иерархической модели нейронных сетей (уравнения (6)) при $A=0.45$, $B=0.5$, $\Omega=4\pi$, $\gamma=0.5$, $V_0=0.1$, $k=3$, $n=3$;

Заключение

В работе приведены результаты электронно-цифровой реализации разных моделей динамики нейронов. Предлагаемая цифровая техника может генерировать различные по структуре сигналы нейронной сети: спайки, пачечные всплески, берсты.

Более общие модели нейронных сетей рассмотрены использованием интегральной схемотехники FPGA в реальном времени. Нами показана возможность схемотехнического моделирования нейронных сетей, описываемых дробными степенями сигналов, разработана структурная схема блока вычисления дробной степени. Интегральная схемотехника является простым способом реализации сложных задач. При реализации нейродинамических моделей с помощью FPGA достигается эффективность по времени и простота, малогабаритность используемой техники. Такого рода реализации моделей нейронных сетей могут быть применены для создания искусственных нейронных сетей, отличающихся от существующих аналогов максимальной близостью к системе биологических нейронов, что является перспективной задачей в этом направлении.

Литература

- [1] Soleimani H., Ahmadi A., Bavandpour M. Biologically inspired spiking neurons: Piecewise linear models and digital implementation //Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on. – 2012. – Т. 59. – №. 12. – С. 2991-3004.
- [2] Weinstein R. K., Lee R. H. Architectures for high-performance FPGA implementations of neural models //Journal of Neural Engineering. – 2006. – Т.3. – №. 1. – С. 21-34.
- [3] Thomas D. B., Luk W. FPGA accelerated simulation of biologically plausible spiking neural networks //Field Programmable Custom Computing Machines, 2009. FCCM'09.17th IEEE Symposium on. – IEEE, 2009. – С. 45-52.
- [4] Cheung K., Schultz S. R., Luk W. A large-scale spiking neural network accelerator for FPGA systems //Artificial Neural Networks and Machine Learning–ICANN 2012. – Springer Berlin Heidelberg, 2012. – С. 113-120.
- [5] Wildie M. et al. Reconfigurable acceleration of neural models with gap junctions //Field-Programmable Technology, 2009.FPT 2009.International Conference on. – IEEE, 2009. – С. 439-442.
- [6] Baladron J. et al. Mean-field description and propagation of chaos in networks of Hodgkin-Huxley and FitzHugh-Nagumo neurons //The Journal of Mathematical Neuroscience. – 2012. – Т. 2. – №. 1. – С. 10.
- [7] Storace M., Lino D., de Lange E. The Hindmarsh–Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2008. – Т. 18. – №. 3. – С. 033128.
- [8] Zhanabaev Z. Zh., Kozhagulov Y. T. A Generic Model for Scale-Invariant Neural Networks //Journal of Neuroscience and Neuroengineering. – 2013. – Т. 2. – №. 3. – С. 267-271.
- [9] Zhanabaev Z. Zh. and Grevtseva T. Yu., Fractal properties of nanostructured semiconductors // Physica B: Condensed Matter, Vol. 391, № 1, 12-17 (2007)

УДК 530.1

НОВЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ РЕЖИМОВ ПО РЕАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

З.Ж. Жанабаев., С.Н.Ахтанов

Научно - Исследовательский Институт Экспериментальной и Теоретической Физики, Казахский Национальный Университет им. аль - Фараби, Алматы, Казахстан; sayataktanov@mail.ru

Предложена новая характеристика хаоса - эволюционный параметр порядка. Этот параметр позволяет определить бифуркационные режимы по реализации динамической системы. В отличие от существующих методов построения бифуркационных диаграмм, данный метод более точно определяет состояние динамической системы.

В качестве генератора сигналов выбраны модели динамических систем, как логистическое отображение, отображение Хенона, новое отображение «накопления - выброса», модифицированная система Лоренца. Приведены их бифуркационные диаграммы по эволюционному параметру порядка.

Введение

Бифуркационная диаграмма нелинейной динамической системы строится, как правило по известному параметру, который меняет состояние самой динамической системы. Поэтому нет общего метода построения бифуркационной диаграммы динамической системы, не зная параметр порядка динамической системы. Многие природные явления можно описать как динамическую систему. Например, астрофизические процессы, изменение погоды, магнитуды землетрясения и.т.д., однако они явно не содержат параметра порядка.

В современных исследованиях [1-4] рассматриваются бифуркации в разных динамических системах, которые определяют качественные изменения состояния системы. Бифуркационные диаграммы строятся как зависимость максимальных и минимальных значений физической величины от управляющего параметра, заданного в уравнениях динамической системы.

Однако не всегда известны уравнения динамической системы и возникает естественный вопрос, можно ли определить режимы бифуркации по реализациям (по временному ряду, по фотографическим изображениям и.т.д.). Поэтому в настоящей работе ставится цель определить соответствующий параметр порядка, изменение которого привело бы к бифуркациям.

Для этой цели предлагается новое выражение для параметра порядка эволюционного процесса. Этот параметр позволяет построить бифуркационную диаграмму по реализации, не зная уравнения динамической системы.

1. Эволюционный параметр порядка сильно неоднородных хаотических сигналов.

Существование метрических характеристик (длины, площади, объема) следует из выполнения известного интегрального неравенства Гельдера для любых функций $x_i(t), x_j(t)$, записанного в виде

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T |x_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |x_j(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq K_{x_i, x_j}^{p, q} \frac{1}{T} \int_0^T |x_i(t) \cdot x_j(t)| dt, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (1)$$

где $K_{x_i, x_j}^{p, q}$ - коэффициент, при постоянном значении которого выполняется равенство в (1). В формуле (1) использовано усреднение по времени t . Обозначив через угловые скобки более общее усреднение по ансамблю из (1) имеем

$$K_{x_i, x_j}^{p, q} = \frac{\left(\langle |x_i|^p \rangle \right)^{1/p} \left(\langle |x_j|^q \rangle \right)^{1/q}}{|\langle x_i x_j \rangle|}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2)$$

Выражение (2) назовем обобщенно – метрической характеристикой согласно работе [5], где впервые была введена эта характеристика хаоса. Формула (2) отличается от обратного коэффициента нецентрированной автокорреляции: усредняется модуль произведения функций, учитывается возможность $p \neq q \neq 2$. В случае $p = q = 2$ искомая характеристика определяется евклидовой метрикой. Если $x_i(t) \equiv x(t)$, $x_j(t) = 1$, $p = q = 2$, то мы получим $K_x^{2,2} = \langle x^2 \rangle^{1/2} / \langle |x| \rangle$ - коэффициент формы сигнала, который используется в радиофизике.

Рассмотрим вопрос о возможности использования формулы (2) для хаотических сигналов, которые являются сильно неоднородными и ассиметрично перемежаемыми. Перемежаемые функции являются сильно неоднородными относительно друг друга (x_i, x_j) и относительно аргумента (x, t). В терминах теории подобия, масштабной инвариантности перемежаемые сигналы не обладают свойством самоподобия, а могут быть самоаффинными. Чтобы учесть такую неравновесность в силу произвольности функций $x_i(t), x_j(t)$ в формуле (2) мы можем выбрать одну из них в качестве определяющей переменной. Если нас интересует эволюция по времени $x_i(t)$, то можно выбрать $x_j(t) = t$. Тогда выражение (2) имеет вид

$$K_{x,t}^{p,q} = (\langle |x(t)|^p \rangle)^{1/p} \cdot (\langle t^q \rangle)^{1/q} / \langle |x(t) \cdot t| \rangle. \quad (3)$$

Выражение (3) назовем эволюционным параметром порядка. Этот параметр имеет смысл безразмерного времени и является пропорциональным номеру шага дискретных отображений динамических систем. Если принять $q = 2 + D_C$, $p = q/(q-1)$ в (2), то можно повысить разрешающую способность обобщенно – метрической характеристики, так как важной количественной характеристикой аттрактора, несущей информацию о степени сложности поведения динамической системы, является корреляционная размерность D_C [6]. Алгоритм расчета D_C основан на вычислении корреляционного интеграла $C(\delta)$ для нормированного числа пар точек рассматриваемого объекта, расстояние между которыми не превосходит δ :

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \theta(\delta - |x_i - x_j|), \quad (4)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда для всех пар значений i и j . Величина суммы зависит от δ , причем, если эта зависимость имеет степенной вид

$$C(\delta) \approx \delta^{D_C}, \quad (5)$$

то исследуемое множество фрактально.

2. Результаты численного анализа

Широко используемые известные характеристики сигнала дисперсия и база определяемые формулами

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6)$$

$$B = 2\tau \cdot \Delta w, \quad (7)$$

где $\Delta w = \frac{1}{E_{\max}} \int_0^\infty E(w) dw$, $\tau = \frac{1}{R(0)} \int_0^\infty R(\tau) d\tau$, $R(\tau) = \int_0^\infty x(t-\tau) \cdot x(t) dt$, не учитывают

информацию о фазе, форме колебаний, т.е. они являются менее информативными, чем эволюционный параметр порядка. Этот вывод мы проверили на разных хаотических сигналах. Были выбраны наиболее известные, как логистическое, одномерное отображение [6],

$$x_{i+1} = rx_i(1-x_i), \quad (8)$$

где r – управляющий параметр, двумерное отображение Хенона [7],

$$x_{i+1} = 1 - ax_i^2 - by_i, \quad y_{i+1} = x_i, \quad (9)$$

где a и b – управляющие параметры.

Мы предлагаем новое отображение, описывающее хаотическое чередование мелкомасштабных и крупномасштабных осцилляций типа «накопление- выброс», которое наглядно иллюстрирует эффективность введения параметра $K_{x,t}^{p,q}$:

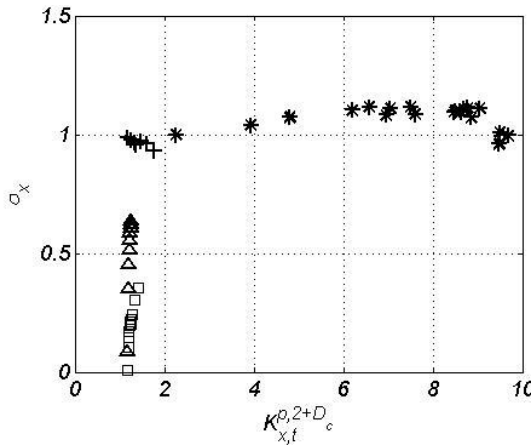
$$x_{i+1} = \left(\frac{1}{c} + \mu_i\right) |x_i|^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \mu_{i+1} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{c} + \mu_i\right) |x_i|^{-\frac{1}{\gamma} - 1}, \quad (10)$$

где γ – дробная часть фрактальной размерности множества значений рассматриваемой физической величины, c – точность наблюдения, μ_i – имеет смысл мультипликатора. С целью применения настоящего метода к анализу нового вида бифуркации «склеивания» мы воспользовались модифицированной системой Лоренца [8,9]

$$\frac{dy}{dt} = R \cdot x - y - x \cdot z, \quad \frac{dx}{dt} = \sigma \cdot (y - x) + A \cdot y \cdot z, \quad \frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z, \quad (11)$$

где σ, A, R, b -параметры.

На рисунках 1 и 2 представлены результаты обработки сигналов вышеперечисленных динамических систем. Дисперсия и база сигнала почти не меняются, при $K_{x,t}^{p,2+D_c} \geq 5$, т.е. эволюционный параметр более чувствительный. Это видно также из рисунка 3.



(□) – Логистическое отображение при $r=[3:0.1:4]$, (Δ) – отображение Хенона при $b=0.1, a=[0.61:0.05:1.3]$, (*) - отображение «накопление - выброс» при $c=2.806, \gamma=[1:0.01:2]$, (+) – модифицированная система Лоренца при $R=3, b=8/3, \sigma=10, A=[10.5:0.5:16]$

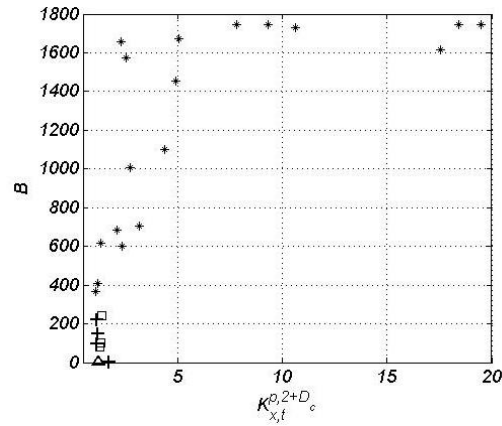


Рисунок 1 - Взаимосвязь дисперсии с эволюционным параметром порядка

Рисунок 2 – Зависимость базы от эволюционного параметра порядка

Бифуркационная диаграмма, построенная по формуле (8) по стандартному методу приведена на рисунке 4. При изменении параметра r отображения Фейгенбаума соответствующая система меняет свои режимы эволюции с каскадом удвоений периодов, приводящих к хаосу.

Используя реализации (8) для различных значений r мы построили бифуркационную диаграмму через эволюционный параметр порядка, определенный по формуле (3) при $p = q = 2$. В результате мы получили бифуркационную диаграмму, показанную на рисунке 5. На рисунке 5 видны только удвоение и утроение периода. Чтобы увеличить разрешающую способность, то есть увидеть остальные режимы, использовали формулу (3) $q = 2 + D_c$ и заново построили бифуркационную диаграмму, которая показана на рисунке 6.

Из рисунка 6 отчетливо видны все циклы и переход к хаосу. При этом все периодические реализации собираются в левой части, а хаотические - в правой части бифуркационной диаграммы. Появляется возможность классификации разных бифуркаций в динамических системах с неизвестными параметрами.

Отображение Хенона также демонстрирует переход к хаотическому поведению через последовательность бифуркаций удвоения периода, как логистическое отображение. Из уравнения (9) меняя параметр a получаем бифуркационную диаграмму (рисунок 7).

При вариации параметра a в системе (9) может наблюдаться явление мультистабильности, т.е. сосуществование двух и более различных динамических режимов, например, хаотического аттрактора и цикла периода n или 2-х различных по структуре хаотических множеств.

Бифуркационная диаграмма на рисунке 8, построенная по новому методу, содержит все режимы бифуркационной диаграммы, полученные через известный параметр a (рисунок 7). Наглядно видно преимущество предлагаемого нашего метода (рисунок 8). При некоторых значениях $K_{x,t}^{p,q}$ отсутствуют значения $X(i+1)$. Это означает, что отсутствуют некоторые бифуркационные циклы из возможного набора S1 (предельный цикл), S2 (бифуркация удвоения периода), S3 (бифуркация утроения периода) и их образований.

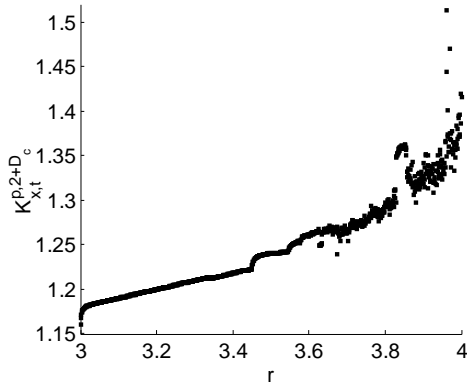


Рисунок 3 - Нелинейная зависимость параметра порядка от параметра r уравнения (8), $r=3:0.001:4$

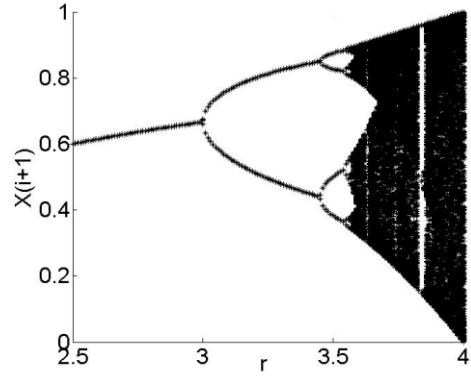


Рисунок 4. Бифуркационная диаграмма логистического отображения

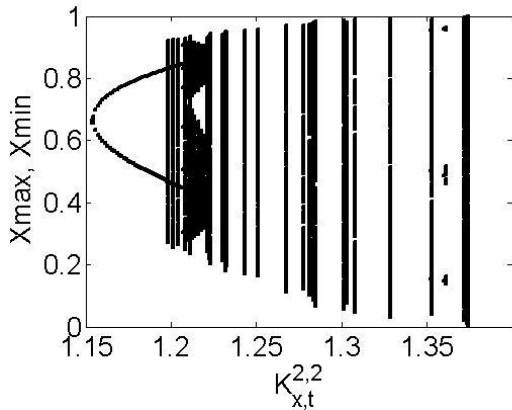


Рисунок 5 - Бифуркационная диаграмма логистического отображения, построенная по формуле (2) при $r=2.5:0.001:4$

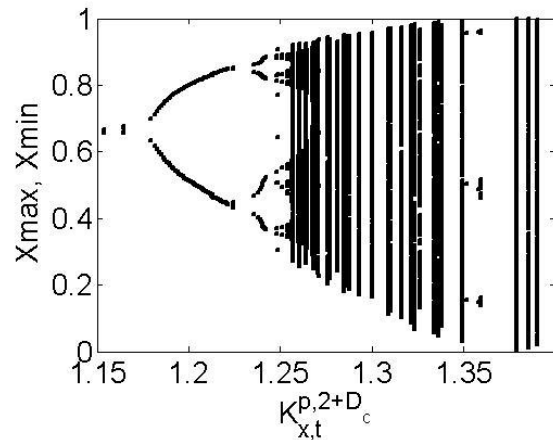


Рисунок 6 - Бифуркационная диаграмма логистического отображения, построенная по эволюционному параметру порядка при $q=2+D_c$; $p=q/(q-1)$; $r=2.5:0.001:4$

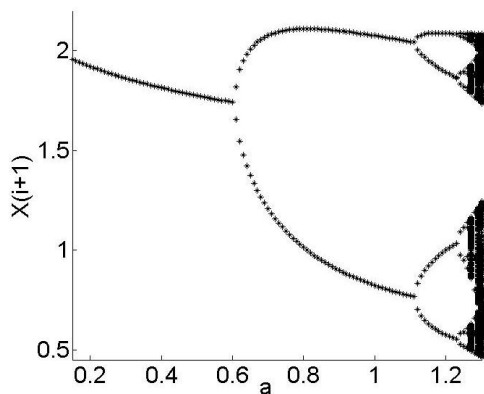


Рисунок 7- Бифуркационная диаграмма отображения Хенона при $a=0.15:0.01:1.3$, $b=0.1$

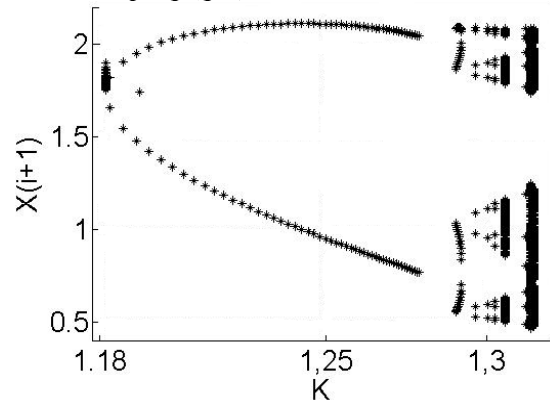


Рисунок 8 - Бифуркационные режимы отображения Хенона построенная по эволюционному параметру порядка при $a=0.61:0.001:1.3$, $b=0.1$, $K \equiv K_{x,t}^{p,q+D_c}$

Этот метод позволяет исследовать и более сложные бифуркационные явления. Бифуркационные режимы хаотических и ассиметрично перемежаемых процессов отличается от известных вышеперечисленных моделей. Для этой цели построена бифуркационная диаграмма отображения «накопление - выброс», реализация которого приведена на рисунке 9. Данное отображение реализует ассиметричную перемежаемость с сильными всплесками, т.е. сигналы типа «накопление - выброс».

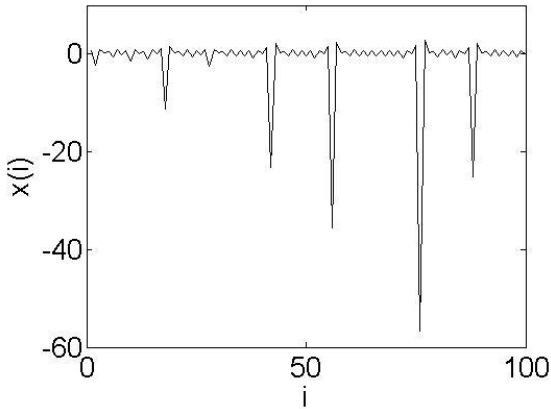


Рисунок 9 - Реализация отображения «накопление - выброс» (формула (10)) при $c=2,806, \gamma=3.33$

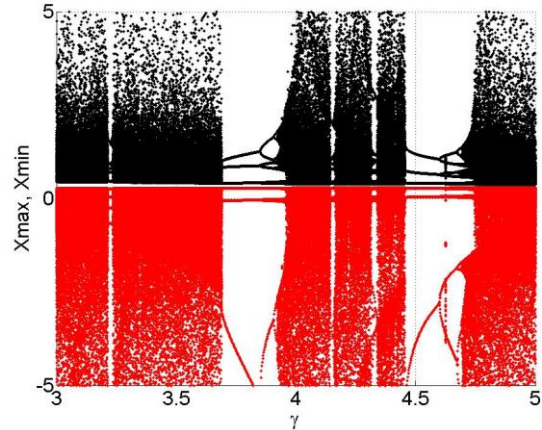


Рисунок 10 - Бифуркационная диаграмма отображения «накопление выброс» при $c=2,806$.

Бифуркационная диаграмма, полученная по формулам (10) и показанная на рисунке 10 описывает реализации с перемежаемой структурой. Отображение накопления - выброса реализует особый тип перемежаемости – односторонние хаотические выбросы большой амплитуды на фоне мелкомасштабных осцилляций. Поэтому на рисунке 10 показан только фрагмент бифуркационной диаграммы для $-5 < x < 5$.

В области периодических колебаний эволюционный параметр порядка имеет наименьшее значение. Максимальное его значение соответствует колебаниям взрывного характера (рисунок 11).

В области периодических колебаний видны типичные удвоения периода, т. е. сценарии перехода Фейгенбаума (рисунок 10). При этом также наблюдается восстановление порядка после возникновения хаоса. Присутствуют узкие интервалы порядка, которые по структуре идентичны с широкими интервалами области порядка. Если увеличить амплитуду мелкомасштабных колебаний, то картина не меняет структуру. Это показывает, что реализация имеет фрактальную структуру.

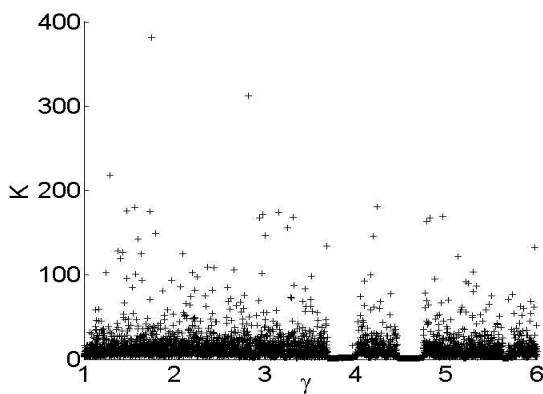


Рисунок 11 - Зависимость эволюционного параметра порядка от γ при $c=2,806$,

$$K \equiv K_{x,t}^{p,q+D_c}$$

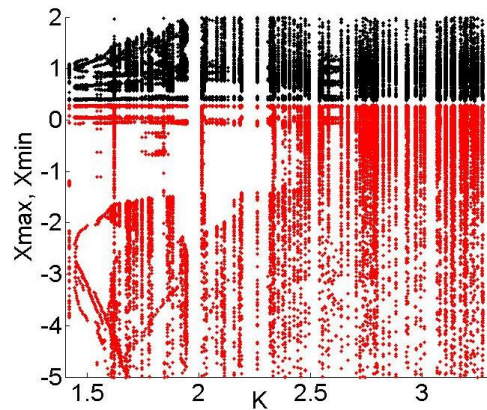


Рисунок 12 - Бифуркационная диаграмма отображения перемежаемости построенная по эволюционному параметру порядка при $q=2+D_c$; $p=q/(q-1); c=2,806, \gamma=3.5:0.01:5, K \equiv K_{x,t}^{p,q}$

Бифуркационная диаграмма (рисунок 12), построенная по новой методике (через $K_{x,t}^{p,q+D_c}$) имеет различие от рисунка 10. Все устойчивые режимы локализованы в левой части бифуркационной диаграммы. Хаотическим структурам соответствуют высокие значения $K_{x,t}^{p,q+D_c}$. Теперь бифуркационная картина становится более простой: качественно различные режимы группируются. Видны типичные картины удвоения периода по Фейгенбауму (цикл S_2). Некоторые ветви наклонных

линий бифуркации удвоения не реализованы, процесс имеет асимметрию. Меняя параметр c при постоянном значении γ мы получим аналогичную бифуркационную картину.

Мы применим наш новый метод построения бифуркационной диаграммы через эволюционный параметр порядка $K_{x,t}^{p,q}$ к исследованию особого типа гомоклинической бифуркации (бифуркации «склеивания» или «gluing bifurcation»). Для этой цели воспользуемся системой дифференциальных уравнений [8].

$$\frac{dx}{dt} = \sigma \cdot (y - x) + A \cdot y \cdot z, \quad \frac{dy}{dt} = R \cdot x - y - x \cdot z, \quad \frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z, \quad (12)$$

где σ, A, R, b -параметры. Выбирая в качестве управляющего параметра A была построена бифуркационная диаграмма по стандартному методу (рисунок 13). Видно, что есть точки «склеивания», которые являются также устойчивыми точками вблизи $x=0$. При этом верхние и нижние бифуркационные диаграммы соответствуют сценарию перехода Фейгенбаума.

На рисунке 14 приведена бифуркационная диаграмма системы (12) по нашему методу. Основное отличие рисунка 14 от рисунка 13 в том, что циклы группируются отдельно и значения $K_{x,t}^{p,q}$ отсутствуют в некоторых полосах, так как согласно рисунку 11 зависимость $K_{x,t}^{p,q}(\gamma)$ является скачкообразным.

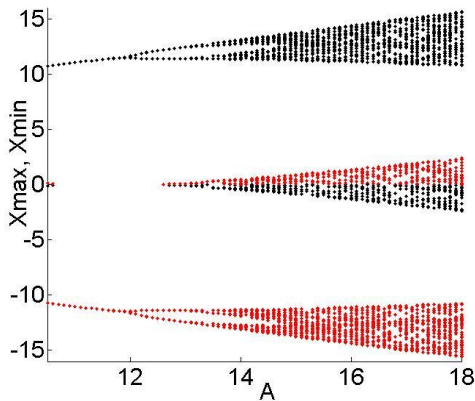


Рисунок 13 - Гомоклиническая бифуркация при $\sigma=10, b=2.67, R=3 A= 10,5: 0,01: 18$.

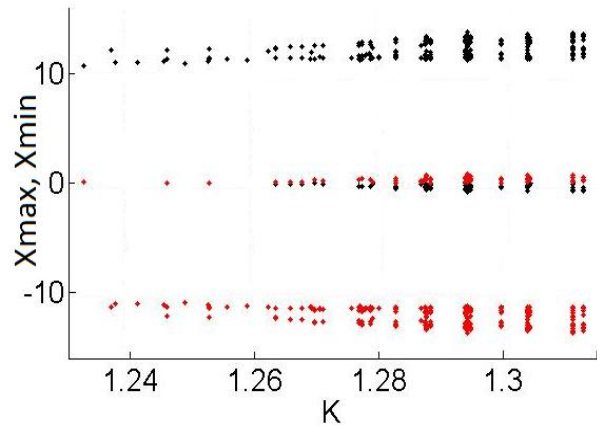


Рисунок 14 - Гомоклиническая бифуркация в координатах (X_{\max}, X_{\min}, K) при $q=2+D_C; p=q/(q-1); \sigma=10, b=2.67, R=3 A= 10,5: 0,01: 18, K \equiv K_{x,t}^{p,q+D_C}$.

Заключение

В настоящей работе мы по новому методу построили бифуркационные диаграммы динамических систем: логистического отображения, отображения Хенона, отображения для колебаний типа «накопление - выброс» и для систем с гомоклиническими бифуркациями.

Эти диаграммы мы сопоставили с диаграммами, построенными через параметры уравнений динамической системы. Основным достоинством нашего метода является то, что можно исследовать бифуркационные явления по реализациям, не зная исходные уравнения.

Поэтому данный метод можно применять к анализу различных сложных явлений. Предлагаемый эволюционный параметр порядка является более точным, чем соответствующие известные характеристики хаоса.

Литература

1. Jibin Li, Fengjuan Chen, A. S. Tchakoutio-Nguetcho, Bifurcations and Exact Solutions in a Model of Hydrogen-Bonded-Chains//International Journal of Bifurcation and Chaos Vol. 25, No. 04, 1550062 (2015)
2. J. Kengne, Coexistence of Chaos with Hyperchaos, Period-3 Doubling Bifurcation, and Transient Chaos in the Hyperchaotic Oscillator with Gyrotors//International Journal of Bifurcation and Chaos Vol. 25, No. 04, 1550052 (2015)

3. Desheng Shang, Yaoming Zhang, Bifurcations in a Cubic System with a Degenerate Saddle Point//International Journal of Bifurcation and Chaos Vol. 24, No. 11, 1450144 (2014)
4. Hernán Castro, Bifurcation analysis of a singular nonlinear Sturm–Liouville equation//Communications in Contemporary Mathematics Vol. 16, No. 05, 1450012 (2014)
5. Жанабаев З. Ж., Обобщенная метрическая характеристика динамического хаоса //Материалы VIII Межд. школы "Хаотические автоколебания и образование структур" – Саратов, 2007. с. 67-68
6. Steven Henry Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering// Westview Press, 1994. 498 p.
7. M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor//Communications in Mathematical Physics, 1976, V. 50 (1), pp. 69–77.
8. D.V.Lyubimov, M.A. Zaks., Two mechanisms of the transition to chaos in finite – dimensional model of convection., Physica 9D (1983) 52-64.
9. Akhtanov S. N., Zhanabaev Z. Zh., Zaks M. A., Sequences of gluing bifurcations in an analog electronic circuit // Physics Letters A.-2013.-Vol. 377.-P.1621–1626.

ТРЕХМЕРНОЕ ФРАКТАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОЧАСТИЦ ZrO_2 В ПОЛИМЕРНОЙ МАТРИЦЕ

А.Г. Колмаков, И.Б.Опарина, М.А.Севостьянов
Институт металлургии и материаловедения РАН им. А.А.Байкова,
Москва, Россия, kolmakov@imet.ac.ru

В качестве материала для остекления мобильной техники иногда используется полиметилметакрилат (ПММА), который представляет собой аморфный термопластик с высокой степенью прозрачности (светопропускание 92 %), стойкостью к слабым кислотам, растворам щелочей и солей, спиртам, воде, маслам, жирам, топливу, стойкостью к атмосферному воздействию и УФ-излучению. ПММА характеризуется высокими электроизоляционными свойствами, повышенной (для пластика) прочностью при растяжении (до 80 МПа), и имеет рабочий диапазон температур от $-40^{\circ}C$ до $+90^{\circ}C$ [1 - 3].

Для более широкого спектра применений некоторые свойства ПММА нуждаются в улучшении. Так, ПММА является легко возгораемым материалом и склонен к поверхностному растрескиванию под действием механических напряжений. Как и все пластики, он имеет меньшее сопротивление поверхностному износу по сравнению с силикатными стеклами и прозрачной керамикой и теряет свои электроизоляционные свойства при высоких частотах.

Анализ физико-механических свойств полимерных стекол [4 - 7] свидетельствует, что перспективным направлением улучшения свойств и расширения диапазона применения ПММА может стать создание композиционных материалов на его основе.

Материалы и методики исследований

В настоящей работе представлен новый синтезированный композит на основе ПММА с армирующими сферическими наноструктурными микрочастицами ZrO_2 и проведено исследование некоторых его свойств в сравнении с ПММА без наполнителя.

Сферические частицы ZrO_2 диаметром $0,3 \div 2$ мкм, распределенные в прозрачной матрице ПММА, могут повысить его износостойкость, электроизоляционные и теплоизоляционные свойства, стойкость к возгоранию, снизить поверхностную повреждаемость и, в определенной мере, способствовать рассеиванию лазерного излучения.

Для синтеза композиционного материала в качестве матрицы использовался полиметилметакрилат, полученный путем полимеризации жидкого мономера. Наполнителем служил порошок двуокиси циркония (стабилизированный церием), который был синтезирован в ИМЕТ РАН по новой разработанной технологии получения оксидных неагломерированных керамических порошков на основе ультразвукового пиролиза [8 - 9].

Контрольные лабораторные образцы ПММА без наполнителя готовили путем блочной полимеризации метилметакрилата. Также в качестве контрольных образцов использовали промышленный листовой ПММА марки СО-120.

Исследования структуры образцов выполнялись на инвертированном металлографическом микроскопе Carl Zeiss Axiovert 40 в поляризованном свете. Светопропускание оценивали качественно с использованием лазера красного цвета.

Механические испытания образцов в виде цилиндров проведены на универсальной испытательной машине ИНСТРОН 3382 методом сжатия со скоростью нагружения 0,5 мм/мин. Исследовали образцы полимеризованного ПММА и ПММА с наполнителем 0,1 и 5 мас.% порошка ZrO_2 .

Результаты и их обсуждение

Образцы из ПММА представляют собой однородный прозрачный материал. Композит с 0,1 мас. % ZrO_2 , несмотря на использование непрозрачного наполнителя, также обладает достаточно хорошей прозрачностью. На рис. 1 (а) показана поверхность образца. На рис. 1 (б) поверхность фокусировки сдвинута вглубь образца для возможности наблюдения трехмерного распределения частиц ZrO_2 . Порошок ZrO_2 в исходном состоянии не слипается и не агломерируется [8-9]. Образцы композита с 5 мас. % ZrO_2 отличались малой прозрачностью и не позволяли использовать для исследований световую микроскопию.

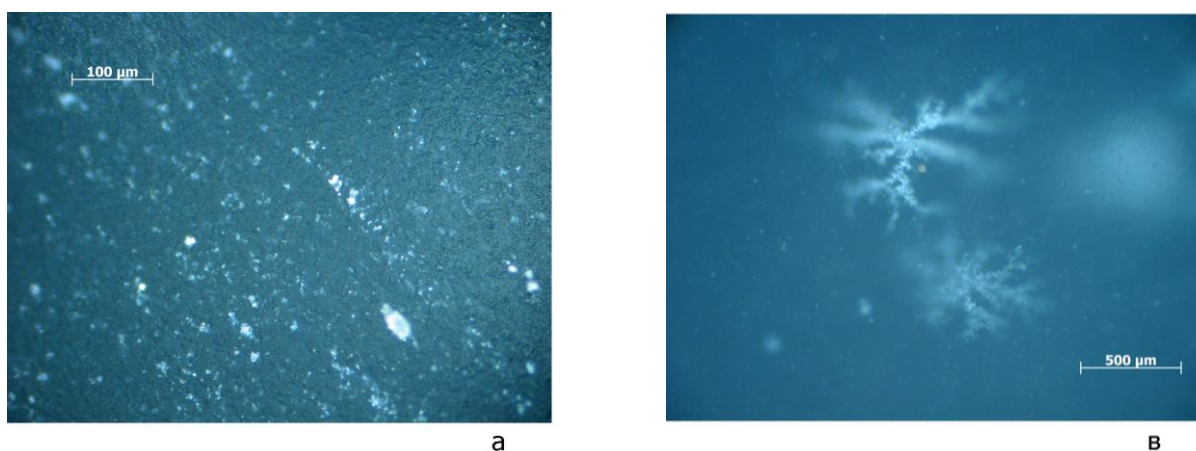


Рис. 1. Микроструктура композита на основе ПММА с 0,1 % ZrO_2

Наблюдаемые частицы ZrO_2 (рис. 1, б) упорядоченным образом выстроены в трехмерные кластерообразные фрактальные структуры в виде дендритов. Размер таких фрактальных образований в среднем составляет 500 мкм. Это свидетельствует о том, что в ходе полимеризации ПММА с ZrO_2 проходили нелинейные процессы их самоорганизации, которые привели к появлению сложной упорядоченной фрактальной структуры частиц в матрице ПММА.

Подобные кластерные структуры наблюдали ранее при образовании фигур Лихтенберга при электрическом разряде [10] или «вязких языков» (кластеров) на границе раздела двух достаточно хорошо смешивающихся друг с другом жидкостей (например, воды и желатина [12], парафинов с красителем и без красителя [13]). Появление таких структур относится к проявлению мультифрактальных явлений и, как правило, связывается с явлением ограниченной диффузией агрегации [13]. В соответствии с этим подходом отдельные молекулы или частицы после некоторых случайных блужданий «оседают» на агрегате, порождая описанные выше случайные фракталы [12]. Блуждающая молекула или частица оседает, как правило, вблизи выступа фрактала, а не в глубине впадин между ветками дендрита, так как вероятность проникновения в глубокий вырез очень мала. Таким образом, вероятность роста у дендритных фрактальных образований в разных участках разная: у выступов она высокая, а в углублениях низкая [13]. В случае «вязких языков» фактором, контролирующим рост стохастического фрактального образования, является смешиваемость. При малой смешиваемости (вода и раствор сахара, вода и нефть, глицерин и нефть) языки границы раздела гораздо шире, потому что поверхностное натяжение между двумя жидкостями препятствует образованию выраженных дендритов (выступов большой кривизны) [11]. Для фигур Лихтенберга контролирующим фактором является электрический потенциал – «рост» отпечатка разряда происходит преимущественно в направлении наибольшего градиента потенциала, а глубокие впадины хорошо заэкранированы и, поэтому, там нет роста или он очень слабый [11, 14]. В нашем случае контролирующим фактором ограниченной диффузией агрегации, по аналогии со смешиваемостью и электрическим потенциалом, можно считать смачиваемость частиц ZrO_2 жидким

ПММА в процессе полимеризации. Технология получения композита с использованием фронтальной полимеризацией ПММА имеет ярко выраженный направленный характер, что в условиях взаимодействия полимеризующейся системы с внешней средой, должно приводить к формированию устойчивых регулярных стохастически самоподобных структур с возникновением упорядоченности [15]. Для обозначения этого явления обычно используют термин "самоорганизация" [16, 17].

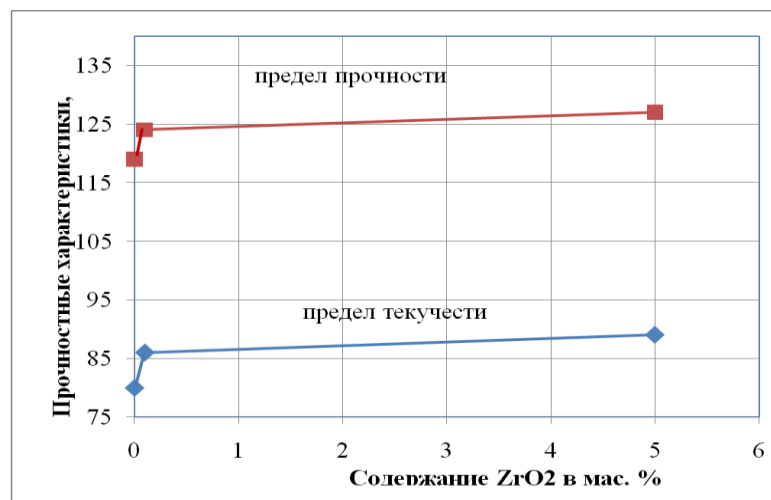


Рис. 2. Характер изменения прочностных характеристик в зависимости от количества наполнителя ZrO₂.

