

# ВЕСТНИК


Восточно-Казахстанского государственного  
технического университета  
им. Д. Серикбаева

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Институт вычислительных технологий  
Сибирского отделения РАН

### Вычислительные технологии

Часть 2

<b>С О В М Е С Т Н Ы Й  В Ы П У С К</b>	<p>2013 <span style="float: right;">ISSN 1566-7534 Том 18 № 4</span></p> <hr/> <p><b>Вычислительные Технологии</b></p> <hr/> <p><i>Главный редактор академик Ю.В. Шокит</i></p> <p>Институт вычислительных технологий Сибирского отделения РАН</p>	 <p>ISSN 1561-4212 сентябрь, 2013 г.</p>
	НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ■ БЫЛЫМИ ЖУРНАЛ	<p>Д. Серикбаев атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік техникалық университетінің</p> <p><b>ХАБАРШЫСЫ</b></p> <hr/> <p><b>ВЕСТНИК</b> Восточно-Казахстанского государственного технического университета имени Д. Серикбаева</p> <div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 10px; margin-top: 10px;"><b>3</b></div>

г. Усть-Каменогорск, 2013 г.

## Содержание

<b>Вычислительные технологии</b>	<b>7</b>
Исмаилов Н.Ж. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ . . . . .	7
Калимуллаев М.Н., Дженалиев М.Т. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ . . . . .	11
Касенова А., Рахметуллина С. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА АДАПТИВНЫХ СЕТОК . . . . .	15
Касымханов С.Ж., Бакиров Ж.Б., Касымханова Д.Ж. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ВСТРЯХИВАЮЩИХ ФОРМОВОЧНЫХ МАШИИ В ЛИТЕЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ . . . . .	20
Корнев В.А., Григорьева С.В. ОЦЕНКА И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РИСКОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА С УЧЕТОМ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НОРМАТИВОВ . . . . .	26
Коробицын В.А., Коробицын Д.В. ВИХРЕСОГЛАСОВАННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА КОСОУГОЛЬНЫХ 2D СЕТКАХ . . . . .	33
Красавин А.Л., Атонцева Д.Л. ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА СПЕКТРОГРАММ РЕНТГЕНОВСКИХ ФЛЮОРЕСЦЕНТНЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ . . . . .	36
Кульджабеков А.Б., Алибаева К.А., Инкарбеков М.К., Калтаев А. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕХНОЛОГИИ ПОСАДКИ МНОГОЯРУСНЫХ ФИЛЬТРОВ . . . . .	45
Лисицкий Д.В., Дышлок С.С., Асылханова Ж.А. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЪЕКТНО-КАРТОГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ГЕОПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ В РЕГИОНАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ . . . . .	52
Дутай С.С., Воробьев А.Л., Горичева А. А., Асылхан М.А. ПРИМЕНЕНИЕ ФИТОРЕГУЛЯТОРА ПРИРОДНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ ДЛЯ ВЫРАЩИВАНИЯ САДОВО-ПАРКОВЫХ КУЛЬТУР . . . . .	58
Макарова Н.А. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РЕАГИРУЮЩЕГО ПОТОКА ПРОДУКТОВ РЕАКЦИИ В ДВУХСТУПЕНЧАТОМ УСТРОЙСТВЕ ДЛЯ ДЕГОНАЦИОННОГО НАПЫЛЕНИЯ . . . . .	64
Матайбаева П.Е., Дьячков Б.А., Майорова Н.П., Черненко З.И. К ОЦЕНКЕ ПЕРСПЕКТИВ ДЕЛЬБЕГЕТЕЙСКОГО ОЛОВОРУДНОГО УЗЛА . . . . .	68
Мизерный А., Селтманн Р., Рафаилович М., Наумов Е. ОСНОВНЫЕ МИНЕРАЛЬНЫЕ АССОЦИАЦИИ МЕСТОРОЖДЕНИЯ СЕКИСОВСКОЕ (ВОСТОЧНЫЙ КАЗАХСТАН) . . . . .	71
Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ . . . . .	79
Моисеева Е.С., Найманова А.Ж. СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВОЗДУХА С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ ВДУВОМ ВОДОРОДА . . . . .	86

Мукаш
Д
Муким
М
Муким
К
Мурза
Ж
Мурза
Г
Мусип
Нетес
С
Т
Нурба
М
К
Нурма
А
Нурсал
В
Пенсн
А
М
Ракин
О
Сагин
Сален
М
Т
Сайфу
П
М
Серед
М
Т
Симон
Н
Сорок
К
Старос
Т
П
Н

