МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КОМИТЕТ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

посвящается 50-летию создания
Института математики и механики АН КазССР

Алматы 1–5 июня 2015 года

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы – 2015

5. *Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М.* К классической задаче трех тел // II-международная научно-практическая конференция, посвященная 80-летию академика НАН РК Айталиева Ш.М.: Проблемы механики и строительства транспортных сооружений / Труды. - Алматы, КазАТК, 2015. - С. 456-458.

УДК 519.63

Моисеева Е.С.[1], Найманова А.Ж.[2], Бекетаева А.О.[2]

[1] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы,*
[2] *Институт математики и математического моделирования МОН РК, Казахстан, Алматы*

k.moisseyeva@gmail.com

Построение ENO-схемы на неравномерной сетке для расчета сверхзвуковых течений

В настоящее время основным инструментом преодоления трудностей численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса при моделировании сверхзвуковых течений, таких как возникновение осцилляций и разрывов в решении, являются существенно неосциллирующие схемы – ENO (essentially non-oscillatory) и WENO (weighted essentially non-oscillatory) схемы. Обычно эти схемы применяются на равномерной сетке с использованием преобразования координат [1, 2], однако в последнее время появились работы [3, 4], в которых разрабатываются и изучаются схемы высокого порядка точности на неравномерной сетке.

Целью данной работы является разработка конечно-разностной ENO-схемы третьего порядка точности на неравномерной сетке. Способ построения ENO-схемы основан на методологии, предложенной авторами [5] для равномерной сетки. При этом для построения существенно неосциллирующей кусочно-полиномиальной функции интерполянт Ньютона третьей степени адаптируется для неравномерной сетки.

Этапы построения ENO-схемы

Способ построения ENO-схемы третьего порядка точности подробно изложен авторами в [5]. Здесь будут показаны основные идеи построения данной схемы на примере одномерного невязкого случая.

Этап 1. Рассматривается следующая задача Коши:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\frac{\partial f\left(\vec{u}\right)}{\partial x}=\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+A\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}=0, \quad \vec{u}\left(x,0\right)=\vec{u}_0$$

где $A=\frac{\partial f(\vec{u})}{\partial \vec{u}}$ матрица Якоби.

В полосе $t_n \le t < t_{n+1}$ значения функции $\vec{u}\left(x,t_n\right)$ заменяются кусочно-постоянными, а именно, ее средними

$$\vec{v}_h=\bar{\vec{u}}_j=\frac{1}{\bar{h}_j}\int_{I_j}\vec{u}\left(x,t_n\right)dx$$

где $I_j=\left[x_{j-1/2},x_{j+1/2}\right]$, $\bar{h}_j=(h_j+h_{j-1})/2$, $h_j=x_{j+1}-x_j$.

Тогда искомая задача на этом малом отрезке по времени для $\lambda>0$ – собственного значения матрицы A, будет иметь вид

$$\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t}+A\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

с начальным условием

$$\vec{v}_h\left(x,t_n\right)=R\left(x;\bar{\vec{v}}^n\right),$$

где $R\left(x;\bar{\vec{v}}^n\right)$ есть кусочно-полиномиальная функция. Точное решение задачи (1) для достаточно малого Δt будет иметь вид

$$\vec{v}_h(,t) = E(t-t_n)\vec{v}_h(,t_n+0)$$

где $E(t)$ - оператор точного решения (1). Тогда

$$\bar{\vec{v}}_j^{n+1} = \bar{\vec{v}}_h(x,t_{n+1}) = \frac{1}{\bar{h}_j}\int_{I_j}\vec{v}_h\left(x,t_n\right)dx \tag{2}$$

Этап 2. В терминах инвариантов Римана $w = R^{-1}v$, где R – собственный вектор матрицы для собственного значения λ, покомпонентная форма точного решения (1) в полосе $t_n \le t < t_{n+1}$ представляется следующим образом

$$w\left(x,t\right) = R\left(x-\lambda t;\bar{w}^n\right)$$

Тогда схема (2) запишется в виде

$$\bar{w}_j^{n+1} = \frac{1}{\bar{h}_j}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} R\left(x-\lambda t;\bar{w}^n\right)dx =$$
$$= \frac{1}{\bar{h}_j}\left(H_m\left(x_{j+1/2}-\lambda t;W\right) - H_m\left(x_{j-1/2}-\lambda t;W\right)\right) \tag{3}$$

