

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз	6
I. Операцияларды зерттеу пәні	8
1-дәріс. Операцияларды зерттеудің жалпы есебі	8
1-дәрісті пысықтау сұрақтары.....	13
1-семинар сабақ. Операцияларды зерттеудің жалпы есебінің мысалдары	14
1-аудиториялық жұмыс тапсырмалары	14
1-үй жұмысының тапсырмалары	17
2-дәріс. Оңтайлы ұстаным критерийлері. Көп критерийлі есептер.	18
2-дәрісті пысықтау сұрақтары.....	23
2-семинар сабақ. Оңтайлы ұстаным критерийлерін қолдану. Көп критерийлі есептерді шығару.....	24
2-аудиториялық жұмыс тапсырмалары	24
2-үй жұмысының тапсырмалары.....	26
II. Сызықтық программалау.....	29
3-дәріс. Сызықтық программалау есептерінің математикалық моделі. Симплекс әдіс алгоритмі.	29
3-дәрісті пысықтау сұрақтары.....	37
3-семинар сабақ. Сызықтық программалау есептерін шығару.....	38
3-аудиториялық жұмыс тапсырмалары	38
3-үй жұмысының тапсырмалары	39
4-дәріс. Сызықтық программалау есептеріндегі түйіндістік.....	40
4-дәрісті пысықтау сұрақтары.....	50
4-семинар сабақ. Түйіндес есептер шығару. Түйіндес симплекс әдісті қолдану.....	51
4-аудиториялық жұмыс тапсырмалары	51
4-үй жұмысының тапсырмалары	54
5-дәріс. Бүтін-сандық сызықтық программалау. Гомори әдісі. Шекаралар мен тармақтар әдісі.....	56
5-дәрісті пысықтау сұрақтары.....	61
5-семинар сабақ. Бүтін-сандық сызықтық программалау есебін шығару	62
5-аудиториялық жұмыс тапсырмалары	62
5-үй жұмысының тапсырмалары.....	62
III. Операцияларды зерттеудің сызықтық моделдері	63
6-дәріс. Диета есебі. Ресурстарды үлестірі есебі. Экономиканың сала	

аралық моделі. Таңдау есебі. Коммивояжер есебі.	63
6-дәрісті пысықтау сұрақтары	68
6-семинар сабақ. Тағайындау есебі мен коммивояжер есебін шығару әдістері	69
6-аудиториялық жұмыс тапсырмалары.....	69
6-үй жұмысының тапсырмалары	74
7-дәріс. Сызықтық программалаудағы көлік есебі (Ф.Хичкок, Т.Купманс).....	75
7-дәрісті пысықтау сұрақтары.....	82
7-семинар сабақ. Көлік есебін шығару әдістерін қолдану.....	73
7-аудиториялық жұмыс тапсырмалары.....	83
7-үй жұмысының тапсырмалары	89
8-дәріс. Көлік есебіндегі потенциалдар әдісі	90
8-дәрісті пысықтау сұрақтары	98
8--семинар сабақ. Көлік есебін шешуде потенциалдар әдісін қолдану	99
8-аудиториялық жұмыс тапсырмалары.....	99
8-үй жұмысының тапсырмалары	108
9-дәріс. Көлік есебін шешудің дельта-әдісі.....	110
9-дәрісті пысықтау сұрақтары	113
9-семинар сабақ. Көлік есебін шешудің дельта әдісін жалғастыру.	114
9-аудиториялық жұмыс тапсырмалары.....	117
9-үй жұмысының тапсырмалары.....	118
ІҮ. Графтар теориясының элементтері.....	120
10- дәріс. Графтар теориясының негізгі ұғымдары	120
10-дәрісті пысықтау сұрақтары	125
10- семинар сабақ. Графтар теориясының негізгі ұғымдары.....	126
10-аудиториялық жұмыс тапсырмалары.....	126
10- үй жұмысының тапсырмалары.....	127
Ү. Динамикалық программалау	130
11- дәріс. Қысқа жол есебі. Дейкстра алгоритмі. Минимум арыс дарағын құру	130
11-дәрісті пысықтау сұрақтары	132
11- семинар сабақ. Минимум арыс дарағын құру. Краскал алгоритмі. Қысқа жол есебі. Дейкстра алгоритмі.....	133
11-аудиториялық жұмыс тапсырмалары.....	133
11- үй жұмысының тапсырмалары	133
12-дәріс. Желідегі ағындар. Форд-Фалкерсон алгоритмі	134
12-дәрісті пысықтау сұрақтары	140
12-семинар сабақ. Форд-Фалкерсон алгоритмінің қолданымы.....	141

12- аудиториялық жұмыс тапсырмалары	141
12- үй жұмысының тапсырмалары	143
ҮІ. Желілік жоспарлау	146
13- дәріс. Желілік жоспарлау мен басқару есебі. Желілік график құру	146
13-дәрісті пысықтау сұрақтары.....	150
13- семинар сабақ	151
13-аудиториялық жұмыс тапсырмалары	151
13- үй жұмысының тапсырмалары.....	152
14- дәріс Желілік жоспарлаудың уақыттық параметрлері. Гант диаграммасы. Сындарлы жол әдісі. Желілік жоспарлаудың ықтималдықты сипаттамалары	154
14-дәрісті пысықтау сұрақтары.....	160
14-семинар сабақ	161
14-аудиториялық жұмыс тапсырмалары	161
14- үй жұмысының тапсырмалары.....	164
15- дәріс. Желілік проектіні тиімділеудің әдістері	167
15-дәрісті пысықтау сұрақтары.....	175
15-семинар сабақ. «Тура жүріс» әдісінің қадамдарын талдау арқылы желілік проектілерді тиімділеу.....	176
16- аудиториялық жұмыс тапсырмалары.....	176
16-үй жұмысының тапсырмалары	185
Пайдаланылған әдебиеттер	186

АЛҒЫ СӨЗ

*Белгілі бір мақсатқа жетуге бағышталған әрекеттердің, шаралардың жиынтығын **операция** деп түсінеміз, яғни адамның қайбір мақсатты көздеген кез келген әрекеті операция деген сөз.*

Операцияларды зерттеу (ОЗ) – ұйымдастыру жүйелеріндегі тиімді басқару әдістерін жасайтын және оны іске асырумен айналысатын ғылым. Ол өзінің құрамы мен құрылысы, байланысы мен басқару органдары арқылы сипатталатын ұйымдастыру жүйелерін білдіреді. Ұйымның құрылымы – жүйені ортақ мақсатқа жеткізу жолында сан-қилы міндеттерді атқаратын – ішкі жүйелерге бөлінеді. Ұйым компоненттері өз-ара да, сыртқы ортамен де әрекеттесе береді. Ұйымның басқару органдары жүйенің қызмет ету мақсатын анықтап, жүйе қызметінің сапасын бағалайды, әрі қойылған мақсатқа жету үшін жүйенің құрамын да, құрылымын да, байланысын да, тіпті меншікті басқару жүйесін де өзгерте алады.

Операцияларды зерттеудің мақсаты – ұйымдастыру жүйелерін басқаруда қабылданатын шешімдерді сандық түрде негіздеу.

Екінші дүниежүзілік соғыс кезінде қарқынды дамыған *Операцияларды зерттеу* ғылымы өз бастауын тым ертеден алады. Атап айтқанда, бұрынырақта Ф.Кенэ (1758 ж.), А.Смит (1776 ж.), О.Курно (1838 ж.), Л.Вальрас (1874 ж.) экономикалық процестердің кейбір қарапайым моделдерін ұсынса, К.Жордан (1873 ж.), Г.Минковский (1896 ж.), Фаркаш (1903ж.) сызықтық программалаудың математикалық негіздерін табысты жасады. Динамикалық программалау саласында А.А.Марков (1856-1922), жаппай қызмет көрсету теориясында А.Эрланг (1878-1929) айтулы нәтижелерге қол жеткізді. Экономикалық процестердің кең қолданысқа ие болған математикалық моделдерін 1936 ж. В.Леонтьев (1973ж Нобель сыйлығына ұсынылған), 1937 ж. Дж. фон Нейман, 1939ж. Л.В.Канторович (1975ж. Нобель сыйлығына ұсынылған) жасағаны мәлім. Сонымен қатар, Р.Акоф, Р.Беллман, Дж.Данциг, А.Кофман, Г.Кун, Т.Саати, Р.Фор, Р.Черчмен сияқты біліктілердің операцияларды зерттеудің қалыптасуы мен дамуына қосқан үлесі зор.

Кейбір операциялық зерттеулер бірінші өндірістік революцияға дейін-ак жүргізілсе де, дәл осы кезеңде операцияларды зерттеуді дамытуды талап ететін басқаруды ұйымдастыру есептерінің өрісі кеңейе түсті. Ақырында, әрбір қызметтік бөлімшелердің мақсаттарын анықтауға және осы мақсатқа жету жолдарын бағалауға негіз қалайтын критерийлердің қажеттілігі туындады.

Әскери әрекеттерді ұйымдастыру мәселелерімен шұғылданатын арнайы ғылыми ұжымдар қалыптасқан 1935-1942 жж. аралығында Ағылшын, АҚШ, Канада және Франция елдері қомақты табысқа жетті. «Операцияларды зерттеу» термині (әскери операциялар меңзеліп отыр) 1939 жылдан бастап қолданысқа енді. Бұл орайда, стратегиялық аса маңызды операцияларды зерттеуге математиканың жаңа бағыты ретінде ерекше көңіл бөлінгендігін

айта керу керек. Алғашқы басылымы Ф.Морз бен Д.Кимбелдің құпияландырылған «Операцияларды зерттеу әдістері» (1946 ж.) кітабы тек 1951 жылы ғана ашық басылымды жарияланды.

Екінші өнеркәсіптік революцияның арқасында ғылым өнеркәсіптегі ұйымдастыру есептерін шешуге жұмылдырылды. Сонымен, жиырмамыншы ғасырдың 50-жылдарының басында операцияларды зерттеу өнеркәсіпте, мемлекеттік мекемелер мен оқу орындарында кең қанат жайды да, 1952 ж. операцияларды зерттеудің Америкалық қоғамы мен 1957ж операцияларды зерттеу қоғамдарының Халықаралық федерациясы құрылып, операцияларды зерттеу ғылымның дербес саласы ретінде мойындалды.

Басшы кісі өз шешімін қалыптастырғанда көптеген, кейде бірін-бірі жоққа шығаратын, шарттардың арасындағы мақсатқа жетудің күрделі де ұтымды критерийлеріне сүйенуге мәжбүр болады. *Операцияларды зерттеу* басқару шешімдерін тиімділеудің кең ауқымды есептерін шешкенде жетекші кісіге баға жетпес қызмет көрсетеді.

Сондықтан, *операцияларды зерттеу* бүгінгі таңда, адам қызметінің шар тарабында кеңінен қолданылыс табуда.

Дегенмен, осы күнге шейін бұл курсты оқыту бағдарламасының барлық талаптарын жалғыз жүйеге көгендеген бірде-бір оқулықтың жоқтығы, әсіресе қазақ тілінде мардымсыз болса да мәлімет аларлық туындылардан құр алақандығымыз белгілі.

Орыс тілінде жазылған қайбір оқулықтарда операцияларды зерттеудің тараулары мейлінше тәптіштеліп, кей-кейде студент басты мәселені қосалқыдан ажыратуы үшін телегей-теңіз ақпарат көлемін ақтаруға мәжбүр болады.

Сыбағасына *операцияларды зерттеу* есептерінің арнайы тараулары тиген шет ел тілдеріндегі басылымдар да жетерлік. Олар күрделі математикалық аппаратты қолданып, терең зерттеуді қажетсінетін мәселелерді тілге тиек етеді. Бұл оқулықтар мамандық курстары үшін өте пайдалы болғанымен, операцияларды зерттеудің жалпы курсына қолдануға жарай бермейді.

Ендеше, көптеген оқулықтарға шашыраған ауқымды материалдарды жинақтап, жүйелі баяндайтын оқу құралын жазу – өзекті мәселеге екендігі түсінікті болар. Назарларыңызға ұсынылып отырған бұл кітапта автордың студенттерге операцияларды зерттеудің әртүрлі есептерін қарастырғанда туындайтын проблемалар жайында жалпы түсінік беруді көздеген лекция-дәрістердің нұсқалары ықшамдап баяндалған.

Оқу құралы ОЗ типтік бағдарламалары мен мемлекеттік стандарттарына сәйкес әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің механика-математика факультетіндегі «математика», «информатика», «қолданбалы математика» мамандықтарының студенттеріне ұзақ жылдар бойы оқылған дәрістер негізінде дүниеге келді. Кітапқа енген материалдардар қашықтан оқыту жағдайында ұтымды пайдалануға мейлінше бейімделген.

Кітаптың мазмұны мен сапалық деңгейін жақсартуға септігі тиетін оқырмандардың сын-пікірлерлері imankul.t.sh@mail.ru электронды поштасында қабылданады.

I. ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ ПӘНІ

1-дәріс. Операцияларды зерттеудің жалпы есебі.

Операцияларды зерттеу (қысқаша ОЗ) қызметкерлердің, машиналардың, материалдардың, қаржының және ақпараттың күрделі жүйелерін басқарудың әдістерімен шұғылданады. Ол өзіне тән зерттеу нысаны мен әдістемесі бар кешенді ғылыми зерттеулердің қатарына жатады. *Оның әдістемесінің бірінші ерекшелігі – жүйелік талдам мен ұйымдық басқару есептерін шешудің кешенді тәсілін қолдануы.* Мұндай есептерді шешкенде барлық маңызды факторларды ескеріледі, олардың арасындағы байланыстар тағайындалады және олар бүкіл жүйенің бүтіндей қызмет ету тұрғысынан бағаланады.

Ал екінші ерекшелігі – моделдерді және есептеу техникасын қолдануы. Операцияларды зерттеу әдістемесі басқару мәселесінің мәнін түсінуге және қабылданатын шешімдердің салдарын бағалаудың моделін жасауға мүмкіндік береді.

Операцияларды зерттеу дербес ғылым ретінде қарулану жүйесі мен логистиканың күрделі мәселелерін шешуге математик, инженер, экономист, психолог, тағы басқа сан-алуан саланың мамандары қамтылған практиктер командалары құрылған екінші дүниежүзілік соғыс уақытында пайда болды. Бұл командалар мәселелерді талдап, оның тиімді шешімін табуды сандық терминдерде қалыптастырды. Қазіргі шақта операцияларды зерттеудің әдістері операциялық менеджментте және кәсіпкерлікке бағытталған басқа салаларда кеңінен қолдануда.

Операцияларды зерттеудің жалпы есебі мына түрде жазылады:

$$\begin{aligned} U &= f(x, y, z) \rightarrow \min, \\ g_i(x, y, z) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ x &\in X, y \in Y, z \in Z, \end{aligned} \tag{1.1}$$

мұндағы

- x - басқарылатын факторлар векторы,
- y - кездейсоқ факторлар векторы,
- z - анықталмаған факторлар векторы,

Ал X, Y, Z кейбір векторлық кеңістіктің ішжиындары. Егер бұл векторлар кеңістігі ақырлы болса, онда *ақырлы-өлшемді тиімділеу* есебін аламыз. Ал осы векторлардың кемінде біреуі ақырсыз болса, онда *ақырсыз-өлшемді тиімділеу* есебі шығады.

Бақыланатын факторлардың мәндерін шешім қабылдаушы таңдайды. Кездейсоқ және анықталмаған факторлар - шешім қабылдаушы бақылай алмайтын факторлар. Бұл екі фактордың арасындағы айырмашылық

кездейсоқ вектор дегеніміз үлестірім заңы белгілі кездейсоқ вектор, ал анықталмаған фактордың мәндер облысы белгілі.

Есептің мағанасына қарай математикалық анализдің немесе экстремалдік есептерді шешудің сандық әдістерін қолданып, берілген шарттар мен шектеулерде U сапа критерийін минимумдайтын тиімді шешімді табамыз. Зерттелінетін модель нақты жүйені мейлінше дәл бейнелегенде ғана шешім нәтижесінде алынған айнымалылардың тиімді мәні жүйенің қызмет ету сапасын жақсартады. Сондықтан, моделдің нақтылыққа сәйкестігін тексеріп, алынған шешімді бағалау қажет.

Операцияларды зерттеу нақты жүйелердің қызметінің сапасын жақсартуды көздейді. Ендешезерттеу нәтижелері қолданысқа енуі тиіс.

Сонымен, кез келген операцияны зерттеу келесі кезеңдерден тұрады:

- 1) мәселенің қойылуы;
- 2) моделді құру;
- 3) шешім алу;
- 4) моделді тексеру және шешімді бағалау;
- 5) нәтижелерді қолданысқа енгізу.

Мәселенің қойылуы. Сонымен, қолында түрлі стратегиялар бар шешім қабылдаушы кісі (ШҚК) әрбір стратегияны қабылдағанда қайбір дәрежеде өз мақсатына сай келетін түрлі нәтижелерді алады. Таңдалатын стратегияның әсерлі болуына қоршаған орта шарттары – басқарылмайтын айнымалылар – ықпал етеді.

Операцияларды зерттеу мәселелерін қойғанда шешім қабылдаушы кісілердің (ШҚК) тобын анықтап, маңызды айнымалаларды атап көрсетіп, оларды басқарылатын айнымалылар (стратегиялар) мен басқарылмайтын айнымалыларға (қоршаған орта шарттарына) жіктеп, жүйенің қызмет ету мақсатын қисындаймыз. Демек, біз шешім қабылдау $\langle \Omega, P \rangle$ есебіне тірелеміз. Мұндағы Ω – альтернативтердің (нұсқалардың) әуелгі жиыны, P – қайбір ішкі $\Omega_{\text{оп}} \in \Omega$ жиынын бөліп алуға көмектесетін тиімділік принципі

(дербес жағдайда, $\Omega_{\text{оп}}$ жалғыз элементтен тұруы да мүмкін). Бұдан әрі $\Omega_{\text{оп}}$ ішкі жиынынан ШҚК көзқарасы бойынша ең жақсы саналатын қабылдауға тұратын қандайда бір шешім таңдалады. Шешім қабылдаудың жалпы есебінде Ω нұсқалар жиыны мен P тиімділік принципі алдын ала берілмеуі де мүмкін. Есепте Ω берілсе, онда есеп таңдау есебі делінеді де, ал Ω мен P берілсе – тиімділеу есебін аламыз. Практикалық есептерде $x \in \Omega$ нұсқалары түрлі x қасиеттердің жиынтығын сипаттайды. x нұсқасын бағалау үшін $\Psi_s(x)$ векторы енгізіледі, мұндағы $\Psi_s(x)$ дегеніміз x нұсқасының s ($s = \overline{1, q}$) қасиеті бойынша сандық бағалануы. Бұдан соң осы бағалаулар негізінде P тиімділік принципі қалыптасады.