Мукашева Р.У., Рахметуллина Ж.Т. АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА РАДИАЦИОННОГО ПОТОКА В ОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЕ . . . . .	92
Мукумбаев М.Ж., Накибаева М.Т. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕФТЕДОВОБЫЧЕ . . . . .	97
Мукумбаев М.Ж., Накибаева М.Т. ОБ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В РАЗРАБОТКЕ ПЛАСТА . . . . .	103
Мурзабеков З.Н., Айпанов Ш.А. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА ЗА КОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ . . . . .	110
Мурзабеков З.Н., Мурзабеков А.З. ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЙ . . . . .	116
Мусипова Г.В. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА . . . . .	127
Негесова В.Ю. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЕСУРСОВ ХОЗЯЙСТВУЮЩИХ СУБЪЕКТОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩАЯ ИХ ФИНАНСОВУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ . . . . .	132
Нурбаева Н.А., Ван Е.Ю., Касперская А.А., Карибаева М.К. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ КОНЦЕНТРАЦИИ . . . . .	140
Нурмагамбетов А.А., Джомартова Ш.А., Мазаков Т.Ж. РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ . . . . .	143
Нурсадькова Р.К., Тезекпаева Ш.Т., Хасенова З.Т. НЕЧЕТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ MATLAB . . . . .	147
Пененко А.В., Рахметуллина С.Ж. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИСТОЧНИКОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА ПО ДАННЫМ СИСТЕМЫ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА . . . . .	152
Ракишева З.Б., Сухенко А.С. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАТЧИКОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ . . . . .	164
Сагиндыков К.М. МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗИ ПОНЯТИЙ ДИСЦИПЛИН . . . . .	168
Саденова М.А., Абдулина С.А., Утегенова М.Е., Акижанов Е.О., Кенетбаев Б.С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ НОСИТЕЛЕЙ ДЛЯ КАТАЛИЗАТОРОВ . . . . .	171
Сайфутдинов И.Н. ВОЗМОЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ПРОГРАММНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА «COMSOL MULTIPHYSICS» . . . . .	174
Середович В.А., Тогузова М.М. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ 3D МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ЗОНИРОВАНИЯ ТЕРРИТОРИЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ГОРОДОВ . . . . .	178
Симонов К.В., Калена Л. ОЦЕНКА ДАННЫХ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ ШИАРЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ . . . . .	181
Сорокова К.Е. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА И ТРАНСФОРМАЦИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ АЭРОЗОЛЕЙ В АТМОСФЕРЕ . . . . .	186
Старостенков М.Д., Дёмина И.А., Попова Г.В., Денисова Н.Ф. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КООПЕРАТИВНЫХ СМЕЩЕНИЙ КОМПЛЕКСОВ АТОМОВ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА БИМЕТАЛЛОВ Ni-AL, Ni-Fe И Pt-AL . . . . .	192

Сырнев Б.В., Агапов В.А., Данилов С.Н., Абдулина С.А., Саденова М.А. РАЗРАБОТКА ПАКЕТА ПРОГРАММ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА В МЕТАЛЛУРГИИ . . . . .	203
Темирбеков А.Н. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА В ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ . . . . .	206
Темирбеков Н.М. ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ «ЛОГАРИФИМИЧЕСКОЙ» РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА С КОПАКТНЫМ РАЗРЫВОМ . . . . .	211
Темирбеков Н.М., Малгаждаров Е.А., Токанова С.О. ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТОК В ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ . . . . .	215
Темирбекова Л.Н. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА . . . . .	220
Тлебалдинова А.С., Денисова Н.Ф., Касымханова Д.Ж., Рақышева М.А., Байгелов К.Ж. ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ РЕКОНСТРУКЦИИ СМАЗАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ . . . . .	227
Толеухапов А.Е., Панфилов М.Б., Калтаев А. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ БАКТЕРИЙ НА ОБРАЗОВАНИЕ МЕТАНА ПРИ ПОДЗЕМНОМ ХРАНЕНИИ ВОДОРОДА . . . . .	233
Урмашев Б.А., Данаев Н.Т., Алимжанов Е.С. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ «СКОРОСТЬ-ДАВЛЕНИЕ» . . . . .	240
Урмашев Б.А., Турсынбай А.Т., Макашев Е.П. О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕСКОЛЬКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ (ТРЕХКАМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ФАРМАКОКИНЕТИКИ) . . . . .	242
Усенова С.Б. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ НА ПРИМЕРЕ ТОО «БИПЭК АВТО» . . . . .	244
Федотов А.М., Федотова О.А. МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ . . . . .	249
Черный С.Г., Авдошенко А.Ю., Чирков Д.В. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ В ГИДРОТУРБИНЕ С ЗАТВОРОМ . . . . .	266
Шайдуров В.В., Щепановская Г.И., Якубович М.В. О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ . . . . .	275
Шерьязданов Г.Б. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКИХ СРЕД В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ . . . . .	284
Шокни Ю.И. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ РЕГИОНАЛЬНОГО СПУТНИКОВОГО МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ КОРПОРАТИВНОЙ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ СО РАН . . . . .	286
Юлдашев З.Х., Адылов А.А., Холмирзаев Х. СТРУКТУРА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НАПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЛЕДЖАМИ . . . . .	292