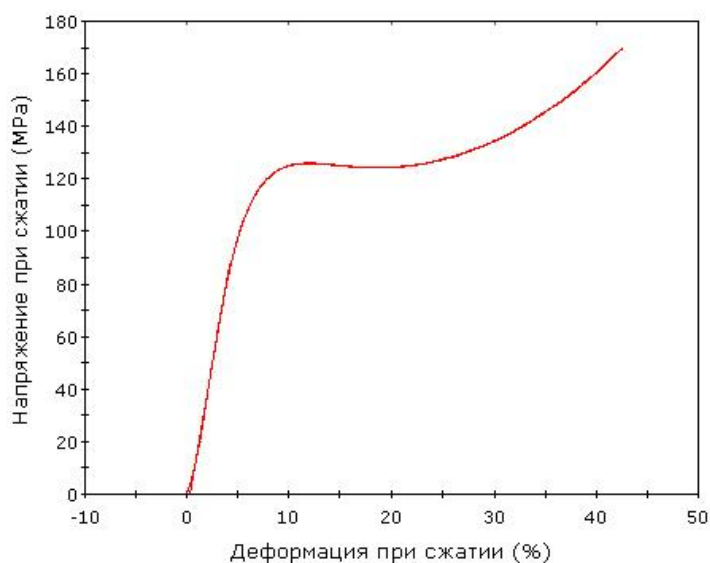


Рис. 3. Кривая деформации образца ПММА с 0,1 % ZrO₂ в условиях испытания на статическое сжатие.

Полученные в результате испытаний образцов на сжатие механические свойства приведены на рис. 2, а вид типичной кривой сжатия показан на рис. 3. Прочность матрицы ПММА составила в среднем 119 МПа. Незначительная добавка ZrO₂ (0,1 мас. %) привела к повышению предела прочности в среднем на 3 %, а 5 мас. % ZrO₂ - к 5 % росту. Аналогичным образом изменился и предел текучести. Вид кривой деформации в зависимости от содержания ZrO₂ не изменялся. На рис. 2 видно, что заметное улучшение механических свойств наблюдается при самых малых дозах ZrO₂ (до 0,5 мас. %). Дальнейшее увеличение содержания наполнителя не приводит к существенному изменению прочностных показателей.

Выводы.

Получен новый композит на основе ПММА с армирующими сферическими наноструктурными микрочастицами ZrO_2 , который может быть использован для замены ПММА в деталях остекления различной техники, например, в самолетах и вертолетах, с целью защиты от абразивного воздействия песчано-гравийной пыли, термического, аэродинамического нагрева или для снижения воздействия яркого светового излучения (в том числе лазерного) на человека.

Оптимальное содержание аэрозольных порошков ZrO_2 в ПММА-матрице составляет 0,1 мас. %. Такие композиты при практически полном сохранении прозрачности для человеческого глаза по сравнению с обычным ПММА обладают повышенными прочностными характеристиками (7 - 11 %).

Обнаружено, что при полимеризации ПММА с добавкой порошков ZrO_2 протекают процессы структурной самоорганизации, приводящей к получению композита со сложной структурой в виде трехмерных дендритных фрактальных образований.

Литература

1. ГОСТ 10667-90. Стекло органическое листовое. Технические условия.
2. Гудимов М.М., Перов Б.В., Органическое стекло, М: Химия, 1981, 216 с.
3. Стекло органическое авиационное ориентированное марки АО-120А. Технические условия ТУ 2216-005-25558743-2001.
4. Arzhakov M.S., Arzhakov S.A., Chernavin V.A., A New Family of Technologies for Preparation of Modern Polymeric Materials Based on Polymer Glasses // Russian Polymer News, 2001. V.6. №3. P.41-44.
5. Arzhakov M.S., Arzhakov S.A., Chernavin V.A., Some Approaches to the Preparation of Orientation-Strengthened and Shrinkproof Polymeric Materials // New Polymeric Mater., 1996. V.5. №1. P.43-49.
6. Аржаков М.С., Луковкин Г.М., Аржаков С.А., Салько А.Е., Универсальный характер физико-механического поведения полимерных стекол и их обобщенная модель // Деформация и разрушение материалов, 2005. № 7. С.2-12.
7. Опарина И.Б., Колмаков А.Г., Луковкин Г.М., Аржаков М.С., Жирнов А.Е., Севастьянов М.А., Баранов Е.Е., Антипов В.И., Виноградов Л.В., Быков П.А. Новый композиционный материал с фрактальной структурой на основе полимерной матрицы с наноструктурными микрочастицами ZrO_2 // Материаловедение, 2011. №8. С. 51-56.
8. Галахов А. В., Виноградов Л. В., Антипов В. И., Колмаков А. Г., Баранов Е. Е., Лазарев Э. М., Гордеев А. С., Аладьев Н. А., Мухина Ю. Э. Наноструктурированные аэрозольные порошки алюмоиттриевого граната для лазерной поликристаллической керамики // Перспективные материалы, 2009. №3. С.33-37.
9. Антипов В.И., Галахов А.В., Виноградов Л.В., Колмаков А.Г., Баранов Е.Е., Лазарев Э.М., Трансформационно-упрочненная $ZrO_2 - CeO_2$ керамика на основе порошков синтезированных методом ультразвукового распылительного пиролиза// Перспективные материалы, 2011. №1. С.1-6.
10. Встовский Г.В., Колмаков А.Г., Бунин И.Ж. Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов., Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 116 с.
11. Niemeyer L., Pietronero L., Wiesmann H.J. Fractal dimension of dielectric breakdown // Phys. Rev. Lett., 1984. V.52. P.1033-1040.
12. Meakin P., Coniglio A., Stanley H.E., Witten T.A. Scaling properties for the surface of fractal and nonfractal objects: An infinite hierarchy of critical exponents // Phys. Rev., 1986. V. A34. P.3325-3340.
13. Колмаков А.Г. Использование концепций системного подхода при изучении деформации и разрушения металлических материалов // Нелинейный мир, 2006. Т.4. №3. С.126-136.
14. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise. – New York: W.H. Freeman and Co, 1992, 429 p.
15. Witten T.A., Sander L.M. Diffusion-limited aggregation: A kinetic critical phenomenon // Phys. Rev. Lett., 1983. V.47. P.1400-1403.
16. Haken H., Advanced Synergetics, Berlin: Springer Verlag, 1993, 356 p.
17. Nicolis J.S. and Prigogine I., Exploring Complexity. An Introduction., New York: W.H. Freeman & Co., 1989, 328 p.

УДК 621.891

КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ СМАЗОЧНЫХ СЛОЕВ В МОДЕЛЬНЫХ ТРИБОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В.И. Кубич

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье, Украина,
reibung1@mail.ru

Постановка проблемы. Недостаточная изученность механизмов генерации и регенерации мономолекулярных слоев смазочного материала с учетом влияния поверхностной активности материалов трибологических систем в условиях отсутствия подпитки их компонентами смазочного материала определяет необходимость проведения трибологических исследований в данном направлении. В этой связи является значимой разработка критериев оценки функциональности смазочных слоев в условиях «пленочного голодания» и установление закономерностей их изменения от совокупности параметров динамического нагружения. Оценке поведения смазочных слоев между поверхностями материалов с различным химическим составом и механическими свойствами посвящены работы [1-3], в которых установлена временная неоднозначность изменения коэффициента граничного трения. Исходя из полученных результатов, предлагается ввести понятие «удельное время постоянства минимального коэффициента трения» и использовать его в качестве названия критерия для оценки функциональности смазочных слоев [4]. Безусловно, этот критерий будет зависеть от большого количества параметров факторов влияния. Так, в работе [3] оценена функциональность смазочных слоев в модельном трибосопряжении «неподвижная колодка - подвижный диск». При этом моделировалось изменение трибологического состояния трибосопряжения «вал-втулка» узла трения – подшипник скольжения вала агрегата турбонаддува двигателя внутреннего сгорания. Триботехнические испытания проводились на машине трения СМЦ-2 по схеме трения «подвижный ролик-колодка». При этом анализировался характер изменения коэффициента трения по времени испытаний в условиях ступенчатого нагружения колодки без подачи в зону трения смазочного материала. Предварительно рабочие поверхности ролика и колодки прирабатывались при постоянной частоте вращения ролика и ступенчатом нагружении колодки. При этом из перечня экспериментальных материалов сплавы графитизированной стали с содержанием углерода 1,78%, 1,21%, 3,1%, и меди 3,19%, 3,95%, 1,18% соответственно, а так же бронза БрОЦС 4-4-4, латунь Л63 при проявлении антифрикционных свойств в трибологической системе с сталью 45ХН2МФА в смазочной среде моторного масла SAE 15W40 Lukoil-Super обуславливают определенную долговечность граничного трения с минимальными значениями трения на протяжении периодов времени.

Однако, параметры влияния на функциональность смазочных слоев в рассматриваемых условиях по признакам проявления, значимости и независимости, позволяющие проводить их прогнозную оценку, не оценивались. Последнее возможно при выполнении оценки значений коэффициентов факторов, в виде которых представляются члены полиномов определенных порядков при математическом описании многофакторного влияния аргументов на значения функции отклика при установлении регрессионной зависимости.

Целью работы является определение вида математического выражения, устанавливающего функциональную связь между удельным временем постоянства минимального коэффициента трения и комплексными аргументами многофакторного пространства, воспроизводящего трибологическое состояние исследуемых смазочных слоев.

Методы исследований. В соответствии с предложенными и рассмотренными ранее методиками [5-7] предлагается зависимость удельного времени постоянства минимального коэффициента трения от рассматриваемых параметров представить в следующем виде:

$$\frac{t}{\mu_{\min}} = A P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}, \quad (1)$$

где A - постоянный коэффициент, учитывающий влияние неучтенных факторов;

$(P_1^{\alpha_1} - P_k^{\alpha_k})$ - безразмерные комплексы, составленные из параметров влияния;

$(\alpha_1 - \alpha_k)$ - коэффициенты, определяемые экспериментальным путем;

k - количество комплексов.

В виду сложности комплексного учета и описания характера протекания взаимосвязанных механохимических, адгезионно-когезионных, термодинамических, гидродинамических, электрохимических процессов при установлении закономерностей изменения трибологического состояния смазочных слоев необходимо ввести некоторые ограничения. И соответственно, рассматривать изменения трибологического состояния исследуемых трибосопряжений определив и выделив более значимый, по мнению исследователя, процесс. На данном этапе исследований принято считать следующее. Сила трения, возникающая при плоском контакте упруго-деформируемых поверхностей образцов в пределах контурных площадок взаимодействия, вызывает тангенциальные напряжения. Напряжения при скоростном нагружении, приводят к деформациям разрыва связей между молекулами смазочного материала. Причем, могут иметь место как разрывы, внутри его сформировавшейся структуры при его приработке, так и разрывы связей с активными центрами материалов образцов. Ослабление рассмотренных связей, несомненно, будет отражаться на динамике изменения коэффициента трения. А значит и на функциональности смазочных слоев.

На данном этапе исследований в качестве параметров, оказывающих влияние на функциональность формирующихся на поверхностях трения смазочных слоев, рассматриваются такие:

- нормальная нагрузка в зоне трения N , Н;
- твердость материала образцов HRB ;
- модуль упругости материала образцов E , ГПа;
- частота вращения диска n , мин⁻¹;
- динамическая вязкость масла η_d , Па·с;
- площадь трения колодки $S_{трк}$, м²;
- коэффициент поверхностного натяжения масла σ , Н/м;
- скорость сближения поверхностей v_c через смазочные слои, мкм/с;

Рассматривая комплексы $(P_1^{\alpha_1} - P_k^{\alpha_k})$, как совокупность объединенных параметров исследуемого процесса, и выразив каждый комплекс обобщенной переменной ($x_i = P_i$), выражение (1) примет вид:

$$\frac{t}{\mu_{\min}} = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} = A \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}, \quad (2)$$

где x_i – независимые безразмерные обобщенные параметры (переменные), которые используются в качестве управляемых факторов.

Приведенное уравнение (2) представляет собой основу для определения математического выражения в виде регрессионной зависимости.

Результаты исследований и их обсуждение. В соответствии с первой теоремой подобия предлагается рассматриваемые параметры сгруппировать и представить в виде трех безразмерных обобщенных комплексов.

Первый комплекс приведен в выражении (3).

$$x_1 = \frac{N}{S_{трк} \eta_d n} \quad (3)$$

Комплекс x_1 отражает долю удельной нормальной силы, приходящейся на силу сопротивления смазочных слоев сдвиговым деформациям, приводящим к нарушениям их работоспособного состояния за время скоростно-силового нагружения поверхностей модельного трибосопряжения «ролик-колодка» (в данном случае частота вращения и нагрузка являются взаимосвязанными параметрами). Исходя из приведенного составленный комплекс обуславливает тангенциальное воздействие на смазочные слои.

Для многих материалов установлена корреляционная связь между модулями объемной деформации и сдвига с одной стороны, и с твердостью с другой [8]. В рассматриваемых условиях триботехнических испытаний, несомненно, при пленочном голодании будет иметь место фрагментное проявление эластогидродинамического режима смазки. Таким образом, для оценки влияния механических свойств материала на поведение смазочных слоев предлагается составить второй комплекс x_2 в следующем виде:

$$x_2 = \frac{E_k E_p (HRB_p + HRB_k)}{(E_k + E_p) HRB_p HRB_k} \quad (4)$$

Однако, с учетом корреляционной связи между физическими величинами для упрощения расчетов предлагается использовать для материалов не по две физические величины, а по одной. При этом суть величины численной меры не изменится. Например, выражение (4) можно представить в следующем виде:

$$x_2 = \frac{E_k (HRB_p + HRB_k)}{(E_k + E_p) HRB_p}$$

Комплекс x_2 предлагается рассматривать как меру жесткости взаимодействия смазочных слоев между собой, что обусловлено упруго-пластическим деформированием фрагментов поверхностей материалов разной твердости, и приводит к нарушению их функциональности.

При изменении нормальной нагрузки в зоне трения на интенсивность сближения поверхностей будет оказывать определенное влияние послынная податливость упорядоченных структур из компонентов смазочного материала. Для оценки такого влияния предлагается использовать третий комплекс x_3 - скорость уменьшения толщины смазочного слоя v_c между поверхностями элементов трибосопряжения под действием нормальной нагрузки в условиях упругого деформирования его градиентных приповерхностных частей за один оборот при тепловых состояниях контакта. Например, предлагается учитывать тепловые состояния трибологического контакта при температурах 25 °С и 80 °С. Этот комплекс учитывает первоначальное нормальное воздействие на строение сформировавшихся смазочных слоев, обуславливая при этом истечение гидродинамического образования. Такое суждение учитывает:

- нерабочее состояния контакта, в условиях которого может иметь место «пленочное голодание» ввиду запаздывания подачи смазочного материала по отношению к началу движения одного из элементов;
- эксплуатационный режим работы, при котором возможны повторные приводы в движение одного из элементов.

Третий комплекс предлагается представить в следующем виде [4]:

$$x_3 = \frac{v_c \sigma}{Nn} \quad (5)$$

При этом скорость сближения v_c , коэффициент поверхностного натяжения σ для соответствующего смазочного материала, в данном случае для моторного масла, определяется экспериментальным путем. Например, для моторного масла SAE 15W40 Lukoil-Super $\sigma_1=0,0498\pm 0,001$ Н/м, а для моторного масла SAE 5W-40 Special Plus $\sigma_2=0,0465\pm 0,001$ Н/м.

С учетом представленных комплексов, их влияния на функцию отклика – удельное время постоянства минимального коэффициента трения, для определения коэффициентов в выражении (2), предлагается использовать методику планирования факторного эксперимента и определения коэффициентов регрессии уравнения вида [9]. Для этого составляется система алгебраических уравнений по числу неизвестных коэффициентов регрессии (5). В данном случае предлагается для установления обобщенных границ факторного влияния использовать полином первого порядка.

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1 x_2 + b_5 x_1 x_3 + b_6 x_2 x_3 \quad (5)$$

Для выражения (2) коэффициенты $(\alpha_1 - \alpha_k) = (b_1 - b_4)$. В приведенном уравнении, с учетом полученных экспериментальных данных, семь неизвестных. Определить коэффициенты становится возможным, решив систему из семи таких уравнений. При составлении системы уравнений необходимо учитывать, что их вид будет получен с учетом логарифмирования левой и правой частей выражения (2). Тогда для выражения (5) известные значения определяются следующим образом:

$$y = \ln \frac{t}{\mu_{\min}}, \quad b_0 = \ln A, \quad x_1 = \ln \frac{N}{S_{\text{трк}} \eta_d n}, \quad x_2 = \ln \frac{E_k (HRB_k + HRB_p)}{(E_k + E_p) HRB_p},$$

$$x_3 = \ln \frac{v_c \cdot \sigma}{N \cdot n}, \text{ и т.д.}$$

Далее в соответствии с экспериментальными данными вычисляются логарифмы удельного времени постоянства минимального коэффициента трения и численные значения комплексов его определяющих. Для этого из всего факторного пространства выделяются значения функции отклика при вариативных максимальных и минимальных значениях логарифмов комплексов. В целях удобства составляется таблица матрицы планирования эксперимента 2^2 . Для расчета соответствующих уровней комплексных факторов используются значения режимов силового и скоростного нагружения, а также экспериментальные данные. Например, сводные данные по результатам триботехнических испытаний, описанных в работе [3] приведены в табл.1.

Таблица 1 – Сводные данные испытания модельных трибологических систем материалов

№ п/п	Трибологическая система	Значения параметров триботехнических испытаний							
		HRB_p / HRB_k	N=165 Н		N=250 Н		N=350 Н		
			μ_{min}	t, МИН	μ_{min}	t, МИН	μ_{min}	t, МИН	
1	45ХН2МФА -Л63	1,32	0,08	6,5	0,132	0,08	0,2	0,08	
2	45ХН2МФА - ГС (С-1,21%; Cu-3,95)	0,89	0,06	1,0	0,11	0,08	0,1	0,08	
3	45ХН2МФА -АСЧ-2	1,01	0,08	2,0	0,12	0,08	0,2	0,08	
4	45ХН2МФА - ГС (С-1,78%; Cu-3,18)	0,83	0,08	6,5	0,1	0,08	0,15	6,5	
5	45ХН2МФА - ГС (С-1,95%; Cu-1,94)	0,9	0,06	6,5	0,03	0,08	0,15	0,08	
6	45ХН2МФА - БрОЦС 4-4-4	1,18	0,06	6,5	0,12	3	0,18	6	

Для расчета логарифмов удельного времени постоянства минимального коэффициента трения могут быть взяты значения из табл.1. Эти значения выделены жирным шрифтом.

Теоретическая оценка численного значения предложенного критерия при условии обеспечения смазочными слоями нижней границы граничной смазки поверхностей трибосопряжения с $\mu_{min}=0,01$ в течении времени $t=10$ мин составляет $t/\mu_{min}=1000$ условных единиц, соответственно верхней с $\mu_{max}=0,1$ составит 100 условных единиц. Экспериментальные же значения находятся в диапазоне 0,8 до 108. Исходя из приведенного, возможно в последующем определить классы рассматриваемого оценочного критерия для различных трибологических систем материалов.

На основании полученных расчетных данных (решение S_7 ЛАУ - системы семи линейных алгебраических уравнений методом Крамера) определяются численные значения коэффициентов b_0 - b_6 . При выполнении соответствующих преобразований выражение (2) будет представлено в следующем виде:

$$\frac{t}{\mu_{min}} = e^{b_0} \left(\frac{N}{S_{тпк} \cdot \eta \cdot n} \right)^{b_1} \left(\frac{E_k (HRB_p + HRB_k)}{(E_p + E_k) HRB_p} \right)^{b_2} \left(\frac{v_c \cdot \sigma}{N \cdot n} \right)^{b_3} \left(\frac{N}{S_{тпк} \cdot \eta \cdot n} + \frac{E_k (HRB_p + HRB_k)}{(E_p + E_k) HRB_p} \right)^{b_4} \left(\frac{N}{S_{тпк} \cdot \eta \cdot n} + \frac{v_c \cdot \sigma}{N \cdot n} \right)^{b_5} \left(\frac{E_k (HRB_p + HRB_k)}{(E_k + E_p) HRB_p} + \frac{v_c \cdot \sigma}{N \cdot n} \right)^{b_6} \quad (7)$$

Выводы. Предложенные подходы позволили определить вид математического выражения, которое может быть использовано для предварительной прогнозной оценки функциональности смазочных слоев при обозначенном процессе изменения их трибологического состояния. Полученные закономерности могут лечь в основу алгоритма компьютерного моделирования изучаемых трибологических процессов, что представляется как одну из задач, ставящихся в последующих исследованиях.

Литература

1. Кубич В.И. Коэффициент трения триад «45ХН2МФА - Lukoil-Super - АО20-1», «12Х2Н4 - Lukoil-Super - АО20-1» в условиях ступенчатого нагружения /В.И. Кубич// Проблемы тертя та зношування - 2013. №61. - С.37-45.
2. Кубич В.І Поведення смазочних шарів в трибологічній системі «40Х - (І-20А) - 40Х» при гранично-допустимій навантаженні / В.І. Кубич // Проблеми тертя та зношування . - 2014.- №63.- С.10-17
3. Кубіч В.І. Довготривалість граничного мащення в модельних трибологічних системах з експериментальними антифрикційними матеріалами / В.І. Кубіч В.І., В.В. Клімін // Проблеми тертя та зношування. - 2015. - №66 - С.54-63

4. Кубич В.И. Безразмерный комплекс параметров оценки сближения поверхностей модельных трибосопряжений через смазочные слои /В.И. Кубич // «Наука. Технологии. Производство» С.Петербург.- 2015. - №3(7). - С.75-79. - <http://www.stp-union.com> [электронный ресурс]
5. Кубич В.И. Коэффициент трения трибосопряжения «шейка-покрытие-вкладыш» в условиях «пленочного голодания»/ В.И.Кубич // Проблемы трибологии. 2013. - №1(67). - С.51-57
6. Кубич В.И. Износостойкость накладок барабанного тормозного механизма с профильными канавками в условиях циклического торможения / В.И.Кубич // Проблемы тертя та зношування №59. - 2012.- С.36-43
7. Поддубный И.Н. Износостойкость упрочненной фаски клапана и параметры контактного взаимодействия элементов трибосопряжения «фаска клапана - седло» / И.Н. Поддубный, В.И. Кубич, А.Н. Коробочка // Проблемы трибологии. - 2013. - №1(67). - С.127-134
8. Лошак М. Г. Определение твердости сверхтвердых материалов по их упругим характеристикам / М. Г. Лошак, Л. И. Александрова// Породоразрушающий инструмент из сверхтвердых материалов и технология его применения. - Вып.14., 2011. – С.296-298
9. Грушко И.М. Основы научных исследований / И.М. Грушко, В.М. Сиденко - 3-е изд., перераб. и доп. - Харьков: Вища школа, 1983. - 224 с.

УДК 621.382.2:621.3.083

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС В RL-ДИОДНЫХ ЦЕПЯХ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В МЕТРОЛОГИИ

В.Ю.Кучерук¹, И.П.Курытник², Д.Ж.Карабекова³

¹Винницкий национальный технический университет, Винница, Украина

²Университет в Бельско-Бяла и Высшая Школа в Освенциме, Польша

³Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Казахстан

Исследована возможность измерения резистивной физической величины с помощью генератора детерминированного хаоса основе RL-диодной цепи. Рассмотрена обобщенная структура измерительного устройства, использующего генератор детерминированного хаоса. Для выделения полезной составляющей измерительного сигнала предложено использовать амплитудный детектор. Проведено математическое моделирование RL-диодной цепи, которое показало существенное влияние барьерной и диффузионной емкостей диода на возникновение детерминированно-хаотических колебаний в этой цепи. Показано, что ГДХ данного типа имеет достаточно высокую чувствительность выходного напряжения к изменению сопротивления в диапазоне до 250 Ом, что может быть использовано при создании измерительных устройств на его основе.

Усложнение технологических процессов приводит к необходимости определения большого количества параметров и физических величин, при этом значительно возрастает роль измерений. Автоматизация сложных производственных процессов связана с применением различных измерительных преобразователей, обеспечивающих получение оперативной измерительной информации в надлежащем объеме и эффективное управление технологическим процессом. Наиболее распространенными являются параметрические резистивные измерительные преобразователи физических величин (контактного сопротивления, фоторезистивные, электрохимические резистивные, терморезистивные, тензорезистивные).

Во многих из них для обеспечения необходимых для практики метрологических характеристик (разрешающей способности, в частности) необходимо преобразовывать достаточно малые изменения выходного сопротивления. Это в свою очередь приводит к усилению случайных помех на полезный сигнал, в результате чего увеличивается случайная погрешность измерений. Поэтому повышение чувствительности резистивных измерительных преобразователей с одновременным обеспечением низкого уровня случайных шумов является актуальной задачей.

Значительным научным открытием последних десятилетий является открытие детерминированного хаоса в динамических системах [1]. Суть этого открытия заключается в том, что полностью определенная (детерминированная) динамическая система, при отсутствии каких-либо случайных воздействий на нее, начинает вести себя непредсказуемым (хаотическим) образом. Однако

в этой непредсказуемости (хаотичности) при более тщательном рассмотрении удастся выявить ряд закономерностей в поведении системы, отличает данное явление от классических случайных процессов.

Несмотря на хаотичный характер, когда на практике предсказать состояние системы в заданный момент времени можно только статистически, процесс в таких системах существенно отличается от обычного статистического шума. Последний, характеризуется тем, что точки траектории равномерно заполняют определенный объем фазового пространства, а сплошной спектр шума не имеет четко выраженных линий. Фазовые портреты систем с детерминированным хаосом обладают сложной неравномерной пространственной структурой и некоторыми общими свойствами, причем в непрерывном спектре присутствуют явно выраженные гармоники. К фундаментальным свойствам таких систем относится чрезвычайно высокая чувствительность хаотического процесса к изменению внутренних параметров генератора детерминированного хаоса (ГДХ).

Рассмотрим метод измерения физических величин, в основу которого положено использование ГДХ. В его основе лежит использование в качестве измерительной цепи нелинейной электрической схемы в режиме детерминированно-хаотических колебаний. Сенсор измерительной физической величины подключается к схеме ГДХ таким образом, чтобы его исходное значение меняло значение одного из параметров ГДХ. Измерительной информацией в данном методе является реализация хаотического процесса, снимаемая с ГДХ, которая далее поступает на обработку в вычислительный блок [2-4].

Для получения оценки параметра генератора ХК можно использовать любую устойчивую характеристику структуры системы с детерминированным хаосом (амплитуду колебаний по всем переменным фазового пространства, размерность Хаусдорфа, энтропию Колмогорова, показатели Ляпунова, среднее время предсказуемости хаотической системы и т.д.) [4]. Алгоритм определения значения физической величины заключается в получении по снятой хаотичной реализацией числовой оценки выбранной характеристики.

Средство измерения, созданный на базе ГДХ, будет иметь функцию преобразования в виде зависимости характеристики аттрактора ГДХ от измеряемой физической величины (так как она однозначно определяется параметром ГДХ). Основным преимуществом данного метода является возможность построения на его основе средств измерения, более чувствительных по сравнению с существующими. Метод пригоден для измерения любой физической величины, если существует сенсор этой величины с выходным сигналом в виде электрического напряжения или тока, а также параметрические сенсоры, в которых измеряемая физическая величина преобразуется в соответствующее изменение сопротивления, емкости или индуктивности.

На рис. 1 представлена обобщенная структурная схема измерительного устройства на базе ГДХ, состоящая из двух частей: ГДХ, к которому подключен сенсор измеряемой физической величины, и вычислительного устройства, в котором реализованы алгоритмы определения параметра ГДХ.



Рис. 1 – Обобщенная структурная схема измерительного устройства на основе ГДХ

Сенсор измеряемой физической величины подключается к измерительной схеме ГДХ таким образом, чтобы его выходная величина меняла один из параметров ГДХ. Из ГДХ хаотический сигнал поступает на вход вычислительного устройства, где определяется отклонение определенного параметра ГДХ и на основе заложенной градуированной характеристики вычисляется значение измеряемой физической величины.

При выборе практической реализации ГДХ нужно учесть ряд обстоятельств: простота реализации, наличие диапазона изменения параметров, которые обеспечивают хаотический режим, наличие математической модели, которая позволяет достаточно просто моделировать хаотичный процесс.

В качестве дальнейшего объекта исследования выбран ГДХ на основе высокочастотной RL-диодной цепи, приведенный на рис. 2 [5]. Это неавтономный генератор, так как схема, состоящая из линейной RL-цепи, соединена последовательно с диодом D и источником переменного напряжения.

В этой простой системе возникновение нелинейных хаотических колебаний определяется параметрами цепи.

Осуществим анализ причин и условий возникновения хаотических колебаний в RL -диодной цепи [6]. Для этого сначала рассмотрим схему замещения диода [7]. Схема замещения диода в режиме малого сигнала (в наиболее общем случае) представлена на рис. 3. Согласно этой схеме диод представляет собой параллельное соединение нелинейного резистора R_d и двух нелинейных ёмкостей – барьерной C_j и диффузионной C_d . Барьерная ёмкость определяется по формуле

$$C_j = \frac{C_{j0}}{\left(1 - \frac{U}{U_D}\right)^n}, \quad (1)$$

где C_{j0} – барьерная ёмкость при нулевом напряжении диода; U – напряжение диода; U_D – диффузионное напряжение диода; n – технологический коэффициент, лежащий в диапазоне $\left(\frac{1}{3} \dots \frac{2}{3}\right)$.

Диффузионная ёмкость определяется как

$$C_d = \frac{\tau_B I_S}{m U_T} \exp\left(\frac{U}{m U_T}\right), \quad (2)$$

где I_S – тепловой ток диода; τ_B – время жизни неосновных носителей заряда; U – напряжение диода; U_T – тепловое напряжение диода; m – коэффициент эмиссии.

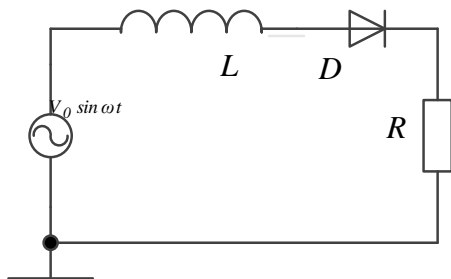


Рис. 2. Схема генератора детерминированно-хаотических колебаний на основе RL -диодной цепи

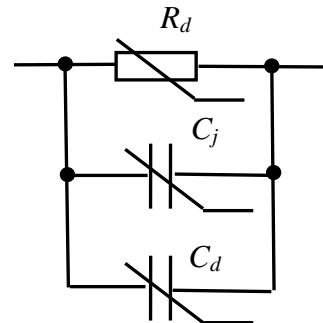


Рис. 3. Схема замещения диода в режиме малого сигнала

Следует отметить, что в режиме прямого напряжения при $U \geq U_D$ барьерной ёмкостью можно пренебречь. В режиме обратного напряжения можно пренебречь диффузионной ёмкостью.

Рассмотрим процессы, происходящие в RL -диодной электрической цепи (рис. 4), при подаче на её вход синусоидального напряжения. В наиболее общем случае схема замещения этой цепи изображена на рис. 4. Эта цепь содержит сразу три нелинейных элемента: резистор R_d , барьерную ёмкость C_j и диффузионную ёмкость C_d . При этом, сопротивление резистора зависит от тока диода, а ёмкости зависят от напряжения диода.

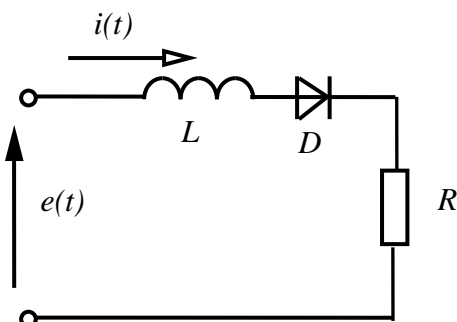


Рис. 4. RL -диодная электрическая цепь синусоидального тока

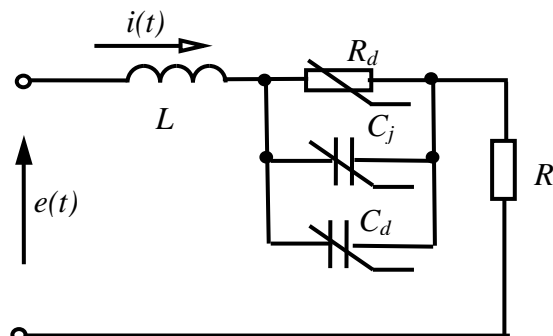


Рис. 5. Схема замещения RL -диодной электрической цепи синусоидального тока

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа для схемы, показанной на рис. 5. При этом будем считать, что по резистору R_d протекает ток i_1 , по ёмкости $C_j - i_2$, а по ёмкости $C_d - i_3$. Так как напряжение на ёмкостях одинаковое, обозначим его U_C .

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 + i_3; \\ L \frac{di}{dt} + Ri + R_d(i_1)i_1 = e; \\ R_d(i_1)i_1 = U_C; \\ i_2 = C_j(U_C) \frac{dU_C}{dt}; \\ i_3 = C_d(U_C) \frac{dU_C}{dt}. \end{cases} \quad (3)$$

Отсюда следует

$$i_1 = \frac{U_C}{R_d(i_1)}; \quad i = \frac{U_C}{R_d(i_1)} + C_j(U_C) \frac{dU_C}{dt} + C_d(U_C) \frac{dU_C}{dt},$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} & L \frac{d \left(\frac{U_C}{R_d(i_1)} + C_j(U_C) \frac{dU_C}{dt} + C_d(U_C) \frac{dU_C}{dt} \right)}{dt} + R \left(\frac{U_C}{R_d(i_1)} + C_j(U_C) \frac{dU_C}{dt} + C_d(U_C) \frac{dU_C}{dt} \right) + U_C = \\ & = \frac{L}{R_d(i_1)} \frac{dU_C}{dt} + LC_j(U_C) \frac{d^2U_C}{dt^2} + LC_d(U_C) \frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{R_d(i_1)} U_C + RC_j(U_C) \frac{dU_C}{dt} + RC_d(U_C) \frac{dU_C}{dt} + U_C = e. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов получим окончательное выражение для дифференциального уравнения второго порядка, которому подчиняется режим работы вышеприведенной электрической цепи

$$\left(LC_j(U_C) + LC_d(U_C) \right) \frac{d^2U_C}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_d(i_1)} + RC_j(U_C) + RC_d(U_C) \right) \frac{dU_C}{dt} + \left(\frac{R}{R_d(i_1)} + 1 \right) U_C = e. \quad (4)$$

Выполним решение этого дифференциального уравнения операторным способом в общем виде. Операторное уравнение 2-го закона Кирхгофа для этой цепи имеет вид

$$I(s)(R + sL + Z_d(s)) = E(s), \quad (5)$$

где $Z_d(s)$ – полное операторное сопротивление схемы замещения диода, которое определяется как

$$Z_d(s) = \frac{R_d(i_1) \frac{1}{sC_j(U_C)} \frac{1}{sC_d(U_C)}}{R_d(i_1) \frac{1}{sC_j(U_C)} + R_d(i_1) \frac{1}{sC_d(U_C)} + \frac{1}{sC_j(U_C)} \frac{1}{sC_d(U_C)}}.$$

Тогда операторное изображение тока цепи находится по формуле

$$I(s) = \frac{E(s)}{(R + sL + Z_d(s))}. \quad (6)$$

Очевидно, что из-за существенной нелинейности $Z_d(s)$, в общем виде невозможно получить оригинал тока цепи $i(t)$. Поэтому, решим задачу в численном виде для одного из типов диодов и конкретных значений $e(t)$, R , L . Пусть: $e(t) = 3 \sin(\omega t)$ [В], $f = 10$ [кГц], $L = 50$ [мГн], $R = 2$ [кОм], тип диода – IN457.

Учитывая, что параметры диода существенно отличаются для прямого и обратного напряжения, анализ режима цепи проведем модифицированным методом кусочно-линейной аппроксимации с помощью переходных характеристик и интеграла Дюамеля.

Итерационный алгоритм расчета можно сформулировать так:

1. Разбиваем кривую входного синусоидального напряжения на одинаковые временные интервалы и каждому из них соотносим определенные участки вольт-амперной характеристики диода (т.е. R_d) и определенные значения C_j и C_d .

2. Для каждого линеаризованного участка вольт-амперной диода характеристики и значений C_j и C_d операторное изображение переходной характеристики цепи по отношению к её току определяется как

$$h_i(s) = \frac{\frac{1}{s}}{(R + sL + Z_d(s))} = \frac{1}{s(R + sL + Z_d(s))}. \quad (7)$$

3. Вычисляем оригинал переходной характеристики $h_i(t)$.

4. Вычисляем величину тока в конце каждого временного интервала при помощи интеграла Дюамеля по формуле

$$i(t_k) = i(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{de(\tau)}{d\tau} h_k(t - \tau) d\tau. \quad (8)$$

5. Определяем напряжение диода по приближенной формуле

$$u_{dk} = u(t_{k-1}) - \left(L \frac{i(t_k) - i(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} + i(t_k)R \right), \quad (9)$$

после чего уточняем параметры R_d , C_j и C_d .

6. Возвращаемся на 2-й пункт алгоритма и повторяем расчет до тех пор, пока значение u_{dk} почти не будет отличаться от предыдущей итерации. По результатам расчета была построена зависимость $U2=f(U1)$, где $U2=IR$.

График этой зависимости изображен на рис. 6. Из этого графика видно, что при вышеприведенных параметрах схемы ее режим представляет собой хаотические колебания. Были также проведены расчеты режима цепи, при других значениях индуктивности и частоты, с целью оценить влияние этих параметров на характер хаотических колебаний. Графики зависимостей $U2=f(U1)$ показаны, соответственно, на рис. 7-8.

Анализ аттракторов, представленных на рис. 6-8 показывает, что в RL -диодных цепях синусоидального тока, если период колебаний соизмерим с постоянной времени переходного процесса, может возникнуть ситуация, когда в конце периода ток в цепи не затухает до нуля и новый период начинается с ненулевых начальных условий. При этом, вследствие существенной нелинейности параметров схемы замещения диода, в цепи имеет место практически незатухающий переходный процесс, который приобретает форму хаотических колебаний. При увеличении индуктивности цепи размах аттрактора увеличивается. В случае увеличения частоты входного напряжения наблюдается тенденция некоторого смещения аттрактора в направлении отрицательных напряжений.

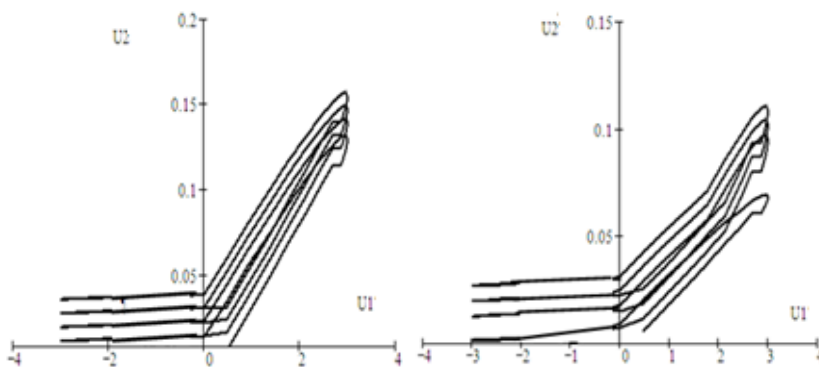


Рис. 6. График зависимости $U2=f(U1)$, при $f = 10$ [кГц], $L = 50$ [мГн], $R = 2$ [кОм]

Рис. 7. График зависимости $U2=f(U1)$, при $f = 10$ [кГц], $L = 100$ [мГн], $R = 2$ [кОм]

Рис. 8. График зависимости $U2=f(U1)$, при $f = 20$ [кГц], $L = 50$ [мГн], $R = 2$ [кОм]

В программном пакете Multisim была выполнена схема RL -диодного ГДХ ($R = 2$ кОм, $L = 50$ мГн, $D - 1N4531$), представленная на рис. 9. Для реализации преобразования сопротивления в постоянное напряжение на выход ГДХ (out) подключен амплитудный детектор (рис. 10). Как первичный измерительный преобразователь резистивной физической величины использован переменный резистор $R1$.