Моделдер құру. Операцияларды зерттеуде нақтылықты өрнектейтін моделдер айрықша рөл атқарады. Олар өздері бейнелейтін жүйелердің айқын да, ықшам кескінін алуға мүмкіндік береді. Көбіне моделдерді талдап, эксперимент жасап, қарастырылатын жүйедегі өзгерістің жүйе қызметінің

сапасына ықпалын анықтайды. Осындай әдістердің арқасында жүйенің өзіне тікелей эксперимент жасаудан құтыламыз. Кейде, жүйеде натура-эксперимент өткізу мүмкін емес, немесе оған мол қаржы мен уақыт қажет болады. Әдетте, нысанды жасағаннан гөрі оның әлдеқайда қарапайым моделін жасаудың сәті түседі. Қандай да бір құбылысты тап басып, дәл айту үшін қыруар айнымалы қажет болса да, оның негізгі қасиеттерін анықтауға айнымалылардың салыстармалы түрдегі кішігірім сандары жеткілікті. Әйтсе де, анағұрлым маңызды айнымалыларды таңдау, олардың арасындағы байланысты дәл бейнелеу және жүйе қызметінің мақсатын дұрыс қиыстыру оңайға түсе бермейді.

Операцияларды зерттеуде қолданылатын моделдердің типіне тоқтала кетсек:

1) кескіндеуші, 2) аналогтық, 3) символдық, 4) имитациялық.

Кескіндеуші моделдер нақты нысанға сырттай ұқсас болғанымен, одан өлшемдері өзгеше, яғни нысанның бейнесі мен көшірмесін білдіреді. Анағұрлым көбірек таралған осындай типтегі моделдер: *суреттер, сызбалар, эскиздер, фотографиялар, ұлғайтылған немесе кішірейтілген моделдер* және т.б. Автомобилдерді, станоктарды, мебелдерді конструкциялау процесінде бұйымның жалпы көрнісі мен деталдерінің өлшемдері көрсетілген сызбалар жиі қолданылады. Киім пішкенде матаны пішу схемалары мен эскиздері пайдаланылады. Жаңа ұшақ конструкциясының аэродинамикалық қасиеттері алдын ала аэродинамикалық құбырдағы кішірейтілген натура-моделдермен зерттеледі. Кемелердің гидродинамикалық сипаттары оның натура-моделдерін бассейнде сынау арқылы анықталады.

Аналогтық моделдерде бір қасиеттер топтамасы мүлде басқа екінші бір қасиеттер тобын бейнелеу үшін қолданылады. Мысалы, гидравликалық жүйені электрлік, транспорттық немесе экономикалық жүйелер аналогы ретінде қолданады. Тұтқыр ортадағы математикалық маятниктің өшпелі тербелісі конденсатордан, индуктивтіліктен және резистордан тұратын электрлік схема арқылы моделденеді; бұл жағдайда маятниктің механикалық қозғалысының аналогы – конденсатор қабаттарындағы кернеулердің өзгеруі, тұтқыр орта аналогы – резистор кедергісі.

Символдық моделдерде объектінің бейнеленуі шартты символдар арқылы жүзеге асады. Мысалы, хатты әліппе қаріптері арқылы жазсақ, музыкалық шығармаға нота қолданамыз. Егер, моделдеу процесінде математикалық символдар (арифметикалық және логикалық амалдар; теңдік, теңсіздік, функционалдық тәуелділіктер, туындылар мен интегралдар, алгебралық және дифференциалдық һәм интегро-дифференциалдық теңдеулер т.б.) пайдаланылса, онда математикалық моделді аламыз. Операцияны зерттеу есептерін шығаруда математикалық моделдер маңдай алды орында екендігін атап өткеніміз ләзім. Дегенмен, ұйымдық басқару есебін шығару әрдайым математикалық моделдер құруға және тиісті есептеулер жасауға соқтыра бермейді. Бұны, дербес жағдайда, шешім қабылдау барысында қойылған есепті басқарушының дұрыс шешуінде маңызды рөл атқаратын, бірақ қатаң қисындауға көне бермейтін (демек математикалық моделге тікелей ене алмайтын) факторлармен жиі ұшырасатындығымыз көрсетеді. Осындай қиысуы қиын факторлардың бірі –

адамзат қызметінің «бихевиоралді» делінетін (behaviour – мінез-құлық сөзінен шыққан)) факторы.

Математикалық моделдеудің қолданыс аясы қанша кең болса да, ұйымдық басқарудың көптеген маңызды есебін қарастырғанда талдаудың мүлде басқа әдістеріне көңіл бөлу қажеттігі туады. Мәселен, *математикалық моделдерді сандық шешу үшін* шағын өлшемді жүйелер жағдайымен шектеліп, зерттелінетін нысан құрылымына және олардың қызмет ету алгоритмдеріне қатысты *ықшамдаушы ұйғарымдар жасауға тура келеді*. Бұл кездегі алынған моделдер нақты жүйедегі өтетін процестердің қарабайыр жуықтауы болып қалуы мүмкін. Мұндайда жүйе қалпын компьютерде «айнытпай бейнелеуге» (имитациялауға) мүмкіндік беретін имитациялық моделдерді қолданамыз.

Имитациялық моделдеуде

- айнымалылар арасындағы қайбір функционалдық тәуелділіктерді кестелер немесе математикалық күрделі функциялар көмегімен ескере аламыз;
- анықталмаған факторларды да ескеруге, сонымен қатар үлестірім заңы кестелер немесе күрделі математикалық функциялар арқылы берілетін кездейсоқ шамаларды генерациялауға да мүмкіндік бар;
- жүйенің қызмет етуінің күрделі алгоритмдерінің программалай аламыз.

Сонымен, математикалық модел құрып, шешімін алу мүмкін емес жүйелердің қалпын имитациялауға мүмкіндік аламыз. Мұның сыртында имитациялық моделдер жүйені неғұрлым дәл бейнелеуге мүмкіндік береді. Имитациялық моделдеудің негізгі кемшілігі – көптеген эксперимент жасау қажеттігі, экспериментті жоспарлау және бақылау нәтижелерін статистикалық өңдеу қиындықтары.

Ш е ш і м а л у . Шешім қабылдау процесінің ең жалпы математикалық моделі мына түрде болады

$$U = f(X, Y) \rightarrow \max, \quad (1.2)$$

мұнда X – басқарылатын айнымалылар, Y – басқарылмайтын айнымалылар, U – пайдалылық функциясы. Мұның сыртында, моделге шартты түрде төмендегіше жазылатын шектеулер енеді

$$\psi_i(X, Y) = 0, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (1.3)$$

Осы (1.2) мақсат функциясын минимумдайтын, берілген (1.3) шектеулерін қанағаттандыратын, X – басқарылатын айнымалылар векторын анықтау қажет.

М о д е л д і т е к с е р у ж әне ш е ш і м д і б ағ а л а у . Моделдің нақты шындыққа адекваттығын тағайындау және моделдегі кемшіліктерді түзеу мақсатында моделге тексеру жүргізіледі. Аталған кемшіліктер қатарына жататындар:

- 1) Модель маңызсыз айнымалыларды қамтиды,
- 2) Модель кейбір маңызды айнымалыларды қамти алмайды.
- 3) Кейбір маңызды айнымалы мәндеріне дәлдігі жеткіліксіз баға жасалған.
- 4) Моделдің құрылымы жалған.

Бұл кемшіліктерді аңғаруға көбіне статистикалық әдістер қолданылады. Көптеген ОЗ есептерінде таңдалған тиімділік критерийіне біреулерінің ықпалы айтарлықтай, ал екіншілерінікі – мейлінше мардымсыз болатын айнымалылар жиі кездеседі. Операционист қыруар айнымалылар арасынан ең маңыздысын таңдап, айнымалылардың аз мөлшерін қамтитын, адекватты моделді құруға ұмтылғаны жөн. Айнымалының тиімділік критерийіне ықпалының дәрежесін анықтайтын статистикалық әдістер: корреляциялық талдам мен регрессиялық талдам, сондай-ақ дисперсия мен ковариация талдамдары.

Нәтижелерді енгізу. Операцияларды зерттеудің мақсаты – ұйымдық басқару жүйесі қызметінің көрсеткіштерін жетілдіру. Оған мына шарттарда ғана жете аламыз:

- 1) өкілеттігі мінсіз бастық операциялық зерттеулер нәтижесінде табылған шешімді құптап, бекітеді;
- 2) Бұл шешім дұрыс жүзеге асады (енгізіледі);
- 3) Жүйе мен сыртқы орта қалай өзгерсе де шешімнің ұтымдылығы сақталады.

Жауапты басшының ұсынылған шешімді құптауы оның бұл шешімнің мәнісін қай деңгейде зерделегендігіне, сонымен қатар шешім алған әдісті қалай ұққандығына байланысты. Өз кезегінде мұндай түсіністікке жету басшының жеке басының операциялық зерттеулер процесіне қандай дәрежеде қатынасқандығына байланысты. Зерттеу барысында туындаған сұрақтарды талқылау мен кеңес алу мақсатына мүдделі барлық басшылармен операционист-ғалым көзбе-көз кездесуі керек. Сондай-ақ, барлық мүдделі басшылармен тұрақты түрдегі *жұмыс-кеңестерін* ұйымдастыруы қажет.

Операцияларды зерттеудің типтік есептері. Таңдалған *P* тиімділік принципін (жүйе қызметі сапасының критерийі) сипаттайтын мақсат функциясының түрі операцияларды зерттеу есептерінің типіне байланысты. ОЗ есептерін келесі типтерге бөлеміз:

1) Ықтималдықты есептер (тәуекелмен шешім қабылдау): қай бір стратегияны қабылдағанда мақсатқа жету ықтималдығы белгісіз түрлі нәтижелер алынады;

2) Детерминді есептер (толық анықталғандық шартында шешім қабылдау): әрбір таңдалған стратегия жалғыз нәтижеге соқтырады;

3) Анықталмағандықты есептер (дәлірек айтқанда, анықталмағандықта шешім қабылдау есебі): белгілі бір стратегияны қабылдағанда түрлі нәтижелер алынуы мүмкін болса да, мұның ықтималдықты есептерден айырмашылығы: мүмкін нәтижелердің ешқандай статистикалық сипаттарын білмейміз. Анықталмағандық қоршаған орта туралы ешқандай ақпараттардың жоқтығынан (табиғи анықталмағандық, немесе пассив анықталмағандық), сонымен қатар шешім қабылдау процесінде ескерілетін басқа кісілер (қарсыластар, бәсекелестер, серіктестер) ұстанымының алдын ала белгісіздігінен пайда болады (бұл бағытталған әрекеттер нәтижесінде жасалатын актив анықталмағандықтар).

Мақсат функциясын таңдау. Әрбір нақты жағдайдағы мақсат функциясын таңдау қарастырылатын есептің мағынасына байланысты.

Сондықтан, операцияларды зерттеу есептерінің түрлі типтері үшін сапа критерийін таңдаудың тек қана жалпы принциптері ғана келтіріледі.

Мәселен $C_1, C_2, \dots, C_m$ стратегияны қолданғанда n нәтиже $R_1, R_2, \dots, R_m$ алынсын делік. Енді $U = \|U_{ij}\|_{m \times n}$ пайдалылық функциясын енгіземіз, мұндағы

$U_{ij} = U(R_j, C_i)$ элементі C_i , $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ стратегиясын қолданғандағы R_j нәтижесінің пайдалылығы. Пайдалылықты өлшеудің әдістері кейінірек қарастырылады, мұндағы U функциясын берілген деп санаймыз.

Ықтималдықты есептерде C_i , $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ стратегиясын қолданғандағы R_j нәтижесін алудың $p(R_j | C_i)$ шартты ықтималдығын белгілі деп саналады.

Бұл жағдайда мақсат функциясы ретінде стратегияның күтілетін пайдалылығы, яғни мына түрдегі функция таңдалады:

$$U(C_i) = \sum_{j=1}^n p(R_j | C_i) U(R_j, C_i)$$

Енді тәуекел жағдайында ұтымды ұстаным таңдау үшін тиімділік есебін шығарамыз:

$$U(C_i) \rightarrow \max_{C_i}.$$

Детерминді есептерде C_i стратегиясын бірге тең ықтималдықпен таңдағанда R_j нәтижесі алынады, сондықтан мақсат функциясы ретінде

$$U(C_i) = U(R_j, C_i)$$

түріндегі стратегияның пайдалылығын алып, ең жақсы стратегияны анықтаудың тиімділік есебін қойуға болады:

$$U(C_i) \rightarrow \max_{C_i}$$

Анықталмағандықпен шешім қабылдау есептерінде оңтайлы ұстаным критерийлері қолданады.

1-дәрісті нысықтау сұрақтары

1. Операцияларды зерттеудің кезеңдері.
2. Операцияларды зерттеу есебінің қойылуы.
3. Операцияларды зерттеуде қолданылатын моделдердің типтері
4. Операцияларды зерттеу есептерінің типтері.
5. Ықтималдықты және детерминді есептердегі мақсат функциясының түрлері.

1-семинар сабақ. Операцияларды зерттеудің жалпы есебінің мысалдары

№1 аудиториялық жұмыстың тапсырмалары

1.1. Мереке қарсаңында қонақ үй нөмірлеріне сұраныстың артатыны

белгілі. Нөмірге тапсырыс берген клиенттердің бәрі бірдей келе бермегендіктен, қонақ үй нөмірлері жиі бос тұрады. Қонақ үй иесі осындай шығындарды азайтуды көздейді. Мынадай статистика белгілі: барлық клиенттердің келу ықтималдығы 0,4. Дәл бір клиент келмеуінің ықтималдығы 0,2. Дәл екі клиенттің келмеуінің ықтималдығы 0,2. Ал дәл үш клиенттің келмеуінің ықтималдығы 0,1. Осыны ескерген қонақ үй иесі қонақ үй нөмірлерінің санынан асатын шамада тапсырыс қабылдауға шешім қабылдайды. Әр нөмірдің құны 704\$. Егер клиенттер саны артып кетсе, онда әр артық клиентті нөмірі 120\$ тұратын екінші қонақ үйге орналастырады да, артық $120-70=50$ долларды өзі төлеуге бекінеді.

Ұшыраған шығынын азайту үшін, ол қанша тапсырыс жасау қажет?

Шешуі. Қонақ үй иесі қабылдайтын шешім: $x \in X = \{0,1,2,3\}$ бұндағы x дегеніміз қабылданған артық тапсырыс. Кездейсоқ фактор мәні $y \in Y = \{0,1,2,3\}$ -бұл келмей қалған клиенттер саны. Шығын функциясын $f : X \times Y \rightarrow R$ есептелік:

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 70(y-x), & x < y; \\ 50(y-x), & x \geq y. \end{cases}$$

Тағайынды x мәнінде $f(x, y)$ функциясы 0,4 ықтималдығымен $f(x, 0)$ мәнін; 0,3 ықтималдығымен $f(x, 1)$ мәнін; 0,2 ықтималдығымен $f(x, 2)$ мәнін; 0,1 ықтималдығымен $f(x, 3)$ мәнін қабылдайтын дискретті кездейсоқ шама. Барлық $x \in X$ мәндері үшін математикалық үмітті $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} E_y(f(x, y))$ табайық:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0.4 f(0, 0) + 0.3 f(0, 1) + 0.2 f(0, 2) + 0.1 f(0, 3) = \\ &= 0.4 \cdot 0 + 0.3 \cdot 70 + 0.2 \cdot 140 + 0.1 \cdot 210 = 70 \\ g(1) &= 0.4 f(1, 0) + 0.3 f(1, 1) + 0.2 f(1, 2) + 0.1 f(1, 3) = \\ &= 0.4 \cdot 50 + 0.3 \cdot 0 + 0.2 \cdot 70 + 0.1 \cdot 140 = 48 \\ g(2) &= 0.4 f(2, 0) + 0.3 f(2, 1) + 0.2 f(2, 2) + 0.1 f(2, 3) = \\ &= 0.4 \cdot 100 + 0.3 \cdot 50 + 0.2 \cdot 0 + 0.1 \cdot 70 = 62 \\ g(3) &= 0.4 f(3, 0) + 0.3 f(3, 1) + 0.2 f(3, 2) + 0.1 f(3, 3) = \\ &= 0.4 \cdot 150 + 0.3 \cdot 100 + 0.2 \cdot 50 + 0.1 \cdot 0 = 100 \end{aligned}$$

Күтілетін шығын $x=1$ кезінде минимум 48 мәнін қабылдайды. Ендеше қонақ үй иесі небары 1 артық тапсырыс қабылдай алады екен.

1.2. Тігінші көйлек сатқаннан a пайда әр сатылмаған көйлектен b шығын көреді. Көйлектің бұл түріне деген сұраныс тығыздығы h кездейсоқ шама.

Көйлекке деген максимум сұраныс u . Тігінші мол пайдаға шығу үшін қанша көйлек сатуы қажет?

Шешуі. Егер тігінші $y \in Y \stackrel{\text{def}}{=} [0, u]$ кезінде $x \in X \stackrel{\text{def}}{=} [0, u]$ көйлек тіксе, онда оның пайдасы мынаған тең:

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ay - (a+b)y - bx, & y < x; \\ ax, & y \geq x. \end{cases}$$

Пайда шамасының математикалық үміті мынаған тең:

$$\begin{aligned} E_y(f(x, y)) &= \int_0^x ((a+b)z - bx)h(z)dz + \int_x^u axh(z)dz = \\ &= (a+b) \int_0^x zh(z)dz - bx \int_0^x h(z)dz + ax \int_x^u h(z)dz - ax \int_0^x h(z)dy = \\ &= (a+b) \int_0^x zh(z)dz - (a+b)x \int_0^x h(z)dz + ax. \end{aligned}$$

Енді $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} E_y(f(x, y))$ функциясын x мәні бойынша максимумдап, қанша көйлек тігілуі керек екенін анықтаймыз. Тиімділіктің бірінші ретті критерийін жазамыз:

$$g'(x) = (a+b)xh(x) - (a+b)xh(x) - (a+b) \int_0^x h(z)dz + a = 0.$$

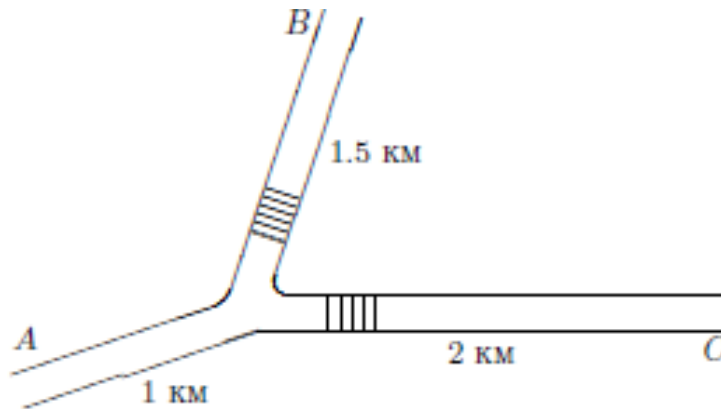
Ендеше тиімді шаманы табамыз:

$$\int_0^x h(z)dz = \frac{a}{a+b}.$$

1.3. А нүктесінен шыққан соң бес минут өткенде велосипді бұзылған кісі

жақын маңдағы А, В және С үш пункттің біріне барып жөндетпекші болды (суретті қараңыз). Ол өзінің 25 пен 30 км/сағ арасындағы жылдамдықпен жүргенін білегеімен, жол айрығында В немесе С пунктіне қарай бұрылғаны есте қалмапты. Алдағы жол ұзақтығы минимум болуы үшін велосипедші қай бағытта қозғалуы керек?

