Башкирский государственный университет

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ “НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ”

Уфа, Россия, 18–22 июня 2013 г.

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Уфа
Издательство Башкирского государственного университета
2013

УДК 517.9

ББК 22

Международная научная конференция "Нелинейный анализ и спектральные задачи": Тезисы докладов. – Уфа: Изд-во БашГУ, 2013. – 139 с.

Программный комитет

Организационный комитет

Спектральный синтез в пространствах вещественно-аналитических функций

Н.Ф. Абузярова
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
e-mail: abnatf@gmail.com

Пусть $K = [-a;a]$, $\mathcal{A}(K)$ – пространство локально аналитических функций $f(t)$ вещественной переменной $t \in K$. Пространство $\mathcal{A}(K)$ снабжено топологией индуктивного предела компактной последовательности банаховых пространств $\mathcal{A}_n = C(V_n) \bigcap Hol(\operatorname{int} V_n)$ с нормой пространства непрерывных на V_n функций $C(V_n)$, здесь каждое множество V_n – компактная окрестность K в $\mathbb{C}$, $\operatorname{int} V_n$ – внутренность K_n, при этом $V_1 \Supset V_2 \Supset \ldots$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} V_n = K$. Пространство $\mathcal{A}(K)$ является (DFS)-пространством (см. [1], [2]). В частности, $\mathcal{A}(K)$ – неметризуемое, полное, отделимое, рефлексивное локально-выпуклое пространство, и его сильное сопряженное $\mathcal{A}'(K)$ (пространство аналитических функционалов с носителями в K) есть (FS)-пространство (см. [1], [2]).

Пространство аналитических функций на интервале вещественнной прямой $\mathcal{A}(\Omega)$, $\Omega = (-c;c)$, представляется как проективный предел последовательности пространств $\mathcal{A}(K_m)$, $m = 1, 2, \ldots$, где отрезки K_m исчерпывают интервал Ω : $K_1 \Subset K_2 \Subset \cdots \Subset \Omega$, $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$. Используя описание ограниченных и предкомпактных множеств в каждом $\mathcal{A}(K_m)$ и в проективном пределе $\mathcal{A}(\Omega)$ (см. [3, гл. V, предл. 14]), а также полноту всех этих пространств (см. [2, п. 1.3б]), получаем, что $\mathcal{A}(\Omega)$ – проективный предел счетного компактного проективного спектра, и значит [2, п. 1.8], – пространство (FS), в частности, монтелевское и рефлексивное.

Будем использовать обозначение $\mathcal{A}$ для обоих пространств $\mathcal{A}(K)$ и $\mathcal{A}(\Omega)$ в тех случаях, когда сказанное касается любого из этих пространств. Пусть $W \subset \mathcal{A}$ – замкнутое подпространство, инвариантное относительно дифференцирования $D = d/dt$:

$$f \in W \Longrightarrow Df \in W,$$

короче, *инвариантное* подпространство. Корневые элементы оператора D – это экспоненциальные одночлены $t^k \exp(-\mathrm{i}\lambda t)$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Инвариантное подпространство W *допускает спектральный синтез*[1], если оно порождается множеством всех содержащихся в нем экспоненциальных одночленов.

Теорема 1 *Все инвариантные подпространства $W \subset \mathcal{A}$ допускают спектральный синтез.*

[1] Мы используем терминологию из [4]

Теорема Пэли-Винера-Шварца ([5, теорема 15.1.5]) утверждает, что преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}S(t) \mapsto \varphi(z) = (S, \exp(-\mathrm{i}tz))$ устанавливает линейный топологический изоморфизм сильного сопряженного $\mathcal{A}'(K)$ и пространства $\mathcal{P}(K)$ целых функций φ, удовлетворяющих условию: $|\varphi(z)| \leq C_\varepsilon \exp((a+\varepsilon)|\mathrm{Im}\, z|,)$ для всех положительных ε. Пространство $\mathcal{A}'(\Omega)$ изморфно, соответственно, пространству $\mathcal{P}(\Omega)$ – индуктивному пределу пространств $\mathcal{P}(K_m)$.

Оба пространства $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}(K)$ и $\mathcal{P}(\Omega)$, обладают структурой топологического модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$. Используя топологические свойства пространств $\mathcal{A}(K)$ и $\mathcal{A}(\Omega)$ и их сопряженных и рассуждая так же, как в [4], можно установить следующие утверждения:
1. принцип двойственности: *между совокупностью инвариантных подпространств $\{W\}$ пространства $\mathcal{A}$ и совокупностью замкнутых подмодулей I модуля $\mathcal{P}$ имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу $W \leftrightarrow I = \mathcal{F}(W^0)$, где $W^0 \subset \mathcal{A}'$ – замкнутое подпространство всех функционалов, аннулирующих W;*
2. *Подпространство W допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда подмодуль $I = \mathcal{F}(W^0)$ полностью определяется множеством общих нулей содержащихся в нем функций (***допускает локальное описание).**

Таким образом, для теоремы 1 имеется эквивалентное утверждение о подмодулях.

Теорема 2 *Все замкнутые подмодули $I \subset \mathcal{P}$ допускают локальное описание.*

Список литературы

[1] Гротендик А. *О пространствах (F) и DF.*// Сб. переводов „Математика“. 1958. 2:3. С. 77-107.

[2] Жаринов В.В. *Компактные семейства ЛВП и пространства (FS) и (DFS).*//УМН. 1979. Т. 34, вып. 4. С. 97-131.

[3] Робертсон А.П., Робертсон В. Дж. *Топологические векторные пространства.*- М.: Мир, 1967. 257 с.

[4] Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях.*// Матем. сб. 1972. Т. 87(129) № 4. С. 459–489.

[5] Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.2.*- М.: Мир, 1986. 455 с.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение 14.B37.21.0358) и РФФИ (грант № 11-01-97009-р поволжье а).

Двупараметрические бифуркации вынужденных колебаний

Г.Р. Абушахмина
Сибайский институт (филиал) БашГУ, Сибай, Россия
e-mail: abushahmina_g@mail.ru

Рассматривается система автоматического управления, описываемая уравнением

$$L(p,\mu) = M(p,\mu)f(x,\mu,t), \tag{1}$$

где $L(p,\mu)$ и $M(p,\mu)$ — операторные многочлены, коэффициенты которых непрерывно дифференцируемо зависят от двумерного параметра $\mu = (\alpha,\beta)$; при этом $N > m$, где $N = degL$, $m = degM$, а функция $f(x,\mu,t)$ предполагается T-периодической по t и представленной в виде $f(x,\mu,t) = c(\mu)x + \varphi(x,\mu,t)$, при этом $\varphi(x,\mu,t) = O(|x|^2)$, $x \to 0$.

Уравнение (1) при всех значениях μ имеет нулевое решение $x = 0$. При изменении параметра μ в окрестности решения $x = 0$ у уравнения (1) могут возникать ненулевые T-периодические или qT-периодические решения, где $q \geq 2$. Настоящая статья посвящена обсуждению признаков такой бифуркации вынужденных колебаний системы (1).

Система (1) стандартным способом может быть представлена в виде уравнения

$$\frac{dx}{dt} = B(\alpha,\beta)x + b(\alpha,\beta,x,t), \quad x \in\ R^N, \tag{2}$$

где $B(\alpha,\beta)$ — квадратная матрица порядка N ($N \geqslant 2$), а T-периодическая нелинейность $b(\alpha,\beta,x,t)$ удовлетворяет условию $b(\alpha,\beta,x,t) = O(\|x\|^2)$, $\|x\| \to 0$.

Значение $\mu_0 = (\alpha_0,\beta_0)$ параметра $\mu = (\alpha,\beta)$ называется точкой бифуркации qT-периодических решений уравнения (2) [1], если существуют $\mu_n \to \mu_0$ такие, что при $\mu = \mu_n$ уравнение (2) имеет нестационарное qT-периодическое решение $x = x_n(t):\ \|x_n(t)\| \to 0$, при $n \to \infty$.

Лемма 1 *Пусть (α_0,β_0) — это точка бифуркации периода qT. Тогда матрица $B(\alpha_0,\beta_0)$ имеет чисто мнимые собственные значения вида $\pm\frac{2\pi p}{qT}i$ при некотором целом p.*

Положим $B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$, $B_0^* = B^*(\alpha_0, \beta_0)$. Пусть матрица B_0 имеет пару простых собственных значений $\pm\frac{\omega_0}{T}i$. Обозначим через $e_0 + ig_0$ собственный вектор матрицы B_0, отвечающий собственному значению $\frac{\omega_0}{T}i$. Сопряженная матрица B_0^* также имеет собственные значения $\pm\frac{\omega_0}{T}i$; при этом соответствующие собственные векторы $e_0^* \pm ig_0^*$ можно выбрать исходя из соотношений:

$$(e_0, e_0^*) = (g_0, g_0^*) = 1, \quad (e_0, g_0^*) = (g_0, e_0^*) = 0. \tag{3}$$

При изучении задач о бифуркации qT-периодических решений уравнения (2) [1, 2] возникает вопрос о проверке условия

$$\Delta_0 = det \begin{bmatrix} (A'_\alpha e_0, e_0^*) & (A'_\beta e_0, e_0^*) \\ (A'_\alpha e_0, g_0^*) & (A'_\beta e_0, g_0^*) \end{bmatrix} \neq 0, \tag{4}$$

где $A(\alpha, \beta) = e^{qTB(\alpha,\beta)}$ и $A'_\alpha = [A(\alpha, \beta)]'_\alpha$, $A'_\beta = [A(\alpha, \beta)]'_\beta$.

Положим $q_0 = qT$. Для проверки условия (4) необходимо вычислить числа $(A'_\alpha e_0, e_0^*)$, $(A'_\alpha e_0, g_0^*)$, $(A'_\beta e_0, e_0^*)$ и $(A'_\beta e_0, g_0^*)$. Непосредственное нахождение этих чисел сопряжено с трудностями, так как матрица $A(\alpha, \beta) = e^{q_0 B(\alpha,\beta)}$ определяется как ряд

$$e^{q_0 B(\alpha,\beta)} = I + q_0 B(\alpha, \beta) + \frac{q_0^2}{2!} B^2(\alpha, \beta) + \frac{q_0^3}{3!} B^3(\alpha, \beta) + ...$$

В данной работе приводится алгоритм нахождения $(A'_\alpha e_0, e_0^*)$, $(A'_\alpha e_0, g_0^*)$, $(A'_\beta e_0, e_0^*)$ и $(A'_\beta e_0, g_0^*)$. Введем обозначения $B'_\alpha = [B(\alpha, \beta)]'_\alpha$, $B'_\beta = [B(\alpha, \beta)]'_\beta$.

Теорема 1 *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} (A'_\alpha e_0, e_0^*) &= \tfrac{1}{2} q_0 \big((B'_\alpha e_0, e_0^*) + (B'_\alpha g_0, g_0^*) \big), \\ (A'_\alpha e_0, g_0^*) &= \tfrac{1}{2} q_0 \big((B'_\alpha e_0, g_0^*) - (B'_\alpha g_0, e_0^*) \big), \\ (A'_\beta e_0, e_0^*) &= \tfrac{1}{2} q_0 \big((B'_\beta e_0, e_0^*) + (B'_\beta g_0, g_0^*) \big), \\ (A'_\beta e_0, g_0^*) &= \tfrac{1}{2} q_0 \big((B'_\beta e_0, g_0^*) - (B'_\beta g_0, e_0^*) \big), \end{aligned}$$

и, следовательно, условие (4) имеет вид

$$\Delta_0 = \tfrac{1}{4} q_0^2 det \begin{bmatrix} (B'_\alpha e_0, e_0^*) + (B'_\alpha g_0, g_0^*) & (B'_\beta e_0, e_0^*) + (B'_\beta g_0, g_0^*) \\ (B'_\alpha e_0, g_0^*) - (B'_\alpha g_0, e_0^*) & (B'_\beta e_0, g_0^*) - (B'_\beta g_0, e_0^*) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Выше векторы e_0, g_0, e_0^*, g_0^* выбраны исходя из условий (3). В частности, вместо этих векторов могут использоваться и векторы $e_1 = e_0 cos\varphi + g_0 sin\varphi$, $g_1 = -e_0 sin\varphi + g_0 cos\varphi$, $e_1^* = e_0^* cos\varphi + g_0^* sin\varphi$ и $g_1^* = -e_0^* sin\varphi + g_0^* cos\varphi$. Для этих векторов условие (3) выполнено при любом φ. Возникает вопрос о зависимости определителя (5) от угла φ.

Лемма 2 *Справедливы равенства*

$$\begin{array}{l}(B'_\alpha e_1, e_1^*) + (B'_\alpha g_1, g_1^*) = (B'_\alpha e_0, e_0^*) + (B'_\alpha g_0, g_0^*),\\ (B'_\alpha e_1, g_1^*) - (B'_\alpha g_1, e_1^*) = \big(-(B'_\alpha e_0, e_0^*) + (B'_\alpha g_0, g_0^*)\big) sin2\varphi +\\ (B'_\alpha e_0, g_0^*) - (B'_\alpha g_0, e_0^*),\\ (B'_\beta e_1, e_1^*) + (B'_\beta g_1, g_1^*) = (B'_\beta e_0, e_0^*) + (B'_\beta g_0, g_0^*),\\ (B'_\beta e_1, g_1^*) - (B'_\beta g_1, e_1^*) = \big(-(B'_\beta e_0, e_0^*) + (B'_\beta g_0, g_0^*)\big) sin2\varphi +\\ (B'_\beta e_0, g_0^*) - (B'_\beta g_0, e_0^*).\end{array}$$

Обозначим через Δ_1 определитель вида (4), полученный заменой e_0, e_0^*, g_0, g_0^* на e_1, e_1^*, g_1, g_1^*. Из леммы (2) следует, что верно равенство

$$\Delta_1 = \frac{1}{4} q_0^2 \big((B'_\alpha e_0, e_0^*)(B'_\beta g_0, g_0^*) - (B'_\alpha g_0, g_0^*)(B'_\beta e_0, e_0^*)\big) \cdot sin2\varphi + \Delta_0.$$

Следовательно, определитель Δ_1 зависит от угла φ и, в частности, он может обращаться в нуль, например, при $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Таким образом, достаточный признак бифуркации вынужденных колебаний выполнен почти при любом выборе векторов e_0, e_0^*, g_0, g_0^*.

Список литературы

[1] Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах.* // Уфим. матем. журнал. 2010. Т. 2, № 4. С. 3-26.

[2] Юмагулов М.Г. *Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах* // Доклады Академии наук. 2008. Т. 423, № 5. С. 1-4.

Обратная задача определения правой части для уравнения колебания балки

Б.Т. Акпаев, Н.М. Абенов

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

Астана, Казахстан

e-mail: bakitjan.akpayev@gmail.com

Движение балки с закрепленными концами под влиянием произвольной внешней силы $f(x,t)$ получается из неоднородного гиперболического дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$u_{tt} = -a^2 u_{xxxx} + f(x,t), 0 < x < l, t > 0. \tag{1}$$

Ясно, что на концах балки должны выполняться граничные условия

$$\begin{matrix} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0, \end{matrix} \quad 0 \le x \le l \tag{2}$$

и

$$\begin{matrix} u_{xx}(0,t)=0, \\ u_{xx}(l,t)=0, \end{matrix} \quad 0 \le x \le l \tag{3}$$

А начальные условия задаются следующим образом:

$$\begin{matrix} u(x,0)=\varphi(x), \\ u_t(x,0)=\psi(x), \end{matrix} \quad t > 0. \tag{4}$$

В этой работе, мы воспользуемся методами разработанными в [1].

Постановка задачи 1. Нам нужно выбрать $f(x,t)$ так, чтобы выполнялось условие

$$u(x,T) = u_T(x), \tag{5}$$

где $u_T(x)$ - экспериментально заданная функция.

Для решения этой задачи сначала будем решать прямую задачу (1) - (4).

Будем искать решение прямой задачи в виде разложения в ряд Фурье по x

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{6}$$

$$u_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t) sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,$$

рассматривая при этом t как параметр.

Для решения задачи 1, имеем следующее выражение в конечном времени $t = T$:

$$u(x,T) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l^2}{a(\pi n)^2}\int_0^T sin\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)\right)\cdot f_n(\tau)d\tau\right) sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cdot cos\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T\right) + \frac{\psi_n}{a}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 \cdot sin\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T\right)\right) sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Из условия (5) получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,T} sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{l^2}{a(\pi n)^2}\int_0^T sin\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)\right)\cdot f_n(\tau)d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\varphi_n \cdot cos\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T\right)+\frac{\psi_n}{a}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\cdot sin\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T\right)\right)\right] sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

где $u_{n,T}=\frac{2}{l}\int_0^l u_T(x) sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$

Из последнего равенства получаем:

$$u_{n,T}=\left(\frac{l^2}{a(\pi n)^2}\int_0^T sin\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)\right)\cdot f_n(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\left(\varphi_n \cdot cos\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T\right)+\frac{\psi_n}{a}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\cdot sin\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T\right)\right).$$

Следовательно, имеем интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^T sin\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)\right)\cdot f_n(\tau)d\tau=\frac{a(\pi n)^2}{l^2}\cdot$$

$$\cdot\left(u_{n,T}-\left(\varphi_n \cdot cos\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T\right)+\frac{\psi_n}{a}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\cdot sin\left(a\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T\right)\right)\right).$$

Список литературы

[1] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский *Уравнения математической физики.* - М.: Наука, 1977. – 714 с.

Оценки скорости убывания решения параболического уравнения с нестепенными нелинейностями

Э.Р. Андриянова, Ф.Х. Мукминов

Институт математики с вычислительным центром, Уфа, Россия

e-mail: mfkh@rambler.ru

Пусть Ω — неограниченная область пространства R_n, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для параболического уравнения

$$(\beta(x,u))'_t = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{p_i}(x, \nabla u)\right)_{x_i}, \text{ где } a(x,\nabla u) = a(x,p)\Big|_{p=\nabla u}; \qquad (1)$$

рассматривается первая смешанная задача

$$u(t,x)\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad u(0,x) = u_0(x) \qquad (2)$$

Предполагается, что функция $a(x,p)$, $(p = (p_1, p_2, ..., p_n))$ выпукла по p и измерима по $x \in \Omega$; $\beta(x,u)$– дифференцируемая по $u \in R$ функция, измеримая по $x \in \Omega$. При этом функция $\beta_1(x,u)$, $\beta_1'(x,u) = u\beta'(x,u)$, удовлетворяет оценкам

$$c_1 G(u) \leq \beta_1(x,u) \leq c_2 G(u)$$

с некоторой N-функцией $G(u)$, подчиняющейся Δ_2-условию.

В работе построено сильное решение задачи при неограниченной области Ω методом регуляризации галеркинских приближений. Ранее данный метод был использован в работе [1] при построении решения смешанной задачи для параболического уравнения со степенными нелинейностями. Построенное решение при $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ обладает следующими свойствами:

$$u \in C([0,T]; L_G(\Omega)), \quad u \in L_{\infty,loc}((0,T); \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)), \quad (\beta_u'(x,u))^{\frac{1}{2}} u' \in L_2(D^T).$$

При некоторых предположениях доказаны также оценки

$$C(u_0)(1+t)^{-\gamma} \leq ||G(u(t))||_{L_1}(\Omega) \leq C_1(u_0) t^{-\alpha}, \quad \alpha, \gamma > 0;$$

Ранее подобные оценки были установлены в работе [1], а также в работе [2] - для некоторого класса анизотропных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью.

Список литературы

[1] Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью.* //Уфимск. матем. журн., 2011., т. 3 № 3. С. 3-14.

[2] Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *оценки решения анизатропного параболического уравнения с двойной нелинейностью.* //Уфимск. матем. журн., 2011, т.3 № 4 , С. 64–85.

Формула регуляризованного следа нефинитных возмущений двумерного гармонического осциллятора

Э.Ф. Ахмерова
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
e-mail: eakhmerova@yandex.ru

Изучается оператор $H = H^0 + V$ в $L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, где $H^0 = -\Delta + x_1^2 + x_2^2$, V – оператор умножения на вещественную функцию $V(x_1, x_2) \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$. Спектр оператора H^0 хорошо известен, состоит из чисел $\lambda_n = 2n + 2$, $n \geq 0$. Соответствующие проекторы на собственные подпространства (размерности $n+1$) имеют вид $P_n h = \sum_{l=0}^{n} \left(h, \varphi_l^{(n)}\right) \varphi_l^{(n)}$, где $(.,.)$ - скалярное произведение в $L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\varphi_l^{(n)}(x) = f_l(x_1) f_{n-l}(x-2)$, $f_l(t)-$ нормированная собственная функция одномерного гармонического осциллятора, соответствующая собственному числу $2l+1$, ($l \geq 0$).

Пусть $R^0(\lambda)$ – резольвента оператора H^0, а возмущение V таково, что оператор $VR^0(\lambda)$ компактен $\forall\lambda \notin \sigma\left(H^0\right)$ и $VR^0(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Тогда, согласно рассуждениям работы [1], спектр $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ оператора H определяется из уравнения

$$\mu_n = \lambda_n + P_n V P_n - P_n V R_n(\mu_n) V P_n, \tag{1}$$

где $R_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[R_n^0(\lambda) V\right]^k R_n^0(\lambda)$, $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - P_n(\lambda_n - \lambda)^{-1}$.

Из уравнения (1) легко следует представление

$$2(n+1)^2 + \mathrm{sp} P_n V P_n - \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \mu_k^{(n)}, \tag{2}$$

где $\mu_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots n$, собственные значения оператора H, лежащие в окрестности $\lambda_n = 2n+2$, $\mathrm{sp} P_n V P_n = \sum_{k=0}^{n} \left(V\varphi_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)}\right)$,
$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \left(V R_n(\mu_n) V \varphi_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)}\right)$.

Целью работы является найти условие на возмущение V, при котором последовательность $\sum_{n=0}^{m} \gamma_n \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда из формулы (2) непосредственно следует справедливость формулы регуляризованного следа

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\mu_k^{(n)}-2(n+1)^2-\sum_{k=0}^{n}\left(V\varphi_k^{(n)},\varphi_k^{(n)}\right)\right)=0.$$

Список литературы

[1] Ахмерова Э.Ф., Муртазин Х.Х., *Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов* // Докл. РАН. 2003. Т. 388, № 6. С. 731-733.

О разностном уравнении в весовом пространстве последовательностей

Н.Т. Ахтямов, И.Х. Мусин

Уфимский институт путей сообщения – филиал СамГУПС, Уфа, Россия;
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия
e-mail: nail9119@rambler.ru; musin@matem.anrb.ru

Пусть A – множество комплекснозначных функций на $\mathbb{Z}^n$. Элементы A называем кратными последовательностями или просто последовательностями.

Пусть $\varphi=\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство выпуклых функций $\varphi_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ таких, что для любого $m\in\mathbb{N}$:

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi_m(x)}{\|x\|}=+\infty$ ($\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$);

2). существует число $b_m\ge 0$ такое, что

$$\varphi_m(x)-\varphi_{m+1}(x)\ge\ln(1+||x||)-b_m,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Пусть $A_\varphi=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}A(\varphi_m)$, где

$$A(\varphi_m)=\{f\in A: p_m(f)=\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\frac{|f(\alpha)|}{e^{\varphi_m(\alpha)}}<\infty\}.$$

Для непрерывной функции $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ такой, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\Phi(x)}{\|x\|}=+\infty$, пусть $\Phi^\star(x):=\sup\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(\langle x,\alpha\rangle-\Phi(\alpha)),\ x\in\mathbb{R}^n.$

Пусть $\varphi^\star = \{\varphi_m^\star\}_{m=1}^\infty$, $H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$, $P_{\varphi^\star} = \bigcup\limits_{m=1}^\infty P(\varphi_m^\star)$, где для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$P(\varphi_m^\star) = \{F \in H(\mathbb{C}^n) : F(z + 2\pi l) = F(z) \text{ для всех } z \in \mathbb{C}^n, l \in \mathbb{Z}^n$$

$$\text{и } \|F\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|F(z)|}{e^{\varphi_m^\star(Imz)}} < \infty\}.$$

С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа A_φ и $P_{\varphi^\star}$ – линейные пространства. Наделим A_φ топологией, определяемой семейством норм p_m $(m \in \mathbb{N})$, а $P_{\varphi^\star}$ – топологией индуктивного предела пространств $P(\varphi_m^\star)$. Пусть A_φ^* – сильное сопряжённое к пространству A_φ.

Для $z \in \mathbb{C}^n$ функция $e(z) : \alpha \in \mathbb{Z}^n \to e^{-i\langle z,\alpha\rangle}$ принадлежит A_φ. Поэтому для любого линейного непрерывного функционала S на A_φ функция $\hat{S}(z) = S(e(z))$ определена в $\mathbb{C}^n$. Легко видеть, что $\hat{S} \in P_{\varphi^\star}$.

Теорема 1. *Отображение $\mathcal{F} : S \in A_\varphi^* \to \hat{S}$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами A_φ^* и $P_{\varphi^\star}$.*

Для $f \in A$ и $h \in \mathbb{Z}^n$ определим последовательность f_h по правилу: $f_h(\alpha) = f(\alpha + h)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Пусть множество $H \subset \mathbb{Z}^n$ состоит из конечного числа элементов и для каждого $h \in H$ $\gamma_h \in \mathbb{C}$.

Теорема 2. *Пусть φ удовлетворяет следующим дополнительным условиям:*

i_1). для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют положительные числа a_m и b_m такие, что

$$\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x) \geq a_m\|x\| - b_m,\ x \in \mathbb{R}^n;$$

i_2). для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $d_m > 0$ что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ с условием $|\xi_j| \leq 1$ $(j = 1, \ldots, n)$

$$\varphi_{m+1}(x + \xi) \leq \varphi_m(x) + d_m.$$

Тогда уравнение $\sum\limits_{h \in H} \gamma_h f_h = g$ разрешимо в A_φ для каждого $g \in A_\varphi$.

Для $\mu \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\zeta \in \mathbb{C}^n$ определим последовательность $E_{\mu,\zeta}$ по правилу: $\alpha \in \mathbb{Z}^n \to \alpha^\mu e^{-i\langle\alpha,\zeta\rangle}$. Обозначим нулевой элемент пространства A_φ через $\mathbf{0}$. Пусть W – множество всех решений $f \in A_\varphi$ уравнения $\sum\limits_{h \in H} \gamma_h f_h = \mathbf{0}$, а $\mathcal{E}$ – множество всех решений вида $E_{\mu,\zeta}$.

Теорема 3. *Пусть семейство φ удовлетворяет условиям Теоремы 2 и $\mathcal{E}$ не пусто. Тогда замыкание линейной оболочки $\mathcal{E}$ в A_φ совпадает с W.*

Представление аналитических функций в круге

А.Р. Багаутдинова, А.В. Луценко, В.И. Луценко, Э.Д. Шаймуратова
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
e-mail: Lutsenko_v_i@mail.ru

В работе М.М. Джрбашяна [1] изучено пространство функций аналитических в круге и удовлетворяющих условию

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|f(\rho e^{i\theta})|^p\rho d\rho d\theta<\infty,$$

при $p>0,\alpha>-1,$ для которых справедливо представление

$$f(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{f(\rho e^{i\theta})}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta<\infty,$$

Ф.А. Шамоян [2] и его ученики распространили результаты на пространство аналитических функций с ограничением:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}w(1-\rho)|f(\rho e^{i\theta})|^p\rho d\rho d\theta<\infty,$$

где $w(t)-$ медленно меняющиеся функция.

В данной работе представляется попытка ослабить условие на вес w.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть* $p>0$, *и* $w(t)\geq 0$, *такая что* $\int_0^1 w(t)\,dt<\infty$. *Для функций* $f(z)\in H^p_w(D)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}w(\rho^2)|f(\rho e^{i\theta})|^p\rho d\rho d\theta<\infty,$$

справедливо представление

$$f(z)=\int_0^1\int_0^{2\pi}w(\rho^2)W(z\rho e^{-i\theta})f(\rho e^{i\theta})\rho d\rho d\theta<\infty,$$

где

$$W(z)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2z^k}{\int_0^1 w(t)t^k\,dt}.$$

Список литературы

[1] Джрбашян М.М. *К проблеме представимости аналитических функций.* // Сообщение Института математики и механики АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С.3 – 30.

[2] Шамоян Ф.А. *Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций* // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31, № 2. С. 197-215.

Периодические и ограниченные решения одного класса эллиптических систем

С. Байзаев
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета, Сибай, Россия
e-mail: baisat54@rambler.ru

Рассмотрим эллиптическую систему вида

$$w_{\overline{z}} = A(z)w, \tag{1}$$

где $w \in C^n, A(z)-$ матрица функция n-го порядка. Приведем некоторые наши результаты относительно решений системы (1) (см., например, [1]).

Если матрица A является постоянной, то общее решение системы (1) имеет вид

$$w(z) = e^{\overline{z}A}\varphi(z),$$

где $\varphi(z)-$ произвольная аналитическая вектор-функция.

Пусть $U-$ матрица, приводящая матрицу A к квазидиагональной форме Жордана $\Lambda = diag[\Lambda_1, ..., \Lambda_m], \Lambda_j-$ жордановая клетка порядка ν_j, соответствующая собственному значению λ_j матрицы A; заметим, что $\nu_1 + ... + \nu_m = n$. Пусть далее вектор-функция $U\varphi(z)$ представлена в виде $U\varphi(z) = [\varphi_1, ..., \varphi_m]^T$, где φ_j- аналитический вектор размера ν_j. Тогда общее решение системы (1) можно представить в виде

$$w(z) = U^{-1}[e^{\lambda_1\overline{z}}P_1(\overline{z})\varphi_1(z), ..., e^{\lambda_m\overline{z}}P_m(\overline{z})\varphi_m(z)]^T, \tag{2}$$

где

$$P_j(z) = \sum_{k=0}^{\nu_j-1}\frac{z^k}{k!}(\Lambda_j - \lambda_j E_{\nu_j})^k,$$

$E_{\nu_j}-$единичная матрица порядка ν_j. Из (2) можно получить другое представление общего решения системы (1)

$$w(z) = U^{-1}[e^{2iIm\lambda_1\overline{z}}P_1(\overline{z})\psi_1(z), ..., e^{2iIm\lambda_m\overline{z}}P_m(\overline{z})\psi_m(z)]^T, \tag{3}$$

где ψ_j- аналитический вектор размера ν_j.

Используя формулу (3) можно найти все регулярные во всей комплексной плоскости C решения системы (1), растущие на бесконечности не быстрее чем $|z|^N$ ($N-$ целое неотрицательное число). Размерность пространства таких решений равна

$$\frac{1}{2}[\sum_{\nu_j\leq N+1}\nu_j(2N+3-\nu_j)+(N+1)(N+2)\sum_{\nu_j>N+1}1].$$

Из формулы (3) видно, что ограниченные на C решения системы (1) даются формулой

$$w(z)=U^{-1}[e^{2iIm\lambda_1\overline{z}}c_1,...,e^{2iIm\lambda_m\overline{z}}c_m]^T, \qquad (4)$$

где c_j- вектор вида $[d_j,0,...,0]^T$ из C^{ν_j}. Размерность пространства ограниченных на C решений равна m, т.е. количеству клеток в квазидиагональной форме Жордана матрицы A. Каждое ненулевое ограниченное на C решение системы (1) нигде в расширенной комплексной плоскости не обращается в нуль.

Отметим, что в отличие от системы (1) для системы

$$w_{\overline{z}}=A\overline{w},$$

пространство решений степенного роста может быть нулевым, конечномерным или бесконечномерным.

Теперь рассмотрим случай переменной матрицы A. Предположим, что элементы матрицы $A(z)$ определены в области G и принадлежат классу $L_{p,2}(C)$ (см. [2]). Пусть $w_1(z)$, $w_2(z),...,$ $w_n(z)$ регулярные в G решения системы (1). Из компонент этих решений составим аналог определителя Вронского $W(z)$. Тогда найдется такая аналитическая в G функция $\Phi(z)$, что справедлив аналог формулы Остроградского-Лиувилля

$$W(z)=\Phi(z)\exp T_G(SpA),$$

где T_G- оператор Векуа, $SpA-$ след матрицы $A(z)$.

Если элементы матрицы $A(z)$ определены на всей плоскости C, принадлежат гёльдерову классу C_α и SpA является 2π-периодической функцией по переменным x и y, то имеет место другой аналог формулы Остроградского-Лиувилля

$$W(z)=\Phi(z)\exp\left(T(SpA)+2iImf_0\overline{z}\right),$$

где $\Phi(z)-$ целая функция, $T-$ оператор, определенный по формуле

$$Tf=-2i\sum_{k\neq 0}k^{-1}f_ke^{i(k,z)},$$

f_k- коэффициенты Фурье функции $f = SpA, k = k_1+ik_2, k_1, k_2 \in Z, (k,z) = k_1x + k_2y$.

Если $w_1(z)$, $w_2(z), ...,$ $w_n(z)$ регулярные, ограниченные на C решения системы (1), то найдется такая постоянная c, что

$$W(z) = c\exp\left(T(SpA) + 2iImf_0\overline{z}\right).$$

Отметим, что если коэффициенты системы (1) принадлежат гёльдерову пространству C_α ограниченных на C функций, то многообразие решений из пространства $C_{\alpha,1}$ может быть бесконечномерным. Например, при $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, где $a = z(1+|z|^2)^{-1/2}$ система (1) имеет в $C_{\alpha,1}$ бесконечное число линейно независимых решений

$$w_n(z) = z^n \exp(-2z/a)(1,1)^T,\ n = 0, 1, ...$$

Если же коэффициенты системы (1) являются 2π-периодическими по переменным x и y, то задача о 2π-периодических по переменным x и y решениях этой системы является фредгольмовой.

Список литературы

[1] Байзаев С. *Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости.* - Новосибирск. НГУ, 1999. – 74 с.

[2] Векуа И. И. *Обобщенные аналитические функции.* - М.: Наука, 1988. – 509 с.

Интегрируемые по Пенлеве матричные уравнения

С.П. Баландин

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

e-mail: balanse@bk.ru

Баландиным и Соколовым [1] были получены и изучены на обладание свойством Пенлеве неабелевы аналоги первого и второго трансцендентных уравнений Пенлеве. Баландин и Черданцев исследовали обобщения таких уравнений [2] на интегрируемость по тесту Пенлеве–Ковалевской.

Раскладывая решение в ряд Лорана и сравнивая левую и правую части получаемых соотношений с учетом необходимого числа произвольных постоянных, находим условия интегрируемости исследуемых уравнений. В результате для аналога первого уравнения Пенлеве доказана

Теорема 1 *Уравнение* $u'' = 6u^2 + 60(\alpha(z)u + \beta(z))$, *где* $\alpha(z)$ *и* $\beta(z)$ *есть матричные аналитические во всей плоскости функции, обладает решением в виде формального ряда Лорана*

$$u = u_0(z - z_0)^{-2} + u_1(z - z_0)^{-1} + u_2 + \dots,$$

зависящем от $2n^2$ *произвольных констант, тогда и только тогда, когда* $\alpha(z)$ *и* $\beta(z) - \beta(0)$ *— скалярные матрицы, связанные соотношением* $\beta''(z) = -\frac{1}{12}\alpha^{(4)}(z) + \frac{1}{5}(\alpha(z)^2)''$, *а* $\beta(0)$ *— произвольная матрица. Заменой* $u \to u - 5\alpha(z)E$ *это уравнение приводится к виду* $u'' = 6u^2 + \beta_0 + \beta_1 zE$, *где* β_0 *— произвольная матрица, а* β_1 *– произвольная константа.*

Из теоремы 1 следует, что уравнение, исследованное в [1], является единственным интегрируемым обобщением первого уравнения Пенлеве.

Путем более трудоемких вычислений исследовано также обобшение матричного аналога второго уравнения Пенлеве на интегрируемость.

Заметим, что такого рода уравнения интересны не только математикам, но и имеют физические приложения (см., например, [3]).

Список литературы

[1] Balandin S. P.,and Sokolov V. V., *On the Painlevé test for non– Abelian equations* // Phys. Lett. A . 1998. V. 246. № 3-4. P. 267–272.

[2] Баландин С. П., Черданцев И. Ю. *Матричные аналоги первого уравнения Пенлеве*// Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 4. С. 21–27.