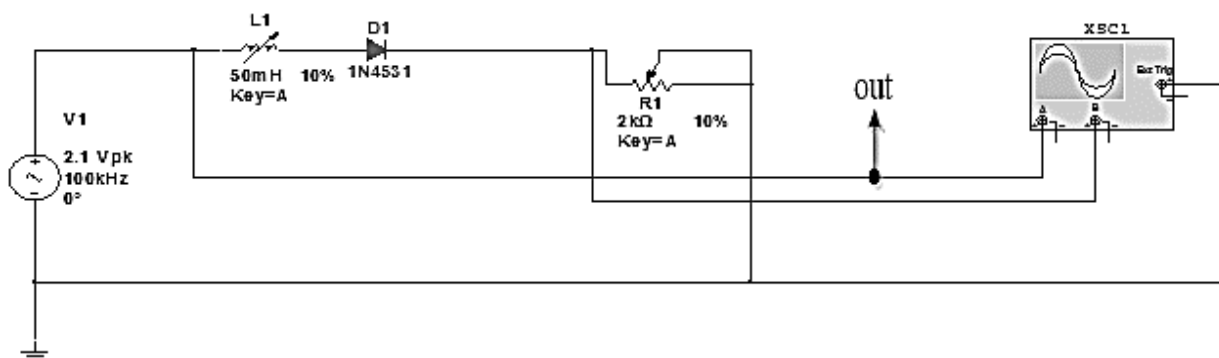


Рис. 9. Схема RL-диодного ГДХ

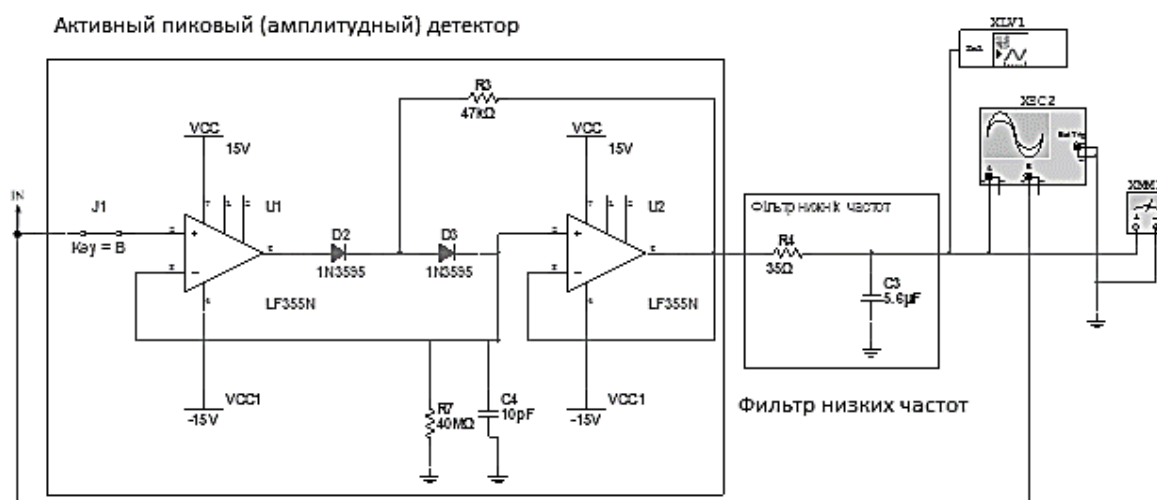


Рис. 10. Схема амплитудного детектора

На рис. 5, 6 построены графики зависимости выходного напряжения от сопротивления R_1 та чувствительности напряжения к изменению сопротивления R_1 .

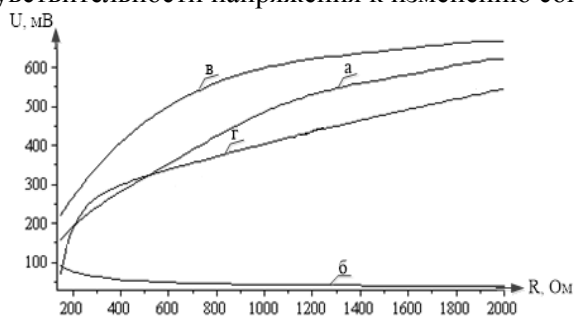


Рис. 5. Зависимости выходного напряжения от сопротивления R_1 : а – при $L=1500$ мкГн, б – при $L=1000$ мкГн, в - $L=800$ мкГн, г – при $L=500$ мкГн

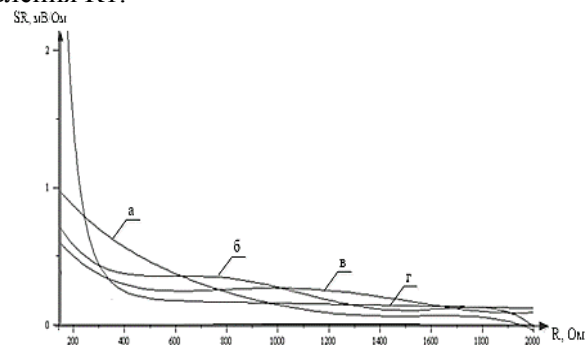


Рис. 6. Графики чувствительности: а – при $L=1500$ мкГн, б – при $L=1000$ мкГн, в - $L=800$ мкГн, г – при $L=500$ мкГн

Выводы

1. Исследована возможность измерения резистивной физической величины с помощью ГДХ. Показано, что ГДХ на основе RL-диодной цепи имеет достаточно высокую чувствительность выходного напряжения к изменению сопротивления в диапазоне до 250 Ом, что может быть использовано при создании измерительных устройств на его основе.

2. Проведено математическое моделирование RL-диодной цепи, которое показало существенное влияние барьерной и диффузионной емкостей диода на возникновение детерминированно-хаотических колебаний в этой цепи.

Литература

1. Anishchenko V.S. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. 2nd Edition. V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier. Berlin, Heidelberg, 2007. – 460 p.
2. Паркер Т.С., Чжуа Л.О. Метод измерения с использованием свойств нелинейных динамических систем. //ТИИЭР. - 1987. – Т 75. - №8. - С. 6.
3. Воронов С.С., Колпакова Л.В., Кузнецов В.А. Метод измерения с использованием свойств нелинейных динамических систем. //Измерительная техника. - 1996. - №12. - С.16-18.
4. Воронов С.С., Колпакова Л.В., Кузнецов В.А. Метод хаотического генератора: подходы к диагностированию параметров нелинейных хаотических систем. //Измерительная техника. - 2000. - №4. - С.19-21.
5. W. Kucheruk, Z. L. Warsza, W. Sewastyanow, W. Mankowska Generator oscylacji chaotycznych o układzie RL-dioda jako przetwornik rezystancja-napięcie. // Przegląd Elektrotechniczny, 2013, V. 10, p. 266-269.
6. V. Kucheruk, S.Sh. Katsyv, V.S. Mankovska, M.V. Mykhalko Research of the “Determined Chaos” phenomenon in the RL-Diode electric circuit of sinusoidal current // Proceeding the Sixth World Congress “Aviation in the XXI-st Century”, volume 1, September 23-25, Kyiv, 2014, p. 1.10.20-1.10.24.
7. У. Наундорф Аналоговая электроника. Основы, расчет, моделирование. Москва: Техносфера, 2008. – 472 с.

УДК 519.7:007.52; 519.81; 519.2

УПРАВЛЕНИЕ ВЫВОДОМ МНОГОМЕРНОГО ПЛОХОФОРМАЛИЗУЕМОГО ОБЪЕКТА С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ НА ЗАДАННОЕ МНОГООБРАЗИЕ

С.И.Колесникова

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г.Томск, Россия, skolesnikova@yandex.ru

Введение. Существует направление, реализованное методами нелинейной адаптации на многообразиях (П.В. Кокотович, А.А. Колесников, Г.В. Кондратьев, Astolfi A., Ortega R. и многие другие), основанных на принципах направленной самоорганизации и декомпозиции нелинейных динамических систем и, что особенно привлекательно (А.А. Красовский), на физических свойствах управляемого объекта. В ряде работ (см., например, [1, 2]) показано, что возможен аналитический синтез системы управления для многомерного нелинейного объекта с хаотической динамикой (или сложного объекта, по Л.А. Растригину) при определенных предположениях:

- 1) существует асимптотически устойчивая целевая система, удовлетворяющая заданным технологическим требованиям;
- 2) все решения исходной системы должны быть ограниченными;
- 3) исходная модель состояния объекта принципиально стабилизируема;
- 4) существует целевое многообразие по отношению к исходной системе уравнений объекта с описанием: $\psi(x)=0$, где $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_m(x))$ - некоторая заданная непрерывная дифференцируемая векторная функция, отвечающая требуемым физическим свойствам целевого состояния [2] и называемая целевой макропеременной;
- 5) функционал качества синтезируемой системы управления имеет вид:

$$\Phi = \int_0^{\infty} \sum_{l=1}^m [\phi_l^2(\psi_l) + w_l^2 \psi_l^2(t)] dt \quad (1)$$

с условиями на $\phi_l(\psi_l)$, $l = \overline{1, m}$: $\phi_l(\psi_l)$ однозначные, непрерывные, дифференцируемые функции для всех ψ_l ; $\phi_l(0) = 0$; 3) $\phi_l(\psi_l)\psi_l > 0$, $\forall \psi_l \neq 0$; весовые коэффициенты w_l являются параметрами настройки регулятора и пропорциональны длительности движения изображающей точки до аттрактора $\psi(x)=0$.

В статье: а) приводится обзор особенностей и условий применимости алгоритмов управления на многообразиях [1-4]; б) обсуждается алгоритм аналитического конструирования регулятора для объекта с неполным описанием как обобщение существующих алгоритмов управления на многообразиях; в) предлагается принципиальная схема создания интеллектуальной системы управления на многообразиях; г) приводятся примеры ее применения.

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейный многомерный объект с плохо формализуемой правой частью в его описании:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_n; \theta) + u_j, \quad j = \overline{1, m}, \\ \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_n; \theta), \quad j = \overline{m+1, n},\end{aligned}\quad (2)$$

где $x \in R^n$ - вектор состояний, $\theta \in R^k$, - вектор постоянных параметров, $u \in R^m$, $m < n$, - вектор управления, $f \in R^n$ - непрерывная нелинейная вектор-функция; компоненты f_1, \dots, f_m вектора $f \in R^n$ - неизвестны.

Для объекта (2) ставится задача нахождения закона управления $u(x)$, обеспечивающего перевод объекта управления (2) из произвольного начального состояния x_0 в некоторой области фазового пространства в окрестность заданного многообразия $\psi(x) = 0$ и его дальнейшую стабилизацию в этой окрестности. Здесь $\psi(x)$ - это некоторая заданная функция координат объекта (2), отражающая физические особенности объекта и технологические цели управления (например, $\psi(x) = c_1 x_1 + x_2$) в задаче стабилизации начала координат; $\psi(x) = x_1 - x_{10}$ в задаче стабилизации координаты x_1 , где x_{10} - заданное значение. Без ограничения общности для наглядности принципиальных позиций управления проведем все рассуждения для системы второго порядка вида:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) + u,\end{aligned}\quad (3)$$

где f_1, f_2 - известная и неизвестная функции; затем сформулируем результат в виде общего алгоритма синтеза управления, гарантирующего достижение цели управления.

Следует отметить, что в такой постановке задачу известными методами управления решить не представляется возможным.

2. Решение задачи. Излагаемый ниже алгоритм для решения такой задачи основан на результатах П.Кокотовича, где привлекалась техника многообразий; на методе исследования устойчивости решений А.М. Ляпунова и форме его применения в алгоритме управления в скользящем режиме; на методе аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [2], в которых присутствует механизм для преодоления частично отсутствующей информации в описании объекта (2). Остановимся кратко на особенностях двух последних для лучшего понимания общего алгоритма синтеза системы управления на примере объекта (3), предварительно заметив, что каждый из выше отмеченных методов в отдельности поставленную задачу не решает.

2.1. Алгоритм управления в скользящем режиме.

1. Предполагается справедливость условия:

$$|c_1 f_1(x) + f_2(x)| \leq \lambda(x), \quad \forall x \in R^2, \quad (4)$$

где $\lambda(x)$ - известная функция; c_1 - некоторая постоянная.

2. Задается целевое многообразие $\psi(x) = 0$, где макропеременная $\psi(x)$, например, имеет вид: $\psi(x) = c_1 x_1 + x_2$;

3. Формулируется функция Ляпунова в виде $V(t) = 0.5\psi^2$.

4. Из условия отрицательности производной функции Ляпунова получают условие на закон управления: $\dot{V}(t) = \dot{\psi}\psi = (c_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2)\psi = (c_1 f_1 + f_2)\psi + u\psi \leq \lambda(x)\psi + u\psi$:

$$u(x) = -\beta(x) \text{sign}(\psi(x)), \quad \beta(x) \geq \lambda(x) + \beta_0, \quad \beta_0 > 0. \quad (5)$$

Закон (5) удерживает траектории системы (3) на многообразии $\psi(x) = 0$, не зависит от функции f_2 и является робастным по отношению к неопределенности f_2 , так как $\dot{V}(t) \leq \lambda(x)|\psi| - (\lambda(x) + \beta_0)\psi \text{sign}(\psi(x)) = -\beta_0|\psi|$.

Основные характерные свойства скользящего управления (5):

- 1) управление не определено на поверхности скольжения $\psi(\mathbf{x}) = 0$, чувствительно к параметру многообразия c_1 и к присутствию измерительных помех;
- 2) требуется знание верхней границы (4) неопределенности f_2 ;
- 3) управление (5) разрывное («пульсирующее» при переключениях);
- 4) закон управления (5) гарантирует достижение многообразия за конечное время и удерживание траекторий на нем *независимо от значений неопределенности f_2* согласно редуцированной системе $\dot{x}_2 = -c_1 f_1(\mathbf{x})$ на фазе «скольжения».

2.2. Алгоритм аналитического конструирования агрегированных регуляторов. Согласно методу аналитическому конструированию агрегированных регуляторов (АКАР) [2] для объекта (3) с неопределенностью в описании в виде неизвестной составляющей f_2 предлагается расширение фазового пространства введением дополнительной переменной $x_3 = f_2(\mathbf{x})$, при этом скорость изменения неопределенности f_2 постулируется: $\dot{x}_3 = g(t)$, где $g(t)$ - известная функция. Приведем для удобства схему построения регулятора по методу АКАР (рис. 1):

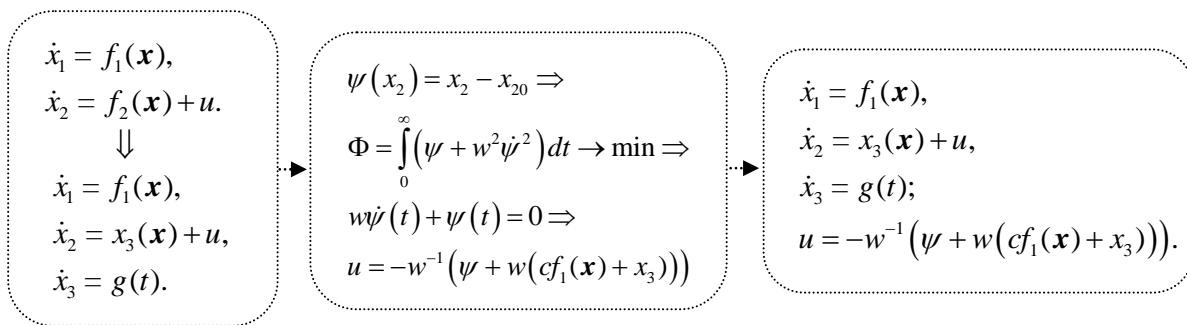


Рис. 1. Управление объектом (3) согласно методу АКАР

2.3. Алгоритм управления для нелинейного многомерного объекта АКАР+. Излагаемый ниже подход и реализующий его алгоритм совмещает достоинства вышеизложенных двух методов и является фактически обобщением метода АКАР на случай возмущения объекта произвольной природы с макропеременными специального типа («в отклонениях»). Оформим алгоритм конструирования управления для объекта (2) как схему синтеза системы управления.

1. Задается целевое многообразие $\psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ и ищется согласно классической схеме [2] АКАР-управление: u_l^A , $l = \overline{1, m}$ как функция всех координат объекта.

2. Задается вид искомого управления как сумма АКАР-управления и «невязки»: $u_l(t) = u_l^A(t) + \gamma_l \Delta u_l^A(t)$, $l = \overline{1, m}$, обусловленной неизвестностью компонент f_l , $l = \overline{1, m}$.

3. Формируется декомпозированная система с независимостью от значений неопределенности f_l , $l = \overline{1, m}$ на фазе «скольжения».

4. Применяется к полученной декомпозированной системе техника функции Ляпунова; нетривиальное значение управления-«невязки» $v_l = \gamma_l \Delta u_l^A(t)$ находится из неравенства

$$v_l (\psi_l c_l + \dot{v}_l) < \omega_l^{-1} \psi_l^2, \quad c_l = \frac{\partial \psi_l}{\partial x_l}, \quad l = \overline{1, m},$$

которых возможно осуществить на основе техники сжимающих отображений.

3. Примеры применения алгоритма 2.3. Рассмотрим нелинейные объекты, в частности, с наличием хаотических режимов при определенных значениях параметров.

Пример 3.1. Согласно этапам 1-4 алгоритма 2.3 для объекта с описанием типа (3) при $f_1(\mathbf{x}) = x_2$, $f_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ система управления будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2, \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega^{-1} \psi - c_1 x_2 + v, \\ \dot{v} &= -\gamma \psi. \end{aligned} \tag{6}$$

Ниже приведены результаты численного моделирования при разных начальных условиях и параметрах настройки регулятора в системе (6) (рис. 2) при разных аппроксимациях значений траекторий $x(t)$ и целевым аттрактором $\psi(x) = x_1 + x_2 = 0$.

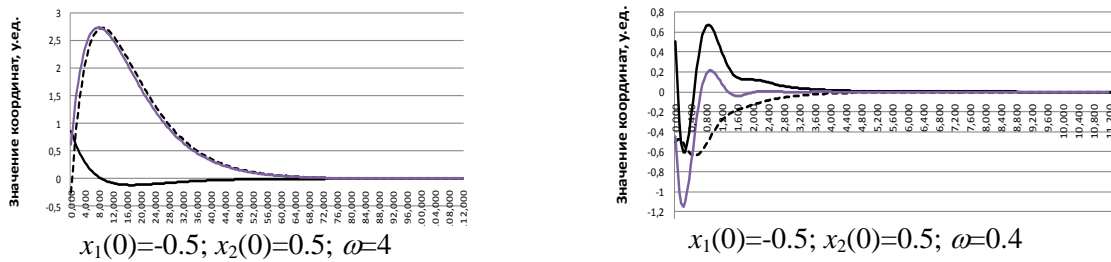


Рис. 2. Влияние параметров настройки регулятора, начальных условий на вид переходного процесса, при разных аппроксимациях значений траекторий $x(t)$; $x_1(t)$ – пунктир, $x_2(t)$ – синее сплошное начертание, $x_1(t)+x_2(t)$ черное сплошное начертание

Пример 3.2. Представим величину $\Delta u^A = u - u^A$ для нелинейного объекта (2) на шаге 3 алгоритма 2.3 в виде $(u - u^A) = \sum_{i=1}^I \eta_i v_i$ приведет к системе множественного управления (Narendra K. S., Balakrishnan J.), в частности, нечеткого управления (Коломейцева М.Б., Хо Д.Л.); здесь v_i управление в состоянии объекта $\Omega_i, i = \overline{1, I}$, сопоставленному соответствующей области фазового пространства; $\eta_i, i = \overline{1, I}$ - индикаторная функция, $\eta_i = 0$ при $x \notin \Omega_i$.

Концептуальная схема интеллектуального управления на многообразиях для нелинейного объекта с неполным описанием на базе алгоритма АКАР+. Основанием такой схемы будет совмещение алгоритма 2.3, алгоритмов разметки временного ряда и скользящей аппроксимации, выявления типов состояний объекта по разметке [4] (рис. 3).

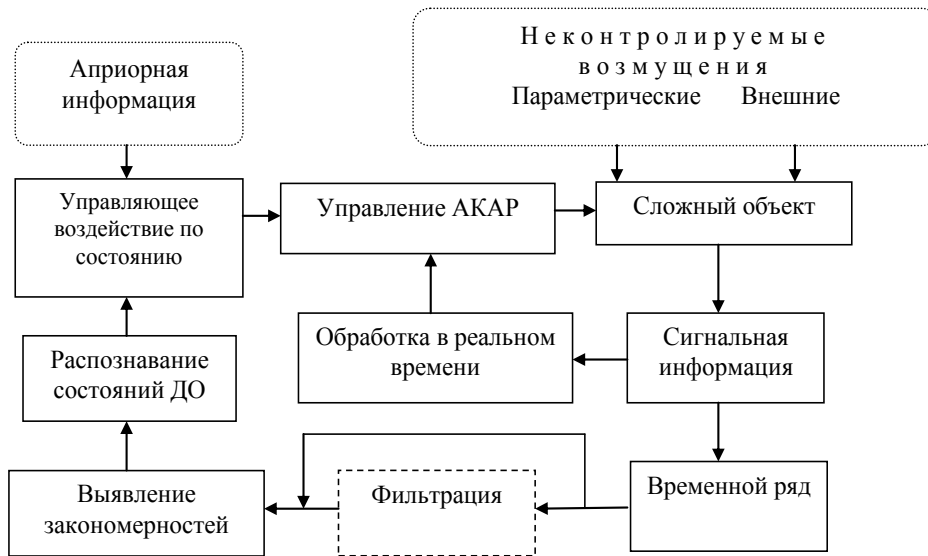


Рис.3. Схема интеллектуального управления для многомерных объектов с неопределенностью

Приведем иллюстрацию применения алгоритма интеллектуального управления объектом, испытывающим параметрические скачки в процессе функционирования объекта. На рис. 4 рассмотрен случай скачкообразного изменения параметра λ в модели Фейгенбаума, интерпретируемого как изменение состояния объекта $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) + u_n, n \geq 1$, приводящего к нежелательным последствиям в условиях отсутствия перестройки в управлении.

Пример 3.3. Приведем пример синтеза системы управления, когда левая часть многообразия задает отклонение стабилизируемой переменной от заданной функции времени. Введение управления в модель Фейгенбаума приведет к системе:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n(1-x_n) + u_n, \\ y_n &= x_n, \quad u_n^A = -\lambda x_n(1-x_n) + y_{n+1}^0 - \omega \psi_n \end{aligned} \quad (7)$$

где $x_n \in R, \lambda \in R, u_n, y_n$ – переменная состояния, параметр модели, управление, переменная наблюдения соответственно; ψ_n – целевая макропеременная.

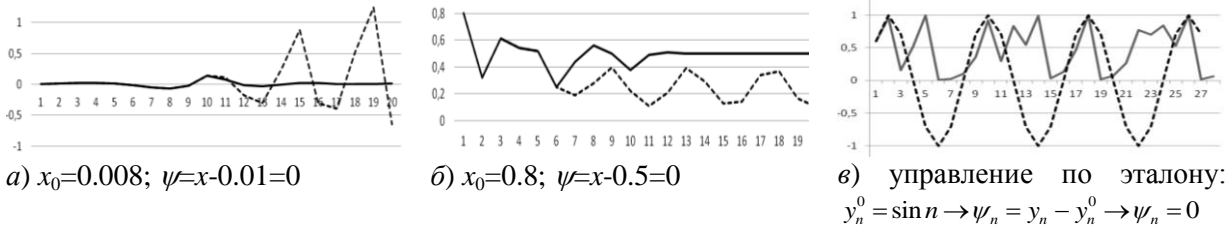


Рис. 4. Отсутствие перестройки управления при скачках параметра λ не выводит объект в описании (7) на заданный аттрактор (пунктир на а), б): а) один скачок: $\lambda_1(t)=2, t<9; \lambda_2(t)=0.5, t \geq 9$; б) два скачка: $\lambda_1(t)=2, t<9; \lambda_2(t)=1, 9 \leq t < 12; \lambda_3(t)=0.5, t \geq 12$; $\gamma=0.009$; в) управление по эталону: $y_n^0 = \sin n \rightarrow \psi_n = y_n - y_n^0 \rightarrow \psi_n = 0$

Пример 3.4. Модель электрогидравлического дискового тормоза для колесной пары железнодорожной тележки предложена в институте гидропривода и управления IFAS RWTH (Aachen University, Germany) под англоязычным названием «self-energising electro-hydraulic brake» (SEHB). На данный момент не существует управления с удовлетворительными свойствами при резком увеличении или уменьшении тормозной силы (в разомкнутом состоянии при $u = 0$ объект неустойчив). Согласно алгоритмам п. 2 система управления будет иметь вид (8) с иллюстрацией его качества на рис.5:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_4 \sqrt{x_2 - x_1 - \alpha p}, & \dot{z} &= k_a x_4 \sqrt{z - \alpha p}, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_4 \sqrt{x_2 - x_1 - \alpha p}, & \dot{y} &= (a_3 + 1)(x_4 - y) + a_4 x_4 - g u, \\ \dot{x}_3 &= -a_3 x_3 - a_4 x_4 + g u, & \Rightarrow \dot{x}_4 &= x_4 - y, \\ \dot{x}_4 &= x_3; & u &= \frac{1}{g} \left((a_3 + 1)(x_4 - y) + a_4 x_4 - \dot{\phi} \right) + \frac{y - \phi(t)}{g T_1}, \\ & & \dot{\phi}(t) + \phi(t) \frac{T_2 + 1}{T_2} + \frac{1}{T_1^2} (x_{30} - x_4(t)(T_2 + 1)) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь все параметры $a_1, a_2, a_3, a_4, \alpha, p, g$ определены; x_1 – давление нагрузки гидродвигателя; x_2 – давление в опорной линии; x_3 – скорость штока плунжера; x_4 – перемещение штока в плунжере; $z = x_2 - x_1, k_a = a_2 - a_1$.

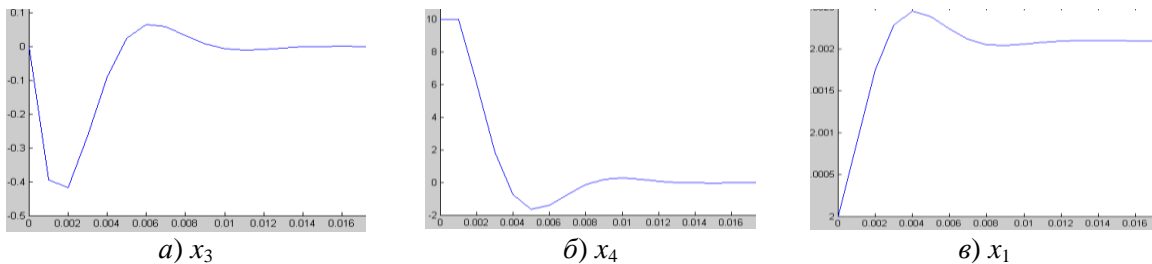


Рис. 5. Поведение фазовых траекторий x_3, x_4, x_1 , соответственно, при управлении (8), выведенных на заданный уровень

Заключение. В докладе приведена схема построения системы управления для нелинейного многомерного объекта с неполной информацией для решения задачи стабилизации объекта, основой для которой явились два метода: метод скользящего управления и метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов.

Дана концептуальная схема экспертно-аналитического управления с распознаванием состояний плохо формализуемого объекта, существенно использующая положения теории системного синтеза с нелинейной адаптацией на многообразиях.

Приведены примеры поведения трех систем управления на многообразиях в условиях неполного описания объектов.

Работа поддержана РФФИ (проект № 13-08-01015 А).

Литература

1. Халил Х.К. Нелинейные системы: монография. - М.: Институт компьютерных исследований; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 812 с.
2. Колесников А.А. Синергетика и проблемы теории управления: сборник научных трудов / Под ред. А.А. Колесникова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 504 с.
3. А. Isidori. Robust Feedback Design for Nonlinear Systems: a Survey // Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2010. Vol.18. P. 693-714.
4. Колесникова С.И. Использование апостериорной информации для управления плохо формализуемым динамическим объектом // Автометрия. 2010. Т.46. № 6. С. 78-89.
5. Колесникова С.И. Метод распознавания и оценивания состояний слабоформализованного динамического объекта на основе разметки временного ряда // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 5. С. 41-52.

УДК 524.832

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ БЕЗ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ФАНТОМНОГО РАЗРЫВА ДЛЯ МОДЕЛИ G-ЭССЕНЦИИ

Д.Н. Талипова, О.В. Разина

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан, d.talipova1729@gmail.com

А. Эйнштейн предложил (Ж. Леметр применил это к расширяющейся Вселенной), что в пространстве, кроме обычного гравитирующего вещества, имеется еще некоторая однородно распределенная стационарная антигравитирующая (т.е. отталкивающая) среда, которая впоследствии была названа темной энергией, с необычным уравнением состояния

$$p = -\omega\rho,$$

т.е. с отрицательным давлением. А. Эйнштейн ввел это предположение до открытия расширения Вселенной: отталкивающее действие среды могло компенсировать гравитацию; отсюда следовала теоретическая возможность стационарного мира. После открытия расширения такая возможность отпала[1].

На сегодняшний день известно, что мы живем в расширяющейся Вселенной, теоретически предсказанной в 1922 г. российским математиком Фридманом. Фридман, основываясь на общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна, доказал, что однородный мир не может находиться в покое и должен либо расширяться, либо сжиматься. Раз Вселенная расширяется, это значит, что всему ее веществу некогда были приданы гигантские скорости разбега в результате изначального космического события, получившего название Большого взрыва. Его физическая природа до сих пор остается загадкой. Американский астроном Хаббл в 1929 г. независимо от теоретических данных обнаружил явление расширения Вселенной на практике.

Ускорение расширения Вселенной может быть довольно просто объяснено, если предположить, что большую часть ее вещества образует темная энергия (ТЭ) – гипотетическая форма энергии, равномерно распределенная во всем пространстве. Хотя физическая природа ТЭ остается

неизвестной, наиболее популярное на данный момент объяснение ускорения расширения Вселенной опирается именно на существование в ней ТЭ [2].

ТЭ наполняет всю Вселенную, все ее уголки, в том числе наши дома – и наши тела тоже. Количество ТЭ в космосе поистине астрономично и превосходит энергию всех звезд и галактик, вместе взятых. Можно также рассчитать количество ТЭ на Земле; окажется, что ее очень немного – слишком мало, чтобы подпитывать вечный двигатель.

Введение в научный оборот представления о существовании в природе ТЭ – слабовзаимодействующей физической субстанции, пронизывающей все пространство видимой Вселенной, - явилось сенсацией номер один в физике на рубеже XX-XXI вв. и стало предметом исследования для большинства исследователей, в особенности работающих на стыке физики элементарных частиц и космологии.

Один из самых неприятных пробелов в современной физике состоит в том, что никто не может теоретически рассчитать то количество ТЭ, которое мы измеряем при помощи спутников. Если проводить расчет с позиций современной атомарной физики, то полученное число разойдется с экспериментальным результатом на 120 порядков! Без сомнения, это самое значительное расхождение между теорией и экспериментом за всю историю физики.

Темная энергия не только ускоряет расширение Вселенной, но и определяет форму галактик и их рассредоточение в пространстве. В 1998 г. произошло одно из наиболее выдающихся космологических открытий XX в.: астрономы пришли к выводу о существовании неизвестной формы энергии, постоянно действующей и управляющей судьбой космоса, но остававшейся неведомой, — так называемой ТЭ. Она составляет большую часть Вселенной, и если данное утверждение выдержит проверку временем, то недалек тот день, когда станет возможным появление новых физических теорий. В настоящее время рассматривается достаточно большое количество теорий и моделей, способных в той или иной степени описать развитие Вселенной. Так, сюда можно отнести модель g – эссенции, которая является неким обобщением двух предложенных ранее моделей k – эссенции и f – эссенции. Главное преимущество этой модели – емкость информации, так это модель описывает сразу два поля: скалярное и фермионное. k – эссенция – одна из альтернативных моделей темной энергии, являющаяся основой квинтэссенции и тахионного поля. Наиболее современной моделью темной энергии является введенная в 2010 году профессором Р. Мырзакуловым модель f – эссенции. Данная модель является фермионным аналогом k – эссенции.

Предположение о том, что Вселенная изотропна и однородна, приводит к выбору такой пространственно-временной системы координат, в которой метрика принимает простую форму, впервые исследованную Фридманом в качестве полевых решений уравнений Эйнштейна, а затем выведенную только на основе изотропности и однородности Робертсоном и Уокером [3].

В данной статье будет рассмотрено ускоренное расширение Вселенной на основе общеизвестной метрики Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) с сигнатурой $(-, +, +, +)$

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1)$$

Действие g-эссенции в общем виде записывается следующим образом

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R + 2K(X, Y, \phi, \psi, \bar{\psi})], \quad (2)$$

где R -тензор кривизны для метрики ФРУ (1)

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (3)$$

K является некоторой функцией ее аргументов, ϕ - скалярная функция, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ - фермионная функция и $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$ - сопряженная функция. Здесь

$X = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$, $Y = 0.5i[\dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi - \bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi}]$ являются каноническими кинетическими членами для скалярных и фермионных полей, соответственно.

В случае метрики ФРУ (1), уравнения Фридмана, Клейн-Гордона и Дирака, соответствующие действию (2), сводятся к

$$\begin{aligned} 3H^2 - \rho &= 0, \\ 2\dot{H} + 3H^2 + p &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_X \ddot{\phi} + (\dot{K}_X + 3HK_X \dot{\phi}) - K_\phi &= 0, \\
 K_Y \dot{\psi} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y)\psi - i\gamma^0 K_{\bar{\psi}} &= 0, \\
 K_Y \dot{\bar{\psi}} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y)\bar{\psi} + iK_\psi \gamma^0 &= 0, \\
 \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где $\rho = 2K_X X + K_Y Y - K$, $p = K$.

В общем, в моделях г-эссенции уравнения движения очень сложны, поэтому трудно получить точные аналитические решения. Для того, чтобы выполнить анализ и найти решения рассмотрим следующую частную модель [4]

$$K = X + Y - V_1(\phi) - V_2(u), \tag{5}$$

где $u = \bar{\psi}\psi$. В данной модели система уравнений (4) примет вид

$$\begin{aligned}
 3H^2 - \rho &= 0, \\
 2\dot{H} + 3H^2 + p &= 0, \\
 \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{1\phi} &= 0, \\
 \dot{\psi} + \frac{3}{2}H\psi + i(V_{2u}\gamma^0\psi) &= 0, \\
 \dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}H\bar{\psi} - i(V_{2u}\bar{\psi}\gamma^0) &= 0, \\
 \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

где $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_1 + V_2$, $p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V_1 - V_2 + V_{2u}u$.

Проанализируем космологические решения на основе частного примера с $V_1 = 0$, для модели г-эссенции. В частности, рассмотрим космологические эволюции плотности энергии ρ , давления p , параметра замедления q и параметра уравнения состояния ω как функций от t . Рассмотрим пример с пересечением фантомного разрыва. В случае $V_1 = 0$, система (6) приобретает вид [5]

$$\begin{aligned}
 3H^2 - \rho &= 0, \\
 2\dot{H} + 3H^2 + p &= 0, \\
 \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} &= 0, \\
 \dot{\psi} + \frac{3}{2}H\psi + iV_{2u}\gamma^0\psi &= 0, \\
 \dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}H\bar{\psi} - iV_{2u}\bar{\psi}\gamma^0 &= 0, \\
 \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

где $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_2$, $p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V_2 + V_{2u}u$.

Рассмотрим случай, когда один из параметров уравнения движения, а именно параметр Хаббла имеет следующий вид

$$H = \frac{2A}{3 \cdot e^{At}}, \tag{8}$$

где A некоторая константа.

Зная H можно найти остальные параметры уравнения движения.

$$a = \exp\left[-\frac{2dt}{3 \cdot e^{At}}\right], \tag{9}$$

$$u = c \cdot \exp\left[\frac{2}{e^{At}}\right], \dot{\phi}^2 = \phi_0^2 \cdot \exp\left[\frac{4}{e^{At}}\right], \quad (10)$$

$$\psi_0 = N_0 e^{-iT_0}, \psi_1 = N_1 e^{-iT_1}, \psi_2 = N_2 e^{iT_2}, \psi_3 = N_3 e^{-iT_3}, \quad (11)$$

где

$$N_k = \exp\left(\frac{1}{e^{At}}\right), k = 0,1,2,3, \quad (12)$$

$$T_k = \frac{2}{3} \cdot \frac{A}{c \cdot \exp\left(\frac{2}{e^{At}}\right)} - \frac{\phi_0^2}{c \cdot A} Ei\left(1, -\frac{2}{e^{At}}\right) \quad (13)$$

где Ei именуется как экспоненциальный интеграл.

Соответствующий потенциал взаимодействия фермионного поля после подстановки необходимых составляющих примет вид

$$V_2 = \frac{4A^2}{3e^{2At}} - \frac{1}{2} \phi_0^2 \exp\left(\frac{4}{e^{At}}\right). \quad (14)$$

В данном примере уравнения плотности и давления темной энергии выглядят следующим образом, соответственно

$$\rho = \frac{4A^2}{3e^{2At}}, \quad p = \frac{4A^2(-1 + e^{At})}{3e^{2At}}. \quad (15)$$

В этом примере параметр уравнения состояния и параметр замедления запишутся следующим образом

$$\omega = -1 + e^{At}, \quad q = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{At}. \quad (16)$$

На рисунке 1 показана космологическая эволюция параметра уравнения состояния ω (16) при $A = -1/2$.

На рисунках 2 и 3 показана космологическая эволюция плотности темной энергии ρ и давления p (15) как функций от t при $A = 1/2$. Из рисунка 1 видно, что в этой модели может быть реализована космология без пересечение с фантомным разрывом.

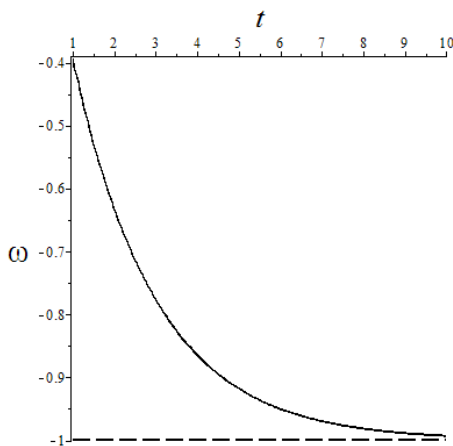


Рисунок 1.- Параметр уравнения состояния ω как функция от t

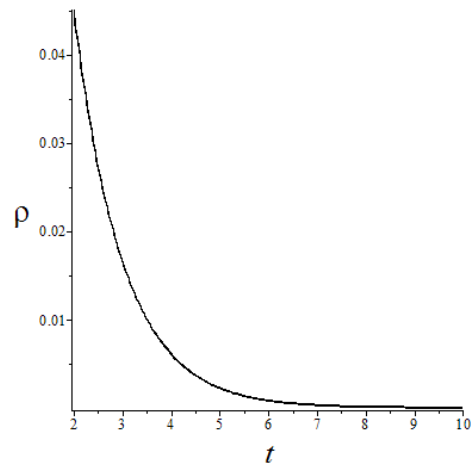
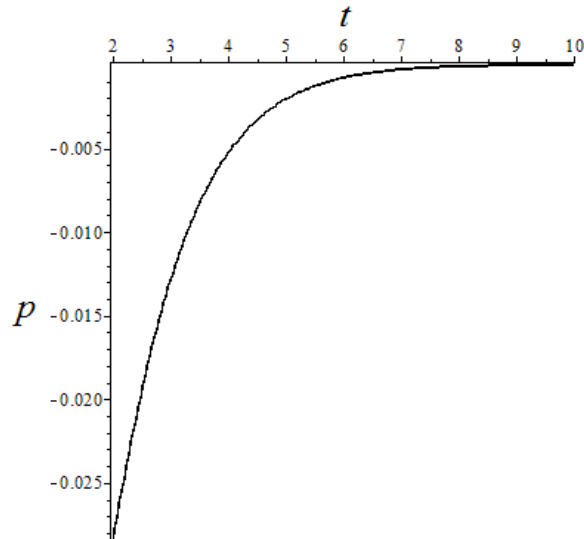


Рисунок 2.- Плотность ρ как функция от t

Рисунок 3.- Давление p как функция от t

Рассмотрели действие g -эссенции (2). Нашли точное аналитическое решение рассматриваемой модели. Восстановили соответствующий потенциал фермионного поля V_2 . Нашли параметры уравнения состояния ω и замедления q . Полученные результаты соответствуют последним наблюдательным данным, согласно которым в настоящее время $\omega \rightarrow -1$.