Шешуі. Бұл жағдайда $x \in X \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2\}$ екі шешімінің бірі қабылданады, мұндағы $x=1$ алға қозғалуды, ал $x=2$ кейін қайтуды білдіреді. Мұндағы анықталмаған фактор – адамның орналасу жағдайы. Оны екі өлшемді $z = (z_1, z_2)^T$ вектор арқылы өрнектей аламыз. Мұндағы z_1 – А пунктіне дейінгі қашықтық, ал z_2 тек қана екі мән қабылдайды: 1 – жолайрықта В пунктіне қарай бұрылуды білдірсе, 2 – С пунктіне бұрылуды білдіреді.



1.1-сурет. Велосипедші маршрутының схемасы.

Егер жол 25 км/сағ жылдамдықпен жүрілсе, онда жүрілген жол $25 \cdot (3/60) = 1,25$ км, ал жылдамдық 30 км/сағ кезіндегі жол $30 \cdot (3/60) = 1,5$.

Сондықтан, $z_1 \in [1,25, 1,5]$ және $z \in Z = [1,25, 1,5] \times \{1, 2\}$. Егер $z \in Z$ позициясындағы кісі $x \in X$ шешімін қабылдаса, онда ол мына қашықтықты жүріп өтуі қажет:

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2,5 - z_1, & \text{егер } x = 1, z_2 = 1; \\ 3 - z_1, & \text{егер } x = 1, z_2 = 2; \\ z_1, & \text{егер } x = 2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Шешімнің екі қасиетінің тиімдісін таңдау үшін келесі есепті шешу қажет:

$$\min_{x \in X} \max_{z \in Z} f(x, z) = \min_{x \in X} g(x),$$

мұндағы

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z \in Z} f(x, z).$$

Ендеше (1.4) шартын ескере отырып, есептейтініміз:

$$g(1) = \left\{ \max_{1,25 \leq z_1 \leq 1,5} 2,5 - z_1, \max_{1,25 \leq z_1 \leq 1,5} 3 - z_1 \right\} = \max\{1,25, 1,75\} = 1,75,$$

$$g(2) = \max_{1,25 \leq z_1 \leq 1,5} z_1 = 1,5.$$

Осыдан екінші шешімді қабылдау, яғни кері қайтып А пунктіне беттеуі қажеттігін көреміз. керек

1.4. Зауыт үш түрлі бұйым шығарады. Оларды жасау үшін А мен В түріндегі екі ресурс қолданылады. Олардың қолдағы қоры тиісінше 4000 және 6000 бірлік. Өр түрдегі бұйымның біреуін жасап жығаруға жұмсалатын ресурстар көлемі кестеде көрсетілген:

	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

Бірінші түрдегі бұйымды жасауға екінші түрдегіге қарағанда екі есе, ал үшінші түрдегіге қарағанда үш есе жұмыс жасалады. Зауыттағы жұмысшылар саны 1500 бірінші түрдегі бұйым жас ауға мүмкіндік береді. Зауыт бұйымдарының қолданымына жасалған талдау бірінші, екінші және үшінші бұйымдарға деген сұраныстың тиісінше 200, 200 және 150 екендігін көрсетті. Дегенмен 1, 2 және 3 түрдегі бұйымдарды шығару қатынасы 3:2:5 болуы қажет. Осы 1, 2 және 3 бұйымдардың біреуін сатқаннан түсетін табыс тиісінше 30, 20 және 50 доллар. Осындай шарттарды ескере отырып жалпы пайда максимум болатындай әр түрдегі бұйымды шығару мөлшерін анықтаңыз.

Шешуі: $z(x) = 30x_1 + 20x_2 + 50x_3 \rightarrow \max$,

мұндағы x_1, x_2, x_3 – тиісінше 1, 2 және 3 түрдегі бұйымдар саны. Қойылатын шектеулер:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4000 \quad (\text{А ресурсының шектеуі}),$$

$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 6000 \quad (\text{В ың бойынша шектеуі})$$

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 9000 \quad (\text{зауыт жұмысшылары санының шектеуі})$$

$$x_1 \geq 200, x_2 \geq 200, x_3 \geq 150 \quad (\text{бұйымдардың минимум көлемінің шектеуі})$$

$$2x_1 - 3x_2 = 0, \quad 5x_1 - 3x_3 = 0, \quad 2x_3 - 5x_2 = 0 \quad (\text{бұйым еселігінің шектеуі})$$

1.5. Төрт түрлі бұйым екі станокта кезектесіп өңделеді. Әр түрдегі бір бұйымның әрбір станокта өңделу уақыты кестеде келтірілген:

Станок	Бір бұйымның өңделу уақыты (сағат)			
	1-түрде	2-түрде	3-түрде	4-түрде
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Бір машина/сағат құны бірінші станок үшін 1000 теңге, екіншісі үшін 1500 теңге. Барлық түрдегі бүкіл бұйымды өңдеудің ұйғарымды мәндері төмендегідей: бірінші станок үшін 500 машина/сағат және екіншісі үшін 380 машина/сағат. Бұл 1, 2, 3 және 4 түрдегі бұйымдардың бағалары тиісінше 6500, 7000, 5500 және 4500 теңге.

Қосынды таза кіріс максимум болатындай бұйым шығарудың тиімді жоспарын жасаңыз.

№1 үй жұмысының тапсырмалары

1.6. Құс фабрикасында 20000 шөже бар. Әр шөжені қоректендіруге аптасына 0,5 жемдік қоспа жұмсалады. Жемдік қоспа үш түрлі: әктас, дақыл және соя. Олардың құрамындағы заттар – кальций, белок және жасуша. Кестеде әр түрлі жемдегі осы заттардың қатынасы келтірілген:

Жем	Бір кг жемдегі заттардың қатынасы			Бір кг жемнің бағасы (теңге)
	кальций	белок	жасуша	
әктас	0,38	-	-	0,08
Дақыл	0,001	0,09	0,02	0,3
Соя	0,002	0,5	0,08	0,8

Жемдік қоспадағы кальций 0,8% дан кем, 1,2%дан артық болмауы керек; белок 22% дан кем емес; жасуша 5% дан кем емес.

Апталық жоспардағы жалпы шығын төмен болуы үшін жем қоспаларының әрбірінен қанша алу қажет?

1.7. Зауыт екі үлгідегі телефон шығарады. Әр үлгідегі телефонды жасаудың өз технологиялық желісі бар. Бірінші желінің тәуліктік өнім шығару көлемі – 60 телефон, ал екіншісінікі 75. Бірінші үлгі үшін бірдей типтегі 10 электрондық элемент жұмсалса, ал екіншісі үшін жұмсалатыны – 8. Пайдаланылатын элементтердің максимум тәуліктік қоры 800 тал. Бірінші үлгідегі телефонды сатқаннан түсетін кіріс 200 теңге, ал екіншіден 300 теңге. Тиімді өнім шығару жоспарын жасаңыз.

1.8. Кооператив өнімнің екі түрін шығарады – А және В. А өнімін өткізу көлемі екі түрдегі өнімді сатудың 60% ын құрайды. А мен В өнімдерін дайындауға тәуліктік қоры 50 килограмнан аспайтын жалғыз шикі зат жұмсалады. А өнімінің бірлігі үшін 1 кг шикізат жұмсалса, В өнімінің бірлігіне 2 кг жұмсалады. А мен В өнімдерінің бағасы сәйкесінше 200 және 400 теңге. А мен В өнімдерін шығарудың тиімді көлемдерін анықтаңыз.

1.9. Бас киім фабрикасы балалардың екі үлгідегі телпегін шығарады. Бірінші үлгідегі телпекке екінші үлгідегіге қарағанда екі есе еңбек кетеді. Егер фабрика тек бірінші үлгідегі телпекті ғана шығарса, өндірістің тәуліктік өндірісі 500 телпек болар еді. Екі үлгідегі телпектерді сатудың күндік мөлшері 150 тал мен 200 тал арасында. Бірінші үлгідегі телпектің бағасы 80 теңге, екіншісінікі - 5 теңге.

Максимум табысқа кенелу үшін әр үлгідегі телпектен қанша шығарамыз?

1.10. Мекеме екі түрлі бөлшек шығарады: А мен В. Ол жону, тесу және жалтырату станоктарында өңделетін дайындамалар сатып алады. Мекеменің станок паркінің өнімділігін сипаттайтын мәліметтер мынадай:

Станктар	Әр станоктің өнімділігі (бөл./сағ)		Станок уақытының бір сағатының құны (тг.)
	А	В	
Жону	25	40	20
Тесу	28	35	14
Жалтырату	35	25	17,5

А бөлшегі жасалатын дайындама құны 200 теңге, ал В бөлшегінің құны 300 теңге. Бұл бөлшектер тиісінше 500 және 600 теңгеге сатылады.

Өнім өндірідің тиімді жоспары қандай болмақ? Сағатына әр бөлшектен қанша шығарамыз?

2- дәріс. Оңтайлы ұстаным критерийлері. Көп критерийлі есептер.

Оңтайлы ұстаным критерийлері. Анықталмағандық шарттарындағы оңтайлы ұстанымның төмендегідей критерийлері әдетте ШҚК өрелі ойлы қарсыласпен тайталаспағанда, яғни табиғи (пассив) анықталмағандықты есептерде қолданылады. Көңілге қонымды критерий құру үшін актив анықталмағандықты, мысалы мүдделері ШҚК мүддесіне сай келмейтін қарсыластың ұстанымын ескеруді қажет ететін ахуалдарда, арнаулы тәсіл керек. Мұндай даулы ахуалдарда ұстанымның тиімді стратегияларын қабылдау мәселелеріне ойындар теориясында тоқталамыз.

1) Лаплас критерийі. Бұл критерий *жеткіліксіз негіздеу* принципіне сүйенеді. $R_1, R_2, \dots, R_n$ нәтижелерін алу ықтималдығы белгісіз, ал бұл ықтималдықтар әр түрлі екендігін тағайындайтын ақпараттар жоқ ендеше, осы ықтималдықтар өзара тең, яғни C_i стратегиясын тандағанда барлық $j = \overline{1, n}$ кезінде $p(R_j | C_i) = 1/n$ деп ұйғаруға болады. Сонымен, бастапқы есеп тәуекелмен шешім қабылдау есебіне (ықтималдықты есепке) келеді:

$$U(C) = \sum_{j=1}^n U(R_j, C_i) p(R_j | C_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U(R_j, C_i) \rightarrow \max_{C_i}$$

2) Вальд критерийі (максимин критерийі, немесе пессимист критерийі). Осы критериге сай ШҚК әр стратегия үшін пайдалылық мәні минимум деген пессимистік ұйғарымнан өз стратегиясын таңдайды. Бұл кездегі ШҚК оңтайлы қалпы келесі максимин есебінен анықталады:

$$\max_{C_i} \min_{R_j} U(R_j, C_i)$$

3) Гурвиц (жалпыланған максимин) критерийі. Бұл жағдайда мақсат функциясына оптимизм көрсеткіші ретінде қарастыруға болатын α параметрі енгізіледі:

$$\max_{C_i} [\alpha \max_{R_j} U(R_j, C_i) + (1 - \alpha) \min_{R_j} U(R_j, C_i)].$$

Сонымен, ең кіші пайдалылық $\min_{R_j} U(R_j, C_i)$ алуды ұйғаратын Вальд критерийінен мұндағы айырмашылық: ең кіші $\min_{R_j} U(R_j, C_i)$ пайдалылық пен ең үлкен $\max_{R_j} U(R_j, C_i)$ пайдалылық арасында жататын пайдалылыққа жету үміті оянады. Егер, $\alpha = 0$, онда алдыңғы жағдайға (пессимист критерийіне) соқтырады, ал $\alpha = 1$ кезінде (нағыз оптимизмді сипаттайтын) максимастік критерийге айналады. Аралық мән $0 < \alpha < 1$ салиқалы оптимизмге сай келеді.

4) Сэвидж критерийі (минимакс шығынды критерийі). Пайдалылық функциясы алдын ала шығын функциясына (өкініш функциясына) $W = \|W_{ij}\|_{m \times n}$ түрлендіріледі, мұндағы $W_{ij} = \max_{C_i} U_{ij} - U_{ij}$. Сонымен, шығын матрицасының элементі ШҚК нәтиже қандай болатынын білгендегі пайдалылық пен әр ахуалдағы шын пайдалылықтардың айырмасын (яғни, ШҚК мүмкін «өкінішін») білдіреді. Одан әрі оңтайлы ұстанымды анықтау

үшін келесі минимакс есебі қойылады:

$$\min_{C_i} \max_{R_j} W_{ij}$$

Көп критерийлі есептер. ОЗ есептерінде анықталмағандықтың тағы бір түрі – мақсаттың анықталмағандығы. Мысалы, объектіні физикалық (ауқымы, салмағы), экономикалық (затраты ресурстар шығыны, құны), техникалық (шапшаңдығы, атқаратын қызметі) тағы басқа сипаттарына қарай түрлі тұрғыдан бағалауға болады. Сонымен, келесі түрдегі көп критерийлі есепке тірелеміз

$$\begin{aligned} U_1 &= f_1(X) \rightarrow \max, \\ U_2 &= f_2(X) \rightarrow \max, \\ &\quad \vdots \\ U_p &= f_p(X) \rightarrow \max, \end{aligned}$$

(мұндағы барлық критерийлер максимумдауды қажет ететін функция түрінде жазылған, өйткені минимумдаушы критерийлерді -1 ге көбейту арқылы әрқашан максимумдау есебін аламыз). Әрі бұл критерийлер көбіне бір-бірімен қарама-қайшылықта болады. Сондықтан, барлық критерийлер бойынша ең жақсы нәтижеге жету мүмкін емес. Бір критерийді жақсарту екіншілерінің нашарлауына соқтырады.

Егер қайбір $i \in \overline{1, p}$ индексі үшін

$$f_i(X) > f_i(\bar{X}), \quad f_j(X) \geq f_j(\bar{X}), \quad (j = \overline{1, p}; j \neq i)$$

орындалатын X табылмаса, яғни қалғандарын нашарлатпай критерийлердің тым болмағанда біреуін жақсарту мүмкін болмаса, онда $\bar{X}$ – *Парето бойынша тиімді нүкте* деп аталады.

Егер X нүктесі Парето бойынша тиімді болып және оның сыртында $i \in I = \{i \mid f_i(X) > f_i(\bar{X})\}, \quad j \in J = \{j \mid f_j(X) < f_j(\bar{X})\}$

орындалатын кез келген X, i, j үшін

$$\frac{f_i(X) - f_i(\bar{X})}{f_j(\bar{X}) - f_j(X)} < \delta$$

болатын жеткілікті аз $\delta > 0$ саны табылса, онда бұл нүкте *Джозффриону бойынша тиімді* (X i -ші критерий бойынша X -тен басым болса да, j -ші критерий бойынша X , керісінше, X -тен басым; бір критерий бойынша кемістіктер басқа критерийлер бойынша айқын басымдықтарға қарағанда мардымсыз).

Егер барлық критерийді бір мезетте жақсарту мүмкін болмаса, яғни $f(X) > f_i(\bar{X})$ ($i = \overline{1, p}$) үшін X табылмаса, онда X *Слейтер бойынша тиімді нүкте*.

Егер барлық критерийдің мәндерін бірмезетте ε -нан артық шамаға жақсарту алмасақ, яғни берілген $\varepsilon > 0$ үшін $f_i(X) > f_i(\bar{X}) + \varepsilon$, ($i = \overline{1, p}$), орындалатын X табылмаса, онда X ε -*тиімді нүкте* делінеді.

Көп критерийлі есептерді қарастырғанда оларды шешудің жақсы әдістері жасалған әдеттегі бір критерийлі тиімділеу есептеріне әкелу жолдарын табуға тырысқан жөн.

Мақсаттың анықталмағандығынан арылудың анағұрлым көбірек қолданылатын әдістеріне тоқталалық.

Бас критерий әдісі. Мәселен, қарастырылатын $U_1, U_2, \dots, U_p$ критерийлерінің арасындағы өте маңызды (бастысы) U_1 болсын. Онда қалған критерийлердің мәндері қайбір берілген $U_2 \geq U_2^*, U_3 \geq U_3^*, \dots, U_p \geq U_p^*$ сандарынан кем болмауы қажет деген ұйғарымда осы критерийді максимумдау есебін қисындауға болады: $U = U_1 \rightarrow \max$

Критерийлер үйірткісі. Дербес $U_1, U_2, \dots, U_p$ критерийлерінің орнына аддитивті үйірткі жолымен алынатын жалпы жалғыз критерийді қарастыру ұсынылады:

$$U = \sum_{k=1}^p g_k U_k \rightarrow \max \quad (2.1)$$

мұндағы салмақ коэффициенттері $g_k > 0$ тиісті критерийдің маңыздылық дәрежесін сипаттайды ($k = \overline{1, p}$).

Жалпыланған критерий мультипликативті үйірткі жолымен де қисындалуы мүмкін:

$$U = \prod_{k=1}^p (U_k)^{g_k} \rightarrow \max \quad (2.2)$$

(мұнда, $U_k > 0$ ($k = \overline{1, p}$) деп ұйғарылады). Мультипликативті үйірткі (2.2) критерийлерді өлшеуде логарфмдік масштабты қолдану арқылы (2.1) аддитивті үйірткіге келетіндігін есте сақтаңыз.

Нормативті көрсеткіштер. Жоспарлау мен жобалаудың есептерінде қайбір нормативтер жүйесі $U_1^*, U_2^*, \dots, U_p^*$ өте жиі беріледі де, зерттелетін жүйенің параметрлері $U_1 \geq U_1^*, U_p \geq U_2^*, \dots, U_p \geq U_p^*$ шектеулерін қанағаттандыруы талап етіледі. Мұндайда мақсат функциясы ретінде $U_1 \geq U_1^*, U_p \geq U_2^*, \dots, U_p \geq U_p^*$ шарттарындағы мына өрнекті алған жөн (ең нашар көрсеткішті максимумдау)

$$U = \min_{1 \leq k \leq p} \frac{U_k}{U_k^*} \rightarrow \max$$

«Идеалдар» әдісі. Мәселен, біз әрбір $k = \overline{1, p}$ үшін бір критерийлі есептер жүйесін $U_k \rightarrow \max$ шештік те $U_1^0, U_2^0, \dots, U_p^0$ максимум мәндерін таптық дейік. Критерийлер кеңістігіндегі $U_1^0, U_2^0, \dots, U_p^0$ нүктесін «идеал» деп атаймыз. Енді мақсат ретінде «идеалдан» ауытқуды минимумдау есебін қойуға болады:

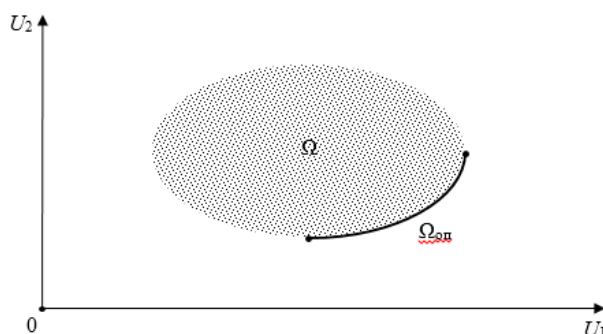
$$U = \sqrt{\sum_{k=1}^p (U_k^o - U_k)^2} \rightarrow \min.$$

Біртіндеп басымдану әдісі. Әуелі критерийлерді маңыздылығының кемуіне қарай реттеп аламыз: $U_1, U_2, \dots, U_p$.