[3] Myers J. M. *Derivation of a matrix Painleve equation germane to wave scattering by a broken corner* // Physica D. 1984. V. 11. P. 51–89.

Some exact solutions of the equations of classical thory of elastisity

N.F. Belmetcev, Yu.A. Chirkunov, V.L. Kiselev
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia
e-mail: weqsmachine@gmail.com

Group foliation of the static equations of Lame of classical theory of elasticity has allowed [1, 2] to use two systems (automorphic and resolvable) of first order differential equations for constructing exact solutions. The solution of automorphic system gained by Chirkunov Yu. A [1], represents polydimensional analogue of the formula of Kolosov-Mushelishvili with functions from solutions of resolvable system. The group analysis [3] of resolvable equations, dubbed in complex variables, leads to a set of invariant submodels, some of them is represented by the classical equations of mathematical physics. A number of exact solutions of the allowing equations, and also a set of the formulas are builted, allowing to dilate their amount. The gained solutions, as a result of conversion to real domain and application of the formula of conversion to the strain vector, give solutions of the classical equations of Lame. These solutions have the nontrivial structure and some arbitrariness.

Thus, the next step to simplification of checkout of numerical calculations by means of expansion of a database of exact solutions is made.

Список литературы

[1] Chirkunov Yu.A. *Group Analysis of Linear and Quasilinear Equations.* Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, 2007. 362 p. [in Russian]

[2] Chirkunov Yu.A. *Group foliation of the Lame equations of the classical dynamical theory of elasticity* // Mechanics of solids, Vol. 44, No. 3, 2009. PP. 372–379.

[3] Chirkunov Yu.A. and Khabirov S.V. *Elements of Symmetry Analysis of the Differential Equations of Continuum Mechanics.* Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 2012. 659 p. [in Russian]

Нелокальная краевая задача для бигармонического оператора в многосвязной области

Г.Е. Берикханова, А.А. Анияров

Семипалатинский государственный педагогический институт, Семей, Казахстан

e-mail: aniyarov.a@gmail.com

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Delta^2 W(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega,$$

с граничными условиями

$$W(x,y)|_{\partial\Omega} = h(x,y)|_{\partial\Omega}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W(x,y)\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} h(x,y)\right|_{\partial\Omega}$$

где $\Omega = \left\{x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, $f(x,y) \in L_2(\Omega)$, $W(x,y) \in W_2^4(\Omega)$, $h(x,y)$ - произвольная четыре раза дифференцируемая функция в $W_2^4(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{n}}$ - производная по внешней нормали на границе.

Теорема 1 *Для любого непрерывного в смысле L_2 оператора L, отображающего пространство $L_2(\Omega)$ во множество функции $\tilde{W}_2^4(\Omega_0)$, нелокальъная внутренне краевая задача*

$$\Delta^2 W(x,y) = f(x,y), \Omega_0 \tag{1}$$

$$W(x,y)|_{\partial\Omega} - L\left(\Delta^2 W\right)(x,y)\big|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\left.\frac{\partial W(x,y)}{\partial \overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega} - \left.\frac{\partial L\left(\Delta^2 W\right)(x,y)}{\partial \overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\alpha_1(W) = 2\alpha_1\left(L\Delta^2 W\right)$$

$$\alpha_i(W) = \alpha_i\left(L\Delta^2 W\right),\ (i = 2,3,4,5,6) \tag{2}$$

имеет единственное устойчивое в смысле L_2 решение из $\tilde{W}_2^4(\Omega_0)$ при всех правых частях $f(x,y) \in L_2(\Omega)$.

Обратно, если уравнение (1) с некоторыми дополнительными условиями при всех правых частях $f(x,y)$ из $L_2(\Omega)$ имеет единственное устойчивое в смысле L_2 решение из $\tilde{W}_2^4(\Omega_0)$ то найдется непрерывный в смысле L_2 оператор L, отображающий пространство $L_2(\Omega)$ во множество функции $\tilde{W}_2^4(\Omega_0)$, такой что дополнительные условия эквивалентны краевым условиям вида () с оператором L.

Таким образом, теорема 1 дает полное описание все возможных корректно разрешимых нелокальных краевых для неоднородного бигармонического уравнения в проколотой области. В качестве примеров укажем следующие краевые задачи.

Пример 1. При любых $\alpha(x,y),\ \beta(x,y),\ \gamma(x,y),\ \theta(x,y),\ \sigma(x,y),\ \varsigma(x,y)$ из $L_2(\Omega)$ следующая нелокальная внутренне краевая задача

$$\Delta^2 W(x,y) = f(x,y), \Omega_0$$

$$W(x,y)|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\left.\frac{\partial W(x,y)}{\partial \overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\alpha_i(W) = \int\int\limits_{\Omega} \alpha_i(x,y)\Delta^2 W(x,y)dxdy,\ (i = 1,2,3,4,5,6)$$

корректна разрешима во всем пространстве $L_2(\Omega)$. Если к тому же функций $\alpha_i(x,y)$, $(i = 1,2,3,4,5,6)$ являются бигармоническими функциями, то получим нелокальные краевые задачи.

Пример 2. Пусть $\alpha_i(x,y)$, $(i = 1,2,3,4,5,6)$ бигармонические в круге Ω функций. Тогда следующая нелокальная краевая в проколотой области Ω_0 задача

$$\Delta^2 W(x,y) = f(x,y), \Omega_0$$

$$W(x,y)|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\left.\frac{\partial W(x,y)}{\partial \overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\alpha_i(W) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \overline{n}}\Delta W(x,y)\,\alpha_i(x,y) - \Delta W(x,y)\,\frac{\partial \alpha_i(x,y)}{\partial \overline{n}}\right)\right] ds,$$

$(i = 1,2,3,4,5,6)$, корректна разрешима во всем пространстве $L_2(\Omega)$.

Нелокальные краевые задачи из примера 2 являются граничными задачами, так как последние шесть условий связывают значения решения на внешней границе $\partial\Omega$ со значениями на внутренней точечной границе $\{(x_0,y_0)\}$. Другой класс задач можно получать, если выбирать функции $\alpha_i(x,y)$, $(i = 1,2,3,4,5,6)$ бигармоническими в проколотой области Ω_0 с нулевыми данными Дирихле на внешней границе. В этом случае возникают локальные краевые задачи.

Оператор, соответствующий задаче (1)-(2), обозначим через A_L. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора A_L.

Теорема 2 *Если L - линейный непрерывный оператор из теоремы 1, то резольвента оператора A_L имеет вид*

$$(A_L - \lambda I)^{-1} f(x,y) = (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y) -$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) - \right.$$

$$\left. - L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \right] ds_{\xi,\eta} -$$

$$- \sum_{i=1}^{6} \alpha_i \Big(L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y) \Big) A_L (A_L - \lambda I)^{-1} T_i(x,y)$$

Согласно теореме 2 для вычисления резольвенты на произвольном элементе f достаточно уметь вычислять значения резольвенты на конкретных функциях $\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}$ при $(\xi,\eta) \in \partial\Omega$ и $G(x,y,x_0,y_0)$, $\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \eta}$, $\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)$.

В теореме 2 вычислена резольвента нелокальной внутренне краевой задачи для бигармонического уравнения Гельмгольца в проколотой области. Однотипная запись граничных условий для сплошной и проколотой областей облегчает вычисление резольвент при исследований нелокальных внутренне краевых задач для уравнений в проколотой области. Эти задачи не являются самосопряженными, поэтому теорема 2 обобщает известные результаты о резольвентах на случай нелокальных несамосопряженных краевых задач. Формулы резольвент самосопряженных расширений симметрических операторов приводились во многих работах [1], [2].

Резольвента нелокальной внутренне краевой задачи из примера 1 имеет следующее представление

$$\left(A_{\vec{R}} - \lambda I\right)^{-1} f(x,y) = (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y) -$$

$$- \sum_{i=1}^{6} A_{\vec{R}} \left(A_{\vec{R}} - \lambda I\right)^{-1} T_i(x,y,x_0,y_0) \iint\limits_{\partial\Omega} \alpha_i(x,y) \Big(A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y) \Big) dxdy$$

где $\alpha_i(x,y)$, $(i = 1,2,3,4,5,6)$, - произвольные функции из $L_2(\Omega)$. $\vec{R} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$. Оператор $A_{\vec{R}}$ соответствует нелокальной внутренне краевой задаче из примера 1. Заметим, что операторная разность $\left(A_{\vec{R}} - \lambda I\right)^{-1} - (A_0 - \lambda I)^{-1}$ представляет собой шестимерный оператор. Таким образом, нам удалось построить конечномерное возмущение краевой задачи Дирихле для бигармонического уравнения.

Список литературы

[1] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* - М.: Наука, 1969. – 528 с.

[2] Плеснер А.И. *Спектральная теория линейных операторов.* - М.: Наука, 1965. – 624 с.

[3] Берикханова Г.Е., Кангужин Б.Е. *Резольвенты конечномерных возмущенных корректных задач для бигармонического оператора* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 1. С. 17-34.

[4] Берикханова Г.Е. *Краевая задача для неоднородного бигармонического уравнения в проколотой области* // Вестник КарГУ. Серия математика. 2010. № 2. С. 12-23.

[5] Кангужин Б.Е., Анияров А.А. *Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотом круге* // Математические заметки. 2011. Т. 89, № 6. С. 856-867.

Об усреднении и равномерной резольвентной сходимости для волновода с часто осциллирующей границей

Д.И. Борисов

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,

Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы, Уфа, Россия

e-mail: borisovdi@yandex.ru

Пусть $x=(x_1,x_2)$ – декартовы координаты в R^2, ε – малый положительный параметр, $\eta=\eta(\varepsilon)$ – неотрицательная ограниченная функция, $b=b(t)$ – неотрицательная 1-периодическая функция из $C^2(R)$. Положим

$$\Omega_0:=\{x:0<x_2<d\},\quad \Omega_\varepsilon:=\{x:\eta(\varepsilon)b(x_1\varepsilon^{-1})<x_2<d\},$$

где $d>0$ – некоторая константа, и пусть

$$\Gamma:=\{x:x_2=d\},\quad \Gamma_0:=\{x:x_2=0\},\quad \Gamma_\varepsilon:=\{x:x_2=\eta(\varepsilon)b(x_1\varepsilon^{-1})\}.$$

Через $A_{ij}=A_{ij}(x)$, $A_j=A_j(x)$, $A_0=A_0(x)$, $i,j=1,2$, обозначим функции, заданные на Ω_0, такие что $A_{ij}\in W^2_\infty(\Omega_0)$, $A_j\in W^1_\infty(\Omega_0)$,

$A_0 \in L_\infty(\Omega_0)$. Функции A_j предполагаются комплекснозначными, а функции A_{ij}, A_j – вещественными. Предполагается выполненным следующее условие эллиптичности

$$A_{ij} = \overline{A}_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} z_i \overline{z}_j \geqslant c_0(|z_1|^2 + |z_2|^2), \quad x \in \Omega_0, \quad z_j \in C.$$

Через $a = a(x)$ обозначим вещественную функцию, заданную на $\{x : 0 < x_2 < \delta\}$ для малого фиксированного δ и будем считать, что $a \in W^1_\infty(\{x : 0 < x_2 < d\})$.

В работе изучаются вопросы усреднения для оператора

$$\mathcal{H}_\varepsilon := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{2} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A_j} + A_0 \quad \text{в} \quad L_2(\Omega_\varepsilon)$$

с краевым условием Дирихле на Γ. На Γ_ε задается условие Дирихле или третье краевое условие

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu^\varepsilon} + a\right) u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial \nu^\varepsilon} = -\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} \nu_j^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{2} \overline{A}_j \nu_j^\varepsilon,$$

где $\nu^\varepsilon = (\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon)$ – внешняя нормаль к Γ_ε.

Основной результат работы состоит в следующем. Для различных соотношений между периодом осцилляций ε и амплитудой осцилляций $\eta(\varepsilon)$, а также для различных краевых условий на осциллирующей границе выписаны усреднённые операторы. Во всех случаях показано, что имеет место равномерная резольвентная сходимость и получены оценки скорости сходимости.

Работа выполнена при частичной поддержке Минобрнауки РФ (соглашение 14.B37.21.0358) и РФФИ (грант № 13-01-00081).

Об аналоге теоремы Орлова для систем дифференциальных уравнений второго порядка

И.Н. Бройтигам, Т.А. Сафонова
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия
e-mail: irinadolgih@rambler.ru, tanya.strelkova@rambler.ru

Предположим, что
$a)$ $P(x)$ - невырожденная матриц-функция на множестве $I := [1; +\infty)$,
$b)$ $P^{-1}(x) = (p_{ij}(x))$ и $Q(x) = (q_{ij}(x))$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ - эрмитовы матриц-функции порядка n, $n \in \mathbb{N}$, определены и измеримы на I,
$c)$ функции $q_{ij}(x)$ и $p_{ij}(x)$ локально суммируемы на I $(q_{ij}, p_{ij} \in L^1_{loc}(I))$.
Перечисленные условия $a) - c)$ позволяют определить квазипроизводные заданной вектор-функции $y = (y_1(x), y_2(x), \ \dots, y_n(x))^t$ (t - символ транспонирования), $y \in AC_{loc}(I)$, посредством матриц P и Q, полагая

$$y^{[0]} := y, \quad y^{[1]} := Py', \quad y^{[2]} := (y^{[1]})' - Qy,$$

и квазидифференциальное выражение, полагая

$$l[y](x) := -y^{[2]}(x) = -(Py')' + Qy, \qquad x \in I.$$

(при определении $y^{[2]}$ мы предполагаем, что $y^{[1]} \in AC_{loc}(I)$).

Выражение $l[y]$ определяет минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых n-компонентных вектор-функций $\mathcal{L}^2_n(I)$.

Данная работа посвящена установлению аналога теоремы С.А. Орлова (см.[1]) для уравнения вида

$$l[y](x) := \lambda y, \tag{1}$$

где $\lambda \in C$.

Отметим, что уравнение 1 равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\mathbf{y}' = (F - \Lambda)\mathbf{y}, \tag{2}$$

где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_1^{[1]}, y_2^{[1]}, \dots, y_n^{[1]})^t$, $F = \begin{pmatrix} O & P^{-1} \\ Q & O \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} O & O \\ \lambda I & O \end{pmatrix}$,
а O и I - нулевая и единичная матрицы порядка n соответственно.
Далее, предположим, что
$d)$ матрицы $P^{-1}(x)$ и $Q(x)$ представляются в виде:

$$P^{-1}(x) = x^{-\nu-2}(P_0 + P_1(x)), \quad Q(x) = x^{\nu}(Q_0 + Q_1(x)),$$

где $\nu > 0$, P_0 и Q_0 - числовые матрицы, $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ удовлетворяют условиям

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^r(x)}{x}|P_1(x)| < +\infty, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln^r(x)}{x}|Q_1(x)| < +\infty,$$

а $r+1$ - максимальная кратность характеристического корня числовой матрицы $A = \begin{pmatrix} 1/2I & P_0 \\ Q_0 & -(\nu+1/2)I \end{pmatrix}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема *Пусть матрицы $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют условиям $a)-d)$. Тогда максимальное число линейно независимых решений уравнения 1, принадлежащих $\mathcal{L}_n^2(I)$, равно числу корней многочлена $\mathcal{F}(z,\nu) := \det(A - zI)$, лежащих в области $Rez < 0$, и не зависит от λ.*
При этом спектр любого самосопряжённого расширения оператора L_0 является дискретным.

Пусть, например, $P(x)$ и $Q(x)$ - матрицы размерности 2×2 и

$$P_0 = \begin{pmatrix} p_{11}^0 & p_{12}^0 \\ p_{12}^0 & p_{22}^0, \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} q_{11}^0 & q_{12}^0 \\ q_{12}^0 & q_{22}^0 \end{pmatrix}.$$

Тогда многочлен $\mathcal{F}(z,\nu)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(z,\nu) = \left[\left(z+\frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2\right]^2 - \left[\left(z+\frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2\right] \times$$
$$(p_{22}^0 q_{22}^0 + \overline{p_{12}^0} q_{12}^0 + p_{11}^0 q_{11}^0 + p_{12}^0 \overline{q_{12}^0}) + \det P_0 \times \det Q_0.$$

Отметим, что аналогичные результаты в скалярном случае были получены в [2] и [3].

Список литературы

[1] Орлов С.А. *Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов* // Доклады АН СССР. 1953. Т. 92, № 3. С. 483-486.

[2] Мирзоев К.А. *О теореме Орлова об индексе дефекта дифференциальных операторов* // Доклады РАН. 2001. Т. 380, № 5. С. 591-595.

[3] Долгих И.Н., Мирзоев К.А. *Индексы дефекта и спектр самосопряжённых расширений некоторых классов дифференциальных операторов* // Математический сборник. 2006. Т. 197, № 4. С. 53-74.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору К.А. Мирзоеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

Второй автор поддержан РФФИ (гранты №№ 11-01-00790-а и 12-01-31491-мол а) и Минобрнауки РФ (грант № 1.5711.2011).

Универсальный нелинейный анализ и его приложения

А.Д. Брюно

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,

Москва, Россия

e-mail: abruno@keldysh.ru

Разработан новый нелинейный анализ, основанный на степенной геометрии [1, 2, 3]. Он позволяет вычислять локальные и асимптотические разложения решений уравнений трёх классов: (A) алгебраических, (B) обыкновенных дифференциальных и (C) в частных производных, а также — систем таких уравнений.

Основные концепции и алгоритмы — общие для всех классов уравнений. Вычисление асимптотических разложений решений состоит из трех следующих шагов (мы описываем их для одного уравнения $f = 0$).

1. Выделяются укороченные уравнения $\hat{f}_j^{(d)} = 0$ с помощью граней выпуклого многогранника $\Gamma(f)$, который является обобщением многогранника Ньютона. Первый член разложния решения исходного уравнения $f = 0$ — это решение соответствующего укороченного уравнения $\hat{f}_j^{(d)} = 0$.

2. Находятся решения укороченного уравнения $\hat{f}_j^{(d)} = 0$, являющегося квазиоднородным. Используя степенные и логарифмические преобразования переменных, можно привести уравнение $\hat{f}_j^{(d)} = 0$ к такому виду, что оно может быть решено. Среди его найденных решений надо выбрать подходящие, которые дают первые члены асимптотических разложений.

3. Вычисляется хвост асимптотического разложения. Каждый член разложения является решением линейного уравнения, которое может быть выписано и решено.

Приложения. *Класс A.* 1. Множества устойчивости многопараметрических задач [12, 13]. *Класс B.* 2. Асимптотики и разложения решений уравнений Пенлеве [3]. 3. Периодические движения спутника вокруг его центра масс, движущегося по эллиптической орбите [4]. 4. Новые свойства движений волчка|[5]. 5. Семейства периодических решений ограниченной задачи трёх тел и распределение астероидов [6, 7]. 6. Интегрируемость системы ОДУ [8]. *Класс С.* 7. Пограничный слой на игле [9]. 8. Эволюция турбулентного течения [10, 11].

Список литературы

[1] Брюно А.Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1979.

[2] Брюно А.Д. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* М.: Физматлит, 1998.

[3] Брюно А.Д., Горючкина И.В. // Труды ММО. 2010. Т. 71. С. 6–118.

[4] Брюно А.Д. // Космические исследования. 2002. Т. 40. №3. С. 295–316.

[5] Брюно А.Д. // ПММ. 2007. Т. 71. №2. С. 192–227.

[6] Брюно А.Д., Варин В.П. // ПММ. 2007. Т. 71. №6. С. 1034–1066.

[7] Брюно А.Д., Варин В.П. // Астрономический вестник. 2011. Т. 45. №4. С. 451–457.

[8] Брюно А.Д., Еднерал В.Ф. // ДАН. 2009. Т. 424. №3. С. 299–303.

[9] Брюно А.Д., Шадрина Т.В. // Труды ММО. 2007. Т. 68. С. 224–287.

[10] Bruno A.D. // Ukrainean Mathematical Bulletin. 2008. Vol. 5. №1. P. 32–45.

[11] Брюно А.Д. // Современные проблемы математики и механики. Математика. Динамические системы. МГУ. 2009. Т. 4. №2. С. 24–54.

[12] *Брюно А.Д., Батхин А.Б.* // ДАН, 2011. Т. 440, № 3. С. 295–300.

[13] *Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П.* // ПММ, 2012. Т. 76, № 1. С. 80–133.

Многопараметрические обратные спектральные задачи с упорядоченными спектральными данными.

Н.Ф. Валеев
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия
e-mail: valevnf@mail.ru

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается m -параметрический линейный пучок компактных и самосопряженных операторов вида:

$$B(\vec{p}) = B_0 + p_1 B_1 + ... + p_m B_m, \quad \vec{p} \in R^m. \tag{1}$$

Пусть $\lambda_1^+(\vec{p}) \geq \lambda_2^+(\vec{p}) \geq ... \geq \lambda_j^+(\vec{p}) \geq ... \geq 0$ положительные собственные значения, занумерованные с учетом кратностей в порядке убывания, а $\lambda_1^-(\vec{p}) \leq \lambda_2^-(\vec{p}) \leq ... \leq \lambda_k^-(\vec{p}) \leq ... \leq 0$ отрицательные собственные значения оператора $B(\vec{p})$, занумерованные с учетом кратностей в порядке возрастания.

Для оператора $B(\vec{p})$ изучается следующая постановка обратной спектральной задачи (далее МПОСЗ).

Пусть даны m вещественных чисел

$$\mu_1^- < \mu_2^- < ... < \mu_{k_1}^- < 0 < \mu_{k_2}^+ < ... < \mu_3^+ < \mu_2^+ < \mu_1^+,$$

и m натуральных чисел $1 \leq l_1 < l_2 < ... < l_{k_1}, 1 \leq s_1 < s_2 < ... < s_{k_2}$, $k_1 + k_2 = m$. Требуется найти $\vec{p} \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$\lambda_{l_i}^-(\vec{p}) = \mu_{l_i}^-, \quad i = 1, 2, ..., k_1,$$

$$\lambda_{s_j}^+(\vec{p}) = \mu_{s_j}^+, \quad j = 1, 2, ..., k_2.$$

Таким образом, в данной постановке МПОСЗ спектральными данные состоят не только m -чисел, но и их порядковых номеров.

В работе рассматриваются условия существования решений МПОСЗ и их изолированности.

Введем в рассмотрение функционал:

$$f(\vec{p}, \vec{\mu}) = \sum_{i=1}^{k_1} (\lambda_{l_i}^-(\vec{p}) - \mu_i^-)^2 + \sum_{i=1}^{k_2} (\lambda_{s_i}^+(\vec{p}) - \mu_i^+)^2$$

и сформулируем теорему существования.

Теорема 1 *Пусть выполнено условие*

$$\lim_{\|\vec{p}\| \to \infty} f(\vec{p}, \vec{\mu}) = \infty, \tag{2}$$

тогда обратная спектральная задача имеет решение.

Заметим, что условие (2) является необходимым и достаточным для существования вещественно-изолированного решения.

Достаточное условие роста функционала $f(\vec{p},\vec{\mu})$ на бесконечности дается в следующем утверждении.

Теорема 2 *Пусть для любого* $\|\vec{p}\| = 1$

$$Ker(\sum_{k=1}^{m} p_k B_k) = \{0\}, \qquad (3)$$

Тогда для каждого j *найдется такое положительное число* σ_j *, что*

$$|\lambda_j(\vec{p})| = \sigma_j \|\vec{p}\|(1 + o(1))$$

П.2. Рассмотрим МПОСЗ для оператора Штурма - Лиувилля:

$$-y''(x,\lambda) + \lambda^2 q(x,\vec{p}) y(x,\lambda) = 0, \qquad (4)$$

с потенциалом вида $q(x,\vec{p}) = \sum_{k=1}^{m} p_k q_k(x)\, , q_k(x) \in C[0,1]$ и граничными условиями Дирихле $y(0) = y(1) = 0$.

Теорема 3 *Пусть при каждом* $\vec{p} \in \boldsymbol{C}^m, ||\vec{p}|| = 1$ *, выполнено*

$$mes\{x \in (0,1) \| \sum_{k=1}^{m} p_k q_k(x) = 0\} = 0.$$

Тогда у МПОСЗ для оператора (4) существует решение.

Список литературы

[1] *Patrick J. Browne, B. D. Sleeman,* Inverse multiparameter eigenvalue problems for matrices , Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (1988) 31, 151-155

[2] *Volkmer H.* Multiparameter eigenvalue problems and expansion theorems.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. Lect. Notes Math. № 356. 1988.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение 14.B37.21.0358) и РФФИ (гранты №№ 12-01-00567-а и 11-01-97009-р поволжье а).

Об одной спектральной характеристике конечномерных полиномиальных операторных пучков

Л.Р. Валеева, Э.А. Назирова
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
e-mail: ellkid@gmail.com

В работе рассматривается новая спектральная характеристика конечномерных пучков [1] вида:

$$A(\mu) = A_0 + \mu A_1 + ... + \mu^k A_k : E^n \to E^n \tag{1}$$

Множество пучков вида (1) обозначим M_k. Пусть $\sigma(A(\mu))$ – спектр пучка $A(\mu)$. В работах [2] и [4] было введено понятие нормального ранга пучка операторов:

$$nrank(A(\mu)) = \max_{\mu \in \overline{\mathbb{C}}} \{rank A(\mu)\} \tag{2}$$

В работе [5] введена новая спектральная характеристика для линейных пучков вида (1) при $k = 1$, называемая квазирегулярным спектром пучка $A(\mu)$. В нашем случае можно ввести аналогичное понятие и для полиномиального пучка вида (1).

Назовем множество

$$\sigma_q(A(\mu)) = \bigcap_{B(\mu) \in M_k} \{\lim_{\epsilon \to 0} \sigma(A(\mu) + \epsilon B(\mu))\}$$

квазирегулярным пучком для $A(\mu)$.

Отметим, что в случае, если $nrank(A(\mu)) = n$, пучок $A(\mu)$ называется регулярным. Можно показать, что в этом случае $\sigma_q(A(\mu)) = \sigma(A(\mu))$. В случае же когда $\sigma_q(A(\mu)) < n$, пучок называется иррегулярным и вообще говоря $\sigma_q(A(\mu)) \neq \sigma(A(\mu))$. Исследованию квазиспектра таких иррегулярных пучков и его основных свойств и посвящен данный доклад.

Список литературы

[1] *Гантмахер Ф. Р.*, Теория матриц. — 5-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 560 с.

[2] *M. E. Hochstenbach, A. Muhic, B. Plestenjak* On linearizations of the quadratic two-parameter eigenvalue problems, Linear Algebra Appl. 436 (2012) 2725-2743.

[3] *A. Muhic, B. Plestenjak* On the singular two-parameter eigenvalue problem, Electron. J. Linear Algebra 18 (2009) 420-437.

[4] *В. Н. Кублановская* К решению многопараметрических задач алгебры. Вычисление регулярного спектра полиномиальной матрицы. Зап. научн. сем. ПОМИ, 2007,(т.346), с. 131–148

[5] *Н.Ф.Валеев* Об одном спектральном свойстве иррегулярных пучков. Уфимский математический журнал. Т.4, №4 (2012), 45-53.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 12-01-00567-а).

Averaging for Volterra lattice and Cauchy problems

V.L. Vereschagin, B.I. Suleimanov
Institute of Mathematics Ufa Sci. Centre RAS

For one-phase solutions to Volterra lattice we develop appropriate slow modulation equations. We examine asymptotic as time tends to infinity picture of evolution of solutions to Cauchy problem for the Volterra lattice. We also study transition regimes.

Volterra lattice is a well-known difference-differential equation on function $u_n(t)$:

$$\frac{du_n}{dt} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \tag{1}$$

where $n \in \mathbf{Z}$, $t \in \mathbf{R}$ are variables. There exist double periodic solutions to (1) that can be written in terms of Jacobi elliptic functions:

$$u_n = 2(r_1 - r_2)\sqrt{\frac{r_3}{r_2}} dnz dn(z+U) + r_2 + r_3 - r_4, \tag{2}$$

where $z = Un + 4t + const$, U, r_j are parameters, dn is the Jacobi function. The Whitham system specifies evolution of parameters r_2, r_3, r_4 in “slow” variables X, T so that

$$\frac{dr_j}{dT} = V(r_j)\frac{dr_j}{dX}, \; j = 2, 3, 4, \tag{3}$$

$$V(E) = -\frac{1}{2}(r_2 + r_3 + r_4) + \frac{F_2 - E^2 F_0}{F_1 - EF_0}, \tag{4}$$

where

$$F_n = \int_0^1 \left(\frac{r_2 - c^2 r_1 x^2}{1 - c^2 x^2}\right)^n \frac{dx}{\sqrt{G(x)}}, \; n = 1, 2,$$

are complete elliptic integrals, $G(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$, $k^2 = \frac{r_4(r_3-r_2)}{r_3(r_4-r_2)}$. The equations (3) have self-similar solutions that can be found via certain algebraic procedure. We use these solutions to parametrize functions (2) and so formulate analogue of Gurevich-Pitayevsky hypothesis on asymptotic description for the evolution of step-like initial profile for the Volterra lattice. We also analyze matching conditions in the transition zone near value $k^2 = 0$ and point out that the conditions lead to some variant of the fourth Painlevé equation.

Симметрийный способ построения решений нелинейных гиперболических уравнений

Ю.Г. Воронова [1], А.В. Жибер [2]

[1] *Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия*

e-mail: mihaylovaj@mail.ru

[2] *Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия*

e-mail: zhiber@mail.ru

В работе [1] рассматривалась зависимость решения задачи Гурса для экспоненциальной системы уравнений

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x \partial y} + \sum_{k=1}^{r} a_{ik} e^{u^k} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \tag{1}$$

$$u^i(x,y) - ln\left(\tau_i \phi^i(x) \bar{\phi}^i(y)\right) = 0 \;\; \text{при} \;\; xy = 0, \tag{2}$$

a_{ik} –элементы матрицы Картана простой алгебры Ли,
от параметров $\tau_1, \dots, \tau_r$, входящих в краевые условия (2). Используя высшие симметрии системы уравнений (1) данная задача сводится к замкнутой системе с конечным числом динамических переменных. В статье [2] используя симметрийный подход построено точное решение задачи Гурса для скалярных гиперболических уравнений лиувиллевского типа.

В настоящей работе симметрийный метод используется для построения общего решения системы уравнений

$$u_{xy} = e^{u+v} u_y, \;\; v_{xy} = -e^{u+v} v_y. \tag{3}$$

С использованием высших симметрий задача интегрирования системы уравнений (3) сводится к следующей динамической системе

$$\begin{cases} \tau\frac{\partial u}{\partial \tau} = \psi_1'(x) + u_x\psi_1(x) - \psi_2(x) = \frac{1}{v_y}\bar{\psi}_1'(y) + u_y\bar{\psi}_2(y) + 2\bar{\psi}_1(y), \\ \tau\frac{\partial v}{\partial \tau} = v_x\psi_1(x) + \psi_2(x) = -\frac{1}{u_y}\bar{\psi}_1'(y) + v_y\bar{\psi}_2(y) - 2\bar{\psi}_1(y), \\ \tau\frac{\partial u_y}{\partial \tau} = e^{u+v}u_y\psi_1(x), \\ \tau\frac{\partial v_y}{\partial \tau} = -e^{u+v}v_y\psi_1(x), \\ \tau\frac{\partial u_x}{\partial \tau} = e^{u+v}\frac{1}{v_y}\bar{\psi}_1'(y) + e^{u+v}u_y\bar{\psi}_2(y), \\ \tau\frac{\partial v_x}{\partial \tau} = e^{u+v}\frac{1}{u_y}\bar{\psi}_1'(y) - e^{u+v}v_y\bar{\psi}_2(y), \end{cases}$$

здесь τ –групповой параметр.

Построенное явное решение позволяет получить точное решение задачи Гурса для системы уравнений (3).

Список литературы

[1] Лезнов А. Н., Шабат А. Б. *Условия обрыва рядов теории возмущений* // Интегрируемые системы БФАН СССР. Уфа. 1982. С. 34–44.

[2] Воронова Ю. Г. *Построение решения задачи Гурса для нелинейных гиперболических уравнений с интегралами первого и второго порядка* // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых учёных. БГУ. Уфа. 2012. Т. 1. С. 51–58.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-97005-р-поволжье-а, №13-01-00070-а).

Переход к операторным уравнениям в задаче о построении языков Арнольда непрерывных динамических систем

А.А. Вышинский

Сибайский институт (филиал) БашГУ, Сибай, Россия

e-mail: sanek3484@gmail.com

Для многих динамических систем, зависящих от параметров, актуальными являются вопросы поиска значений параметров, при которых система имеет периодические решения периода T.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = A(\alpha,\, \beta)x + a(x,\, t,\, \alpha,\, \beta), \quad x \in R^2\,, \tag{1}$$

где $\alpha,\, \beta \in R^1$, $A(\alpha,\, \beta)$ — линейный оператор, $a(x,\, t,\, \alpha,\, \beta)$ — нелинейный оператор, удовлетворяющий условиям

$$\|a(x,\, t,\, \alpha,\, \beta)\| = o(\|x\|).$$

Кроме того $a(x,\, t+T,\, \alpha,\, \beta) \equiv a(x,\, t,\, \alpha,\, \beta)$.

При $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ матрица A имеет чисто мнимые собственные значения $\pm i\omega_0$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим также операторное уравнение

$$x = U(x,\, \alpha,\, \beta,\, T), \quad x \in R^2. \tag{2}$$

Здесь $U(x,\, \alpha,\, \beta,\, T)$ — оператор сдвига по траекториям системы (1) за время от 0 до T. Неподвижные точки оператора U определяют начальные значения периодических решений системы (1). Циклы периода m определяют начальные точки периодических решений системы (1) периода mT.

Уравнение (2) представимо в виде

$$x = B(\alpha,\, \beta)x + b(x,\, \alpha, \beta), \tag{3}$$

где $B(\alpha,\, \beta) = e^{TA(\alpha,\, \beta)}$, $b(x,\, \alpha, \beta) = \int\limits_0^T e^{(T-s)A(\alpha,\, \beta)} a[x(s),\, s,\, \alpha,\, \beta]\, ds$, $x(t)$ — решение уравнения (1) при начальном условии $x(0) = x$.

Подробное описание построения языков Арнольда для уравнения (3) получено в [2], но лишь в случае когда матрица B имеет специальный вид. Для перехода к удобной форме уравнения (3) сделаем замену переменных $y = Sx$. Относительно y получим

$$y = D(\alpha,\, \beta)y + d(y,\, \alpha, \beta).$$

Здесь $D = S^{-1}BS$, $d = S^{-1}b(S^{-1}y,\, \alpha,\, \beta)$. Матрица S зависит от параметров α, β и имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \gamma & \dfrac{\delta}{\gamma} \\ \gamma\dfrac{2\xi - 1}{2\delta} & \dfrac{2\xi + 1}{2\gamma} \end{pmatrix},$$

где $\xi^2 = \dfrac{b_{12}b_{21}}{4b_{12}b_{21} + (b_{11} - b_{22})^2}$, $\delta = \dfrac{\xi(b_{22} - b_{11})}{-2b_{21}}$,

$\gamma = \sqrt{-\xi\dfrac{2\delta(2\xi+1)(b_{11} - b_{22}) - 2b_{21}\delta^2 + b_{12}(2\xi+1)^2}{2\sqrt{-b_{12}b_{21}}}}$, $b_{ij} = b_{ij}(\alpha,\, \beta)$ — коэффициенты матрицы B.

Отметим здесь, что так как матрица B при α близких к α_0 и β близких к β_0 имеет комплексные собственные значения, число $\dfrac{b_{12}b_{21}}{4b_{12}b_{21}+(b_{11}-b_{22})^2}$ неотрицательно. Число ξ, в свою очередь, можно выбирать как положительным, так и отрицательным. Знак числа ξ следует выбирать таким, чтобы подкоренное выражение при вычислении γ было неотрицательным.

Перейдем также к новым параметрам $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, определяемым с помощью следующих соотношений

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha} = \sqrt{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} - 1, \\ \widetilde{\beta} = \dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{b_{11}+b_{22}}{2(\sqrt{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}-1)} - \dfrac{\omega_0 T}{2\pi}. \end{cases}$$

После проведенных преобразований матрица D имеет вид

$$D(\widetilde{\alpha},\,\widetilde{\beta}) = (1+\widetilde{\alpha})\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 T + 2\pi\widetilde{\beta}) & -\sin(\omega_0 T + 2\pi\widetilde{\beta}) \\ \sin(\omega_0 T + 2\pi\widetilde{\beta}) & \cos(\omega_0 T + 2\pi\widetilde{\beta}) \end{pmatrix},$$

что позволяет применить схему построения языков Арнольда, предложенную в [2].