Если более точные будущие эксперименты СМВ, таких как PLANCK, подтвердят фантомные фазы, то исследования пересечений с фантомным разрывом станут более важными для исследования природы и свойств темной энергии. Таким образом, можно считать, что наши результаты были бы достойной подсказкой для изучения существенных особенностей темной энергии.

Изучение Вселенной, или космология, является наиболее актуальной проблемой для физиков-теоретиков. Именно поэтому предлагается множество моделей, способных описать то или иное состояние, промежуток времени и даже наиболее вероятный сценарий развития Вселенной. Неоспоримыми фактами является: расширение Вселенной, наличие темной энергии, наличие темной материи, значение параметра уравнения состояния. Это означает, что мы на шаг приблизились к разгадке описания Вселенной. Но сказать какая из моделей, теорий точно описывает нашу Вселенную пока невозможно за недостатком экспериментальных данных.

Литература

1. Гуревич Л.Э., Чернин А.Д. Общая теория относительности в физической картине мира // Знание. Москва – 1970. – С.35.
2. <file:///C:/Users/%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C/Downloads/r123a.pdf>
3. Weinberg S. Cosmology // Oxford-2008.
4. Талипова Д.Н., Разина О.В. Космология модели G -эссенции. Решение без пересечения фантомного разрыва // Материалы Международной конференции, в честь 70-летия академика НАН РК Такибаева Н.Ж.-2014.-С. 81-82.
5. Талипова Д.Н., Разина О.В. Нетривиальная космологическая модель G – эссенции // Материалы Международной научно – практической конференции «Уалихановские чтения - 18». – 2014. – т. 5. – С. 143-147.

ӘОЖ 524.1

**МОДИФИКАЦИЯЛАНҒАН ЧАПЛЫГИН ГАЗЫ ЖӘНЕ $F(R)$
ГРАВИТАЦИЯСЫНДАҒЫ ҒАЛАМНЫҢ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ДИНАМИКАСЫ**

Е.М. Мырзакулов, Е.Ү. Тастемір
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
myrzakulov_em@enu.kz, enlik_tastemir@mail.ru

Біз бұл жұмыста Чаплыгин газымен толтырылған Ғаламның үдемелі ұлғаюын сипаттайтын космологиялық модельді қарастырамыз. Ол үшін біз әсерді төмендегідей түрде қарастырамыз [1,2].

$$S = \frac{1}{k^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x f_M, \quad (1)$$

мұндағы $k^2 = 8\pi G$, g метрикалық тензордың $g_{\mu\nu}$ анықтаушы, R -Риччи тензорының скаляры $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ өрнегімен анықталады, мұндағы Риччи тензоры $R_{\mu\nu}$ мынаған тең:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}, \quad (2)$$

мұнда $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ Кристоффель символы болып табылады және ол төмендегі өрнекпен анықталады

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\gamma\lambda}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\lambda}} \right). \quad (3)$$

Егер де әсер (1) өрнегін вариациалайтын болсақ, онда төмендегідей қозғалыс теңдеуін аламыз

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f \partial_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} F(R) + g_{\mu\nu} \square F = k^2 T_{\mu\nu}, \quad (4)$$

мұндағы $F(R) = \frac{df}{dR} = f_R$, $T_{\mu\nu}$ - энергия-импульс тензоры. Немесе (4) теңдеуді төмендегідей түрде жазсақ болады:

$$3\square F(R) + RF(R) - 2f = k^2 T.$$

Жоғарыдағы әсер (1)-мен бірге біз біртекті және изотропты 4 өлшемді кеңістікті сипаттайтын Фридман-Робертсон-Уокер метрикасын қарастырайық [3,4]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\bar{n}^2, \quad (5)$$

мұндағы t космологиялық уақыт, ds^2 - метрика немесе оқиғалар арасындағы аралық деп аталады, $a(t)$ - масштабты фактор. Осы метрика үшін Риччи тензорының скаляры R келесідей анықталады

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}), \quad (6)$$

мұндағы әріптің үстіндегі нүкте t бойынша туындыны білдіреді, $H = \frac{\dot{a}}{a}$ Хаббл параметрі. Белгілі бір математикалық есептеулерден кейін біз осы метрика үшін төмендегідей қозғалыс теңдеулер жүйесін аламыз

$$p = -2\dot{H} - 3H^2, \quad (7)$$

$$\rho = 3H^2, \quad (8)$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p), \quad (9)$$

мұндағы ρ және p Ғаламның толтырылған материяның энергия тығыздығы мен қысымын білдіреді. Егер де осы теңдеулер жүйесіне $F(R)$ функциясының мәндерін әкеліп қоятын болсақ, онда жоғарыдағы (7)-(9) теңдеулер жүйесін қайтадан мына түрде жаза аламыз

$$\begin{cases} 3F(R)H^2 = \frac{(F(R)R - f)}{2} - 3H\dot{F}(R) + k^2 \rho_M, & (10) \\ -2F(R)\dot{H} = \ddot{F}(R) - H\dot{F}(R) + k^2(\rho_M + p_M), & (11) \\ \dot{\rho}_M + 3H(\rho_M + p_M) = 0. & (12) \end{cases}$$

Енді осы теңдеулер жүйесіне төмендегі Чаплыгин газы теңдеуін қолданайық [5]:

$$p = \frac{A}{\rho^\alpha} - B\rho_M. \quad (13)$$

Онда (12) теңдеу келесі түрге келеді:

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{A}{\rho^\alpha} - B\rho\right) = 0. \quad (14)$$

Осы теңдеуді интегралдайтын болсақ:

$$\int \frac{d\rho}{(1-B)\frac{A}{\rho^\alpha}} + \int 3\frac{\dot{a}}{a} dt = 0, \quad (15)$$

мұндағы $0 < \alpha \leq 1$. Біз $\alpha \leq 1$ жағдайын қарастырамыз, сонда теңдеуіміз келесі түрге келеді:

$$\int \frac{d\rho}{(1-B)\frac{A}{\rho}} = \int \frac{\rho d\rho}{(1-B)\rho^2 + A} = \frac{1}{2(1-B)} \ln(A + (1-B)\rho^2), \quad (16)$$

Алған теңдеуді (15) теңдеуге апарып қойғанда мынаны аламыз

$$\frac{1}{2(1-B)} \ln(A + (1-B)\rho^2) + \ln a^3 = \ln C, \quad (17)$$

мұндағы $\rho = \rho(a)$. Онда (11) теңдеу мына түрге келеді:

$$A + (1-B)\rho^2 = \left(\frac{C}{a^3}\right)^{\frac{1}{2(1-B)}}. \quad (18)$$

Осы (18) теңдеуден ρ тығыздықты табатын болсақ, онда

$$\rho_{(a)} = \sqrt{\frac{1}{1-B} \left[\left(\frac{C}{a^3}\right)^{\frac{1}{2(1-B)}} - A \right]}. \quad (19)$$

Ал (10) теңдеуден шығатыны:

$$3\Box F(R_0) + R_0 F(R_0) - 2f(R_0) = k^2 T(H_0), \quad (20)$$

мұндағы $H = H_0$. Бұл теңдеуді қайтып мына түрде жаза аламыз:

$$3\Box F(R_0) + R_0 F(R_0) - 2f(R_0) = k^2 T(3p - \rho). \quad (21)$$

Онда бұл теңдеуді төмендегідей ықшамдауға болады

$$R_0 F(R_0) = R_0 f_R(R_0) - 2f(R_0), \quad (22)$$

мұнда $\rho = \rho_0$ және $H = H_0$ екенін ескере отырып (8) теңдеуді қайтадан келесідей жазсақ болады:

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{1}{1-B} \left[\left(\frac{C}{a^3}\right)^{\frac{1}{2(1-B)}} - A \right]}, \quad (23)$$

онда масштабты фактор төмендегі қатынас арқылы беріледі:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \rightarrow a(t) = a_0 e^{H_0 t}. \quad (24)$$

Мұндағы Чаплыгин газы мына түрге келеді:

$$p_0 = \frac{A}{\rho_0} - B\rho_0. \quad (25)$$

Жоғарыдағы (25) теңдеу келесі түрге келеді:

$$p_0 = \frac{A}{\sqrt{\frac{1}{1-B} \left[\left(\frac{C}{a^3} \right)^{\frac{1}{2(1-B)}} - A \right]}} - B \sqrt{\frac{1}{1-B} \left[\left(\frac{C}{a^3} \right)^{\frac{1}{2(1-B)}} - A \right]}. \quad (26)$$

Күй теңдеуі параметрі ω қарастырылып отырған модель үшін келесі формуламен анықталады:

$$\omega = \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (27)$$

мұндағы ρ_0 энергия тығыздығы, p_0 қысым. Осы теңдеуге (23) және (26) теңдеулерін әкеліп қоятын болсақ, онда

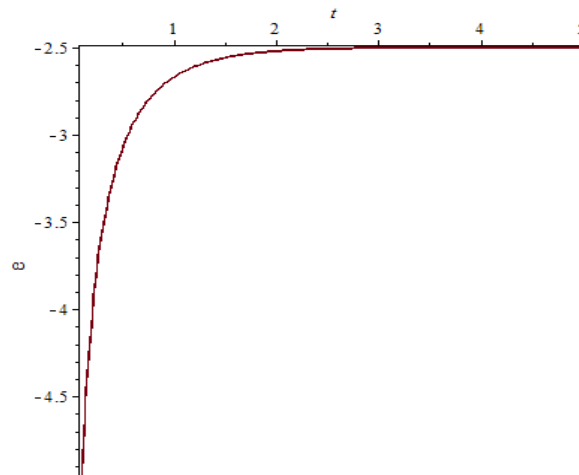
$$\omega = \left(\frac{A}{\sqrt{\frac{1}{1-B} \left[\left(\frac{C}{a^3} \right)^{\frac{1}{2(1-B)}} - A \right]}} - B \sqrt{\frac{1}{1-B} \left[\left(\frac{C}{a^3} \right)^{\frac{1}{2(1-B)}} - A \right]} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-B} \left[\left(\frac{C}{a^3} \right)^{\frac{1}{2(1-B)}} - A \right]}}. \quad (28)$$

Немесе бұл теңдеуді ықшамдайтын болсақ

$$\omega = \frac{A}{\frac{1}{1-B} \left[\left(\frac{C}{a^3} \right)^{\frac{1}{2(1-B)}} - A \right]} - B. \quad (29)$$

Бұл теңдеудің графигі 1 суретте берілген. Нақтырақ айтатын болсақ мұнда күй теңдеуінің параметрі ω -ның t уақыт бойынша тәуелділігі көрсетілген.

Сонымен біз бұл жұмыста Фридман-Робертсона-Уокер метрикасы үшін және Чаплыгин газымен толтырылған Ғаламның үдемелі ұлғаюын қарастырдық. Осы модель үшін біз әсерді, қозғалыс теңдеулерін, ρ_0 энергия тығыздығын, p_0 қысымын және күй теңдеуінің параметрі анықтадық. Осы күй теңдеуі параметрінің уақытқа тәуелділік графигін тұрғыздық. Бұл суреттен көріп отырғанымыздай уақыт өзгерген сайын күй теңдеуінің параметрі ω минус бірге ұмтылады. Бұл нәтиже қазіргі кездегі астрономиядағы алынған бақылау мәліметтеріне сәйкес келеді.



Сурет 1. Күй теңдеуінің параметрі ω -ның t уақытқа тәуелділігі

1. Aktas C., Aygun S. and Yilmaz I. Behaviors of dark energy and mesonic scalar field for anisotropic universe in $f(R)$ gravity // *Physics Letters B.* – 212. – Vol. 707. – P. 237-242.
2. Cognola G., Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S.D., Sebastiani L. and Zerbini S. Class of viable modified $f(R)$ gravities describing inflaton and the onset of accelerated expansion // *Physical Review D.* – 2008. – Vol. 77 // DOI:10.1103/PhysRevD.77.046009.
3. Frieman J., Tumer M., Huterer D. Dark Energy and the Accelerating Universe // *Annual Review of Astrophysics.* – 2008. – Vol. 46. – P. 385-432.
4. Sharif M., Yesmakhanova K., Rani S., Myrzakulov R. Solvable K-essence Cosmologies and Modified Chaplygin Gas Unified Models of Dark Energy And Dark Matter // *The European Physical Journal C.* – 2012 – Vol. 72 // DOI:10.1140/epjc/s10052-012-2067-1.
5. Jamil M., Myrzakulov Y., Razina O., Myrzakulov R. Modified Chaplygin Gas and solvable f -essence cosmologies // *Astrophysics and Space Science.* – 2011. – Vol. 336. – P.315-325.

УДК 531+524.3/4

МОДЕЛЬДІК ПОТЕНЦИАЛДЫҢ ЖҰЛДЫЗ ТРАЕКТОРИЯСЫНА САНДЫҚ ЕСЕПТЕУ

Д. И.Кенжалиев, З.Ж.Каленова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
dossymken@mail.ru, zarina_92kargu@mail.ru**1. Кіріспе**

Жұлдызды динамика - гравитациялық өрістің әсерінен жұлдыздардың қозғалысын, онымен қоса жұлдыз жүйесінің құрылымын, гравитация өрісінің нәтижесі бойынша эволюциясын зерттейтін жұлдызды астрономия бөлімі. Негізгі зерттеу объектілері: шашыранды және шар тәрізді жұлдыздар шоғырлары, ғаламдар (солардың ішінде Құс жолы немесе өте көп Ғалам шоғырлары жатады. Сондықтан, бұл мәселеге жұлдыздар жүйесінің динамикасы тарапынан қараймыз [1,2].

Ғалам (ежелгі грек тілінен γαλαξίας «Құс жолы» аудармасы «сүт») - бұл жұлдыздар мен жұлдыздар жиыны, жұлдызаралық газ және шаң, қара материя гравитациялық - байланысқан жүйе. Ғалам құрамындағы бүкіл объекттер ортақ орталық масса қозғалысына қатысады

Құс жолы - біздің Күн жүйеміз орналасқан торланған спираль тәрізді ғалам. Оның құрамында 200 - 400 миллиардтай басқа да жұлдыздар кіреді, ал олар өз ішінде жүздеген, мыңдаған тұмандықтар мен жұлдыз шоғырларынан тұрады. Құс жолының көлденеңі - 100000 жарық жылындай, ал қалыңдығы - 10000 жарық жылындай. Құс жолы ғаламының бір бөлігін сүт жолағы тәрізді кейіпте көрінеді [1].

Жұлдыздар қозғалысын келесі қарапайым екі потенциалдың қосындысы бойынша қарастырамыз: гравитациялық тартылыс өрісі (Ньютон потенциалы) - ғалам центрі потенциалын және квазисерпімді потенциал (Гук потенциалы) - жұлдыздың маңындағы басқа жұлдыздардың тартылыс күштерін қосқандағы қорытқы өрісі потенциалын зерттейді. Сондықтан жалпы потенциал осындай әсерлердің барлығында модельді түрде бейнеленеді.

$$\Phi = \frac{\mu}{\sqrt{R^2 + Z^2}} - AR^2 - BZ^2 \quad (1)$$

Бертран теоремасына сәйкес әр потенциалында қозғалыс тұйық және эллипс тәрізді болады.

Үшөлшемді потенциалда қозғалысқа сандық және аналитикалық зерттеу жасау керек. Бірақ ол үшін үшөлшемді теңдеуді екі өлшемдіге келтіру керек. Ол үшін (1) теңдеуден $J^2/2R^2$ азайтамыз:

$$\Phi = -\frac{J^2}{2R^2} + \frac{\mu}{\sqrt{R^2 + Z^2}} - AR^2 - BZ^2 \quad (2)$$

Біздің мақсатымыз жұлдыздардың қозғалыс траекториясын ілеспе жазықтықта табу. Ол үшін жұлдыздың гравитациялық өрістегі қозғалыс теңдеулерін интегралдаймыз және алынған теңдеулерін ілеспе жазықтық траекториясын салу.

Мысал ретінде осы формуламен сипатталатын Ғалам потенциалында қозғалатын жұлдызды алайық. Жұлдыздардың осы потенциалында қозғалысын екі шама арқылы сипаттайды: R және Z . Өйткені потенциал θ бұрышқа тәуелді емес. θ бұрыштары жұлдыздың экватор жазықтық бойымен белгілі бір таңдаулы бағыттан бұрыштық қашықтығын білдіреді. Біздің Ғаламымыздың өлшемдері зерттеліп отырған жүйенің өлшемдеріне жуық деп қарастырып, ал жұлдыздың Ғалам центрінен қашықтығы R және жұлдыздың Ғаламның симметрия жазықтығынан Z қашықтығы ғаламның әртүрлі облыстарында әртүрлі мәндерді қабылдайды. R мен Z шамаларын қарастырғанда біз жұлдыздың ілеспе жазықтығында қозғалысын зерттейміз. Ілеспе жазықтық дегеніміз жұлдызбен бірге қозғалатын меридиандық жазықтықты айтамыз. Жұлдыздар жылдамдығы v_R және v_Z меридиандық жазықтықтағы құраушылары, ал оған перпендикуляр бағыттағы θ бойынша құраушысы, $v_\theta = 2.6 \text{ кпк}(10^{-7} \text{ жыл}^{-1})$. Сол себепті, Ғалам центріне қатысты жұлдыздың қозғалыс мөлшері моменті $21 \text{ кпк}^2 \cdot 10^{-7} \text{ жыл}^{-1}$ -ға тең болады. Астрономиялық масштаб бойынша арақашықтық килопарсекпен есептеледі: $1 \text{ кпк} = 30,857 \cdot 10^{15} \text{ км}$, ал уақыт аралықтары өте үлкен, бірлігі: $10^7 \text{ жыл} = 31,557 \cdot 10^{13} \text{ с}$

Біз (1) теңдеу үшін тұрақтыларды, Күн маңындағы аймақта денелерге әсер ететін күш үшін алынған келесі теңдеуден таптық: $F = \frac{\mu}{R^2} + AR$.

$$\text{Мұндағы: } \mu = 99,96 \text{ кпк}^3 / (10^7 \text{ жыл})$$

$$A = 0.001 (10^7 \text{ жыл})^{-2}$$

$$\text{Мұндай қозғалыста жұлдыз энергиясы: } E = \frac{v_R^2 + v_Z^2}{2} + \frac{J^2}{2R^2} - \Phi = -8.836 \text{ (кпк } 10^{-7} \text{ жыл)}^2$$

Мұндағы v_R және v_Z айналасындағы жұлдыздардың қозғалысын есепке алмаған кездегі Күннің жылдамдық құраушыларына тең:

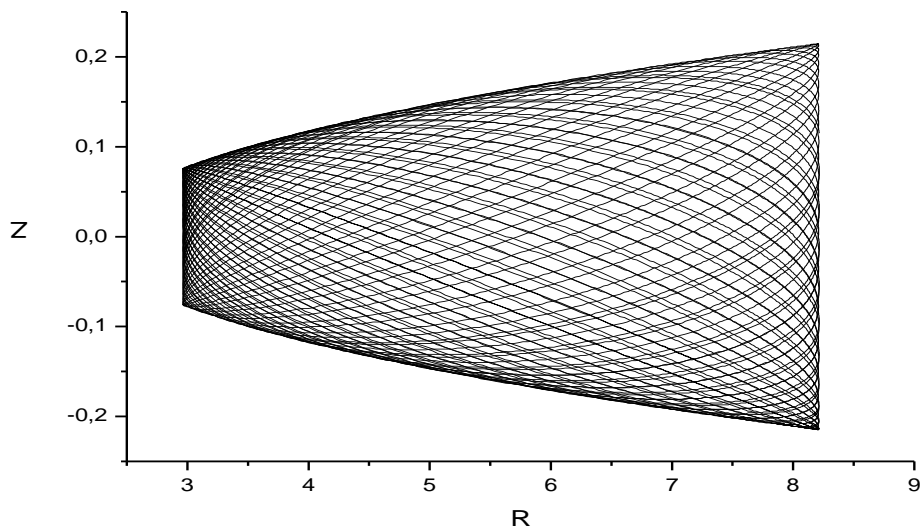
$$v_R = -0.098 \text{ кпк}(10^{-7} \text{ жыл}^{-1})$$

$$v_Z = 0.079 \text{ кпк}(10^{-7} \text{ жыл})^{-1} \quad (3)$$

Қозғалыс траекториясын есептеу үшін Dev C++ программасын қолдандық. C++ программалаудың ең танымал тілі. Бұл программада төрт дифференциалдық қозғалыс теңдеуін интегралдадық [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= v_R \\ \frac{dZ}{dt} &= v_Z \\ \frac{dv_R}{dt} &= \frac{J^2}{R^3} - \frac{\mu \cdot R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} - 2AR \\ \frac{dv_Z}{dt} &= -\frac{\mu \cdot Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} - 2BZ \end{aligned} \quad (4)$$

Интегралдау нәтижесінде алынған шешімге бастапқы шарттарды енгіземіз: $R_0 = 8.2 \text{ кпк}$, $Z_0 = 0.015 \text{ кпк}$, $J = 21 \text{ кпк}^2 \cdot 10^{-7} \text{ жыл}^{-1}$, $A = 0.005$, $B = 0.001$, $\mu = 99,96 \text{ кпк}^3 / (10^7 \text{ жыл})$, v_R және v_Z Траектория нүктелерінің координаттарының табылған мәндері арнаулы алапта жиналады. Алынған мәндерді пайдаланып, Origin 7 программасы көмегімен траектория суретін салдық.



Сурет 1. Сәйкес жазықтықта модельдік потенциалдың қозғалыс траекториясы,

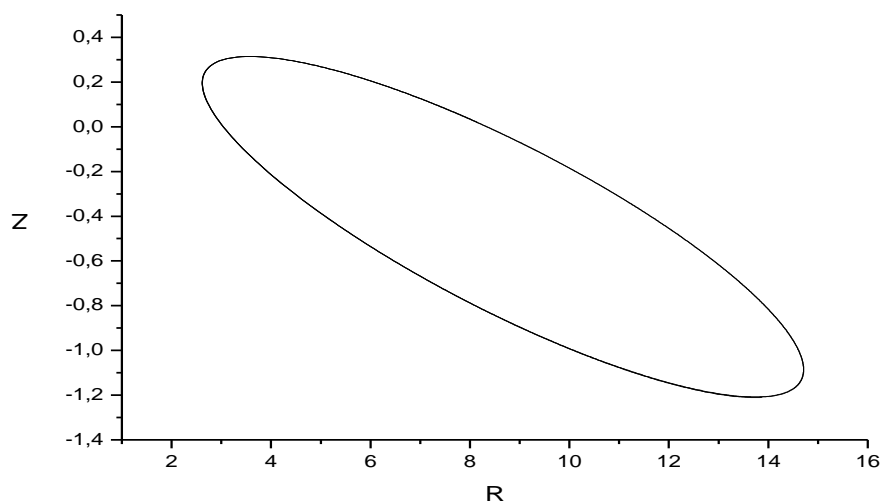
$$\Phi = \frac{99,96}{\sqrt{R^2 + Z^2}} - 0.005R^2 - 0.001Z^2, 4050 \text{ нүкте.}$$

Ілеспе жазықтықта траектория төрт төбесі бар жәшіктің ішінде орналасқан. Жәшіктің қабырғалары түзу кесінді болмауы мүмкін. Әрбір орамы әрбір қабырғасынан бір жанап өтеді. Жәшіктің түрі потенциалдың түріне және бастапқы жағдайларға тәуелді.

Ал енді Ньютон -Гук потенциалының ең жай жағдайында, Ньютон потенциалында жұлдыз қозғалысын зерттейік, яғни квазисерпімді потенциалы нөлге тең болған кездегі жағдайды қарастырайық:

$$\Phi = \frac{\mu}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \quad (5)$$

Осы потенциал үшін жұлдыздың қозғалыс тендеулерін (4) интегралдап, алынған шешімдерін пайдаланып, график салатын болсақ:



Сурет 2. Сәйкес жазықтықта Ньютон потенциалының қозғалыс траекториясы,

$$\Phi = \frac{99,96}{\sqrt{R^2 + Z^2}}, 450 \text{ нүктеден тұрады.}$$

Бастапқы шарттарды келесі түрде аламыз: $v_{RO} = -2.50$ кпк(10^{-7} жыл $^{-1}$), $R_0 = 8.2$, $Z_0 = 0.015$, $v_{Z0} = 0.25$ кпк(10^{-7} жыл $^{-1}$), $\mu = 99,96$ кпк 3 /(10^7 жыл), $J=21$ кпк $^2 \cdot 10^{-7}$ жыл $^{-1}$.

Ньютон потенциалында ілеспе жазықтықтағы траектория бірінші суреттегі траекториямен салыстырғанда тұйықталған эллипс тәрізді сызық болып табылады. Нүкте санын көбейте берген сайын траектория осы қисық сызық бойында орналасады.

Қорытынды

Dev C++ программасында пайдаланып модельдік потенциалдың әр түрінде ілеспе жазықтықта жұлдыз қозғалыс траекториясын зерттеудің мол мүмкіндігі ашылады. Біздер тек екі жағдайын қарастырдық. Осы жағдайлардың траекториясын графиктік түрде бейнелеу мүмкін болды. Болашақта модельдік потенциалдың әр түрлерінде жұлдыздардың әр түрлі траекторияларын зерттеуге болады.

Әдебиеттер

1. Вселенная, Библиотека Энциклопедий, Фолиант, 2012 жыл, 22-23 беттер.
2. П.И. Бакулин, Э.В. Кононович, В.И. Мороз. Курс общей астрономии. – М.: Наука, 2004 жыл, 434 бет.
- 3.«Исследование движения тел в полях, характеризующихся потенциалами, близкими к интегрируемым» Кенжалиев Д.И диссертациялық жұмысы. 1994 жыл.

УДК 53.098, 53.097

ВЛИЯНИЕ УВЛАЖНЕННОСТИ СЛОЯ ДНЕВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕСТЕСТВЕННОГО ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

М.Е. Долгий, С.Г. Катаев

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томский
государственный педагогический университет. Томск, Россия
maximevdolgyu@mail.ru, sgkataev@sibmail.com

В настоящее время наблюдается рост интереса к естественному импульсному электромагнитному полю Земли, как возможному индикатору предстоящих землетрясений и оползней. Попытки отыскать в регистрируемых сигналах информационные признаки того или иного явления трудно назвать успешными. Это объясняется тем, что датчики принимают некий суммарный сигнал, поступающий от множества источников. А, кроме того, характеристики регистрируемого сигнала сильно зависят от состояния среды, в которой располагается датчик. Основная проблема при интерпретации сигналов естественного импульсного электромагнитного поля Земли состоит в отсутствии представления о вкладе того или иного механизма в суммарный сигнал.

В данной статье представлены некоторые результаты совместного анализа данных временных рядов естественного импульсного электромагнитного поля Земли и ряда метеорологических параметров. Предлагается модель, объясняющая особенности поведения характеристик сигнала от увлажненности среды, в которой располагается датчик.

Введение

Впервые электризацию при пластическом деформировании, наблюдал Степанов А. В. в 1933 году [1]. Он исследовал нагружение не склонных к проявлению пьезоэффекта кристаллов каменной соли и зафиксировал появление электромагнитных импульсов в процессе деформации образцов [2]. Позже проводились исследования влияния условий деформирования и различных факторов (таких как: примеси, облучение, температура, наличие внешнего электрического поля) на характер электризации ионных кристаллов в процессе их пластической деформации [3]. Практического применения в то время данное открытие не нашло.

Современные представления о природе электромагнитной эмиссии были разработаны профессором Воробьевым А. А. в 1950-70 годах. Интерес к этому процессу, как индикатору разрушения горных пород, возрос в 70-х годах в связи с проблемой прогноза землетрясений. В это же время вводится понятие «естественное импульсное электромагнитное поле Земли» [4,5]. Оказалось, что при подготовке землетрясений характер возмущения естественного импульсного электромагнитного поля Земли имеет определенные особенности. Например, возрастает интенсивность электромагнитных импульсов предвестии землетрясения [6,7]. Именно процесс неустойчивого деформирования горных пород, как в земной коре, так и на образцах, сопровождается возбуждением многочисленных механоэлектрических преобразователей, причем динамичность и масштабность развития начальной стадии процесса разрушения определяет характеристики процесса электромагнитной эмиссии [6]. Так, с ростом магнитуды землетрясения, то есть с ростом масштаба зоны подготовки и с возрастанием объема горных пород участвующих в деформировании, эффекты электромагнитной природы и уровень естественного электромагнитного поля Земли, в частности, возрастают [3,8].

На ранней стадии практического изучения электромагнитной эмиссии в лабораторных условиях было показано, что она возникает при механическом воздействии на диэлектрические материалы. В [3, 9] было выдвинуто предположение о том, что генерирование электромагнитных колебаний в радиоволновом диапазоне является убедительным доказательством развития электрического газового разряда в растущей трещине нормального отрыва. Согласно этой гипотезе процесс трещинообразования сопровождается накоплением разноименных зарядов на бортах трещин.

В дальнейшем явление электромагнитной эмиссии было исследовано, как в России, так и за рубежом, при деформациях различных материалов, включая щелочно-галоидные кристаллы, металлы и сплавы, монокристаллы, горные породы и лед. Были организованы лабораторные и натурные исследования, важнейшие результаты которые, заключаются в открытии возникновения ультранизкочастотных излучений перед землетрясениями, оползнями, а также закономерностей увеличения количества электромагнитных сигналов перед внезапными выбросами горной породы и газа. Данные работы проводились в Канаде, Японии, Китае, Индии, Израиле и России [2,7, 10, 11].

Очевидно, что в литосфере протекает множество процессов, ведущих к появлению электромагнитных полей вследствие известных в неравновесной термодинамике перекрестных эффектов между полями различной природы, причем большинство из них носит случайный характер. В частности, в работах [12, 13, 14, 15] было показано, что пьезоэлектрический и пьезомагнитный эффекты сильно зависят от механических напряжений и вызывают электромагнитные возмущения в среде. Однако, ввиду слабой поляризации, эти возмущения не сопровождаются доступными простому измерению вариациями электромагнитных полей, и обычно, при изучении электромагнитных импульсов, рассматриваются как фон, на котором проявляются возмущения, связанные с необратимыми деформациями. Состояния избыточной электризации, вызываемые в геологических средах механическими напряжениями, неустойчивы и быстро релаксируют. Процессы релаксации в ближней зоне источников сопровождаются проявлениями заметных токов проводимости и индуцируют магнитные поля; в дальней зоне наблюдаются возмущения полей волнового характера, трудно отличимые от промышленных помех, полей атмосфериков, излучения магнитосферы и ионосферы.

Применяемая для регистрации электромагнитных импульсов аппаратура, фиксирует количество импульсов в единицу времени, но не амплитуды каждого импульса, а только первого сигнала, что позволяет только качественно оценить энергию протекающего процесса и, следовательно, не отражает адекватно реальную ситуацию изменений напряженного деформированного состояния на участке наблюдений.

Несмотря на большое количество проведенных исследований при интерпретации естественного импульсного электромагнитного поля Земли, основной вопрос состоит в отсутствии представления о вкладе того или иного механизма в суммарный сигнал. Решение этой проблемы возможно только на пути использования комплексного подхода, включающего в себя не только анализ экспериментальных данных, теоретическое моделирование, но и целенаправленные экспериментальные исследования.

В данной статье представлены результаты анализа данных временных рядов естественного импульсного электромагнитного поля Земли и решение модельной задачи, объясняющей особенности его поведения.

Измерение естественного импульсного электромагнитного поля Земли.

Процесс проведения измерений естественного импульсного электромагнитного поля Земли представляет собой аналог геолокации с единственным отличием, что применяется только антенна-приемник, которая собирает электромагнитные волны, пришедшие из исследуемой среды (почвы или литосферы). Как известно, электрические волны, распространяясь в диэлектрической среде, при переходе из одного слоя вещества в другой терпят преломление и отражение. Кроме того, в зависимости от среды, часть энергии волны поглощается.

Датчики, собирающие информацию естественного импульсного электромагнитного поля Земли, находятся на небольшой глубине от дневной поверхности (порядка 0,4-0,6 м). Каждый датчик принимает сигналы за определенный временной период, при этом фиксируется амплитуда первого в интервале времени сигнала, в направлении Север – Юг, а также Восток – Запад, и число импульсов за данный интервал по каждому направлению. В [16] было предложено использовать для анализа обобщенную скалярную меру энергии излучения:

$$E = \sqrt{(n_{sn} B_{sn}^2)^2 + (n_{we} B_{we}^2)^2},$$

где B_{sn} и B_{we} - амплитуды в направлении Север – Юг и Восток – Запад, n_{sn} и n_{we} - соответствующие количества импульсов в единицу времени, E - обобщенная мера энергии излучения.

В работе [16] показано, что временные ряды обобщенной энергии естественного импульсного электромагнитного поля Земли и температуры приземного слоя атмосферы хорошо коррелируют между собой (коэффициент корреляции составляет 0,46). Также высказано предположение о связи обобщенной энергии естественного импульсного электромагнитного поля Земли и увлажненностью верхнего слоя почвы. На рисунке 1 представлены временные зависимости обобщенной меры энергии естественного импульсного электромагнитного поля Земли, уровня осадков и минимальной суточной температуры. Данный график показывает, что при повышении уровня осадков мера энергии резко снижается.

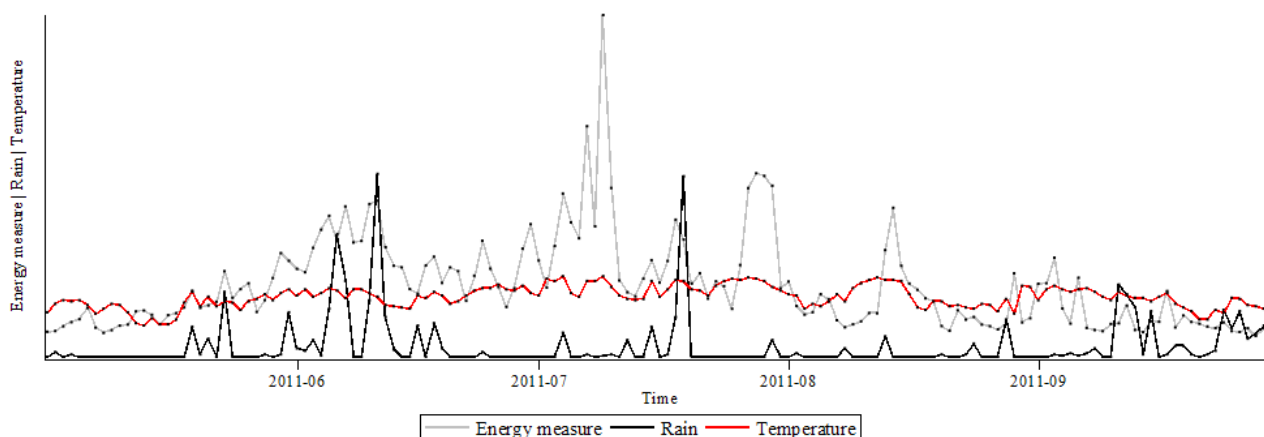


Рисунок 1. График обобщенной меры энергии естественного импульсного электромагнитного поля Земли, уровня осадков и минимальной приземной температуры воздуха

Задача тепло-влажноперевода и диэлектрическая проницаемость среды.

Самые важные параметры среды, определяемые ее электрическими свойствами, это удельное затухание и скорость распространения электромагнитных волн в среде.

В случае распространения электромагнитной волны в диссипативных средах с затуханием, амплитуда сигнала будет уменьшаться по экспоненциальному закону:

$$E(\xi) = E_0 \exp(-\alpha\xi). \quad (1)$$

В почво-грунтах, представляющих собой слоистую структуру, параметр α , характеризующий затухание, будет зависеть от природы слоя и от уровня его влажности. При изучении естественного импульсного электромагнитного поля Земли, как индикатора массовых разрушений структур, ведущих к возникновению оползней и землетрясений, необходимо не только проводить постоянный мониторинг уровня обобщенной энергии поля, но и уметь корректно интерпретировать поведение естественного импульсного электромагнитного поля Земли, характеристики которого сильно зависят от сторонних факторов, таких, как, например, резкое изменение диэлектрической проницаемости среды вблизи датчика-приемника, вызванное увлажнением, как следует из рисунка 1.

Очевидно, что процессы распространения влаги в сложной пористой системе, типа почва-грунт, является сложным процессом тепло-влажнопереноса [17].

В толще влажной почвы передача тепла осуществляется различными способами. Через твердый скелет и пленки влаги тепло передается путем механизма теплопроводности. В порах, заполненных влагой и воздухом, помимо теплопроводности существует теплообмен, идущий посредством конвекции и излучения. Поэтому коэффициент теплопроводности почвы есть некоторый эффективный параметр, зависящий от структуры почвы, ее физико-химических свойств, температуры и влажности. Исходя из этого, мы представляем почву в виде жесткого каркаса, состоящего из вещества A , остальное пространство занимают поры, как-либо заполненные веществом B и хаотично разбросанными вкраплениями из материала C [18]. Тогда эффективный коэффициент теплопроводности такой системы можно записать в виде:

$$\lambda = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, m_2, m_3), \quad (2)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - коэффициенты теплопроводности каркаса, пор, вкраплений соответственно, m_2, m_3 - объемная доля пор и вкраплений.

Предлагаемая модель почвы относится к классу моделей с взаимопроникающими компонентами. Для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности воспользуемся эмпирической формулой, предложенной в [19]:

$$\lambda = \lambda_1 \left[1 - \frac{m_3}{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{1 - m_3}{3}} \left(c^2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - c)^2 + 2c \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - c) \left(1 - c + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} c \right)^{-1} \right) \right], \quad (3)$$

где λ_1 определяется согласно [20], а c - параметр, характеризующий относительный размер каркаса ($|c| < 1$).

Процесс влажнопереноса в почвах и грунтах представляется множеством процессов, многие из которых еще не изучены в полной мере. Выделяют два основных процесса: впитывание и фильтрацию жидкости. Впитывание идет при частичном заполнении пор водой, а под фильтрацией понимают нисходящее передвижение влаги при полном заполнении всех пор водой. Опыт показывает, что суммарный процесс движения влаги в почвах и грунтах можно описать обычным уравнением Фика. Коэффициент диффузии в данном уравнении также будет некоторой эффективной величиной [19]. Так, из опыта известно, что коэффициент диффузии с увеличением влажности некоторых почв и грунтов возрастает, в отличие от коэффициента температуропроводности - «диффузии тепла». Такое различие влияния температуры на теплообмен и влажности на диффузию связано с различием физических механизмов теплопроводности и диффузии. Существенным оказывается и зависимость коэффициента диффузии от характера пористости: при одной и той же общей пористости скорость диффузии будет зависеть от размера пор, так как с ростом размера пор возрастает роль обычного просачивания воды (механизма фильтрации) под действием силы тяжести [21]. Кроме того, надо учитывать, что часть воды в порах связывается и не участвует в процессах диффузии. Эти обстоятельства и привели к необходимости определять коэффициенты диффузии для изучаемых материалов эмпирически [18, 21].