Одан соң $U_1 \rightarrow \max$ есебін шешіп, анағұрлым маңызды критерийдің $\tilde{U}_1$ максимум мәнін табамыз. Одан әрі, келесі маңызды критерий үшін, $U_1 \geq \tilde{U}_1 - \Delta U_1$ шартында $U_2 \rightarrow \max$ есебін шешеміз, яғни екінші критерийге қолайлы жағдай тудыру үшін бірінші критерийдің мәнін ΔU_1 шамасына кемітеміз деп ұйғарамыз. Осылайша, екінші критерий үшін $\tilde{U}_2$ максимум мәнін табамыз. Бұдан кейін $U_1 \geq \tilde{U}_1 - \Delta U_1, U_2 \geq \tilde{U}_2 - \Delta U_2$ шартында $U_3 \rightarrow \max$ есебін шешеміз (яғни үшінші критерийді максимумдау үшін енді екі критерий бойынша жеңілдік жасалады), осыдан U_3 анықталады, т.с.с.. Ақырында, $U_1 \geq \tilde{U}_1 - \Delta U_1, U_2 \geq \tilde{U}_2 - \Delta U_2, \dots, U_p \geq \tilde{U}_p - \Delta U_p$ шарттарында $U_p \rightarrow \max$ есебін шешеміз де, $\tilde{U}_p$ – соңғы критерийдің максимум мәнін табамыз.

Ымыра әдісі (Â.Парето). Жоғарыдағы көп критерийлі есептерді шешу тәсілдері жалпыланған бір критерийді таңдауға соқтырады, яғни бастапқы есеп басқа есеппен алмастырылады. Ал мұндай алмастыру өзін-өзі қаншалықты ақтайтындығы айтылмайды. Көп критерийлі есептерді талдауға өзге тұрғыдан келсек: қайбір нұсқалар бойынша басқа критерийлерге бәсекелесе алмайтын критерийлерді жарамсыз деп тауып, салыстырылатын нұсқалар жиынын тарылтуға болады.

Мысал ретінде екі критерийлі есепті қарастырайық $U_1 \rightarrow \max, U_2 \rightarrow \min$. Бастапқы альтернативтер жиыны Ω критерийлер кеңістігінде 2.1-суретінде көрсетілгендей болсын.



2.1-сурет. Парето жиыны.

Барлық мүмкін боларлық жұптасқан салыстырулардан соң, басқа нұсқалармен бәсекелесе алмайтын «оңға таман» және «төменірек» орналасқан нұсқаларды жарамсыз дей аламыз. ($U_1 \rightarrow \max, U_2 \rightarrow \min$ есептері үшін). Нәтижесінде Парето жиыны делінетін жиынын аламыз (бұл жиында екінші критерийдің мәнін нашарлатпай бірінші критерийдің мәнін жақсарту мүмкін емес). Бұдан

соң ШҚК $\Omega_{оп}$ жиынынан таңдау жасайды. Бұл кезде бір критеридің мәнін жақсарту үшін бірдеңені құрбан ету керек деген мәмілеге келуге болады (басқа критерийдің нашарлауына келіскен жөн). Сонымен, Парето әдісі тиімді шешім таңдауға бізмәнді жауап бермесе де таңдау жасалатын жиынды кәдімгідей тарылтады екен.

2-дәрісті нысықтау сұрақтары

- 1. Лаплас критерийі*
- 2. Вальд критерийі*
- 3. Гурвиц критерийі*
- 4. Сэвидж критерийі*
- 5. Бас критерий әдісі.*
- 6. Критерийлер үйірткісі.*
- 7. Біртіндеп басымдану әдісі.*
- 8. Идеалдар әдісі.*
- 9. Ымыра әдісі*
- 10. Парето жиыны.*

2-семинар сабақ. Оңтайлы ұстаным критерилерін қолдану. Көп критерийлі есептерді шығару.

№2 аудиториялық жұмыстың тапсырмалары

2.1. Қайбір фирма курортты жерлердің бірінде қонақ үй салғысы келеді. Осы қонақ үйдегі тиімді орын санын немесе тиімді бөлмелер санын анықтау қажет.

Қонақ үй құрылысы шығындарының сметасы мен күтілетін кіріс жалданатын бөлмелер санына байланысты есептелінеді. Қонақ үйдегі бөлмелер саны ретінде $x_i = 20, 30, 40, 50$ сандарының бірі және жалданылатын бөлмелер саны ретінде $S_j = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ сандарының бірі қабылданады. Олар белгісіз факторге тәуелді және фирмаға белгісіз. Фирманың жыл сайынғы табысы (доллармен есептегендегі) мына кестеде көрсетілген:

$x_j \setminus s_j$	0	10	20	30	40	50
20	-121	62	245	245	245	245
30	-168	14	198	380	380	380
40	-216	-33	150	332	515	515
50	-264	-81	101	284	468	650

Шешуі. Бұл мәселенің шешімін табу үшін оңтайлы ұстаным критерийлеріне жүгінеміз:

Вальд критерийі:

$$\max_{x_i} \min_{s_k} U(x_i, s_k) = \max_i \min_k L_{ik} = -121, \quad x_{\text{тиімді}} = 20.$$

Бұл критерийдің нәтижесінде қонақ үй құрлысынан бас тарту қажет.

Лаплас критерийі:

$$\max_i \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 L_{ik} = \max_i \bar{L} = \max\{153, 198, 210, 193\} = 210.$$

мұндағы $\bar{L}_i$ – кестенің әр жолындағы арифметикалық орта. $x_{\text{тиімді}} = 40$.

Гурвиц критерийі:

$$\max_{x_i} [\alpha \cdot \max_k U(x_i, S_k) + (1 - \alpha) \cdot \min_k U(x_i, S_k)].$$

Гурвиц критерийі бойынша әртүрлі α ға сай $H = \|h_{i,\alpha}\|$ кірістер кестесін құра аламыз, мұндағы

$$h_{i,\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \max_k L_{ik} + (1 - \alpha) \cdot \min_k L_{ik} \end{bmatrix}.$$

Мысалы, $i = 1$ үшін

$$\max_k L_{1k} = 245, \quad \min_k L_{1k} = -121,$$

және $\alpha = 0,1$ кезінде

$$h_{1,0.1} = \lceil 0,1 \cdot 245 + 0,9(-121) \rceil = -84,4 \approx -84.$$

Ақырында алатынымыз:

$x_j \setminus s_j$	0,1	0,2	0,5	0,9
20	-84	-47	63	206
30	-114	-59	108	325
40	-143	-70	150	442
50	-172	-81	193	560

Ендеше α ға сай қонақүйдегі бөлмелердің тиімді саны:

α	0,1	0,2	0,5	0,9
x_{opt}	20	20	50	50

Сонымен, егер тапсырушы оптимист болса 5 бөлме, ал пессимист болса 20 бөлме таңдалады.

Сэвидж критерийі: Есептің берілгеніндегі кестеге сүйенсек:

$x_j \setminus s_j$	0	10	20	30	40	50
20	-121	62	245	245	245	245
30	-168	14	198	380	380	380
40	-216	-33	150	332	515	515
50	-264	-81	101	284	468	650

Енді өкініш матрицасын құрамыз:

$x_j \setminus s_j$	0	10	20	30	40	50
20	0	0	0	-135	-270	-405
30	-47	-48	-47	0	-135	-275
40	-95	-95	-95	-48	0	-135
50	-145	-143	-144	-96	-47	0

$$\max_{x_i} \min_{s_k} U(x_i, s_k) = \max\{-405, -275, -135, -145\} = -135$$

Сонымен, $x_{\text{тиімді}} = 40$.

2.2. Студент ертеңгі емтихан алдында кішігірім мәселеге тап болды. Оның курстастары түні бойы мерекелік кеш ұйымдастырмақшы екен. Демек студенттің алдында үш таңдау тұр:

a_1 – түні бойы кешке қатысу,

a_2 – кештің жартысынан кетіп қалып, емтиханға дайындалу,

a_3 – түні бойы емтиханға дайындалу.

Ертеңгі емтихан қабылдайтын профессор бейтаныс кісі және емтихан жеңіл (s_1), орташа (s_2) және қиын (s_3) болуы мүмкін. Емтиханның күрделілігі мен студенттің дайындығына сай төмендегі емтихан баллдарын күтуге болады:

	s_1	s_2	s_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

Осындай жағдайда студент қандай шешім қабылдауы қажет?

2.3. Жоғарыдағы есеп шартындағы А дан D ға дейінгі әріптік бағалар тиісінше 90,80,70, және 60 баллды білдіреді. Студент F бағасын алмауы үшін қандай шешім қабылдауы керек

№2 үй жұмысының тапсырмалары

2.4. Жер көктемгі егіс қарсаңында фермердің төрт түрлі таңдауы бар:

a_1 – жүгері егу, a_2 – бидай егу, a_3 – соя дақылын егу, a_4 – жерді жайылым ретінде пайдалану. Осындай мүмкіндіктерге қатысты төлемдер шартты түрде төртке бөлінетін жауын-шашын түріне байланысты:

s_1 - қатты жауын-шашын, s_2 - қалыпты жауын-шашын, s_3 - аздаған жауын-шашын, s_4 - құрғақшылық маусымы.

Төлем матрицасы:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	-20	60	30	-5
a_2	40	50	35	0
a_3	-50	100	45	-10
a_4	12	15	15	10

Фермер қандай таңдау жасайды?

2.5. Барлық N станоктың біреуі қайбір өнімнің Q шамасын жасайды. Осы өнімге деген минимум сұраныс пен максимум сұраныс шамасы тиісінше Q' мен Q'' аралығында өзгереді. Жоспар бойынша өнімнің Q бірлігін i -станокта өндіруге жұмсалатын өндірістік шығын TC_i тағайынды K_i шығыны мен өнім бірлігінің меншікті c_i шығынын қамтиды да $TC_i = K_i + c_i Q$ формуласымен есептелінеді.

Есепті анықталмағандық жағдайындағы төрт критерийдің көмегімен шығарыңыз.

2.6. Алдыңғы есепті $1000 \leq Q \leq 4000$ шартында шығарыңыз:

i -станок	K_i доллар	C_i доллар
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8

2.7. Екі критерийлі тиімділік есебіндегі Парето бойынша тиімді шешімдерді табыңыз:

$$\min_{\substack{\left\{ \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}}} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Шешуі. Әуелі барлық ұйғарымды шешімдердің векторлық критерінің мәнін есептейміз:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Осыдан барлық төрт ұйғарымды шешімдердің ішіндегі Парето бойынша тиімдісі екі шешім: $(1,3)^T$ және $(2,2)^T$ екенін көреміз.

2.8. Ұлттық тақия тшығаратын фирма наурыз мерекесі қарсаңында қанша ұлттық тақия тігу қажеттігін анықтағысы келеді. Наурыз мерекесі өткізілетін күндері фирма әр ұлттық тақияны 20S бағаға сатар еді. Бірақ мереке өткен соң сатылмай қалғантақиялар тек 4S бағаға өтеді. Әр ұлттық тақияны тігу шығыны 8S. Осы шара өту кезінде фирма ұлттық тақияға деген сұранысты былай бағалайды:

Сұраныс	Ықтималдық
300	0,5
400	0,1
500	0,4
600	0,3
700	0,1
800	0,05

Фирмаға түсетін пайда максимум болуы үшін қанша тақия тігу қажет?

2.9. Сусын шығаратын фирма әр литрінен 0,25 доллар пайда иемденіп, жылына 1 миллион литр сусын сатады. Осы фирмаға ірі сауда желісінің иесі өзінің дүкендерінде сатылуға шығарылатын сусынның жылына 250 мың литрін өндіруді ұсынды. Сауда желісі фирмаға әр литр үшін 0,15 доллар пайдаға кепілдік берді. Егер фирма жаңа сусын шығарудан бас тартса, онда бұ ұсынысты бәсекелестердің бірі қабылдауы мүмкін. Жаңа сусын шығару ескі түрлерін тұтыну деңгейін төмендетеді.

Жаңа өнім шығаруға келіскендегі ескі өнімге сұраныстың 10% кемуінің ықтималдығы 0,7; ал 20% кемуінің ықтималдығы 0,7; сонымен қатар 30% кемуінің ықтималдығы 0,1.

Ал жаңа өнім шығарудан фирма бас тартқан жағдайда бәсекелестердің әрбірінің келісіні беру ықтималдығы 0,5. Егер бәсекелестердің қай бірі жаңа өнім шығара бастаса, онда біздің фирма келесі қадамдарға барады:

а) ескі өнімге сұранысты сақтап қалудың ешқандай шарасын жасамайды онда ескі өнімге деген сұраныс 0,7 ықтималдығымен 10% шамасына, 0,2 ықтималдығымен 20% шамасына, 0,1 ықтималдығымен 10% шамасына кемиді.

б) ескі өнімді шарнамалау шығынын 25 мың долларға арттырады, сонда сұраныстың бұрынғы деңгейде сақталу ықтималдығы 0,3; деңгейдің 5% кемуінің ықтималдығы 0,4. Ал деңгейдің 10% кемуінің ықтималдығы 0,3.

в) әр литрден түсетін пайданы 0,2 долларға азайтып, ескі өнім бағасын төмендету. Бұл жағдайда бәсекелес фирма да жаңа өнім бағасын 0,3 ықтималдығымен төмендетеді. Егер фирмалар бағаны төмендетсе, онда біздің фирма өнімінің көлемі 0,5 ықтималдығымен 5%, 0,2 ықтималдығымен 10%, 0,3 ықтималдығымен 15% кемиді. Егер тек біздің фирма ғана бағаны төмендетсе, онда біздің фирманың өнім көлемі сақталу ықтималдығы 0,3. Ал 5 % қысқаруының ықтималдығы 0,5, сол сияқты 10 % қысқаруының ықтималдығы 0,2.

Біздің фирма өз пайдасын максимумдеу үшін не істеуі қажет?

2.10. Қаланың құрылыс ұйымы Д-1, Д-2, Д-3 және Д-4 төрт типтегі үйлер салады. Әр типтегі үйлердегі пәтер сандары мен олардың жоспарлы құндары кестеде келтірілген:

көрсеткіштер	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4
Пәтер типтері:				
Бір бөлмелі	10	18	20	15
біржарымдық	48	-	20	-
Екі бөлмелі	-	20	-	60
Үш бөлмелі	60	90	10	-
Төрт бөлмелі	20	10	-	5
Жоспарлы құн (мың теңге.)	830	835	360	450

Пайдалануға берілетін жылдық жоспар: 800 бірбөлмелі, 1000 біржарымдық, 900 екі бөлмелі, 2000 үш бөлмелі және 7000 төрт бөлмелі пәтер.

Жоспарлы жылға тұрғын үйге арналған тиімді капитал салымын табыңыз.

II. СЫЗЫҚТЫҚ ПРОГРАММАЛАУ

3-дәріс. Сыздықтық программалау есептерінің математикалық моделі. Симплекс әдіс алгоритмі.

Сыздықтық программалау – математиканың экстремалдік есептерді шешу әдісін айнымалыларының арасындағы сыздық тәуелділікпен сипаттайтын тарауы.

«Сыздықтық программалау» пәні электронды есептеуіш машиналарды математикалық, инженерлік, экономикалық тағы сол сияқты мәселелерді шешуде кеңінен қолданудан әлдеқайда ерте пайда болғандықтан, оның аталымындағы «программалау» терминінің «ЭЕМ үшін программа құру» терминіне ешқандай қатысы жоқ. Өйткені, ол ағылшынша «linear programming» сөзінің сәтсіз тәржімасының нәтижесінде туындаған болатын. Атап айтқанда «programming» сөзінің тағы бір мағанасы – жоспарлау, жоспар құру дегенді білдіреді. Демек, «linear programming» сөзінің дәл аудармасы «сыздықтық программалау» емес, мәтіннің мазмұнын мейлінше ашатын, «сыздықтық жоспарлау» болса керек еді.

Екінші дүниежүзілік соғыстан соң пайда болған сыздықтық программалау, математикалық көрнектілігінің арқасында практикада кең қолданыс тауып, математиктер мен экономистердің және инженерлердің назарына ілігіп, қарқынды дами бастады.

Сыздықтық программалау нақты әлемді сыздықтық түрде өрнектеу гипотезасына сүйенетін жүйелер мен процестердің математикалық моделін шешуде кең қолданылады.

Математикалық модель – есептің мағанасын бейнелейтін математикалық өрнектер жиынтығы. Математикалық моделдің құраушылары:

- есептің айнымалыларын таңдау;
- шектеулер жүйесін құру;
- мақсат функциясын таңдау

Мысал ретінде ресурстарды пайдаланудың немесе өндірісті жоспарлаудың келесі мәселесін қарастыралық: Мәседен, n түрлі $P_1, P_2, \dots, P_n$ өнімдерін шығару үшін m түрлі $S_1, S_2, \dots, S_m$ шикізаттары (ресурстар) қолданылсын. Өнімнің әрқайсысының бірлігіне жұмсалатын ресурс көлемі a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) белгілі делік. Сонымен қатар, әр өнімнің бірлігінен түсетін $C_1, C_2, \dots, C_n$ пайдасы да белгілі болсын. Осы мәліметтерді пайдаланып, ең үлкен табысқа кенелтетін өнім шығару жоспарын жасау қажет.

Ол үшін есептің **математикалық моделін** құрамыз:

Есептің айнымалыларын таңдаймыз: $x_1, x_2, \dots, x_n$ – әр түрдегі өнімнің жоспарланатын мөлшері, және $x_{ij} \geq 0$.

Бастапқы мәліметтерді кестеге толтырамыз:

Ресурстар	Өнім бірлігін өндіруге жұмсалатын ресурс мөлшері				Ресурс қоры
	P ₁	P ₂	...	P _n	
S ₁	a ₁₁	a ₁₂	...	a _{1n}	b ₁
S ₂	a ₂₁	a ₂₂	...	a _{2n}	b ₂
...	...	...	...	...	...
S _m	a _{m1}	a _{m2}	...	a _{mn}	b _m
Пайда	c ₁	c ₂	...	c _n	

Есептің шектеулерінің жүйесін құрамыз: есептің шектеулері қолдағы ресурстар мөлшеріне байланысты болғандықтан, жүйе әр ресурс бойынша m шектеуді қамтиды. Біз қолдағыдан артық ресурс жұмсай алмайтындықтан, « $\leq$ » таңбасын қоямыз. Бірінші ресурс үшін

$$S_1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

демек, қалған ресурстар үшін де дәл осылай:

$$S_2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$S_m: a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Мақсат функциясын анықтаймыз. Көздегеніміз барлық өнімнен мол пайда түсіру болғандықтан:

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

Сонымен, бұл есептің математикалық моделі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

шектеулер жүйесі мен $x_j \geq 0$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ теріс еместік шартын қанағаттандыратын, және мақсат функциясы

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

болатын $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ өнім шығару жоспарын құру қажеттігін білдіреді.