Список литературы

[1] Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* - Ижевск, 2000. – 400 с.

[2] Юмагулов М.Г. *Локализация языков арнольда дискретных динамических систем* // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 2, № 4. С. 12-24.

О полноте системы корневых вектор-функций одного класса эллиптических операторов

М.Г. Гадоев, С.А. Исхоков
Политехнический институт, Мирный, Россия
e-mail: gadoev@rambler.ru
Институт математики АН Респ. Таджикистан, Душанбе, Таджикистан
e-mail: sulaimon@mail.ru

Спектральные асимптотики вырождающихся эллиптических операторов, далеких от самосопряженных, изучались в работах [1-6] в ситуации, когда собственные значения (с.з.) оператора делятся на две серии, одна из которых лежит вне угла $|\,arg\,\varphi| \le \varphi,\ \varphi < \pi$, а другая локализуется к лучу $R_+ = (0, +\infty)$.

В данной работе исследуются некоторые спектральные свойства одного класса несамосопряженных вырожденно-эллиптических операторов A с матричными коэффициентами в пространстве $\mathcal{H}^l = L_2(0,1)^l$, ассоциированных с некоэрцитивными полуторалинейными формами.

Рассмотрены такие вопросы, как полнота системы корневых вектор-фукций оператора A в $\mathcal{H}^l$, описание области определения, оценки резольвенты и асимптотика распределения с.з. оператора A.

В пространстве $L_2(0,1)^l$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{A}[u,v] = \sum_{i,j=0}^{m} \int_0^1 < p_i(t)a_{ij}(t)u^{(i)}(t), p_j(t)v^{(j)}(t) >_{\mathbf{C}^l} dt. \tag{1}$$

Здесь

$$p_i(t) = \{t(1-t)\}^{\theta+i-m} \quad (i = \overline{0,m}),\ \theta < m,\ u^{(i)}(t) = \frac{d^i u(t)}{dt^i},$$

$$a_{ij} \in L_\infty(J;\ End\,\mathbf{C}^l) \quad (i,j = \overline{0,m}),$$

где $J = (0,1)$. Символ $<\,,\,>_{\mathbf{C}^l}$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{C}^l$.

Обозначим через $\mathcal{H}_+$ замыкание $C_0^\infty(J)$ по норме

$$|\varphi|_+ = (\int_J p_m^2(t)|\varphi^{(m)}(t)|^2 dt + \int_J |\varphi(t)|^2 dt)^{1/2}.$$

Положим: $\mathcal{H} = L_2(J), \quad \mathcal{H}^l = \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H},\ \mathcal{H}_+^l = \mathcal{H}_+ \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_+ \quad (l-$раз).

За область определения формы (1) примем пространство $\mathcal{H}_+^l$.

Предположим, что $a_{mm}(t) \in C^m(\overline{J};\ End\,\mathbf{C}^l)$ и матрица $a(t) = a_{mm}(t)$ при каждом $t \in \overline{J}$ имеет l различных ненулевых собственных значений $\mu_1(t), ..., \mu_l(t)$.

Пусть выполнены следующие условия:

$$|a_{ij}(t)| \leq Mt^{\delta}(1-t)^{\delta} \quad (i+j<2m), \quad \delta>0, \tag{2}$$
$$\mu_j(t) \notin S \qquad (j=\overline{1,l},\, t\in \bar{J}),$$

где $S \subset \mathbf{C}$ - некоторый замкнутый угол с началом в нуле.

При выполнении перечисленных выше условий имеет место следующая теорема (см. [7]):

Теорема 1. *Существует единственный замкнутый оператор* A *в* $\mathcal{H}^l$*, обладающий следующими свойствами:*

(i) $\qquad D(A) \subset \mathcal{H}^l_+,\ (Au,v)=\mathcal{A}[u,v] \quad (\forall u\in D(A),\, v\in \mathcal{H}^l_+),$

(ii) *при некотором* $z_0 \in \mathbf{C}$ *существует непрерывный обратный*

$$(A-z_0E)^{-1}\,:\,\mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l.$$

Пусть A такой же оператор, как в условиях $(i),(ii)$.

Теорема 2. *Оператор* A *имеет дискретный спектр. Система корневых вектор-функций оператора* A *полна в* $\mathcal{H}^l$*. Порядок резольвенты оператора* A *не превосходит число* $\frac{1}{2m}$*. Для числа* $N(\lambda)$ *собственных значений оператора* A*, не превосходящих по модулю* λ*, с учетом их корневых кратностей, справедлива оценка* $N(\lambda)\leq M\lambda^{1/2m}$, $(\lambda\geq 1)$.

Отметим, что сформулированные выше результаты в случае симметрической формы (1) хорошо известны.

Обозначим через $\mathcal{H}_-$ пополнение пространства $\mathcal{H}$ по норме

$$|u|_- = \sup_{0\neq\varphi\in\mathcal{H}_+}\frac{|(u,\varphi)|}{|\varphi|_+}.$$

При выполнении условия (2) можно ввести в рассмотрение оператор $\mathcal{A}\,:\,\mathcal{H}^l_+ \to \mathcal{H}^l_-$, действующий по формуле

$$<\mathcal{A}u,v>=\mathcal{A}[u,v] \qquad (\forall u,v\in\mathcal{H}^l_+).$$

Пусть A такой же оператор, как в теоремах 1, 2. Имеет место следующая

Теорема 3. *Для достаточно больших по модулю* $\lambda\in S$ *существуют непрерывные обратные*

$$(\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}\,:\,\mathcal{H}^l_- \to \mathcal{H}^l_-, \quad (A-\lambda E)^{-1}\,:\,\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l,$$

и выполняется равенство

$$(\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}u=(A-\lambda E)^{-1}u \qquad (\forall u\in\mathcal{H}^l).$$

При этом $Au=\mathcal{A}u\,(\forall u\in D(A))$*, и*

$$D(A)=\{u\in\mathcal{H}^l_+\,:\,\mathcal{A}u\in\mathcal{H}^l\}.$$

Список литературы

[1] Бойматов К.Х. *Асимптотическое поведение собственных значений несамосопряжённых операторов* // Функциональный анализ и его приложения. –1977. – Т. 11, № 4. – С. 74–75.

[2] Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. *Спектральная асимптотика несамосопряженных эллиптических систем* // Математический сборник. – 1990. – Т. 181, № 12. – С. 1678–1693.

[3] Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. *Распределение собственных значений несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка* // Вестник МГУ. – 1990. – № 3. – С. 24–31.

[4] Розенблюм Г.В. *Спектральная асимптотика нормальных операторов* // Функциональный анализ и его приложения. – 1982. – Т. 16. – С. 82–83.

[5] Розенблюм Г.В. *Условная асимптотика спектра операторов, близких к нормальным* // В кн.: Линейные и нелинейные краевые задачи. Спектральная теория. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1986. – С. 180–195.

[6] Agranovich M.S. and Markus A.S. *On spectral properties of elliptic pseudo-differential operators far from self-adjoint ones* // Zeitshrift fur Analysis und ihre Anwendungen. – 1989. – Bd., 8(3). – P. 237–260.

[7] Гадоев М.Г. *Спектральная асимптотика несамосопряженных вырождающихся эллиптических операторов с сингулярными матричными коэффициентами на отрезке* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 3. С. 26-54.

Ряды Дирихле с правильной дискретной мажорантой роста

А.М. Гайсин, Н.Н. Аиткужина
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, БашГУ, Уфа, Россия
e-mail: Gaisinam@mail.ru, YusupovaN@rambler.ru

Пусть
$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (z=x+iy) \tag{1}$$
— целая трансцендентная функция с вещественными коэффициентами, а $\{p_n\}$ $(n\geq 1)$ — последовательность перемен знаков коэффициентов

(по определению $p_n = \min\limits_{k>p_{n-1}}\{k : a_{p_{n-1}}a_k < 0\}$, где $p_0 = \min\{k : a_k \neq 0\}$). Через $p(t)$ обозначим считающую функцию последовательности $\{p_n\}$: $p(t) = \sum\limits_{p_n \le t} 1$. В [1] показано, что если плотность последовательности $\{p_n\}$ $\Delta = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t}$ равна нулю, то в каждом угле $\{z : |\arg z| \le \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ целая функция (1) имеет тот же порядок, что и во всей плоскости. Позже выяснилось, что данный результат справедлив и для луча $\{z : \arg z = 0\}$: если функция (1) имеет конечный порядок ρ и $\Delta = 0$, то [2]

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|f(x)|}{\ln M_f(x)} = 1, \quad M_f(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|\ (r>0)\,. \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\rho_0 = \rho$, где $\rho_0 = \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\ln\ln|f(x)|}{\ln x}$. При $\Delta = 0$ равенство (2) верно и для функций конечного нижнего порядка [3]. В [2] найдены неулучшаемые условия на функцию $p(t)$ (они слабее условия $\Delta = 0$), при выполнении которых для любой функции конечного порядка (конечного нижнего порядка), заданной рядом (1), при $x \to \infty$ вне некоторого множества нулевой нижней логарифмической плотности справедливо асимптотическое равенство

$$\ln M_f(x) = (1 + o(1)) \ln|f(x)|\,. \tag{3}$$

Нашей целью являлось получение аналогичных с (3) асимптотических оценок для целых функций с более общей мажорантой роста, представленных рядами Дирихле с вещественными коэффициентами.

Через L обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ положительных функций. Пусть $\Phi \in L$ — выпуклая функция, такая, что для ее обратной функции φ выполняется условие $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty$.

Через $A(\varphi)$ обозначим класс положительных, неубывающих на $\mathbb{R}_+$ функций $\alpha = \alpha(t)$, $\alpha(t) = o(t\varphi(t))$ при $t \to \infty$, таких, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\varphi(r)} \int\limits_1^r \frac{\alpha(t)}{t^2}\, dt = 0\,.$$

Подкласс $A(\varphi)$, состоящий из функций $\alpha \in L$, таких, что $\alpha(t) \ge \sqrt{t}$, будем обозначать через $W(\varphi)$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\sup\limits_t(\lambda(t+1) - \lambda(t)) < \infty$ (условие несгущаемости), 2) $\ln(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > -\alpha(\lambda_n)$ $(n \ge 1)$ (условие несближаемости), где

α— некоторая функция из $W(\varphi)$, $\alpha(t) = O(t)$ при $t \to \infty$, $\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$. Обозначим $D(\Lambda)$ класс всех целых функций F, представимых абсолютно сходящимися во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it) \tag{4}$$

с вещественными коэффициентами a_n. Пусть $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$,

$$\underline{D}_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \exists \{\sigma_n\}, 0 < \sigma_n \uparrow \infty, \ \ln M(\sigma_n) \le \Phi(m\sigma_n)\} \quad (m \ge 1).$$

Положим $\underline{D}(\Phi) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \underline{D}_m(\Phi)$.

Пусть $\mu_n = \lambda_{p_n}$, где $\{p_n\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов ряда (4), $l(t) = \sum\limits_{\mu_n \le t} 1$. В дальнейшем будет предполагаться выполнение следующего условия на последовательность $\{p_n\}$: существует $\theta \in A(\varphi)$, что

$$\int_1^{\lambda_n} \frac{l(t;\lambda_n)}{t}\, dt \le \theta(\lambda_n) \quad (n \ge 1), \tag{5}$$

где $l(t;\lambda_n)$ — число точек μ_j из отрезка $\{h : |h-\lambda_n| \le t\}$. Отметим, что в случае $\varphi(x) = \ln x$, условие (5) выполняется автоматически (это показано в [2]).

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняется условие (5).*

Для того, чтобы для любой функции $F \in \underline{D}(\Phi)$ при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0,\infty)$ нулевой нижней плотности выполнялось асимптотическое равенство

$$\ln M(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(\sigma)|,$$

необходимо и достаточно, чтобы $l \in A(\varphi)$.

Список литературы

[1] Pólya G. *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen*// Math. Z. 1929. V. 29. P. 549-640.

[2] Шеремета М.Н. *Об одной теореме Полиа* // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35, № 1. С. 119-124.

[3] Шеремета М.Н. *целых функциях с вещественными тейлоровскими коэффициентами* // Укр. мат. журн. 1985. Т. 37, №6. С. 786-787.

[4] Гайсин А.М. *К одной теореме Пойа о целых функциях с вещественными коэффициентами Тейлора* // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, №1. С 46-55.

Теорема о минимуме модуля ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости

А.М. Гайсин, Т.И. Белоус

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, УГАТУ, Уфа, Россия

e-mail: gaisinam@mail.ru, belousti@yandex.ru

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty$. Через $D_c(\Lambda)$ обозначим класс всех функций F, представимых в полуплоскости $\Pi_c = \{s : Res < c\}$ $(-\infty < c \leq +\infty)$ рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{1}$$

сходящимися лишь в данной полуплоскости. Пусть $\mu(\sigma)$ - максимальный член ряда (1), а $M_F(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$, $\sigma < c$.

Пусть L — класс всех непрерывных, неограниченных и возрастающих на $[0, \infty)$ функций,

$$W = \{w \in L : \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty\}, \quad \underline{W}_{\varphi} = \{w \in W : \underline{\lim_{t\to\infty}} \varphi(t) \int_t^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx = 0\},$$

где φ — некоторая фиксированная функция из L. Введем также множество

$$W_{\varphi} = \{w \in W : \lim_{t\to\infty} \varphi(t) \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty = 0\}.$$

Пусть $e \subset [-1, 0)$ — измеримое по Лебегу множество. Нижней de и верхней De плотностями называются величины

$$de = \underline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{mes(e \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}, \qquad De = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{mes(e \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}.$$

Если $de = De$, то говорят, что множество e имеет плотность.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* φ *— некоторая фиксированная функция из* L, $w \in \underline{W}_{\varphi}$, *где* $w(x) = \ln \max\limits_{|z|=x} |Q(z)|$, $Q(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$, *причем* $\varphi(x)w(x) = o(x)$ *при* $x \to \infty$. *Предположим, что для некоторой функции* $\psi \in W_{\varphi}$ *выполняются оценки*

$$-\ln\left|Q^{'}(\lambda_n)\right| \le \psi(\lambda_n) \quad (n \ge 1).$$

Если максимальный член $\mu(\sigma)$ *ряда (1) удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0$$

(Φ *— функция, обратная к* φ), *то для любой функции* $F \in D_o(\Lambda)$ *существует множество* $e \subset [-1, 0)$ *нулевой нижней плотности, что для любого вертикального отрезка*

$$I_H = I_H(\sigma) = \{s = \sigma + it : |t - t_o| \le H, \ \sigma < 0\} \ (H = const)$$

для всех σ, $-1 < \sigma_o \le \sigma < 0$, *вне* e *найдется деформированный отрезок* $I_H^* = I_H^*(\sigma)$, *обладающий свойствами:*

1) $mes[I_H(\sigma) \cap I_H^*(\sigma)] \to |I_H| = 2H$ *при* $\sigma \to 0-$;

2) $\ln M_F(\sigma + d(\sigma)) < (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma)$ *при* $\sigma \to 0-$ *вне* e, *где* $d(\sigma) = \max\limits_{\tau \in I_H^*} |Re\tau - \sigma)|$;

3) $\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F^*(\sigma)$ *при* $\sigma \to 0-$ *вне* e, *где* $m_F^*(\sigma) = \min\limits_{\tau \in I_H^*} |F(\tau)|$.

В условиях теоремы 1 в [2] показано более слабое асимптотическое соотношение: $d(F; \gamma) = 1$, где

$$d(F; \gamma) = \varlimsup_{s \in \gamma,\, Res \to 0-} \frac{\ln |F(s)|}{\ln M_F(Res)},$$

γ — произвольная кривая из Π_o, оканчивающаяся на мнимой оси.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а функция* l,

$$l(r) = N(r) ln \frac{r}{N(r)}, \qquad N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x} dx, \qquad n(t) = \sum_{\lambda_{j \le t}} 1,$$

принадлежит классу W_{φ}*. Тогда при* $\sigma \to 0-$ *вне некоторого множества* $e \subset [-1, 0)$ *нулевой плотности*

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F(\sigma), \tag{2}$$

где $m_F(\sigma) = \min\limits_{\tau \in I_H} |F(\tau)|$, $I_H = I_H(\sigma)$ $(\sigma < 0-)$ *— вертикальный отрезок длины* $2H$.

Если $l \in \underline{W}_{\varphi}$, *то асимптотическое равенство (2) верно при* $\sigma \to 0-$ *вне множества* $e \subset [-1, 0)$ *нулевой нижней плотности.*

Отметим, что в статье [1] функция φ удовлетворяет некоторым дополнительным ограничениям. В теоремах 1, 2 требуется лишь, что $\varphi \in L$.

Список литературы

[1] Гайсин А.М. *Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости* // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 53, № 4. С. 173-185.

[2] Гайсин А.М., Белоус Т.И. *Оценка на кривых функций, представленных в полуплоскости рядами Дирихле* // Сиб. матем. журн. 2003. Т.44, № 1. С. 27-43.

Критерии существования регулярной миноранты неквазианалитичности классов Карлемана

Р.А. Гайсин

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: rashit.gajsin@mail.ru

При изучении классов Карлемана на произвольных континуумах комплексной плоскости особую роль играют так называемые регулярные последовательности $M = \{M_n\}$ $(M_n > 0)$, то есть такие, что числа $m_n = \frac{M_n}{n!}$ $(n \geq 0)$ обладают свойствами [1]:

а) $m_n^2 \leq m_{n-1} m_{n+1}$ $(n \geq 1)$; б) $\sup\limits_n \left(\dfrac{m_{n+1}}{m_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$; в) $m_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$, $n \to \infty$.

Классом Карлемана на континууме $\gamma \subset \mathbb{C}$ называется множество

$$C_\gamma(M_n) = \{f \in C^\infty(\gamma) : \sup_{z \in \gamma} \left| f^{(n)}(z) \right| \leq K_f^n M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Здесь для любого $a \in \gamma$ производная $f^{'}(a)$ понимается как предел

$$f^{'}(a) = \lim_{z \in \gamma, z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Высшие производные $f^{(n)}(a)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ определяются по индукции.

Если последовательность $\{M_n\}$ регулярна, то класс Карлемана $C_\gamma(M_n)$ называется регулярным. Класс $C_\gamma(M_n)$ называется квазианалитическим, если из того, что $f \in C_\gamma(M_n)$ и $f^{(n)}(c) = 0$ в некоторой точке $c \in \gamma$ при всех $n \geq 0$ следует, что $f(z) \equiv 0$.

В случае, если γ — дуга или $\gamma = \bar{D}$, где D — ограниченная жорданова область плоскости, условия квазианалитичности регулярных классов Карлемана в различных терминах изучались соответственно в работах [2], [3].

Критерий неквазианалитичности регулярного класса $C_{[0,1]}(M_n)$, как известно, имеет вид [1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty. \tag{1}$$

Для регулярных последовательностей M условие (1) допускает переформулировку в терминах ассоциированного веса $\omega(r) = \max\limits_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n}$, $m_n = \frac{M_n}{n!}$, [1]: если $\gamma = [0, 1]$ или γ - единичная окружность, или аналитическая дуга, то класс $C_\gamma(M_n)$ не является квазианалитическим тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^d \ln \ln H(r) dr < \infty, \tag{2}$$

где $H(r) = \omega\left(\frac{1}{r}\right)$, а $d > 0$ такое, что $H(d) \geq e$.

Теорема 1 [2]. *Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, γ — дуга, заданная уравнением $y = g(x)$ $(|x| \leq a)$, где g — функция, удовлетворяющая условию Липшица. Для того, чтобы класс $C_\gamma(M_n)$ был неквазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы функция $H = H(r)$ удовлетворяла условию (2).*

Таким образом, для того, чтобы регулярный класс Карлемана $C_\gamma(M_n)$ (γ — дуга, удовлетворяющая условию Липшица) не был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из эквивалентных условий (1), (2). В общем случае класс Карлемана $C_\gamma(M_n)$ может и не быть регулярным. Поэтому важно выяснить, при каких условиях на M_n существует регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что: 1) $M_n^* \leq M_n$; 2) класс $C_\gamma(M_n^*)$ неквазианалитичен.

Теорема 2. *Пусть* $M_n > 0$. *Для того, чтобы существовала регулярная последовательность* $\{M_n^*\}$, *такая, что*

$$M_n^* \le M_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из следующих условий:

а) существует положительная, непрерывная на $\mathbb{R}_+$ *функция* $r = r(t)$, $tr(t) \downarrow 0$, $t^2 r(t) \uparrow$ *при* $t \to \infty$ *такая, что*

$$1) \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \le r(n) \ (n \ge 1); \qquad 2) \int_1^{\infty} r(t) dt < \infty;$$

б) если $T(r) = \max\limits_{n \ge 0} \frac{r^n}{M_n}$, *а* $\omega_T = \omega_T(r)$ *— наилучшая вогнутая мажоранта функции* $\ln T(r)$, *то*

$$\int_1^{\infty} \frac{\omega_T(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Доказательство теоремы 2 основано на одной идее из [4] и свойствах преобразования Лежандра.

Список литературы

[1] Дынькин Е.М. *Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала* // Матем. программирование и смежные вопросы. Теория функций и функц. анализ. Труды VII Зимней школы (Дрогобыч). М.: АН СССР. 1976. С. 40 – 73.

[2] Гайсин А.М., Кинзябулатов И.Г. *Теорема типа Левинсона-Щёберга. Применения* // Матем. сб. 2008. Т. 199. № 7. С. 41 – 62.

[3] Трунов К.В., Юлмухаметов Р.С. *Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях* // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 2. С. 178 – 217.

[4] Couture R. Un theoreme de Denjoy-Carleman sur une courbe du plan complexe // Proceedings of the American math. soc. 1982. V. 85. № 3. P. 401-406.

Приближенное исследование множеств синхронизации в динамических системах в случае сильного резонанса

А.Р. Гуфранов

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: albert.gufranov@gmail.com

Рассмотрим динамическую систему

$$x_{n+1} = A(\alpha,\beta)x_n + a_2(x_n), \;\; n = 0,1,2,\dots \tag{1}$$

где $x_n \in \mathbb{R}^2$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^1$, a_2 — квадратичная векторнозначная функция, $A(\alpha,\beta) = (1+\alpha)Q(\beta)$,

$$Q(\beta) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi(\theta_0+\beta) & -\sin 2\pi(\theta_0+\beta) \\ \sin 2\pi(\theta_0+\beta) & \cos 2\pi(\theta_0+\beta) \end{pmatrix},$$

$A(0,0)$ имеет собственные значения $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $\theta_0 = \frac{p}{q}, p,q \in \mathbb{Z}$.

Система (1) имеет неподвижную точку $x = 0$. Так как при $(\alpha,\beta) = (0,0)$ матрица $A(\alpha,\beta)$ имеет собственные значения, лежащие на единичной окружности, то при значениях (α,β), лежащих в окрестности точки $(0,0)$, возможны бифуркационные явления. Изучим подробнее бифуркацию q-циклов.

Бифуркация q-циклов — явление, при котором при малых изменениях параметров (α,β) у системы возникают циклы периода q, стягивающиеся в неподвижную точку при $(\alpha,\beta) \to (0,0)$. Отметим, что случаи $q = 1,2,3,4$ называются сильным резонансом, а случай $q \geq 5$ — слабым резонансом.

Обозначим через K кривую на плоскости P параметров (α,β), при которых матрица $A(\alpha,\beta)$ будет иметь собственное значение λ, $|\lambda| = 1$. Множествами синхронизации U_q или языками Арнольда называются такие множества на плоскости P, в которых система (1) имеет циклы, амплитуды которых стремятся к нулю при $(\alpha,\beta) \to (0,0)$. Эти множества будут иметь вид клиньев, вершины которых лежат в тех точках кривой K, в которых матрица $A(\alpha,\beta)$ будет иметь собственные значение вида $e^{\pm 2\pi\theta i}$, где $\theta = \frac{p}{q}, p,q \in \mathbb{Z}$.

Если $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{q-1}^*$ - цикл периода q системы (1), то каждая точка x_k^*, $k = 0,\dots,q-1$ будет являться решением уравнения

$$x = B(\alpha,\beta)x + b_2(\alpha,\beta,x), \tag{2}$$

где $B(\alpha,\beta) = (1+\alpha)^q Q^q(\beta)$,

$$b_2(\alpha,\beta,x) = \sum_{k=0}^{q-1}(1+\alpha)^{q-1+k}Q^{q-1-k}(\beta)a_2(Q^k(\beta)x).$$

Для нахождения решения уравнения (2) применим метод малого параметра. Он заключается в разложении x, α и β по малому параметру ε:

$$\begin{cases} x = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \dots \\ \alpha = \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \dots \\ \beta = \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \dots \end{cases} \tag{3}$$

Здесь e — некоторый фиксированный ненулевой вектор; таким образом, мы ищем решение уравнения (2) вдоль некоторого вектора e.

Подставив разложения (3) в уравнение (2), получим уравнения с коэффициентами x_k, α_k и β_k. Выпишем эти уравнения для степеней ε, меньших 4. Отметим, что при нулевой и первой степени ε коэффициенты будут нулевыми. Далее имеем:

$$\varepsilon^2: \quad q\begin{pmatrix}\alpha_1 & -2\pi\beta_1 \\ 2pi\beta_1 & \alpha_1\end{pmatrix} e = \sum_{k=0}^{q-1} S_k L(S_k e, S_k e)\,,$$

$$\varepsilon^3: \quad q\begin{pmatrix}\alpha_1 & -2\pi\beta_1 \\ 2pi\beta_1 & \alpha_1\end{pmatrix} e_1 +$$

$$+\begin{pmatrix} -\frac{(2\pi q\beta_1)^2}{2!} + \frac{q(q-1)}{2!}\alpha_1^2 + q\alpha_2 & -2\pi q\beta_2 - 2\pi q^2\alpha_1\beta_1 \\ 2\pi q\beta_2 + 2\pi q^2\alpha_1\beta_1 & -\frac{(2\pi q\beta_1)^2}{2!} + \frac{q(q-1)}{2!}\alpha_1^2 + q\alpha_2 \end{pmatrix} e =$$

$$= 2\pi\beta_1\sum_{k=0}^{q-1} k\hat{S}_k L(S_k e, S_k e) + \sum_{k=0}^{q-1} kS_k L(S_k e, S_k e) + 2\alpha_1\sum_{k=0}^{q-1} kS_{q-1-k}L(S_k e, S_k e) +$$

$$+2\pi\beta_1\sum_{k=0}^{q-1} kS_{q-1-k}L(S_k e, \hat{S}_k e) + 2\pi\beta_1\sum_{k=0}^{q-1} kS_{q-1-k}L(\hat{S}_k e, S_k e) +$$

$$+\sum_{k=0}^{q-1} S_{q-1-k}L(S_k e, S_k e_1) + \sum_{k=0}^{q-1} S_{q-1-k}L(S_k e_1, S_k e)\,.$$

Рассмотрим случай $q = 4$. В этом случае уравнение при ε^2 примет вид:

$$q\begin{pmatrix}\alpha_1 & -2\pi\beta_1 \\ 2\pi\beta_1 & \alpha_1\end{pmatrix} e = 0$$

Отсюда следует $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$. Тогда второе уравнение примет вид:

$$\begin{pmatrix} q\alpha_2 & -2\pi q\beta_2 \\ 2\pi q\beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} e = \sum_{k=0}^{q-1} kS_k L(S_k e, S_k e)+$$

$$+\sum_{k=0}^{q-1} S_{q-1-k} L(S_k e, S_k e_1) + \sum_{k=0}^{q-1} S_{q-1-k} L(S_k e_1, S_k e),$$

что можно также записать в виде

$$\begin{pmatrix} qe^1 & -2\pi qe^2 \\ qe^2 & 2\pi qe^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = F(e, e_1),$$

где $F(e, e_1)$ — некоторая векторнозначная функция. В этом уравнении неизвестными являются α_2, β_2 и e_1, и оно не является однозначно разрешимым. Однако, для каждого фиксированного вектора e_1, мы можем однозначно найти коэффициенты α_2 и β_2.

То же самое будет справедливо и для степеней ε, больших 3.

Также в данной работе рассматриваются случаи $q = 1, 2, 3$.

Пространственная структура магнитного поля проводящей жидкости на sol-многообразии и в трехмерном пространстве с разрывным полем скоростей.

А.И. Есина, А.И. Шафаревич

ИПМех РАН, МФТИ, Москва, Россия

e-mail: esina_anna@list.ru

Магнитное поле в проводящей жидкости (в частности, некоторые магнитные поля галактик и планет) описывается оператором индукции. В работе рассматривается оператор магнитной индукции на трехмерной поверхности специального вида и в трехмерном пространстве с разрывным полем скоростей. Исследуется пространственная структура магнитного поля.

Интерполяционная задача оператора свертки Данкла

К.Р. Забирова
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия
e-mail: karinazabirova@gmail.com

Пусть $H(C)$ – пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах; $H^*(C)$ – сопряженное пространство с сильной топологией. P_C – пространство целых функций экспоненциального типа. P_C^* – сопряженное пространство. Изучается интерполяционная задача оператора свертки Данкла в $H(C)$.

Рассмотрим оператор Данкла в $H(C)$

$$\Lambda[f(z)] = f'(z) + \frac{\alpha}{z}(f(z) - f(-z)), \quad \alpha > 0.$$

Этот оператор играет важную роль в различных задачах математической физики. Собственная функция оператора Данкла (см. [1], [2]) следующая

$$y(\lambda z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{p(1)p(2)\dots p(k)},$$

где $p(k) = k + \alpha(1 - e^{i\pi k})$. Функция имеет порядок один и конечный тип.

Пусть $f(z) \in H(C), \quad g(z) \in P_C, \quad F \in H^*(C), \quad G \in P_C^*$. Рассмотрим оператор свертки Данкла $M_\varphi[f(z)] = (F, S_t[f(z)])$, где $\varphi(\lambda) = \hat{F}(\lambda) = (F, y(\lambda z))$ – преобразование Данкла, $S_t[f(z)] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Lambda^{(k)}[f(z)]\frac{t^k}{p(1)p(2)\dots p(k)}$ – оператор сдвига Данкла (см.[1]). Оператор M_φ линейный, непрерывный и сюръективный [1]. Рассмотрим оператор

$$M_\varphi[\psi \cdot f(z)] = (F, S_t[(\psi f)(z)]). \tag{1}$$

Данный оператор линейно и непрерывно отображает пространство $H(C)$ в $H(C)$. Сопряженный оператор к оператору $M_\varphi[\psi \cdot]$ есть $M_\psi[\varphi \cdot]$, который действует из P_C в P_C и имеет вид

$$M_\psi[\varphi \cdot g(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_A \psi(w) y(zw) \gamma(w) dw,$$

где контур A охватывает особенности обобщенной ассоциированной функции γ к $\varphi \cdot g(z)$.

Пусть μ_k – нули кратности h_k функции $\psi \in H(C)$, a_{ki} – произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда функция ψ порождает h_k

решений $y(\mu_k z), zy'(\mu_k z), ..., z^{h_k-1}y^{h_k-1}(\mu_k z)$ для нуля μ_k. Поставим интерполяционную задачу (задачу Валле-Пуссена) следующим образом: существует ли $u(z) \in KerM_\varphi$ такая, что $u^{(i)}(\mu_k) = a_{ki}, i = 0, 1, ..., h_k - 1$. Пусть функция $\varphi \in P_C$ имеет нули λ_k. Обозначим множество $N_\varphi = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 1 *Интерполяционная задача для M_φ разрешима тогда и только тогда, когда имеет место представление Фишера [3]*

$$H(C) = KerM_\varphi + \{\psi(\lambda) \cdot r(\lambda) : r(\lambda) \in H(C)\}, \quad (2)$$

где $\{...\}$ – множество всех произведений функции $\psi(\lambda)$ на всевозможные $r(\lambda) \in H(C)$.

Теорема 2 *Сюръективность оператора $M_\varphi[\psi\cdot]$ эквивалентна представлению Фишера (2).*

Из теоремы 1 и 2 следует, что для решения интерполяционной задачи, нужно показать сюръективность оператора (1). То есть нужно показать замкнутость и всюду плотность образа $M_\varphi[\psi\cdot]$ в $H(C)$. А по теореме Дьедонне – Шварца [4] это эквивалентно инъективности сопряженного оператора $M_\psi[\varphi\cdot]$ и замкнутости его образа. Находим условия для сопряженного оператора, получаем следующую теорему.

Теорема 3 *Пусть $\mu_k > 0$ кратности h_k, такие что $\mu_{k+1} > \mu_k(1 + 2\alpha)$, и $\mu_k \nearrow \infty$, а $\lambda_k > 0, \lambda_k \nearrow \infty$, тогда оператор (1) сюръективен.*

Доказательство теоремы 3 основывается на понятии секвенциально достаточного множества. Сначала показываем, что множество N_φ является секвенциально достаточным множеством в ядре оператора M_ψ. А потом несложно показать инъективность оператора $M_\psi[\varphi\cdot]$ и замкнутость его образа.

Следствие *Задача Абеля – Гончарова [5] разрешима в ядре оператора свертки Данкла для положительной вещественной последовательности чисел. Класс решений из ядра $M_\varphi[y(z)]$ входит в класс Абеля-Гончарова.*

Список литературы

[1] J.J. Betancor, M. Sifi, K.Trimeche *Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operators on C.* // Acta Math. Hungarica. 2005. V. 106, № 1-2. P. 101-116.

[2] В.В. Напалков, В.В. Напалков (мл.) *Операторы Данкла как операторы свертки* // Доклады Академии наук. 2008. Т. 423, № 3. С. 300-302.

[3] H.S. Shapiro *An algebraic theorem of Fisher, and the holomorphic Goursat problem* // Bull. London Math. Soc. 1989. V. 21, № 21. P. 513-537.

[4] Ж. Дьедонне, Л. Шварц *Двойственность в пространствах (F) и (LP)* // Сборник математика. 1958. Т. 2, № 2. С. 77-107.

[5] В.Л. Гончаров *Recherches sur les derivees successives des fonetions analytiques. Generalisation de la serie d'Abel* // Ann. sceint. Ecole norm. Super. 1930. V. 47. P. 1-78.

Исследование бифуркации вынужденных колебаний в консервативных динамических системах

Л.С. Ибрагимова
Башкирский государственный аграрный университет, Уфа
e-mail: lilibr@mail.ru

В работе рассматриваются консервативные системы, заданные дифференциальными уравнениями вида

$$x' = F(x;t;\mu),\ x \in R^2, \tag{1}$$

где функция $F(x;t;\mu)$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности аргументов и периодической по t, μ— скалярный параметр; пусть также система (1) имеет точку равновесия $x^* = 0$ при всех значениях μ. Изучается задача о бифуркации вынужденных колебаний в окрестности точки равновесия $x^* = 0$.

Обозначим через $V(x,\mu)$ оператор сдвига по траекториям системы (1) за время от $t = 0$ до $t = T > 0$. Изучение задачи о T - периодических решениях системы (1) может быть сведено к изучению отображения $V(x,\mu)$, неподвижные точки которого определяют начальные значения T– периодических решений уравнения (1).

Систему (1) можно представить в виде

$$x' = A(\mu,t)x + a(x,t,\mu), \tag{2}$$

где $A(\mu,t) = F'_x(0;t;\mu)$, $a(x;t;\mu) = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$. Далее для простоты будем считать,что $A(\mu,t)$ не зависит от t, то есть $A(\mu) = F'_x(0;t;\mu)$. Тогда оператор V может быть представлен в виде

$$V(x,\mu) = e^{TA(\mu)}x + e^{TA(\mu)}\int_0^T e^{-A(\mu)s}a(x(s);s;\mu)ds; \tag{3}$$

здесь $x(t)$ – это решение задачи Коши для дифференциального уравнения (2) при начальном условии $x(0) = x$.

Систему (2) назовем близкой к консервативной, если система

$$x' = A(\mu)x \tag{4}$$

консервативна.