УДК 519.6

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

А. Н. Темирбеков

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева

**Abstract.** In the given work I examine numerical methods of solving Navier-Stokes equations in multiply-connected domains. Two methods of problem solution are examined. The first method is based on setting differential in variable velocity, stream function and use of pressure single value condition. Numerical solution of elliptic equation for stream function is as a sum of two simple problems of elliptic type. One problem is with uniform boundary conditions, and another one with a uniform equation. Alternative approach to solving the set problem is fictive region method with small coefficient extension. This method does not require satisfaction to the condition of pressure uniformity and is simple in realization.

**Keywords:** Navier-Stokes equation, velocity, pressure, stream function, multiply-connected domain, boundary condition, stability.

**Аннотация.** В данной работе исследуются численные методы решения уравнений Навье-Стокса в двухсвязных областях. Рассматриваются два метода решения задачи. Первый метод основан на построении разностной задачи в переменных скорость, функция тока и использование условия однозначности давления. Численное решение эллиптического уравнения для функций тока находится как сумма решений двух простых задач эллиптического типа. Одна задача является с однородными граничными условиями, а другая с однородным уравнением. Альтернативный подход к решению поставленной задачи является метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентом. Этот метод не требует удовлетворения условия однозначности давления и является простым в реализации.

**Ключевые слова:** уравнения Навье-Стокса, скорость, давления, функция тока, многосвязная область, граничные условия, устойчивость.

### Введение

В настоящей работе рассматриваются методы численного решения уравнений Навье – Стокса в многосвязной области. Одна из трудностей численного решения уравнений Навье – Стокса в переменных функции тока и вихря скорости в случае многосвязной области порождается неопределенностью значений функции тока на внутренних границах. Численное решение уравнений Навье – Стокса в многосвязной области рассматривались авторами работ [1-2], в которых предлагается явный метод численного решения уравнений Навье – Стокса в двухсвязной области. Данная задача с использованием условия однозначности давления решена в работе Сироченко В.П. [3]. В работе [4] применялась явная схема которая привела к неустойчивому счету. В предлагаемой работе рассматриваются явная разностная схема для численного решения уравнений Навье-Стокса в многосвязной области с использованием условия однозначности давления и метод фиктивных областей для решения этой задачи. Для моделирования конвективных течений

рассмотрим уравнения Навье-Стокса в приближении Бусинеска [3].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re} \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta v - Gr \theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Re Pr} \Delta \theta, \quad (x, y) \in D, t \in (0, T] \quad (4)$$

с начальными и граничными условиями

$$u = u_0(x, y), v = v_0(x, y), \theta = \theta_0(x, y), (x, y) \in \bar{D}, t = 0 \quad (5)$$

$$u = a_x(x, y, t), v = a_y(x, y, t), \theta = \xi(x, y, t), (x, y) \in \partial D, t \in [0, T] \quad (6)$$