Рассматривается пористый материал, обладающий однородными свойствами вдоль направлений x и y . Положительная ориентация оси z направлена вглубь подповерхностного слоя. Для того чтобы найти распределение температуры $\Theta(z, t)$ и влажности $\Psi(z, t)$ в этом слое толщиной L : ($0 \leq z \leq L$), необходимо решить следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\lambda(\Theta(z, t), \Psi(z, t))}{C\rho(z)} \frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial z} \right], \\ \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\Theta(z, t), \Psi(z, t)) \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial z} \right]; \end{cases} \quad (4)$$

где $\lambda(\Theta(z, t), \Psi(z, t))$ - эффективный коэффициент теплопроводности, $D(\Theta(z, t), \Psi(z, t))$ - эффективный коэффициент диффузии, C - удельная теплоемкость, а ρ - плотность материала. При

этом считается, что начальные распределения температуры и влажности, а так же граничные условия известны:

$$\begin{cases} \Theta(z,0) = \theta_0(z), \\ \Psi(z,0) = \psi_0(z), \\ \Theta(0,t) = \Theta_0(t), \\ \Theta(L,t) = \Theta_L(t), \\ \Psi(0,t) = \Psi_0(t), \\ \Psi(L,t) = \Psi_L(t); \end{cases} \quad (5)$$

В случае многослойной задачи добавляются условия равенства потоков тепла на каждой из границ слоев и равенство температур на границе. Аналогичные условия записываются и для влажности.

Из решения системы (4) - (5) совместно с данными из [22], находим $\Psi(z,t)$, а для расчета диэлектрической проницаемости используем формулу [23]:

$$\varepsilon = \varepsilon^B (\Psi - \Psi_p)^t + \varepsilon^C \quad (6)$$

где $\varepsilon, \varepsilon^B, \varepsilon^C$ - диэлектрические проницаемости смеси, воды и сухого материала, Ψ_p - порог протекания, t - показатель степени. На рисунке 2 построена зависимость действительной части комплексной диэлектрической проницаемости от объемной концентрации влаги в грунте при частотах порядка 500 МГц. Данный график показывает, что диэлектрическая проницаемость грунта (изображен глинистый грунт) с увеличением объемной концентрации влаги растет, крайние значения отличаются примерно в 8 раз.

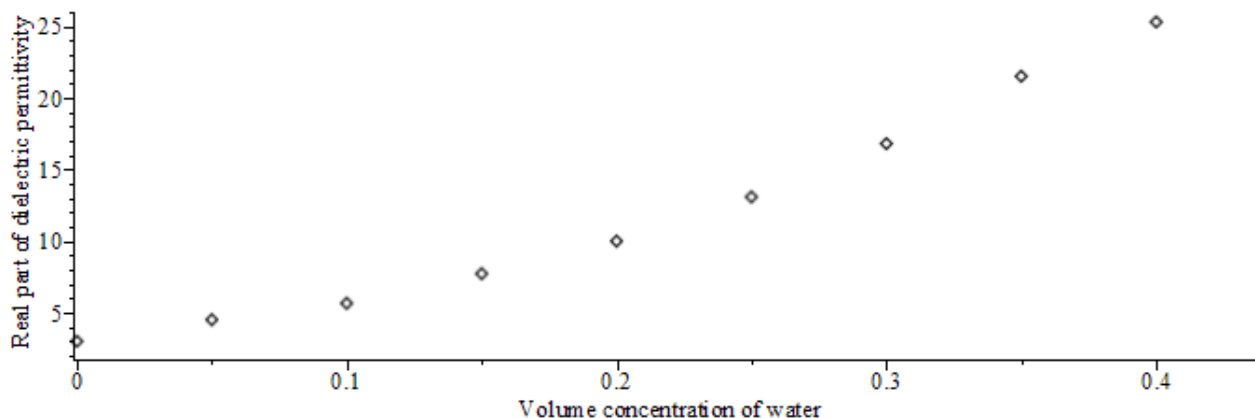


Рисунок 2. Зависимость действительной части комплексной диэлектрической проницаемости глинистого грунта от объемной концентрации в нем влаги

Данная модель была использована для оценки изменения профиля влажности в слоистых почво-грунтах в процессах увлажнения и высыхания, что, в свою очередь, позволило вычислить эффективные коэффициенты поглощения и оценить изменения амплитуды естественного импульсного электромагнитного поля Земли в этих процессах. Полученные результаты неплохо согласуются с наблюдаемыми данными.

Выводы.

Полученные обобщения данных показывают, что резкое падение обобщенной меры энергии естественного импульсного электромагнитного поля Земли вызвано изменением диэлектрической проницаемости грунта или почвы, благодаря росту увлажненности, что в свою очередь ведет к более высокой скорости затухания электромагнитных волн в данной среде.

Решение задачи тепло-влажнопереносa приводит к нахождению поля увлажненности почвы, что позволяет оценивать потери обобщенной меры энергии естественного электромагнитного поля Земли.

Данные исследования показали, что решение задачи по определению глубины проникновения поля увлажнения, может благоприятно отразиться на размещении датчиков-приемников под дневной поверхностью земли. При нахождении критической глубины проникновения и размещении датчика-приемника ниже нее, можно обеспечить наименьшую зависимость полученных данных от увлажненности верхнего слоя поверхности земли.

Литература

1. Stepanow A.W. Uberden Mechanismus der plastischen Deformation // Zeitschrift fuer Physik, 1933. – Bd. 81, H. 7-8. – S. 560 – 564
2. Dov Bahat, Avinoam Rabinovich, Vladimir Frid. Tectonofractographic and Electromagnetic radiation Methods. Springer Berlin Heidelberg New York. Library of Congress Control Number: 2004108439. – 2005. – 579 с.
3. Хатиашвили Н. Р., Гогошидзе Д. А., Зилипимидзе Д. О. / «Об электромагнитном излучении при подготовке землетрясений и горных ударах в шахтах Ткибули» // Сообщ. АН СССР, 1983. – Т. 110. - №2. – с. 305 – 308
4. Воробьев А. А. О возможности Электрических разрядов в недрах Земли. – Геология и геофизика, 1970, № 12, с. 3-13.
5. Воробьев А.А. Тектоэлектрические явления и возникновение естественного импульсного электромагнитного поля Земли – ЕИЭМПЗ – Томск, 1979, - 585 с. – Рукопись представлена Томским политехническим институтом: часть 1 - № 4296-79 – 202 с.; часть 2 - № 4297-79 – 149 с.; часть 3 - № 380-80 – 243 с.
6. Проскуряков В. М., Шабаров А. Н., Фрид В. И., Баранов В. А. / «Экспресс-оценка динамических явлений на угольных пластах методом ЭМИ» / Научное издание. Кемеровское книжное издательство, 1991. 95 стр.
7. Яковицкая Г. Е. «Разработка метода и измерительных средств диагностики критических состояний горных пород на основе электромагнитной эмиссии», Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук: 25.00.20. – М.: РГБ, 2007
8. Сурков В. В. Электромагнитные эффекты при землетрясениях и взрывах. - М.: МИФИ. 2000. - 448 с.
9. Тюрникова Л. А., Авербух Б. Г., Москвитин Н. И., Кротова Н. А. / «Исследование параметров радиоизлучения при нарушении адгезии полимер-твердое тело» // ДАН СССР. – 1971. – Т. 201, №4. – с. 833 – 836
10. Трикель М. Г., Туманов В. В., Савченко А. В., Юфа Я. М., Шурховечкий С. А., Сухинина Е. В. // УкрНИИ НАНУ. Наукові праці УкрНДМІ НАН України, №1, 2007. С. 55 – 68
11. Ogawa T. Electromagnetic radiation from rocks [Text] / T. Ogawa, K. Oike, T. Minura // Journal Geophys Research – 1985. Vol. 90. -D4. – P. 6245 – 6249.
12. Защинский А. А. Саломатин В. Н., Матов Ш. Р., Методические рекомендации по применению методов регистрации естественного импульсного электромагнитного поля Земли при изучении оползневых процессов, Симферополь, 1983. – 75 с.
13. Соболев Г.А., Демин В.М. Механоэлектрические явления в Земле. М.: Наука. 1980. 215с.
14. Соболев Г.А., Гохберг М.Б. и др. Электромагнитные предвестники землетрясений. М.: Наука. 1982.
15. Матов Ш.Р., Гольд Р.М., Яворович И.В. Влияние масштабного фактора на электромагнитную эмиссию / Томск, политех. институт. - Томск, 1987. - 12 с. - Деп. в ВИНТИ 19.11.87, N 8167- В87.
16. Долгий М.Е. Катаев С.Г. Исследование естественного импульсного электромагнитного поля Земли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2015, № 2(34), с. 61 – 70.
17. Катаев С.Г. Алгоритмические и программные средства аналитического и неразрушающего контроля параметров природной среды на основе метода выделения структур: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук: 05.11.13 [Место защиты: Томский Политехнический университет]. - Томск, 2013. - 355 с.
18. Hanai T. Dielectric Theory on the Interfacial Polarization for Two Phase Mixtures // Bull. Inst. Chem. Res., Kyoto Univ. - 1975. vol. 53, №2. - P. 153-160.
19. Wang J. R. An empirical model for the complex dielectric behavior of soil as a function of water content / J. R. Wang, T. J. Schmugge // IEEE Trans. Geosci. Rem Sensing. - 1980. v. 18, №4 - p. 280-295.
20. Hanssen-Bauer I. Temperature and precipitation scenarios for Norway. Comparison of results from dynamical and empirical downscaling / I. Hanssen-Bauer, E. J. Forland, J. E. Haugen, O. E. Tveito // Climate Research. 2003. - vol 25. - P. 15-27.
21. Шутко А. М. СВЧ-радиометрия водной поверхности и почвогрунтов / А. М. Шутко. М. : Наука, 1986. - 190 с.
22. Daley R. Atmospheric Data Analysis / R. Daley Cambridge University Press, 1991.
23. Khakiev Z.B. Improving GPR monitoring of track ballast and railway structural integrity / Z.B Khakiev, V.A Bilalov, A.V Morozov and V.A. Yavna // First break 2009. V. 27. - P. 93-95.

УДК 524.834

ЭВОЛЮЦИЯ ГАЗОВОГО ШАРА ДЛЯ БИМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ F(R) ГРАВИТАЦИИ

К.К.Ержанов, С.С. Алтыбаева
Евразийский Национальный Университет, г. Астана, Казахстан,
yerzhanov_kk@enu.kz, orda_09@mail.ru

После открытия ускоренного расширения вселенной модифицированная теория гравитации стала незаменимой частью теоретической космологии. Также всем известно, что модифицированная теория гравитаций может описывать эволюцию вселенной от инфляций до доминирования материи и темной энергий. С недавнего времени не линейная массивная гравитация была расширена не прозрачным строением с динамической метрикой. Наиболее удобное описание данной модели дает биметрическая гравитация, которая содержит две метрики. Первая метрика отвечает за материю, а вторая метрика за фон. Мы в данной статье в качестве материи использовали метрику Толмена, а фоновая одна из форм Фридмана Робертсона Уокера.

Используя метрику Толмена, мы будем рассматривать модель вселенной как симметричный коллапсирующий шар наполненной пылью. Данные расчеты дают прогноз на последующую эволюцию нашей модели. В расчетах мы определили скалярную кривизну поля, и с помощью вариацией начального действия вычислили функций $e^{\omega(t,r)}$ и $e^{\lambda(t,r)}$ в виде:

$$e^{\omega(t,r)} = K(3t - 4A)^{4/3}, \quad (1)$$

$$e^{\lambda(t,r)} = C \frac{(t + 2D)^2}{(3t - 4A)^{2/3}}. \quad (2)$$

здесь A, K, C и D – произвольные постоянные. Далее используя эти данные, получим изменение масштабных факторов от времени.

Начальное действие для данной теории дается в виде[1,2]:

$$S_{bi} = M_g^2 \int d^4x \sqrt{-\det g} R^{(g)} + M_f^2 \int d^4x \sqrt{-\det f} R^{(f)} + 2m^2 M_{eff}^2 \int d^4x \sqrt{-\det g} (3 - tr \sqrt{g^{-1}f} + \det \sqrt{g^{-1}f}). \quad (3)$$

Здесь $R^{(g)}$ и $R^{(f)}$ - тензоры кривизны метрических тензоров $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$. M_{eff} - постоянная, определенная в следующем виде[2]:

$$\frac{1}{M_{eff}^2} = \frac{1}{M_g^2} + \frac{1}{M_f^2}. \quad (4)$$

Для того чтобы построит последовательную F(R) биметрическую гравитацию добавляем дополнительные значения[1,2]:

$$S_\varphi = -M_g^2 \int d^4x \sqrt{-\det g} \left\{ \frac{3}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right\} + \int d^4x L_{matter}(e^\varphi g_{\mu\nu}, \Phi_i), \quad (5)$$

$$S_\xi = -M_f^2 \int d^4x \sqrt{-\det f} \left\{ \frac{3}{2} f^{\mu\nu} \partial_\mu \xi \partial_\nu \xi + U(\xi) \right\}. \quad (6)$$

С помощью этих выражений и (3) формулой мы находим следующие выражения

$$0 = M_g^2 \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{(g)} - R_{\mu\nu}^{(g)} \right) + m^2 M_{eff}^2 \left\{ g_{\mu\nu} (3 - tr \sqrt{g^{-1}f}) + \frac{1}{2} f_{\mu\rho} (\sqrt{g^{-1}f})^{-1\rho}{}_\nu + \frac{1}{2} f_{\nu\rho} (\sqrt{g^{-1}f})^{-1\rho}{}_\mu \right\} + M_g^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi + V(\varphi) \right) g_{\mu\nu} - \frac{3}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right], \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 0 = & M_f^2 \left(\frac{1}{2} f_{\mu\nu} R^{(f)} - R_{\mu\nu}^{(f)} \right) \\
 & + m^2 M_{eff}^2 \sqrt{\det(f^{-1}g)} \left\{ -\frac{1}{2} f_{\mu\rho} \left(\sqrt{g^{-1}f} \right)^\rho{}_\nu - \frac{1}{2} f_{\nu\rho} \left(\sqrt{g^{-1}f} \right)^\rho{}_\mu + \det\left(\sqrt{g^{-1}f} \right) f_{\mu\nu} \right\} \\
 & + M_g^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} f^{\rho\sigma} \partial_\rho \zeta \partial_\sigma \zeta + U(\zeta) \right) f_{\mu\nu} - \frac{3}{2} \partial_\mu \zeta \partial_\nu \zeta \right].
 \end{aligned} \quad (8)$$

Запишем следующие соответствующие метрики для нашей модели вселенной, коллапсирующий шар наполненный пылью в виде:

$$ds_g^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - e^w (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^\lambda dr^2, \quad (9)$$

$$ds_f^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 f_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c(t)^2 dt^2 - b(t)^2 \left(\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (10)$$

Теперь используя метрику Толмена, вычислим соответствующие тензоры Риччи и его след, затем подставляя их в выражение (7), и из (t, t) компонентов получаем:

$$\begin{aligned}
 0 = & M_g^2 \left[\frac{\omega''}{e^\lambda} + \frac{3\omega'}{4e^\lambda} - \frac{\omega'\lambda'}{2e^\lambda} - \frac{\dot{\omega}\dot{\lambda}}{2e^\lambda} - \frac{1}{e^\omega} \right] \\
 & - m^2 M_{eff}^2 \left[\frac{2br}{e^{\omega/2}} + \frac{b}{\sqrt{e^\lambda(1-kr^2)}} - 3 \right] + M_g^2 \left[\frac{V(\varphi)}{2} - \frac{3}{2} \dot{\varphi}^2 \right],
 \end{aligned} \quad (11)$$

также компоненты (i, j) даются в виде следующих уравнений:

$$0 = M_g^2 \left[\frac{1}{e^\omega} + \ddot{\omega} + \frac{3\dot{\omega}^2}{4} - \frac{\omega'^2}{4e^\lambda} \right] + m^2 M_{eff}^2 \left[c + \frac{2br}{e^{\omega/2}} \right] - M_g^2 \left[\frac{V(\varphi)}{2} + \frac{3}{4} \dot{\varphi}^2 \right], \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 0 = & M_g^2 \left[\frac{\ddot{\omega}}{2} + \frac{\dot{\omega}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\omega''}{2e^\lambda} + \frac{\omega'\lambda'}{4e^\lambda} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\omega}^2}{4} - \frac{\omega'^2}{4} \right] \\
 & + m^2 M_{eff}^2 \left[c + \frac{b}{\sqrt{e^\lambda(1-kr^2)}} + \frac{br}{e^{\omega/2}} - 3 \right] - M_g^2 \left[\frac{3}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{V(\varphi)}{2} \right].
 \end{aligned} \quad (13)$$

Также используя метрику ФРУ и вычисления, затем подставляя их в выражение (8) получаем (t, t) компоненты:

$$0 = -3M_f^2 \left[\frac{k}{b^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} \right] + m^2 M_{eff}^2 \left[1 - \frac{\sqrt{e^\lambda(1-kr^2)}}{e^\omega b^2 r^2} \right] + M_f^2 \left[\frac{U(\zeta)}{2} - \frac{3}{4c^2} \dot{\zeta}^2 \right]. \quad (14)$$

также компоненты (i, j) даются в виде следующих уравнений:

$$0 = -M_f^2 \left[\frac{5k}{b^2} + \frac{4\dot{b}}{bc^2} + \frac{5\dot{b}^2}{b^2 c^2} - \frac{4\dot{b}\dot{c}}{bc^3} \right] + m^2 M_{eff}^2 \left[\frac{e^\omega}{b^2 c r^2} - 1 \right] - M_f^2 \left[\frac{3}{4c^2} \dot{\zeta}^2 + \frac{U(\zeta)}{2} \right], \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 0 = & -M_f^2 \left[\frac{5k}{b^2} + \frac{4\dot{b}}{bc^2} + \frac{5\dot{b}^2}{b^2 c^2} - \frac{4\dot{b}\dot{c}}{bc^3} \right] \\
 & + m^2 M_{eff}^2 \left[\frac{\sqrt{e^\lambda(1-kr^2)}}{e^{\omega/2} b^2 c r} - 1 \right] - M_f^2 \left[\frac{3}{4c^2} \dot{\zeta}^2 + \frac{U(\zeta)}{2} \right].
 \end{aligned} \quad (16)$$

С помощью алгебраических вычислений и заменяя скаляры на $\varphi = \varphi(\eta)$ и $\xi = \xi(\zeta)$, затем функции η и ζ определяем с конформным временем, получаем следующий ряд уравнений:

$$\begin{aligned}
 M_g^2 \delta(t) &= M_g^2 \left[\frac{2\omega''}{e^\lambda} + \frac{3\omega'}{2e^\lambda} - \frac{\omega'\lambda'}{e^\lambda} - \frac{\dot{\omega}\dot{\lambda}}{e^\lambda} + 2\ddot{\omega} + \frac{3\dot{\omega}^2}{2} - \frac{\omega'^2}{2e^\lambda} \right] \\
 &+ m^2 M_{eff}^2 \left[\frac{8br}{e^{\omega/2}} + \frac{2b}{\sqrt{e^\lambda(1-kr^2)}} - 6 + 2c \right] = \\
 M_g^2 &\left[\frac{\omega''}{e^\lambda} + \frac{3\omega'}{2e^\lambda} - \frac{\omega'\lambda'}{2e^\lambda} - \frac{\dot{\omega}\dot{\lambda}(2+e^\lambda)}{2e^\lambda} - \frac{2}{e^\omega} + \ddot{\omega} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{\dot{\omega}^2}{2} - \frac{\omega'^2}{2} \right] \\
 &+ m^2 M_{eff}^2 \left[\frac{6br}{e^{\omega/2}} + \frac{4b}{\sqrt{e^\lambda(1-kr^2)}} - 12 + 2c \right].
 \end{aligned} \tag{17}$$

В формуле (17) объединены значения функций $\delta(t)$ являющейся преобразованием функций $\varphi(\eta)$ с конформным временем.

$$\begin{aligned}
 M_g^2 \tilde{V}(t) &= M_g^2 \left[\frac{\omega'\lambda'}{2e^\lambda} + \frac{\dot{\omega}\dot{\lambda}}{2e^\lambda} + \frac{2}{e^\omega} + \ddot{\omega} + \frac{3\dot{\omega}^2}{4} - \frac{\omega'^2}{4e^\lambda} - \frac{\omega''}{e^\lambda} - \frac{3\omega'}{4e^\lambda} \right] \\
 &+ m^2 M_{eff}^2 \left[3 + c - \frac{b}{\sqrt{e^\lambda(1-kr^2)}} \right] = \\
 M_g^2 &\left[\frac{\dot{\omega}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{3\omega'\lambda'}{4e^\lambda} + \frac{\dot{\omega}\dot{\lambda}(2+e^\lambda)}{4e^\lambda} + \frac{1}{e^\omega} + \frac{\ddot{\omega}}{2} - \frac{3\omega''}{2e^\lambda} - \frac{3\omega'}{4e^\lambda} - \frac{\omega'^2}{4} \right] \\
 &+ m^2 M_{eff}^2 \left[c + \frac{br}{e^{\omega/2}} \right].
 \end{aligned} \tag{18}$$

Также в формуле (18) объединены значения потенциала $\tilde{V}(t)$, являющейся преобразованием начального потенциала $V(\varphi(\eta))$ с конформным временем.

$$\begin{aligned}
 M_f^2 \sigma(t) &= M_f^2 \left[-\frac{16c^2k}{b^2} - \frac{2b^2(3c^2+5)}{b^2} - \frac{8\ddot{b}}{b} + \frac{8\dot{b}\dot{c}}{bc} \right] \\
 &+ m^2 M_{eff}^2 \left[\frac{e^\omega c}{b^2 r^2} - \frac{c^2 \sqrt{e^\lambda(1-kr^2)}}{e^\omega b^2 r^2} \right] = \\
 M_f^2 &\left[-\frac{16c^2k}{b^2} - \frac{2b^2(3c^2+5)}{b^2} - \frac{8\ddot{b}}{b} + \frac{8\dot{b}\dot{c}}{bc} \right] \\
 &+ m^2 M_{eff}^2 \left[\frac{2c \sqrt{e^{\lambda+\omega}(1-kr^2)}}{b^2 r} - \frac{2c^2 \sqrt{e^\lambda(1-kr^2)}}{e^\omega b^2 r^2} \right].
 \end{aligned} \tag{19}$$

И в формуле (19) объединены значения функций $\sigma(t)$, являющейся преобразованием начальной функций $\xi(\zeta)$ с конформным временем.

$$\begin{aligned}
 M_f^2 \tilde{U}(t) = & M_f^2 \left[-\frac{2k}{b^2} - \frac{\dot{b}^2(3c^2 - 5)}{b^2 c^2} - \frac{4\ddot{b}}{bc^2} + \frac{4\dot{b}\dot{c}}{bc^3} \right] \\
 & + m^2 M_{eff}^2 \left[-2 + \frac{\sqrt{e^{\lambda}(1-kr^2)}}{e^{\omega} b^2 r^2} + \frac{e^{\omega}}{b^2 cr^2} \right] = \\
 M_f^2 \left[& -\frac{2k}{b^2} - \frac{\dot{b}^2(3c^2 - 5)}{b^2 c^2} - \frac{4\ddot{b}}{bc^2} + \frac{4\dot{b}\dot{c}}{bc^3} \right] \\
 & + m^2 M_{eff}^2 \left[2 - \frac{\sqrt{e^{\lambda}(1-kr^2)}}{e^{\omega} b^2 r^2} - \frac{\sqrt{e^{\lambda+\omega}(1-kr^2)}}{b^2 cr} \right].
 \end{aligned} \tag{20}$$

Также в формуле (20) объединены значения потенциала $\tilde{U}(t)$, являющейся преобразованием начального потенциала $U(\xi(\zeta))$ с конформным временем. В формулах (17) – (20) были использованы следующие замены:

$$\delta(\eta) = 3\varphi'(\eta)^2, \quad \tilde{V}(\eta) = V(\varphi(\eta)), \quad \sigma(\zeta) = (3\xi'(\zeta)^2), \quad \tilde{U}(\zeta) = U(\xi(\zeta)). \tag{21}$$

Теперь используя уравнения (17) - (20) с помощью алгебраических вычислений и выражений (1), (2) определяем масштабные факторы $b(t)$ и $c(t)$ в следующем виде:

$$b(t) = \frac{\left(\frac{M_g^2}{m^2 M_{eff}^2} \left(1 - \frac{\dot{\omega}\dot{\lambda}}{2e^{\lambda}} + \frac{\ddot{\omega}}{2} + \frac{\dot{\omega}^2}{2} - \frac{1}{e^{\omega}} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) - 3 \right) \sqrt{e^{\lambda+\omega}(1-kr^2)}}{r \sqrt{e^{\lambda}(1-kr^2)} - e^{\omega/2}}, \tag{22}$$

$$c = \frac{1}{4b^2 r^2} \left(5r \sqrt{e^{\lambda+\omega}(1-kr^2)} - e^{\omega} \right). \tag{23}$$

Используя наши вычисления давайте сравним нашу модель с классической, которые были вычислены в работе Ю. Оппенгеймера и Г. Снайдера [3]. Данные показаны в следующих рисунках 1 и 2:

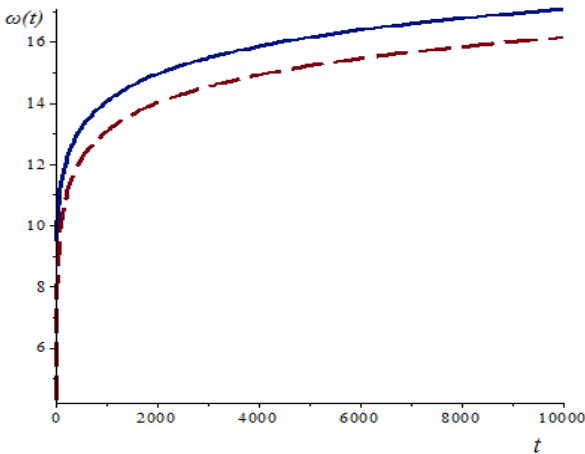


Рисунок 1.

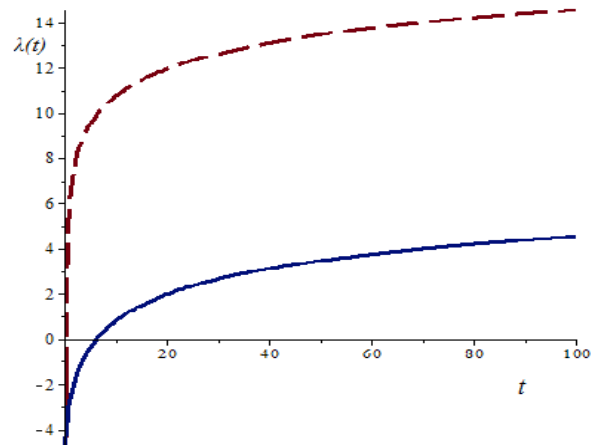


Рисунок 2.

Рисунок 1. Здесь были использованы следующие значения для постоянных в виде: $F=18$, $G=-5$, $T=0.5$, $A=-25$, $K=12$, $C=0.5$, $D=0.3$. В рисунке показаны изменения функций $\omega(t)$, как показано сплошная линия показывает нашу модель, а вторая линия классическую модель.

Рисунок 2. Здесь были использованы следующие значения для постоянных в виде: $F=18$, $G=-5$, $T=0.5$, $A=-25$, $K=12$, $C=0.5$, $D=0.3$. В рисунке показаны изменения функций $\lambda(t)$, как показано сплошная линия показывает нашу модель, а вторая линия классическую модель.

На рисунках мы видим сравнения двух разных моделей с одинаковыми функциями. Здесь в первом рисунке мы видим, что наши функций почти единичны, и форма наших сферических шаров совпадает. А во второй описана функция отвечающая за изменения по радиусу, по этим данным можно полагать что наша сфера намного меньше чем классическая модель.

И точно также сравнивая классические масштабные факторы фоновой метрики, вычисленные в нашей старой статье [4], и нашей модели мы получим следующие графики. Данные показаны на рисунках 3 и 4. На рисунках мы видим сравнения двух разных биметрических моделей с одинаковыми фоновыми метриками и разными метриками для материй. В классической модели были использованы метрики Фридамана Роберстона Уокера, а в нашей модели две разные метрики, первая метрика это метрика Толмена и метрика ФРУ для фона. Здесь в первом рисунке мы видим, что масштабный фактор $b(t)$ для классической модели намного меньше чем наш. Это обозначает что наша фоновая метрика более искривленная, чем классическая. А во второй показано изменение масштабного фактора $c(t)$, по рисунку мы видим, что наш параметр является намного меньше, чем в классической модели.

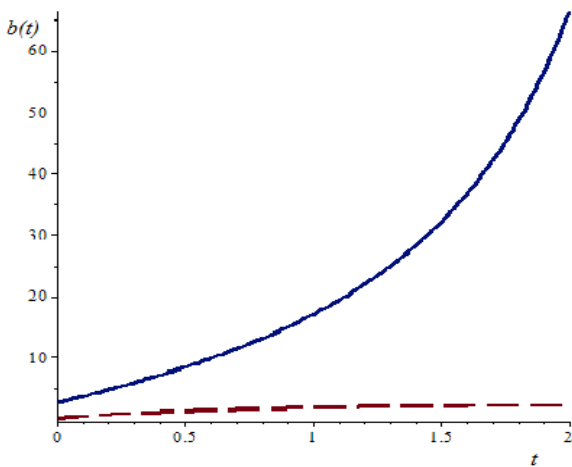


Рисунок 3.

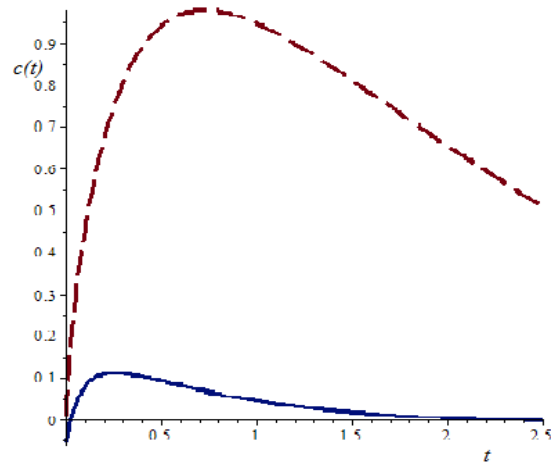


Рисунок 4.

Рисунок 3. Здесь были использованы следующие значения для постоянных в виде: $a(t) = \left(\frac{4}{3}e^{\frac{4}{3}t}\right)^{\frac{3}{4}}$,

$\frac{M_g^2}{m^2 M_{eff}^2} = 1$ $A = -25$, $K = 12$, $C = 0.5$, $D = 0.3$. В рисунке

показаны изменения масштабного фактора $b(t)$, как показано сплошная линия показывает нашу модель, а вторая линия классическую модель.

Рисунок 4. Здесь были использованы следующие значения для постоянных в виде: $a(t) = \left(\frac{4}{3}e^{\frac{4}{3}t}\right)^{\frac{3}{4}}$,

$\frac{M_g^2}{m^2 M_{eff}^2} = 1$ $A = -25$, $K = 12$, $C = 0.5$, $D = 0.3$. В рисунке

показаны изменения масштабного фактора $c(t)$, как показано сплошная линия показывает нашу модель, а вторая линия классическую модель.

Статья выполнена в рамках программы «Некоторые проблемы нелинейных теорий гравитационного и сильного взаимодействий, и их космологическое приложение».

Литература

1. Sergei D. Odintsov, Shin'ichi Nojiri. Accelerating cosmology in modified gravity: from convenient $F(R)$ or string-inspired theory to bimetric $F(R)$ gravity. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **11**, 1460006
2. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Ghost-free $F(R)$ bigravity and accelerating cosmology, *Phys. Lett. B* **716** (2012), 377
3. Ю. Оппенгеймер, Г. Снайдер. О безграничном гравитационном сжатии, *Phys. Rev.*, **56**, 455 (1939)
4. Ержанов К.К., Алтыбаева С.С.. Некоторые точные космологические решения в рамках $F(R)$ - гравитации для биметрической модели, *Изденіс/Поиск. - Серия естественных наук, -2014. -№2. - с. 86-92.*

МОДЕЛЬ БРАНС-ДИККЕ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

А.С.Бисенова, О.В.Разина
 ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан,
asemok93@mail.ru, razina_ov@enu.kz

Теория Бранса — Дикке (реже теория Йордана — Бранса — Дикке) — скалярно-тензорная теория гравитации, совпадающая в одном из пределов с общей теорией относительности. В теории Йордана — Бранса — Дикке как скалярно-тензорной метрической теории гравитационное воздействие на материю реализуется через метрический тензор пространства-времени, а материя влияет на метрику не только непосредственно, но и через генерируемое дополнительно скалярное поле φ . Из-за этого в теории Йордана — Бранса — Дикке гравитационная постоянная G не обязательно постоянна, но зависит от скалярного поля $\frac{1}{G} \Leftrightarrow \varphi$, которое может изменяться в

пространстве и времени. Эта теория получила окончательную формулировку в 1961 году в статье Карла Бранса и Роберта Дикке, которая опиралась существенным образом на работу Паскуаля Йордана 1959 года. В «золотой век» общей теории относительности эта теория рассматривалась как достойный соперник общей теории относительности из числа альтернативных теорий гравитации [1].

Как и в ОТО, источником гравитационного поля является тензор энергии-импульса. Однако способ, которым наличие этого тензора в какой-либо области пространства влияет на гравитационное поле в этой области, оказывается другим. В теории Бранс — Дикке в дополнение к метрике, которая является тензором второго ранга, существует так же скалярное поле φ , которое физически проявляется как изменение в пространстве эффективной гравитационной постоянной [2].

Уравнения поля теории Бранс — Дикке содержат параметр ω , называемый константой связи Бранс— Дикке. Это настоящая безразмерная константа, которая выбирается один раз и не изменяется. Разумеется, её следует выбирать так, чтобы она соответствовала наблюдениям. Кроме того, существующее фоновое значение эффективной гравитационной постоянной должно быть использовано в качестве граничного условия. При возрастании константы связи теория Бранс — Дикке даёт предсказания, всё более близкие к ОТО, а в пределе $\omega \rightarrow \text{inf}$ переходит в неё.

Теория Бранс — Дикке является менее строгой, чем ОТО, и в ещё одном смысле — она допускает большее количество решений. В частности, точное вакуумное решение уравнений Эйнштейна ОТО, дополненное тривиальным скалярным полем $\varphi = 1$, становится точным вакуумным решением в теории Бранс — Дикке, однако некоторые решения, которые не являются вакуумными решениями ОТО, при соответствующем выборе скалярного поля становятся вакуумными решениями теории Бранса — Дикке [3].

Уравнение поля получим из общего действия [4]

$$S = \int \sqrt{-g} L_T d^4x, \quad (1)$$

где $L_T = L_G + L_M$ является общим лагранжианом, L_M - лагранжиан материи и L_G - лагранжиан гравитационного поля. В теории Бранс-Дикке

$$L_G = R e^{\alpha\varphi} - \alpha^2 \omega e^{\alpha\varphi} (\nabla\varphi)^2, \quad (2)$$

где R - скаляр кривизны и φ - скалярное поле, α и ω некоторые константы (далее будем считать $\omega = 1$).

Рассмотрим плоскую, однородную и изотропную метрику Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3)$$

где $a(t)$ - масштабный фактор. Для метрики ФРУ (3) корень из метрического тензора и скалярная кривизна равны

$$\sqrt{-g} = a^3 \quad \text{и} \quad R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right).$$

Для метрики ФРУ (3) действие (1) с учетом выражения (2) примет вид

$$S = \int d^4x \left(a^3 L_M - e^{\alpha\varphi} (6\alpha a^2 \dot{\varphi} \dot{a} + 6a\dot{a}^2 + \alpha^2 a^3 \dot{\varphi}^2) \right). \quad (4)$$

Найдем уравнения поля, используя уравнение Эйлера-Лагранжа, и условие «нулевой энергии».

Уравнение Эйлера-Лагранжа для масштабного фактора $a(t)$

$$L_a - (L_{\dot{a}})_t = 0, \quad (5)$$

$$L = a^3 L_M - e^{\alpha\varphi} (6\alpha a^2 \dot{\varphi} \dot{a} + 6a\dot{a}^2 + \alpha^2 a^3 \dot{\varphi}^2), \quad (6)$$

$$L_a = 3a^2 L_M - e^{\alpha\varphi} (12\alpha a \dot{\varphi} \dot{a} + 6\dot{a}^2 + 3\alpha^2 a^2 \dot{\varphi}^2), \quad (7)$$

$$L_{\dot{a}} = -e^{\alpha\varphi} (6\alpha \dot{\varphi} a^2 + 12\dot{a}a), \quad (8)$$

$$(L_{\dot{a}})_t = -6e^{\alpha\varphi} (\alpha^2 a^2 \dot{\varphi}^2 + 4\alpha a \dot{\varphi} \dot{a} + \alpha a^2 \ddot{\varphi} + 2a\ddot{a} + 2\dot{a}^2). \quad (9)$$

В результате уравнение (5) примет вид:

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\rho_M - \rho_G, \quad (10)$$

$$\rho_G = \alpha\ddot{\varphi} + 2\alpha H\dot{\varphi} + \frac{\alpha^2 \dot{\varphi}^2}{2}, \quad (11)$$

где $H = \frac{\dot{a}}{a}$ - параметр Хаббла.

Уравнение Эйлера-Лагранжа для скалярного поля $\varphi(t)$

$$L_{\varphi} - (L_{\dot{\varphi}})_t = 0, \quad (12)$$

$$L_{\varphi} = -\alpha e^{\alpha\varphi} (6\alpha a^2 \dot{\varphi} \dot{a} + 6a\dot{a}^2 + \alpha^2 a^3 \dot{\varphi}^2), \quad (13)$$

$$L_{\dot{\varphi}} = -e^{\alpha\varphi} (6\alpha a^2 \dot{a} + 2\alpha^2 a^3 \dot{\varphi}), \quad (14)$$

$$(L_{\dot{\varphi}})_t = -\alpha e^{\alpha\varphi} (12\alpha a^2 \dot{a} \dot{\varphi} + 2\alpha^2 a^3 \dot{\varphi}^2 + 6\ddot{a}a^2 + 12a\dot{a}\ddot{a} + 2\alpha a^3 \ddot{\varphi}). \quad (15)$$

В результате уравнение (12) примет вид:

$$\alpha\ddot{\varphi} + 3\alpha H\dot{\varphi} + \frac{\alpha^2 \dot{\varphi}^2}{2} + 6H^2 + 3\dot{H} = 0. \quad (16)$$

Условие «нулевой энергии»

$$L_a \dot{a} + L_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = 0, \quad (17)$$

$$3H^2 = \rho_M + \rho_G, \quad (18)$$

где

$$\rho_G = -3\alpha H\dot{\varphi} - \frac{\alpha^2 \dot{\varphi}^2}{2}. \quad (19)$$

Система уравнений движения для действия (1) с учетом метрики ФРУ (3) имеет вид

$$3H^2 = \rho_M + \rho_G, \quad (20)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\rho_M - \rho_G, \quad (21)$$

$$\alpha\ddot{\varphi} + 3\alpha H\dot{\varphi} + \frac{\alpha^2 \dot{\varphi}^2}{2} + 6H^2 + 3\dot{H} = 0, \quad (22)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (23)$$

где

$$\rho_G = \alpha\ddot{\varphi} + 2\alpha H\dot{\varphi} + \frac{\alpha^2 \dot{\varphi}^2}{2}, \quad (24)$$

$$\rho_G = -3\alpha H\dot{\varphi} - \frac{\alpha^2 \dot{\varphi}^2}{2}. \quad (25)$$

Уравнения (20) и (21) – это уравнения Фридмана, уравнение (22) – это уравнение Клейн-Гордона, уравнение (23) – уравнение сохранения.