Имеет место следующая

Лемма 1 *Система* (4) *консервативна тогда и только тогда, когда собственные значения матрицы* $A(\mu)$ *являются чисто мнимыми.*

Значение μ_0 параметра μ называют точкой бифуркации qT – периодических решений системы (1), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\mu = \mu(\varepsilon)$, при котором система (1) имеет ненулевое qT – периодическое решение $x(t,\varepsilon)$, при этом $\max\limits_t \|x(t;\varepsilon)\| \to 0$ и $\mu(\varepsilon) \to \mu_0$ при $\varepsilon \to 0$.

При $q = 1$ будем говорить о бифуркации вынужденных колебаний, а при $q \geq 2$ – о бифуркации субгармонических колебаний.

Верно следующее утверждение

Лемма 2 *Пусть* μ_0 *- точка бифуркации вынужденных колебаний системы* (2)*. Тогда матрица* $A(\mu_0)$ *имеет собственные значения* $\pm\frac{2\pi k i}{T}$ *при некотором целом* k*.*

Согласно необходимому условию бифуркации вынужденных колебаний матрица $A(\mu_0)$ должна иметь собственные значения $\pm\frac{2\pi k i}{T}$.

Пусть для определенности матрица $A(\mu_0)$ имеет собственные значения $\pm\frac{2\pi i}{T}$. Рассмотрим вопрос о достаточном признаке бифуркации вынужденных колебаний. Перейдем к операторному уравнению $x = V(x,\mu)$, где $V(x,\mu)$ – оператор (3).

Положим $B(\mu) = e^{TA(\mu)}$, $b(x,\mu) = e^{TA(\mu)} \int\limits_0^T e^{-A(\mu)s} a(x(s);s;\mu)ds$. Тогда получим уравнение

$$x = B(\mu)x + b(x,\mu), \quad x \in R^2. \tag{5}$$

Согласно условию консервативности матрица $A(\mu)$ должна иметь собственные значения $\pm w(\mu)i$.

Решения уравнения (5) первоначально будем находить по методу малого параметра в виде $x = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \dots$, где x_1, x_2,... требуют определения.

На следующем этапе перейдем к вспомогательному двухпараметрическому уравнению

$$x = (1+\alpha)B(\mu)x + b(x,\mu),\ x \in R^2, \tag{6}$$

где α - вспомогательный параметр. При $\alpha = 0$ уравнение (6) совпадает с уравнением (5). Далее применим для уравнения (6) операторный метод исследования правильной бифуркации, предложенный в [2].

Бифурцирующие решения уравнения (6) совпадают с решениями основного уравнения (5). Таким образом, операторный метод исследования двухпараметрического уравнения (6) позволяет строить бифурцирующие решения однопараметрического уравнения (5).

Список литературы

[1] Магницкий Н.А. *Теория динамического хаоса.* - М.: Наука, 1985. ЛЕНАНД, 2011. - 320 с.

[2] Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах.* // Уфимский математический журнал. - 2010. Т. 2, № 4. С. 3-26.

О безусловных базисах из воспроизводящих ядер в функциональных гильбертовых пространствах целых функций

К.П. Исаев, Р.С. Юлмухаметов

ФГБУН Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия

e-mail: orbit81@list.ru, yulmukhametov@mail.ru

Пусть H — функциональное гильбертово пространство целых функций. То есть функционалы $\delta_z \ : \ f \longrightarrow f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$. Тогда каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром ([1]). Функция $\sqrt{K(z)} = \|k_z(\lambda)\|_H = (k(z,z))^{\frac{1}{2}}$ называется функцией Бергмана пространства H. Обозначим $K(z) = \|k_z(\lambda)\|_H^2$. Далее наложим на пространство H дополнительные условия:

$$K(z) > 0, z \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

если $f \in H$ и z_0 — нуль функции $f(z)$, то

$$\frac{f(z)}{z-z_0} \in H. \tag{2}$$

Система элементов e_k, $k = 1, 2, ...$, в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом ([2]), если она полна и найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для для любого набора чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ выполняется соотношение

$$c\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2||e_k||^2 \le ||\sum_{k=1}^{n}c_k e_k||^2 \le C\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2||e_k||^2.$$

Известно, что если система e_k, $k = 1, 2, ...$, — безусловный базис, то любой элемент пространства H единственным образом представляется в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

причем

$$c\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2||e_k||^2 \le ||x||^2 \le C\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2||e_k||^2.$$

Нас будет интересовать вопрос о том, при каких условиях на последовательность $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ система $\{k(\lambda, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ может являться безусловным базисом в пространстве H.

Введем одну характеристику для непрерывных на плоскости функций u, измеряющую отклонение данной функции от гармонических функций. Для непрерывной функции u, для $z \in \mathbb{C}$ и положительного числа p через $\tau(u, z, p)$ обозначим супремум всех таких $r > 0$, для которых выполняется условие:

$$\inf\{\sup_{w\in B(z,r)}|u(w) - h(w)|, h \text{ гармонична } B(z,r)\} \le p.$$

Теорема. Пусть H — функциональное гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее условиям (1) и (2). Предположим, что для любого положительного числа p найдется число $\delta = \delta(p) > 0$, такое что функция $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, p)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию

$$\inf_{z\in B(\lambda, 2\tau(\lambda))} \tau(z) \ge \delta\tau(\lambda)$$

и $\tau(z) = o(|z|)$, при $|z| \longrightarrow \infty$. Тогда в пространстве H безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Список литературы

[1] Aronszajn N. *Theory of reproducing kernels.* // Transactions of the American Mathematical Society, 68:3 (1950), 337–404.

[2] Nikol'skii N.K. , Pavlov B.S., and Khrushchev S.V. *Unconditional bases of exponential functions and reproducing kernels, I.* // Preprint No. R-8-80 (LOMI, Leningrad, 1980). (Russian)

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение 14.B37.21.0358) и РФФИ (гранты №№ 12-01-00567-а и 11-01-97009-р поволжье а).

Построение главных асимптотик для бифуркационных формул в задаче трех тел

Н.Р. Исанбаева

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: nurgizarifovna@mail.ru

Рассматривается плоская эллиптическая ограниченная задача трех тел [1,2], которая описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'' - 2y' = \rho(x - \mu + \frac{\mu-1}{(x^2+y^2)^{3/2}}x - \frac{\mu}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}}(x-1)), \\ y'' + 2x' = \rho(y + \frac{\mu-1}{(x^2+y^2)^{3/2}}y - \frac{\mu}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}}y). \end{cases} \tag{1}$$

где $\rho = \frac{1}{1+\varepsilon\cos t}$, $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$, t - истинная аномалия. Система (1) имеет пять постоянных решений – точек либрации: прямолинейных (L_1, L_2, L_3) и треугольных (L_4, L_5). Эта система зависит от двух параметров ε и μ.

При определенных значениях $\mu = \mu_q^*$ и $\varepsilon = 0$ треугольные точки либрации являются [1] негиперболическими состояниями равновесия системы (1). В следствии этого система (1) в окрестности треугольных точек либрации при значениях параметров μ и ε, близких к $\mu = \mu_q^*$ и $\varepsilon = 0$ соответственно, может иметь нестационарные $2\pi q$-периодические решения. Здесь возникает вопрос о том, при каких именно значениях параметров μ и ε возникают указанные решения. В статье этот вопрос обсуждается применительно к точке либрации $L_4(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

На первом этапе предлагается в (1) произвести замену: $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = x', x_4 = y'$. Тогда система (1) примет вид:

$$x' = F(x, \mu, \varepsilon, t), \quad x \in R^4, \tag{2}$$

где

$$F(x, \mu, \varepsilon, t) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 2x_4 + \rho(x_1 - \mu + \frac{\mu-1}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}} x_1 - \frac{\mu}{((x_1-1)^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}}(x_1 - 1)) \\ -2x_3 + \rho(x_2 + \frac{\mu-1}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}} x_2 - \frac{\mu}{((x_1-1)^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}} x_2) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Далее, произведя замену $u = x - x^*$, где $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$, перейдем к системе:

$$u' = F(u + x^*, \mu, \varepsilon, t), \quad u \in R^4, \tag{4}$$

При этом в системе (4) точке либрации x^* системы (2) будет соответствовать нулевое состояние равновесия $u = (0, 0, 0, 0)$.

Для построения $2\pi q$-периодических решений уравнения (4) и соответствующих значений параметров ε и μ применим метод малого параметра в форме:

$$\begin{cases} u(\delta, t) = \delta u_1(t) + \delta^2 u_2(t) + ..., \\ \varepsilon(\delta) = \delta\varepsilon_1 + \delta^2\varepsilon_2 + ..., \\ \mu(\delta) = \mu_q^* + \delta\mu_1 + \delta^2\mu_2 + ... \end{cases} \tag{5}$$

где δ - вспомогательный малый параметр, а функции $u_j(t)$ и коэффициенты ε_j и μ_j требуют определения. Формулы (5) называются бифуркационными формулами.

Теорема 1 *Ряды* (5) *сходятся при малых* $|\delta|$. *При этом верны соотношения:* $\varepsilon_1 = 0$, $\mu_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$ *и* $\mu_2 \neq 0$.

С л е д с т в и е 1. *Бифуркация* $2\pi q$*-периодических решений системы* (1) *имеет односторонний характер: эти решения возникают только в односторонних окрестностях чисел* $\mu = \mu_q^*$ *и* $\varepsilon = 0$.

Таким образом, предлагаемая схема позволяет определить главные ассимтотики для бифуркационных формул в виде:

$$\begin{cases} u(\delta, t) = \delta u_1(t) + \delta^2 u_2(t), \\ \varepsilon(\delta) = \delta^2\varepsilon_2, \\ \mu(\delta) = \mu_q^* + \delta^2\mu_2 \end{cases} \tag{6}$$

Справедливость теоремы 1 основана на операторном методе исследования двупараметрических задач, полученном в [3]. При этом для чисел ε_2 и μ_2 могут быть получены явные аналитические формулы.

Список литературы

[1] Маркеев А.П., *Точки либраций в небесной механике и космодинамике.* - М.: Наука, 1978.

[2] Дубошин А.П. *Небесная механика. Аналитические и качественные методы.* - М.: Наука, 1978.

[3] Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Вышинский А.А., Муртазина С.А. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 2. С. 3-26.

О классах возмущений комплексного ангармонического осциллятора

Х.К. Ишкин

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: Ishkin62@mail.ru

Пусть $\alpha > 0, |\theta| < \pi$ — фиксированные числа. Рассмотрим оператор H_θ, порожденный в $L^2(0,\infty)$ дифференциальным выражением $l_\theta y := -y'' + e^{i\theta}x^\alpha y$ и краевым условием $y(0) = 0$. Известно (см., например, [1]), что спектр H_θ лежит на луче;

$$\lambda_k \sim C_0 \cdot e^{\frac{2\theta i}{2+\alpha}} k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}},\ C_0 > 0. \tag{1}$$

Пусть $L_\theta = H_\theta + V,\ V$ — оператор умножения на локально суммируемую функцию $V(x), \{\mu_k\}_1^\infty$ — собственные числа оператора L_θ, пронумерованные в порядке возрастания модулей с учетом кратностей. В самосопряженном случае (при $\theta = 0$) если

$$V(x) = o\left(x^\alpha\right), x \to +\infty, \tag{2}$$

то

$$\mu_k \sim \lambda_k,\ k \to \infty. \tag{3}$$

При $\theta \neq 0$ для выполнения (3) приходится на V накладывать гораздо более жесткие условия [2]:

1) $V \in L^1_{\rm loc}(0,+\infty)$ и допускает аналитическое продолжение в угол $U_\theta = \{-\theta/(2+\alpha) < \arg z < 0\}$,

2) $V(z) = o(z^\alpha),\ z \to \infty,$ равномерно по $-\theta/(2+\alpha) \le \arg z \le 0.$

Возникает вопрос о степени необходимости этих условий для выполнения оценки (3).

Мы ограничимся гладкими возмущениями в следующем смысле: V — оператор умножения на функцию $V(x)$, которая, дополнительно к (2), удовлетворяет условиям

$$V' \in AC[0,+\infty) \text{ и } \int_0^{+\infty} \left(\frac{|V''|}{(1+x)^{3\alpha/2}} + \frac{|V'|^2}{(1+x)^{5\alpha/2}} \right) dx < \infty. \tag{4}$$

Обозначим $q(x) = e^{i\theta}x^\alpha + V(x), \mathcal{L}_q = \{z = q(x),\ x \in [0,+\infty)$. Известно (см., например, [3, с. 92]), что при выполнении условий (3) и (4) уравнение

$$-y'' + (e^{i\theta}x^\alpha + V(x))y = \lambda y \tag{5}$$

имеет решения e и e_+, для которых справедливы асимптотические представления

$$e^{(k)}_\pm(x,\lambda) \sim \pm(q-\lambda)^{(-1+2k)/4} \exp\left(\pm \int_0^x \sqrt{q-\lambda} dt \right),\ k = 0, 1, x \to +\infty, \tag{6}$$

равномерно по λ из любого компакта $K \subset \mathbb{C}$, не пересекающегося с кривой $\mathcal{L}_q$,

Введем обозначения. Пусть $L^N_\theta = H^N_\theta + V$, где H^N_θ — оператор, который получается из H_θ заменой краевого условия $y(0) = 0$ на $y'(0) = 0$. Обозначим через $\{\lambda^N_k\}_1^\infty$ и $\{\mu^N_k\}_1^\infty$ — собственные числа операторов $H_\theta, L_\theta, H^N_\theta$ и L^N_θ соответственно, пронумерованные в порядке возрастания модулей с учетом их кратностей. Пусть $0 < \theta < \pi$ (случай $-\pi < \theta < 0$ аналогичен), обозначим $S(R,\theta) = U_\theta \cap \{|z| < R\}$.

Если Ω — односвязная область в комплексной плоскости, то через $DE_1(\Omega)$ обозначим множество функций q, которые конечной последовательностью преобразований Дарбу [4] получаются из некоторой функции q_0 (своей для каждого q), принадлежащей классу Смирнова $E_1(\Omega)$ [5, с. 205].

Теорема 1 *Пусть V допускает мероморфное продолжение в угол U_θ так, что*

a) $\forall\ R > 0\ V \in DE_1(S(R,\theta))$,

b) угловые граничные значения функции V на луче $\arg z = -\theta/(2+\alpha)$ *таковы, что функция $W(x) = V(e^{-\theta i/(2+\alpha)}x)$ удовлетворяет условиям (2) и (4),* *c)* $\forall\ \lambda\quad W(e_-, \hat{e}_-) = 0$, *где* W *— вронскиан,* $e_-(z,\lambda)$ *и* $\hat{e}_-(z,\lambda)$ *— решения уравнения (5), удовлетворяющие оценке (6) на лучах* $\arg z = 0$ *и* $\arg z = -\theta/(2+\alpha)$ *соответственно.*

Тогда $\{e^{-2\theta i/(2+\alpha)}\mu_k\}$ *и* $\{e^{-2\theta i/(2+\alpha)}\mu_k^N\}$ *являются собственными числами операторов* $H_0 + W$ *и* $H_0^N + W$, *где* W *— оператор умножения на функцию* $W(x) = e^{-2\theta i/(2+\alpha)} V\left(xe^{-\theta i/(2+\alpha)}\right)$, *так что*

$$\mu_k \sim \lambda_k,\ \mu_k^N \sim \lambda_k^N,\ k \to \infty. \tag{7}$$

Обратно, если существует функция $W(x)$ *такая, что*

(i) *для нее выполнены условия (2) и (4),*

(ii) $\{e^{-2\theta i/(2+\alpha)}\mu_k\}$ *и* $\{e^{-2\theta i/(2+\alpha)}\mu_k^N\}$ *являются собственными числами операторов* $H_0 + W$ *и* $H_0^N + W$, *то функция* V *допускает мероморфное продолжение в угол* U_θ *так, что выполняются a) — c), причем* $V\left(xe^{-\theta i/(2+\alpha)}\right) = e^{-2\theta i/(2+\alpha)} W(x)$.

Список литературы

[1] Davies E.B. *Wild spectral behaviour on anharmonic oscillators* // Bull. London Math. Soc. 2000, V. 32. P. 432–438.

[2] М. А. Евграфов, М. В. Федорюк. *Асимптотика решений уравнения* $w''(z) + p(z,\lambda)w(z) = 0$ *при* $\lambda \to \infty$ *в комплексной плоскости* z. Успехи мат. наук. 1966. Т. 21:1. С. 3–50.

[3] Федорюк М.В., *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* - М.: Наука, 1983. – 352 с.

[4] Darboux G. *Sur une proposition relative aux équations linéaires.* // C. R. Acad. Sci. Paris. V. 94. P.1456 – 1459.

[5] Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций.* - М. – Л.: ГИТТЛ, 1950. – 337 с.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение *14.B37.21.0358)* и *РФФИ* (гранты №№ *12-01-00567*-а и *11-01-97009*-р поволжье а).

Решение обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами

С.И. Кадченко

Южно-Уральский государственный университет,

Магнитогорский государственный университет, Россия

e-mail: kadchenko@masu.ru

В работах [1]-[2] был разработан численный метод вычисления собственных значений полуограниченных снизу дискретных операторов, который, по предложению автора, был назван методом *регуляризованных следов* (РС). На основе построенной теории разработан численный метод, позволяющий решать обратные спектральные задачи, порожденные дискретными полуограниченными снизу операторами заданными в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Рассмотрим задачу нахождения собственных значений оператора $T+P$

$$\Big(T+P\Big)u=\beta u,$$

где T - дискретный полуограниченный снизу оператор, P - ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Допустим, что известны собственные значения $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, которые занумерованы в порядке возрастания собственных значений μ_n по величине с учетом кратности. Обозначим через ν_n кратность собственного значения μ_n, а количество всех неравных друг другу собственных значений μ_n, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0}=\frac{|\mu_{n_0+1}+\mu_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ - собственные значения оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Пусть для всех $n\in N$ выполняются неравенства $q_n=\frac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n}-\mu_n|}<1$. Известно, что в этом случае контур T_{n_0} содержит одинаковое количество собственных значений операторов T и $T+P$ [3].

Теорема 1. Пусть T - дискретный полуограниченный снизу оператор, а P - ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для всех $n\in N$ выполняются неравенства $q_n<1$ и собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T являются базисом в H, то собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ вычисляются по формулам:

$$\beta_n=\mu_n+(P\omega_n,\omega_n)+\widetilde{\delta}_1(n),\ n=\overline{1,m_0},$$

где $m_0=\sum\limits_{n=1}^{n_0}\nu_n$, $|\widetilde{\delta}_1(n)|\le(2n-1)\rho_n\frac{q^2}{1-q}$, $\widetilde{\delta}_1(n)=\delta_1(n)-\delta_1(n-1)$.

Рассмотрим задачу восстановления потенциала P по собственным значениям $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и собственным функциям $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T и собственным значениям $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T+P$ в гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$, где (a,b) - интервал изменения переменной s. Пусть T - дискретный полуограниченный снизу оператор, а P - ограниченный оператор умножения на функцию $p(s)$. Если для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n < 1$ и собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T является базисом в $L_2(a,b)$, то согласно теореме 1 собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ вычисляются по формулам:

$$\beta_n = \mu_n + \int_a^b \omega_n^2(s)p(s)ds + \tilde{\delta}_1(n),\ n = \overline{1, m_0}.$$

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Ap \equiv \int_a^b K(x,s)p(s)ds = f(x), \quad c \le x \le d, \tag{1}$$

где функции $f(x)$ и $K(x,s)$ такие, что

$$f(x_n) = \beta_n - \mu_n - \tilde{\delta}_1(n), \quad K(x_n, s) = \omega_n^2(s),\ c \le x_n \le d,\ n = \overline{1, m_0}.$$

Пусть ядро интегрального уравнения (1) $K(x,s)$ непрерывно и замкнуто в квадрате $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, а функции $p(s) \in W_2^1[a,b]$ и $f(x) \in L_2[c,d]$.

Задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (1) является некорректно поставленной. Ее приближенное решение может быть найдено с помощью метода регуляризации Н. А. Тихонова. Численное решение уравнения (1) будет определять значения функции $p(s)$ в узловых точках s_i, $i = \overline{1, I}$, $a = s_1 < s_2 < ... < s_I = b$. Число узловых точек I можно выбрать достаточно большим, чтобы получить хорошую точность при интерполяции функции $p(s)$.

Метод был проверен на обратных задачах для операторов типа Штурма-Лиувилля. Результаты многочисленных расчетов показали его вычислительную эффективность.

Список литературы

[1] Дубровский В.В., Кадченко С.И., Кравченко В.Ф., Садовничий В.А. *Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе* // ДАН России. 2001. Т. 380, № 2. С.160–163.

[2] Кадченко С.И., Рязанова Л.С. *Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов* // Вести. Юж-Урал. гос. ун-та. Серия "Математическое моделирование и программирование". 2011. № 17 (234), вып. 8. С. 46–51.

[3] Садовничий В.А. *Теория операторов: учеб. для вузов* – М.: Высш. шк., 1999. 368 с.

Простейший плазмохимический механизм

А.К. Кайракбаев, А.С. Кайракбаева
Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара, Россия
e-mail: kairak@mail.ru

Обоснование соответствия математической модели реальному процессу является важнейшей исследовательской задачей. Такая задача, в частности, включает в себя теоретическое определение области адекватности модели в пространстве параметров, которое зачастую усложняется нелинейностью уравнений, неопределенностью коэффициентов и параметров систем уравнений, входящих в математическую модель.
Рассмотрим плазмохимический механизм (см., например,[1],[2]):

(p1) $e + M \xrightarrow{k_0} R_1 + ... + R_l + e,$

(p2) $M + R_i + R_j \xrightarrow{k_{11}} B,$

(p3) $B + R_i + R_j \xrightarrow{k_{22}} B',$

(p4) $R_i + R_j \xrightarrow{k_{12}} B,$

(p5) $R_i + R_j \xrightarrow{k_{12}} M,$

(p6) $e + B \xrightarrow{b_0} R_i + R_j + e,$

(p7) $R + M \xrightarrow{q_1} B + R,$

(p8) $R \xrightarrow{\chi_1} R_{ads}.$

Необходимые пояснения к этим процессам следующие: (p1)— диссоциация молекул под воздействием электронного удара; (p2),(p3)—появление новых стабильных молекул и преобразование радикала одного типа в радикал другого типа; (p4) и (p5)— рекомбинация радикалов, в результате которого появляется молекулы нового продукта и восстанавливается молекулы исходного вещества соответственно; (p6)— распад молекул нового продукта под действием электронного удара; (p7)— диссоциативная рекомбинация, дающая возможность синтеза; (р8)— диффузионный уход из зоны реакции.

Соответствующая математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d[M]}{d\tau} = -[k_0 n_e][M] - [k_{11}][R]^2[M] - [q_1][R][M] + [k_{12}][R]^2, \\ \frac{d[B]}{d\tau} = -[k_2][B] + [q_1][R][M] - [k_{22}][B][R]^2 + [k_{11}][M][R]^2 + [k_{12}][R]^2, \\ \frac{d[R]}{d\tau} = [k_0 n_e][M] + [b_0 n_e][B] + [k_1][R] - [k_{12}][R]^2 - ([k_{11}[M] + [k_{22}][B])[R]^2, \\ [M(0)] = [M_0],\ [B(0)] = [B_0],\ [R(0)] = [R_0]. \end{cases}$$

Здесь $[M]$ – концентрация исходного вещества, $[R]$ – суммарная концентрация активных радикалов, [B] – полная концентрация синтезируемых продуктов, $[n_e]$ – концентрация электронов. $[k_0], [b_0], [\rho_0]$ – коэффициенты скоростей распада молекул исходного вещества, частиц нового продукта и первичных радикалов под воздействием электронных импульсов, $[k_{22}]$, $[k_{11}]$, $[k_{12}], [q_1]$– коэффициенты скорости синтеза нового продукта. $[k_2] = [\chi_2 - b_0 n_e]$, где $[\chi_2]$ – коэффициент скорости диффузионного пребывания тяжелых частиц в зону реакции, $[k_1] = [\rho_0 n_e - \chi_1]$, $[\chi_1]$ – коэффициент скорости диффузионного ухода радикалов (легких частиц) из зоны реакции, τ–время. Концентрации $[M]$, $[R]$, $[B]$, $[n_e]$ измеряются в (m^{-3}). Размерности $\frac{d[M]}{d\tau}$, $\frac{d[R]}{d\tau}$, $\frac{d[B]}{d\tau}, \sim (m^{-3}c^{-1})$; $[k_i] \sim (c^{-1})$; $[k_{ii}] \sim (m^6 c^{-1})$, $[k_0]$, $[b_0], [q_1], [k_{12}] \sim (m^3 c^{-1}), \tau \sim (c)$.

Переходя к безразмерным величинам с помощью равенств $[M] = [M_0]\mu$, $[B] = [M_0]\beta$, $[R] = [M_0]r$, $t[T] = \tau$, $k_0 n_e = [k_0][n_e][T]$, $k_{ii} = [k_{ii}][M_0]^2[T]$, $k_{12} = [k_{12}][M_0][T]$, $b_0 n_e = [b_0][n_e][T]$, $q_1 = [q_1][M_0][T]$ $k_i = [k_i][T]$, $\dot{(\ )} = \frac{d}{dt}, [T] = 100c$, получим задачу

$$\begin{cases} \dot{\mu} = -k_0 n_e \mu - k_{11} r^2 \mu - q_1 r \mu + k_{12} r^2,\ \mu(0) = 1, \\ \dot{\beta} = -k_2 \beta + k_{11} r^2 \mu - k_{22} r^2 \beta + q_1 r \mu + k_{12} r^2,\ \beta(0) = \beta_0, \\ \dot{r} = k_0 n_e \mu + b_0 n_e \beta + k_1 r - (k_{11}\mu + k_{22}\beta) r^2 - k_{12} r^2,\ r(0) = r_0. \end{cases} \tag{1}$$

Далее, предполагается, что

$$0 \le \beta_0, r_0 << 1. \tag{2}$$

Следует отметить, что значения коэффициентов системы уравнений (1) неизвестны. Известно лишь то, что

$$b_0 n_e, k_{ii}, k_{12}, q_1, k_2, k_0 n_e, k_{12} - k_{22} + k_{11} \ge 0, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Целью данной работы является определение в пространстве коэффициентов области, в которой модель не приводит к физически противоречивым значениям концентраций. Другими словами, выявление необходимых и достаточных условий на коэффициенты, при которых любое решение задачи (1) подчиняется требованиям:

$$0 \le \mu(t), \beta(t), r(t) \le 1, \quad \forall t \in [0; \infty). \tag{4}$$

Теорема. *Каждое решение задачи (1), (2), (3) удовлетворяет неравенствам (4) тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} k_{12} - k_{11} - q_1 - k_0 n_e < 0, \\ k_{12} - k_{22} + k_{11} + q_1 - k_2 < 0, \\ 0 \le k_{11} - k_0 n_e, k_{22} - b_0 n_e, k_{12} - k_1 \le 1. \end{cases}$$

Подобная постановка задачи была рассмотрена в работе [3], в которой приводится подробное доказательство всех утверждений. Схема доказательства сформулированной выше теоремы аналогична [3]. Показанный подход может быть полезным для изучения и понимания процессов в плазмохимическом реакторе.

Список литературы

[1] Зынь В.И. *Топология и кинетика плазмохимической полимеризации в нестационарном тлеющем разряде* - Докторская диссертация, 1995. – 379 с.

[2] Blinov L.M., etc. *Tetrochlorsilane Consumption in Radio Frequency Glow Discharge* // Plasma Chem. Plasma Process. 1998. Vol. 18. № 4.

[3] Кайракбаев А.К. *О коэффициентах модели расщепления тетрахлорокремния в плазмохимическом реакторе* // Вестник Самарского государственного университета. 2008. № 8/1(67). с. 529-534.

Теория Уизема для возмущённых интегрируемых нелинейных уравнений

А.М. Камчатнов

Институт спектроскопии РАН, Троицк, Москва, Россия

e-mail: kamch@isan.troitsk.ru

В теории нелинейных волновых уравнений важную роль играет асимптотический метод Уизема, в котором решения уравнений представляются в виде нелинейных периодических волн с параметрами, мало меняющимися на одной длине волны и на одном периоде, так что модуляционные уравнения Уизема описывают медленную эволюцию этих параметров. Обычно эти модуляционные уравнения выводятся посредством усреднения законов сохранения данного эволюционного уравнения или же усреднения соответствующего лагранжиана по быстрым осцилляциям волны [1]. В результате возникает система уравнений первого порядка с числом переменных, равным числу модуляционных параметров, причём в случае эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, модуляционные уравнения Уизема допускают переход к диагональной римановой форме

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial t} + v_k(\lambda)\frac{\partial \lambda_k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \dots, N, \tag{1}$$

для N модуляционных параметров (римановых инвариантов) λ_k, где v_k — уиземовские скорости. Уизем нашёл такие переменные λ_k в случае волн, описываемых уравнением Кортевега-де Фриза, и позднее подобные переменные были найдены для большого числа других нелинейных эволюционных уравнений. Особенно эффективные методы существуют для эволюционных уравнений

$$u_{i,t} = K(u_j, u_{j,x}, \dots), \quad i, j = 1, \dots, M,$$

принадлежащих схеме Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сегюра (АКНС) [2], когда эти уравнения могут быть представлены в виде условия совместности линейных уравнений

$$\psi_{xx} = \mathcal{A}\psi, \quad \psi_t = -\tfrac{1}{2}\mathcal{B}_x\psi + \mathcal{B}\psi_x, \tag{2}$$

где $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ являются функциями как переменных u_i, так и спектрального параметра λ. В этом случае, в частности, уиземовские скорости могут быть представлены в удобном для вычислений виде, выраженном через $\mathcal{B}$ и произведение базисных функций $g = \psi^*\psi$ спектральной задачи (2) (см., например, [3]). Была развита обширная теория таких уравнений, которая нашла многочисленные приложения, в частности, к теории дисперсионных ударных волн, наблюдавшихся как в природных явлениях, так и в лабораторных экспериментах (см., например, интернет-ресурс [4]). Однако при асимптотически больших временах малые поправки к исходным нелинейным волновым уравнениям могут играть столь же важную роль в медленной эволюции модуляционных параметров, что и малые градиенты этих параметров. Это ставит задачу обобщения метода Уизема на возмущённые уравнения

$$u_{i,t} = K(u_j, u_{j,x}, \dots) + \nu R_i(x, u_j, u_{j,x}, \dots), \quad i, j = 1, \dots, M, \tag{3}$$

где ν — малый параметр при возмущающих членах $R_i(x, u_j, u_{j,x}, \ldots)$. В докладе будет изложено решение этой задачи [5, 6, 7] в рамках схемы АКНС, когда модуляционные уравнения (1) приобретают дополнительные слагаемые, обусловленные возмущением:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial t} + v_k(\lambda)\frac{\partial \lambda_k}{\partial x} = \nu \rho_i, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{4}$$

В рамках этой теории будут предъявлены формулы для функций ρ_i, выражающие их через возмущающие слагаемые R и функцию $\mathcal{A}$ спектральной задачи (2). Общая теория будет проиллюстрирована приложениями к модуляционным задачам для нелинейного уравнения Шредингера с возмущением

$$iu_t + \tfrac{1}{2}u_{xx} - |u|^2\psi = i\nu G(|u|^2)u,$$

где G — действительная функция от $|u|^2$. Будет показано на конкретных задачах, что наличие такого малого возмущения радикально меняет характер решения при асимптотически больших временах $t \gtrsim \nu^{-1}$. В частности, решение может выходить на стационарный режим, что было невозможно в невозмущённой задаче, и метод Уизема позволяет вычислить основные характеристики возникающей волновой структуры.

Список литературы

[1] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны.* - М. Мир, 1977. – 622 с.

[2] Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. - *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems* // Stud. Appl. Math. 1974. V. 53, p. 249-315.

[3] Kamchatnov A.M. *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations—An Introductory Course* - Singapore, World Scientific, 2000. – 383 p.

[4] Hoefer M., Ablowitz M. - *Dispersive shock waves* // Scholarpedia. 4 (11), 5562, 2009.

[5] Kamchatnov A.M. - *On Whitham theory for perturbed integrable equations* // Physica D. 2004. V. 188, p. 247–261.

[6] Kamchatnov A.M., Kartashov Y.V. - *Quasi-one-dimensional flow of polariton condensate past an obstacle* // Europhys. Lett. 2012. V. 97, p. 10006–1–6.

[7] Larré P.-É., Pavloff N., Kamchatnov A.M. - *Wave pattern induced by a localized obstacle in the flow of a one-dimensional polariton condensate* // Phys. Rev. B. 2012. V. 86, p. 165304–1–18.

Задача Дирихле для полигармонического уравнения с сингулярным потенциалом

Б.Е. Кангужин, Н.Е. Токмагамбетов
Казахский национальный ун–т им. аль–Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: tokmagam@list.ru

Здесь в гильбертовом пространстве рассмотрен класс корректных задач для полигармонического оператора в проколотой области. Получен аналог для формулы Грина и класс самосопряженных задач. Найдены некоторые тождества для собственных значений. Вычислены формулы регуляризованных следов рассматриваемых операторов.

"Painleve 34" equation: equivalence test

V.V. Kartak
Bashkir State University, Ufa, Russia
e-mail: kvera@mail.ru

At the beginning of XX century P. Painleve and others found all (special type) second order ODE's whose general solutions have no movable critical singularities – total of 50 equations. Six of which were principaly new – irreducible equations – (they did not allow reducing the order, and their solutions defined new special functions), they are currently called the Painleve equations (the PI-PVI equations). In some books all these 50 equations named "Painleve equation 1-50". The complete list of them is in book [1]. In particular, "Painleve 34" equation is characterized in that their general solution and PII solution

$$PII. \qquad \tilde{y}'' = 2\tilde{y}^3 + \tilde{x}\tilde{y} + a, \quad a = const \tag{1}$$

are expressed one another explicitly using the Bäcklund transformation, see [1]. They can be written in the form of a Hamiltonian system of ordinary differential equations with one degree of freedom, see [2].

In paper [2] as "Painleve 34" is named the following equation:

$$y'' = \frac{y'^2}{2y} - 2y^2 - xy - \frac{\beta^2}{2y}, \qquad \beta = const. \tag{2}$$

Note, that equation from class 34 of Gambier plays important role in the description of multi-ion electrodiffusion models, see [3].

In paper [4] was first stated the problem to derive syzygies (relationships between invariants) for every equation from the list of "Painleve equation 1-50". In the present paper completely solved the equivalence problem under nondegenerate point transformations for the "Painleve 34" equation (2).

Equation (2) is from the following class of the second order ODE's

$$y'' = P(x,y) + 3\,Q(x,y)y' + 3\,R(x,y)y'^2 + S(x,y)y'^3, \tag{3}$$

that is the closed under the point transformations $\tilde{x} = \tilde{x}(x,y)$, $\tilde{y} = \tilde{y}(x,y)$.

In the set of papers, for example see [5], Ruslan Sharipov managed to build the system of the (pseudo)invariants for the arbitrary equation (3) so that all their formulas are calculated explicitly via the coefficients of the equation (3). On the base of this system he has made the classification of the equations (3). Here we use this classification for solving the equivalence problem. Explicit formulas for the parameters A, B, F, M and invariants I_1, I_2, I_4, I_7 see in papers [5], [6].

Theorem 1. *In the case $\beta = 0$ equation (2) (that is written in variables $(x,\, y)$) is equivalent to Painleve II equation (1) with zero parameter $a = 0$ (that is written in variables $(\tilde{x},\, \tilde{y})$) by the following change of variables* $\tilde{y} = i\sqrt{y}/\sqrt[6]{2}$, $\tilde{x} = -x/\sqrt[3]{2}$, $\Rightarrow$ $x = -\sqrt[3]{2}\tilde{x}$, $y = -\sqrt[3]{2}\tilde{y}^2$.