В этой системе  $u, v$ -компоненты вектора скорости,  $p$ -давление,  $\theta$ -температура,  $Re$ -число Рейнольдса,  $Gr$ -число Грасгофа,  $Pr$ -число Прандтля,  $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$ -граница области  $D$ . Задачу (1-6) удобно решать исключением давления из уравнений движения и введением новых переменных-функция тока и завихренности. При доказательстве эквивалентности постановок задач в естественных переменных и в переменных функция тока и завихренность существенную роль играют интегральные условия однозначности давления. В работе Ладыженской О.А. для однозначной разрешимости разностной схемы для уравнения Навье-Стокса к системе уравнений добавляется условие однозначности давления следующего вида

$$\iint_D p(x, y) dx dy = 0 \quad (7)$$

Необходимость постановки условия вида (7) связано с тем, что разностный аналог уравнения (3) не является линейно-независимым. В работе Сироченко В.П. [3] предлагается другой вариант условия однозначности давления которая записывается в виде

$$\oint_{\gamma_3} \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy = 0 \quad (8)$$

где  $\Pi = p + (u^2 + v^2)/2$ -полный напор.

Введем функцию тока  $\psi$  и вихрь скорости  $\omega$ , которые связаны с компонентами скорости  $u, v$  следующими соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

Задача (1)-(6) в переменных  $\psi, \omega$  записывается следующим образом [3]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega + Gr \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\Delta \psi = \omega. \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Re Pr} \Delta \theta, (x, y) \in D, t \in (0, T], \quad (12)$$

$$\omega = \alpha(x, y), \theta = \phi(x, y), (x, y) \in \bar{D}, t = 0, \quad (13)$$

$$\psi = \xi_1(x, y, t), \frac{\partial \psi}{\partial n} = \eta_1(x, y, t), (x, y) \in \gamma_1, t \in (0, T], \quad (14)$$

$$\psi = \xi_2(x, y, t) + \lambda(t), \frac{\partial \psi}{\partial n} = \eta_2(x, y, t), (x, y) \in \gamma_2, t \in (0, T], \quad (15)$$

$$\theta = \beta_l(x, y, t), (x, y) \in \gamma_l, l = 1, 2, t \in (0, T], \quad (16)$$

$\alpha, \phi, \xi_i, \eta_i, \beta_i, i = 1, 2$  - заданные функции. Условие (8) запишем в следующем виде

$$\oint_{\gamma_3} \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dx + \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial x} - Gr \theta \right) dy \right] = 0 \quad (17)$$

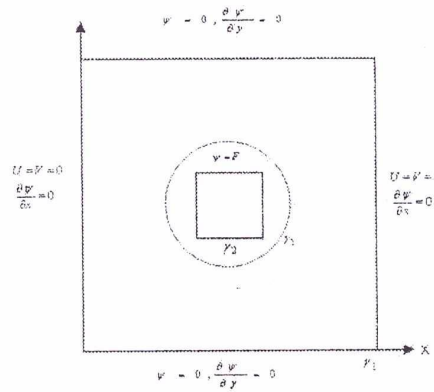


Рисунок 1 Физическая область

Решение задачи (10)-(17) будем искать в виде

$$\omega^{n+1}(x, y) = \omega_0^{n+1}(x, y) + \lambda^{n+1} \omega_1^{n+1}(x, y), \quad (18)$$

$$\psi^{n+1}(x, y) = \psi_0^{n+1}(x, y) + \lambda^{n+1} \psi_1^{n+1}(x, y).$$

$l$ -ая вспомогательная задача

$$\frac{\omega_0^{n+1} - \omega^n}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega_0^{n+1} + Gr \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x} \quad (19)$$

$$\Delta \psi_0^{n+1} = -\omega_0^{n+1}, (x, y) \in D.$$

$$\omega_0^{n+1}|_{\gamma_1} = 0, \frac{\partial \psi_0}{\partial n}|_{\gamma_1} = 0, \psi_0^{n+1}|_{\gamma_2} = 0, \frac{\partial \psi_0}{\partial n}|_{\gamma_2} = 0. \quad (20)$$

II-ая вспомогательная задача

$$\frac{\omega_1^{n+1} - \omega^n}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega_1^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega_1^{n+1}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega_1^{n+1} \quad (21)$$

$$\Delta \psi_1^{n+1} = -\omega_1^{n+1}, \quad (x, y) \in D.$$

$$\psi_1^{n+1}|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1^{n+1}}{\partial n}|_{\gamma_1} = 0, \quad \psi_1^{n+1}|_{\gamma_2} = 1, \quad \frac{\partial \psi_1^{n+1}}{\partial n}|_{\gamma_2} = 0. \quad (22)$$