Есептің математикалық моделін құрғанда көбіне теңсіздіктерден тұратын шектеулер жүйесі алынады да, теріс еместік шарты барлық айнымалыға қойыла бермейді. Бұл жағдайда есеп **стандарт формадағы есеп** делінеді. Есепті аналитикалық жолмен шешкенде, жүйеде тек қана теңдеулер болуы және барлық айнымалылардың теріс мән қабылдамауы талап етіледі.

3.1-анықтама. Егер есептің барлық шектеулері теңдеулерден тұрып, барлық айнымалылар теріс еместік шартын қанағаттандырса, онда есеп **канондық формада** жазылған дейміз.

Сонымен, канондық формадағы есеп:

$$Z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \leq 0, \quad j = 1, n$$

Егер жүйеде теңсіздіктер болса, онда теңсіздіктердің сол жағына қосымша айнымалылар енгізу арқылы теңдіктерге былай көшеміз:

- егер таңба “ $\leq$ ” болса, онда қосымша айнымалы “+1” коэффициентімен жазылады;
 - егер таңба “ $\geq$ ”, онда қосымша айнымалы “-1” коэффициентімен жазылады.
- Мақсат функциясына бұл айнымалылар нөлдік коэффициенттермен жазылады.

Егер қайбір айнымалыға теріс еместік шарты қойылмаған болса, онда оны әрқайсысы теріс емес екі айнымалының айырмасымен алмастырады.

Симплекс әдіс алгоритмі

1. Есептің математикалық моделі канондық формада болуы тиіс. Егер ол стандарт формада жазылған болса, онда оны канондық түрге келтіру керек.
2. Базис векторларды, яғни алғашқы тірек-шешімді табамыз. Базис векторлардың саны жүйедегі теңдеулердің санына тең және олар таңдау ретімен орналасқанда бірлік матрица құрайды. Шешімнің тиімділігін тексеру үшін **симплекс кесте** толтырамыз.

Баз		C_0	C_1	C_2	...	C_n	C_{n+1}	...	C_{n+m}
		A_0	A_1	A_2	...	A_n	A_{n+1}	...	A_{n+m}
					...			...	
					...			...	
					...			...	
					...			...	
	Δ_k				...			...	

Бірінші қадамда Δ_k (индекс жолы) жолынан басқа барлық жолдарға шектеулер мен мақсат функциясының мәліметтері толтырылады. Бастапқы тірек-шешімді тиімділікке тексереміз.

Индекс жол мәндері $\Delta_k = \sum C_{\sigma} A_j - c_j$ формуласынан табылады.

Есепті шығарғанда мына жағдайлар кездеседі:

1) есеп *минимумге* шығарылғанда:

- а) барлық бағалар $\Delta_k \leq 0$ болса, онда табылған шешім тиімді;
- б) кемінде бір баға $\Delta_k > 0$ болып, бірақ сәйкес айнымалыда бірде-бір оң коэффициент жоқ болса, онда есепті шешу тоқтатылады, өйткені $\min Z(X) = -\infty$, яғни мақсат функциясы ұйғарымды шешімдер облысында шектелмеген;
- в) кемінде бір баға $\Delta_k > 0$, және сәйкес айнымалыда кемінде бір оң коэффициент бар, онда мақсат функциясының кіші мәніне сай келетін басқа тірек-шешімге көшуге болады.

2) есепті *максимумге* шығарғанда мақсат функциясының барлық коэффициенттерінің таңбасын алмастырып, есепті минимумге шығарамыз да, жауапты жазған кезде таңбаны тағы өзгертеміз.

3) Қажет болғанда жаңа тірек-шешім құрамыз. Ол үшін шешуші бағанды, шешуші жолды және шешуші элементті табамыз. Шешуші баған келесі тірек-шешімде базиске енгізілетін айнымалыны көрсетеді. Шешуші жол шешімді жақсарту үшін базистен шығарылатын айнымалыны көрсетеді. Шешуші элемент жақсартылған тірек-шешімге сай жаңа симплекс кестенің элементтерін есептеу үшін қажет. Оларды табу есептің мақсатына байланысты.

Есепті *минимумге* шешкенде:

а) *шешуші баған* – индекс жолдағы ең үлкен оң A_k бағасына сай баған;

б) *шешуші жол* – бос мүшелердің шешуші бағанның оң коэффициенттеріне минимум қатынасы, яғни

$$\min \theta = \frac{A_0}{\{+(шеш.баг.эл)\}}$$

болатын жол.

в) *шешуші элемент* – шешуші баған мен шешуші жолдың қиылысындағы элемент.

4) Келесі симплекс кестені толтырамыз:

а) шешуші жолдағы элементтерді шешуші элементке бөлеміз;

б) базистік бағандарды толтырамыз: шешуші элементтің орнына 1 (бір) санын жазамыз да, қалған элементтерді нөлге айналдырамыз;

в) қалған ұяларды «тік төртбұрыш» ережесімен толтырамыз:

$$жана.эл. = ескі\ эл. - \frac{шеш.баг.сай.эл. \times шеш.жол.сай.эл.}{шешуші\ элемент}$$

Ақырында жаңа тірек-шешім аламыз.

5) Егер шешім тиімді болмаса, онда алгоритмнің үшінші қадамына ораламыз.

Мысалдар. А.

1. Сызықтық программалау есебін шығарыңыз:

$$z(x) = 6x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 4x_5 + 2x_6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 17$$

$$4x_2 + x_3 + x_5 = 12$$

$$x_2 + 8x_4 - x_5 + x_6 = 6$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}$$

Мұндағы A матрицасы, b мен c векторлары төмендегідей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6),$$

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$a^5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a^6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}, c' = (6, -3, 5, -2, -4, 2)$$

Шешуі.

I. Бұл мысал үшін бастапқы нүктені табу оңай $x^0 = (17, 0, 12, 0, 0, 6)$.

Базистік векторлар – A_1, A_2, A_6 . Симплекс кесте құрамыз

Баз	Z_6	0	6	-3	5	-2	-4	2	Θ
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
X_1	6	17	1	2	0	1	3	0	17/2
X_3	5	12	0	(4)	1	0	1	0	12/4
X_6	2	6	0	1	0	8	-1	1	6/1
Δ_k		174	0	37	0	24	25	0	



Шешімді тиімділікке тексеру үшін Δ_k бағалауларын есептейміз:

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} - 0 = 174, \Delta_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 = 0, \Delta_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (-3) = 37,$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 = 0, \Delta_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - (-2) = 24, \Delta_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - (-4) = 25,$$

$$\Delta_6 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = 0.$$

Шешім тиімді емес, өйткені $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 > 0$, демек, ең үлкен $\Delta_2 > 0$ бағасы жақсартылады.

II. Шешуші баған – A_2 , өйткені $\max \Delta_k = 37$. Шешуші жол – X_3 жол, өйткені $\min \Theta = 12/4$. Шешуші элемент – 4. Онда X_2 базиске кіреді, ал X_3 базистен шығады.

Келесі симплекс кестені толтырамыз:

- а) шешуші жолдағы элементтерді шешуші элементке бөлеміз;
 б) базистік бағандарды толтырамыз;
 в) қалған коэффициенттерді «тік төртбұрыш» ережесімен толтырамыз.

«Тік төртбұрыш» ережесі:

$$\begin{aligned} \text{ж. эл.} &= 17 - \frac{2 \times 12}{4} = 11, & \text{ж. эл.} &= 1 - \frac{0 \times 0}{4} = 1, & \text{ж. эл.} &= 0 - \frac{1 \times 2}{4} = -1/2, & \text{ж. эл.} &= 1 - \frac{(-1/2) \times 0}{4} = 1, \\ \text{ж. эл.} &= 3 - \frac{1 \times 0}{4} = 5/2, & \text{ж. эл.} &= 0 - \frac{0 \times 2}{4} = 0, & \text{ж. эл.} &= 6 - \frac{1 \times 12}{4} = 3, & \text{ж. эл.} &= 0 - \frac{1 \times 0}{4} = 0, \\ \text{ж. эл.} &= 8 - \frac{1 \times 0}{4} = 8, & \text{ж. эл.} &= -1 - \frac{1 \times 1}{4} = -5/4, & \text{ж. эл.} &= 1 - \frac{1 \times 0}{4} = 1. \end{aligned}$$

Енді Δ_k бағасын септейміз:

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 0 = 63, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 = 0, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-3) = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} - 5 = -37/4, \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - (-2) = 24,$$

$$\Delta_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/4 \\ -5/4 \end{pmatrix} - (-4) = 63/4, \quad \Delta_6 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = 0$$

Баз	Z_0	0	6	-3	5	-2	-4		2	
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5		A_6	Θ
X_1	6	11	1	0	-1/2	1	5/2		0	11
X_2	-3	3	0	1	1/4	0	1/4		0	
X_6	2	3	0	0	-1/4	(8)	-5/4		1	3/8
Δ_k		63	0	0	-37/4	24	63/4		0	

Шешім тиімді емес, өйткені $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 > 0$, демек $\Delta_4 > 0$ бағасы жақсартылады.

III. Шешуші баған – A_4 , өйткені $\max \Delta_k = 24$. Шешуші жол X_6 , өйткені $\min \Theta = 3/8$. Шешуші элемен 8 ге тең. Келесі симплекс кестені толтырамыз.

- а) шешуші жолдағы элементтерді шешуші элементке бөлеміз;
 б) базистік бағандарды толтырамыз;
 в) қалған коэффициенттерді «тік төртбұрыш» ережесімен толтырамыз.

Баз	Z_6	0	6	-3	5	-2	-4	2	
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ
X_1	6	85/8	1	0	-15/32	0	(85/32)	1/8	4
X_2	-3	3	0	1	1/4	0	1/4	0	12
X_4	-2	3/8	0	0	-32/	1	-5/32	1/8	0
Δ_k		54	0	0	-17/2	0	39/2	-3	

Шешім тиімді емес, өйткені, $\Delta_5 > 0$, демек $\Delta_5 > 0$ жақсартылады.

IV. Шешуші баған – A_5 , өйткені $\max \Delta_k = 39/2$. Шешуші жол X_1 , өйткені $\min$

$\Theta = 4$. Шешуші элемент $\frac{85}{32}$ ге тең. Келесі симплекс кестені толтырамыз.

- шешуші жолдағы элементтерді шешуші элементке бөлеміз;
- базистік бағандарды толтырамыз;
- қалған коэффициенттерді «тік төртбұрыш» ережесімен толтырамыз.

Баз	Z_6	0	6	-3	5	-2	-4	2
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
X_5	-4	4	32/85	0	-15/85	0	1	-4/85
X_2	-3	2	$-\frac{8}{85}$	1	$\frac{25}{85}$	0	0	$\frac{1}{85}$
X_4	-2	1	$\frac{1}{17}$	0	$-\frac{5}{85}$	1	0	$\frac{10}{85}$
Δ_k		-24	$-\frac{624}{85}$	0	$-\frac{430}{85}$	0	0	$-\frac{177}{85}$

Барлық $\Delta_k \leq 0$ болғандықтан, табылған шешім тиімді.

Жауабы: $\min Z(X) = -24$, $X = (0; 2; 0; 1; 4; 0)$.

Базис векторлардың қажетті санымен қамсызданбағанда M есепке көшеміз. Ол үшін мақсат функциясы мен шектелер жүйесіне жасанды айнымалылар енгіземіз. Одан әрі симплекс әдіс қолданылады. Бұл жағдайда Δ_k жолы келесі түрде жазылады

$$\Delta_k = \alpha_j + M\beta_j$$

Мұндағы M – жеткілікті үлкен оң сан. Сонымен қатар, базистен шығарылатын вектор жасанды айнымалымен беттесе, онда келесі итерацияда бұл баған жазылмайды.

В. Сызықты программалау есебін шығаралық:

$$z(x) = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 - 4x_5 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 8$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_4 = 1$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

Бұл есепке сәйкес М есеп құрамыз :

$$z(x) = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 - 4x_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 5$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + x_5 = 4$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_4 + x_7 = 1$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}$$

М есептегі А матрицасы, b мен c векторлары:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7)$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c' = (-2, -3, 5, -6, 4, M, M).$$

Шешуі. Бастапқы шешім $x^0 = (0, 0, 0, 0, 4, 5, 1)$, мұндағы $z_j - c_j$ шамасын

$z_j - c_j = \alpha_j M + \beta_j, \quad j = \overline{1, n}$ түрінде жазамыз, яғни $z_j - c_j$ үшін бір жолдың орнына мынадай екі жол арналады: біріншісіне β_j ал екіншісіне α_j толтырылады.

Базис	$\bar{c}$	B	-2	-3	5	-6	4	M	M
			a ¹	a ²	a ³	a ⁴	a ⁵	a ⁶	a ⁷

I

A ⁶	M	5	2	1	-1	1	0	1	0
A ⁵	4	4	1/2	3/2	1/2	-1/2	1	0	0
A ⁷	M	1	-1	(4)	0	1	0	0	1 ⇒
$z_j - c_j$		16	4	9	-3	4	0	0	0
		6	1	5	-1	2	0	0	0



II

a^6	M	19/4	(9/4)	0	-1	3/4	0	$1 \Rightarrow$
a^5	4	29/8	7/8	0	1/2	-7/8	1	0
a^2	M	1/4	-1/4	1	0	1/4	0	0
$z_j - c_j$		55/4	25/4	0	-3	7/4	0	
		19/4	9/4	0	-1	3/4	0	0



III

a^1	-2	19/9	1	0	-4/9	3/9	0
a^5	4	16/9	0	0	8/9	-21/18	1
a^2	-3	7/9	0	1	-1/9	3/9	0
$z_j - c_j$		5/9	0	0	-2/9	-1/3	0
		0	0	0	0	0	0

Соңғы симплекс-кестеден М-есептің шешімі $x^* = (19/9, 7/9, 0, 0, 16/9, 0, 0)$ векторы екенін көреміз. Ендеше бастапқы есептің шешімі – $x^* = (19/9, 7/9, 0, 0, 16/9,)$ векторы, ал мақсат функциясының мәні $z(x^*) = 5/9$.

3-дәрісті нысықтау сұрақтары

1. *Сызықтық программалудың математикалық моделі.*
2. *Сызықтық программалаудың стандарт және канондық формасы.*
3. *Симплекс әдіс:*
 - а) *шешуші баған;*
 - б) *шешуші жол;*
 - в) *«тіктөртбұрыш» ережесі.*

3-семинар сабақ. Сызықтық программалау есептерін шығару

№3 аудиториялық жұмыс тапсырмалары. Сызықтық программалау есебін шығарыңыз:

3.1.

$$z(x) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \sup$$

$$3x_3 + x_5 + x_6 = 6;$$

$$x_2 + 2x_3 - x_4 = 10;$$

$$x_1 + x_6 = 0;$$

$$x_3 + x_6 + x_7 = 6;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 7}$$

3.3.

$$z(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \inf$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2;$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 1;$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 6;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}$$

3.5.

$$z(x) = x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \sup$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \geq 4;$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6;$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 1;$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}$$

3.7.

$$z(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \sup;$$

$$x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$x_1 + x_3 \geq 1;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}$$

3.9.

$$z(x) = -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 \rightarrow \sup;$$

$$x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$x_1 + x_3 \geq 1;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}$$

3.2.

$$z(x) = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7 \rightarrow \inf$$

$$3x_3 + x_5 + x_6 = 6;$$

$$x_2 + 2x_3 - x_4 = 10;$$

$$x_1 + x_6 = 0;$$

$$x_3 + x_6 + x_7 = 6;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 7}$$

3.4.

$$z(x) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \sup$$

$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6;$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5;$$

$$-x_2 + x_3 - x_4 \geq -2;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}$$

3.6.

$$z(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \inf;$$

$$x_1 - x_2 \geq 1;$$

$$-x_1 + 3x_2 \geq 3;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8;$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}$$

3.8.

$$z(x) = 2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \sup;$$

$$x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$x_1 + x_3 \geq 1;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}$$

3.10.

$$z(x) = 12x_1 - x_2 - 7x_3 \rightarrow \sup;$$

$$x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$x_1 + x_3 \geq 1;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}$$

№3 үй жұмысының тапсырмалары

3.11.

$$Z(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5. \end{cases}$$

3.13.

$$Z(x) = 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

3.15.

$$Z(x) = -6x_1 + 3x_2 + 3x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 18, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 \leq -9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

3.17.

$$Z(x) = 6x_1 - 2x_2 - 8x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_2 - x_3 \geq -2, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

3.19.

$$z(x) = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \sup;$$

$$x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$x_1 + x_3 \geq 1;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4;$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}$$

3.12.

$$Z(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 25, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5. \end{cases}$$

3.14.

$$Z(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_4 + 2x_5 + 4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_3 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5. \end{cases}$$

3.16.

$$Z(x) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 20, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

3.18.

$$Z(x) = -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

3.20.

$$z(x) = x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \sup$$

$$x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$x_1 + x_3 \geq 1;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4;$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}$$

4-дәріс. Сызықтық программалау есептеріндегі түйінділік

Сызықтық программалаудың әрбір есебімен сызықтық программалаудың *түйінді есебі* деп аталатын басқа бір есебі тығыз байланысқан. Алғашқы есепті әуелгі немесе тура есеп дейді.

Шикі затты тиімді пайдалану есебі. Айталық, мекемедегі S_1, S_2, S_3, S_4 шикі заттарының сандары тиісінше 19, 13, 15 және 18 дейік. Бұл шикізаттар бірліктері тиісінше 7 және 5 ақша бірліктерімен сатылатын P_1 мен P_2 өнімдерін шығаруда қолданылады. P_1 өнімінің бір бірлігін шығаруға S_1 шикізатының 2 бірлігі, S_2 шикізатының 2 бірлігі және S_4 шикізатының 3 бірлігі жұмсалады. P_2 өнімінің бір бірлігін шығаруға S_1 шикізатының 3 бірлігі, S_2 шикізатының 1 бірлігі және S_3 шикізатының 1 бірлігі жұмсалады.

Өндірілген өнімді сатқанда максимум пайдаға ие болудың жоспарын құру қажет.

Мәселен x_1 — өндірілетін P_1 өнімінің мөлшері және x_2 — өндірілетін P_2 өнімінің мөлшері болсын. Ендеше мақсат функциясы былай жазылады:

$$f = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \quad (4.1)$$

шектеулері:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_1 \leq 15, \\ x_2 \leq 18 \end{cases} \quad (4.2)$$

және теріс еместік шарты: $x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.3)$

Айталық қайбір ұйымның өнімді емес, осы мекемедегі шикі заттың өзін сатып алғысы келсін. Ұйым бұл шикізаттарды қандай бағамен сатып алар еді? Біз y_1, y_2, y_3, y_4 арқылы S_1, S_2, S_3, S_4 түріндегі шикізаттардың бағаларын белгілейік.