If $\beta \neq 0$, we could make the following change of variables: $y = \tilde{y}^{1/3}\beta^{2/3}$, $x = \tilde{x}\beta^{2/3}$, then equation (2) will be the following:

$$\tilde{y}'' = \frac{5\tilde{y}'^2}{6\tilde{y}} - \beta^2\tilde{y}^{1/3}\left(6\tilde{y} + 3\tilde{x}\tilde{y}^{2/3} + \frac{3}{2}\right). \tag{4}$$

Theorem 2. *The necessary and sufficient conditions for a certain equation (3) to be equivalent to the "Painleve 34" equation (4) are the following:*

1. *The equation corresponds to the case of intermediate degeneration:* $A \neq 0$ *or* $B \neq 0$*, but* $F = 0$.
2. *The equation corresponds to the case 1.4 of intermediate degeneration:* $M \neq 0$, $I_2 = 0$, $I_7 = 0$.
3. *The necessary equivalence condition is satisfied:*

$$500I_1^4 - 7275I_1^3 + 500I_4I_1^2 + 32940I_1^2 - 5475I_4I_1 - 47628I_1 + 125I_4^2 + 13230I_4 = 0.$$

4. There exists a nondegenerate invariant change of variables

$$\tilde{y} = \frac{125(2322I_1 + 3I_4 + 20I_4I_1 - 915I_1^2 + 75I_1^3)}{2(-1469664 + 1250I_4I_1 - 13875I_4 + 691470I_1 - 90825I_1^2 + 3375I_1^3)},$$
$$\tilde{x} = \frac{(120I_3 - 8)\tilde{y}^3 + (138 + 180I_3)\tilde{y}^2 + (90I_3 + 35)\tilde{y} + 15I_3}{2\tilde{y}^{5/3}(2\tilde{y} - 35)},$$

here we should substitude the invariant expression of $\tilde{y}$.

Example. Equation describing 3-ion case (3a) from [3]

$$w'' - \frac{w'^2}{2w} + \nu_1^2\left(-2k_1w^2 - (Ct + K)w + \frac{k_2}{w}\right) = 0,\ \nu_1,\ k_1,\ k_2,\ C,\ K = const$$

is “Painleve 34” equation if $\nu_1,\ k_1,\ k_2,\ C \neq 0$. All conditions of Theorem 2 are true. The following point transformation: $y = -(k_1w^3)/(2k_2)$, $x = -(tC)/(2^{1/3}k_1^{2/3}k_2^{1/3})$ transforms this equation (that is written in variables (t, w)) into equation (4) (that is written into variables (x, y)).

The work is partially supported by the Government of Russian Federation through Resolution No. 220, Agreement No. 11.G34.31.0042, Agreement No. 14.B37.21.0358 and RFBR, project 13-01-00149.

Список литературы

[1] Ince E.L. *Ordinary differential equations.* Courier Dover Publ., 1956.

[2] Suleimanov B.I. *“Quantizations” of the second Painleve equation and the problem of the equivalence of its L-A pairs* // Theoretical and Mathematical Physics. 2008. V. 156, N 3. P. 1280-1291.

[3] Conte R., Rogers C. and Schief W. K. *Painleve structure of a multi-ion electrodiffusion system* // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. F1031-F1040.

[4] Hietarinta J., Dryuma V. *Is my ODE a Painleve equation in disguise?* // Journal of Nonlin. Math. Phys. 2002. V. 9. № 1. P. 67-74.

[5] Sharipov R.A. *Effective procedure of point classification for the equations* $y'' = P + 3\,Q\,y' + 3\,R\,y'^2 + S\,y'^3$ // Archive at LANL Math$\dot{\text{D}}$G/9802027.

[6] Kartak V.V. *Solution of the equivalence problem for the Painleve IV equation* // Theor. and Math. Physics. 2012. V. 173, № 2. P. 1541-1564.

Полнота систем производных аналитических функций в выпуклой области

В.Э. Ким
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия
e-mail: kim@matem.anrb.ru

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - выпуклая область, $H(D)$ - пространство аналитических в области D функций. В докладе будет представлен следующий результат.

Теорема 1 *Пусть* $T : H(D) \to H(D)$ *- линейный непрерывный оператор, такой что* $[T, \mathrm{d/dz}] = \mathrm{Id}$, $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$. *Пусть* $f \in \operatorname{Ker} T \setminus \{0\}$. *Тогда система* $\{f^{(n)}, n = 0, 1, \cdots\}$ *полна в* $H(D)$.

В качестве следствия из этого результата будет доказано, что оператор T, удовлетворяющий условиям приведенной выше теоремы, является гиперциклическим оператором в пространстве $H(D)$. Подробные сведения о гиперциклических операторах можно найти, например, в монографии [1].

Список литературы

[1] Bayart F., Matheron E. *Dynamics of linear operators.* Cambridge University Press, 2009. – 337 с.

О решениях анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью в неограниченных областях

Л.М. Кожевникова, А.А. Леонтьев
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия
e-mail: kosul@mail.ru, alexey_leontiev@inbox.ru

Пусть Ω — неограниченная область $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндре $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для анизотропного параболического уравнения второго порядка с двойной нелинейностью рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(u_{x_\alpha}^2) u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad k > 1, \quad (t, \mathbf{x}) \in D; \tag{1}$$

$$u(t, \mathbf{x})\big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0,\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x}),\quad \varphi(\mathbf{x})\in L_k(\Omega),\quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x})\in L_{p_\alpha}(\Omega),\quad \alpha=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s\geq 0$, $\alpha=\overline{1,n}$, подчиняются условиям: $a(0)=0$, $a(s)\in C^1(0,\infty)$,

$$\overline{a}s^{(p_\alpha-2)/2}\leq a_\alpha(s)\leq \widehat{a}s^{(p_\alpha-2)/2},\quad \frac{p_1}{2}a_\alpha(s)\leq a_\alpha(s)+a'_\alpha(s)s\leq \widehat{b}a_\alpha(s),$$

с положительными константами $\widehat{a}\geq\overline{a}$, $2\widehat{b}\geq p_1>k$ $(p_1\leq p_2\leq\ldots\leq p_n)$. Например, $a_\alpha(s)=s^{(p_\alpha-2)/2}$, $\alpha=\overline{1,n}$, $\widehat{b}=p_n$.

Работа посвящена исследованию зависимости скорости стабилизации при $t\to\infty$ решения задачи (1) – (3) с финитной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$ от показателей нелинейности.

Банаховы пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ определим как пополнения пространств $C_0^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(D^{T+1}_{-1})$, соответственно, по нормам $\|u\|_{W^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}=\sum_{\alpha=1}^n\|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\Omega)}+\|u\|_{L_k(\Omega)}$, $\|u\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}=\|u\|_{L_k(D^T)}+\sum_{\alpha=1}^n\|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(D^T)}$, $\|u\|_{W^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}=\|u\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}+\|u_t\|_{L_k(D^T)}$.

Определение. *Обобщенным решением задачи (1)–(3) с функцией* $\varphi(\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *назовем функцию* $u(t,\mathbf{x})$ *такую, что при всех* $T>0$ $u(t,\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *и удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{D^T}\left(-|u|^{k-2}uv_t+\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}v_{x_\alpha}\right)d\mathbf{x}dt=\int\limits_{\Omega}|\varphi(\mathbf{x})|^{k-2}\varphi(\mathbf{x})v(0,\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

для любой функции $v(t,\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $v(T,\mathbf{x})=0$.

Существование решения задачи (1)-(3) доказывается методом галеркинских приближений, который был предложен Ф.Х. Мукминовым, Э.Р. Андрияновой для модельного изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью и обобщен авторами статьи на уравнения вида (1) (см. [1], [2]).

Утверждение. *Если* $\sum\limits_{\alpha=1}^n 1/p_\alpha<1+n/p_n$, *то обобщенное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1) – (3) *с ограниченной начальной функцией* $\varphi(\mathbf{x})\in L_\infty(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *является ограниченным.*

Приведем результат об убывании для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_s, $s\in\overline{1,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s>0$, сечение $\gamma_r=\{\mathbf{x}\in\Omega\mid x_s=r\}$ не пусто и ограничено при любом $r>0$). Предполагается, что

$$\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega^{R_0},\quad R_0>0.$$

Теорема 1. *Существуют* $C(\varphi, k, p_1, \widehat{a}, \widehat{b}) > 0$ *и ограниченное решение* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *такие, что при всех* $t \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} \left(C(\varphi)t + 1\right)^{-1/(p_1-k)}.$$

Для $r > 0$ введем следующие обозначения:

$$\nu(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} = 1\right\},$$

$$\mu_1(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\Omega^r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega^r)} = 1\right\}, \Omega^r = \{\mathbf{x} \in \Omega \,|x_s < r\}.$$

Предполагается, что выполнено условие: $\lim\limits_{r\to\infty} \mu_1(r) = 0$. Иначе достигается максимальная скорость убывания решения, т.е. справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq Mt^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0.$$

Теорема 2. *Пусть* $s \in \overline{2, n}$. *Если выполнены условия:*

$$\mu_1(r) \geq Cr^{-a}, \quad r > 1, \quad a, C > 0, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho = \infty,$$

то существуют $M(p_s, p_1, \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}) > 0$ *и ограниченное решение* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *такие, что для любого* $\varepsilon \in (0, 1)$ *справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq Mt^{-(1-\varepsilon)/(p_1-k)}, \quad t > 0.$$

Список литературы

[1] Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 4. С. 64-85.

[2] Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях* // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, № 1. С. 65-83.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-0081-а).

Убывание решений анизотропных эллиптических уравнений с младшими членами в неограниченных областях

Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи
Башкирский государственный университет, Стерлитамак, Россия
e-mail: kosul@mail.ru, anna_5955@mail.ru

Работа посвящена некоторому классу анизотропных эллиптических уравнений второго порядка, представителем которого является модельное уравнение вида

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha} - |u|^{k-2}u = \Phi(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$p_n \geq ... \geq p_2 \geq p_1 > 1,\ k > 1.$$

Для него в произвольной неограниченной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$, $\ n \geq 2$, рассматривается задача Дирихле с однородным граничным условием

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Основной результат этой работы — исследование зависимости скорости убывания решения задачи (1), (2) от геометрии неограниченной области Ω и показателей нелинейности.

Положим: $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(\Omega)$, $\ \mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha} + \|v\|_k.$$

Определение. *Обобщенным решением задачи (1), (2) с* $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{k/(k-1)}(\Omega)$, *назовем функцию* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha}v_{x_\alpha} + (|u|^{k-2}u + \Phi(\mathbf{x}))v \right\} d\mathbf{x} = 0$$

для любой функции $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$.

И.М. Колодий [1] установил ограниченность решений некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений в ограниченных областях. Здесь приведен результат об ограниченности решений задачи (1), (2) в неограниченных областях Ω.

Теорема 1. *Пусть* $u(\mathbf{x})$ *— обобщенное решение задачи (1), (2) и выполнены условия*

$$1 < \sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha < 1 + n/k^2, \quad k^2 - nk + n \geq 0.$$

Тогда

$$\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |u(\mathbf{x})| \leq C,$$

где C *— константа, зависящая от* $p_\alpha,\ k,\ n,\ \|\Phi\|_{k/(k-1)}$.

Двусторонние оценки, характеризующие убывание решения задачи Дирихле для анизотропных уравнений без младших членов, получены в работе [2]. Здесь приведем оценку сверху для решения уравнения (1).

Будем рассматривать неограниченные области расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{2,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$ и сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто при любом $r > 0$). Введем обозначения: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \;\Big|\; a < x_s < b\}$, значения $a = 0,\ b = \infty$ опускаются.

Определим геометрическую характеристику неограниченной области Ω :

$$\nu(r) = \inf\left\{ \|g_{x_1}\|_{p_1,\gamma_r} \;\Big|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{p_1,\gamma_r} = 1 \right\}, \quad r > 0.$$

Предполагаются выполненными следующие условия:

$$\int_1^\infty \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho = \infty,$$

$$\operatorname{supp}\Phi(\mathbf{x}) \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0.$$

Теорема 2. *Существуют положительные числа* κ, $\mathcal{M}$ *такие, что для ограниченного обобщенного решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи (1), (2) при* $r > 2R_0$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,\Omega_r}^{p_\alpha} + \|u\|_{r,\Omega_r}^{r} \leq \mathcal{M}\exp\left(-\kappa\int_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right).$$

Список литературы

[1] Колодий И.М. *Об ограниченности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений* // Вестник МГУ. 1970. № 5. С. 45-52.

[2] Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // Вестник СамГТУ. 2013. Т. 30, № 1.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-0081-а).

Аналог теоремы Абеля для рядов экспоненциальных многочленов

О.А. Кривошеева
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
e-mail: kriolesya2006@yandex.ru

В работе изучается сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k(z), \qquad (1)$$

где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность.

Для каждой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ зафиксируем последовательность выпуклых компактов $K(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$, которая строго исчерпывает ее, т.е. $K_p \subset int K_{p+1}$, $p = 1, 2, \ldots$, (int – внутренность множества) и $D = \cup_{p=1}^{\infty} K_p$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, и e_m — целая функция, $m = 1, 2, \ldots$ Будем говорить (см. [1]), что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}$, если для любой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ выполнены два условия:

1) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w \in K_p} |e_k(w)| \leq a \exp\left(H_{K_s}(\lambda_k)\right), \quad k = 1, 2, \ldots;$$

2) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp\left(H_{K_p}(\lambda_k)\right) \leq \sup_{w \in K_s} |e_k(w)|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Здесь $H_M(\lambda)$ обозначает опорную функцию множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества):

$$H_M(\lambda) = \sup_{w \in M} Re(\lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Частными случаями почти экспоненциальных последовательностей являются последовательности экспонент и более общих экспоненциальных мономов. Сходимость рядов экспоненциальных мономов изучалась в работе [2]. В ней получены аналог теоремы Абеля для рядов экспоненциальных мономов. Почти экспоненциальные последовательности более общего вида рассматривались в работе [3]. Они состоят из линейных комбинаций экспоненциальных многочленов, показатели которых образуют так называемые "относительно малые"группы. Подобные последовательности используются в теории представления элементов инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространств функций, аналитических в выпуклой области (см. [4]), и, в частности, пространств решений однородных уравнений свертки и их систем. В этой связи возникает задача исследования сходимости рядов экспоненциальных многочленов, построенных по почти экспоненциальным последовательностям таких многочленов. В настоящей работе изучаются области сходимости указанных рядов. Для них получен аналог теоремы Абеля.

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $K(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $p = 1, 2, \ldots$

Введем банахово пространство комплексных последовательностей

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_k\} : ||d_p|| = \sup_{k \geq 1} |d_k| \exp H_{K_p}(\lambda_k) < \infty\},\ p \geq 1.$$

Символом $\mathbb{S}$ будем обозначать окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть E — множество в $\mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$. Θ-выпуклой оболочкой E называется множество

$$E(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\xi) < H_E(\xi), \xi \in \Theta\}.$$

Через $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество всех частичных пределов последовательности $\{\lambda_k/|\lambda_k|\}_{k=1}^{\infty}$ (исключая точку $\lambda_k = 0$, если она есть). Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое подмножество $\mathbb{S}$. Символом $B(x, \delta)$ будем обозначать открытый круг с центром в точке x и радиуса δ.

Также введем величину

$$\sigma(\Lambda) = \overline{\lim}_{k\to\infty} \ln k/|\lambda_k|$$

Следующий результат является аналогом теоремы Абеля.

Теорема 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$, такая, что $\sigma(\Lambda) = 0$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что общий член ряда (1) ограничен на каждом компакте K открытого множества $E \subset \mathbb{C}$. Тогда для каждого номера $p = 1, 2, \ldots$ най-*

дутся номер s и число $C_p > 0$ (не зависящие от последовательности d) такие, что выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \sup_{z \in K_p} |e_k(z)| \leq C_p ||d||_s,$$

где нормы $||d_p||$ построены по последовательности $K(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ и $D = E(\Theta(\Lambda))$. В частности, ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте области D.

Список литературы

[1] Кривошеев А.С. *Почти экспоненциальный базис* // Уфимский математический журнал. 2010. Т.2. №1. С. 87-96.

[2] Кривошеева О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимский математический журнал. 2011. Т.3. №2. С. 43-56.

[3] Кривошеев А.С. *Почти экспоненциальная последовательность экспоненциальных многочленов* // Уфимский математический журнал. 2012. Т.4. №1. С. 88-106.

[4] Кривошеев А.С. *Базисы "по относительно малым группам".* // Уфимский математический журнал. 2010. Т.2. №2. С. 67-89.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение 14.B37.21.0358).

О некоторых нелинейных задачах оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями с управлениям в коэффициенте условия сопряжения

Ф.В. Лубышев, М.Э. Файрузов, А.Р. Манапова

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: fairuzovme@mail.ru

В настоящее время наименее изучены задачи оптимального управления нелинейного типа, характерной особенностью которых является то, что отображение $g \to u(g)$ из множества допустимых управлений U в пространство состояний W является нелинейным. Особый интерес представляют задачи оптимального управления для УМФ, когда нелинейность обусловлена вхождением управлений в коэффициенты уравнений для состояний. Нелинейность еще более усугубляется, если, кроме того, и состояния процессов оказываются нелинейными уравнениями. Между тем развитие теории и методов решения таких задач вызвано потребностями математического моделирования нелинейных оптимальных процессов, большой прикладной важностью таких задач при оптимизации процессов теплофизики, диффузии, фильтрации, теории упругости и др., а также при решении обратных задач для УМФ, рассматриваемых в вариационной постановке. Особый интерес представляют также задачи оптимального управления нелинейного типа для УМФ с разрывными коэффициентами и решениями.

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ – прямоугольник с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть область Ω разделена прямой $x_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ (контактной границей $\overline{S} = \{x_1 = \xi, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$, $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 = \{0 < x_1 < \xi, 0 < x_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 = \{\xi < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$ с границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. Через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1,2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Ниже, при постановках краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой будут разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью. Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух подобластей Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решением: Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2$, где компоненты $u_k(x)$, $k = 1,2$ удовлетворяют условиям: 1) функции $u_k(x)$, $k = 1,2$ определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, $k = 1,2$, удовлетворяют в Ω_k, $k = 1,2$ уравнениям

$$L_k u_k = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(k)}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right) + d_k(x) q_k(u_k) = f_k(x), x \in \Omega_k, k = 1,2,$$

а на границе $\overline{\Gamma}_k = \partial\Omega_k \setminus S$ условиям $u_k(x) = 0$, $x \in \overline{\Gamma}_k$, $k = 1,2$; 2) искомые функции $u_k(x)$, $k = 1,2$ удовлетворяют дополнительным условиям на S, позволяющим "сшить" решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2, следующего вида

$$G(x) = k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)(u_2(x) - u_1(x)), \qquad x \in S.$$

Здесь $[u] = u_2(x) - u_1(x)$ – скачек функции $u(x)$ на S, $k_\alpha^{(1)}(x)$, $k_\alpha^{(2)}(x)$, $\alpha = 1,2$, $d_k(x)$, $f_k(x)$ и $q_k(\xi)$, $k = 1,2$ – известные функции, определяемые по разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S; $\theta(x_2) \equiv g(x_2)$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W^1_\infty(\Omega_1) \times W^1_\infty(\Omega_2)$, $d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $f_\alpha(x) \in L_2(\Omega_\alpha)$; $0 < \nu^{(p)}_\alpha \leq k^{(p)}_\alpha \leq \overline{\nu}^{(p)}_\alpha$, $p = 1, 2$, $0 \leq d_0 \leq d(x) \leq \overline{d}_0$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\nu^{(p)}_\alpha$, $\overline{\nu}^{(p)}_\alpha$, $p = 1, 2$, d_0, $\overline{d}_0$ – заданные константы, функция $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$ определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0$, $0 \leq q_0 \leq (q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2))/(\xi_1 - \xi_2) \leq L_q < \infty$ для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \neq \xi_2$. Введем множество допустимых управлений $U = \big\{g(x_2) \equiv \theta(x_2) \in L_2(0, l_2) : g_0 \leq g(x_2) \leq \overline{g}_0$ п.в. на $(0, l_2)\big\}$. Зададим функционал цели $J : U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \left\|u(x, g) - u^{(1)}_0(x)\right\|^2_{L_2(\Omega_1)} = I(u(x; g)),$$

где $u^{(1)}_0 \in W^1_2(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве U функционал цели $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(x) = u(x; g)$ задачи для состояния, отвечающих всем допустимым управлениям $g = \theta(x_2) \in U$ требуется минимизировать функционал цели $J(g)$.

Исследована корректность постановки задачи оптимального управления. Построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу, доказана слабая сходимость аппроксимаций по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций по Тихонову.

В теплофизических терминах, поставленную задачу можно трактовать как задачу оптимального управления контактным тепловым сопротивлением $\theta^{-1}(x_2)$ ($\theta(x_2)$ – контактная проводимость), характеризующим теплопередачу между соприкасающимися теплопроводящими средами (телами) с неидеальным контактом с целью обеспечения в Ω_1 заданного температурного режима $u^{(1)}_0(x)$.

Данная работа примыкает к [1] и развивает установленные там результаты.

Список литературы

[1] Лубышев Ф.В. *О разностных аппроксимациях задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 8. С. 1378-1399.

The problem of multiple interpolation in a class of functions of a zero order in the half-plane

K.G. Malyutin, O.A. Bozhenko
Sumy state university, Sumy, Ukraine
e-mail: malyutinkg@yahoo.com

The problem of multiple interpolation is considered in a class $[\rho(r),\infty)_+$ of functions of at most normal type for the zero proximate order $\rho(r)$ in the upper half-plane of the complex variable: $F(a_n)^{(k-1)} = b_{n,k}, k = 1, 2, \dots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, where the divisor $D = \{a_n, q_n\}$ has limit points only the real axis, and the numbers $b_{n,k}$ satisfy the condition

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|a_n|^{\rho(|a_n|)}} \sup_{1\le k\le q_n} \log^+ \frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!} < \infty\,, \Lambda_n = \min\{1, \Im a_n\}\,.$$

The problem belongs to the class of problems of free interpolation which A.F. Leontyev for the first time started considering. Necessary and sufficient conditions of resolvability of this problem are found. The found criteria are formulated as in terms of the canonical products constructed on knots of interpolation, and in terms of the Nevanlinna measure determined by these knots. The following result is valued:

Theorem *D is an interpolation divisor in the class $[\rho(r),\infty)_+$ if and only if*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|a_n|^{\rho(|a_n|)}} \ln \frac{q_n}{|E^{(q_n)}(a_n)|\Lambda_n^{q_n}} < \infty\,.$$

Work is continuation of researches of the first author considering similar problems in classes of analytical functions in half-plane of a nonzero order [1].

Список литературы

[1] Malyutin K.G. *The problem of multiple interpolation in in the half-plane in the class of analytical functions of finite order and normal type* // Mat. Sb. 1993. Vol. 184, No 2. P. 129-144; English transl. in Russian Acad. Sci. Sb. Math. 1994. Vol. 78, No 1. P. 253-266.

Обратная спектральная задача на геометрическом графе типа "дерево"

Ю.В. Мартынова
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
e-mail: busa1987@mail.ru

Рассмотрим электрическую цепь в виде произвольного геометрического графа типа «дерево» (без циклов). На каждом из P линейных фрагментов сети, представляющих собой ребра геометрического графа, задается уравнение электрических колебаний в проводнике длиной l_k с распределенными емкостью C_k и индуктивностью L_k, рассчитанными на единицу длины провода соответствующего k-го проводника. Граничные условия описывают ситуацию, когда i-ый проводник, $i = \overline{1,N}$ заземлен через сосредоточенную самоиндукцию $\tilde{L}_i$ и емкость $\tilde{C}_i$, соединенные последовательно.

Конечный связный граф является деревом с P вершинами тогда и только тогда, когда число вершин (узлов) равно $P+1$. В каждом из $M = P+1-N$ неграничных узлов задаются условия непрерывности потенциала и условия баланса токов, известные как законы Кирхгофа.

Введем обозначения $a_i^2 = \frac{1}{L_i C_i}$, $p_{i1} = \frac{C_i}{\tilde{C}_i} > 0, i = \overline{1,N}$, $p_{i2} = -C_i \tilde{L}_i, i = \overline{1,N}$.

Тогда получаем краевую задачу:

$$a_k^2 {y_k}''(x_k) + \lambda y_k(x_k), x_k \in (0;l_k), k = \overline{1,P}, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k) = 0, k = \overline{1,N}, \tag{2}$$

и соответствующими условиями в узлах ветвления: Исходя из физического смысла задачи, коэффициенты p_{i1}, p_{i2}, $i = \overline{1,N}$, должны быть вещественными, более того, $p_{i1} > 0$, $p_{i2} < 0$, $i = \overline{1,N}$.

Обратная спектральная задача для поставленной краевой задачи состоит в нахождении всевозможных значений вектора $\vec{p} = (p_{11}, ..., p_{N1}, p_{12}, ..., p_{N2})$ коэффициентов граничных условий, при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2N}$ являются собственными значениями краевой задачи.

В работе доказывается теорема о монотонной зависимости коэффициентов граничных условий от вектора $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2N})$.

Теорема. Пусть $\lambda = \lambda(\vec{p}) = \lambda(p_{11}, ..., p_{2N})$ – произвольное собственное значение поставленной краевой задачи. Тогда $\frac{\partial \lambda(\vec{p})}{\partial p_{k1}} > 0$ и $\frac{\partial \lambda(\vec{p})}{\partial p_{k2}} > 0$ в области $p_{k1} > 0$ и $p_{k2} < 0$, $k = \overline{1,N}$.

Список литературы

[1] *Покорный Ю. В., Пенкин О. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. Москва: Физматлит, 2005. 272 с.

[2] *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Валеев Н. Ф.* Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады РАН. 2009. Т. 426, №4. С. 1–4.

[3] *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Саратовский педагогический институт, 2001. 499 с.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 12-01-00567-а).

Кратная интерполяция рядами экспонент в $H(\mathbb{C})$ с узлами на вещественной оси

С.Г. Мерзляков, С.В. Попёнов
ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия
e-mail: spopenov@gmail.com

Обозначим через $H(\mathbb{C})$ пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, W — инвариантное подпространство в $H(\mathbb{C})$.

Изучается проблема кратной интерполяции в $H(\mathbb{C})$ функциями из W: *Для произвольного дискретного множества узлов интерполяции $\mu_k \in \mathbb{C}$ с кратностями m_k, и для любых интерполяционных данных*

$$b_k^j \in \mathbb{C},\ j = 0, 1, \cdots, m_k - 1,\ k \in \mathbb{N},$$

найти такую функцию $g \in W$, что

$$g^{(j)}(\mu_k) = b_k^j,\ j = 0, 1, \cdots, m_k - 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Эта проблема равносильна следующей.
Для любой целой функции ω найти такую функцию $g \in W$, что

$$|\omega(z) - g(z)| = O(|z - \mu_k|^{m_k})$$

при $z \to \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим бесконечную дискретную последовательность комплексных чисел $\Lambda = \Lambda^- \cup \Lambda^+$, где $\Lambda^- = \{\lambda_{-n}\}_{n=1}^{\omega_1}$ или $\Lambda^- = \varnothing$, и $\Lambda^+ = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\omega_2}$ или $\Lambda^+ = \varnothing$. Здесь $\omega_1 \leqslant +\infty$, $\omega_2 \leqslant +\infty$.

Зафиксируем $\alpha \in (0, \pi/2)$. Предположим, что все λ_{-n} лежат в угле $A_\alpha(\pi) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \pi| \leqslant \alpha\}$, а все λ_n лежат в угле $A_\alpha(0) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant \alpha\}$.

Пусть также задано бесконечное дискретное множество вещественных узлов интерполяции $\mathcal{M} = \mathcal{M}^- \cup \mathcal{M}^+$, где $\mathcal{M}^- = \{\mu_{-k}\}_{k=1}^{\tau_2}$, $\mu_{-k} < 0$, или $\mathcal{M}^- = \varnothing$, а $\mathcal{M}^+ = \{\mu_k\}_{k=1}^{\tau_1}$, $\mu_k \geqslant 0$, или $\mathcal{M}^+ = \varnothing$. Здесь $\tau_1 \leqslant +\infty$, $\tau_2 \leqslant +\infty$.

Предположим, что каждому узлу $\mu_{\pm k} \in \mathcal{M}$ приписана кратность $m_{\pm k} \in \mathbb{N}$.

Пусть задана бесконечная система экспонент $\mathcal{E}_0 = \{e^{t_j z}\}$, которая соответствует некоторой последовательности показателей $\mathcal{T} = \{t_j\} \subset \Lambda$.

Рассмотрим следующую проблему кратной интерполяции рядами экспонент с последовательностью показателей $\mathcal{T}$, с множеством узлов $\mathcal{M}$ с заданными кратностями.

Для произвольной целой функции g найти ряд экспонент f с множеством показателей $\mathcal{T}$ вида

$$f(z) = \sum_{t_j \in \mathcal{T}} c_j e^{t_j z},\ z \in \mathbb{C},$$

сходящийся в пространстве $H(\mathbb{C})$, такой, что для всех $\mu_{\pm k} \in \mathcal{M}$

$$|f(z) - g(z)| = O(|z - \mu_{\pm k}|^{m_{\pm k}}),\ z \to \mu_{\pm k}.$$

Теорема. *1. Пусть множество узлов $\mathcal{M}^+$ — конечное или пустое. В пространстве $H(\mathbb{C})$ разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma(\Lambda)$ с множеством узлов $\mathcal{M}$, тогда, и только тогда,когда последовательность Λ^- — бесконечная.*

2. Пусть оба множества узлов $\mathcal{M}^-$ и $\mathcal{M}^+$ — бесконечные. Пространстве $H(\mathbb{C})$ разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma(\Lambda)$ с множеством узлов $\mathcal{M}$, тогда, и только тогда, когда обе последовательности Λ^- и Λ^+ бесконечные.

Обозначим через $P_{\mathbb{C}}$ — пространство целых функций экспоненциального типа с традиционной (LN^*)-топологией. Пусть $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, $\varphi \not\equiv 0$, целая функция экспоненциального типа с простыми нулями. Она порождает в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$ непрерывный оператор свертки

$M_\varphi : H(\mathbb{C}) \longmapsto H(\mathbb{C})$,

$$M_\varphi[f](z) = \langle F_\lambda, f(z+\lambda) \rangle\,,\ z \in \mathbb{C},$$

где $f \in H(\mathbb{C})$. Обозначим $\operatorname{Ker} M_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = 0\}$, Z_φ — нулевое множество функции φ.

В частности нами найдено более простое доказательство следующего результата работы [1] о разрешимости многоточечной задачи Валле Пуссена с бесконечным множеством точек:

Пусть $\Lambda = Z_\varphi$, *а* $W = \operatorname{Ker} M_\varphi$, *и пусть оба множества узлов* $\mathcal{M}^-$ *и* $\mathcal{M}^+$ *— бесконечные. Если обе последовательности* Λ^- *и* Λ^+ *бесконечные, то в пространстве* $H(\mathbb{C})$ *разрешима проблема простой интерполяции рядами экспонент из* $\operatorname{Ker} M_\varphi$, *с множеством узлов* $\mathcal{M}$.

Наше доказательство достаточности условий Теоремы основано на переходе к двойственной проблеме в пространстве $P_{\mathbb{C}}$, которая равносильна рассматриваемой проблеме интерполяции. Необходимость условий Теоремы вытекает из результатов А.Ф. Леонтьева.

Найдены примеры, показывающие существенность условий Теоремы и доказано, что единственности интерполяции в рассматриваемых условиях быть не может. Рассмотрен случай, когда λ_n выходят за пределы углов $A_\alpha(\pi)$, $A_\alpha(0)$ для любого $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Список литературы

[1] Напалков В. В., Нуятов А. А. *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки.* // Матем. сб. 2012. 203:2. С. 77-86.

О фазовом сдвиге в анзаце Кузмака-Уизема для некоторых нелинейных задач.

Д.С. Миненков

Институт Проблем Механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,

Москва, Россия

e-mail: minenkov.ds@gmail.com

Рассматриваются асимптотические решения в форме анзаца Кузмака-Уизема задач Коши для нелинейного осциллятора, волнового уравнения и уравнения Кортевега-де-Фриза. Такие решения обсуждались во многих работах. Хорошо известно, что главный член асимптотического решения может быть представлен в форме $X(\frac{S(t)}{h} + \phi(t), I(t), t)$, где фаза S, медленно меняющийся параметр I и так называемый "фазовый сдвиг" ϕ находятся из системы "осредненных" уравнений. Представляемый результат заключается в том, что можно рассматривать фазовый сдвиг как часть фазы S. Таким образом, для нахождения главного члена асимптотики достаточно решить систему на фазу S и параметр I, подправляя соответствующим образом начальные данные для них. Похоже, что этот результат может быть использован для многих нелинейных задач.

Сформулируем конечный результат для нелинейного осцилятора. Рассмотрим задачу Коши (1)

$$h^2\ddot{x}+V_x(x,t)+hg(h\dot{x},x,t)=0,\quad x|_{t=0}=x^0,\quad h\dot{x}|_{t=0}=p^0,\quad x(t)\in\mathbb{R},\ (1)$$

где $g(\xi,x,t)$ является нечетной функцией ξ и может описывать неконсервативные эффекты.

Теорема 1 *Пусть существуют положительные числа a, b, t_0, такие что для $\mathcal{I}\in[a,b], t\in[0,t_0]$:*

$\mathbf{i_1}$) *функция $X(\theta,I,t)$ – 2π-периодическая по θ и является решением уравнения (с "замороженным" временем) (2):*

$$\Omega^2(I,t)X_{\theta\theta}(\theta,I,t)+V_x(x,t)=0,\tag{2}$$

где $\Omega(I,t)=2\pi/\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{2(E(I,t)-V(x,t))}}$, $I(t)=\frac{1}{\pi}\int_{x_-}^{x_+}\sqrt{2(E(I,t)-V(x,t))}dX$, $x_\pm$ – *корни уравнения* $V(x,t)=E(I,t)$.

и $\mathbf{i_2}$) *существует решение $\mathcal{I}(t,h)\in[a,b]$, $\mathcal{S}(t,h)$ задачи Коши для "осредненных" уравнений (3) со скорректированными начальными условиями (4):*

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt}=\Omega(\mathcal{I},\tau),\quad \frac{d\mathcal{I}}{dt}=-G(\mathcal{I},\tau),\tag{3}$$

где $G(I,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X_\theta(\theta,I,t)\cdot g\big(\Omega(I,t)X_\theta(\theta,I,t),X(\theta,I,t),t\big)d\theta$;

$$\mathcal{I}|_{t=0}=I^0(x^0,p^0)+hJ^0(x^0,p^0),\quad \mathcal{S}|_{t=0}=h\phi^0(x^0,p^0),\tag{4}$$

где $J^0(x^0,p^0)=-\frac{1}{\Omega(I^0,0)^2}\int_0^{\phi^0}\big\{V_t(X(\theta,I^0,0),0)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V_t(X,0)d\theta\big\}d\theta+$ $+\frac{1}{\Omega(I^0,0)}\int_0^{\phi^0}\big\{X_\theta(\theta,I^0,0)\cdot g\big(\Omega(I^0,0)X_\theta(\theta,I^0,0),X(\theta,I^0,0),0\big)-G(I^0,0)\big\}d\theta$.

Тогда для решения $x(t,h)$ задачи Коши (1) на временах $t\in[0,t_0/h]$ справедливо следующее представление

$$x=X\Big(\frac{\mathcal{S}(t,h)}{h},\mathcal{I}(t,h),t\Big)+O(h).$$

Работа выполнена совместно с С.Ю. Доброхотовым (ИПМех РАН, МФТИ, Москва). В докладе приведены результаты работ [1, 2].

Список литературы

[1] S.Yu. Dobrokhotov, D.S. Minenkov, "On Various Averaging Methods for a Nonlinear Oscillator with Slow Time-dependent Potential and a Non-conservative Perturbation", Regular and Chaotic Dynamics (2010) Vol. 15, No. 2-3, pp. 285-299.

[2] С.Ю. Доброхотов, Д.С. Миненков, "О фазовом сдвиге в анзаце Кузмака-Уизема", ТМФ, 166:3 (2011) 350-365.