Построим равномерную сетку в области  $D_h = \{(x_i, y_i), x_i = (i-1)h_1, y_j = (j-1)h_2, i = 0, 1, \dots, n_1, j = 0, 1, \dots, n_2, h_1 = l_1/(n_1-1), h_2 = l_2/(n_2-1)\}$ . Предположим что область  $D_0$  является прямоугольником  $D_{0h} = \{(x, y), x_{k1} \leq x \leq x_{k2}, y_{m1} \leq y \leq y_{m2}\}$   $x_i = (i-1)h_1, y_j = (j-1)h_2, i = 0, 1, \dots, n_1, j = 0, 1, \dots, n_2$  узлы равномерной сетки построенной в области  $D$ . Рассмотрим область  $D_1$  охватывающий область  $D_0$ , т.е.  $D_0 \subset D_1$ .  $D_1 = \{(x, y), x_{k3} \leq x \leq x_{k4}, y_{m3} \leq y \leq y_{m4}\}$  Рассмотрим разностный аналог условия (17) и подставляя разложение вида (18) получим

$$M\alpha^{n+1} = N \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} M = & \sum_{j=m3}^{m4} [\psi_{1,x,k3,j}^{n+1}/\tau + 0.5\omega_{1,k3+1,j}^{n+1}\psi_{y,k3,j}^n + 0.5\omega_{1,k3,j}^{n+1}\psi_{y,k3+1,j}^n - \\ & - \frac{1}{Re}\omega_{1,x,k3,j}^{n+1} - \beta g \theta_{k3+1/2,j}^{n+1}]h_2 + \\ & + \sum_{i=k3}^{k4} [\psi_{1,y,i,m4}^{n+1}/\tau + 0.5\omega_{1,i,m4-1}^{n+1}\psi_{x,i,m4}^n + \\ & + 0.5\omega_{1,i,m4}^{n+1}\psi_{x,i,m4-1}^n + \frac{1}{Re}\omega_{1,y,i,m4}^{n+1}]h_1 - \\ & - \sum_{j=m3}^{m4} [\psi_{1,x,k4,j}^{n+1}/\tau + 0.5\omega_{1,k4+1,j}^{n+1}\psi_{y,k4,j}^n + 0.5\omega_{1,k4,j}^{n+1}\psi_{y,k4+1,j}^n - \\ & - \frac{1}{Re}\omega_{1,x,k4,j}^{n+1} - \beta g \theta_{k4+1/2,j}^{n+1}]h_2 - \\ & - \sum_{j=k3}^{k4} [\psi_{1,y,i,m3}^{n+1}/\tau + 0.5\omega_{1,i,m3-1}^{n+1}\psi_{x,i,m3}^n + \\ & + 0.5\omega_{1,i,m3}^{n+1}\psi_{x,i,m3-1}^n + \frac{1}{Re}\omega_{1,y,i,m3}^{n+1}]h_1 \end{aligned} \quad (24)$$



$$\begin{aligned}
N = & \sum_{j=m3}^{m4} [-\psi_{0,x,k3,j}^{n+1}/\tau - \psi_{x,k3,j}^n/\tau + 0.5\omega_{0,k3+1,j}^{n+1}\psi_{y,k3,j}^n + 0.5\omega_{0,k3,j}^{n+1}\psi_{x,k3+1,j}^n - \\
& - \frac{1}{Re}\omega_{0,x,k3,j}^{n+1} - \beta g\theta_{k3+1/2,j}^{n+1}]h_2 + \\
& + \sum_{i=k3}^{k4} [\psi_{0,y,i,m4}^{n+1}/\tau - \psi_{y,i,m4}^n/\tau + 0.5\omega_{0,i,m4-1}^{n+1}\psi_{x,i,m4} + \\
& + 0.5\omega_{0,i,m4}^{n+1}\psi_{x,i,m4-1}^n + \frac{1}{Re}\omega_{0,y,i,m4}^{n+1}]h_1 \\
& \sum_{j=m3}^{m4} [-\psi_{0,x,k4,j}^{n+1}/\tau - \psi_{x,k4,j}^n/\tau + 0.5\omega_{0,k4+1,j}^{n+1}\psi_{y,k4,j}^n + 0.5\omega_{0,k4,j}^{n+1}\psi_{x,k4+1,j}^n - \\
& - \frac{1}{Re}\omega_{0,x,k4,j}^{n+1} - \beta g\theta_{k4+1/2,j}^{n+1}]h_2 + \\
& + \sum_{i=k3}^{k4} [\psi_{0,y,i,m3}^{n+1}/\tau - \psi_{y,i,m3}^n/\tau + 0.5\omega_{0,i,m3-1}^{n+1}\psi_{x,i,m3} + \\
& + 0.5\omega_{0,i,m3}^{n+1}\psi_{x,i,m3-1}^n + \frac{1}{Re}\omega_{0,y,i,m3}^{n+1}]h_1
\end{aligned} \tag{25}$$