Система уравнений движения (20) - (25) имеет следующее решение. Масштабный фактор $a(t)$, график которого представлен на рисунке 1, имеет вид

$$a = a_0 \exp \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arcth} (2\sqrt{3}e^{t-H_0}) \right\}, \quad (26)$$

где a_0 и H_0 - константы интегрирования.

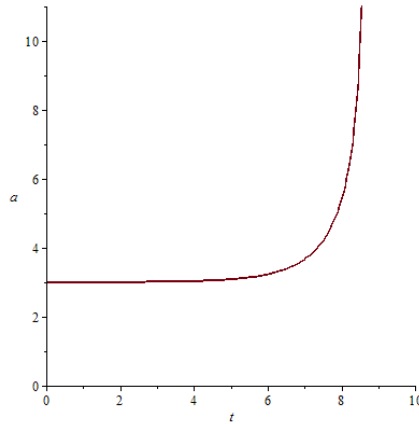


Рисунок 1. Зависимость масштабного фактора a от времени t , при $a_0 = 3$, $H_0 = 10$.

Параметр Хаббла

$$H = \frac{4e^{t-H_0}}{1-12e^{2(t-H_0)}}. \quad (27)$$

Скалярное поле

$$\varphi = \ln \left(\frac{(12e^{2(t-H_0)} - 1)(1 - 12e^{2(t-H_0)})}{e^{2(t-H_0)}} \right)^{1/2\alpha} - 2\sqrt{3} \operatorname{arcth} (2\sqrt{3}e^{t-H_0}) + \varphi_0, \quad (28)$$

где φ_0 - константа интегрирования.

Плотность энергии и давление

$$\rho = \frac{48e^{2(t-H_0)}}{(1-12e^{2(t-H_0)})^2}, \quad (29)$$

$$p = -\frac{8e^{t-H_0}(1+6e^{t-H_0}+12e^{2(t-H_0)})}{(12e^{2(t-H_0)}-1)^2}. \quad (30)$$

На рисунках (2) и (3) представлены графики зависимости плотности энергии и давления

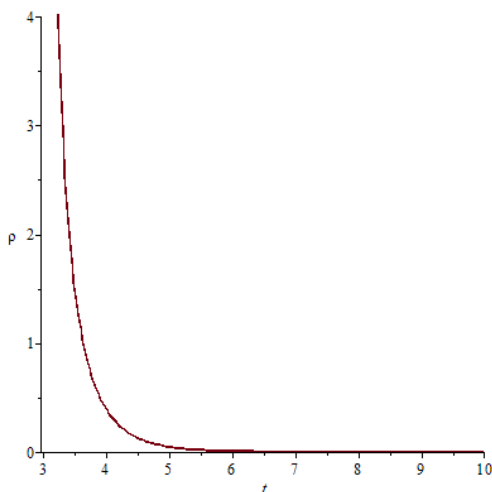


Рисунок 2. Зависимость плотности энергии ρ от времени t , при $H_0 = 4$.

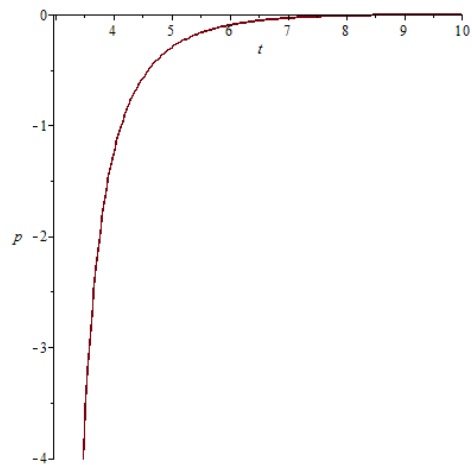


Рисунок 3. Зависимость давления p от времени t , при $H_0 = 4$.

Параметр уравнения состояния равен

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -1 - \frac{1}{6} e^{H_0 t} - 2e^{-H_0 t}. \quad (31)$$

На рисунке (4) представлена зависимость параметра уравнения состояния ω от времени t

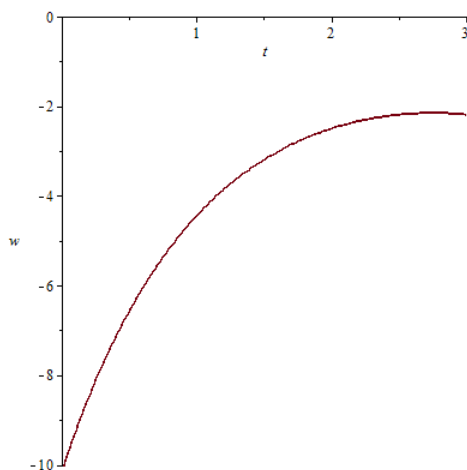


Рисунок 4. Зависимость параметра уравнения состояния ω от времени t , при $H_0 = 4$.

Рассмотрели модель Бранс-Дикке для скалярного поля с лагранжианом (6). Нашли соответствующее аналитическое решение рассматриваемой модели. Мы исследовали роль скалярного поля во Вселенной Бранс-Дикке. Показали, что скалярное поле φ может вести себя как составляющая темной энергии, способствуя ускоренному расширению Вселенной.

Литература

1. C. Armendariz-Picon and P.B. Greene // Gen. Relativ. Gravit. - 2003.
2. Y.Nambu, G. Jona-Lasinio // Phys. Rev. - 1961.
3. S. Weinberg, Gravitation and Cosmology // Cambridge, New York. - 2007.
4. L. L. Samojeden, F. P. Devecchi, and G. M. Kremer Fermions in Brans-Dicke cosmology // Phys.Rev. D. – 2010. – Vol. 81. – P. 027301.

УДК 524.832

МОДЕЛЬ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ С ФЕРМИОННЫМ ПОЛЕМ

А.М. Кунарова, О.В. Разина

Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан,
 asem_licei_km@mail.ru

«Темная энергия - удивительный феномен природы - была впервые обнаружена в наблюдениях сверхновых звезд, вспыхивающих очень далеко от нас, на полпути к горизонту мира. Она создает "всемирное антитяготение", которое проявляется в ускоренном расширении Вселенной как целого. По этому глобальному эффекту темная энергия и была открыта двумя международными группами космологов-наблюдателей» [1]. Одна из них, Supernova Cosmology Project ("Сверхновые для космологии"), возглавил Сол Перлмуттер. Другая группа, с проектом, под названием High-z Supernova Search Team ("Поиск сверхновых на больших красных смещениях"), возглавили Адам Райес и Брайан Шмидт. Сверхновые звезды делятся на несколько типов, и для наблюдений важны сверхновые типа Ia, которые обладают свойством "стандартной свечи", т. е. имеют примерно одинаковую светимость в максимуме блеска. Тогда по наблюдениям блеска можно немедленно определить расстояние до галактики, в которой вспыхнула сверхновая. И в 1998 году используя

разные методы анализа и разные наблюдения, обе группы ученых показали наличие ускоренного расширения Вселенной. За что стали Лауреатами Нобелевской премии по физике 2011 года [2].

Ускорение указывает на силу, которая определяет движение тел. Этой силой не может быть притяжение космических тел друг к другу: взаимное тяготение галактик способно лишь тормозить их разбегание. А ускорять это движение может сила противоположного знака - она и называется всемирным антитяготением. Физический источник антитяготения - темная энергия. Она невидима и неуловима, не излучает и не поглощает света, не рассеивает его. По макроскопическим свойствам темная энергия подобна особому рода сплошной среде с положительной плотностью и отрицательным давлением. Что касается физической природы и микроскопической структуры темной энергии, то они остаются полностью неизвестными [3].

В простейшей ее интерпретации темная энергия связывается с космологической постоянной Эйнштейна. В настоящее время существуют различные предполагаемые модели темной энергии, такие как: g -эссенция, q -эссенция, k -эссенция, тахионные, фантомные поля и другие.

В последние годы, модель k -эссенции активно исследуется, до сих пор возможное космологическое поведение k -эссенции заслуживает изучения в систематическом порядке. Совсем недавно, предложена модель под названием g -эссенция, которая является более обобщенной версией k -эссенции. В самом деле, g -эссенция содержит, как частный случай, две важных модели: k -эссенцию и f -эссенцию. Обратим внимание, что f -эссенция является фермионным аналогом k -эссенции.

Насколько нам известно, в литературе существует немного работ по темной энергии с моделями фермионных полей. Тем не менее, в последние годы были сделаны несколько подходов, для объяснения ускоренного расширения, принимая фермионные поля, как гравитационные источники энергии. В частности, было показано, что фермионные поля играют очень важную роль в: (I) изотропизации изначально анизотропного пространства-времени; (II) формировании космологических решений свободных от сингулярности; (III) объяснении позднего времени ускорения [4, 5].

В данной работе вашему вниманию будет представлено фермионное поле, в качестве модели темной энергии.

Рассмотрим действие для фермионного поля

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R + 2K(Y, \psi, \bar{\psi})] . \quad (1)$$

Действие (1) будем рассматривать совместно с однородной, изотропной и плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) , \quad (2)$$

где $a(t)$ - масштабный фактор, координаты (t, x, y, z) - безразмерные.

Рассмотрим случай, когда лагранжиан f -эссенции имеет вид

$$K = Y - V_2(u) . \quad (3)$$

Используя условие нулевой энергии и уравнение Эйлера-Лагранжа или варьируя действие по $a, \psi, \bar{\psi}$ получим следующие уравнения движения

$$3H^2 - \rho = 0 , \quad (4)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + p = 0 , \quad (5)$$

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2}H\psi + i\gamma^0 V_{2u}\psi = 0 , \quad (6)$$

$$\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}H\bar{\psi} - iV_{2u}\bar{\psi}\gamma^0 = 0 , \quad (7)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 . \quad (8)$$

где уравнения (4) и (5) - уравнения Фридмана, (6) и (7) - Дирака, (8) - уравнение сохранения. H - параметр Хаббла, ρ - плотность энергии, p - давление, $\psi, \bar{\psi}$ - фермионное поле и комплексно-сопряженное фермионное поле, соответственно, V_2 - потенциал фермионного поля.

Плотность энергии и давления в общем виде

$$\rho = V_2(u) , \quad (9)$$

$$p = -V_2(u) + V_{2u}u . \quad (10)$$

Найдем решение для системы уравнений (4)-(8). Для этого рассмотрим масштабный фактор в виде

$$a = t e^{\sin(\alpha t)} , \quad (11)$$

где α – некоторая константа.

На рисунке (1) показана зависимость масштабного фактора a от времени t . По графику можно заметить, что масштабный фактор растет с течением времени, другими словами радиус Вселенной увеличивается.

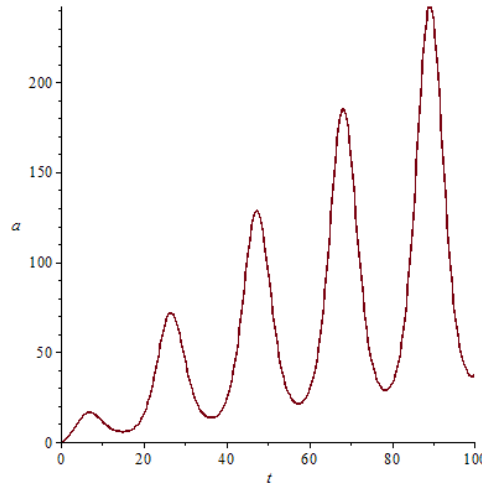


Рисунок 1. Зависимость масштабного фактора a от времени t , при $\alpha=0,3$

Зная выражение для масштабного фактора, можем найти параметр Хаббла

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (12)$$

Для этого дифференцируем a по t

$$\dot{a} = e^{\sin(at)} (1 + at \cos(at)). \quad (13)$$

В итоге получаем параметр Хаббла в следующем виде

$$H = \frac{1}{t} + \alpha \cos(at). \quad (14)$$

Для нахождения фермионного поля используем уравнения Фридмана (4) и (5). Получим следующее соотношение

$$-2\dot{H} = V_{2u} u, \quad (15)$$

учитывая, что $u = \frac{c}{a^3}$, $V_{2u} = \frac{dV_2}{du}$, получаем искомый потенциал

$$V_2(t) = 3\alpha^2 \cos^2(at) + \frac{6\alpha \cos(at)}{t} + \frac{3}{t^2} + V_{20}. \quad (16)$$

где V_{20} – константа интегрирования.

Решая уравнения Дирака (6) и (7), будем искать фермионное поле в виде $\psi_j = A_j e^{-iB_j}$, учитывая что

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

Получим следующие выражения фермионного поля

$$\psi_0 = c_0 t^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} \sin(at) - i(B+B_{00})}, \quad \bar{\psi}_0 = c_0 t^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} \sin(at) + i(B+B_{00})}, \quad (17)$$

$$\psi_1 = c_1 t^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} \sin(at) - i(B+B_{10})}, \quad \bar{\psi}_1 = c_1 t^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} \sin(at) + i(B+B_{10})}, \quad (18)$$

$$\psi_2 = c_2 t^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} \sin(at) + i(B+B_{20})}, \quad \bar{\psi}_2 = c_2 t^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} \sin(at) - i(B+B_{20})}, \quad (19)$$

$$\psi_3 = c_3 t^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} \sin(at) + i(B+B_{30})}, \quad \bar{\psi}_3 = c_3 t^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} \sin(at) - i(B+B_{30})}, \quad (20)$$

где

$$B = \frac{2}{c} \alpha^2 \int t^3 e^{3 \sin(at)} \sin(at) dt + \frac{2}{c} \int t e^{3 \sin(at)} dt,$$

$c, c_0, c_1, c_2, c_3, B_{00}, B_{10}, B_{20}, B_{30}$ - константы интегрирования.

Используя систему уравнений (4) – (8) и уравнения (9) и (10) определим плотность энергии и давление. Они соответственно равны

$$\rho = 3\alpha^2 \cos^2(\alpha t) + \frac{6\alpha \cos(\alpha t)}{t} + \frac{3}{t^2}, \quad (21)$$

$$p = -3\alpha^2 \cos^2(\alpha t) + 2\alpha^2 \sin(\alpha t) - \frac{6\alpha \cos(\alpha t)}{t} - \frac{1}{t^2}. \quad (22)$$

На рисунках (2) и (3) представлена зависимость плотности энергии ρ и давления p от времени t .

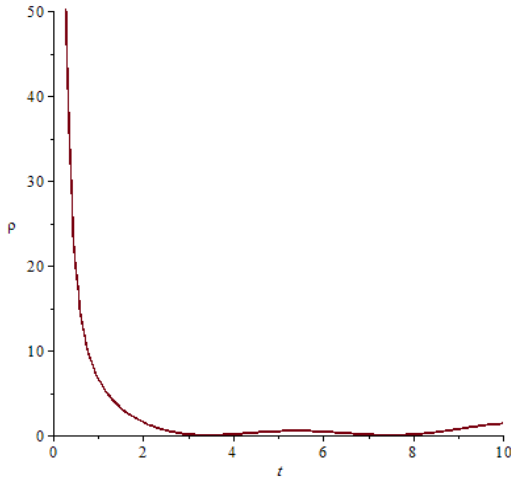


Рисунок 2. Зависимость плотности энергии ρ от времени t , при $\alpha=0,6$.

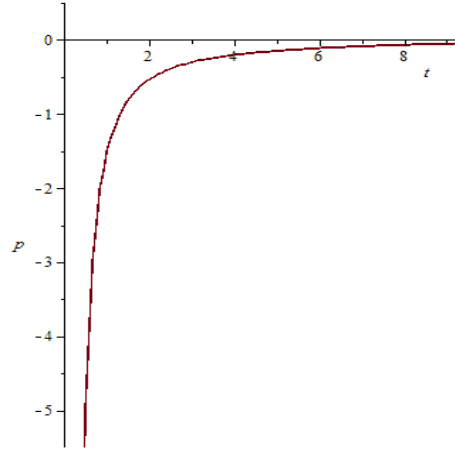


Рисунок 3. Зависимость давления p от времени t , при $\alpha=0,3$.

Как видно из (2) графика, значение плотности энергии с течением временем уменьшается. Что свидетельствует о расширении Вселенной. На графике (3) давление отрицательно, что подтверждает «антитяготение».

Определив плотность энергии и давление, мы можем получить параметр уравнения состояния, используя следующее выражение

$$\omega = \frac{p}{\rho},$$

Тогда параметр уравнения состояния примет вид

$$\omega = -1 + \frac{2t^2\alpha^2 \sin(\alpha t) + 2}{6\alpha^2 t \cos(\alpha t) + 3\alpha^2 t^2 \cos^2(\alpha t) + 3}. \quad (23)$$

На рисунке (4) показано изменение параметра уравнения состояния ω со временем t .

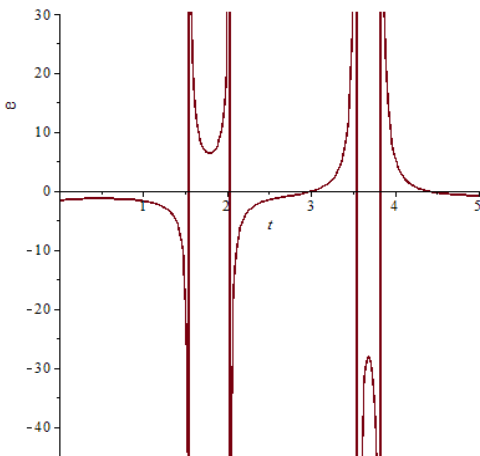


Рисунок 4. Зависимость параметра уравнения состояния ω от времени t , при $\alpha=1,2$.

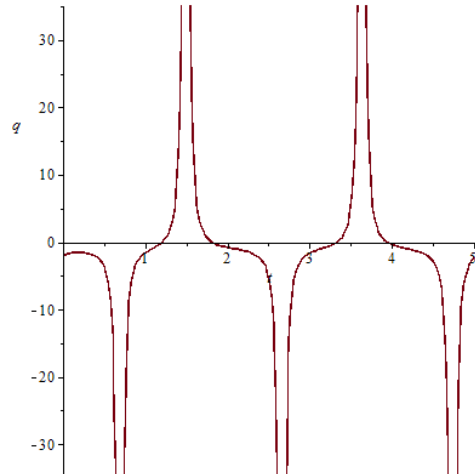


Рисунок 5. Зависимость параметра замедления q от времени t , при $\alpha=3$.

Зная значение для масштабного фактора и параметра Хаббла, определим параметр замедления в виде

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{H^2},$$

тогда получаем

$$q = -1 + \frac{\alpha^2 t^2 \sin(\alpha t) + 1}{\alpha^2 t^2 \cos^2(\alpha t) + 2\alpha t \cos(\alpha t) + 1}. \quad (24)$$

На рисунке 5 изображен график параметра замедления q , зависящего от времени t

В работе мы рассмотрели модель f-эссенции с пульсирующей Вселенной. Показали, что данная модель удовлетворяет последним наблюдательным данным, согласно которым в определенные промежутки времени $\omega \approx -1$. Не исключено, что Вселенная функционирует в бесконечной серии Больших взрывов, происходящих периодически – закономерно и самопроизвольно – в силу внутренних свойств самой материи.

Литература

1. Чернин А.Д. Темная энергия вблизи нас // ГАИШ МГУ. – 2012 февраль
2. Кунарова А.М., Разина О.В. Степенное решение модели темной энергии//Валихановские чтения 18: международная научно-практическая конференция. - 2014. - Т.4 - С.82-85.
3. Чернин А.Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // УФН. - 2008 март. – Т. 173 №3
4. Myrzakulov R. Fermionic k-essence //http://arxiv.org/abs/1011.4337.
5. Myrzakulov Y., Jamil M., Razina O., Myrzakulov R. Modified Chaplygin gas and solvable F-essence cosmologies//Astrophysics and Space Science. - 2011. -- Vol. 336. - Issue 2. - P. 315-325

УДК 530.1; 517.958; 538.221

ГЕОМЕТРИЯ ОДНОЙ СПИНОВОЙ МОДЕЛИ С ПОТЕНЦИАЛОМ

А.М. Азимханова, Ш.А. Мырзакулова

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан,
azimkhanova_am@enu.kz

Нелинейные эффекты играют фундаментальную роль во многих явлениях в разных направлениях науки. Такие эффекты моделируются при помощи класса нелинейных дифференциальных уравнений, некоторые из которых являются интегрируемыми.

Интегрируемое уравнение ферромагнетика Гейзенберга - важный подкласс интегрируемых систем, которые обладают геометрически инвариантными свойствами и применяются в прикладном магнетизме. Также эти системы тесно связаны с семейством нелинейных уравнений Шредингера.

Объектом исследования данной работы является уравнение Мырзакулова-LXIV (M-LXIV) - одно из интегрируемых обобщений уравнения ферромагнетика Гейзенберга. Цель работы - вывести для уравнения M-LXIV в присутствии потенциала геометрически эквивалентный аналог из семейства нелинейных уравнений Шредингера. Данная эквивалентность будет построена с помощью отождествления вектора намагниченности с одним из базисных векторов на основании связи движения твердого тела вдоль кривой из дифференциальной геометрии [1-3].

Рассмотрим уравнение M-LXIV [4]

$$\vec{S}_t + \varepsilon_2 [\vec{S}_{xxx} + 6(\beta \vec{S})_x] + \frac{2}{\omega} \vec{S} \wedge \vec{W} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{W}_x + 2\omega \vec{S} \wedge \vec{W} = 0, \quad (2)$$

где $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $\vec{W} = (W_1, W_2, W_3)$ - спиновый вектор и потенциальный вектор, соответственно, $\beta = \frac{1}{8} (\vec{S}_x \cdot \vec{S}_x)$, а ω и ε_2 являются постоянными.

Докажем эквивалентность уравнений (1)-(2) нелинейному уравнению Шредингера. Начнем со следующего отождествления:

$$\bar{S} \equiv \bar{e}_1, \quad (3)$$

$$\bar{W} = W_1\bar{e}_1 + W_2\bar{e}_2 + W_3\bar{e}_3. \quad (4)$$

В этом случае уравнения (1)-(2) могут быть переписаны в виде

$$\bar{e}_{1t} + \varepsilon_2[\bar{e}_{1xxx} + 6(\beta\bar{e}_1)_{1x}] + \frac{2}{\omega}\bar{e}_1 \wedge \bar{W} = 0, \quad (5)$$

$$\bar{W}_x + 2\omega\bar{e}_1 \wedge \bar{W} = 0, \quad (6)$$

Движение кривой с кручением и кривизной задается как система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}_x = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}_t = C \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

здесь e_j - ортогональный базис, $j = 1, 2, 3$; $e_j^2 = 1$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где κ, τ - кривизна и кручение, соответственно. Рассматривая систему уравнений (7)-(8) и матрицы (9)-(10) можем получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} e_{1x} &= \kappa e_2, \\ e_{2x} &= -\kappa e_1 + \tau e_3, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} e_{3x} &= -\tau e_2, \\ e_{1t} &= \omega_3 e_2 - \omega_2 e_3, \\ e_{2t} &= -\omega_3 e_1 + \omega_1 e_3, \end{aligned} \quad (12)$$

$$e_{3t} = \omega_2 e_1 - \omega_1 e_2.$$

Уравнение (5) с учетом (11) примет вид

$$\begin{aligned} e_{1t} = & -\varepsilon_2[\kappa_{xx}e_2 - 3\kappa\kappa_x e_1 + 2\kappa_x\tau e_3 - \kappa^3 e_3 + \kappa\tau_x e_3 - \kappa\tau^2 e_2 + 6\beta_x e_1 + 6\beta\kappa e_2] - \\ & - \frac{2}{\omega}[W_1 + W_2 e_3 - W_3 e_2]. \end{aligned} \quad (13)$$

Приравнявая уравнения (12) и коэффициенты базисных векторов, получим

$$\begin{aligned} e_2 : \quad \omega_3 &= -\varepsilon_2[\kappa_{xx} - \kappa\tau^2 + \frac{1}{2}\kappa^3] + \frac{2}{\omega}W_3, \\ e_3 : \quad \omega_2 &= \varepsilon_2[2\kappa_x\tau + \kappa\tau_x] + \frac{2}{\omega}W_2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$e_1 : \quad \beta_x = \frac{1}{2}\kappa\kappa_x$$

Из условия совместности $e_{jxt} = e_{jtx}$ имеем

$$A_t - C_x + [A, C] = 0. \quad (15)$$

Перепишем предыдущее выражение в компонентах матриц A, C в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa_t & 0 \\ -\kappa_t & 0 & \tau_t \\ 0 & -\tau_t & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \omega_{3x} & -\omega_{2x} \\ -\omega_{3x} & 0 & \omega_{1x} \\ \omega_{2x} & -\omega_{1x} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\tau\omega_2 & \kappa\omega_1 - \tau\omega_3 \\ \tau\omega_2 & 0 & \kappa\omega_2 \\ \tau\omega_3 - \kappa\omega_1 & -\kappa\omega_2 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Элементы первой строки второго столбца дают:

$$\kappa_t - \omega_{3x} - \tau\omega_2 = 0. \quad (16)$$

Элементы второй строки третьего столбца дают:

$$\tau_t - \omega_{1x} + \kappa\omega_2 = 0. \quad (17)$$

Элементы третьей строки первого столбца дают:

$$\tau\omega_3 - \omega_{2x} - \kappa\omega_1 = 0. \quad (18)$$

Отсюда получим ω_1 в виде

$$\omega_1 = \frac{1}{\kappa}(\tau\omega_3 - \omega_{2x}). \quad (19)$$

Подставляя в (19) ранее полученные выражения для ω_2 и ω_3 из (14), имеем

$$\omega_1 = -\frac{3\varepsilon_2(\kappa_{xx}\tau + \kappa_x\tau_x) + 4W_3}{\kappa} - \varepsilon_2(\tau_{xx} - \frac{1}{2}\kappa^2\tau - \tau^3) + \frac{2}{\omega}W_1. \quad (20)$$

Для компонент векторного потенциала можем написать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} W_{1x} &= \kappa W_2, \\ W_{2x} &= 2\omega W_3 + \tau W_3 - \kappa W_1, \\ W_{3x} &= -\tau W_2 - 2\omega W_2. \end{aligned} \quad (21)$$

После некоторых сложных вычислений получаем

$$\kappa_t + \varepsilon_2[\kappa_{xxx} - 3\kappa\tau\tau_x - 3\kappa_x\tau^2 + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_x] + 4W_2 = 0, \quad (22)$$

$$\tau_t + \varepsilon_2\left(\frac{3\kappa_{xx}\tau + 3\kappa_x\tau_x}{\kappa} + \tau_{xx} + \tau^3 + \frac{3}{2}\kappa^2\tau\right)_x + \left(\frac{4W_3}{\kappa}\right)_x = 0. \quad (23)$$

Для того, чтобы вывести нелинейное уравнение Шредингера, применяем преобразование Хасимоты [5]

$$q = \frac{\kappa}{2}e^{-i\partial_x^{-1}\tau}, \quad (24)$$

где $\partial_x^{-1}\tau = \int_{-\infty}^x \tau dx$. Вычислим производные от этой функции

$$q_t = \left(\frac{\kappa_t}{2} - \frac{i\partial_x^{-1}\tau_t\kappa}{2}\right)e^{-\partial_x^{-1}\tau}, \quad (25)$$

$$q_x = \frac{1}{2}(\kappa_x - i\kappa\tau)e^{-\partial_x^{-1}\tau}, \quad (26)$$

$$q_{xx} = \frac{1}{2}(\kappa_{xx} - 2i\kappa_x\tau - i\kappa\tau_x - \kappa\tau^2)e^{-\partial_x^{-1}\tau}, \quad (27)$$

$$q_{xxx} = \frac{1}{2}(\kappa_{xxx} - 3i\kappa_x\tau - 3i\kappa_x\tau_x - 3\kappa\tau\tau_x - 3\kappa_x\tau^2 - i\kappa\tau_{xx} + i\kappa\tau^3)e^{-\partial_x^{-1}\tau}. \quad (28)$$

Введем следующее комплексное преобразование и переопределим функцию W_1

$$p = (iW_3 - W_2)e^{-\partial_x^{-1}\tau}, \quad (29)$$

$$\eta = W_1. \quad (30)$$

С учетом κ_t , τ_t и соответствующие производные, находим

$$2iq_t = i(\kappa_t - i\kappa\partial_x^{-1}\tau_t)e^{-\partial_x^{-1}\tau}, \quad (31)$$

$$2iq_t = (i\varepsilon_2[-\kappa_{xxx} + 3\kappa_x\tau^2 + 3\kappa\tau\tau_x + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_x] - 4iW_2 + \varepsilon[-3\kappa_{xx}\tau - 3\kappa_x\tau_x - \kappa\tau_{xx} + \kappa\tau^3 - \frac{3}{2}\kappa^3\tau] - 4W_3)e^{-\partial_x^{-1}\tau}, \quad (32)$$

$$+ \varepsilon[-3\kappa_{xx}\tau - 3\kappa_x\tau_x - \kappa\tau_{xx} + \kappa\tau^3 - \frac{3}{2}\kappa^3\tau] - 4W_3)e^{-\partial_x^{-1}\tau}, \quad (33)$$

$$2iq_t = (\varepsilon_2[-2iq_{xxx}e^{\partial_x^{-1}\tau} - \frac{3}{2}i\kappa^2\kappa_x - \frac{3}{2}\kappa^3\tau] - 4iW_2 - 4W_3)e^{-\partial_x^{-1}\tau}, \quad (34)$$

$$2iq_t = (-\varepsilon_2[2iq_{xxx}e^{\partial_x^{-1}\tau} + 12i|q|^2q_xe^{\partial_x^{-1}\tau}] + 4(-iW_2 - W_3))e^{-\partial_x^{-1}\tau}, \quad (35)$$

$$2iq_t = -2i\varepsilon_2q_{xxx} - 12i\varepsilon_2|q|^2q_x + 4ip. \quad (36)$$

В итоге имеем

$$iq_t + i\varepsilon_2(q_{xxx} + 6|q|^2q_x) - 2ip = 0. \quad (37)$$

Теперь, вычисляя производную по x , из (29) получим

$$p_x = (iW_{3x} - W_{2x})e^{-\partial_x^{-1}\tau} - i\tau(iW_3 - W_2)e^{-\partial_x^{-1}\tau}, \quad (38)$$

$$p_x = (-2\omega(iW_2 + W_3) + \kappa\eta)e^{-\partial_x^{-1}\tau}. \quad (39)$$

После преобразований напишем

$$p_x - 2i\omega p - 2\eta q = 0. \quad (40)$$

Аналогично для уравнения (30) можем написать

$$\eta_x + q^* p + p^* q = 0, \quad (41)$$

здесь $q^* = p$.

Таким образом, мы получили уравнение из семейства нелинейных уравнений типа Шредингера, эквивалентное уравнению M-LXIV. Оно имеет вид

$$iq_t + i\varepsilon_2(q_{xxx} + 6|q|^2 q_x) - 2ip = 0.$$

$$p_x - 2i\omega p - 2\eta q = 0.$$

$$\eta_x + q^* p + p^* q = 0.$$

Эта система уравнений является интегрируемой системой Хироты-Максвелла-Блоха [6].

В данной работе, используя геометрический метод теории солитонов, доказано, что уравнение M-LXIV интегрируемо. В частности, мы показали, что уравнение M-LXIV является геометрическим эквивалентом интегрируемой системы уравнения Хироты-Максвелла-Блоха, которое относится к семейству интегрируемых нелинейных уравнений Шредингера. Как известно из теории солитонов, установление эквивалентной связи возможно только между интегрируемыми нелинейными эволюционными уравнениями. Это значит, что уравнение M-LXIV относится к семейству интегрируемых спиновых моделей. Отметим, что именно интегрируемые модели допускают различные физические приложения.

Литература

1. Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G., Lakshmanan M. A (2+1) –dimensional integrable spin mode: Geometrical and gauge equivalent counterparts, solitons and localized coherent structures // *Physics Letters A*, V.233, №4-6, P. 391-396 (1997).
2. Myrzakulov R., Nugmanova G., Syzdykova R. Gauge equivalence between (2+1)- dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type // *Journal of Physics A: Mathematical & Theoretical*, V.31, №47, P.9535-9545 (1998).
3. Myrzakulov R., Danlybaeva A.K, Nugmanova G.N. Geometry and multidimensional soliton equation // *Theoretical and Mathematical Physics*, V.118, №3, P. 441-451 (1999).
- 4 Myrzakulov R., Mamyrbekova G. K., Nugmanova G.N., Yesmakhanova K.R. Integrable Motion of Curves in Self-Consistent Potentials : Relation to Spin Systems and Soliton Equations, *Physics Letters A*, 378, 2118-2123 (2014).
5. Hasimoto H. A soliton on a vortex filament, *Fluid Mech.* -1972. -Vol.51. -P. 477-485.
6. Porsezian K., Nakkeeran K. Optical Soliton Propagation in an Erbium Doped Nonlinear Light Guide with Higher Order Dispersion // *Physical Review Letters*7 - 1995. – Vol. 74. – P. 2941-2944.

УДК 530.1; 517.958; 538.221

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СПИНОВОЙ МОДЕЛИ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ж.М. Мықтыбай, Ж.М. Сагидуллаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан,

sagidullaeva_zhm@enu.kz

Интегрируемые солитонные уравнения имеют интересные геометрические эквивалентности с движущимися пространственными кривыми в (1+1) и (2+1)-мерных пространствах-времени. Эти эквивалентности проявляются через интегрируемые спиновые цепочки. Одним из них является отображение спиновой модели Гейзенберга в нелинейное интегрируемое уравнение Шредингера, где квадрат кривизны скользящей кривой связан с плотностью энергии спинового элемента, а кручение связано с плотностью тока. Эта взаимосвязь может быть переосмыслена как калибровочное преобразование между спиновыми системами и солитонными уравнениями так, что пара Лакса

между двумя системами может быть отображена друг на друга через условие нулевой кривизны. Таким образом, определяются топологические сохраняющиеся величины с геометрическими инвариантами. В данной работе представлено обобщение движения кривой и поверхности путем включения дополнительного самосогласованного потенциала. Так же представлены соответствующие обобщенные эволюционные уравнения для движущихся кривых [1-3].

Из теории солитонов известно, что эквивалент интегрируемого уравнения также является интегрируемым. Для доказательства интегрируемости уравнения Мырзакулова-ХСІХ (М- ХСІХ) [4], выведем для него геометрический эквивалент типа Шредингера. Впервые понятие геометрической эквивалентности введено в теорию солитонов М.Лакшмананом [5]. Он предложил точное преобразование, с помощью которого можно было перейти от уравнения Ландау-Лифшица к нелинейному уравнению Шредингера. В основе преобразования лежит отождествление вектора намагниченности с одним из базисных векторов e_j , а именно, $S \equiv e_1$ на основании движения тела вдоль кривой из дифференциальной геометрии.

(1+1)-мерное уравнение М-ХСІХ представлено в следующем виде [4]:

$$S_t + \frac{\varepsilon_1}{2} S \wedge S_{xx} + \frac{2}{\omega} S \wedge W = 0, \quad (1)$$

$$W_x + 2\omega S \wedge W = 0, \quad (2)$$

где \wedge означает векторное произведение, и $S = (S_1, S_2, S_3)$, $W = (W_1, W_2, W_3)$ - спиновой и потенциальный вектор, соответственно. Здесь $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$, S_i и W_i - некоторые реальные функции, ω и ε_i - реальные константы.

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем

$$e_{1x} = \kappa e_2, \quad (5)$$

$$e_{2x} = -\kappa e_1 + \tau e_3,$$

$$e_{3x} = -\tau e_2,$$

$$e_{1t} = \omega_3 e_2 - \omega_2 e_3,$$

$$e_{2t} = -\omega_3 e_1 + \omega_1 e_3, \quad (6)$$

$$e_{3t} = \omega_2 e_1 - \omega_1 e_2,$$

Здесь k и τ являются кривизной и кручением, соответственно, ω_j ($j=1,2,3$) - искомые компоненты матрицы C .