Асимптотика фундаментальной системы решений сингулярного дифференциального уравнения четного порядка с комплексными коэффициентами

В.Р. Мукимов, В.В. Чудинов ,И.И. Шайхлисламова

Бирский филиал Башкирского государственного университета, Бирск, Россия

e-mail: chudinovvv@rambler.ru

Рассмотрим минимальный дифференциальный оператор L_0, порожденный в $L^2[0,\infty)$ дифференциальным выражением

$$ly = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(p_k(x)\, y^{(k)}\right)^{(k)} + i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left(\left(q_j(x)\, y^{(j)}\right)^{(j+1)} + \left(q_j(x)\, y^{(j+1)}\right)^{(j)}\right).$$

Рассмотрим уравнение

$$ly = i\sigma y \quad (\sigma \neq 0)\,.$$

Введем следующие обозначения

$$F(x,\sigma,\mu) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k p_k(x)\, \mu^{2k} + 2i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j q_j(x)\, \mu^{2j+1} - i\sigma,$$

$$y_{k_0}(x,\sigma) = \left(\frac{\partial F(x,\sigma,\mu_j)}{\partial \mu}\right)^{-1/2} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \mu_j(t,\sigma)dt\right\}.$$

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) $|p_0(x)| \to \infty$ при $x \to \infty$;

2) при достаточно большом $R > 0$ и для $x \geq R$ функции $p_k'(x)$, $q_j'(x)$ не меняют знак и

$$|p_k'(x)| = O(|p_k(x)|^{\alpha_k}),\quad 0 < \alpha_k < 1 + (4n-4k+2)^{-1},\ k=\overline{0,n},$$
$$|q_j'(x)| = O(|q_j(x)|^{\beta_j}),\quad 0 < \beta_j < 1 + (4n-4j)^{-1},\ j=\overline{0,n-1},$$

3) для всех $i,j=\overline{0,2n}$ и $x \geq R$, $0 < B \leq |\mu_i(x,\sigma)/\mu_j(x,\sigma)| \leq A$, где A, B - постоянные числа, $\mu_i(x,\sigma)$ - корни уравнения $F(x,\sigma,\mu)=0$.

4) для всех $x \geq R$ и $i \neq k$ $Re(\mu_i(x,\sigma)-\mu_k(x,\sigma))$ не меняет знак.

Тогда уравнение $ly = i\sigma y$, где $\sigma \neq 0)$ имеет $2n$ линейно-независимых решений, для которых, при $x \to \infty$ справедливы асимптотические формулы:

$$y_k^{[p]}(x,\sigma) = \mu_k^p(x,\sigma) y_{k_0}(x,\sigma)(1+0(1)),\quad p=\overline{0,n-1},$$
$$y_k^{[n]}(x,\sigma) = (-1)^n \mu_k^n(x,\sigma)(ip_n(x) - q_{n-1}(x)\mu_k^{-1}(x,\sigma)) y_{k_0}(x,\sigma)(1+0(1)),$$
$$y_k^{[n+j]}(x,\sigma) = (-1)^n \mu_k^{n+j}(x,\sigma)(ip_n(x) - 2q_{n-1}(x)\mu_k^{-1}(x,\sigma)) + \ldots -$$
$$-ip_1(x)\mu_k^{-n-j+1}(x,\sigma) + 2q_0(x)\mu_k^{-n-j}(x,\sigma) y_{k_0}(x,\sigma)(1+0(1)),\ j=\overline{0,n}$$

Заметим, что условие 2) означает, что функции $p_k(x)$ и $q_j(x)$ имеют правильный рост на бесконечности при $x \to \infty$, а условие 3) - корни характеристического многочлена $F(x,\sigma,\mu)$ имеют одинаковый порядок роста на бесконечности.

Доказательство проводится путём сведения исходного уравнения к системе дифференциальных уравнений первого порядка, которая с помощью подходящего преобразования приводится к L-диагональному виду. Систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка получаем путём введения вектор-столбца

$$Y = col\left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, \ldots, y^{[2n-1]}\right),$$

где $y^{[k]}$ - k-ая квазипроизводная функции $y(x)$, определяемая формулами:

$$y^{[j]} = y^{(k)},\quad j=\overline{0,n-1},$$
$$y^{[n]} = (-1)^n\left(p_n y^{(n)} - iq_{n-1}y^{(n-1)}\right),$$
$$y^{[n+j]} = \left(y^{[n+j-1]}\right)' + (-1)^{n-j}\left(p_{n-j}y^{(n-j)} - iq_{n-j}y^{(n-j+1)} - q_{n-j-1}y^{(n-j-1)}\right),$$
$$j=\overline{1,n-1}.$$
$$ly = \left(y^{[2n-1]}\right)' + p_0 y - iq_0 y' = i\sigma y.$$

Список литературы

[1] Мукимов В.Р, Султанаев Я.Т. *L^2 -решения сингулярного дифференциального уравнения нечетного порядка.* //Дифференциальные уравнения, Т.38. №2.2002. С.190-194.

[2] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* М., 1969.

Об одном классе операторов, порожденных обобщенными пространствами Баргмана-Фока

А.У. Муллабаева, В.В. Напалков

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: mullabaeva.87@mail.ru

Введем пространство $H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций с топологией компактной сходимости, через $H^*(\mathbb{C})$ — пространство линейных непрерывных функционалов и через $H_0(\{\infty\})$ — пространство аналитических в бесконечно удаленной точке и обращающихся на ней в нуль функций.

Лемма 1 *Между пространствами $H^*(\mathbb{C})$ и $H_0(\{\infty\})$ существует изоморфизм.*

Рассмотрим обобщение пространства Баргмана-Фока следующего вида:

$$F_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{\alpha^{\frac{2}{\beta}}}{\pi \frac{2}{\beta} \Gamma(\frac{2}{\beta})} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\alpha|z|^\beta} d\mu < \infty \right\},$$

где $d\mu$ — мера Лебега на плоскости, а $\alpha > 0$ характеризует тип функций этого пространства, $\beta > 0$.

Функции этого пространства имеют порядок не выше β и конечный тип.

В пространстве $F_{\alpha,\beta}$ сопряженным оператором к оператору умножения на переменную z является оператор обобщенного дифференцирования $Df = \frac{1}{z} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n m_n z^n$, где числа $m_n = \frac{1}{\alpha^{\frac{2}{\beta}}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}(n+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}n\right)}$.

Как и в работе [1][с. 53], собственные функции оператора обобщенного дифференцирования, соответствующие собственным числам λ, с точностью до *const* и с учетом параметра α, имеют вид

$$y(\lambda z) = c \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 \ldots m_n} \right)$$

и являются функциями порядка $\frac{\beta}{2}$ и типа α.

О п р е д е л е н и е 1. *Обобщенным преобразованием Лапласа* функционала $F \in H^*(\mathbb{C})$ будем называть функцию:

$$\widehat{F}(\lambda) = (F_z, y(\lambda z)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C y(\lambda z) g_F(z) dz\,,$$

где $y(\lambda z)$ — собственная функция оператора D, $g_F(z) \in H_0(\{\infty\})$.

Введем множество

$$P_\beta = \left\{ \varphi(\lambda) \in H(\mathbb{C}) : |\varphi(\lambda)| \le B_1(\varphi) e^{B_2(\varphi)|\lambda|^{\frac{\beta}{2}}}, B_1(\varphi), B_2(\varphi) = const < \infty \right\}.$$

Лемма 2 *Обобщенное преобразование Лапласа устанавливает взаимооднозначное соответствие между пространствами $H^*(\mathbb{C})$ и P_β.*

О п р е д е л е н и е 2. Возьмем функцию $f(z) \in H(\mathbb{C})$. *Оператором обобщенного сдвига по t* будем называть оператор

$$S_t f(z) = f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n f(z)}{m_1 m_2 ... m_n} t^n.$$

О п р е д е л е н и е 3. *Обобщенным оператором свертки*, порожденным функционалом F, с характеристической функцией $\widehat{F}(z) = \varphi(z) \in P_\beta$ назовем оператор вида:

$$M_F[f](z) = (F_t, S_t f(z))\,.$$

Возьмем произвольную функцию $\psi(\lambda) \in H(\mathbb{C})$ и построим в $H(\mathbb{C})$ идеал $\psi \cdot H(\mathbb{C}) \equiv \{\psi(\lambda) \cdot R(\lambda) : R(\lambda) \in H(\mathbb{C})\}$.

О п р е д е л е н и е 4 [2]. Пара функций $(\varphi(z), \psi(z))$ называется парой Фишера, если пространство $H(\mathbb{C})$ можно представить в виде

$$H(\mathbb{C}) = \ker M_\varphi \oplus \psi \cdot H(\mathbb{C}). \tag{1}$$

В этом случае равенство (1) называется разложением Фишера. Если $H(\mathbb{C})$ представимо в виде

$$H(\mathbb{C}) = \ker M_\varphi + \psi \cdot H(\mathbb{C}), \tag{2}$$

то равенство (2) называется представлением Фишера.

В этом случае любая целая функция представима в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), f_1(z) \in \ker M_\varphi, f_2(z) \in \psi \cdot H(\mathbb{C}),$$

вообще говоря, не единственным образом.

Отметим, что равенство (2) позволяет решать многоточечную задачу Валле-Пуссена в классе $\ker M_\varphi$. Действительно, пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — нулевая последовательность функции $\psi(z)$. Рассмотрим произвольную последовательность комплексных чисел $a_j, j = 1, 2, \ldots$ и поставим многоточечную задачу Валле-Пуссена следующим образом: существует ли функция $y(z) \in \ker M_\varphi$ такая, что $y(\mu_j) = a_j, j = 1, 2, \ldots$? Равенство (2) дает ответ на поставленный вопрос. Действительно, всегда существует (см., примемет, [3][с. 270]) функция $h(z) \in H(\mathbb{C})$ такая, что $h(\mu_j) = a_j, j = 1, 2, \ldots$. В силу (2) имеет место представление

$$h(z) = w(z) + \psi(z) \cdot q(z), q(z) \in H(\mathbb{C}), w(z) \in \ker M_\varphi, \tag{3}$$

из которого получаем равенство $w(\mu_j) = a_j, j = 1, 2, \ldots$. Заметим, что если выполняется равенство (1), то функция $w(z)$ в (3) единственна.

Список литературы

[1] Напалков В.В., Муллабаева А.У., Дильмухаметова А.М. *Обобщение пространства Фока* // Уфимский мат. журнал. 2010. Т. 2, № 1. С. 52–58.

[2] Shapiro H.S. *An algebraic theorem of E. Fischer, and the holomorphic Goursat problem* // Bull. London Math.Soc. V. 21. 1989. P. 513–537.

[3] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ - Т. 1. М.:Наука, 1985. – 336 с.

О существовании и о компактности резольвенты одного класса сингулярных дифференциальных операторов смешанного типа

М.Б. Муратбеков, С.Ж. Игисинов

Таразский государственный педагогический институт, Тараз, Казахстан

e-mail: musahan_m@mail.ru

Евразийский национальный университет, Астана, Казахстан

e-mail: igisinovsabit@mail.ru

Сингулярные дифференциальные операторы, например, операторы, заданные в неограниченной области могут, вообще говоря, иметь не только дискретный, но и непрерывный спектр. В связи с чем разложение произвольной функции в ряд по их собственным функциям в общем случае становится невозможным. Следовательно, по этой причине наиболее существенным вопросом спектральной теории при изучении спектра в зависимости от поведения коэффициентов, в случае неограниченной области, является признак дискретности спектра.

Спектральные характеристики сингулярных дифференциальных операторов эллиптического типа достаточно хорошо изучены и выяснены типичные трудности, встречающиеся в связи плохим поведением коэффициентов. Их изучению посвящена обширная литература.

Обзор литературы показывает, что такие вопросы, как: 1) существование и компактность резольвенты; 2) дискретность спектра дифференциальных операторов смешанного типа заданных в неограниченной области, недостаточно изучены.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_0u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u$$

первоначально определенный на $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, - множестве, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций удовлетворяющих условию $u(x,-1) = u(x,1) = 0$ и финитных по переменной x, где $\Omega = \{(x,y) : -\infty < x < \infty, -1 < y < 1\}$.

Обозначим через $K(\tau, b)$ класс коэффициентов удовлетворяющих следующим условиям:

i) $|a(x)| \geq \delta_0 > 0$, $c(x) \geq \delta > 0$ - непрерывные функций в $\mathbb{R}$;

ii) $c_0c(x) \leq a^2(x) \leq c_1c(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$ постоянные числа;

iii) $|a(x) - a(t)|^2 + |c(x) - c(t)| \leq \tau c(t)$ для всех $x, t \in \mathbb{R}$ таких, что $|x - t| \leq bd(t)$, $d(t) = \frac{1}{[c(t)]^{1/2}}$, $b > 0$, $\tau > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. *Тогда найдутся такие числа* τ_0 *и* b_0 *, что при* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $b > b_0$*:*

1) замыкание L *оператора* $L_0u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u$, $D(L_0) = C_0^\infty(\Omega)$, *в* $L_2(\Omega)$ *существует;*

2) оператор L *имеет непрерывный обратный оператор в* $L_2(\Omega)$*;*

3) для любого $u \in D(L)$ *справедлива оценка* $\|u_x\|_2 + \|u_y\|_2 + \|u\|_2 \leq c\|Lu\|_2$, *где* c *- постоянное число.*

Определение. *Будем говорить, что оператор* L *разделим, если для всех функций* $u \in D(L)$ *имеет место оценка*

$$\|k(y)u_{xx} - u_{yy}\|_2 + \|a(x)u_x\|_2 + \|c(x)u\|_2 \leq c\|Lu\|_2$$

где c *- не зависит от* $u(x)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оператор* L *разделим.*

Теорема 3. *Пусть* $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. *Тогда найдутся такие числа* τ_0 *и* b_0 , *что при* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $b > b_0$ *оператор* L^{-1} *компактен, если и только если* $\lim_{|x|\to\infty} c(x) = \infty$.

Пример. *Для оператора* $L_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + (|x|+32)u_x + (4x^2+4^6)u$ *нетрудно проверить, что все условия теорем 1-3 выполняются. Следовательно, оператор* L_0 *допускает замыкание и для него существует непрерывный обратный оператор.*

Список литературы

[1] Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М. *Оценки спектра одного класса операторов смешанного типа* // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 1. С. 135-137.

[2] Муратбеков М.Б. *Дискретность спектра и распределение сингулярных чисел (s-чисел) одного класса дифференциальных операторов гиперболического типа* // Математический журнал, институт математики МОН РК, Алматы. 2012. Т. 12, № 3. С. 113-118.

[3] M.Muratbekov, K.Ospanov, S.Igisinov. *Solvability of a class of mixed type second order equations and nonlocal estimates* // Applied Mathematics Letters. 2012. Vol. 25, № 11. P. 1661-1665.

О спектральных свойствах одного класса неполуограниченных дифференциальных операторов

М.Б. Муратбеков, Б.М. Мусилимов, Р.М. Макулбекова

Таразский государственный педагогический институт, Тараз, Казахстан

e-mail: musahan_m@mail.ru

В качественном спектральном анализе особое место отводится вопросам изучения существования спектра. В случае его существования рассматриваются задачи о дискретности и непрерывности спектра. Близких по тематике и оказавших влияние на эти исследования, можно отметить работы следующих авторов: Б.М.Левитана[1],W.N.Everitt, M.Girtz [2],М.Отелбаева [3], Т.Ш.Кальменова, Е.И.Моисеева, С.М.Пономарева, К.Х.Бойматова и других.

Пусть H- сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $C_0^\infty(H,R)$- множество бесконечно гладких финитных функций, определенных на $\mathbb{R}(-\infty,+\infty)$ со значениями в H.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv (-1)^m u^{(2m)}(y) + k(y)Au + ia(y)A^\alpha u + c(y)u, \qquad (1)$$

где $u(y) \in C_0^\infty(H,R)$, А – положительно определенный самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве H с вполне непрерывной резольвентой, $\alpha \in [\frac{1}{2},1]$, m – целое положительное число, $k(y)$– кусочно-непрерывная и ограниченная функция в $\mathbb{R}$, $k(0)=0$ и $yk(y)>0$ при $y \neq 0$.

Пусть выполнено условие:

i) $|a(x)| \geq \delta_0 > 0$, $c(x) \geq \delta > 0$ непрерывные функции в $\mathbb{R}$;

Нетрудно показать, что оператор (1) допускает замыкание в смысле H_1 и его замыкание также будем обозначать через L. Здесь H_1 – гильбертово пространство, полученное пополнением множества $C_0^\infty(H,R)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$< u,v >_{H_1} = \int_{-\infty}^{\infty} < u,v >_H \, dt$$

Нами доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть выполнено условие $i)$ и $c(y)$ – ограниченная функция и пусть $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A с конечной кратностью. Тогда непрерывный спектр оператора L не пуст.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда дискретный спектр оператора L не пуст, если справедливо равенство*

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_y^{y+w} c(t)dt = \infty.$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие $i)$ и пусть оператор A положительно определенный с вполне непрерывным обратным. Тогда спектр оператора L дискретен, если и только если для любого $w>0$*

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_y^{y+w} c(t)dt = \infty$$

или

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_y^{y+w} |a(t)|dt = \infty.$$

Список литературы

[1] *Левитан Б.М.* Исследование функции Грина уравнения Штурма-Лиувилля с операторным коэффициентом // Математический сборник. 1968. Т.76(118), №2. С. 239–270.

[2] *Everitt W.N., Girtz M.* Some properties of the domains of certain differential operators // Proc.London Math.Soc.6. 1971. V.23(3). P. 301–324.

[3] *Отелбаев М.* Об условиях самосопряженности оператора Штурма- Лиувилля с операторным потенциалом // Украинский матемаический журнал. Т.28, №6. С.763–771.

Критерий существования классического решения уравнения Пуассона

Э.М. Мухамадиев
Вологда, Вологодский государственный технический университет
e-mail: emuhamadiev@rambler.ru
Г.Э. Гришанина
Дубна, Международный университет "Дубна"
e-mail: anora66@mail.ru
А.А. Гришанин
Москва, МГУ имени М. Ломоносова
e-mail: alexander1991gri@gmail.com

Пусть $G \subset R^2$ - ограниченная область. В области G рассмотрим уравнение Пуассона:

$$\Delta u = f\left(x, y\right). \tag{1}$$

Ниже мы изучаем вопрос о существовании классического решения, то есть решения, имеющего непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим через $C^k(G)$ линейное пространство всех функций $u(x,y)$, непрерывных в G вместе со всеми частными производными до порядка k включительно. Обозначим $C(G) = C^0(G)$. По области G в пространстве R^3 определим ограниченную область

$$\widetilde{G} = \{(x, y, s) : M = (x, y) \in G, |s| < \varrho(M, \partial G)\}.$$

Пусть вещественная функция f принадлежит пространству $C(G)$. Тогда функция

$$g(x,y,s,\varphi)=f(x+s\cos\varphi,y+s\sin\varphi)$$

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}\times[0,2\pi]$ и 2π-периодична по φ. Поэтому комплекснозначная функция

$$F(x,y,r)=\int_0^{2\pi}g(x,y,r,\varphi)\exp(2i\varphi)\,d\varphi$$

определена и непрерывна на $\widetilde{G}$, причем $F(x,y,0)\equiv 0$. Функцию $f\in C(G)$ назовём *усиленно непрерывной* в точке $M=(x,y)\in G$, если существует несобственный интеграл

$$\int_0^{r_1}F(x,y,r)\frac{dr}{r}=\lim_{\delta\to+0}\int_\delta^{r_1}F(x,y,r)\,\frac{dr}{r},r_1=\varrho(M,\partial G)/2, \qquad (2)$$

усиленно непрерывной в G, если она усиленно непрерывна в каждой точке $(x,y)\in G$, и *равномерно усиленно непрерывной* в G, если она усиленно непрерывна в G и предельное соотношение (2) выполняется равномерно относительно (x,y) на каждом компакте $K\subset G$ при некотором $r_1=r_1(K)>0$. Очевидно, непрерывная по Гёльдеру функция является равномерно усиленно непрерывной в области G.

Сформулируем теоремы, устанавливающие связь между существованием классического решения уравнения Пуассона и свойством равномерной усиленной непрерывности.

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит пространству $C(G)$ и уравнение Пуассона имеет классическое решение u в области G. Тогда функция f является равномерно усиленно непрерывной в G.*

Теорема 2. *Пусть в любой области $G_0,\overline{G_0}\subset G$ уравнение Пуассона (1) имеет классическое решение. Тогда функция f является равномерно усиленно непрерывной в G.*

Следствие 1. *Если непрерывная функция f не является усиленно непрерывной в некоторой точке (x_0,y_0) области G, то уравнение (1) не имеет классического решения в любой окрестности этой точки, содержащейся в G.*

Теорема 3. *Пусть функция f усиленно непрерывна в области G и принадлежит пространству $L_1(G)$. Тогда функция $u_0(x,y)$ в G непрерывна вместе со всеми частными производными первого и второго порядка и, следовательно, является классическим решением уравнения Пуассона (1).*

Приведем некоторые понятия, связанные с определением обобщенного решения уравнения Пуассона. Пусть $D(G)$ - пространство основных в области G функций, а $D'(G)$-пространство всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций $D(G)$, т.е. пространство обобщенных в области G функций. Каждая локально интегрируемая в области G функция f определяет непрерывный в $D(G)$ функционал - регулярную обобщенную функцию из пространства $D'(G)$. Пусть f - произвольная обобщенная функция. Обобщенную функцию $v \in D'(G)$ называют обобщенным решением уравнения Пуассона $\Delta u = f$, если она удовлетворяет равенству $(v, \Delta\psi) = (f, \psi)$ для любой функции $\psi \in D(G)$. В частности, если $f = 0$, то уравнение Пуассона называют уравнением Лапласа. Классическое решение уравнения Лапласа в области G называют гармонической функцией, а решение уравнения Лапласа из пространства $D'(G)$ называют обобщенной гармонической функцией. Следующая известная теорема определяет структуру множества обобщенных гармонических в области G функций.

Теорема 4. *Всякая обобщенная гармоническая функция в области G является также гармонической функцией в этой области.*

Теорема 4 вместе с выше приведенными результатами позволяют установить следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть непрерывная в области G функция f усиленно непрерывна в этой области. Тогда каждое обобщенное решение уравнения Пуассона (1) в области G является классическим решением в этой области.*

Будем говорить, что на множестве $M \subset G$ функция удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha > 0$ по направлению $\overrightarrow{n} = (\cos\beta, \sin\beta)$, если

$$|f(x + h\cos\beta, y + h\sin\beta) - f(x, y)| \leq C|h|^{\alpha}, \quad (x, y),$$
$$(x + h\cos\beta, y + h\sin\beta) \in M, C = const.$$

Теорема 6. *Если непрерывная функция $f(x, y)$, принадлежит пространству Лебега $L(G)$ и в некоторой окрестности каждой точки удовлетворяет условию Гёльдера по некоторому направлению, то уравнение Пуассона (1) в области G имеет классическое решение.*

О разрешимости третьей нелинейной краевой задачи

А.Н. Наимов, М.В. Быстрецкий
Вологодский государственный технический университет, Вологда, Россия
e-mail: nan67@rambler.ru, bmv@playrix.com

Доклад посвящен исследованию разрешимости нелинейной краевой задачи вида

$$x''(t) = Q(x'(t) - B(x(t))) + f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x'(0) = A_0(x(0), x(1)) + h_0(x), \quad x'(1) = A_1(x(0), x(1)) + h_1(x), \tag{2}$$

где $x(t)$ - неизвестная вектор-функция, $x(t) \in C^1([0,1]; R^n)$, $n > 1$, отображения $Q, B : R^n \mapsto R^n$, $A_0, A_1 : R^{2n} \mapsto R^n$, $f : [0,1] \times R^{2n} \mapsto R^n$, $h_0, h_1 : C^1([0,1]; R^n) \mapsto R^n$ задаются, непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

а) $\exists m > 1$, $Q(\lambda z) \equiv \lambda^m Q(z)$ $\forall \lambda > 0$;

б) $B(\lambda y) \equiv \lambda B(y)$ $\forall \lambda > 0$;

в) при любом векторе $y_0 \in R^n$ существует единственное решение $p_B(t, y_0)$ задачи Коши $y'(t) = B(y(t))$, $y(0) = y_0$;

г) $A_i(\lambda y, \lambda z) \equiv \lambda A_i(y, z)$ $\forall \lambda > 0$, $i = 0, 1$;

д) $(|y| + |z|)^{-m} \max_{0 \le t \le 1} |f(t, y, z)| \to 0$ при $|y| + |z| \to \infty$;

е) $||z||_{C^1}^{-1} |h_i(z)| \to 0$ при $|||z||_{C^1} \to \infty$, $i = 0, 1$;

Краевую задачу (1), (2) называем разрешимой, если при любых возмущениях f, h_0 и h_1, удовлетворяющих условиям д) и е), существует хотя бы одно решение краевой задачи.

Основной результат настоящей работы состоит в том, что разрешимость краевой задачи (1), (2) сводится к разрешимости краевой задачи

$$x''(t) = Q(x'(t)) + f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1, \tag{3}$$

$$x'(0) = \widetilde{A}_{B,0}(x(0)) + h_0(x), \quad x'(1) = \widetilde{A}_{B,1}(x(0)) + h_1(x), \tag{4}$$

где

$$\widetilde{A}_{B,0}(y) = A_0(y, p_B(1, y)) - B(y), \quad \widetilde{A}_{B,1}(y) = A_1(y, p_B(1, y)) - B(p_B(1, y)).$$

Обозначим через $L_+(Q, B, A_0)$ множество всех векторов $y_0 \in R^n$ для которых хотя бы одно решение задачи Коши $z'(t) = Q(z(t))$, $z(0) = \widetilde{A}_{B,0}(y_0)$, ограничено при $t > 0$. А через $L_-(Q, B, A_1)$ обозначим множество всех векторов $y_0 \in R^n$ для которых хотя бы одно решение задачи Коши $z'(t) = Q(z(t))$, $z(0) = \widetilde{A}_{B,1}(y_0)$, ограничено при $t < 0$.

Теорема *Пусть множества $L_+(Q,B,A_0)$ и $L_-(Q,B,A_1)$ пересекаются лишь в нуле. Тогда разрешимость краевой задачи (1), (2) равносильна разрешимости краевой задачи (3), (4).*

В доказательстве теоремы используются результаты работы [1].

Список литературы

[1] Наимов А.Н., Быстрецкий М.В. *Об априорной оценке и разрешимости третьей двухточечной краевой задачи* // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 2. С. 280-284.

О регуляризованном следе оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом

Г.М. Нальжупбаева

Казахский национальный ун–т им. аль–Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: nalzhuppa@list.ru

В гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$, для произвольных элементов f и g из $L^2(0,1)$ со скалярным произведением $< f, g >:= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$, исследуется свойства оператора Штурма – Лиувилля $\mathcal{P}_k$, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) \equiv -y''(x) + q(x)y(x), \ x \in I_0 := I \setminus \{x_0\}, \ \ I := (0,1), \ \ x_0 \in I,$$

и удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = y(1) = 0,$$

$$[y(x_0)] = 0, [y'(x_0)] = \int_0^1 l(y)\overline{k(x)}dx,$$

где $q(x)$ – непрерывная и вещественнозначная функция на отрезке $[0,1]$, $k(x)$ – граничная функция из $L^2(0,1)$, $\overline{z}$ означает комплексное сопряжение числа $z \in \mathbb{C}$, $[y] = y(x_0+0) - y(x_0-0)$, и $[y'] = y'(x_0+0) - y'(x_0-0)$.

При накладках некоторых условии на граничную функцию получена формула регуляризованного следа исследуемого оператора.

Об свойстве оператора умножения на целую функцию в пространстве Баргмана – Фока

В. В. Напалков (мл.)
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия
e-mail: vnap@mail.ru

Пространство Баргмана – Фока F_n состоит из фунций от n комплексных переменных и суммируемых с квадратом модуля по мере $d\sigma_n = \frac{1}{\pi}^n dv_n(z)$, где $dv_n(z)$ есть n - мерная мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_{F_n} = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{C}^n} f(z)\cdot\overline{g(z)}\,d\sigma_n(z), \quad f,g\in F_n\,.$$

Для любого $z_0\in\mathbb{C}^n$ функционал $f\to f(z_0)$, $f\in F_n$ является линейным непрерывным функционалом над F_n. По теореме Рисса – Фишера существует элемент $K_{F_n}(z,z_0)\in F_n$, который порождает этот функционал:

$$f(z_0) = (f(z), K_{F_n}(z,z_0))_{F_n}\,.$$

Пространство Баргмана – Фока является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром (см. [1]). Хорошо известно, что $K_{F_n}(z,\xi) = e^{<z,\overline{\xi}>}$, где $<z,\overline{\xi}> = z_1\cdot\overline{\xi_1}+\cdots+z_n\cdot\overline{\xi_n}$, $z,\xi\in\mathbb{C}^n$. Пусть $\varphi(z)$ целая функция в $\mathbb{C}^n$, обладающая свойством: *для любого $\xi_0\in\mathbb{C}^n$ функция $\varphi(z)\cdot e^{<z,\overline{\xi_0}>}$ принадлежит пространству F_n*. Класс целых функций обладающих этим свойством "почти"совпадает с классом целых функций порядка не выше 2 и при порядке 2 типа меньше 1/2 (см.[2]) Пусть N_φ нулевое множество функции φ. Положим

$$K_{H_\varphi}(z,\xi) \overset{def}{=} \begin{cases} e^{<z,\overline{\xi}>}, & z,\xi\in\mathbb{C}^n\backslash N_\varphi \\ 0, & z \text{ или } \xi\in N_\varphi\,. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция $K_{H_\varphi}(z,\xi)$ удовлетворяет условию: *для любого конечного набора точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ из $\mathbb{C}^n$ и любого конечного набора комплексных чисел $\{c_k\}_{k=1}^n$ выполнено условие:*

$$\sum_{k,l=1}^n c_k\overline{c_l}K_{H_\varphi}(z_k,z_l)\geq 0\,.$$

По теореме Мура – Ароншайна [1] существует единственное гильбертово пространство H_φ имеющее в качестве ядра функцию K_{H_φ}. Можно доказать, что норма в пространстве H_φ имеет вид:

$$\|f\|^2_{H_\varphi} = \int_{\mathbb{C}^n\backslash N_\varphi} |f(z)|^2\,d\sigma_n(z)\,.$$

В пространство H_φ входит класс, вообще говоря разрывных, функций, которые совпадают с функциями из пространства F_n на множестве $\mathbb{C}^n \backslash N_\varphi$ и принимают значение 0 на множестве N_φ. Пространство H_φ также содержит в общем случае функции, аналитические на $\mathbb{C}^n \backslash N_\varphi$, которые не продолжаются на все $\mathbb{C}^n$ как целые функции класса F_n. Заметим, что если функция $f \in F_n$ такова, что $f(z)/\varphi(z)$ целая функция, то f принадлежит пространству H_φ. Справедлива следующая

Лемма 1 *Существует линейный непрерывный взаимнооднозначный оператор R, осуществляющий автоморфизм пространства H_φ, такой, что любая функция $f \in H_\varphi$ представляется в виде:*

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}^n \backslash N_\varphi} (Rf(\tau), \varphi(\tau) \cdot e^{<\tau,\bar{\xi}>})_{H_\varphi} e^{<z,\bar{\xi}>} \cdot \varphi(z)\, d\sigma_n(\xi), \quad z \in \mathbb{C}^n \backslash N_\varphi .$$

Доказательство этой леммы основано на теории ортоподобных систем разложения [3], а также результатах из работы [4]. На плотном подмножестве D пространства F_n рассмотрим оператор умножения на функцию $P_\varphi : f \to \varphi \cdot f$. В качестве D можно взять линейную оболочку системы функций $\{e^{<z,\bar{\xi}>}\}_{\xi \in \mathbb{C}^n}$. Оператор P_φ есть неограниченный оператор действующий из D в F_n. Сопряженый оператор к оператору P_φ определяется из равенства

$$(P_\varphi f, g)_{F_n} = (f, P_\varphi^* g)_{F_n}, \quad f \in D,\, g \in D^* .$$

и имеет плотную в F_n область определения D^*. Оператор P_φ^* имеет вид:

$$P_\varphi^* g(\xi) = (g(z), \varphi(z) e^{<z,\bar{\xi}>})_{F_n} = \int_{\mathbb{C}^n} g(z) \cdot \overline{\varphi(z)} e^{<\bar{z},\xi>}\, d\sigma_n(z),\, \xi \in \mathbb{C}^n .$$

Применяя лемму 1 можно доказать, что

Теорема 1 *Пусть $g \in D^*$, и f произвольная функция из пространства F_n, которая делится на функцию $\varphi(z)$, т.е. $f(z)/\varphi(z)$ есть целая функция. Тогда справедливо равенство*

$$(f, g)_{F_n} = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)/\varphi(z) \cdot \overline{P_\varphi^* g(z)}\, d\sigma_n(z) . \tag{1}$$

Функция $\frac{f(z)}{\varphi(z)} \in H(\mathbb{C}^n)$ целая, однако возможно, что функция $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ не принадлежит пространству F_n. Поэтому в правой части равенства (1) мы не можем использовать знак скалярного произведения. Равенство (1) означает, что интеграл $\int_{\mathbb{C}^n} f(z)/\varphi(z) \cdot \overline{P_\varphi^* g(z)}\, d\sigma_n(z)$ существует и равен $(f, g)_{F_n}$. Хотя функция f/φ, может быть, не интегрируема с квадратом модуля по мере $d\sigma_n$.

Список литературы

[1] N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the AMS.1950. V. 68. №3. P. 337–404.

[2] D. J. Newman and H. S. Shapiro. *Certain Hilbert spaces of entire functions* // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. V. 72. N. 6. P. 971-977.

[3] Т.П. Лукашенко. *О свойствах систем разложения подобных ортогональным*// Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. 1998. С.187–206.

[4] В.В. Напалков (мл.). *Об ортоподобных системах разложения в пространстве аналитических функций и задаче описания сопряженного пространства*//Уфимский матем. журнал. 2011. Т.3. №1. С.31-42.

Редукции систем Шлезингера и Гарнье

Д.П. Новиков

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

e-mail: nvdmpr@mail.ru

Основное внимание при исследовании изомонодромных деформаций уравнений 2-го порядка (с рациональными коэффициентами) вызывает система Гарнье и ее конфлюэнтные вырождения. В соответствующих системах вида

$$\psi_{xx} = R\psi, \quad \psi_{t_i} = A_i\psi_x - \left(\frac{A_i}{2}\right)_x\psi \tag{1}$$

все несущественные особые точки $x = r_i$ коэффициента R имеют показатели 0 и 2, а количество r_i равно числу независимых переменных t_i.

Такие системы (1) допускают редукции, в которых часть переменных t_i становится зависимыми от других, а число r_i уменьшается.

Система уравнений (где a, b, c, d константы, v, r, h, p неизвестные функции переменной t)

$$\psi_x = h(x-r)x^{a-1}(x-1)^{b-1}(x-t)^{c-1}(x-v)^{d-1},$$
$$\psi_t = px^a(x-1)^b(x-t)^{c-1}(x-v)^{d-1}$$

определяет деформацию первого из этих уравнений. Следствием (и эквивалентом) исходной системы является

$$\psi_{xx} + \Big(\frac{1-a}{x} + \frac{1-b}{x-1} + \frac{1-c}{x-t} + \frac{1-d}{x-v} - \frac{1}{x-r}\Big)\psi_x = 0, \quad \psi_t = \frac{px(x-1)}{h(x-r)}\psi_x.$$

Несущественная особенность здесь $x = r$. **То есть особых точек 5:** $0, 1, t, v, \infty$. Соответствующее уравнение деформации для v

$$v'' = d\frac{t(t-1)}{v(v-1)(v-t)}(v')^3 + \Big(\frac{a+d}{v} + \frac{b+d}{v-1} + \frac{c-2d}{v-t}\Big)(v')^2 -$$

$$-\Big(\frac{a+c}{t} + \frac{b+c}{t-1} + \frac{2c-d}{v-t}\Big)v' + c\frac{v(v-1)}{t(t-1)(v-t)}, \qquad (2)$$

по всей видимости не обладает свойством Пенлеве, но тем не менее интегрируется по той же схеме, что случай Пикара уравнения Пенлеве 6.