Рассмотрим метод фиктивных областей [6] для решения задачи (10)-(17)

$$\frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega^\varepsilon + Gr \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x} - \operatorname{div}(k(x,y) \nabla \psi). \tag{26}$$

$$\Delta \psi^\varepsilon = \omega^\varepsilon \tag{27}$$

$$\frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{Re Pr} \Delta \theta^\varepsilon \tag{28}$$

$$\psi^\varepsilon|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial n} |_{\gamma_1} = 0. \tag{29}$$

$$\theta^\varepsilon = \beta_l(x,y,t), \quad (x,y) \in \gamma_l, \quad l = 1, 2, \quad t \in (0, T) \tag{30}$$

где

$$k(x,y) = 1, \quad (x,y) \in D_0 \tag{31}$$

$$k(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D \setminus D_0 \tag{32}$$

Таким образом, рассмотрены два метода решений уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости в переменных функция тока, вихрь скорости. Разработан явный метод решения уравнения с учетом условия однозначности давления. Это условие позволяет определить коэффициент, который используется в формуле (18). Рассмотренными методами проведены численные расчеты конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости в двухсвязной области.

## Список литературы

- [1] ФРОМ ДЖ. Неустойчившееся течение несжимаемой вязкой жидкости. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Изд-во МГУ, 1967. С. 343-381.
- [2] СУД ЭЛРОД. Численное решение уравнений Навье-Стокса в двумерных областях для течения несжимаемой жидкости // Ракетная техника и космонавтика. 1974. Т. 12. №5. С. 76-82.
- [3] СИРОЧЕНКО В. П. Численное моделирование конвективных течений вязкой жидкости в многомерных областях // Труды Международной конференции RDAMM-2001. 2001. Т. 6. Ч. 2. Спец.выпуск. С. 554-562.
- [4] ADLAM J.H. Computation of two-dimensional time-dependent natural convection in a cavity where there are internal bodies. // Computers and Fluids. 1986. Vol. 14. N2. P. 141-157.
- [5] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Издательство. Наука. 2-е издание. 1970.
- [6] СМАГУЛОВ Ш.С., ТЕМИРБЕКОВ Н.М., КАМАУБАЕВ К. Моделирование методом фиктивных областей условия для давления в задачах течения вязкой жидкости // Сиб. журн.вычисл. мат. 2000. Т. 3, №1. С. 57-62

УДК 532.517.7

### ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ «ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ» РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА С КОНТАКТНЫМ РАЗРЫВОМ

Н.М. Темирбеков

Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова

**Abstract.** This article contains one-dimensional problem of gas dynamics of malleable gas with contact gap in Lagrang's variables. For numerical solution of this problem was used Newton's method in detail. This method allow to turn the equations difference scheme of gas dynamics into the "three punctual" linear systems, they are solving with scalar screw. The effect and economy of numerical algorithms are confirmed by the realization them during minimum-machine time with saving adequate accuracy. The received results are set in graphics form.

**Keywords:** viscous compressible gas, the contact gap, the equation of gas dynamics.

**Аңдатпа.** Бұл жұмыста Лагранж айнымалысында бір өлшемді түйіспелі үзілісті тұтқыр газдың газ динамика есебі қарастырылған. Берілген есепті сандық іске асыру үшін Ньютон әлісі қолданылған. Бұл әдіспен газ динамика теңдеулер жүйесінің айырымдық сұлбасын сызықты «үшнүктелі» жүйеге келтірілген. Сызықты «үшнүктелі» жүйе скаляр қуалау әдісімен шешілген. Сандық алгоритмнің тиімділігі және үнемділігі жеткілікті дәлдікпен аз уақытта іске асырылуымен расталады. Алынған нәтижелер график түрінде де көрсетілген.

**Кілттік сөздер:** сығылатын тұтқыр газ, кенеттен өзгеру байқалатын аймақ, газ динамикасының теңдеуі.