Отождествляя вектор $S \equiv e_1$ и подставляя в уравнение (1), для e_{1t} получим

$$\begin{aligned} e_{1t} &= -\frac{\varepsilon_1}{2} e_1 \wedge (e_{1x})_x - \frac{2}{\omega} e_1 \wedge (W_1 e_1 + W_2 e_2 + W_3 e_3), \\ e_{1t} &= -\frac{\varepsilon_1}{2} e_1 \wedge (\kappa e_2)_x - \frac{2}{\omega} (W_2 e_3 - W_3 e_2), \\ \omega_3 e_2 - \omega_2 e_3 &= -\frac{\varepsilon_1}{2} (k_x e_3 - k \tau e_2) - \frac{2}{\omega} (W_2 e_3 - W_3 e_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее приравнивая коэффициенты базисных векторов ($j=1,2,3$) в уравнении (7), получим:

$$e_2 : \omega_3 = \frac{\varepsilon_1}{2} k \tau + \frac{2}{\omega} W_3,$$

$$e_3 : \omega_2 = \frac{\varepsilon_1}{2} k_x + \frac{2}{\omega} W_2.$$

Анолигично получим выражение для e_{2t} в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{2t} &= -\frac{\varepsilon_1}{2} \mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{e}_{2x})_x - \frac{2}{\omega} \mathbf{e}_2 \wedge (W_1 \mathbf{e}_1 + W_2 \mathbf{e}_2 + W_3 \mathbf{e}_3), \\ -\omega_3 \mathbf{e}_1 + \omega_1 \mathbf{e}_3 &= -\frac{\varepsilon_1}{2} (k_x \mathbf{e}_3 + \tau_x \mathbf{e}_1) - \frac{2}{\omega} (-W_1 \mathbf{e}_3 + W_3 \mathbf{e}_1). \end{aligned} \quad (1)$$

По коэффициентам при e_j имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 : \omega_3 &= \frac{\varepsilon_1}{2} \tau_x + \frac{2}{\omega} W_3, \\ \mathbf{e}_3 : \omega_1 &= -\frac{\varepsilon_1}{2} k_x + \frac{2}{\omega} W_1. \end{aligned}$$

Аналогично для e_{3t}

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{3t} &= -\frac{\varepsilon_1}{2} \mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_{3x})_x - \frac{2}{\omega} \mathbf{e}_3 \wedge (W_1 \mathbf{e}_1 + W_2 \mathbf{e}_2 + W_3 \mathbf{e}_3), \\ \omega_2 \mathbf{e}_1 - \omega_1 \mathbf{e}_2 &= -\frac{\varepsilon_1}{2} (\tau_x \mathbf{e}_1 + k \mathbf{e}_2) - \frac{2}{\omega} (W_1 \mathbf{e}_2 - W_2 \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{e}_1 : \omega_2 &= -\frac{\varepsilon_1}{2} \tau_x + \frac{2}{\omega} W_2, \\ \mathbf{e}_3 : \omega_1 &= \frac{\varepsilon_1}{2} k \tau + \frac{2}{\omega} W_1. \end{aligned}$$

Из условия совместности следует

$$A_t - C_x + [A, C] = 0,$$

Подставив значения матриц A, C получим

$$\begin{pmatrix} 0 & k_t & 0 \\ -k_t & 0 & \tau_t \\ 0 & -\tau_t & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \omega_{3x} & -\omega_{2x} \\ -\omega_{3x} & 0 & \omega_{1x} \\ \omega_{2x} & -\omega_{1x} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\tau \omega_2 & k \omega_1 - \tau \omega_3 \\ \tau \omega_2 & 0 & k \omega_2 \\ \tau \omega_3 - k \omega_1 & -k \omega_2 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Элементы первой строки второго столбца дают:

$$k_t - \omega_{3x} - \tau \omega_2 = 0.$$

Элементы второй строки третьего столбца дают:

$$\tau_t - \omega_{1x} + k \omega_2 = 0.$$

Элементы третьей строки первого столбца дают:

$$\tau \omega_3 - \omega_{2x} - k \omega_1 = 0.$$

Отсюда получим выражения для кручения и кривизны

$$k_t = \omega_{3x} + \tau \omega_2, \quad (9)$$

$$\tau_t = \omega_{1x} - k \omega_2, \quad (10)$$

$$\omega_1 = \frac{\tau \omega_3 - \omega_{2x}}{k}. \quad (11)$$

$$(W_1 \mathbf{e}_1 + W_2 \mathbf{e}_2 + W_3 \mathbf{e}_3)_x = -2\omega \mathbf{e}_1 \wedge (W_1 \mathbf{e}_1 + W_2 \mathbf{e}_2 + W_3 \mathbf{e}_3).$$

В результате получаем следующее выражение

$$W_{1x} \mathbf{e}_1 + W_{2x} \mathbf{e}_2 + W_{3x} \mathbf{e}_3 = -W_1 k \mathbf{e}_2 + W_2 k \mathbf{e}_1 - W_2 \tau \mathbf{e}_3 + W_3 \tau \mathbf{e}_2 - 2\omega (W_2 \mathbf{e}_3 - W_3 \mathbf{e}_2).$$

Таким образом, коэффициенты при e_j дают выражения для W_{ix}

$$W_{1x} = k W_2, \quad (12)$$

$$W_{2x} = k W_1 + \tau W_3 + 2\omega W_3, \quad (13)$$

$$W_{3x} = -\tau W_2 - 2\omega W_2. \quad (14)$$

Отсюда выразим ω_j

$$\omega_1 = -\frac{\varepsilon_1}{2} \frac{k_{xx}}{k} + \frac{\varepsilon_1}{2} \tau^2 + \frac{2}{\omega} W_1 - \frac{4W_3}{k}, \quad (15)$$

$$\omega_2 = \frac{\varepsilon_1}{2} k_x + \frac{2}{\omega} W_2, \quad (16)$$

$$\omega_3 = \frac{\varepsilon_1}{2} \tau_x + \frac{2}{\omega} W_3. \quad (17)$$

Далее из выражения (9)

$$\begin{aligned} k_t &= \frac{\varepsilon_1}{2} \tau_{xx} + \frac{2}{\omega} (-\tau W_2 - 2\omega W_2) + \tau \left(\frac{\varepsilon_1}{2} k_x + \frac{2}{\omega} W_2 \right), \\ k_t &= \frac{\varepsilon_1}{2} \tau_{xx} - \frac{2}{\omega} \tau W_2 - 4W_2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \tau k_x + \frac{2}{\omega} \tau W_2, \\ k_t &= \frac{\varepsilon_1}{2} \tau_{xx} + \frac{\varepsilon_1}{2} \tau k_x - 4W_2. \end{aligned}$$

Для уравнения (10)

$$\begin{aligned} \tau_t &= -\frac{\varepsilon_1}{2} \left(\frac{k_{xx}}{k} \right)_x + \varepsilon_1 \tau \tau_x + \frac{2}{\omega} kW_2 - 4 \left(\frac{W_3}{k} \right)_x - k \left(\frac{\varepsilon_1}{2} k_x + \frac{2}{\omega} W_2 \right), \\ \tau_t &= -\frac{\varepsilon_1}{2} \left(\frac{k_{xx}}{k} \right)_x + \varepsilon_1 \tau \tau_x + \frac{2}{\omega} kW_2 - 4 \left(\frac{W_3}{k} \right)_x - \frac{\varepsilon_1}{2} k k_x - \frac{2}{\omega} kW_2, \\ \tau_t &= \left(-\frac{\varepsilon_1}{2} \frac{k_{xx}}{k} - \frac{4W_3}{k} \right)_x + \varepsilon_1 \tau \tau_x - \frac{\varepsilon_1}{2} k k_x. \end{aligned}$$

В итоге получаем следующую систему

$$\begin{aligned} k_t - \frac{\varepsilon_1}{2} (\tau k)_x - \frac{\varepsilon_1}{2} \tau k_x + 4W_2 &= 0, \\ \tau_t + \left(\frac{\frac{\varepsilon_1}{2} k_{xx} + 4W_3}{k} \right)_x + \frac{\varepsilon_1}{2} k k_x - \varepsilon_1 \tau \tau_x &= 0, \\ W_{1x} - kW_2 &= 0, \\ W_{2x} + kW_1 - \tau W_3 - 2\omega W_3 &= 0, \\ W_{3x} + \tau W_2 + 2\omega W_2 &= 0. \end{aligned}$$

Затем применим преобразование Хасимоты [6]. Для этого представим две комплексные функции (q, p) и одну реальную (η) в следующем виде

$$q = \frac{\kappa}{2} e^{-i\partial_x^{-1}\tau}, \quad (18)$$

$$p = (iW_3 - W_2) e^{-i\partial_x^{-1}\tau}, \quad (19)$$

$$\eta = W_1, \quad (20)$$

где $\partial_x^{-1} = \int_{-\infty}^x \tau dx$.

Вычисляем производные этих функций

$$iq_t = \frac{1}{2} (i\kappa_t + \kappa \partial_x^{-1} \tau_t) e^{-i\partial_x^{-1}\tau} \quad (21)$$

$$q_x = \frac{1}{2} (\kappa_x - i\kappa \tau) e^{-i\partial_x^{-1}\tau}$$

$$q_{xx} = \frac{1}{2} (\kappa_{xx} - 2i\kappa_x \tau - i\kappa \tau_x - \kappa \tau^2) e^{-i\partial_x^{-1}\tau}$$

Подставляя значения κ_t и τ_t в выражение (21), получим

$$\begin{aligned} iq_t &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_1 i \kappa_x \tau + \frac{\varepsilon_1 i}{2} \kappa \tau_x - 4iW_2 - \frac{\varepsilon_1}{2} \left(2q_{xx} e^{i\partial_x^{-1}\tau} + 2i\kappa_x \tau + i\kappa \tau_x + \kappa \tau^2 \right) \right) e^{-i\partial_x^{-1}\tau} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-4W_3 + \frac{\varepsilon_1}{2} \kappa \tau^2 - \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{\kappa^3}{2} \right) e^{-i\partial_x^{-1}\tau} \end{aligned}$$

$$iq_t = \frac{1}{2} \left(-4iW_2 - \varepsilon_1 q_{xx} e^{i\partial_x^{-1}\tau} - 4W_3 - \frac{\varepsilon_1 \kappa^3}{2} \right) e^{-i\partial_x^{-1}\tau}$$

$$iq_t = 2i(iW_3 - W_2) e^{-i\partial_x^{-1}\tau} - \frac{\varepsilon_1}{2} q_{xx} - \frac{\varepsilon_1}{8} \kappa^3 e^{-i\partial_x^{-1}\tau}$$

$$iq_t = 2i(iW_3 - W_2) e^{-i\partial_x^{-1}\tau} - \frac{\varepsilon_1}{2} q_{xx} - \varepsilon_1 |q|^2 q,$$

где $|q|^2 q = \frac{\kappa^3}{8} e^{-i\partial_x^{-1}\tau}$.

Таким образом получаем

$$iq_t + \frac{\varepsilon_1}{2} q_{xx} + \varepsilon_1 |q|^2 q - 2ip = 0, \quad (22)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} P_x &= [(iW_3 - W_2) e^{-i\partial_x^{-1}\tau}]_x, \\ P_x &= (iW_{3x} - W_{2x} + W_3 \tau + iW_2 \tau) e^{-i\partial_x^{-1}\tau}, \\ P_x &= (-2i\omega W_2 - 2\omega W_3 + \kappa W_1) e^{-i\partial_x^{-1}\tau}, \\ P_x &= 2i\omega(iW_3 - W_2) e^{-i\partial_x^{-1}\tau} + 2qW_1, \\ P_x &= 2i\omega p + 2q\eta, \\ P_x - 2i\omega p - 2q\eta &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Также для выражения (20) получим

$$\begin{aligned} \eta_x + \bar{q}p + p\bar{q} &= 0, \\ \kappa W_2 + \frac{i}{2} \kappa W_3 - \frac{\kappa}{2} W_2 - \frac{i}{2} \kappa W_3 - \frac{\kappa}{2} W_2 &= 0, \\ \kappa W_2 &= \kappa W_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Наконец получаем НУШ в виде, которое эквивалентно уравнению М-ХСІХ

$$\begin{aligned} iq_t + \frac{\varepsilon_1}{2} q_{xx} + \varepsilon_1 |q|^2 q - 2ip &= 0, \\ P_x - 2i\omega p - 2q\eta &= 0, \\ \eta_x + \bar{q}p + p\bar{q} &= 0. \end{aligned}$$

В этой статье показали, что нелинейные эволюционные уравнения, описывающие движение пространственных кривых могут быть выведены в присутствии самосогласованного внешнего потенциала. Тогда соответствующие спиновые системы с самосогласованными потенциалами можно внести в общий класс семейства интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений с дополнительными потенциальными полями. Таким образом, мы доказали интегрируемость уравнения М-ХСІХ с векторным потенциалом, следовательно оно является солитонным уравнением и описывает процесс намагниченности в слоистых ферромагнетиках.

Литература

- 1 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G., Lakshmanan M. A (2+1) –dimensional integrable spin mode: Geometrical and gauge equivalent counterparts, solitons and localized coherent structures // *Physics Letters A*, V.233, №4-6, P. 391-396 (1997).
2. Myrzakulov R., Nugmanova G., Syzdykova R. Gauge equivalence between (2+1)- dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type // *Journal of Physics A: Mathematical & Theoretical*, V.31, №47, P.9535-9545 (1998).
3. Myrzakulov R, Danlybaeva A.K, Nugmanova G.N. Geometry and multidimensional soliton equation // *Theoretical and Mathematical Physics*, V.118, №3, P. 441-451 (1999).
4. Myrzakulov R., Mamyrbekova G. K., Nugmanova G.N., Yesmakhanova K.R. Integrable Motion of Curves in Self-Consistent Potentials : Relation to Spin Systems and Soliton Equations, *Physics Letters A*, 378, 2118-2123 (2014).
5. Lakshmanan M. On the geometrical interpretation of solitons // *Phys. Lett.* -1978. -Vol. 64, 4. -P.354-356.
6. Hasimoto H. A soliton on a vortex filament, *Fluid Mech.* -1972. -Vol.51. -P. 477-485.

UDC 517.957

SEED SOLUTION OF (1+1)-DIMENSIONAL HIROTA-MAXWELL-BLOCH EQUATION

K. Zhymagulov, Zh. Myrzakulova, D. Tungushbaeva, K. Yesmakhanova
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan, jaydary@mail.ru

Finding soliton solutions of multidimensional nonlinear equations is one of the pressing issues in the theory of solitons. With their help, described many of the physical processes in the dynamics of solid matters, elementary particle physics and other fields.

The purpose of this paper is to construct Darboux transformation, which is used for seed solutions of (1+1)-dimensional Hirota-Maxwell-Bloch equation (HMBE). We consider following nonlinear differential equation HMBE [1]

$$q_t = -(q_x - iq_{xx} + q_{xxx} - 2p), \tag{1}$$

$$p_x = -2q\eta - 2i\omega p, \tag{2}$$

$$\eta_x = qp^* + q^*p, \tag{3}$$

where the symbol * is the complex conjugation, $q = q(x, y, t)$, $p = p(x, y, t)$ are complex functions, $\omega = \omega(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$ are real functions. The corresponding linear problem of the (1+1)-dimensional Hirota-Maxwell-Bloch equation defines the view [2-3]

$$\psi_x = A\psi, \tag{4}$$

$$\psi_t = B\psi, \tag{5}$$

here

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -q \\ r & 0 \end{pmatrix} = \lambda\sigma_3 + A_0, \tag{6}$$

$$B = \lambda^3 \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 2i & 4q \\ -4r & -2i \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 - 2|q|^2 & -2(q + iq_x) \\ 2ir + 2r_x & 1 + 2|q|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C_1 & D_1 \\ D_1^* & C_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{\lambda + i\omega} \begin{pmatrix} -\eta & p \\ p^* & \eta \end{pmatrix} = \lambda^3 B_3 + \lambda B_2 + \lambda B_1 + B_0 + \frac{1}{\lambda + i\omega} B_{-1},$$

Where

$$C_1 = -iqr + rq_x - qr_x, \quad D_1 = 2rq^2 + q - iq_x + q_{xx}$$

and λ is a complex eigenvalue parameter and Ψ - a vector defining following form:

$$\psi = \Psi(\lambda, x, y, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda, x, y, t) \\ \psi_2(\lambda, x, y, t) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Next construct a one-fold Darboux transformation for the HNBE that was described [4]. In order to find the Lax representation, which is defined by [5], we input following function

$$\Psi^{[1]}(x, y, t) = T(x, y, t)\Psi(x, y, t), \tag{9}$$

where $T(x, y, t)$ is Darboux 2×2 matrix that has form

$$T(x, y, t) = \lambda I - M(x, t), \tag{10}$$

here $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ and m_{ij} are functions of x, y and t . M is unknown matrix.

For the new function $\Psi^{[1]}$ satisfies the following Lax representation

$$\psi_x^{[1]} = A^{[1]}\psi^{[1]} \tag{11}$$

$$\psi_t^{[1]} = B^{[1]}\psi^{[1]}. \tag{12}$$

Thereat matrix T must satisfy next view

$$T_x + TA = A^{[1]}T, \tag{13}$$

$$T_t + TB = B^{[1]}T. \quad (14)$$

These equations give the connection between solutions q, p, v, ω, η and new solutions $q^{[1]}, p^{[1]}, v^{[1]}, \omega^{[1]}, \eta^{[1]}$ (see papers [2-6]). From formula (13) get next expressions:

$$\lambda^0 : M_x = A_0^{[1]}M - MA_0, \quad (15)$$

$$\lambda : A_0^{[1]} = A_0 - M\sigma_3 + \sigma_3M, \quad (16)$$

$$\lambda^2 : I\sigma_3 = I\sigma_3. \quad (17)$$

Finally, after calculating system (15)-(17), we obtain following solution

$$q^{[1]} = q - 2m_{12} \quad (18)$$

and elements of the matrix $M(x, t)$ satisfies the condition $m_{22} = -m_{11}^*, m_{21} = m_{12}^*$.

Further from equation (13) take:

$$\lambda^0 : M_t = \left(B_0^{[1]} - \frac{i}{\omega} B_{-1}^{[1]} \right) M - M \left(-\frac{i}{\omega} B_{-1} + B_0 \right), \quad (19)$$

$$\lambda : M_t = (i\omega B_0 + B_{-1}) - M(i\omega B_1 + B_0) + (i\omega B_1^{[1]} + B_0^{[1]})M + (-i\omega B_0^{[1]} + B_{-1}^{[1]}), \quad (20)$$

$$\lambda^2 : (i\omega B_1 + B_0) - M(i\omega B_2 + B_1) = (i\omega B_1^{[1]} + B_0^{[1]}) - (-i\omega B_2^{[1]} + B_1^{[1]})M, \quad (21)$$

$$\lambda^3 : (i\omega B_2 + B_1) - M(i\omega B_3 + B_1) = (i\omega B_2^{[1]} + B_1^{[1]}) - (-i\omega B_3^{[1]} + B_2^{[1]})M, \quad (22)$$

$$\lambda^4 : B_2^{[1]} = B_2 - [M, B_3]. \quad (23)$$

$[M, B_3]$ is commutator. From above system obtain

$$B_{-1}^{[1]} = (M + i\omega I)B_1(M + i\omega I)^{-1}. \quad (24)$$

We make the following choice of the matrix $M(x, t)$:

$$M = H\Lambda H^{-1}, \quad (25)$$

where $\det H \neq 0$,

$$H = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix}. \quad (26)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

where λ_1 and λ_2 are complex constants, $\lambda_2 = \lambda_1^*$.

Then, assume H matrix $\det H \neq 0$, find matrix H^{-1}

$$H^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \\ -\psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\Delta = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2. \quad (29)$$

Formula (26), (27) and (29) substituting in the equation (26), then from identity (25) we get the new seed solutions

$$\eta^{[1]} = \frac{\eta \left(|m_{11} + i\omega|^2 + |m_{12}|^2 \right) + p^* m_{12} (m_{11}^* - i\omega) + pm_{12}^* (m_{11} + i\omega)}{\nabla}, \quad (30)$$

$$p^{[1]} = \frac{2\eta m_{11} (m_{11} + i\omega) - p^* m_{12}^2 + p (m_{11} + i\omega)^2}{\nabla} \quad (31)$$

where

$$\nabla = \det(M + i\omega I) = -(\omega^2 + i\omega[m_{11}^* - m_{11}] + |m_{11}|^2 - |m_{12}|^2),$$

$$m_{11} = \frac{\lambda_1 |\psi_1|^2 + \lambda_2 |\psi_2|^2}{\Delta}, m_{11}^* = -\frac{\lambda_1 |\psi_1|^2 + \lambda_2 |\psi_2|^2}{\Delta}, m_{12} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \psi_1 \psi_2^*}{\Delta}.$$

Provided that p, p^*, q equal zero we have

$$q^{[1]} = -2m_{12}, \quad (32)$$

$$\eta^{[1]} = \frac{|m_{11} + i\omega|^2 + |m_{12}|^2}{\nabla}, \quad (33)$$

$$p^{[1]} = \frac{2m_{11}(m_{11} + i\omega)}{\nabla}. \quad (34)$$

In conclusion, application of Darboux transformation to solve explicit seed solutions for the (1+1)-dimensional Hirota-Maxwell-Bloch equation (1). In this paper Darboux transformation was used for nonlinear differential equation and taken solutions [1-6]. This work has been supported by

This work was supported by grant financing of MES RK of the budget program 055 " Research and / or scientific - technical activity " on 2015-2017 years ", " Investigation of generalized nonlinear Schrodinger equations and integrable reductions . "

References

1. Martina L., Myrzakul K., Myrzakulov R. and Soliani G. Deformation of surfaces, integrable systems and Chern-Simons theory, J. Math. Phys. V.42, №3.(2001), 1397-1417.
2. Yesmakhanova K., Shaikhova G., Zhussupbekov K., Myrzakulov R. The (2+1)-dimensional Hirota-Mxwell-Bloch equation: Darboux transformation and soliton solutions. arXiv: 1404.5613v1.
3. Chuanzhong Li, Jingsong He, K. Porsezian. Rogue waves of the Hirota and the Maxwell-Bloch equations, [arXiv:1205.1191]
4. Chuanzhong Li, Jingsong He. Darboux transformation and positons of the inhomogeneous Hirota and the Maxwell-Bloch equation. arXiv:1210.2501
5. Jieming Yang, Chuanzhong Li, Tiantian Li, Zhaoneng Cheng. Darboux transformation and solutions of the two-component Hirota-Maxwell-Bloch system, Chin. Phys Lett., 30, N10, 104201 (2013). arXiv:1310.0617
6. Myrzakulov R., Mamyrbekova G.K., Nugmanova G.N. Yesmakhanova K.R., Lakshmanan M. Integrable motion of curves in self-consistent potentials: Relation to spin systems and soliton equations//Physics Letters A, Volume 378, Issues 30–31, 13 June 2014, Pages 2118–2123

УДК 52:539.12; 524.8.

ӘЛЕМДЕГІ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ИНФЛЯЦИЯ ДӘУІРІНДЕ ТАРАЛУЫ

Ш.Р.Мырзақұл, А.А.Ыдырысова, Д.С. Тастанова
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан.
b_o_t_a94@mail.ru, d_t93@mail.ru

Космологияда гравитациялық толқындарды зерттейтін көптеген жұмыстар I-ші ретті жуықтау әдісіне негізделген. Дегенмен, егер Әлемде гравитациялық сәулелену маңызды роль алатын болса, онда толқындар стандартты бірыңғай және изотропты модельдердің симметриясының себебінен болуы мүмкін. Жалпы, үлкен ауытқуларды анықтау үшін сандық тәсілге сүйенеміз. Бірақ, кеңістік-уақыттың сол кеңістікке ұқсас екі Киллинг векторы бар болса, онда кем дегенде вакуум үшін, скалярлық және электромагниттік өрістер немесе аса қатаң сұйық үшін гравитациялық толқындар немесе солитондар кіретін нақты шешімдерді құрастыруға болады. Мұндағы аса қатаң сұйықтықтың күй теңдеуінің параметрі 1-ге тең. Осы шешімдердің бірнешеуін Кармели [1], Адамс [2], соңғы уақыттарда Вердагуа [3] қарастырған. Космологиядағы гравитациялық толқындар бойынша келтірілген нақты шешімдерді бүкіл Әлемдегі бойынша ұйытқулар арқылы түсіндірген. Осылайша, толқын бетінің геометриясына талдау жасау мүмкін емес.

Әлемдегі қисықтық космологияда нақты гравитациялық толқындық шешімді іздейміз.

Сызықты емес гравитациялық өріс теңдеулері, әлсіз гравитациялық толқындар болсада, гравитациялық өріс фонымен әрекеттесуі мүмкін. Бұл әрекеттесуді толқындардың динамикалық қасиеттерінен, яғни оның дисперсиясынан немесе тағы да басқа параметрлерінен көруге болады.

Реликті гравитациялық толқындарды анықтаудың тек бір жолы бар. Оны Әлем дамуының өте ерте кезеңдері туралы мәліметтерден алуға болады. Оларды анықтау үшін қасиеттерін білу қажет. Ертедегі Әлем кезеңдерін сипаттайтын экстремальды физикалық шарттар дамудың әртүрлі күйлеріне алып келді. Гравитациялық толқындардың шешімдері әрбір күйдегі кеңістік-уақыт дамуымен сәйкес келуі керек.

Бұл мақалада, біз бірыңғай изотропты Әлемде таралып жатқан гравитациялық толқындарға арналған шешімдердің жаңа түрін ұсынамыз. Сондықтан, ол тұрақты қисықтың кеңістіктік бөлігіне ие. Толқын фронтының геометриялық сипаты сөзсіз анықталуы мүмкін. Осы шешімдер үшін біз толқындық фронттың сипатын талдай аламыз. Яғни гравитациялық толқынның ұйытқуының дамуын анықтаймыз.

Космологиялық гравитациялық толқындар.

Космологиялық гравитациялық толқындар универсалды метрикалық тензордың кішкене түзетуі $h_{\mu\nu}$ болады.

Фраунгофер аумағындағы өріс вакуумсыз кеңістік-уақыт әлсіз гравитациялық толқынды дифференциалды теңдеумен анықталынады:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha} - 2\mathfrak{R}_{\alpha\mu\nu\beta}h^{\alpha\beta} &= 0, \\ (h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}h)_{\beta} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

мұндағы $g_{\alpha\beta}$ - метрикалық тензор.

Біз Әлемдегі космологиялық гравитациялық толқындардың дамуының өзгеруін зерттеу үшін екі кезеңді қарастырдық:

1. Инфляциялық дәуірден бастап жарық басым кезеңіне дейін $t = t_{GUT}$;
2. Радиация дәуірінен бастап қатты зат кезеңіне дейін $t = t_{REC}$.

Әрбір түрленулер лезде болады деп болжанады және фонның динамикасы өзгереді. Толқын теңдеуінің таралу өзгерісі оның туынды түрінің өзгеруінен болады. Гравитациялық толқын ішінде инфляциялық дәуір жасалды. Гравитациялық емес физиканың әсерінен Әлем фазалық ауысулардың қатарында болады.

Біз гравитациялық толқынның кеңістік-уақыт динамикасының модификациясына жауап беруін анықтаймыз. Сондықтан Фридман-Робертсон-Уокер (ФРУ) космологиялық моделінің кеңістіктегі ұлғаюының гравитациялық толқындардың сызықтық поляризациясын қарастырамыз.

Жазық кеңістіктегі ФРУ моделі:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (2)$$

Жазық Әлем үшін ФРУ теңдеулері:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t), \quad (3)$$

$$2\frac{\dot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p(t).$$

Идеал сұйықтық үшін энергия-импульс тензоры былай анықталады:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)u^{\mu}u^{\nu} - g_{\mu\nu}p. \quad (4)$$

Энергияның сақталу заңына бағына отырып:

$$T_{\nu}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (5)$$

күй теңдеуін былай аламыз:

$$p = \left(\frac{m}{3} - 1\right) \rho c^2 \quad (6)$$

Енді материяның әртүрлі күйлерін қарастырайық:

- Кванттық вакуум үшін $m = 0$;
- Газ үшін $m = 2$;
- Шаң үшін $m = 3$;
- Радиация үшін $m = 4$;
- Қатты зат үшін $m = 6$.

Сақталу заңы мына түрде болады:

$$\rho(t) = \frac{\gamma}{a^m}, \quad \text{мұндағы } \gamma = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \rho_0 a_0^m,$$

мұндағы ρ_0 - тығыздық энергиясы, a_0 - масштабты фактор. Табылған шешімге жоғарыдағы (3) теңдеуді қойып, масштабты фактордың теңдігін анықтаймыз:

$$a^{\frac{m}{2}-1} \dot{a} = C. \quad (7)$$

Енді келесі жағдайларды қарастырайық:

Кванттық вакуум үшін: $m = 0$

$$a(t) = e^{\lambda t}. \quad (8)$$

Инфляциялық модельдегі газ $m = 2$

$$R(t) = R_2 t. \quad (9)$$

Мильне моделіндегі қатты зат үшін: $m \neq 0, 2$

$$a(t) = a_m t^{\frac{2}{m}}. \quad (10)$$

ФРУ-да космологиялық толқын былай анықталады, оған уақыттық координатаны аламыз:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j. \quad (11)$$

Есептеуге жеңіл болу үшін конформды-уақыт координатасын ұсынамыз:

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (12)$$

Ыңғайлы болу үшін конформды-уақыт шешімін табамыз:

$$\tau = \int \frac{dt}{e^{\lambda t}}, \quad (13)$$

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \lambda_1.$$

Конформды уақыт үшін масштабты фактор келесідей анықталады:

$$S(\tau) = \frac{S_0}{\tau}. \quad (14)$$

$m=2$ үшін $S(\tau)$ дің мәні:

$$S(\tau) = S_2 e^{C\tau}. \quad (15)$$

$m \neq 0, 2$ үшін $S(\tau)$ дің мәні:

$$S(\tau) = S_m \tau^{\frac{2}{m-2}}. \quad (16)$$

(11) формуладағы метрика үшін гравитациялық толқын теңдеуі:

$$h''_{ik} + 2 \frac{S'}{S} h'_{ik} + \delta^{lm} h_{ik,lm} = 0. \quad (17)$$

Гравитациялық толқын теңдеуін анықтау үшін біз метрикалық түзетуді мына түрде анықтаймыз:

$$h_{ik}(\tau, x^j) = \frac{h(\tau)}{S(\tau)} G_{ik}(x^j), \quad (18)$$

$$G_{ik}(x^j) = \alpha \varepsilon_{ik} e^{ik} j^{x^j}, \quad (19)$$

мұндағы G_{ik} - жазық кеңістіктегі Лаплас операторына жазылған К толқындық санының жеке функция тензоры.

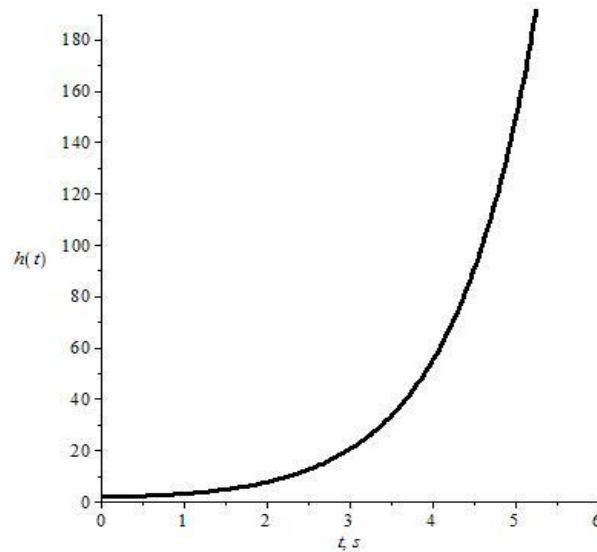
Осыған сәйкес конформды уақытқа тәуелді дифференциалдық теңдеуіне тоқталамыз.

$$h'' + (k^2 - \frac{S''}{S})h = 0. \quad (23)$$

Осыдан кванттық вакуум үшін гравитациялық ұйытқулардың дамуын анықтаймыз

$$h = c_1 e^{\sqrt{ct}} + c_2 e^{-\sqrt{ct}}. \quad (24)$$

Осы шешімге сәйкес график тұрғызамыз



Сурет 1 - Гравитациялық ұйытқудың дамуы.

Бұл мақалада біз гравитациялық толқын ұйытқуының дамуын зерттедік. Ол үшін ФРУ әлемінде әр түрлі материяның дамуын анықтадық. (12) теңдеумен анықталатын конформды уақыт үшін гравитациялық толқындардың ұйытқуларын (24) теңдеу түрінде дамуын анықтадық. 1- суретте көрсетілгендей уақыт өте ұйытқулар өсетінін зерттедік.

Әдебиеттер

1. M. Carmeli, Ch. Charach and S. Malin, Phys. Rep. 76 (1981), 79.
2. P. J. Adams, R. W. Hellings, R. L. Zimmerman, H. Farhoosh, D. I. Levine, and S. Zeldich, Astrophys. J. 253 (1982).
3. E. Verdaguer, Phys. Rep. 229 (1993).
4. В.Д. Захаров *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна* (М. Наука, 1972)
5. С. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973)
6. Weinberg S *Gravitation and Cosmology* (New York: Wiley, 1972)
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Теория поля* (М. Наука 1988)
8. H. Bateman, A. Erdelyi *Higher Transcendental Functions* (New York: McGraw-Hill, 1954)

УДК 524.1; 524,8

КОСМОЛОГИЯ ОТСКОКА В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ГАУССА-БОННЕ

К.К. Ержанов, А. Мейрамбай

Евразийский Национальный Университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
okta_aidu@mail .ru

Приблизительно 14 миллиардов лет назад Вселенная начала расширяться от состояния, известного как сингулярность. Расширение Вселенной сопровождается постепенным уменьшением ее температуры и плотности.

Космологическая модель - математическое построение, описывающее Вселенную, которое пытаются объяснить ее текущее поведение и развитие в течение долгого времени. Космологические модели основаны на непосредственных наблюдениях. Они способны к созданию предсказаний, которые могут быть полезны для изучения наблюдательных данных, и обычно основаны на Общей теории относительности [1]. Большая часть космологических моделей используют теорию, в которой действие - произвольная функция скалярной кривизны или/и инвариант Гаусса-Бонне.

Инвариант Гаусса-Бонне можно записать в таком виде:

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (1)$$

где $R_{\mu\nu}$ -тензор Риччи и $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ -тензор Риманна. Если использовать этот инвариант в действии размерности D, то его можно переписать как

$$S = d^D x \sqrt{-g} G. \quad (2)$$

Тогда уравнения движения для данной функции Лагранжа включают члены до вторых производных метрики. Различие между этим скаляром и инвариантом Эйнштейна-Хилберта в том, что этот тензор не линеен по отношению к вторым производным метрики. Тем не менее, это-топологическая собственность четырехмерных компонент $\sqrt{-g}G$, которые точки зрения полной производной могут быть выражены так:

$$\sqrt{-g}G = \partial_\alpha D^\alpha, \quad (3)$$

где

$$D^\alpha = \sqrt{-g} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\rho [R_{\nu\gamma\delta}^\sigma / 2 + \Gamma_{\lambda\gamma}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda / 3]. \quad (4)$$

Чтобы увидеть вклад инварианта ГБ в уравнение движения, можно попытаться соединить его со скалярным полем ϕ , $f(\phi)G$, где $f(\phi)$ функция скалярного поля ϕ . Действие для подобной модели выражается в следующем виде:

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F(\phi) R - \frac{1}{2} \omega(\phi) \nabla \phi^2 - V\phi - f(\phi)G \right] \quad (5)$$

где $F(\phi)$, $\omega(\phi)$ и $V(\phi)$ функции ϕ . Соединение этой формы Гаусса-Бонне появляется в низких энергетических эффективных действиях теории струн, из-за присутствия условий смешивания дилатон-гравитона.

Другой класс теории Гаусса-Бонне можно записать в следующей форме:

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R + f(G) \right], \quad (6)$$

где $f(G)$ функция Гаусса-Бонне. Уравнения движения, помимо стандартного вклада ГР, получают члены, пропорциональные $\nabla_\mu \nabla_\nu f, G$. Эта теория обладает большим количеством степеней свободы, чем ГР, но дополнительная информация появляется только в скалярном члене f, G и его производных.

Данную модель рассмотрим в следующем виде:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R + f(G) \right] + S_M \quad (7)$$

Вклад члена S_M обусловлен влиянием идеальной жидкости с параметром состояния ω . Вариация действия дает следующие уравнения поля:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F'(G) - (-2RR_{\mu\nu} + 4R_{\mu\rho}R_{\nu}{}^{\rho} - 2R_{\mu}{}^{\rho\sigma\tau}R_{\nu\rho\sigma\tau} + 4g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}R_{\mu\alpha\nu\beta}R_{\rho\sigma})F'(G) - \\ - 2(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}F'(G))R + 2g_{\mu\nu}(\underline{\Pi}F'(G))R - 4(\underline{\Pi}F'(G))R_{\mu\nu} + 4(\nabla_{\rho}\nabla_{\mu}F'(G))R_{\nu}{}^{\rho} + \\ + 4(\nabla_{\rho}\nabla_{\nu}F'(G))R_{\mu}{}^{\rho} - 4g_{\mu\nu}(\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}F'(G))R^{\rho\sigma} + 4(\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}F'(G))g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}R_{\mu\alpha\nu\beta} = k^2 T_{\mu\nu}^{(matter)} \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $T_{\mu\nu}^{(matter)}$ тензор энергии - импульса материи. Если $f \propto G$, то модель сводится к ГР.

Здесь производная относительно G , ∇_{μ} является ковариантной производной, $\underline{\Pi} \equiv g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu}$ - ковариантным даламберианом и $T_{\mu\nu}^{(matter)} = (-\rho_{matter}, p_{matter}, p_{matter}, p_{matter})$ - тензором энергии - импульса материи, где ρ_{matter} и p_{matter} плотность энергии и давление материи. Для вычислений будем использовать плоскую метрику Фридмана-Робертсона-Уолкера:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \sum_{i=1,2,3} (dx^i)^2, \quad (9)$$

где a - масштабный фактор, $H = \frac{\dot{a}}{a}$ параметр Хаббла, и точка обозначает производную по времени.

Для этой модели мы получаем:

$$R = 6\dot{H} + 12H^2 \quad (10)$$

$$G = 24H^2(H^2 + \dot{H}) = -12H^4(1 + 3\omega_{eff}) \quad (11)$$

где $\omega_{eff} = -1 - 2\dot{H}/3H^2$ эффективный параметр уравнения состояния.

Уравнения поля можем записать как [3]:

$$6H^2 + F(G) - GF'(G) + 24H^3 \dot{G} HF''(G) = 2k^2 \rho_{matter}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 4H + 6\dot{H}^2 + F(G) - GF'(G) + 16H\dot{G}(\dot{H} + H^2)F''(G) + 8H^2\ddot{G}F''(G) + \\ + 8H^2\dot{G}^2 F'''(G) = -2k^2 p_{matter} \end{aligned} \quad (13)$$

Далее будем исследовать только часть действия в уравнении (7) без члена материи. Рассмотрим модель для случая, когда масштабный фактор $a(t)$ имеет следующий вид:

$$a = at^n, \quad (14)$$

где n - некоторая константа. Тогда мы находим что

$$H(t) = nt^{n-2}, \quad (15)$$

$$\dot{H} = n(n-2)t^{n-3}. \quad (16)$$

И соответственно используя (11) G перепишем как

$$G = 24n^3 t^{3n-7} (n-2 + nt^{n-1}), \quad (17)$$

$$\dot{G} = 24H^2(\dot{H} + H^2) = 24n^3 t^{3n-8} (3n^2 - 13n + 14 + (4n-8)nt^{n-1}), \quad (18)$$

$$\ddot{G} = 24n^3(n-2)(3n-7)(3n-8)t^{3n-9} + 24n^4(4n-8)(4n-9)t^{4n-10}. \quad (19)$$

Как частный случай рассмотрим $F(G)$ в следующей форме:

$$F(G) = G^2, \quad F'(G) = 2G, \quad F''(G) = 2, \quad F'''(G) = 0 \quad (20)$$

Тогда соответственно уравнение (13) будет выглядеть как:

$$\begin{aligned} & 4n(n-2)t^{n-3} + 6n^2t^{2n-4} + G^2 - 48n^3t^{3n-7}G(n-2 + nt^{n-1}) + 768n^4t^{4n-10} \cdot \\ & \cdot (3n^2 - 13n + 14 + (4n-8)nt^{n-1}) \cdot (n(n-2)t^{n-3} + n^2t^{2n-4}) + 16n^2t^{2n-4} \cdot \\ & \cdot [24n^3(n-2)(3n-7)(3n-8)t^{3n-9} + 24n^4(4n-8)(4n-9)t^{4n-10}] = -2k^2\rho \end{aligned} \quad (21)$$

И согласно уравнению (11) показатель уравнения состояния ω_{eff} найдем как:

$$\omega_{eff} = \frac{4t^{1-n}}{3n} - \frac{2}{3}t^{1-n} - 1 \quad (22)$$

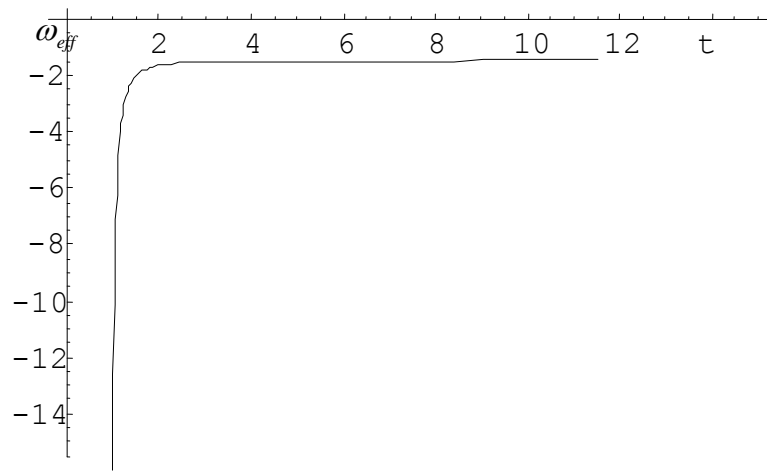


Рис. 1. Зависимость ω_{eff} от времени t , при $n = 3$.

Как видно из графика на Рис. 1, параметр состояния нашей модели стремится к -1 , что вполне согласуется с современными наблюдательными данными.

Нами рассмотрен сценарий эволюции космологической модели, описывающей раннюю Вселенную, известный как сценарий сильного отскока материи. Мы рассмотрели космологический сильный отскок в рамках модели Гаусса-Бонне, где динамическое скалярное поле неминимально соединяется со скаляром Риччи и/или инвариантом Гаусса-Бонне. Данная модель представляет не сингулярную космологию, с использованием скалярного поля с нетривиальным потенциалом и нестандартным кинетическим инвариантом. После сильного отскока в нашей модели происходит плавный переход к стандартному расширению с фазой с доминирующей материей. Показано что в данной модели есть период экспоненциального роста амплитуды колебаний возмущений.

Литература

1. K.Bamba, A.N.Makarenko, A.N.Myagky, S.Nojiri, S.D.Odintsov. Bounce cosmology from F(R) gravity and F(R) bigravity. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. T. 2014, 1401 (2014) C. 32.
2. Bamba, K., Makarenko, A. N., Myagky, A. N., & Odintsov, S. D. Bouncing cosmology in modified Gauss-Bonnet gravity. Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics, T. 732, C. 349-355, (2014).
3. S.Nojiri and S.D. Odintsov. Mimetic F(R) gravity: inflation, dark energy and bounce. Modern Physics Letters A. A29,1450211, (2014).