Системе уравнений (где v, r, h, p неизвестные функции переменной t)

$$\frac{\varphi_x}{\varphi} = \frac{h(x-r)}{2(x-v)\sqrt{x(x-1)(x-t)}}, \quad \frac{\varphi_t}{\varphi} = \frac{p\sqrt{x(x-1)}}{(x-v)\sqrt{x-t}}$$

соответствует случай Пикара - Хитчина уравнения Пенлеве 6 (параметры в (2): $d = 0$, $a = b = c = 1/2$). Следствием (и эквивалентом) исходной системы является

$$\varphi_{xx} + \left[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\Big) + \frac{1}{x-v} - \frac{1}{x-r}\right]\varphi_x -$$

$$-\varepsilon^2\frac{v(v-1)(v-t)}{x(x-1)(x-t)}\Big(\frac{1}{v-r} + \frac{1}{x-v}\Big)^2\varphi, \qquad \varphi_t = \frac{(r-t)x(x-1)}{t(t-1)(x-r)}\varphi_x.$$

Если $\varepsilon = 1/2$, то последняя система сводится заменой $\varphi \to (x-v)^{1/2}\varphi$ к обычной паре Гарнье для случая Хитчина уравнения Пенлеве 6 (для r).

Теорема 1 *Независимо от величины ε (в том числе при $\varepsilon = 0$) условием совместности последней системы являются случай Пикара (для v) и случай Хитчина (для r) уравнения Пенлеве 6. Таким образом, получено представление Пенлеве 6 (в специальном случае) как изомонодромной деформации фуксова уравнения с 5 особыми точками $0, 1, t, \infty, v$. В точке v разность показателей равна 2ε, точка r несущественная особенность. Если 2ε — целое число, то v тоже является несущественной особенностью.*

Фазовые переходы в задаче численного исследования бифуркаций негладких динамических систем

И.Д. Нуров, М.Ш. Халилова
Российско-Таджикский (славянский) университет,
Душанбе, Таджикистан
e-mail: nid1@mail.ru

Негладкие эффекты имеют важное значение в различных разделах науки физики, механики, биологии, экономики и т.п. Особый интерес представляют теории фазовых переходов в электричество и магнетизм. Простейшими примерами в термодинамике таких переходов являются: парообразования, конденсация, кристаллизация и сублимация. Присутствие негладких элементов типа (реле) влияют на функционирование систем описываемых динамику таких негладких систем, как обычно зависят от параметров. Изменены одних параметров могут влияет на структуру решений в целом, или система может переходит из одной состояний в другое и это дальнейшем назовем бифуркационным явлением. Следует отметит, что модели негладких систем описываются посредством дифференциальных уравнений с негладкими, релейными и гистерезиснимы нелинейностями.

Настоящий доклад посвящен исследованием бифуркации в негладких динамических системах. Введем в рассмотрения негладкую систему дифференциального уравнения второго порядка вида

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| = 0. \tag{1}$$

При этом рассматриваются следующие случаи

$$\left\{\begin{array}{c} b > max\left\{(\frac{a-c}{2})^2,\ (\frac{a+c}{2})^2\right\}, \\ (\frac{a-c}{2})^2 < b < (\frac{a+c}{2})^2, \\ (\frac{a+c}{2})^2 < b < (\frac{a-c}{2})^2, \\ b < 0,\ \ \forall a, c, \\ 0 < b < min\left\{(\frac{a-c}{2})^2,\ (\frac{a+c}{2})^2\right\}\ . \end{array}\right. \tag{2}$$

Здесь a, b, c коэффициенты из (1).

Следует отметить, что исследование стационарного состояния динамической системы имеет очень важное значение. Это исходит из того, что в практически важных случаях стационарные состояния оказывают сильное влияние на структуру множества движений, так как все другие (нестационарные) явления с течением времени к ним стремятся. Следовательно, мы при исследовании динамики системы (1), в основном обращаем внимание на поведение ее решений в окрестностях состояний равновесия.

Рассмотрим уравнение (1) в ином варианте

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| + \varphi(y, \lambda) = 0. \tag{3}$$

В отличие от уравнения (1) в левой части (3) присутствует нелинейность $\varphi(y, \lambda)$. Заданное возмущение (нелинейность) удовлетворяет следующим условием $\varphi(y, \lambda) = o(|y|)$, $|y| \to 0$.

Задача. Насколько близки фазовые портреты (1) и (3)?

На первом этапе построим состояния равновесия этих уравнений. После несложных вычисленный имеем:

$$\left\{ \begin{array}{rl} y_1 = -\frac{c|\lambda|}{b}, & b \neq 0, \\ y_2 = -\frac{c|\lambda| + \varphi(y,\lambda)}{b}, & b \neq 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Проводится сравнение фазовых портретов уравнений (2) и (3).

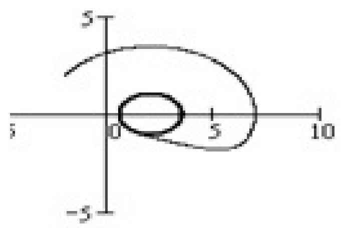

Рис.1

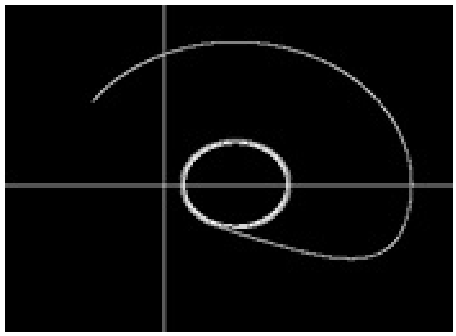

Рис.2

На рисунках 1 и 2 приведены фазовые портреты уравнения (1).

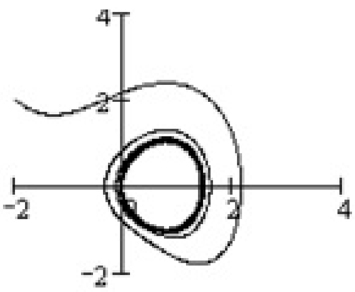

Рис.3

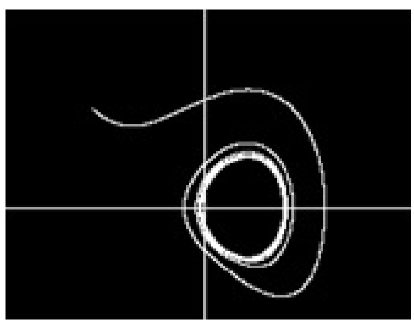

Рис.4

А на рисунках 3 и 4 приведены фазовые портреты уравнения (3) когда нелинейность имеет квадратичный вид.

Фазовые портреты, приведенные на рисунках 1 и 3, получены с помощью стандартного пакета Mathcad. А рисунки 2 и 4 получены с помощью метода Рунге-Кутта, программа к которому составлена авторами.

Список литературы

[1] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. // *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. - М.: Наука. 1967, 488 с.*

[2] Nurov I.,Yumagulov M. - *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics.,2003, №13,pp.71-81 (in Italian).*

О дифференцируемости решения эллиптического уравнения с негладкими коэффициентами

К.Н. Оспанов

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

e-mail: kordan.ospanov@gmail.com

Пусть $n \geq 3$ и Ω - ограниченное множество в R^n. Известно [1], что если в уравнении

$$-\Delta u + q(x)u = f(x), \;\; x \in \Omega, \qquad (1)$$

функции q, f принадлежат классу $L_{p,loc}(\Omega)$, $p > n$, то его обобщенное решение имеет в Ω непрерывные частные производные первого порядка. Такое утверждение не верно, если $q, f \in L_{n,loc}(\Omega)$. Возникает вопрос: если ограничения на функции q и f в уравнении (1) формулировать в терминах других, чем L_p, пространств, то каковы условия на эти пространства, достаточные для того, чтобы решение u было непрерывно дифференцируемым внутри Ω?

Ответ на этот вопрос представляет определенный теоретический интерес и важен в приложениях. В настоящей работе он получен для нормированных пространств $M(\Omega)$ с нормой $\|\cdot\|_{M(\Omega)}$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $M(\Omega)$;

б) $M(\Omega) \hookrightarrow L_1(\Omega)$;

в) если $\varphi \in M(\Omega)$, то для любой функции ψ из $C_0^\infty(\Omega)$ $\psi\varphi \in M(\Omega)$;

г) если $\varphi \in M(\Omega)$, то $|f| \in M(\Omega)$, причем $\||f|\|_{M(\Omega)} \leq C\, \|f\|_{M(\Omega)}$, где C не зависит от f.

Через $P_\alpha(\Omega)$ $(0 < \alpha < n)$ обозначим пространство, полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{P_\alpha(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \int\limits_\Omega \frac{|u(y)|}{|x-y|^\alpha} dy.$$

Легко проверить, что $P_\alpha(\Omega)$ удовлетворяет всем условиям а) - г).

Теорема. *Если функции q и f принадлежат классу $M(\Omega)$ со свойствами а) - г), то обобщенное решение u уравнения (1) непрерывно дифференцируемо внутри области Ω в том и только в том случае, если $M(\Omega) \subseteq P_{n-1}(\Omega)$.*

Отметим, что условиям а) - г) удовлетворяют пространства негладких функции. Однако теорема позволяет найти точные условия дифференцируемости решения (1) и в терминах пространств гладких функций, например, С.Л. Соболева $W_p^s(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty,\ s > 0)$, О.В. Бесова $B_{p,\theta}^s$ $(1 \leq \theta, p \leq +\infty,\ s > 0)$.

Список литературы

[1] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* - М.: Наука, 1973. – 526 с.

Влияние возмущений на устойчивость модели авторезонанса

О.А. Султанов

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия

e-mail: oasultanov@gmail.com

Рассматривается модельная система дифференциальных уравнений, которая возникает в теории нелинейных колебаний в задачах с малой накачкой:

$$\frac{dr}{dt} = \sin\psi, \quad r\Big[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + t\Big] = \cos\psi. \tag{1}$$

Функции $r(t)$, $\psi(t)$ соответствуют медленно меняющимся амплитуде и сдвигу фазы быстрых гармонических колебаний. Для рассматриваемых уравнений существуют решения двух типов: с ограниченной и неограниченной амплитудой. Решения с неограниченно растущей амплитудой $r(t) \approx \sqrt{\lambda t}$ при $t \to \infty$ соответствуют явлению авторезонанса [1]. Из-за нелинейностей рассматриваемой модели явные формулы для решений получить не удается. Однако, для некоторых исключительных решений можно построить асимптотические разложения на бесконечности:

$$R_0(t) = \sqrt{t} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad \Psi_0(t) = \pi - t^{-1/2}\frac{1}{2} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad t \to \infty.$$

Анализируется устойчивость таких решений при постоянно действующих возмущениях.

Вместе с (1) рассматривается система возмущенных уравнений:

$$\frac{dr}{dt} = (1+\xi)\sin\psi, \quad r\Big[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + t + \zeta\Big] = (1+\eta)\cos\psi.$$

Функции ξ и η соответствуют возмущению амплитуды, ζ – возмущению фазы накачки. Описываются классы детерминированных и случайных возмущений (ξ,η,ζ), при которых авторезонансные решения устойчивы [2, 3]. Полученные результаты опираются на свойства функции Ляпунова для невозмущенных уравнений (1).

Список литературы

[1] Калякин Л.А. *Асимптотический анализ моделей авторезонанса.* // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63. Вып. 5. С. 3-72.

[2] Султанов О.А. *Устойчивость моделей авторезонанса при постоянно действующих возмущениях.* // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 254-264.

[3] Калякин Л.А., Султанов О.А. *Устойчивость моделей авторезонанса.* // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 3. С. 279-293.

Синхронизация субгармонических колебаний уравнения Ван-дер-Поля

Э.С. Суюндукова

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: suyundukova89@mail.ru

Известно, что нелинейные динамические системы могут демонстрировать результат отклика на внешнее периодическое воздействие не только при возбуждении на частоте, близкой к собственной, но и, например, в ситуации, когда частота внешнего сигнала приблизительно в q раз (здесь q – натуральное число) превосходит собственную частоту. Такие ситуации называют субгармоническими резонансами порядка q, а само явление – синхронизацией на субгармониках [1, 2].

Одним из наиболее известным в нелинейной динамике является уравнение Ван-дер-Поля. Он представляет собой пример системы, демонстрирующий автоколебательные режимы, бифуркацию Андронова-Хопфа, седло-узловую бифуркацию субгармонических колебаний, сложные хаотические движения.

В настоящей работе рассматривается уравнение Ван-дер-Поля вида

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + \nu^2 x = f(t, \mu)\,, \tag{1}$$

зависящее от параметров μ и ν и в котором $f(t,\mu)$ – некоторая T-периодическая функция, удовлетворяющая условию $f(t,0) \equiv 0$. Уравнение (1) при $\mu = 0$ является уравнением гармонического осциллятора $x'' + \nu^2 x = 0$.

Субгармонический резонанс порядка q в уравнении (1) возможен при значениях параметров μ и ν, близких к числам $\mu_0 = 0$ и $\nu_0 = \dfrac{\omega}{q}$; здесь $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Соответствующая задача о синхронизации на субгармониках в математической постановке приводит к задаче о седло-узловой бифуркации субгармонических колебаний периода qT уравнения (1). Коразмерность такой бифуркации равна двум.

Ниже указанная задача о бифуркации рассматривается в окрестности точки $x = 0$. С этой целью уравнение (1) представляется в виде:

$$y' = A(\mu,\nu)y + u(\mu, y) + g(\mu, t), \tag{2}$$

где

$$A(\mu,\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & \mu \end{bmatrix}, \quad u(\mu,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu y_1^2 y_2 \end{bmatrix}, \quad g(\mu,t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t,\mu) \end{bmatrix}.$$

Периодические решения периода qT системы (2) определяются из уравнения

$$y = e^{qTA(\mu,\nu)}y + e^{qTA(\mu,\nu)}\int_0^{qT} e^{-sqA(\mu,\nu)}(u(y(s)) + g(\mu,s))ds,$$

где $y(t)$ - это решение задачи Коши для дифференциального уравнения (2) при начальном условии $y(0) = y$. А именно, если вектор $y \in R^2$ является решением указанного уравнения, то он является начальным вектором qT-периодического решения $y(t)$ уравнения (2) и наоборот.

Полагая

$$B(\mu,\nu) = e^{qTA(\mu,\nu)}, \quad b(y,\mu,\nu) = e^{qTA(\mu,\nu)}\int_0^{qT} e^{-sqA(\mu,\nu)}u(y(s))ds,$$

$$a(\mu,\nu) = e^{qTA(\mu,\nu)}\int_0^{qT} e^{-sqA(\mu,\nu)}g(\mu,s))ds,$$

придем к следующему уравнению

$$y = B(\mu,\nu)y + b(y,\mu,\nu) + a(\mu,\nu). \tag{3}$$

По построению матрица $B(\mu_0,\nu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Пусть e, g и e^*, g^* – собственные векторы матрицы $B(\mu_0,\nu_0)$ и сопряженной матрицы $B^*(\mu_0,\nu_0)$ соответственно. Эти векторы будем считать выбранными в соответствии с равенствами $(e,e^*) = (g,g^*) = 1$ и $(e,g^*) = (g,e^*) = 0$.

Введем обозначения $B'_\nu = B'_\nu(\mu_0,\nu_0)$ и $a'_\mu = a'_\mu(\mu_0,\nu_0)$. Здесь B'_ν - матрица, полученная дифференцированием матрицы $B(\mu,\nu)$ по ν и a'_μ – вектор, полученный дифференцированием вектора $a(\mu,\nu)$ по μ.

Основным утверждением работы является

Теорема 1 *Пусть выполнено условие*

$$\rho = (B'_\nu e, e^*)(a'_\mu, g^*) - (B'_\nu e, g^*)(a'_\mu, e^*) \neq 0\,. \tag{4}$$

Тогда пара чисел (μ_0,ν_0) является точкой синхронизации на субгармониках периода qT уравнения (1). А именно, существуют определенные при малых $\varepsilon \geqslant 0$ непрерывные функции $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $\nu = \nu(\varepsilon)$ такие, что $\mu(0) = 0$ и $\nu(0) = \nu_0$, и уравнение (1) при $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $\nu = \nu(\varepsilon)$ имеет нестационарные qT-периодические решения $x(t,\varepsilon)$ такие, что $\max\limits_t |x(t,\varepsilon)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Это утверждение доказывается на основе применения к уравнению (3) операторного метода, изложенного в [2]. При этом для функций $\mu(\varepsilon)$, $\nu(\varepsilon)$ и $x(t,\varepsilon)$ могут быть получены приближенные формулы.

В условии (4) числа $(B'_\nu e, g^*)$ и $(B'_\nu e, e^*)$ определяются равенствами:

$$(B'_\nu e, g^*) = -2\pi,\ (B'_\nu e, e^*) = 0$$

. Число ρ из (4) для конкретных правых частей уравнения (1) может быть эффективно вычислено. Например, если $f(t,\mu) = \mu \sin \omega t$, то $(a'_\mu, g^*) = 0$, $(a'_\mu, e^*) = -\frac{q^2\pi}{\omega^2}$, то $\rho = -\dfrac{2\pi^2 q^2}{\omega^2}$ и, следовательно, в этом случае пара чисел (μ_0, ν_0) является точкой синхронизации на субгармониках периода qT уравнения (1).

Список литературы

[1] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.* - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 559 с.

[2] Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации о многопараметрических динамических системах.* // Уфимский математический журнал, 2010. Т. 2. №4 С. 3-26.

Признаки устойчивости циклов в задачах о языках Арнольда

М.Ф. Фазлытдинов

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: fazlitdin_marat@mail.ru

Рассматривается зависящая от двух скалярных параметров α и β двумерная динамическая система с дискретным временем

$$x_{n+1} = A(\alpha,\beta)x_n + a_2(x_n,\alpha,\beta) + a_3(x_n,\alpha,\beta) + \tilde{a}_4(x_n,\alpha,\beta)\,, \qquad (1)$$

где $n = 0,1,2,\ldots$, $x_n \in R^2$, $A(\alpha,\beta) = (1+\alpha)Q(\beta)$,

$$Q(\beta) = \begin{pmatrix} cos2\pi(\theta_0+\beta) & -sin2\pi(\theta_0+\beta) \\ sin2\pi(\theta_0+\beta) & cos2\pi(\theta_0+\beta) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

нелинейности $a_2(x,\alpha,\beta), a_3(x,\alpha,\beta)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(x,\alpha,\beta)$ является гладкой по x, при этом $\tilde{a_4}(x,\alpha,\beta) = O(||x||^4)$, $x \to 0$, равномерно по α и β. Пусть $\theta_0 = p/q$ – несократимая дробь и выполнено неравенство $0 < \theta_0 \le 1/2$.

Для системы (1) точка $x^* = (0,0)$ является точкой равновесия для любых α, β. При $(\alpha^*, \beta^*) = (0,0)$ точка равновесия является негиперболической, так как собственные значения матрицы $A(0,0)$ равны $\lambda = e^{\pm 2\pi\theta i}$. Значение $(\alpha^*, \beta^*) = (0,0)$ является бифуркационным.

Рассматривается поведение системы (1) в окрестности $x^* = (0,0)$. При малых значениях α и β у системы (1) могут возникать циклы периода q. Бифуркация циклов периода q соотвествует таким значениям параметров α и β, которые заполняют клювообразные множества на плоскости параметров. Данное множество своим острием упирается в точку $(\alpha^*, \beta^*) = (0,0)$. Такие множества получили название языков Арнольда [1].

В настоящей работе изучается вопрос об устойчивости циклов в задачах о языках Арнольда.

В работе [2] получены асимптотические формулы для бифурцирующих решений $\alpha = \alpha(\epsilon), \beta = \beta(\epsilon)$ и $x(\epsilon)$, определенных при малых ϵ. При этом $\alpha(\epsilon) \to 0, \beta(\epsilon) \to 0$ и $x(\epsilon)$ асимптотический стремится к прямой $x = \epsilon e$ при $\epsilon \to 0$, где e - ненулевой вектор, вдоль которого строится решение $x(\epsilon)$.

Изучение устойчивости q-циклов, стартующих из точек $x = x(\epsilon)$, при $\alpha = \alpha(\epsilon), \beta = \beta(\epsilon)$ сводится к изучению поведения собственных значений матрицы

$$G(x(\epsilon),\alpha(\epsilon),\beta(\epsilon)) = F'(x(\epsilon),\alpha(\epsilon),\beta(\epsilon)) \tag{3}$$

где $F'(x(\epsilon),\alpha(\epsilon),\beta(\epsilon))$ - матрица Якоби правой части системы (1).

Пусть сначала $q = 1$. Воспользуемся формулами для бифурцирующих решений, полученных в [2]. Для нечетных q они принимают вид

$$\begin{cases} \alpha(\epsilon) = \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \alpha_3(\epsilon) \\ \beta(\epsilon) = \epsilon\beta_1 + \epsilon^2\beta_2 + \beta_3(\epsilon) \\ x(\epsilon) = \epsilon e + \epsilon^2 e_1 + e_2(\epsilon) \end{cases} \tag{4}$$

Для простоты, пусть нелинейности в (1) не зависят от α, β. Подставим (4) в (3). После несложных преобразования получим:

$$G(x(\epsilon),\alpha(\epsilon),\beta(\epsilon)) \approx I + \epsilon\left[\alpha_1 I + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} + a'_{2x}(e)\right] = I + \epsilon D] \quad (5)$$

Теорема 1. *Пусть для $\forall$ собственного значения λ_j матрицы D выполнено неравенство $Re(\lambda_j) < 0$. Тогда при малых ϵ, неподвижная точка $x(\epsilon)$ системы (1) является устойчивой. Если $\exists$ λ_j, для которого $Re(\lambda_j) > 0$, то при малых ϵ неподвижная точка $x(\epsilon)$ неустойчива.*

Пусть теперь $q = 2$. Тогда для системы (1) имеем задачу о циклах периода 2, которая в естественном смысле равносильна задаче о неподвижных точках системы

$$x_{n+1} = B(\alpha,\beta)x_n + b_2(x_n,\alpha,\beta) + b_3(x_n,\alpha,\beta) + \tilde{b_4}(x_n,\alpha,\beta) \tag{6}$$

где $B(\alpha,\beta) = A^2(\alpha,\beta), b_2(x,\alpha,\beta) = Aa_2(x,\alpha,\beta) + a_2(Ax,\alpha,\beta), b_3(x,\alpha,\beta) = Aa_3(x,\alpha,\beta) + a_3(Ax,\alpha,\beta) + a_2'x(x,\alpha,\beta)a_2(x,\alpha,\beta), A = A(0,0)$.

В этом случае, согласно [2], бифурцирующие решения при четных q принимают вид

$$\begin{cases} \alpha(\epsilon) = \epsilon^2\alpha_2 + \alpha_3(\epsilon) \\ \beta(\epsilon) = \epsilon^2\beta_2 + \beta_3(\epsilon) \\ x(\epsilon) = \epsilon e + \epsilon^3 e_2 + e_3(\epsilon) \end{cases} \tag{7}$$

Поэтому имеем следующий аналог равенства (5):

$$G(x(\epsilon),\alpha(\epsilon),\beta(\epsilon)) \approx I + \epsilon^2\left[2\alpha_2 I + 2\beta_2\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} + b'_{3x}(e)\right] = I + \epsilon^2 H \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть для $\forall$ собственного значения λ_j матрицы H выполнено неравенство $Re(\lambda_j) < 0$. Тогда при малых ϵ, циклы системы (1), стартующие из $x(\epsilon)$, являются устойчивыми. Если $\exists$ λ_j, для которого $Re(\lambda_j) > 0$, то циклы, стартующие из $x(\epsilon)$, при малых ϵ являются неустойчивыми.*

Список литературы

[1] Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* - Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

[2] Юмагулов М.Г. *Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем* // Уфимский математический журнал. 2013, том 5, №2.

О формулах следов относительно компактных возмущений дискретных операторов

З.Ю. Фазуллин
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
e-mail: fazullinzu@mail.ru

Пусть $L_0 = L_0^*$ дискретный полуограниченный снизу, V - симметрический, L_0-компактный операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $L = L_0 + V$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные числа операторов L_0 и L соответственно, пронумерованные в порядке роста с учетом их кратностей. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис из собственных функций оператора L_0

$$R_0(-\lambda) = (L_0 + \lambda I)^{-1}\,.$$

$$\rho(t) = \sum_{\lambda_k < t} \left[\lambda_k + (Vf_k, f_k) - \mu_k\right]\,.$$

$$K_0(\lambda) = tr\left(R_0(-\lambda)\, V R_0(-\lambda)\, V R_0(-\lambda)\right), \quad \lambda > 0\,.$$

$$\widehat{K_0}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \neq k} \left|(Vf_k, f_m)\right|^2 (\lambda_k + \lambda)^{-2} (\lambda_m + \lambda)^{-1}\,.$$

Теорема *Пусть $K_0(\lambda)$ - ядерный оператор, тогда для того чтобы существовала подпоследовательность $\{n_m\}_{m=1}^{\infty} \subset N$, такая что*

$$\lim_{m \to \infty} \rho\left(\lambda_{n_m} + 0\right) = 0$$

необходимо и достаточно

$$\widehat{K_0}(\lambda) = \overline{o}\left(\lambda^{-2}\right), \lambda \to +\infty.$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение 14.B37.21.0358) и РФФИ (гранты №№ 12-01-00567-а, 11-01-97009-р поволжье а).

Асимптотический метод решения задач сопряжения

А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов

Институт прикладных исследований Республики Башкортостан, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия

e-mail: mihaylovpn@mail.ru

Многие задачи тепло- и массопереноса приводят к необходимости решения линейных и нелинейных уравнений параболического типа с условием сопряжения на границе (равенство значений функций и потоков). Построению приближенных аналитических (асимптотических) решений таких задач и посвящена работа. Надеемся, что приемы, изложенные в работе, с одной стороны, помогут решить ряд новых задач теплофизики, с другой стороны, приведенный материал может оказаться полезной математику, интересующемуся современными проблемами математической физики. Например, строгое математическое доказательство того, что построенные в работе разложения являются асимптотическими разложениями искомых функций задач сопряжения, представляет собой трудную, и пока нерешенную математическую проблему. Несмотря на отсутствие строгих доказательств, есть уверенность в справедливости полученных асимптотических формул. Эта уверенность основывается, во-первых, на том, что в ряде простых случаев такие доказательства все же получены, во-вторых, результаты согласуются с физическими представлениями и подтверждаются экспериментальными исследованиями. Применение асимптотического метода позволяет построить относительно простые аналитические формулы для детальных расчетов и существенно уточнить развитые ранее модели многих физических процессов, сводящихся к задачам сопряжения. Представленный в работе метод "точный в среднем можно рассматривать как некоторый универсальный, практически важный алгоритм поиска стационарных или квазистационарных решений краевых задач в ограниченных (хотя бы по одной переменной) областях, что является отражением глубинных внутренних свойств природы асимптотических разложений решений, соответствующих краевых задач сопряжения математической физики.

Схема применения асимптотического метода в задачах сопряжения состоит из следующих этапов:

1. Вместо самой задачи решается параметризованная задача. Асимптотический параметр вводится формально.

2. Формулируются отдельные задачи для нулевого, первого и др. коэффициентов асимптотического разложения.

3. Поскольку непосредственно такие задачи сформулировать отдельно

для указанных коэффициентов не удается, применяется специальная процедура расцепления.

4. Формулируется задача для остаточного члена асимптотического ряда. Поиск нетривиальных решений для первых коэффициентов приводит к необходимости замены граничных условий. Дополнительные граничные условия определяются из оценки остаточного члена.

5. Для вязких границ формулируются задачи для погранслойных функций.

6. Строятся решения для нулевого и первого коэффициентов.

7. Приближенное решение представляется как соответствующая сумма асимптотической формулы и погранслойных функций.

Применение такой схемы демонстрируется на конкретной задаче сопряжения, допускающей точное решение; проводится сравнение приближенного решения с точным. Выделен важный класс решений, названный "точным в среднем": первый коэффициент асимптотического разложения удовлетворяет условию, при выполнении которого осредненная задача для соответствующего остаточного члена имеет лишь тривиальное решение. К настоящему времени представленная в работе модификация асимптотического метода успешно применена при фильтрации активных растворов в пористых средах, при движении газожидкостных смесей в скважине, при описании поля давления в неоднородных слоистых средах; решены стационарные, квазистационарные и нестационарные задачи, условия сопряжения в которых заданы либо на прямой, либо на окружности и область ограничена по какой либо переменной.

Показано, что при решении задач сопряжения асимптотическим методом:

1. Нулевое приближение зависит лишь от усредненных источников и совпадает с решением усредненного уравнения.

2. Первое приближение уточняет зависимость от пространственной координаты, от которой не зависит нулевое. Для построения нетривиального решения задачи для первого коэффициента использовано нелокальное граничное условие, заключающееся, например, для полосы в том, что его средние значения на оси симметрии равны нулю. Это обеспечивает построение точного в среднем асимптотического решения, означающего, что при этом решение задачи для остаточного члена, осредненной, по высоте пласта, является тривиальным. Аналогично, для получения точного в среднем асимптотического решения в задаче о температурном поле в скважине, достаточно потребовать, чтобы среднее значение первого коэффициента обращалось в ноль на границе. Погранслойные решения расширяют область

применения аналитических выражений, полученных асимптотическим методом, и существенно увеличивают точность расчетов.

3. При существовании стационарных состояний процесса, соответствующие выражения получаются как предельные из первого приближения.

4. Первое асимптотическое приближение квазистационарных задач совпадает с точным решением.

5. Разложение точного решения параметризованной задачи по асимптотическому параметру совпадает с точным в среднем асимптотическим решением (до второго коэффициента).

С помощью фундаментального оператора задачи сопряжения определен критерий применимости разработанной схемы применения асимптотического метода к задачам с переменными коэффициентами.

Формальная диагонализация дискретного оператора Лакса и задача описания законов сохранения интегрируемых динамических систем

И.Т.Хабибуллин, М.Янгубаева
Институт математики УНЦ РАН, Уфа, Россия
Башкирский Государственный Университет, Россия
e-mail: habibullinismagil@gmail.com, marina.yangubaeva@mail.ru

Предложен метод формальной диагонализации дискретного оператора Лакса, позволяющий эффективно описывать законы сохранения и в ряде случаев высшие симметрии дискретных динамических систем. В качестве иллюстративных примеров рассмотрены такие модели как дискретное потенциальное уравнение КдВ, цепочечное уравнение Шредингера, уравнение цепочки Тоды и др. Новые матричные интегрируемые модели предъявлены.

Приведение в инволюцию системы уравнений плоских тепловых движений газа

С.В. Хабиров
Институт механики УНЦ РАН, Уфа, Россия
e-mail: habirov@anrb.ru

На примере системы уравнений плоских тепловых движений газа, записанных в лагранжевых переменных

$$x_{tt} + y_j = 0, \quad y_{tt} = x_j, \quad x_i y_j - x_j y_i = 1,$$

предложен оригинальный способ приведения в инволюцию переопределенных систем дифференциальных уравнений. Способ заключается в исключении из системы производных по одной из трех независимых переменных. Далее находятся интегрируемые комбинации по другой независимой переменной. В результате получается цепочка уравнений, из которой можно исключить производные по следующей независимой переменной. В результате получается цепочка обыкновенных дифференциальных уравнений по временной переменной t. Исследование совместности цепочки приводит к явному представлению решения по времени. Представление решения подставляется в исходную систему, которая расщепляется на конечное число уравнений с меньшим числом независимых переменных.

Таким образом, удалось найти все решения переопределенной системы уравнеий тепловых движений газа в плоском случае. Эта задача не поддавалась решению долгое время.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 11-01-00026-а, 11-01-00047-а, 12-01-00648), гранта Президента РФ НЩ-6706.2012.1, гранта 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению 220.

Доказательство непрерывной зависимости и асимптотической сходимости с помощью временной аналитичности для слабых решений уравнений Навье-Стокса

Е.Н. Цыганов
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
e-mail: entsyganov@yahoo.com

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса в лагранжевых координатах

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t + p_x = \left(\frac{u_x}{v}\right)_x, \tag{1}$$

где независимые переменные $t \in \mathbb{R}^+$ и $x \in \mathbb{R}$ обозначают время и пространство соответственно, зависимая переменная $v = v(x,t)$ - обозначает величину, обратную плотности, $u = u(t,x)$ - скорость, $p = p(v)$ - давление. Предполагается, что функция p удовлетворяет следующим условиям :

$$p' < 0, \qquad \lim_{v \to 0+} p = +\infty, \qquad \lim_{v \to +\infty} p = 0. \tag{2}$$

Мы будем также считать, что $p \in C^1(\mathbb{R}^+)$.

Начальными условиями для задачи (1)-(2) будут являться

$$v(0,\cdot) - \bar{v},\ u(0,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}), \quad 0 < C^{-1} \le v(0,\cdot) \le C, \tag{3}$$

где $\bar{v}, \bar{u}, C$ - константы.

Из всех слабых решений мы выделим те, которые обладают дополнительной регулярностью :

$$0 < M^{-1} \le v(x,t) \le M; \tag{4}$$

$$(1 \wedge t) \int_R u_x^2(x,t)\, dx + (1 \wedge t) \int_0^t \int_R u_t^2(x,s)\, dxds \le C; \tag{5}$$

$$(1 \wedge t)^2 \int_R u_t^2(x,t)\, dx + (1 \wedge t)^2 \int_0^t \int_R u_{xt}(x,s)\, dxds \le C, \tag{6}$$

где $(1 \wedge t) = min(1,t)$.

Ниже мы сформулируем наши основные результаты.

Теорема 1 *Предположим, что давление p является аналитической функцией в открытой окрестности полуоси R^+. Тогда если (v_1, u_1) и (v_2, u_2) - слабые решения системы (1)-(3), обладающие регулярностью (4)-(6), то для любого натурального n и положительного T существуют такие числа $k = k(n), C = C(T,M) > 0$, что*

$$\int_R \left(\frac{d^n}{dt^n}(v_1(x,t) - v_2(x,t)) \right)^2 dx + \int_R \left(\frac{d^n}{dt^n}(u_1(x,t) - u_2(x,t)) \right)^2 dx \le$$
$$\le Ct^{-k}\Big(\int_R (v_1(x,0) - v_2(x,0))^2 dx + \int_R (u_1(x,0) - u_2(x,0))^2 dx), \tag{5}$$

для всех значений $0 < t \le T$.

Теорема 2 *Предположим, что давление p является аналитической функцией в открытой окрестности полуоси R^+. Тогда если (v,u) - слабое решение системы (1)-(3), обладающие регулярностью (4)-(6), то для любого натурального n существуют такие числа $\alpha = \alpha(n), C = C(M) >$*

0, *что*

$$\int_R \left(\frac{d^n}{dt^n}v(x,t)\right)^2 dx + \int_R \left(\frac{d^n}{dt^n}u(x,t)\right)^2 dx \le$$
$$\le Ce^{-\alpha t}(\int_R (v(x,0)-\bar{v})^2 dx + \int_R u^2(x,0)dx), \qquad (6)$$

для всех значений $0 < t$.

Список литературы

[1] Hoff D., Tsyganov E. *Uniqueness and continuous dependence of weak solutions in compressible magnetohydrodynamics*, ZAMP, 56 No 5, 2005

[2] Tsyganov E. *On time analyticity of weak solutions of the compressible Navier-Stokes equations*, Physica D, 227, 2007.

On the nonlinear oscillations of viscoelastic bar

Yu.A. Chirkunov

Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

e-mail: chr101@mail.ru

In the Kelvin model [1], the longitudinal nonlinear oscillations of viscoelastic bar are described by the equation

$$u_{tt} = \sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xxt}\,, \qquad (1)$$

where t is the time, x is the coordinate characterizing the location of the bar cross section, $u = u(t,x)$ is the longitudinal displacement of the bar cross section during the time t, $\lambda \neq 0$ is the viscosity, and $\sigma(u_x)$ is the stress; $\sigma'(u_x) > 0$, $\sigma''(u_x) \neq 0$; the prime means differentiation with respect to u_x. Without loss of generality, we can assume that $\lambda = 1$. Indeed, the value $\lambda = 1$ can be obtained by the extension transformation.

The problem of classification of Eq. (1) with respect to second-order conservation laws is solved. The secondorder conservation laws for Eq. (1) are determined by the vector $\mathbf{A} = (A^0, A^1)$, whose components are functions of the variables and t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx} and u_{xx}; by virtue of Eq. (1), they satisfy the relation [2]

$$(D_t A^0 + D_x A^1) = 0\,,$$

where D_t and D_x are the operators of total differentiation with respect to t and x, respectively.