где $W(x)$ - первообразная для $w(x)$, а полином $H_m\left(x;W\right)$ строится на основе формулы Ньютона третьей степени, алгоритм построения аналогичен работе [5]. Окончательное решение для положительных ($\lambda > 0$) и отрицательных ($\lambda < 0$) собственных значений матрицы Якоби запишется в виде:

$$\begin{aligned}
\bar{w}_j^{n+1} = \bar{w}_j^n - \sigma_j^+\Delta_-\bar{w}_j^n - \sigma_j^+\Delta_-\Bigg[\bar{h}_j\left(1-\sigma_j^+\right) limiter1\left(\frac{\Delta_-\bar{w}_j^n}{s_j},\frac{\Delta_+\bar{w}_j^n}{s_{j+1}}\right) + \\
+\begin{cases}
\bar{h}_j s_j\left(1-\sigma_j^+\right)\left(1-\bar{\sigma}_j^+\right) limiter2\left(d_j\Delta_-\left(\frac{\Delta_-\bar{w}_j^n}{s_j}\right), d_{j+1}\Delta_-\left(\frac{\Delta_+\bar{w}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right) \\
\text{если } \left|\Delta_-\left(\frac{\Delta_-\bar{w}_j^n}{s_j}\right)\right| \le \left|\Delta_-\left(\frac{\Delta_+\bar{w}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right| \\
\bar{h}_{j+1}\bar{h}_j\left(\sigma_j^+-1\right)\left(\sigma_j^++1\right) limiter2\left(d_{j+1}\Delta_+\left(\frac{\Delta_-\bar{w}_j^n}{s_j}\right), d_{j+2}\Delta_+\left(\frac{\Delta_+\bar{w}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right) \\
\text{если } \left|\Delta_-\left(\frac{\Delta_-\bar{w}_j^n}{s_j}\right)\right| > \left|\Delta_-\left(\frac{\Delta_+\bar{w}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right|
\end{cases}\Bigg] \\
- \sigma_j^-\Delta_+\bar{w}_j^n - \sigma_j^-\Delta_+\Bigg[\bar{h}_j\left(1+\sigma_j^-\right) limiter1\left(\frac{\Delta_-\bar{w}_j^n}{s_j},\frac{\Delta_+\bar{w}_j^n}{s_{j+1}}\right) - \\
-\begin{cases}
\bar{h}_j\bar{h}_{j-1}\left(\sigma_{j-1}^--1\right)\left(\sigma_j^-+1\right) limiter2\left(d_j\Delta_-\left(\frac{\Delta_-\bar{w}_j^n}{s_j}\right), d_{j+1}\Delta_-\left(\frac{\Delta_+\bar{w}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right) \\
\text{если } \left|\Delta_+\left(\frac{\Delta_-\bar{w}_j^n}{s_j}\right)\right| \le \left|\Delta_+\left(\frac{\Delta_+\bar{w}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right| \\
\bar{h}_j s_{j+1}\left(1+\sigma_j^-\right)\left(1+\bar{\sigma}_{j+1}^-\right) limiter2\left(d_{j+1}\Delta_+\left(\frac{\Delta_-\bar{w}_j^n}{s_j}\right), d_{j+2}\Delta_+\left(\frac{\Delta_+\bar{w}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right) \\
\text{если } \left|\Delta_+\left(\frac{\Delta_-\bar{w}_j^n}{s_j}\right)\right| > \left|\Delta_+\left(\frac{\Delta_+\bar{w}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right|
\end{cases}\Bigg]
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\sigma_j^\pm = \lambda^\pm\Delta t/h_j$, $\lambda^\pm = (\lambda \pm |\lambda|)/2$, $\Delta_\pm w_j = \pm(w_{j\pm1}-w_j)$,$s_j = \bar{h}_j + \bar{h}_{j-1}$, $d_j = 1/(\bar{h}_j + \bar{h}_{j-1} + \bar{h}_{j-2})$,

а функции $limiter1(a,b)$ и $limiter2(a,b)$ являются ограничителями, соответствующие членам второго и третьего порядка точности, соответственно. Здесь в качестве ограничителей выбираются известные функции $\dot{m}(a,b)$, $minmod(a,b)$ или $superbee(a,b)$ [6].

После осуществления перехода от переменных $\bar{w}^n$ - инвариантов Римана, к переменным v^n, схему (4) можно представить следующим отношением:

$$\bar{\vec{v}}_j^{n+1} = \bar{\vec{v}}_j^n - \frac{\Delta t}{h}\hat{A}_{j-1/2}^+\Delta_-\vec{f}_j^m - \frac{\Delta t}{h}\hat{A}_{j+1/2}^-\Delta_+\vec{f}_j^m \tag{5}$$

Здесь поток $\vec{f}_j^m$ представляется в виде:

$$\vec{f}_j^m = \vec{f}_j + \vec{E}_j + \vec{D}_j,$$

где векторы $\vec{E}_j$, $\vec{D}_j$ определяются следующим образом (верхние индексы + и –