P_1 түріндегі өнімінің бірлігіне жұмсалатын барлық шикізатты y_1, y_2, y_3, y_4 бағасымен сатқаннан түсетін пайда $2y_1 + 2y_2 + 0 \cdot y_3 + 3y_4$, ал P_2 түріндегі өнімінің бірлігінен түсетіні $3y_1 + y_2 + y_3 + 0 \cdot y_4$. Егер шикізаттың бағасы осы шикізатты пайдаланғандағы өнімнің бағасынан асып

кетсе:

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 0 \cdot y_3 + 3y_4 \geq 7 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 + 0 \cdot y_4 \geq 5 \end{cases} \quad (4.4)$$

мекеме шикізатты сатады. Екінші жағынан, сатып алынатын шикізаттың жалпы бағасы:

$$Z(y) = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \quad (4.5)$$

Демек, мекеме шикізатты мейлінше арзанға сатып алуға, яғни (42.5) функциясын минимумдауға мүдделі екендігі түсінікті. Ендеше, есептің математикалық өрнектелуі мына түрде жазылады:

$$G(y) = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \rightarrow \min \quad 4.6)$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 0 \cdot y_3 + 3y_4 \geq 7 \\ 3y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 0 \cdot y_4 \geq 5 \end{cases} \quad (4.7)$$

және теріс еместің шарты: $y_i \geq 0; \quad i = \overline{1, m}$ (4.8)

Сонымен, (4.6)-(4.8) түйіндес есебі: ресурстарды пайдаланып өндірілген өнімді сатқаннан гөрі ресурстардың өзін сату арқылы пайдаға шығу үшін ресурстарды қандай минимум бағамен өткізу қажет деген экономикалық мәселені білдіреді екен.

Осындай ерекшеліктермен байланысқан сызықтық программалудың (4.1)-(4.3), (4.6)-(4.8) түріндегі екі есебін *өз-ара түйіндес* есеп дейміз.

Тура есеп пен түйіндес есептің жалпы қисындалуы. Сызықтық программалудың келесі түрдегі тура есебін қарастыралық:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (4.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} | a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n < R_1 > b_1 \\ | a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n < R_2 > b_2 \\ \\ | a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n < R_m > b_m. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \quad (4.11)$$

Мұндағы: $f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ – мақсат функциясы;

Ал $\langle R_i \rangle, i = \overline{1, m}$ – төмендегі қатынастарды білдіреді: $=, \geq, \leq$;

сол сияқты b_i – берілген константалар.

Ендеше (4.9)–(4.11) есебіне қатысты түйіндес деп келесі есепті айтамыз:

$$g = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min \quad (4.12)$$

Сол жақтағы мүшелерді топтастыралық:

$$(a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m)x_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m)x_2 + \dots + (a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_n)y_m = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m. \quad (4.15)$$

Мұндағы y векторы (2.12)–(2.14) есебінің ұйғарымды шешімі болғандықтан, кез-келген $\overline{j=1, n}$ үшін алатынымыз: $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_n \geq c_j$. Енді (2.15) өрнегіндегі жақшадағы қосындыларды тиісті c_j мен алмастырып, және (2.10) қатынасын ескерсек:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \leq b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \text{ немесе, } f(x) \leq g(y).$$

Теореманың бірінші бөлігі дәлелденді. Айталық қайбір x, y үшін: $(c, x') > (b^T, y)$ болсын. Кері жорық: x векторы (4.9)–(4.11) есебінің тиімді шешімі емес. Демек, (4.9)–(4.11) есебінің $(c, x') > (c, x) = (b^T, y)$ болатын басқа бір x' ұйғарымды шешімі бар деген сөз. Бұл теореманың бірінші бөліміне қайшы. Ендеше, біздің шартта x векторы (4.9)–(4.11) есебінің тиімді шешімі. Аналогия арқылы y векторының (4.12)–(4.14) есебінің тиімді шешімі екендігін көрсетуге болады. ►

4.2-теорема. Егер (4.9)–(4.11) немесе (4.12)–(4.14) түйіндес есептері жұбының біреуі тиімді шешімге ие болса, онда екіншісі де тиімді шешім иеленеді және оның тиімді мәндері беттеседі ($\max f = \min g$). Егер түйіндес есептер жұбының біріншісі шектелмеген болса, онда екіншісінің ұйғарымды облысы бос жиын.

◄ (4.9)–(4.11) және (4.12)–(4.14) есептері өз-ара түйіндес болғандықтан, есептің бірін тура есеп ретінде алып теореманы дәлелдейміз. Айталық, мысалы, (4.9)–(4.11) есебі тиімді шешім иеленсін, және симплекс әдіспен табылған солардың бірі $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ болсын, $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ – оның базисі. Сонда соңғы итерацияда ($j=1, 2, \dots, n$) $z_j \geq c_j$, $j=1, 2, \dots, n$, немесе, векторлық формада

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \geq (c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (4.16)$$

Симплекс-әдісті қарастырғанда $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ векторы

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n) B^{-1} A = c B^{-1} A,$$

формуласынан табылатындығын көргенбіз, мұндағы B^{-1} дегеніміз базистік $B = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ матрицасына кері матрица, A – есеп теңдеуіндегі шектеулер жүйесінің матрицасы $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$. Демек (2.16) өрнегінен алатынымыз

$$(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m}) B^{-1} A \geq (c_1, c_2, \dots, c_n) = c \quad (4.17)$$

Белгілеу енгізелік

$$(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m}) B^{-1} = y = (y_1, y_2, \dots, y_m).$$

Сонда (4.17) теңсіздігі $YA \geq c$ түріне келеді. Енді y векторы (4.12)–(4.14) есебінің тиімді шешімі екенін көрсетеміз. Бізде:

$$\begin{aligned} (y, b) &= (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m}) B^{-1} b = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m}) (x^{(0)}_1, x^{(0)}_2, \dots, x^{(0)}_m) = \\ &= c_{i_1} x^{(0)}_1 + c_{i_2} x^{(0)}_2 + \dots + c_{i_m} x^{(0)}_m = (c, x^{(0)}) \end{aligned}$$

Сонымен, (4.12)–(4.14) есебінің y ұйғарымды шешіміндегі мақсат функциясының мәні өз ұйғарымды шешіміндегі (4.9)–(4.11) есебінің мақсат функциясының мәнімен беттеседі екен. Онда 4.1-теоремаға сай y (4.12)–(4.14) есебінің тиімді шешімі болады. Теореманың бірінші бөлімі дәлелденді. Екінші бөлігіне көшелік. Мәселен (4.9)–(4.11) есебінің мақсат функциясының ұйғарымды жиында жоғарыдан шектелмегені белгілі болсын. Кері жорық: (4.12)–(4.14) есебі бұл кезде ұйғарымды шешім иеленеді, соның бірі y болсын делік. Онда (4.9)–(4.11) есебінің мақсат функциясының шектелмегендігінен $(c, x) > (b, y)$ болатын ұйғарымды шешім табылады. Бұл 4.1-теоремаға қайшы. ►

Теореманың бірінші бөлімін дәлелдегенде егер B матрицасы (4.9)–(4.11) канондық есебінің тірек-шешімінің базистік матрицасы болса, онда $y = c_B B^{-1}$ шамасы (4.9)–(4.11) есебіне түйіндес (4.12)–(4.14) есебінің тиімді шешімі екенін тағайындадық. Осы дәйекті алдағы уақытта пайдаланамыз.

Түйіндес симплекс әдіс. Бұдан бұрын тура есептің тиімді шешімін алу үшін түйіндес есепке көшіп, оның тиімді жоспарының көмегімен тура есептің тиімді шешімін анықтаған едік.

Егер бірінші симплекс кестені бірлік қосымша базис арқылы қарастырсақ, онда бағандарда тура есептің, ал жолдарда түйіндес есептің жазылғандығын байқаймыз. Ендеше түйіндес есепке көшу міндетті емес. Мұның сыртында C_j тура есептің бағалауларын білдірсе, ал түйіндес есептің бағалаулары – b_i . Симплекс кестесінде тура есеп жазылған түйіндес есепті шығаралық; түйіндес есептің де, сонымен бірге тура есептің де тиімді жоспарын табамыз. Бұл әдіс **түйіндес симплекс-әдіс** деп аталады.

Айталық, сызықтық программалаудың жалпы түрдегі тура есебін шығару қажет болсын: $f(x) = C \cdot X \rightarrow \inf, A \cdot X = A_0, X \geq 0$. Онда түйіндес есеп $g(y) = Y \cdot A \rightarrow \sup, Y \cdot A \leq C$. Енді $X = D^{-1} \cdot A = (x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_m)$ векторының кемінде

бір компоненті теріс (мысалы $x_l < 0$), бірақ барлық A_j векторлары үшін $Z_j - C_j \leq 0$ ($j = \overline{1, n}$) қатынасы орындалатын, $D = (A_1, A_2, \dots, A_l, \dots, A_m)$ базисі

тандалған делік. Онда $E = C_{\text{баз}} D^{-1}$ – түйіндес есептің жоспары. Бұл жоспар тиімді емес, өйткені бір жағынан тандалған базисте X теріс компонент иеленеді де тура есептің тиімді жоспары бола алмайды, екінші жағынан түйіндес есептің тиімді жоспарының бағалаулары теріс болмауы қажет.

Ендеше, $x_i < 0$ компонентіне сай, теріс бағалауға сәйкес A_i векторын тура есептің базисінен шығарып, оны түйіндес есеп базисіне енгізу керек.

Тура есептің базисіне енгізілетін векторды таңдау үшін l -ші жолды қараймыз: егер онда $x_{lj} < 0$ жоқ болса, онда, түйіндес есептің сызықтық функциясы шешімдердің көпжағында шектелмеген, ал тура есептің шешім жоқ. Егер де қайбір $x_{lj} < 0$, онда осындай теріс элементтерді қамтитын бағандар үшін $\theta_{0j} = \min(x_i / x_{ij}) \geq 0$ шамасын есептеп, есеп минимумға шығарылса $\max \theta_{0j} (Z_j - C_j)$ шамасына сай векторды, ал есеп максимумға шығарылса $\min \theta_{0j} (Z_j - C_j)$ сай векторды анықтаймыз. Осы векторды тура есеп базисіне енгіземіз. Тура есептің базисінен аласталатын вектор бағыттаушы жол арқылы анықталады.

Егер $\theta_{0j} = \min(x_i / x_{ij}) = 0$, яғни $x_i = 0$, онда x_{lj} шешуші элемент ретінде $x_{lj} > 0$ жағдайында ғана қабылданады. Бұл процесс $X \geq 0$ алынғанша жалғаса береді; ақырында түйіндес есептің тиімді жоспары, демек тура есептің де тиімді жоспары алынады.

Осы алгоритм бойынша есептеулерде барлық $x_i < 0$ жойылғанша $Z_j - C_j \leq 0$ шартына назар аудармаймыз. Одан әрі тиімді шешім кәдімгі симплекс-әдіспен табылады. Егер барлық $x_i < 0$ болса, онда тура есептің тиімді жоспарына көшу үшін θ_{0j} минимум бойынша емес, максимум бойынша, яғни $\theta_{0j} = \max(x_i / x_{ij}) > 0$ арқылы табылады.

Түйіндес симплекс-әдіспен шектеулер жүйесіндегі еркін мүше кез-келген таңбалы сызықтық программалаудың есебін шығара аламыз. Бұл әдіс шектеулер жүйесін түрлендіру санын, сонымен қатар симплекс-кестенің өлшемін азайтуға мүмкіндік береді.

Түйіндес симплекс әдісБұдан бұрын тура есептің тиімді шешімін алу үшін түйіндес есепке көшіп, оның тиімді жоспарының көмегімен тура есептің тиімді шешімін анықтаған едік.

Егер бірінші симплекс кестені бірлік қосымша базис арқылы қарастырсақ, онда бағандарда тура есептің, ал жолдарда түйіндес есептің жазылғандығын байқаймыз. Ендеше түйіндес есепке көшу міндетті емес. Мұның сыртында C_j тура есептің бағалауларын білдірсе, ал түйіндес есептің бағалаулары – b_i . Симплекс кестесінде тура есеп жазылған түйіндес есепті шығаралық; түйіндес есептің де, сонымен бірге тура есептің де тиімді жоспарын табамыз. Бұл әдіс **түйіндес симплекс-әдіс** деп аталады.

Айталық, сызықтық программалаудың жалпы түрдегі тура есебін шығару қажет болсын: $f(x) = C \cdot X \rightarrow \inf, A \cdot X = A_0, X \geq 0$. Онда түйіндес есеп $g(y) = Y \cdot A \rightarrow \sup, Y \cdot A \leq C$. Енді $X = D^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_l & \dots & x_m \end{pmatrix}$ векторының кемінде

бір компоненті теріс (мысалы $x_l < 0$), бірақ барлық A_j векторлары үшін $Z_j - C_j \leq 0$ ($j = \overline{1, n}$) қатынасы орындалатын, $D = (A_1, A_2, \dots, A_l, \dots, A_m)$ базисі

таңдалған делік. Онда $E = C_{\text{баз}} D^{-1}$ – түйіндес есептің жоспары. Бұл жоспар тиімді емес, өйткені бір жағынан таңдалған базисте X теріс компонент иеленеді де тура есептің тиімді жоспары бола алмайды, екінші жағынан түйіндес есептің тиімді жоспарының бағалаулары теріс болмауы қажет.

Ендеше, $x_l < 0$ компонентіне сай, теріс бағалауға сәйкес A_l векторын тура есептің базисінен шығарып, оны түйіндес есеп базисіне енгізу керек.

Тура есептің базисіне енгізілетін векторды таңдау үшін l -ші жолды қараймыз: егер онда $x_{lj} < 0$ жоқ болса, онда, түйіндес есептің сызықтық функциясы шешімдердің көпжағында шектелмеген, ал тура есептің шешім жоқ. Егер де қайбір $x_{lj} < 0$, онда осындай теріс элементтерді қамтитын бағандар үшін $\theta_{0j} = \min(x_i / x_{lj}) \geq 0$ шамасын есептеп, есеп минимумға шығарылса $\max \theta_{0j} (Z_j - C_j)$ шамасына сай векторды, ал есеп максимумға шығарылса $\min \theta_{0j} (Z_j - C_j)$ сай векторды анықтаймыз. Осы векторды тура есеп базисіне енгіземіз. Тура есептің базисінен аласталатын вектор бағыттаушы жол арқылы анықталады.

Егер $\theta_{0j} = \min(x_i / x_{lj}) = 0$, яғни $x_i = 0$, онда x_{lj} шешуші элемент ретінде $x_{lj} > 0$ жағдайында ғана қабылданады. Бұл процесс $X \geq 0$ алынғанша жалғаса береді; ақырында түйіндес есептің тиімді жоспары, демек тура есептің де тиімді жоспары алынады.

Осы алгоритм бойынша есептеулерде барлық $x_i < 0$ жойылғанша $Z_j - C_j \leq 0$ шартына назар аудармаймыз. Одан әрі тиімді шешім кәдімгі симплекс-әдіспен табылады. Егер барлық $x_i < 0$ болса, онда тура есептің тиімді жоспарына көшу үшін θ_{0j} минимум бойынша емес, максимум бойынша, яғни $\theta_{0j} = \max(x_i / x_{lj}) > 0$ арқылы табылады.

Түйіндес симплекс-әдіспен шектеулер жүйесіндегі еркін мүше кез-келген таңбалы сызықтық программалаудың есебін шығара аламыз. Бұл әдіс шектеулер жүйесін түрлендіру санын, сонымен қатар симплекс-кестенің өлшемін азайтуға мүмкіндік береді.

Мысалдар.

1. Симметриялы емес түйіндес есеп.

Тура есеп. Сызықтық

$$f = x_2 - x_4 - 3x_5 \rightarrow \min$$

функциясының

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, 6}.$$

шарттарындағы тиімді шешімін табыңыз.

Мұндағы $c = (0; 1; 0; -1; -3; 0)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Түйіндес есеп. Сызықтық

$$g = y_1 + 2y_2 + 5y_3$$

функциясының

$$\begin{cases} y_1 \leq 0, \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 0, \\ y_2 \leq 0, \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1, \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3, \\ y_3 \leq 0 \end{cases}$$

шарттарындағы максимумын табыңыз.

Шешуі. Тура есептің шешімін симплекс-әдіспен табамыз (кесте 2.1)

кесте 2.1

№№	Базис	С баз		0	1	0	-1	-3	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_1	0	1	1	2	0	-1	[1]	0
2	A_3	0	2	0	-4	1	2	-1	0
3	A_6	0	5	0	3	0	0	1	0
m+1	$Z_j - C_j$		0	0	-1	0	1	3	0

1	A ₅	-3	1	1	2	0	-1	1	0
2	A ₃	0	3	1	-2	1	[1]	0	0
3	A ₆	0	4	-1	1	0	1	0	0
m+1	z _j - C _j		-3	-3	-7	0	4	0	0
1	A ₅	-3	4	2	0	1	0	1	0
2	A ₄	-1	3	1	-2	1	1	0	0
3	A ₆	0	1	-2	[3]	-1	0	0	1
m+1	z _j - C _j		-15	-7	1	-4	0	0	0
1	A ₅	-3	4	2	0	1	0	1	0
2	A ₄	-1	11/3	-1/3	0	1/3	1	0	2/3
2/33	A ₂	0	1/3	-2/3	1	-1/3	0	0	1/3
m+1	z _j - C _j		-46/3	-19/3	0	-11/3	0	0	-1/3

Тура есептің тиімді жоспары төртінші итерацияда алынды:
 $X^* = (0; \frac{1}{3}; 0; \frac{11}{3}; 4; 0)$, $f_{\min} = -\frac{46}{3}$. Осы итерацияны пайдаланып, түйіндес есептің тиімді жоспарын табамыз. Түйіндестік теоремасына сай түйіндес есептің тиімді жоспары $Y^* = C^* D^{-1}$ өрнегінен табылады, мұндағы D^{-1} – тура есептің тиімді жоспары алынған соңғы базис векторларынан тұратын матрицаға кері матрица. Соңғы базиске кіретін векторлар A_5, A_4, A_2 , демек

$$D = (A_5, A_4, A_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Төртінші итерацияда A_1, A_3, A_6 бағандарындағы коэффициенттерден тұратын D^{-1} кері матрицасы:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Осы итерациядан шығатыны $C^* = (-3; -1; 1)$. Сонымен

$$Y^* = C^* D^{-1} = (-3; -1; 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Y^* = \begin{pmatrix} -19 & -11 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \text{ яғни } Y^* = C^* X_i, \text{ мұндағы } X_i - \text{бастапқы бірлік}$$

базистің бағандарында тұрған соңғы итерация коэффициенттерінің жіктелуі.

Сонымен түйіндес айнымалыны $(m+1)$ -ші жолдың бағалануынан алуға болады екен, бастапқы базиске енген, тиісті векторға қарама-қарсы тұрған мәнге сызықтық функцияның тиісті коэффициенттерін қосамыз:

$$y_1 = -\frac{19}{3} + 0 = -\frac{19}{3}; y_2 = -\frac{11}{3} + 0 = -\frac{11}{3}; y_3 = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Бұл кезде } g_{\max} = -\frac{46}{3}.$$

2. Симметриялы түйіндес есеп

Тура есеп.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3, \\ |x_j| \geq 0 \quad (j=1, 2, 3) \end{cases} \end{aligned}$$

Түйіндес есепті жазу үшін екінші теңсіздікті -1 ге көбейтеміз.