The nontrivial second-order conservation laws for Eq. (1) are generated by the following two conservation laws:

$$A^0 = u - tu_t\,,\ A^1 = t(u_{tx} + \sigma(u_x)) \tag{2}$$

$$A^0 = -u_t\,,\ A^1 = u_{tx} + \sigma(u_x) \tag{3}$$

Each of these laws determines a nonlocal variable that can be used to write Eq. (1) in the form of a system of equations whose symmetries are nonlocal symmetries of Eq. (1). For the conservation laws (2), this system has the form

$$tu_t = w_x + u\,,\ w_t = w_{xx} + t\sigma(u_x) + u_x, \tag{4}$$

for the conservation law (3), this system has the form

$$u_t = v_x\,,\ v_t = v_{xx} + t\sigma(u_x), \tag{5}$$

where $w = w(t,x)$ and $v = v(t,x)$ are nonlocal variables.

Using the algorithm of the group classification of the system of differential equations with the help of generalized equivalence transformations proposed in [3], we perform the group classification of systems (4) and (5).

The Lie group G_4 generated by operators

$$Y_1 = \partial_x\,,\ Y_2 = t\partial_u\,,\ Y_3 = \partial_u - x\partial_w\,,\ Y_4 = \partial_w$$

is the kernel of the main groups of system (4), i.e., it is admitted by this system for all arbitrary elements σ. The kernel G_4 can be extended only by one operator. This extension occurs in the three cases: 1) at $\sigma = (u_x)^\beta$, where $\beta(\beta-1) \neq 0$, system (4) admits the additional operator

$$(1-\beta)(2t\partial_t + x\partial_x) + (3-\beta)u\partial_u + 2(2-\beta)w\partial_w; \tag{6}$$

2) at $\sigma = \ln(u_x)$, system (4) admits the additional operator

$$2t\partial_t + x\partial_x + 3u\partial_u + (t^2 + 4w)\partial_w; \tag{7}$$

3) at $\sigma = \exp(u_x)$, system (4) admits the additional operator

$$2t\partial_t + x\partial_x + (u - 2x)\partial_u + (2w + x^2)\partial_w. \tag{8}$$

The Lie group G_5 generated by operators

$$Z_1 = \partial_t\,,\ Z_2 = \partial_x\,,\ Z_4 = \partial_u\,,\ Z_5 = t\partial_u + x\partial_v$$

is the kernel of the main groups of system (5). By analogy with system (4), we find that the kernel G_5 can be extended only by one operator. This extension occurs in the same three cases as those considered for system (4): 1) at $\sigma = (u_x)^\beta$, where $\beta(\beta-1) \neq 0$, system (5) admits the additional operator

$$(1-\beta)(2t\partial_t + x\partial_x) + (3-\beta)u\partial_u + 2v\partial_v; \tag{9}$$

2) at $\sigma = \ln(u_x)$, system (5) admits the additional operator

$$2t\partial_t + x\partial_x + 3u\partial_u + 2(t+v)\partial_v; \tag{10}$$

3) at $\sigma = \exp(u_x)$, system (5) admits the additional operator

$$2t\partial_t + x\partial_x + (u-2x)\partial_u. \tag{8}$$

The operators Y_3, Y_4, Z_4 and the operators defined by (6)–(11) are nonlocal symmetries of Eq. (1).

For all obtained 8 models defined by the systems (4) and (5) are received an optimal systems of subgroups of the corresponding main groups. All invariant and partially invariant solutions of the systems of these 8 models are obtained. Physical meaning of these solutions are indicated.

Список литературы

[1] J. M. Greenberg, R. C. MacCamy, and V. J. Mizel *On the Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions of the Equation* $\delta'(u_x)u_{xx}+\lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$. J. Math. Mech. 1968. No. 17(7). P. 707–728.

[2] Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. *Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics.* // Novosibirsk. NTSU. 2012. 659 P.

[3] Chirkunov Yu.A. *Generalized Equivalence Transformations and Group Classification of Systems of Differential Equations.* // J. of Appl. Mech. and Tech. Phys. 2012. Vol. 53. No. 2. P. 147–155.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 11–01–12075–ofi–m-2011), by the Program "Leading Scientific Schools"(project No. NSh_6706.2012.1), and by a grant from the Government *of the Russian Federation for the state support of research teams headed by invited researchers (contract No. 12.740.11.1430).*

О равномерной резольвентной сходимости для многомерной задачи с частой сменой граничных условий.

Т.Ф. Шарапов
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия
e-mail: stf0804@mail.ru

Рассматривается эллиптический оператор в многомерной области с частой сменой краевых условий в случае, когда усредненный оператор содержит краевое условие Дирихле. Доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному в смысле нормы оператора, действующего от L_2 в W_2^1. Получены оценки скорости сходимости нормы оператора.

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – декартовы координаты в R^n, Ω – ограниченная область в R^n с границей класса C^2, τ – расстояние от точки до границы Ω, измеренное вдоль внутренней нормали, ε – малый положительный параметр, $\eta = \eta(\varepsilon)$ – ограниченная положительная функция. Всюду в работе предполагается, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}} = 0. \tag{1}$$

Для каждого ε возьмем точки $y_\varepsilon^i \in \partial\Omega$ такие, что

$$C_1\varepsilon \leq \min_{i\neq j} |y_\varepsilon^i - y_\varepsilon^j| \leqslant C_2\varepsilon, \tag{2}$$

$i, j = \overline{1, N(\varepsilon)}$, а C_1 и C_2 не зависят от ε.

Пусть $\gamma_\varepsilon^{(i)}$, $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$ – части границы $\partial\Omega$, являющиеся ограниченными множествами положительной меры. Будем рассматривать $\gamma_\varepsilon^{(i)}$ как $(n-1)$-мерные области, границы этих областей будем предполагать состоящими из конечного числа непересекающихся замкнутых $(n-2)$-мерных поверхностей класса C^2.

Обозначим через $B_r(y)$ шар в R^n с центром в точке y и радиусом r. Далее, пусть существуют такие числа $R_k > 0$, не зависящие от ε, $k = 1, 2$

такие, что выполняется:

$$\left(B_{R_2\varepsilon\eta}(y_\varepsilon^i)\bigcap\partial\Omega\right)\subseteq\gamma_\varepsilon^{(i)}\subseteq B_{R_1\varepsilon\eta}(y_\varepsilon^i),\quad B_{R_1\varepsilon\eta}(y_\varepsilon^i)\bigcap B_{R_1\varepsilon\eta}(y_\varepsilon^j)=\emptyset,\ i\neq j. \tag{3}$$

Положим $\gamma_\varepsilon:=\bigcup\limits_{i=1}^{N}\gamma_\varepsilon^{(i)}$.

Через $A_{ij}=A_{ij}(x), A_j=A_j(x), A_0=A_0(x)$ обозначим функции, определенные на Ω, и предположим, что $A_{ij}\in C^1(\overline{\Omega}), A_j\in C^1(\overline{\Omega}), A_0\in C(\overline{\Omega})$. Функции A_{ij} и A_j предполагаются комплекснозначными, A_0 – вещественная. Кроме того, функции A_{ij} удовлетворяют условию эллиптичности

$$A_{ij}(x)=\overline{A}_{ij}(x),\quad \sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)z_i\overline{z}_j\geq a_0\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2,\quad x\in\Omega,\quad z_i\in\mathbb{C}, \tag{4}$$

где a_0 положительная константа, независящая от x и z_i

Через $a=a(x)$ обозначим вещественную функцию, определенную на $\partial\Omega$, и предположим, что $a\in C(\overline{\Omega})$.

Основным объектом изучения настоящей работы является оператор в $L_2(\Omega)$, определенный дифференциальным выражением

$$H_\varepsilon:=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A}_j+A_0, \tag{5}$$

с краевым условием Дирихле на γ_ε и третьим краевым условием на Γ_ε

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mu}+a\right)u=0,\qquad \frac{\partial}{\partial\mu}:=-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\nu_j\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{n}\overline{A}_j\nu_j,$$

где $\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $\Gamma_\varepsilon:=\partial\Omega\backslash\overline{\gamma}_\varepsilon$. Строго определим H_ε как самосопряженный оператор, соответствующий замкнутой симметричной полуторалинейной полуограниченной снизу форме

$$h_\varepsilon(u,v):=\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}+\sum_{j=1}^{n}\left(A_j\frac{\partial u}{\partial x_j},v\right)_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left(u,A_j\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}+(A_0u,v)_{L_2(\Omega)}+(au,v)_{L_2(\partial\Omega)} \tag{6}$$

в $L_2(\Omega)$ с областью определения $D(h_\varepsilon):=\mathring{W}_2^1(\Omega,\Gamma_\varepsilon\bigcup\gamma_\varepsilon)$. Здесь $\mathring{W}_2^1(\Omega,\Gamma_\varepsilon\bigcup\gamma_\varepsilon)$ – подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, которые обращаются в нуль на $\Gamma_\varepsilon\bigcup\gamma_\varepsilon$. В дальнейшем $D(\cdot)$ область определения формы или оператора, и $\mathring{W}_2^i(\Omega,Q)$ обозначает пространство Соболева, состоящее из функций в $W_2^i(\Omega)$, с нулевым следом на кривой Q лежащий в области $\Omega \subset R^n$.

Целью работы является изучение поведения резольвенты оператора H_ε при $\varepsilon \to 0$. Чтобы сформулировать основной результат, введем дополнительный оператор. Определим H_0 как оператор в $L_2(\Omega)$, определенный дифференциальным выражением

$$H_0 := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A}_j + A_0, \tag{7}$$

с краевым условием Дирихле на $\partial\Omega$. Строго введем H_0 как самосопряженный оператор, соответствующий замкнутой симметричной полуторалинейной полуограниченной снизу форме

$$h_0(u, \upsilon) := \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \left(A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \upsilon \right)_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(u, A_j \frac{\partial \upsilon}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} + (A_0 u, \upsilon)_{L_2(\Omega)} \tag{8}$$

в $L_2(\Omega)$ с областью определения $D(h_0) := \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$.

Через $\|\cdot\|_{X \to Y}$ обозначим норму оператора, действующего из банахова пространства X в банахово Y.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *При $\varepsilon \to 0$ имеет место неравенство*

$$\|(H_\varepsilon + \mathrm{i})^{-1} - (H_0 + \mathrm{i})^{-1}\|_{L_2(\Omega) \to W_2^1(\Omega)} \leqslant C \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{9}$$

где константа C не зависит от ε.

Граничные задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа в нецилиндрических областях

А.А. Шухардин, И.А. Калиев

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия

e-mail: shukhardinaa@gmail.com, kalievia@mail.ru

Пусть нецилиндрическая область $\Omega_T = \{(x,t) | 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$, где $x = s(t)$ - известная гладкая функция, занята вязким теплопроводным газом. Одномерное нестационарное движение газа в области Ω_T описывается системой уравнений [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = R\rho\theta, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{2}$$

$$\rho(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x}) = \kappa\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - p\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x,t) \in \Omega_T. \tag{3}$$

Здесь $\rho(x,t)$, $u(x,t)$, $p(x,t)$ и $\theta(x,t)$ - плотность, скорость, давление и абсолютная температура газа; μ, R, κ - положительные константы: вязкость, газовая постоянная и коэффициент теплопроводности газа соответственно.

В начальный момент времени задаются u, θ, ρ:

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta(x,t)|_{t=0} = \theta_0(x), \quad \rho(x,t)|_{t=0} = \rho_0(x), \quad x \in [0, s_0], \tag{4}$$

где $s_0 = s(0)$. На известных границах $x = 0$ и $x = s(t)$ задаются условия:

$$u(x,t)|_{x=0} = u_1(t), \quad u(x,t)|_{x=s(t)} = 0, \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\rho(x,t)|_{x=s(t)} = \rho_2(t) \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

$$\theta(x,t)|_{x=0} = \theta_1(t), \quad \theta(x,t)|_{x=s(t)} = \theta_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{7}$$

Предполагается, что для всех $t \in [0,T]$ и $x \in [0, s_0]$ выполняются неравенства:

$$0 < m \le \rho_0(x), \rho_2(t), \theta_0(x), \theta_1(t), \theta_2(t) \le M < +\infty, \tag{8}$$

$$0 < s_0, \; 0 < m \le \frac{ds}{dt}(t) \le M, \tag{9}$$

где m, M – некоторые положительные константы.

Задача Gas. *Требуется найти функции $\rho(x,t)$, $u(x,t)$, $\theta(x,t)$ удовлетворяющие системе уравнений (1)–(3), если в начальный момент и на известных границах выполняются условия (4)–(7).*

Теорема. *Пусть начальные и краевые данные задачи Gas принадлежат пространствам Гельдера*

$$\rho_0(x) \in C^{1+\alpha}([0,s_0]), u_0(x) \in C^{2+\alpha}([0,s_0]), \theta_0(x) \in C^{2+\alpha}([0,s_0]),$$

$$s(t), u_1(t), \rho_2(t), \theta_1(t), \theta_2(t) \in C^{(2+\alpha)/2}([0,T]),$$

$0 < \alpha = const < 1$; *выполнены условия (8), (9) и условия согласования нулевого и первого порядков в точках* $(0,0), (s_0,0)$.

Тогда задача Gas имеет единственное классическое решение, обладающее свойствами

$$\rho(x,t)\in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}_T),\ u(x,t)\in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T),\ \theta(x,t)\in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T),$$

причем

$$0<m_1\le\rho(x,t)\le M_1<+\infty,\ 0<m_2\le\theta(x,t)\le M_2<+\infty,$$
$$(x,t)\in\Omega_T;$$

где m_1, M_1, m_2, M_2 *– некоторые положительные константы.*

Локальная теорема существования и единственности задачи Gas доказана в [2]. В данной работе доказываются теоремы существования и единственности глобального обобщенного и классического решений задачи Gas.

Список литературы

[1] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.*Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* Новосибирск: Наука, 1983.

[2] Kaliev I.A., Kazhikhov A.V. Well-posedness of a gas-solid phase transition problem. *J. of Math. Fluid Mech.* (1999) **1**, No. 3, 282–308.

Дифференцируемость по малым параметрам решения смешанной задачи для одного псевдогиперболического уравнения

Т.К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет,

Красноярск, Россия

e-mail: tursunbay@rambler.ru

В области D рассматривается нелинейное псевдогиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u(t,x)-\nu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)+\mu\frac{\partial^5 u(t,x)}{\partial t\,\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}=f\left(t,x,u(t,x)\right)\quad(1)$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x)\qquad(2)$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0}=u_{x\,x}(t,x)_{|x=0}=\int\limits_0^l u(t,y)\,dy=\int\limits_0^l u_{y\,y}(t,y)\,dy=0, \tag{3}$$

где $f\,(t,x,u)\in C\,(D\times R)$, $\varphi_j(x)\in C^5(D_l)$, $\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j''(x)_{|x=0}=\int\limits_0^l\varphi_j(y)dy=$

$=\int\limits_0^l\varphi_j''(y)dy=0$, $j=1,2$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty, 0<l<\infty$, $0<\nu,\ \mu$ – малые параметры.

В данной работе изучаются вопросы дифференцируемости по малым параметрам решения смешанной задачи (1)-(3). При этом применяется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1)-(3) в виде ряда Фурье.

Предположим, что выполняются следующие условия:

$$\lambda_i^4\mu^2-4\lambda_i^2\nu-4<0; \tag{4}$$

$$\int\limits_0^T\|f\,(t,x,u)\,\|_{L_2(D_l)}\,dt\le\Delta<\infty; \tag{5}$$

$$f\,(t,x,u)\in Lip\Big\{L(t,x)_{|\,u}\Big\},\ 0<\int\limits_0^l\|L(t,y)\,\|_{L_2(D_l)}\,dy<\infty; \tag{6}$$

$$\|W(t,\nu,\mu)\,\|_{B_2(T)}<\infty. \tag{7}$$

Тогда решение смешанной задачи (1)-(3) можно представить в виде:

$$u(t,x,\nu,\mu)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t,\nu,\mu)b_i(x),$$

где $a_i(t,\nu,\mu)$ определяется как решение следующей счетной системы нелинейных интегральных уравнений:

$$a_i(t,\nu,\mu)=W_i(t,\nu,\mu)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\,(s,y,Qa(s,\nu,\mu))\,G_i(t,s,\nu,\mu)b_i(y)dyds,$$

$$W_i(t,\nu,\mu)=\exp\Big\{-\frac{1}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)t\Big\}\times$$

$$\times\Big[\varphi_{1i}\cos\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}+\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu)}\left(\varphi_{2i}+\frac{\varphi_{1i}}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)\right)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}\Big],$$

$$G_i(t,s,\nu,\mu)=\frac{2\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)\frac{t-s}{2}\right\}\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t-s}{2}}{\omega_{0i}(\nu)\Big[\omega_{2i}(\nu,\mu)+\omega_{1i}(\nu,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)s\Big]}\,,\ \omega_{0i}(\nu)=1+\lambda_i^2\nu,$$

$$\omega_{1i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^4\mu}{\omega_{0i}(\nu)}\,,\ \omega_{2i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^2\sqrt{4\omega_{0i}(\nu)-\lambda_i^4\mu^2}}{\omega_{0i}(\nu)},$$

$$\varphi_{ji}=\int\limits_0^l\varphi_j(y)b_i(y)dy,\ j=1,2,b_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_i x,\ \lambda_i=\frac{2i\pi}{l}.$$

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1 *Пусть выполняются условия (4)-(7) и*

1) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^4\mu}{\sqrt{\rho}}\Big[\lambda_i^4+\mu^2\Big(\frac{\omega_{0i}(\nu)}{\rho}+\frac{\lambda_i^2}{\sqrt{\rho}}\Big)\Big]|\varphi_{1i}|<\infty$, $\rho=4+4\lambda_i^2\nu-\lambda_i^4\mu^2$;

2) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^4\mu}{\omega_{2i}(\nu,\mu)}\Big(\lambda_i^2+\frac{\mu}{\sqrt{\rho}}\Big)|\varphi_{2i}|<\infty$;

3) $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int\limits_0^T|f_i(u,\nu)|\,dt<\infty$, *где* $f_i(u,\nu)=\int\limits_0^l f\left(t,y,Qa(t,\nu,\mu)\right)b_i(y)dy$,

$\tau_0=\inf_{[0;\,\nu]}|\omega_{2i}(\nu,\,\mu)+\omega_{1i}(\nu,\,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\,\mu)t|$, $\alpha_i=\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)\Big(\lambda_i^2\mu+\sqrt{\rho}\Big)}\times$

$\times\Big[\frac{\lambda_i^4\mu T}{2\omega_{0i}(\nu)}+\frac{1}{\Big(\omega_{0i}(\nu)\Big)^2}+\frac{\lambda_i^8\mu^3T}{\tau_0\sqrt{\rho}}\Big]+\frac{\lambda_i^4\mu}{\tau_0}\Big[\frac{\mu T}{\omega_{0i}(\nu)\sqrt{\rho}}+\frac{\mu}{\sqrt{\rho}}+\frac{\lambda_i^2}{\Big(\omega_{0i}(\nu)\Big)^2}\Big]$;

4) $\gamma=\max_{t\in D_T}\Big\|\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial u}\Big\|_{L_2(D_l)}<\infty$.

Тогда существует производная решения смешанной задачи (1)-(3) по параметру ν *в классе* $E_2(D)$.

Теорема 2 *Пусть выполняются условия (4)-(7) и*

1) $B_0(\nu,\mu)<\infty$, *где* $B_0(\nu,\mu)=\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{|\varphi_{1i}|\cdot\Big[\frac{\lambda_i^4T}{2}\Big(1+\frac{\lambda_i^2\omega_{0i}(\nu)}{\sqrt{\rho}}\Big)+$
$+\frac{\lambda_i^6\mu}{\sqrt{\rho}}\Big(T+\frac{2\mu\omega_{0i}^2(\nu)}{\sqrt{\rho}}+\frac{T^2\omega_{0i}(\nu)}{2}\Big)+\frac{\lambda_i^2\omega_{0i}(\nu)}{\sqrt{\rho}}\Big]+|\varphi_{2i}|\Big[\frac{\lambda_i^2\omega_{0i}(\nu)}{\sqrt{\rho}}\Big(2T+\frac{4\mu\,\omega_{0i}(\nu)}{\sqrt{\rho}}\Big)\Big]\Big\}$,
$\rho=4+4\lambda_i^2\nu-\lambda_i^4\mu^2$;

2) $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\int\limits_0^T|f_i(u,\nu)|\,dt<\infty$, *где* $f_i(u,\nu)=\int\limits_0^l f\left(t,y,Qa(t,\nu,\mu)\right)b_i(y)dy$,

$\overline{\tau}_0=\inf_{[0;\,\mu]}|\omega_{2i}(\nu,\,\mu)+\omega_{1i}(\nu,\,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\,\mu)t|$,

$\beta_i=\lambda_i^4\left[\frac{T}{2}+\frac{1}{\overline{\tau}_0}+\frac{2\lambda_i^2\mu}{\sqrt{\rho}}\cdot\Big(1+T+\lambda_i^4\Big)\right]$;

3) $\gamma=\max_{t\in D_T}\Big\|\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial u}\Big\|_{L_2(D_l)}<\infty$.

Тогда существует производная решения смешанной задачи (1)-(3) по параметру μ *в классе* $E_2(D)$.

Распределение показателей безусловного базиса из экспонент в пространствах со степенным весом

Р.С. Юлмухаметов, К.В. Трунов
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
yulmukhametov@mail.ru, trounovkv@mail.ru

В работе рассматривается вопрос о существовании безусловных базисов из экспонент в пространствах функций, локально интегрируемых на ограниченном интервале I вещественной оси, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\, dt} < \infty,$$

где $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале. Данный вопрос изучался в работах [1]-[13]. При $I = (-1;1)$, $h(t) = -\alpha \ln(1-|t|)$, $\alpha > 0$ (обозначим данное простанство через $L_2(\alpha)$) получена оценка снизу частоты показателей безусловного базиса.

Теорема 1. *Пусть система* $\{e^{z_k t}\}$ *образует безусловный базис в пространстве* $L_2(\alpha)$. *Тогда существуют числа* $\delta_1 = \delta_1(\alpha) \in (0,1)$ *и* $\delta_2 = \delta_2(\alpha) > 0$, $M = M(\alpha) > 0$*, такие, что при достаточно больших* $|x_0|$ *для любого* y_0 *в каждом прямоугольнике* $Q = \{z = x + iy : \delta_1 x_0 \le x \le \delta_2 x_0,\ |y - y_0| \le M|x_0|\}$ *и* $-Q$ *находится хотя бы один показатель* z_k.

Список литературы

[1] Н.К. Бари. *О базисах в гильбертовом пространстве.*//Доклады Академии наук, 1946, т.54, стр. 383 -386.

[2] Н.К. Никольский, Б.С. Павлов, С.В. Хрущев. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* Препринт ЛОМИ, Р-8-80.

[3] Р.А. Башмаков. *Системы экспонент в весовых гильбертовх пространствах на R.*//Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 2006 г.

[4] Р.С. Юлмухаметов. *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций*// Сиб. мат. ж. 1985. Т.26. №4. С.159-175.

[5] К. П. Исаев, Р.С. Юлмухаметов. *О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах.* // Уфимский математический журнал. 3:1 (2011), 3–15.

[6] Б.Я. Левин. *Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа*// Матем. физика и функц. анализ. ФТИНТ АН УССР. 1969. Вып. 1. С. 136-146.

[7] Б.Я. Левин, Ю.И. Любарский. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонен*// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т.39. №3. С. 657-702.

[8] К. П. Исаев. *Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках*// Уфимский математический журнал. 2:1 (2010), 71–86.

[9] A. Borichev, Yu.Lyubarskii *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 9 (2010). P. 449-461.

[10] Р.А. Башмаков, А.А. Путинцева, Р.С. Юлмухаметов. *Целые функции типа синуса и их применение.*// Алгебра и анализ. 22:5 (2010), 49–68.

[11] K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov. *Lower estimate of frequency of indicators of unconditional exponential bases in spaces with a power weight.*// Eurasian Mathematical Journal [принята в печать].

[12] В.И. Луценко, Р.С. Юлмухаметов. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства.*//Матем. заметки, 1990, т.48, №5, стр. 80–87.

[13] В.В. Напалков, Р.А. Башмаков, Р.С. Юлмухаметов. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций.*//Доклады Академии наук, 2007, т.413, №1, стр. 20–22.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение 14.B37.21.0358) и РФФИ (гранты №№ 12-01-00567-а и 11-01-97009-р поволжье а).

Антисимметричная подмодель движения газа с линейным полем скоростей в упрощенном виде

Ю.В. Юлмухаметова
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа, Россия;
УГАТУ, лаборатория "ГАММЕТТ", Уфа, Россия
e-mail: yulmukhametova.yulya@yandex.ru

Для уравнений газовой динамики с решением в виде линейного поля скоростей, найдено 11 подмоделей [1]. В работе рассматривается одна из перечисленных подмоделей, а именно антисимметричная подмодель 5. Ее образуют одно матричное дифференциальное уравнение и три векторных дифференциальных уравнения с начальными данными. Уравнение состояния, функции давления и плотности определены.

Рассматриваемая подмодель имеет интеграл угловой скорости и линейный интеграл [2]. При специальных значениях начальных данных задачи обнаружены новые интегралы подмодели. Используя некоторых преобразований эквивалентности, сохраняющих структуру уравнений подмодели, но меняющих начальные данные, сокращено количество параметров задачи. В результате, порядок системы дифференциальных уравнений, которая образует подмодель, был понижен.

Список литературы

[1] Юлмухаметова Ю.В. *Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей* // Сибирские электронные математические известия. 2012. Т. 9. С. 208-226.

[2] Юлмухаметова Ю.В. *Выпрямляющиеся разлеты газа из вихря с линейным полем скоростей* // УМЖ. 2012. Т. 4, № 4. С. 162-178.

Синхронизация периодических колебаний в нелинейных динамических системах

М.Г. Юмагулов

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия;

e-mail: yum_mg@mail.ru

Одно из фундаментальных свойств нелинейных динамических систем – это явление синхронизации, которое заключается в установлении определенных соотношений между параметрами системы и возникновении вследствие этого в системе незатухающих колебаний определенных периодов [1]. Здесь особо важны исследования, направленные на поиск признаков такой синхронизации, приближенное построение возникающих решений, анализ их устойчивости.

В настоящей докладе обсуждается новая схема исследования задач о синхронизации, основанная на разработанном в [2, 3] операторном методе исследования задач о многопараметрических бифуркациях динамических систем. Предлагаемая схема позволяет в новых условиях изучить явление синхронизации, получить асимптотические представления возникающих колебаний.

Рассматривается зависящая от скалярного или векторного параметра μ динамическая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$x' = F(x,\mu) + g(t,\mu)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

в котором $F(x,\mu)$ и $g(t,\mu)$ – это гладкие по совокупности переменных функции, при этом функция $g(t,\mu)$ является T-периодической по t: $g(t+T,\mu) \equiv g(t,\mu)$. Предполагается, что автономная система

$$x' = F(x,\mu)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{2}$$

имеет точку равновесия $x^*(\mu)$, которую без ограничения общности можно считать нулевой, т.е. $F(0,\mu) \equiv 0$. Предполагается также, что при некотором $\mu = \mu_0$ внешний периодический сигнал $g(t,\mu)$ равен нулю: $g(t,\mu_0) \equiv 0$. Наконец, пусть точка равновесия $x = 0$ системы (2) является негиперболической при $\mu = \mu_0$, а именно, пусть матрица Якоби $A(\mu) = F'_x(0,\mu)$ при $\mu = \mu_0$ имеет пару простых собственных значений $\pm\nu_0 i$, где $\nu_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых собственных значений.

Систему (2) можно представить в виде $x' = A(\mu)x + a(x,\mu)$, где нелинейность $a(x,\mu)$ является однородной по x и начинается с квадратичных слагаемых.

Пусть q – натуральное число. Будем говорить, что значение μ_0 параметра μ является *точкой синхронизации на субгармониках периода* qT

системы (1), если существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и определенная при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывная функция $\mu(\varepsilon)$ такая, что $\mu(0) = \mu_0$ и при этом для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ уравнение (1) при $\mu = \mu(\varepsilon)$ имеет ненулевое периодическое решение $x = x(t, \varepsilon)$ минимального периода qT такое, что функция $x(t, \varepsilon)$ непрерывно зависит от ε, при этом $\|x(t, \varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to +0$ равномерно по t.

Отметим, что синхронизация на субгармониках периода qT является типичным явлением в нелинейной системе (1), если отношение частот ν_0 и ν является рациональным, а именно, если выполнено равенство

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{p}{q} \tag{3}$$

при некоторых натуральных p и q.

Пусть условие (3) выполнено. Для исследования задачи о синхронизации на субгармониках периода qT предлагается следующая схема. На первом этапе от дифференциального уравнения (1) осуществляется переход к операторному уравнению

$$y = B(\mu)y + b(x, \mu) + u(\mu)\,, \quad y \in R^N\,, \tag{4}$$

где

$$B(\mu) = e^{qTA(\mu)}\,, \quad b(y, \mu) = \int\limits_0^{qT} e^{q(T-s)A(\mu)} a(x(s), \mu)\, ds\,,$$

$$u(\mu) = \int\limits_0^{qT} e^{q(T-s)A(\mu)} g(s, \mu)\, ds\,;$$

здесь $x(t)$ – это решение задачи Коши для дифференциального уравнения (1) при начальном условии $x(0) = y$. Задача о qT-периодических решениях уравнения (1) равносильна задаче о решениях уравнения (4) в следующем смысле: если функция $x(t)$ является qT-периодическим решением уравнения (1), то вектор $y = x(0)$ будет решением уравнения (4) и, наоборот, если вектор y является решением уравнения (4), то решение $x(t)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (1) при начальном условии $x(0) = y$ будет qT-периодическим решением уравнения (1).

На втором этапе исследование операторного уравнения можно проводить на основе разработанных в [2, 3] операторных методов исследования задач о многопараметрических бифуркациях динамических систем.

Список литературы

[1] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. *Лекции по нелинейной динамике..* - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. - 500 с.

[2] Юмагулов М.Г. *Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах.* // Доклады АН. 2009. Т. 424, № 2. С. 177-180.

[3] Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах* // Уфим. матем. журнал. 2010. Т. 2, № 4. С. 3-26.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение 14.B37.21.0358) и РФФИ (гранты №№ 12-01-00567-а и 11-01-97009-р поволжье а).

Признаки субгармонической бифуркации для систем с последействием

Д.А. Якшибаева

Сибайский институт (филиал) БашГУ, Сибай, Россия

e-mail: k_dina_a@mail.ru

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, зависящую от векторного параметра λ с T - периодической по t правой частью:

$$x'(t) = \int_0^{r(\theta)} [d_\tau Q(\lambda, t, \tau)]\, x(t-\tau) + a(\lambda, t, x_t), \tag{1}$$

где $x \in R^N$, $\lambda \in R^k, k \geq 2$, $r(\theta)$ — положительная, непрерывно дифференцируемая функция зависящая от параметра θ, $\theta \in [a,b]$, $|r(\theta)| \leq T$; $Q(\lambda, t, \tau)$ — квадратная $N \times N$ матрица, элементы которой при каждом λ являются функциями ограниченой вариации по $t \in [0, r(\theta)]$ и при каждом $t \in [0, r(\theta)]$ непрерывно дифференцируемы по λ; $x_t = \big(x(t-\varsigma_1), ..., x(t-\varsigma_s)\big)$, $\varsigma_j = \varsigma_j(\theta)$, $0 \leq \varsigma_j(\theta) \leq r(\theta)$, $\varsigma_j(\theta)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $j = 1, ..., s$; нелинейность $a(t, \lambda, x_t)$ равномерно по λ и t удовлетворяет соотношению $\|a(t, \lambda, x_t)\| = O\left(\|x\|^2\right)$ при $\|x\| \to 0$. Интегралы (1) понимаются в смысле Лебега-Стилтьеса, $\|\cdot\|$ — норма векторов в евклидовом пространстве R^N.

Уравнение (1) при всех значениях λ имеет нулевое решение. В статье исследуется задача о бифуркации периодических решений уравнения (1) в окрестности точки $x = 0$.

Наряду с (1) будем рассматривать линейную систему

$$x'(t) = \int\limits_0^{r(\theta)} [d_\tau Q(\lambda, t, \tau)]\, x(t - \tau). \tag{2}$$

Критическими для уравнения (1) будут те значения λ_0 параметра λ, при которых один или несколько мультипликаторов системы (2) по модулю равны 1. Изменение параметра λ в окрестности λ_0 может приводить к различным локальным бифуркациям в окрестности точки $x = 0$.

Обозначим через $V(\lambda)$ матрицу монодромии системы (2).Известно [1], что если матрица $V(\lambda_0)$ не имеет собственное значение равное 1 по модулю, то уравнение (1) при всех λ близких к λ_0 не имеет в некоторой окрестности точки $x = 0$ периодические решения. Если же $V(\lambda_0)$ имеет собственное значение равное 1 по модулю, то возможны различные сценарии бифуркаций, определяемые свойствами спектра оператора $V(\lambda_0)$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть k — натуральное число. Значение λ_0 параметра λ называется точкой бифуркации kT-периодических решений системы (1), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, при котором система (1) имеет ненулевое kT-периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, при этом $\max\limits_t \|x(t, \varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. При $k \geq 2$ будем говорить о бифуркации субгармонических колебаний [2].

Необходимым условием бифуркации kT-периодических решений является наличие у матрицы $V(\lambda_0)$ пары простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm 2\pi \frac{p}{k} i}$, где $0 < \frac{p}{k} < 1$ и $\frac{p}{k}$ — рационально.

Это равносильно тому, что линейная система (2) при $\lambda = \lambda_0$ имеет двупараметрическое семейство kT-периодических решений. Естественным предполагается, что параметр λ является двумерным: $\lambda = (\theta, \mu)$.

Положим

$$E(\tau)x(t) = \begin{cases} x(t - \tau + T), t \in [0, \tau) \\ x(t - \tau), t \in [\tau, T] \end{cases};$$

тогда T-периодические решения $x(t)$ уравнения (1) определяют решения $u(t) = x(T \cdot t)$ уравнения

$$u(t) = B(\theta, \mu, T, t)u(t) + b[\theta, \mu, T, t, u(t)], \tag{3}$$

где

$$B(\theta,\mu,T,t)u(t) = u(1) + T\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{r(\theta)} [d_\tau Q(\theta,\mu,s,\tau)]\, E\left(\frac{\tau}{T}\right)u(s)\right)ds,$$

$$b[\theta,\mu,T,t,u(t)] = T\int\limits_0^t \left(a\left(\theta,\mu,s,E\left(\frac{\varsigma_1}{T}(\theta)\right)u(s),...,E\left(\frac{\varsigma_s}{T}(\theta)\right)u(s)\right)\right)ds.$$

Отметим, что число 1 является полупростым собственным значением оператора $B(\theta_0,\mu_0,T,t) : L_2 \to L_2$ кратности 2; это следует из необходимого условия бифуркации субгармонических колебаний. Здесь $L_2 = L_2[0,1]$. Обозначим через $e = e(t)$ и $g = g(t)$ линейно независимые собственные функции оператора $B_0 : B_0 e = e$, $B_0 : B_0 g = g$. Сопряженный оператор B_0^* также имеет собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собственные функции $e^* = e^*(t)$ и $g^* = g^*(t)$. Эти функции можно выбрать исходя из соотношений $(e,e^*) = (g,g^*) \neq 0$, $(e,g^*) = (g,e^*) = 0$.

Т е о р е м а 1. *Матрица $V(\theta_0,\mu_0)$ имеет пару простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm 2\pi \frac{p}{k} i}$, где $0 < \frac{p}{k} < 1$ и $\frac{p}{k}$ — рационально и*

$$\det\begin{bmatrix} (B'_\theta(\theta_0,\mu_0)e,e^*) & (B'_\mu(\theta_0,\mu_0)e,e^*) \\ (B'_\theta(\theta_0,\mu_0)e,g^*) & (B'_\mu(\theta_0,\mu_0)e,g^*) \end{bmatrix} \neq 0, \qquad (4)$$

тогда пара чисел (θ_0,μ_0) является точкой бифуркации субгармонических колебаний системы (3).

Список литературы

[1] Красносельский М.А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* - М.: Наука, 1966. – 332 с.

[2] Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах* // Уфим. матем. журнал. 2010. Т. 2, № 4. С. 3-26.

Предметный указатель