МИНИСУПЕР КЕҢІСТІКТІҢ БІРҚАЛЫПСЫЗ ТҮТҚЫР СҰЙЫҚТЫҚПЕН БАЙЛАНЫСЫ

¹Ш.Р.Мырзақұл, ¹Т.Мақсұтқан, ²Т.Р. Мырзақұл

¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан,
shinaray_81@mail.ru, talap_m.m@mail.ru

²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан
tmyrzakul@mail.ru

Кіріспе

Ғалымдардың болжамы бойынша Әлемнің ұлғаюы Хаббл заңына сәйкес деп ойлаған. Олар Әлемнің негізгі массалық бөлігі күңгірт материя және бариондық материядан тұрады деп есептеген. 1998-99 жылдардағы бақылаулардан Әлемнің үдемелі ұлғайып жатқанына куә боламыз, одан белгісіз энергияның теріс қысымы бар екені байқалған. Ол күшті “күңгірт энергия” деп атаған. Ол күңгірт субстанция – күңгірт энергия мен күңгірт материяны қамтиды. Қазіргі Әлем зерттеудегі ең шиленскен тақырыптардың бірі, ол бүкіл Әлем құрылымының 90% - нан астамын құрайды. Біздің көзімізге көрінетін материя тек бүкіл Әлемнің 4% бөлігін ғана құрайды [1].

Ғалымдар күңгірт энергияны табиғи гравитациялық баламаға ұсынды. Гравитацияны сипаттайтын Эйнштейннің жалпы салыстырмалық теориясы кейбір бақылау мәліметтеріне қайшы келгендіктен альтернативті модификацияланған гравитациялық теориялар ұсынды [2-5].

Альтернативті теориядағы $F(R)$ теориясы космология мен гравитацияда кең ауқымды қолданысқа ие. Бұл теорияны Риччи скалярын R жалпы салыстырмалық теориядағы Эйнштейн-Гильберт әсеріндегі $F(R)$ функциясына алмастыру нәтижесінде алуға болады. Соңғы он жылдықта модификацияланған гравитациялық теорияға, әсіресе $F(R)$ гравитациясына аса назар аударылды. Осы тұрғыда [5] жұмысында $F(R)$ гравитациясының метрикалық нұсқасында Бьянки I, III және Кантовский-Сакс кеңістік-уақыттық үшін нақты вакуумдық шешімдерін қарастырған.

Ал [6] жұмысында үдемелі ФРУ Әлемінде жалпы $F(R)$ гравитациясы қарастырылған. Олар осы $F(R)$ гравитациясын скаляр – тензорлық гравитация түрінде жазылуы мүмкін екенін көрсеткен.

Сонымен қатар екі нақты модельдерді көрсеткен: біріншісі $\frac{1}{R}$ және R^m шарттары арқылы, ал екіншісі

R шарты арқылы қарастырған. Бұл екі модель де Әлемнің үдемелі ұлғаюын, сондай-ақ, ерте уақыттық инфляцияны көрсеткен.

Көбінде күңгірт энергияның модельдері идеал сұйықтық үшін қарастырылған, бірақ идеал сұйықтық табиғатта кездеспейді. Сондықтан біз реалды бірқалыпсыз тұтқыр сұйықтықты қарастырамыз.

Әлемнің негізгі бөлігі бірқалыпты емес тұтқырлы сұйықтық деп қарастырған бірнеше авторлар бар [6-10].

Осы жұмыстарда күңгірт материя мен бірқалыпсыз тұтқырлы сұйықтығы бар космологиялық модель ФРУ Әлемінің жалпақ кеңістіктегінде зерттелген. Олар күңгірт материяның әсері бірқалыпсыз тұтқырлы сұйықтықпен сипатталатынын, Әлемнің үдемелі ұлғаюын және оның ерекшеліктерінің түрлі көрністерін талқылаған. Соның ішінде, сын нүктелері сәйкес келетін өріс теңдеулерінің шешімдері шынайы бейнеге жақын екендігін анықтаған.

Сұйықтықтар космологиясында «Үлкен сығылу» құбылысында тұтқыр сұйықтықтардың әсері маңызды рөл атқарады, нақтырақ айтсақ, келешекте Әлемнің ерекшелігі пайда болатын кезде, немесе II типті, III типті және IV типті деп аталатын оқиғаларға сәйкес келетін түрлерінде бір немесе оданда көп физикалық шамалар шексіздікке ұмтылатынын байқаған. Сонымен қатар [10] жұмыста тұтқырлық эффектісі ретінде, әртекті күй теңдеулеріндегі тұтқырлы сұйықтық космологиядағы «Кіші жарылыс» тудыруының тамаша дәлелін келтірілгендей, [6] жұмыста да Фридман-Робертсон-Уокер кеңістік-уақыт жазығында космологиялық үдеуді тудыруы мүмкін болған, әртүрлі тұтқырлы сұйықтың әртүрлісі талданған.

[6] жұмысында Фридман-Робертсон-Уокер Әлемінің кеңістік-уақыт жазығында әртүрлі бірқалыпсыз тұтқырлы сұйықтықтарды және Әлемнің үдемелі ұлғаюына қатысты болашақтық ерекшеліктерін анықтаған. Олар кеңістігі ашық ФРУ Әлемінде күңгірт энергияны тұтқырлы

сұйықтық арқылы сипаттап, қасиеттерін қарастырған, сонымен қатар тұтқырлы сұйықтықтың материяға ықпалын анықтаған.

ФРУ Әлемінің жалпақ кеңістіктегі бірқалыпсыз тұтқырлы сұйықтық теңдеуін [10] мақала авторлары былай қарастырған

$$p = (\rho\rho) + B(\rho, a(t), H, \dot{H}...), \quad (1)$$

мұндағы p және ρ сәйкесінше сұйықтықтың қысымы мен энергия тығыздығы, $\omega(\rho)$ – күй теңдеуінің параметрі, энергия тығыздығына және тұтқырлықтың көлеміне байланысты болуы мүмкін, және $B(\rho, a(t), H, \dot{H}...)$ - сұйықтықтың энергия тығыздығының жалпы функциясы, ол Әлемді сипаттайтын барлық параметрлеріне тәуелді. Біз бұл жұмыста тұтқырлы сұйықтықты [9] мақаладағыдай, мынадай жеңілдетілген күй теңдеуімен сипаттаймыз

$$p = \omega\rho - 3H\zeta(H). \quad (2)$$

Олар бірқалыпты изотропты ФРУ кеңістігін бірқалыпсыз тұтқырлы материямен толтырған Әлемді зерттеді. Бұл мақалада модификацияланған ФРУ метрикасын мына түрде алдық [11] :

$$ds^2 = -N(t)dt^2 + a^2(t)d^2\vec{x}, \quad (3)$$

мұндағы t - космологиялық уақыт, $a(t)$ - масштабты фактор, $N(t)$ – кездейсоқ қателік функциясы, ол минисупер кеңістік гравитациялық моделінің бостандық шамасына сәйкес қайта параметрлеу инвариантын сипаттайды. [12] жұмысында жеке жағдайда N кездейсоқ қателік функциясын 1 ге тең деп алып, R мен H тың байланысын тапқан, ал біз бұл жұмыста N кездейсоқ қателік функциясын өз қалпында қалдырып, H пен $\zeta(H)$ тұтқырлы сұйықтық параметрінің байланысын қарастырмақпыз. Жоғарыдағы метрикаға арналған кысықтық скаляр былай жазылады:

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{aN^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2N^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3}\right), \quad (4)$$

мұндағы ‘нүкте’ - уақыт бойынша туынды, яғни $\dot{a} = \frac{da}{dt}$, $\dot{N} = \frac{dN}{dt}$, $\ddot{a} = \frac{d^2a}{dt^2}$.

Жалпы жағдайда $F(R)$ гравитация әсері былай өрнектеледі [11]:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R). \quad (5)$$

Ал мультикеңістік үшін $F(R)$ гравитация әсерін [11] жұмысында былай өрнектеген:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d\vec{x} \int dt Na^3 \left[6F(R) - \lambda \left[R - 6\left(\frac{\ddot{a}}{aN^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2N^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3}\right) \right] \right]. \quad (6)$$

Басқа жұмыстарда стандартты Лагранжиан жүйесі алынса, біз Лагранжианның мультипликаторын λ алдық және ол $\lambda = \frac{dF(R)}{dR}$ тең [8, 9].

Егер $F(R) = R$ ге тең деп қарастырсық, онда $\lambda = 1$ болады да, біздің жағдай үшін әсер былай анықталады

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d\vec{x} \int dt Na^3 \left[6\left(\frac{\ddot{a}}{aN^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2N^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3}\right) - \left[R - 6\left(\frac{\ddot{a}}{aN^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2N^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3}\right) \right] \right]. \quad (7)$$

Осылайша, бұл мәнге алмастырулар енгізіп, интеграл астынан Лагранжианды анықтадық

$$L(a, \dot{a}, N, R) = -\frac{12\dot{a}^2}{N} - NRa^3 \quad (8)$$

Лагранжиан белгілі болса, осы (8) теңдеуіне Эйлер-Лагранж теңдеуін пайдаланып

$$\begin{cases} L_a - (L_{\dot{a}})_t = 0 \\ L_N - (L_{\dot{N}})_t = 0 \end{cases} . \quad (9)$$

Қозғалыс теңдеулер жүйесін былай өрнектейміз:

$$\begin{cases} -\frac{12\dot{a}^2}{N} - NRa^3 + \frac{24\dot{a}a}{N} = 0 \\ \frac{12\dot{a}^2 a}{N^2} - a^3 R = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Осыдан қысым мен кездейсоқ қателік функциясы былай өрнектеледі

$$p = -2H \frac{\dot{N}}{N} - \frac{1}{4} RN^2, \quad (11)$$

$$N^2 = \frac{12H^2}{R}. \quad (12)$$

(12) теңдеуін (11) теңдеуіне қою арқылы

$$\dot{H} = \frac{\dot{N}}{N} H \text{ немесе } \frac{\dot{H}}{H} = \frac{\dot{N}}{N} \quad (13)$$

Теңдеуін алдық. Осы теңдеуді тұтқырлы сұйықтықтың (2) күй теңдеуіне қою арқылы тұтқырлықты сипаттайтын параметрді анықтаймыз

$$\zeta(H) = -2H + \frac{2\dot{H}}{3H} \quad (14)$$

Қорытынды

Біз ФРУДың (3) метрикасы үшін минисупер кеңістіктің қозғалыс теңдеулерін зерттедік, сол кеңістіктің тұтқырлы сұйықпен байланысын таптық.

[13] жұмысында жеке жағдайда N кездейсоқ қателік функциясын 1 ге тең деп алып, R мен H - тың байланысын тапқан, ал біз бұл жұмыста N кездейсоқ қателік функциясын өз қалпында қалдырып, $\zeta(H)$ тұтқырлы сұйықтық параметрінің H - Хаббл параметрімен байланысын таптық.

Егер H Хаббл параметрін тұрақты деп қарастырсақ, онда $H = 0$, яғни $\zeta(H) = -2H$, ондай шешім [6] жұмысында қарастырған.

Әдебиеттер

1. Чернин А. Д. // Темная энергия и всемирное антияготение. Март 2008г.
2. Nojiri, S. Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 4(2007)115.
3. Capozziello, S. Int. J. Mod. Phys. D11(2002)483.
4. Abdalla, M. C. B., Nojiri, S. and Odintsov S. D.: Class. Quantum Grav. 22(2005)L35.
5. Farasat Shamir M. //arxiv:1006.4249v1 [gr-qc] 22 Jun 2010.
6. Myrzakulov R., Myrzakul S., Sebastiani L. Inhomogeneous viscous fluids in FRW universe and future singularities // arxiv: 1403.0681 v2 [gr-qc] 24 Mar 2014.
7. Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov //arxiv:hep-th/0601213v5 31 Mar 2006.
8. Vilenkin A., Phys. Rev. D 32 (1985) 2511.
9. Capozziello S., Int. Mod J.. Phys. D114483 (2002).
10. Brevik I., Elizalde E., Nojiri S. and Odintsov S. D., Phys. Rev. D 84, 103508(2011) [arxiv: 1107.4642v1 [hep-th].
11. Guido Cognola, Monica Gastaldi, Sergio Zerbini// arxiv:gr-qc/0701138v2 9 May 2007.
12. Elizalde E., Obukhov V. V., Timoshkin A. V. // Inhomogenous viscous dark fluid coupled with dark matter in the FRW universe.
13. Guido Cognola, Monica Gastaldi, Sergio Zerbini // arxiv:gr-qc/0701138v2 9 May 2007.

МОДЕЛЬ КРОВОЙ НОРЫ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Г.А. Бижанова, К.К. Ержанов

Евразийский Национальный Университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
b_gauhar_a93@mail.ru

В последние годы много внимание уделяется гравитации с эффектом кручения пространства-времени, оно было представлено параллельно с описанием кривизны и развивалась как телепараллелизм или телепараллельная гравитация, эквивалентная общей теории относительности (TEGR).

Сферическо-симметричное пространство-время в телепараллель гравитации может быть описано как кротовая нора и также как мост между двумя отдельными частями пространства-времени.

Сферически-симметричная метрика, в шварцшильдовских координатах имеет следующий вид:

$$ds^2 = e^{a(r)} dt^2 - e^{b(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1)$$

Скаляр кручения для данной метрики:

$$T(r) = \frac{2e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{r^2}. \quad (2)$$

Уравнение движения для данной модели будут иметь следующий вид:

$$4\pi\rho(r) = \frac{e^{-b/2}}{r} (1 - e^{-b/2}) T' f_{TT} - \left(\frac{T}{4} - \frac{1}{2r^2} \right) f_T + \frac{e^{-b}}{2r^2} (rb' - 1) f_T - \frac{f}{4}, \quad (3)$$

$$4\pi p_r(r) = \left(-\frac{1}{2r^2} + \frac{T}{4} + \frac{e^{-b}}{2r^2} (1 + ra') \right) f_T - \frac{f}{4}, \quad (4)$$

$$4\pi p_t(r) = \frac{e^{-b}}{2} \left(\frac{a'}{2} + \frac{1}{r} - \frac{e^{b/2}}{r} \right) T' f_{TT} + f_T \left\{ \frac{T}{4} + \frac{e^{-b}}{2r} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{ra'}{4} \right) (a' - b') \right) + \frac{ra''}{2} \right\} - \frac{f}{4}. \quad (5)$$

где $\rho(r)$ - это плотность энергии, а $p_r(r)$, $p_t(r)$ - радиальное и обычное давление.

Выражение для $f(T)$ мы запишем в следующем в виде:

$$f(T) = \alpha T^n. \quad (6)$$

В этом случае уравнения движения запишем как:

$$4\pi\rho(r) = \frac{e^{-b/2}}{r} (1 - e^{-b/2}) T' [\alpha n(n-1) T^{n-2}] - \left(\frac{T}{4} - \frac{1}{2r^2} \right) \alpha n T^{n-1} + \frac{e^{-b}}{2r^2} (rb' - 1) \alpha n T^{n-1} - \frac{\alpha T^n}{4}, \quad (7)$$

$$4\pi p_r(r) = \left(-\frac{1}{2r^2} + \frac{T}{4} + \frac{e^{-b}}{2r^2} (1 + ra') \right) \alpha n T^{n-1} - \frac{\alpha T^n}{4}, \quad (8)$$

$$4\pi p_t(r) = \frac{e^{-b}}{2} \left(\frac{a'}{2} + \frac{1}{r} - \frac{e^{b/2}}{r} \right) T' [\alpha n(n-1) T^{n-2}] + \left\{ \frac{T}{4} + \frac{e^{-b}}{2r} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{ra'}{4} \right) (a' - b') \right) + \frac{ra''}{2} \right\} \alpha n T^{n-1} - \frac{\alpha T^n}{4}. \quad (9)$$

Если мы перепишем скаляр кручения в уравнения движения (7)-(9), то уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 4\pi\rho(r) = & \frac{e^{-b/2}}{r} (1 - e^{-b/2}) T' \left[\alpha n(n-1) \left(\frac{2e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{r^2} \right)^{n-2} \right] - \\
 & \left(\frac{e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{2r^2} - \frac{1}{2r^2} \right) \alpha n \left(\frac{2e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{r^2} \right)^{n-1} + \\
 & \frac{e^{-b}}{2r^2} (rb' - 1) \alpha n \left(\frac{2e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{r^2} \right)^{n-1} - \frac{\alpha}{4} \left(\frac{2e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{r^2} \right)^n,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 4\pi p_r(r) = & \left(-\frac{1}{2r^2} + \frac{e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{2r^2} + \frac{e^{-b}}{2r^2} (1 + ra') \right) \cdot \times \\
 & \alpha n \left(\frac{2e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{r^2} \right)^{n-1} - \frac{\alpha}{4} \left(\frac{2e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{r^2} \right)^n,
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 4\pi p_t(r) = & \frac{e^{-b}}{2} \left(\frac{a'}{2} + \frac{1}{r} - \frac{e^{b/2}}{r} \right) T' \left[\alpha n(n-1) \left(\frac{2e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{r^2} \right)^{n-2} \right] + \\
 & \left[\frac{e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{2r^2} + \frac{e^{-b}}{2r} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{ra'}{4} \right) (a' - b') \right) + \frac{ra''}{2} \right] \times \\
 & \times \alpha n \left(\frac{2e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{r^2} \right)^{n-1} - \frac{\alpha}{4} \left(\frac{2e^{-b} (e^{b/2} - 1) (e^{b/2} - 1 - ra')}{r^2} \right)^n.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим случай изотропного давления $p_r(r) = p_t(r) = p(r)$. В теориях кротовых нор $a(r)$ произвольная функция радиальных координат и выражает функцию красного смещения. Значения для $a(r)$ и $b(r)$ мы рассматриваем в виде:

$$a(r) = c, \quad b(r) = 2 \ln \left[\frac{-1 + \sqrt{-\frac{r^2}{r_0^2} + 1}}{1 - \frac{r^2}{r_0^2} - \sqrt{-\frac{r^2}{r_0^2} + 1}} \right], \tag{13}$$

где r_0, c константы с положительными значениями.

Если поставить эти значения в уравнения движения, то уравнения (10)-(12) можно будет переписать как (здесь $r_0 = 1$).

$$\begin{aligned}
 4\pi\rho(r) = & \frac{1}{r} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} - \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \right) \left[\frac{4}{r^3} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right) \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} - 2 \right) \right] + \\
 & + \frac{4}{r^4} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} - \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \right) + \frac{2}{r^3} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \left(1 - \frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \cdot \times \\
 & \left(\frac{2r}{(-1-\sqrt{-r^2+1})\sqrt{-r^2+1}} - \frac{(-4r\sqrt{-r^2+1}-r)}{\sqrt{-r^2+1}(-1-r^2-\sqrt{-r^2+1})} \right) \times \\
 & \left[\alpha n(n-1) \left(\frac{2}{r^2} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \left(\frac{-1+\sqrt{-r^2+1}}{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}} - 1 \right) \right)^2 \right]^{n-2} - \\
 & \left[\alpha n \left(\frac{2}{r^2} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \left(\frac{-1+\sqrt{-r^2+1}}{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}} - 1 \right) \right)^2 \right]^{n-1} \times \\
 & \left(\frac{1}{2r^2} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \left(\frac{-1+\sqrt{-r^2+1}}{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}} - 1 \right) - \frac{1}{2r^2} \right) + \\
 & \frac{\alpha n}{2r^2} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \left[\frac{2r^2}{(-1-\sqrt{-r^2+1})\sqrt{-r^2+1}} - \frac{r(-4r\sqrt{-r^2+1}-r)}{\sqrt{-r^2+1}(-1-r^2-\sqrt{-r^2+1})} - 1 \right] \times \\
 & \left(\frac{2}{r^2} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \left(\frac{-1+\sqrt{-r^2+1}}{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}} - 1 \right) \right)^2 \right]^{n-1} - \\
 & \frac{\alpha}{4} \left(\frac{2}{r^2} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \left(\frac{-1+\sqrt{-r^2+1}}{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}} - 1 \right) \right)^2 \right)^n
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 4\pi\rho(r) = & \left[\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \left(\frac{-1+\sqrt{-r^2+1}}{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}} - 1 \right) + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \right] \\
 & \times \alpha n \left[\frac{2}{r^2} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \left(\frac{-1+\sqrt{-r^2+1}}{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}} - 1 \right) \right]^{n-1} - \\
 & - \frac{\alpha}{4} \left[\frac{2}{r^2} \left(\frac{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}}{-1+\sqrt{-r^2+1}} \right)^2 \left(\frac{-1+\sqrt{-r^2+1}}{1-r^2-\sqrt{-r^2+1}} - 1 \right) \right]^n.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Соответствующие графики плотности энергии (13) и давления (14) при значениях $\alpha = 0.1$ и $n = 0.2$ представлены ниже.

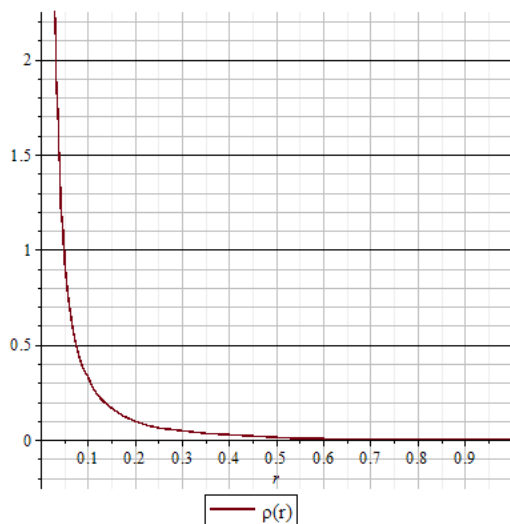


График зависимости плотности энергии от координаты r при $\alpha = 0.1$ и $n = 0.2$.

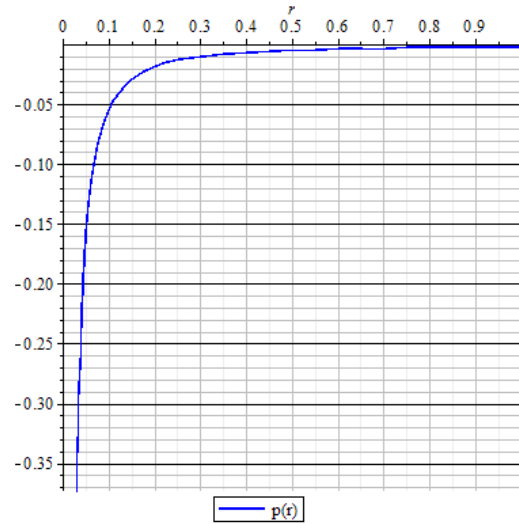


График зависимости давления от координаты r при $\alpha = 0.1$ и $n = 0.2$.

В данной работе мы рассматривали решение для кротовой норы в $f(T)$ гравитации и нашли соответствующие уравнения движения для данной сферически-симметричной метрике. А также рассматривали решение для изотропного давления. Нашли решения давления и плотности энергии, построили их графики. В графике представлено, плотность энергии и давление стремятся к нулю, что соответствует расширению вселенной.

Статья подготовлена в рамках программы "Некоторые проблемы нелинейных теорий гравитационного и сильного взаимодействий, и их космологическое приложение"

Литература

1. M. Jamil, D. Momeni, R. Myrzakulov. Wormholes in a viable $f(T)$ gravity. Eur. Phys. J. C (2013) 73:2267.
2. T. Wang, Phys. Rev. D 84, 024042 (2011)
3. L.A. Anchordoqui et al., Phys. Rev. D 57, 829 (1998).
4. M.S. Morris, K.S. Thorne, Am. J. Phys. 56, 395 (1988)

ӘОЖ 524.83

ДОМЕНДІ ҚАБЫРҒАДАН ТҮРҒЫН ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ТҮЗІЛУІ

¹Ш.Р.Мырзақұл, ¹Г.Б.Канжигитова, ²Т.Р.Мырзақұл

¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
kanjig_90@mail.ru, shinaray_81@mail.ru,

²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан, tmyrzakul@mail.ru

Кіріспе

Гравитациялық толқындарды талқылағанда көбінесе Эйнштейн өріс тендеулері әлсіз өріс шегінде, яғни теорияның сызықты еместігін қарастырмайды. Сызықты емес өрістік тендеулер мысалына Эйнштейн-Роузен цилиндрлік толқындары [1] немесе сызықты емес гравитациялық жалпақ толқын шешімдері [2] жатады.

Бұл толқындық шешімдер сызықты емес тендеулер үшін, гравитациялық толқындарды әлсіз өріс ретінде қарастырмай-ақ, түсінуге мүмкіндік береді.

Бұл диссертацияда доменді қабырға мен массасыз скаляр өріс бар кезде сызықты емес тұрғын гравитациялық толқын шешімін іздейміз. Метрикасы төмендегідей:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{1+k|z|}} (dt^2 - dz^2) - (1+k|z|) [dx^2 + dy^2]. \quad (1)$$

Бұдан алған шешім доменді қабырға шешімі тривиальды емес модификацияланған болып табылады, яғни жай емес гравитациялық толқын әлсіз өрісі (1) теңдеу әсерінде, бірақ бұл шешім толықтай сызықты емес гравитациялық өріс теңдеуі. Тек домен қабырға шешіміне қарағанда, яғни онда қабырға маңында $z = 0$ -вакуум, ал біздің шешім скаляр өріспен толықтырылған.

Эйнштейннің өріс теңдеулерінің вакуумдық тұрғын толқындық шешімдері [3] мақалада зерттелген және онда Эйнштейн-Роузен цилиндрлік толқындарынан кейбір ерекше жағдайларда тұрғын толқындар болу мүмкіндігі қарастырылған. Бірақ одан жалпы салыстырмалық теория сызықты болу керек (электродинамикадағы сияқты) екі қарама-қарсы қозғалған жалпақ толқындарды алсақ (яғни pp-толқындық шешімдер [4]) және оларды бірге қосқанда тұрғын толқын аламыз. Доменді қабырғамен және скаляр өріспен қамтылған ортада жалпақ симметриялық тұрғын толқындық шешімін қарастырамыз. Скалярлық өріс және көлденең метрикалық компоненттері $\pi/2$ фазалық айырмашылықпен салыстырылады. Энергияның скаляр және гравитациялық өрістер арасында бір-біріне өтуін ұсынады. Скаляр өріс энергиясынан бастап локалдау мүмкін, яғни осы шешім гравитациялық өріс үшін локальданған энергия немесе кем дегенде гравитациялық өрістің толқындық бөлігі бар болуы мүмкін.

Гравитациялық толқын энергия шегін анықтау қиын [5] және шындығында оның эквиваленттік принципінің орындалмауы локалды бір шекке әкелуі мүмкін, егер кеңістік-уақыт Минковский болғанда. Яғни гравитациялық толқын жоқ болатын шектеу. Біздің шешімде домен қабырғаның болуы таңқаларлық емес, өйткені электродинамикада тұрғын толқындар жасау үшін өткізгіш жалпақ болуы керек. Бірақ бұл мақалада шешім алу үшін жалпақ қабырғаның біреуін $z = 0$ деп, ал екінші “қабырға” гравитациялық өрістің статикалық бөлігімен қамтылған. Ол бірінші қабырғадан бастап қозғала бастағанда үлкейеді, [6] мақаладағы тәжірибеге ұқсас, онда нейтрондар жердің бетінен шағылып жердің гравитациялық потенциал арасында шектелген.

II. Метрика және өріс теңдеулері

Доменді қабырға метрикасына өту үшін (1) теңдеуіне t мен z -ке тәуелді функцияларды $S(t, z)$ және $V(t, z)$ енгіземіз.

$$ds^2 = \frac{e^{-S(t,z)}}{\sqrt{1+kz}} (dt^2 - dz^2) - (1+kz) [e^{V(t,z)} dx^2 + e^{-V(t,z)} dy^2], \quad (2)$$

мұнда $k > 0$ - тұрақты. Біз $(1+kz)$ функциясының орнына стандартты домен қабырға функциясын $(1+k|z|)$ деп алып шешімді $z > 0$ аймағында аламыз. $z > 0$ аралығында эквивалентті шешімді алу үшін $k < 0$ енгіземіз. Басқа авторлар (2) –ші формуласына $k = 0$ және $S = 0$ жеке жағдайларын [7, 8] мақалада қарастырған. Кейбір домендік қабырға комбинацияларына $k \neq 0$ және $S \neq 0$ [9] мақалада (2) теңдік шешіміне келтіріледі және жазық толқындық шешімдер алынады [10]. (2) теңдік метрикасы толқынды жалпақ шешіміне доменді қабырға функциясы $(1+kz)$ уақытқа байланысты координаталар өзгереді [10]. Бастапқыда тұрақты толқын шешімдерін кейбір фон шешімдерінен нақты шешім алынады. Сондықтан бұл шешім математикалық тұрғыда нақты жағдайда тура шешім аламыз.

Метрикаға ұйытқуларды қосқанда скалярлық өріске тәуелсіз $\phi(t, z)$ (2)-ші теңдік бойынша Клейн-Гордон теңдеуі алынады

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = \sqrt{1+kz} e^{S(t,z)} \left(\ddot{\phi} - \phi'' - \frac{k}{1+kz} \phi' \right) = 0. \quad (3)$$

Мұнда штрихпен z қатысты туынды және нүктемен t уақыт бойынша туынды алынған. Жүйе, (2) және (3) теңдіктерінің жақында космологиялық шешімдері зерттелді [11].

ϕ бойынша энергия-импульс тензоры

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi. \quad (4)$$

Энергия-импульс тензоры үшін Эйнштейн теңдеуін былай жазуға болады.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (5)$$

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma. \quad (6)$$

Мұнда гравитациялық скалярлық өріс σ тең деп аламыз, яғни

$$\sigma = \frac{\sqrt{4\pi G}}{c^2} \phi. \quad (7)$$

Бұдан (6) теңдік Эйнштейн теңдеулеріне эквивалентті екенін көреміз. Эйнштейн теңдеулері идеал сұйықтықтан қатаң сұйықтыққа өтеді. Жалпы идеал сұйықтықты сипаттайтын энергия-импульс тензоры мынадай

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} p, \quad (8)$$

мұнда ε - энергия тығыздығы, p - сұйықтың қысымы, және u^ν - нормалданған 4-өлшемді жылдамдық векторы, $u^\mu u_\mu = 1$.

Қатаң сұйықтықтың күй теңдеуі $\varepsilon = p$, сондықтан сұйықтықтың жылдамдығы дыбыс жылдамдығына тең [12].

Энергия, импульс және жылдамдық былай анықталады

$$\varepsilon = p = \partial_\nu \sigma \partial^\nu \sigma, \quad u^\mu = \frac{\partial^\mu \sigma}{\sqrt{\partial^\nu \sigma \partial_\nu \sigma}}. \quad (9)$$

Бұдан қатаң сұйық скалярлы өріске (7) эквивалентті екені шығады [13]. (2)-ші метрика үшін Эйнштейн теңдеуін (5),(6) теңдеулерімен шешеміз. Сонда мынадай жүйені аламыз

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \ddot{S} - S'' - \frac{k}{1+kz} S' - \dot{V}^2 = 4\dot{\sigma}^2, \\ R_{xx} &= -\ddot{V} + V'' + \frac{k}{1+kz} V' = 0, \\ R_{yy} &= -\ddot{V} + V'' + \frac{k}{1+kz} V' = 0, \\ R_{zz} &= -\frac{k}{1+kz} S' - V'^2 + S'' - \ddot{S} = 4\sigma'^2, \\ R_{zt} &= -\frac{k}{1+kz} \dot{S} - \dot{V}V' = 4\dot{\sigma}\sigma'. \end{aligned} \quad (10)$$

Осыдан σ , S , V функциялары арқылы қозғалыс теңдеулерін аламыз

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} - \sigma'' - \frac{k}{1+kz} \sigma' &= \ddot{V} - V'' - \frac{k}{1+kz} V' = 0, \\ \dot{S} &= -\frac{1+kz}{k} (V\dot{V} + 4\dot{\sigma}\sigma') = 0, \\ S' &= -\frac{1+kz}{2k} (V'^2 + \dot{V}^2 + 4\dot{\sigma}^2 + 4\sigma'^2) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

III. Тұрақты толқын шешімдері

Біз мынадай жеке жағдай қарастырамыз

$$\begin{aligned} V(t, z) &= A \cdot \cos\left(\frac{\omega}{k} + \omega z\right) \exp(\omega t), \\ \sigma(t, z) &= \frac{A}{2} \sin\left(\frac{\omega}{k} + \omega z\right) \exp(\omega t), \end{aligned} \quad (12)$$

(11) теңдіктің екінші бөлігіндегі $\dot{S} = 0$ функция, ұйытқу функциясы $S(t, z) = S(z)$ уақытқа тәуелді емес. (12) теңдіктен $V(t, z)$ және $\sigma(t, z)$ функциялары (11) теңдіктің соңғы теңдеуіне түзетулер енгіземіз.

$$S(z) = -\frac{1}{2} \frac{z(kz+2)A^2 e^{2\omega t} \omega^2}{k}. \quad (13)$$

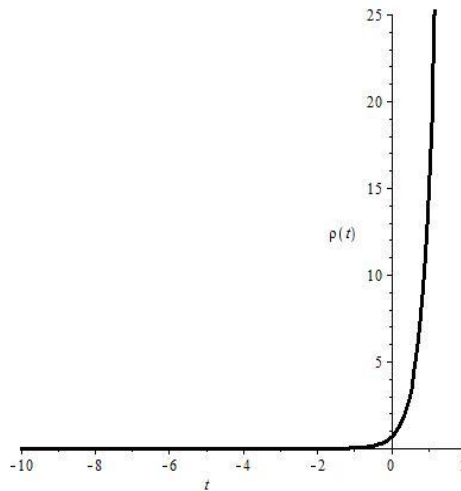
Энергия тығыздығын есептеуде скалярлық өріспен ассоциоланып анықталады. σ қолданып (12) мен (4) теңдіктерінен энергия тығыздығын төмендегідей анықтаймыз

$$\begin{aligned} T_{00} &= 2\partial_0 \sigma \partial_0 \sigma - g_{00} (\partial^0 \sigma \partial_0 \sigma + \partial^z \sigma \partial_z \sigma) = \dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 = \\ &= \frac{1}{4} A^2 \sin\left(\omega z + \frac{\omega}{k}\right)^2 \omega^2 (e^{\omega t})^2 + \frac{1}{4} A^2 \cos\left(\omega z + \frac{\omega}{k}\right)^2 \omega^2 (e^{\omega t})^2, \end{aligned} \quad (14)$$

Яғни (9) теңдеуіне сәйкес қатаң сұйық үшін қысымда осыған тең

$$T_{00} = \frac{1}{4} A^2 \omega^2 e^{2\omega t} \quad (15)$$

Тұрақты шамаларға мынадай мән беріп $\omega = \frac{\pi}{2}$; $A = 1$, графикті тұрғызамыз.



Сурет 1- Энергия тығыздығының дамуы центр бойынша.

Қорытынды

Біз симметриялық жазықтықта гравитациялық тұрғын толқындарға қарапайым мысал келтірдік. Бұл шешім вакуумдық емес, доменді қабырға $z = 0$ және $z > 0$ ауданында δ массасыз скалярлық өрісі әсер ететін аумақты қарастырамыз. (12) теңдеулерден $V(t, z)$ метрикалық функциясы және $\sigma(t, z)$ скалярлық өріс кеңістікке тәуелді екенін табамыз, бірақ олардың тербеліс уақыты $\pi/2$ фазасында болады. Метрикалық функция $V(t, z)$ гравитациялық өріс бөлігі мен скалярлық өріс арасында өзара алға және артқа өтетін толқындар (уақытқа байланысты) ретінде қарастыруға болады. Өзара скалярлық өріс тербелісімен және гравитациялық өрістен көруге болады энергетикалық өріс скалярлық өріспен шектелуі мүмкін екенін, бұл шешімдердің бір (уақытқа байланысты) бөлігі кем дегенде толқын үшін шектік гравитациялық өріс энергиясын анықтауға болатын шешімдер. Жергілікті гравитациялық өріс энергиясын қатаң эквивалентті принциппен анықтау мүмкін емес. Алайда скалярлық және dx^2, dy^2 метрикалық компоненттер ($\exp[\pm V(z, t)]$ фактор) арасында өзара фаза тасмалданады, содан біз гравитациялық өрістің толқын бөлігі шектелген энергиядан өтеді деген ойға келеміз. Назар аударыңыз, бұл шешім асимптотикалық жазық және шектелмеген көздің домендік қабырғасы болмағандықтан, гравитациялық өрістің ғаламдық энергиясын интеграл жазықтығы көмегімен анықтай алмаймыз. Осы бөлімде аса тиімді энергия-импульс тензоры қарастырылған.

Мұнда көрсетілген шешім гравитациялық өрістегі эксперимент тұзағындағы нейтрондармен де сәйкес келеді. Бұл тәжірибелерде, суық нейтрондар жазықтықтан шағылып Жер өрісінің арасында тұзақта болады. Нейтрондар үшін шектелген энергия түсінігі жақсы анықталады.

Әдебиеттер

1. A. Einstein and N. Rosen, *J. Franklin Inst.* 223, 43 (1937); J. Weber and J. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.* 29, 509 (1957).
2. H. Stephani et al., *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2003); J. Bicák, *Lect. Notes Phys.* 540, 1 (2000).
3. H. Stephani, *Gen. Relativ. Gravit.* 35, 467 (2003).
4. A good, concise discussion of pp-wave solution can be found in Sec. 15.3 of H. Stephani, *General Relativity: An Introduction to the Theory of the Gravitational Field* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990), 2nd ed..
5. R. Penrose, *Proc. R. Soc. A* 381, 53 (1982); Ch.-Ch. Chang, J.M. Nester, and Ch.-M. Chen, *Phys. Rev. Lett.* 83, 1897 (1999); S.V. Babak and L.P. Grishchuk, *Phys. Rev. D* 61, 024038 (1999).
6. V.V. Nesvizhevsky et al., *Nature (London)* 415, 297 (2002).
7. H. Bondi, F. Pirani, and I. Robinson, *Proc. R. Soc. A* 251, 519 (1959); J. Ehlers and W. Kundt, in *Gravitation*, edited by L. Witten (Wiley, New York, 1962).
8. C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973), Sec. 35.9.
9. A.H. Taub, *Phys. Rev.* 103, 454 (1956); A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* 23, 852 (1981); J. Ipser and P. Sikivie, *Phys. Rev. D* 30, 712 (1984).
10. U. Yurtsever, *Phys. Rev. D* 38, 1706 (1988); A. Feinstein and J. Ibanñez, *Phys. Rev. D* 39, 470 (1989); J. Griffiths, *Colliding Plane Waves in General Relativity* (Oxford University Press, Oxford, 1991), Chap. 10.
11. C. Vuille and J. Dunn, arXiv:0904.3307.
12. Ya.B. Zel'dovich, *Sov. Phys. JETP* 14, 1143 (1962); *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 160, 1 (1970).
13. R. Tabensky and A. Taub, *Commun. Math. Phys.* 29, 61 (1973).
14. A.G. Riess et al., *Astron. J.* 116, 1009 (1998); *Publ. Astron. Soc. Pac.* 112, 1284 (2000); S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
15. R.R. Caldwell, *Phys. Lett. B* 545, 23 (2002).
16. M. Gogberashvili and R. Khomeriki, arXiv:0808.1295.
17. Ya.B. Zel'dovich, I.Yu. Kobzarev, and L.B. Okun, *Sov. Phys. JETP* 40, 1 (1975).
18. M. Gogberashvili, *Int. J. Mod. Phys. D* 11, 1635 (2002); *Mod. Phys. Lett. A* 14, 2025 (1999); L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* 83, 4690 (1999).
19. M. Gogberashvili and D. Singleton, arXiv:0904.2828.