соответствуют положительным и отрицательным значениям матрицы Якоби):

$$\vec{E}_j^{\pm} = \pm limiter1(\bar{E}_{j-1/2},\ \bar{E}_{j+1/2})$$

$$\vec{D}_j^{+} = \begin{cases} limiter2(d_j\bar{D}^{+}_{j-1/2},\ d_{j+1}\bar{D}^{+}_{j+1/2}) & \text{если } \left|\Delta_-\left(\frac{\Delta_-\vec{f}_j^n}{s_j}\right)\right| \le \left|\Delta_+\left(\frac{\Delta_-\vec{f}_j^n}{s_j}\right)\right| \\ limiter2(d_{j+1}\hat{D}^{+}_{j+1/2},\ d_{j+2}\hat{D}^{+}_{j+3/2}) & \text{если } \left|\Delta_-\left(\frac{\Delta_-\vec{f}_j^n}{s_j}\right)\right| > \left|\Delta_+\left(\frac{\Delta_-\vec{f}_j^n}{s_j}\right)\right| \end{cases}$$

$$\vec{D}_j^{-} = \begin{cases} limiter2(d_j\hat{D}^{-}_{j-3/2},\ d_{j+1}\hat{D}^{-}_{j-1/2}) & \text{если } \left|\Delta_-\left(\frac{\Delta_+\vec{f}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right| \le \left|\Delta_+\left(\frac{\Delta_+\vec{f}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right| \\ limiter2(d_{j+1}\bar{D}^{-}_{j-1/2},\ d_{j+2}\bar{D}^{-}_{j+1/2}) & \text{если } \left|\Delta_-\left(\frac{\Delta_+\vec{f}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right| > \left|\Delta_+\left(\frac{\Delta_+\vec{f}_j^n}{s_{j+1}}\right)\right| \end{cases}$$

где $\bar{E}_{j-1/2} = \bar{h}_j\left(I - \frac{\Delta t}{\bar{h}_j}\left|A_{j-1/2}\right|\right)\frac{\Delta_-\vec{f}_j^n}{s_j}$, $\bar{E}_{j+1/2} = \bar{h}_j\left(I - \frac{\Delta t}{\bar{h}_j}\left|A_{j+1/2}\right|\right)\frac{\Delta_+\vec{f}_j^n}{s_{j+1}}$,

$$\bar{D}^{\pm}_{j-1/2} = \bar{h}_j\alpha_j\left(I - \frac{\Delta t}{\alpha_j}\left|A_{j-1/2}\right|\right)\left(I - \frac{\Delta t}{\bar{h}_j}\left|A_{j-1/2}\right|\right)\Delta_{\mp}\left(\frac{\Delta_-\vec{f}_j^n}{s_j}\right),$$

$$\bar{D}^{\pm}_{j+1/2} = \bar{h}_j\alpha_j\left(I - \frac{\Delta t}{\alpha_j}\left|A_{j+1/2}\right|\right)\left(I - \frac{\Delta t}{\bar{h}_j}\left|A_{j+1/2}\right|\right)\Delta_{\mp}\left(\frac{\Delta_+\vec{f}_j^n}{s_{j+1}}\right),$$

$$\hat{D}^{\pm}_{j-1/2} = \bar{h}_j\bar{h}_{j\mp1}\left(\frac{\Delta t}{\bar{h}_{j\mp1}}\left|A_{j-1/2}\right| - I\right)\left(\frac{\Delta t}{\bar{h}_j}\left|A_{j-1/2}\right| + I\right)\Delta_{\mp}\left(\frac{\Delta_-\vec{f}_j^n}{s_j}\right),$$

$$\hat{D}^{\pm}_{j+1/2} = \bar{h}_j\bar{h}_{j\mp1}\left(\frac{\Delta t}{\bar{h}_{j\mp1}}\left|A_{j+1/2}\right| - I\right)\left(\frac{\Delta t}{\bar{h}_j}\left|A_{j+1/2}\right| + I\right)\Delta_{\mp}\left(\frac{\Delta_+\vec{f}_j^n}{s_{j+1}}\right),$$

Здесь $\alpha_j = s_j$ для A^+ и $\alpha_j = s_{j+1}$ для A^-, а матрицы $\hat{A}^{\pm} = A^{\pm}A^{-1}$, причем $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$, где$A^{\pm} = R\Lambda^{\pm}R^{-1} = R\left(\dfrac{\Lambda \pm |\Lambda|}{2}\right)R^{-1}$, I – единичная матрица.