Түйіндес есеп.

$$\begin{aligned} g &= 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 1, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2, \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \leq 3, \\ y_3 \leq 0, \quad (i=1, 2, 3, 4). \end{cases} \end{aligned}$$

Тура есепті шығару үшін төрт қосымша айнымалы енгізіп, түрлендірулер жасаған соң, тағы бір жасанды айнымалы қосуымыз қажет еді. Мұндай есептің бастапқы симплекс-кестесі алты жол мен тоғыз бағаннан тұрады. Түйіндес есепті шығару үшін үш қосымша айнымалы енгізіледі. Шектеулер жүйесі алдын-ала түрлендіруді талап етпейді. Оның бірінші симплекс-кестесі төрт жолдан және сегіз бағаннан тұрады. Түйіндес есепті симплекс-әдіспен шығарамыз (кесте 4.2).

кесте 4.2

i	Базис	C базис	A_0	2	3	6	3	-3	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_5	0	1	2	-1	[1]	2	1	0	0
2	A_6	0	2	2	1	1	-1	0	1	0
3	A_7	0	3	-1	4	-2	-2	0	0	1

$m+1$	$Z_j - C_j$		0	-2	-3	-6	-3	0	0	0
1	A_3	6	1	2	-1	1	2	1	0	0
2	A_6	0	1	0	[2]	0	-1	-1	1	0
3	A_7	0	5	3	6	0	2	2	0	1
$m+1$	$Z_j - C_j$		6	10	-9	0	9	6	0	0
1	A_3	6	3/2	2	0	1	3/2	1/2	1/2	0
2	A_2	3	1/2	0	1	0	-1/2	-1/2	1/2	0
3	A_7	1	2	3	0	0	4	5	3	1
$m+1$	$Z_j - C_j$		21/2	-19/3	0	0	9/2	3/2	9/2	0

Түйіндес есептің тиімді шешімі: $Y^* = (0; 1/2; 3/2; 0)$, $g_{\max} = 21/2$.

Тура есептің тиімді шешімін соңғы итерациядағы $(m+1)$ -ші жолдың A_5, A_6, A_7 бағандарындағы бағалауы арқылы табамыз:

$$x = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + 0 = \frac{9}{2}; x = 0 + 0 = 0.$$

Тура есептің $X^* = (3/2; 9/2; 0)$ тиімді шешімінде сызықты функция $f_{\min} = 21/2$ тиімді мәніне жетеді.

4-дәрісті нысықтау сұрақтары

1. Шикізатты тиімді үлестіру есебі.
2. Тура және түйіндес есептердің жалпы қисындалуы.
3. Симметриялы емес түйіндес есептер.
4. Симметриялы түйіндес есептер.
5. Түйіндес есептің қасиеттері.
6. Түйіндес есеп құру ережесі.
7. Түйіндес симплекс әдіс қолданылатын жағдайлар.

4-семинар сабақ. Түйіндес есептер шығару. Түйіндес симплекс әдісті қолдану.

№4 аудиториялық жұмыс тапсырмалары

4.1. Берілген функцияның минимумын табу керек:

$$f(x) = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ |x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

Шығарылуы. Түйіндес есепті канондық түрге келтіреміз:

$$f(x) = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min ,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5, \\ |x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

Базис ретінде A_4 мен A_5 векторларын қабылдап, бірінші симплекс кестені құрамыз.

Базистік айнымалылар	C_B	A_0	7 A_1	20 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5
A_4	0	4	1	1	-1	1	0
A_5	0	-5	-1	5	-1	0	1
$z_j - c_j$		0	2	-1	-5	0	0

Мұндағы $x_2 = -5 < 0$ болғандықтан, екінші жолдың коэффициенттерін қарастырамыз. Олардың ішінде бағандарда A_1 мен A_3 векторларына сай теріс таңбалы екі коэффициент бар. Ендеше

$$1. \ \theta_{01} = \min \left(\frac{4}{1}; \frac{-5}{-1} \right) = \frac{4}{1}, \ \theta_{01} (z_1 - c_1) = \frac{4}{1} \cdot 2 = 8,$$

$$\theta_{03} = \frac{-5}{-1} = 5, \ \theta_{03} (z_3 - c_3) = 5(-5) = -25.$$

Тура есеп сызықтық функцияның минимум мәнін табуға арналғандықтан, тура есептің базисіне $\max \theta_{0j} (z_j - c_j) = \max(-25; 8) = 8$, яғни шешуші элементі 1 болатын A_1 векторын енгізіп, A_4 векторын базистен шығарамыз.

Нәтижесінде соңғы итерациясында тура есептің тиімді жоспары алынатын кесте аламыз

Базис айнымалылары	C_B	A_0	7 A_1	20 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5
A_1	-2	4	1	1	-1	1	0
A_5	0	-1	0	6	-3	1	1
$z_j - c_j$		-8	0	-3	-3	-2	0

A_1	-2	9/2	1	-2	0	1/2	-1/2
A_3	5	1/2	0	-3	1	-1/2	-1/2
$z_j - c_j$		-13/2	0	-12	0	-7/2	-3/2

Тура есептің тиімді жоспары:

$$X^* = (9/2; 0; 1/2), \quad Z_{\min} = -13/2$$

және түйіндес есептің тиімді жоспары:

$$Y^*_{\max} = (7/2; 3/2), \quad g = -13/2.$$

Түйіндес есептің тиімді жоспарын алу үшін алғашқы базис векторларына сай келетін $Z_j - C_j$ бағалауларын -1ге көбейттік, өйткені бұл симметриялы түйіндес есептер.

4.2.

$$\begin{cases} f(x) = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 7, \end{cases} \\ |x_j| \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

Шығырылуы. Түйіндес есепті канондық түрге келтіреміз

$$\begin{cases} f(x) = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -4, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_5 = -7, \end{cases} \\ |x_j| \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

Есептің шешімі келесі кестеде келтірілген

Базистік айнымалылар	C_B	A_0	7 A_1	20 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5
A_4	0	-4	-1	-1	2	1	0
A_5	0	-7	-3	-1	4	0	1
$z_j - c_j$		0	-3	-3	4	0	0

2.

A_1	3	4	1	1	-2	-1	0
A_5	0	6	0	2	-2	-3	1
$z_j - c_j$		12	0	1	-2	-3	0
A_1	3	3/2	1	0	-1	1/2	-1/2
A_2	2	5/2	0	1	-1	-3/2	1/2
$z_j - c_j$		19/2	0	0	-1	-3/2	-1/2

Бірінші итерациядағы шешуші элемент $\theta_{0j} = \max(x_i / x_{ij}) > 0$ бойынша алынғандықтан, екінші итерацияда тура есептің тірек жоспарына көшіп, одан ірі кәдімгі симплекс-әдісті қолдануға мүмкіндік туды. Тура есептің тиімді жоспары: $X^* = (3/2; 5/2; 0)$, $Z_{\min} = 19/2$. Есептер симметриялы, сондықтан түйіндес есептің тиімді жоспары $Y^* = (3/2; 1/2)$, $g_{\max} = 19/2$.

Төмендегі есептерді түйіндес симплекс-әдіспен шығарыңыз.

4.3.

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

4.4.

$$g(y) = 2y_1 + 4y_2 + 12y_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \geq 10, \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 3y_4 \geq 4 \\ y_i \geq 0, (i = \overline{1,4}). \end{cases}$$

4.5.

$$f(x) = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 4, \end{cases}$$

4.6.

$$f(x) = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - x_3 \leq 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8, \end{cases}$$

4.7.

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

4.8.

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

4.9.

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

4.10.

$$g(y) = 2y_1 + 4y_2 + 12y_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \geq 10, \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 3y_4 \geq 4 \\ y_i \geq 0, (i = \overline{1,4}). \end{cases}$$

4-үй жұмысының тапсырмалары

4.9. Симметриялылықтың қасиетін пайдаланып тура есептің шешімін табыңыз:

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

4.10. Симметриялы түйіндес есептің тура есебін жазып, екі есептің де тиімді шешімдерін табыңыз:

$$\begin{aligned} g(y) &= 2y_1 + 4y_2 + 12y_4 \rightarrow \min \\ \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \geq 10, \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 3y_4 \geq 4 \\ y_i \geq 0, (i = \overline{1,4}). \end{cases} \end{aligned}$$

4.11. Тура есеп пен түйіндес есептердің тиімді шешімдерін табыңыз:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 4, \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}). \end{cases} \end{aligned}$$

4.12. Тура есеп пен түйіндес есептердің тиімді шешімдерін табыңыз:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} -x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ -x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_3 \leq 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8, \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}). \end{cases} \end{aligned}$$

4.13. Тура есеп пен түйіндес есептердің тиімді шешімдерін табыңыз:

$$б) f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5 / 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad (j = \underline{1,3})$$

4.14. Тура есеп пен түйіндес есептердің тиімді шешімдерін табыңыз:

в) $f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad (j = \underline{1,3})$$

Есептерді түйіндес симплекс-әдіспен шығарыңыз.

4.15 $f(x) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \geq 14, \\ -x_1 - x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

4.1 $f(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$7 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \end{cases}$$

$$\cdot \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

4.1 $f(x) = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

$$9 \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 1, \end{cases}$$

$$\cdot \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

4.16. $f(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

4.1 $f(x) = 6x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

$$8 \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$\cdot \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

4.2 $f(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$0 \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq 9, \end{cases}$$

$$\cdot \quad \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

5-дәріс. Бүтін-сандық сызықтық программалау. Гомори әдісі. Шекаралар мен тармақтар әдісі

Бүтін-сандық сызықтық программалау есебінің математикалық моделі төмендегі түрде жазылады:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min) \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (5.2)$$

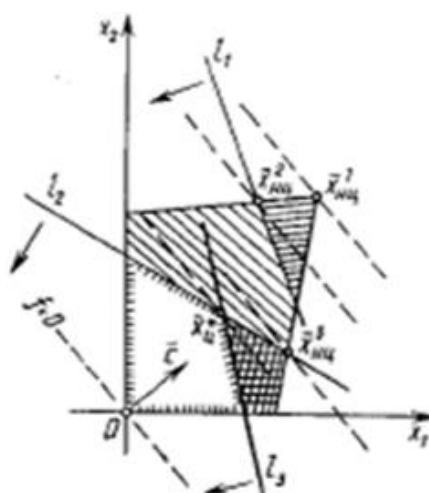
$$x_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (5.3)$$

$$x_j \in Z, \quad j = \overline{1, n} \quad (5.4)$$

Мұндағы Z – бүтін сандар жиыны. Бұл кездегі сызықтық программалаудың жалпы есебінен айырмашылық – тиімді жоспардың жоспарлар көпжағының төбесінен табылуы міндетті емес.

Бүтін-сандық сызықтық программалау есебін сан-алуан әдістермен шығаруға болады. Солардың бірі – Гомори әдісі болса, екіншісі – шекаралар мен тармақтар әдісі.

Гомори әдісінің (қиып тастау әдісінің) жалпы идеясы. Әуелі (5.1)–(5.4) есебі симплекс әдіспен шығарылады, яғни айнымалылардың бүтіндігіне назар аударылмайды. Егер алынған жоспар бүтін-сандық болса, онда ол барлық (5.1)–(5.4) есебінің шешімі болатындығы түсінікті. Егер де табылған шешімдердің ішінде бүтін-сандық еместері болса, онда есептің шектеулеріне табылған бүтін-сандық емес жоспар қанағаттандырмайтын, бірақ бүтін сандық жоспар қанағаттандыратын, арнайы ереже бойынша қалыптастырылатын қосымша сызықтық шектеулер қойылады. Мұндай



5.1-сурет. Гомори әдісі.

қосымша шектеулер табылған жоспардан бүтін-сандық еместерін қиып тастайды дейміз. Осындай қосымша шектеулерді **дұрыс қималар** дейді. Алынған кеңейтілген есепті қайтадан симплекс әдіспен (5.4) есебі толық

шешіледі. Кері жағдайда келесі кеңейтілген есеп құрылады т.с.с. Геометриялық тұрғыдан қарағанда әрбір қосымша шектеуге жоспарлар көпбұрышынан оның бүтін-сандық емес бөлігін қамтитынын қиып тастайтын гипержазықтыққа сай келеді. Қималар саны ақырлы болғанда ізделінді бүтін-сандық нүкте әуелі көпбұрыш қырынан табылып, содан соң бірнеше рет қиылған жоспар көпбұрышының төбесіне орналасады. Геометриялық көрнекілік $n = 2$ жағдайында 5.1- суретінде келтірілген. Онда бастапқы есептің жоспарларының облысы мен $\overline{x_{m+1}}$ тиімді бүтін-сандық төбесі көрсетілген. Жоспарларының облысының оған жақын координаттары бүтін сан нүкте $\overline{x_{m+1}}$ арқылы белгіленген. Суретте үш қосымша шектеулерге сай келетін l_1, l_2 мен l_3 үш түзуі кескінделген. Бұл түзулердің әрқайсысы көпбұрыштың бүтін-сандық емес төбесін қамтитын бөлігін қиып тастайды. Атап айтқанда, жоспарлар көпбұрышын l_1 түзуімен қиғаннан соң қалған қиылған бөлікте тиімді төбе $\overline{x_{m+1}}^2$ болады, екінші рет l_2 түзуімен қиғаннан соң тиімді төбе $\overline{x_{m+1}}^3$, ақырында үшінші рет l_3 түзуімен қиғаннан соң қалған бөліктен тиімді төбе $\overline{x_{m+1}}$ табылады.

Әдіс алгоритмі:

1. Симплекс-әдіспен (5.1)–(5.4) есебінің тиімді жоспарын $X = \{x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_i = b_i, \dots, x_m = b_m, \dots, x_n = 0\}$ табамыз. Егер барлық b_i бүтін болса, онда жоспар (5.1)–(5.4) бастапқы есебі үшін де тиімді. Егер (5.1)–(5.3) шешілмейтін болса, онда (5.1)–(5.4) есебі де шешілмейді. Егер b_i ішінде бүтін еместері де бар болса, онда алгоритмнің 2-бабына көшеміз.

2. Бүтін емес b_i арасынан бөлшек бөлігі ең үлкенін таңдаймыз.

a санының бөлшек бөлігі $\{a\}$ дегеніміз – осы сан мен оның $[a]$ бүтін бөлігінің a санынан аспайтын ең үлкен айырмасы. Мысалы, егер $a = 3\frac{2}{5}$, онда $\left\{3\frac{2}{5}\right\} = 3\frac{2}{5} - \left[3\frac{2}{5}\right] = 3\frac{2}{5} - 3 = \frac{2}{5}$; егер, $a = -5,7$

онда $\{-5,7\} = -5,7 - [-5,7] = -5,7 - (-6) = 0,3$.

Теріс санды мысалда бүтін бөлік -6 ға тең, өйткені бүтін бөлік – ең жақын кіші сан, яғни кіші жаққа бүтінге дейінгі дөңгелектеу жүргізіледі.

3. Жаңа шектеу (қима) b_i бөлшек санына сай келетін жолдар негізінде құрылады да мына түрде жазылады:

$$\sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} x_j \geq \beta_i. \quad (5.5)$$

Мұндағы α_{ij} дегеніміз a_{ij} коэффициенттерінің бөлшек бөлігі:

$$\alpha_{ij} = \left\{a_{ij}\right\}, \quad j = m+1, n;$$

β_t – дегеніміз b_t коэффициенттерінің бөлшек бөлігі:

$$\beta_t = \{b_t\}.$$

Жаңадан құрылған шектеулер жүйесін канондық түрге келтіру үшін теңсіздікті теңдікке айналдырамыз. Жалған x_{n+1} айнымалысын енгіземіз:

$$a_{tm+1}x_{m+1} + a_{tm+2}x_{m+2} + \dots + a_{tn}x_n - x_{n+1} = \beta_t, \quad x_{n+1} \geq 0.$$

4. Алынған кеңейтілген есепті тағы да симплекс-әдіспен шығарамыз. Егер тиімді жоспар бүтін-санды болса, ол бастапқы (3.1)-(3.4) есебінің шешімін білдіреді. Кері жағдайда алгоритмнің 2-бабына ораламыз. Егер есептің бүтін-санды шешімі бар болса, онда бірнеше итерациядан соң тиімді жоспар табылады.

5.1-мысал.

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

Есепті симплекс әдіспен шығарғанда 1-кезеңнен соң келесі кесте алынады.

Базис	C_B	A_0	-3	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
x_3	0	20	5	2	1	0
x_4	0	5	1	1	0	1
$z_j - c_j$		0	3	2	0	0
x_1	3	4	1	0,4	0,2	0
x_4	0	1	0	0,6	-0,2	1
$z_j - c_j$		-12	0	0,8	-0,6	0
x_1	3	10/3	1	0	1/3	-2/3
x_2	2	5/3	0	1	-1/3	5/3
$z_j - c_j$		-40/3	0	0	-1/3	-4/3

Есепті шығару нәтижесінде алатынымыз: $x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}, x_2 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}, f = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

Есептің жауабында екі бөлшек сан : $3\frac{1}{3}$ мен $1\frac{2}{3}$ бар екенін көреміз. Бүтін-сандық шешімдер алу үшін Гомори әдісін қолданамыз.

Біріншіден, бөлшек бөлігі максимум санды таңдаймыз:

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} \text{ және } \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{2}{3}, \max \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{2}{3}.$$

Бұл қиманың $1\frac{2}{3}$ санына сәйкес жол негізінде құрылатындығын көрсетеді.

Екіншіден, шектеу құрамыз. Ол үшін $1\frac{2}{3}$ саны мен x_1, x_2, x_3 және x_4 айнымалыларына сәйкес жолдардағы сандардың сызықтық комбинациясын жазамыз:

$$0 \cdot x_1 + 1x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \geq \frac{5}{3}.$$

Сонда (15.5) формуласынан алатынымыз $\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \geq \frac{2}{3}$, ықшамдасақ

$x_3 + x_4 \geq 1$. Жаңа шектеуді канондық түрге келтіреміз:

$$-x_3 - x_4 \leq -1,$$

$$-x_3 - x_4 + x_5 = -1, x_5 \geq 0.$$

Жаңа қиманы есептің шектеулер жүйесіне енгіземіз:

$$\begin{cases} f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ -x_3 - x_4 + x_5 = -1, \end{cases} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Жаңа есепті симплекс әдіспен шығарып, бүтін-сандық шешім аламыз:

$$x_1 = 3, x_2 = 2, f = 13.$$

Шекаралар мен тармақтар әдісі. Бұл әдіс – есептің шешімдері нұсқаларына бағытталған таңдау жасау әдісі.

«Шекаралар мен тармақтар» әдісінің алгоритмі:

1. Бірінші деңгейдің төбелері құрылады. Әрбір төбе үшін бағалаудың төменгі (жоғарғы) мәндері есептеледі. Ең жақсы (минимум немесе максимум) бағаға сай төбе тармақталады.

2. Барлық i –ші деңгейдің ($i \geq 2$) төбелері үшін бағалау жасалады.

Алынған $i, i-1, i-2, \dots, 1$, деңгейлердің тұйық төбелерінің біреуі ең жақсы (минимум немесе максимум) бағаға сай тармақталады. Осы процесс мақсат функциясының f^* мәнін беретін соңғы деңгейдегі дәл шешім алынғанша қайталана береді.