Тогда (5) можно рассматривать как одностороннюю схему с разностями против потока для следующего модифицированного уравнения:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\hat{A}^+ + \hat{A}^-\right)\frac{\partial\vec{f}^m}{\partial x} = 0$$

Таким образом, в данной работе построена существенно - неосциллирующая ENO-схема третьего порядка точности на неравномерной сетке. Основное преимущество алгоритма заключается в том, что его модификация с равномерной на неравномерную сетку может осуществляется достаточно просто, а этапы построения ENO-схемы при этом соответствуют этапам построения схемы на равномерной сетке [5].

Литература

1. *Sun De-chuan, Hu Chun-bo, Cai Ti-min.* Computation of supersonic turbulent flowfield with transverse injection // Appl. Math. Mech. English Edition. 2002. Vol. 23, No 1. P. 107–113

2. *Amano R.S., Sun D.* Numerical simulation of supersonic flowfield with secondary injection // The 24th Congress of ICAS. Yokohama, 2004.

3. *Berger M.J., Aftosmis M.J., Murman S.E.* Analysis of slope limiters on irregular grids // In 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting. Reno, NV, 2005. Paper AIAA 2005-0490.

4. *X. Zeng* A general approach to enhance slope limiters on non-uniform rectilinear grids // submitted to SIAM J. Sci. Comput. 2014

5. *Бекетаева А.О., Найманова А.Ж.* Применение ENO-схемы (essentially nonoscillatory) для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, Специальный выпуск 4: Труды V Совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям, Новосибирск, 6-8 февраля 2007 г. С. 17-25

6. *Ye. Moisseyeva, A. Naimanova* Numerical simulation of the transverse hydrogen injection into a supersonic turbulent airstream // Proceedings of APM-2014. St.-Petersburg, Russia, 2014. P.358–365

УДК 531.3

Саспаева А.Д.

АО "Национальный центр космических исследований и технологий", Казахстан, Алматы

asem.saspaeva@mail.ru

Построение уравнения движения искусственного спутника Земли в гравитационных полях Земли и Луны

Перед нашей страной поставлена задача развивать собственную космическую программу весьма жестких условиях развития мировой космической деятельности. Задача определения параметров движения искусственного спутника Земли, является одной из основных задач, решаемых в ходе управления его полетом.

Решение задачи динамики спутника в данном случае сводится к построению дифференциальных уравнений движения по заданным первым интегралам и к определению в дальнейшем из них искомых сил и моментов, а также других параметров. Математическая модель движения спутника базируется на кинематических и динамических уравнениях Эйлера с учетом внешних сил.

Уравнения движения спутника относительно его центра масс записываются в виде

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} &= K(q)\nu \\ \frac{d\nu}{dt} &= w(q,\nu,t) + U(q,\nu,t)u \end{cases}$$

где $q = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$- направляющие косинусы, $\nu(p, q, r)$-угловая скорость,$w_1 = \frac{1}{A}(C-B)qr$, $w_2 = \frac{1}{B}(A-C)pr$, $w_3 = \frac{1}{C}(B-A)pq$,$U(q,\nu) = diag(A^{-1}, B^{-1}, C^{-1})$,
$K = \begin{pmatrix} 0 & -a_{33} & a_{32} \\ a_{33} & 0 & -a_{31} \\ -a_{32} & a_{31} & 0 \end{pmatrix}$

Если известны первые интегралы уравнения движения спутника, тогда требуется определить соответствующий вектор обобщенных сил u

$$f_1 \equiv Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A-C)a_{31}^2 + (B-C)a_{32}^2] = c_1$$
$$f_2 \equiv Apa_{31} + Bqa_{32} + Cra_{33} = c_2$$
$$f_3 \equiv Cr = c_3$$

где A, B, C-главные центральные моменты инерции спутника, $\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3} = const$, где $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{f_1}$, f_1-возмущение Луны.

Множество значений вектора u определяется как общее решение системы полученной дифференцированием выражений в силу направляющих косинусов

$$S_{\nu i}u = h_{\nu i}, S_{\nu i} = \frac{\partial S}{\partial \nu_i}, h_{\nu i} = \frac{\partial h}{\partial \nu_i}$$

Тогда, согласно [3], восстанавливаемые функции можно определить как решение уравнений движения спутника.

$$A\dot{p} + (C-B)qr - 3\frac{\mu}{r^3}(C-B)a_{32}a_{33} = 0$$
$$B\dot{q} + (A-C)rp - 3\frac{\mu}{r^3}(A-C)a_{31}a_{33} = 0$$
$$C\dot{r} + (B-A)pq - 3\frac{\mu}{r^3}(B-A)a_{31}a_{32} = 0$$

Таким образом, по заданным первым интегралам восстановлены уравнения движения спутника, определено силовое поле, в котором движение спутника обладает указанными свойствами.