Егер f^* мәні қалған тұйық төбелердегі бағалаулардан нашар болмаса, онда тиімді шешім табылады.

Егер максат функциясының f^* мәні соңғы деңгейге дейінгі қалған төбелер бағалауынан нашар болса, онда 2-бапқа көшеміз.

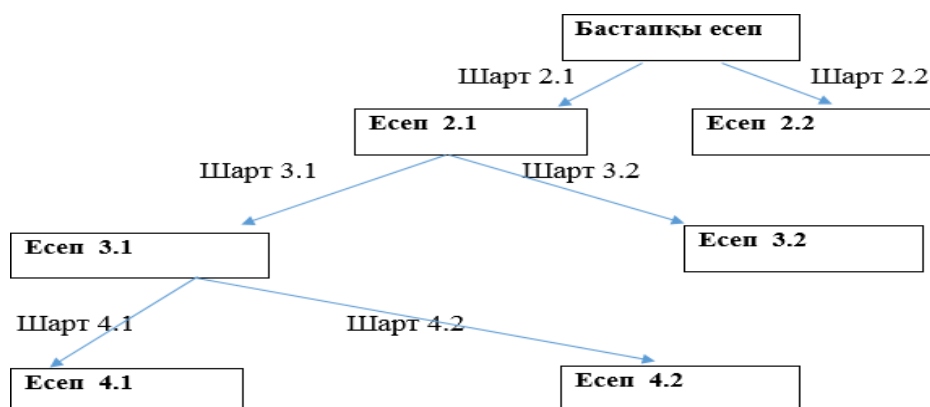
Енді сызықтық программалаудың (3.1)–(3.4) есебін қарастыралық. Мәселен, есепті шығару нәтижесінде алған жауабымыз

$$X = \{x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$$

болсын делік. Мұндағы b_i – бөлшек сан. Қосымша екі шарт енгіземіз:

$$x_t \leq z_t \text{ және } x_t \geq z_t + 1, \text{ мұндағы } [x_t] \geq z_t.$$

Соңғы екі теңсіздік x_t айнымалысының ұйғарымды шешімдер жиынын екі ішкі облысқа бөледі. Бұл кезде бүтін x_t мәндерін қамтымайтын облыс қарастырылмайды.



5.2-сурет. «Шекаралар мен тармақтар» әдісінің схемалық кескіні

5.2-мысал. Алдыңғы мысалдағы Гомори әдісімен шешілген есепті қарастырайық:

$$\begin{cases} f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Нәтижесінде

$$x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}, x_2 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}, f = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

жауабы алынған еді.

Гомори әдісіндегідей бөлшек бөлігі максимум сан таңдалады. Бұрын бұл x_2 үшін $\frac{5}{3}$ санының бүтін бөлігін анықтағанбыз:

$$\lceil 5 \rceil = \lceil 1^2 \rceil = 1. \text{ Ендеше } x_2 \leq 1 \text{ және } x_2 \geq 2.$$

$$\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = \lfloor \frac{1}{3} \rfloor$$

Тармақталу нәтижесінде жаңа екі есеп пайда болды:

Есеп 1 $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$	Есеп 2 $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$
---	--

Бұл есептерді шығарғанда келесі жауаптар алынды:

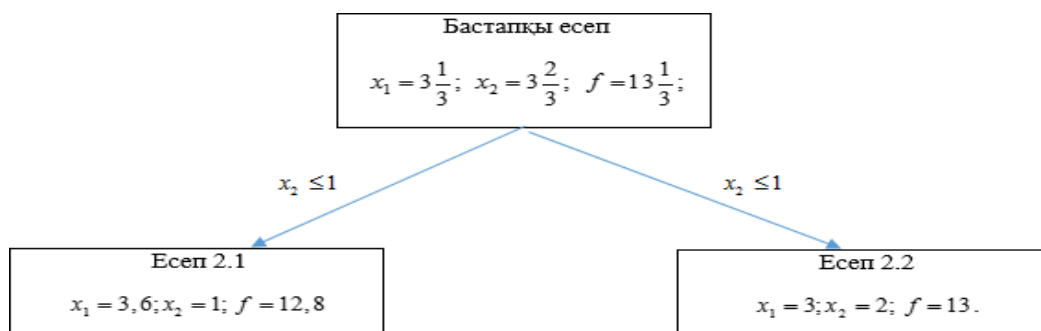
1- Есеп

$$x_1 = 3,6; x_2 = 1; f = 12,8$$

2- Есеп

$$x_1 = 3; x_2 = 2; f = 13.$$

Шығарылған есептегі тармақталу схемасын көрсетелік



5.3-сурет. Есептің тармақталуы.

Сонымен, екі түрлі әдістің көмегімен бүтін-сандық сызықтық программалау есебінің бірдей жауаптарын алдық.

5- дәрістің нысықтау сұрақтары

1. Қосымша сызықтық шектеу.
2. Дұрыс қиық
3. Санның бөлік бөлігі.
4. Жалған айнымалы.
5. «Шекаралар мен тармақтар» әдісінің алгоритмі
6. Гомори алгоритмі.

5-семинар сабақ. Бүтін-сандық сызықтық программалау есебін шығару.

№5 аудиториялық жұмыстың тапсырмалары.

Бүтін-сандық программалау есептерін шығарыңыздар:

5.1.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

5.2.

$$\begin{aligned} f &= 2x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 24, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

5.3.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 25, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

5.4.

$$\begin{aligned} f &= 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

5.5.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 2x_2 + 7x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

5.6.

$$\begin{aligned} f &= 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

5.7.

$$\begin{aligned} Z(x) &= 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 13, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, x_j - \text{ц} \end{cases} \end{aligned}$$

5.8.

$$\begin{aligned} Z(x) &= x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 10, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \leq 14, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, x_j - \text{ц} \end{cases} \end{aligned}$$

№5 үй жұмысының тапсырмалары

Есептерді Гомори әдісімен шығарыңыз:

5.9.

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - x_2 - 3y_1 - y_2; \\ x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 &\leq 40 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 30, \quad 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ y_1 &\leq 10, y_2 \leq 10, \\ y_1 + y_2 &\leq 15, \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &- \text{бүтін, теріс емес.} \end{aligned}$$

5.10.

$$\begin{aligned} \min z &= -2x_1 - x_2 - 2y_1 - y_2; \\ x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 &\leq 40, \\ x_1 + 3x_2 &\leq 30, \quad 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ y_1 &\leq 10, y_2 \leq 10, y_1 + y_2 \leq 15, \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &- \text{бүтін, теріс емес.} \end{aligned}$$

5.17.

$$\begin{aligned}\min z &= -x_1 - 8x_2 - 5y_1 - 6y_2, \\ 3y_1 + 4y_2 &\geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 6, 5x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &- \text{бүтін.}\end{aligned}$$

5.19.

$$\begin{aligned}\min z &= -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 50, \\ x_1 + 6x_2 &\leq 3, x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_3 + 2x_4 &\leq 30, x_i \geq 0, - \\ \text{бүтін, } i &= \overline{1, 4}.\end{aligned}$$

5.11.

$$\begin{aligned}\min z &= -2x_1 - 2x_2 - y_1 - y_2; \\ x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 &\leq 40, \\ x_1 + 3x_2 &\leq 30, 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ y_1 \leq 10, y_2 &\leq 10, y_1 + y_2 \leq 15, \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &- \text{бүтін және} \\ \text{теріс емес.}\end{aligned}$$

5.13.

$$\begin{aligned}\min z &= -x_1 - 8x_2 - 5y_1 - 6y_2; \\ x_1 + 4x_2 + 5y_1 + 2y_2 &\leq 7, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 6, 5x_1 + x_2 \leq 5, \\ y_1 \leq 4, y_2 &\leq 3, \\ 3y_1 + 4y_2 &\geq 12, \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &- \text{бүтін.}\end{aligned}$$

5.15.

$$\begin{aligned}\min z &= -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 50, \\ x_1 + 6x_2 &\leq 3, x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_3 \leq 20, x_4 &\leq 10, \\ x_3 + 2x_4 &\leq 30, \\ x_i \geq 0, - \text{бүтін, } i &= \overline{1, 4}.\end{aligned}$$

5.18.

$$\begin{aligned}\min z &= -x_1 - x_2 - 3y_1 - y_2; \\ x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 &\leq 40 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 30, 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ y_1 \leq 10, y_2 &\leq 10, x_1, x_2, y_1, y_2 - \\ \text{бүтін және теріс емес}\end{aligned}$$

5.20.

$$\begin{aligned}\min z &= -x_1 - x_2 - 2x_5 - x_6, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_5 + x_6 + x_{10} &= 40, \\ x_1 + x_2 + 4x_5 + 2x_6 + x_{11} &= 50, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 20, x_5 + x_7 = 10, \\ x_i \geq 0, - \text{бүтін, } i &= \overline{1, 10}.\end{aligned}$$

5.12.

$$\begin{aligned}\min z &= -x_1 - x_2 - 2y_1 - y_2; \\ x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 &\leq 40, \\ x_1 + 3x_2 &\leq 30, 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ y_1 + y_2 &\leq 15, y_1 \leq 10, y_2 \leq 10, \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &- \text{бүтін және} \\ \text{теріс емес.}\end{aligned}$$

5.14.

$$\begin{aligned}\min z &= -x_1 - 8x_2 - 5x_3 - 6x_4; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 11, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 3, 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_3 + 4x_4 &\leq 12, \\ 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 12, \\ x_i \geq 0 \text{ бүтін, } i &= \overline{1, 5}.\end{aligned}$$

5.16.

$$\begin{aligned}\min z &= -x_1 - x_2 - 2x_5 - x_6, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_5 + x_6 + x_{10} &= 40, \\ x_1 + x_2 + 4x_5 + 2x_6 + x_{11} &= 50, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 20, x_5 + x_7 = 10, \\ x_6 + x_8 &= 10, x_5 + x_6 + 2x_9 = 15\end{aligned}$$

1

шығарады, және керісінше өнімнің әр түрі бір салада ғана шығарылады деп санаймыз. Кез келген саланың өндірістік шығындары осы саладағы өнімнің жалпы шығарылымына тура пропорционал (шығарылым өскен сайын шығын да өседі). Белгілеулер енгізелік: X_i – i -ші саланың жалпы өнімі, $(i = \overline{1, n})$; C_i – i -ші саладағы жалпы өнім бірлігінен түскен кіріс, $(i = \overline{1, n})$; X_{ij} – j -ші сала өнімін шығарғандағы i -ші сала өнімінің шығыны, $(i, j = \overline{1, n})$; y_i – i -ші саланың ақырғы өнімі, $(i = \overline{1, n})$.

Экономика салаларының арасындағы өзара байланысы былай өрнектеледі (бұл сала аралық баланс):

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{11} + x_{12} + \square + x_{1n} + y_1, \\ X_2 &= x_{21} + x_{22} + \square + x_{2n} + y_2, \\ &\square \\ X_n &= x_{n1} + x_{n2} + \square + x_{nn} + y_n, \end{aligned}$$

мұндағы $x_{1i} + x_{1i} + \square + x_{1i}$ түріндегі қосынды өндіріс аясында пайдаланылатын i -ші сала өнімінің көлемін білдіреді $(i = \overline{1, n})$. j -ші саланың өндірістік шығындары осы саланың жалпы өніміне тура пропорционал болғандықтан X_{ij} шамасы $x_{ij} = \alpha_{ij} X_j$ түрінде өрнектеледі, $(i, j = \overline{1, n})$. Мына α_{ij} , $(i, j = \overline{1, n})$ сандары тура шығындар коэффициенттері делінеді де, $\alpha_{ij} = X_{ij} / X_j$ формуласынан анықталады, $(i, j = \overline{1, n})$. Бұл кездегі сала аралық баланс:

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \square + \alpha_{1n} X_n + y_1, \\ X_2 &= \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \square + \alpha_{2n} X_n + y_2, \\ &\square \\ X_n &= \alpha_{n1} X_1 + \alpha_{n2} X_2 + \square + \alpha_{nn} X_n + y_n. \end{aligned}$$

Белгілеулер:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & a \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

мұнда x – жалпы өнім векторы, y – ақырғы өнім векторы, c – бағалар векторы, A – тура шығындар матрицасы. Енді сала аралық баланс матрицалық формада былай жазылады: $x - Ax = y$.

Ендеше y – қоғамның ақырғы өнімге зәрулігін беріп, соңғы қатынастан берілген ақырғы өнімді алуды қандай X жалпы өнімі қамтамасыз ететіндігін анықтаймыз: $x = (I - A)^{-1} y$, мұнда I – бірлік $(n \times n)$ -матрица. $(I - A)$ Леонтьев матрицасы, ал $(I - A)^{-1}$ – толық шығындар матрицасы. Мына шарттар орындалғанда

$$a_{ij} \geq 0, \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1, \quad (j = \overline{1, n})$$

$(I - A)$ матрицасы ерекшеленбегендігін, яғни $(I - A)^{-1}$ матрицасы бар болатындығын және ол теріс еместігін (матрицаның бар элементтері ≥ 0)

О.Моргенштерн көрсеткен. Бұл жағдайда берілген ақырғы өнім векторы y

бойынша жалғыз жалпы өнім векторы X табылады.

Енді тиімділік есебін қою үшін экономика қоғамның ақырғы өнімге зәрулігін толық қанағаттандырмайды, яғни $X - A \cdot X \leq y$ деп санаймыз. Сол сияқты ақырғы өнімге сұраныстың бір бөлігі бұрынғы кезеңдегі жасалған қорлар есебінен қанағаттандырылады деп ұйғаруға да болады: $X - A \cdot X \leq y - S$, мұнда S – берілген теріс емес қалдықтар векторы. Сонымен қатар, салалардың өндірістік потенциалдарының шектелуіне байланысты жалпы өнім шамасы жоғарыдан шектелген (ол негізгі және айналымдық фондтардың, еңбек ресурстарының, т.б. факторлардың көлемдерінің шектеулілігімен сипатталады): $x \leq l$.

Басқарылатын айнымалылар ретінде жалпы өнім векторының X_i компоненттерін аламыз ($i = \overline{1, n}$). Экономика салаларының арасындағы өзара байланысты және салалардың өндірістік потенциалдарына қойылатын шектеулерді тағайындайтын, баланс қатынастарын ескере отырып экономика салаларының

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

қосынды кірісін максимумдайтын X жалпы өнім шығару жоспарын анықтау қажет. Сонымен, Леонтьевтің статикалық сала аралық моделі деп аталатын математикалық моделді жазамыз:

$$z = c^T x \rightarrow \max,$$

$$x - A \cdot x \leq y - s,$$

$$x \leq l,$$

$$x \geq 0.$$

Алынған модель симплекс-әдіспен шығарылады.

Таңдау есебі (тағайындау есебі). Мәселен n жұмысты n жұмысшы атқаратын болсын. i -ші жұмысты орындауға j -ші жұмысшы жұмсайтын уақыт c_{ij} , ($i, j = \overline{1, n}$) берілген. x_{ij} , ($i, j = \overline{1, n}$) басқарушы айнымалыларын енгіземіз. Олар мынаны білдіреді: егер i -ші жұмысты орындауға j -ші жұмысшы бөлінсе, онда $x_{ij} = 1$ ал кері жағдайда $x_{ij} = 0$. Әрбір жұмыс орнына тек қана бір жұмысшы тағайындалатын, керісінше әр жұмысшы бір жұмыс тағайындалатын шарттарда жұмысшыларды тағайындау қажет. Бұл кезде барлық жұмысты орындауға жұмсалатын қосынды уақыт минимум болуы тиіс.

Таңдау есебінің математикалық моделі:

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad (i = \overline{1, n}), \\
 \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad (j = \overline{1, n}), \\
 \forall x_{ij} &\geq 0, \quad \forall x_{ij} \in Z.
 \end{aligned}$$

Математикалық моделдің өзіндегі x_{ij} , $(i, j = \overline{1, n})$ басқарылатын айнымалыларының тек қана мүмкін екі мәнді: 0 немесе 1 қабылдауы айқын талап етілмейді. Дегенмен, берілген шектеулер арқасында олардың тек қана екі мәнді: 0 немесе 1 мәнін қабылдайтындығы шығады.

Коммивояжер есебі. Пункт саны – n және i -ші пункттен j -ші пунктке шейінгі ара қашықтық – c_{ij} берілген $(i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n})$. Коммивояжер 1-ші пункттен шығады да, қалған пункттерде бір реттен болып бастапқы 1-ші пунктке қайтып оралғандағы коммивояжердің жүрген жолы минимум болатын маршрутты анықтау қажет.

Коммивояжер әуелі 1-пункттен шығады да, қалған $(n-1)$ пункттерді аралау ретін анықтайды, яғни аралаудың барлық мүмкін нұсқаларының саны $(n-1)!$. Ал n саны өте үлкен болса, аралаудың барлық мүмкін нұсқаларын компьютердің көмегімен қарап шығу да мүмкін емес.

Есептің А.Таккер ұсынған математикалық моделі:

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (6.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (i = \overline{2, n}), \quad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad (j = \overline{2, n}), \quad (6.3)$$

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2, \quad (i, j = \overline{2, n}; i \neq j), \quad (6.4)$$

$$\forall x_{ij} \geq 0, \quad \forall x_{ij} \in Z, \quad (6.5)$$

мұндағы x_{ij} , $(i, j = \overline{1, n})$ – басқарылатын айнымалылар, мына шартты қанағаттандырады: егер коммивояжер маршруты i -ші пункттен j -ші пунктке тікелей өтуді қамтыса $x_{ij} = 1$, кері жағдайда $x_{ij} = 0$. Ал көмекші

айнымалылар u_i , $(i = \overline{2, n})$ коммивояжер i -ші пунктке нешінші болып кіретіндігін көрсететін реттік нөмірлер қызметін атқарады. Мысалы, коммивояжер $1 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ маршрутын таңдаса, онда $u_6 = 1, u_3 = 2, \square, u_4 = 5$

Әуелі барлық $i = \overline{1, n}$ мен $j = \overline{1, n}$ үшін жазылатын (6.2) мен (6.3) шарттары сәйкесінше коммивояжердің әр пунктке бір рет қана кіріп, әр пункттен бір рет қана шығатынын білдіреді. Егер есепті осындай шарттармен ғана шектесек, онда бірнеше контурдан тұратын маршруттар аламыз. Мысалы, $n = 6$ үшін екі контурдан: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, $4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 4$ тұратын маршрут аламыз. Осындай маршрутта коммивояжер шынымен әр пунктке тек қана бір рет кіріп, әр пункттен тек қана бір рет шығады, дегенмен мұндай маршрут біздің көңілімізге қонбайды. Өйткені есептің шарты бойынша қалған пункттерді аралап болған соң ғана алғашқы 1-ші пунктке оралу керек. Бірнеше контурдан тұратын маршруттар (6.4) шартын қанағаттандырмайтынын, яғни (6.4) шарты мұндай маршруттарды жоюға мүмкіндік беретінін көрсетелік. Шынында да, егер (6.4) теңсіздігін 1-пункттен өтпейтін контур бойымен қоссақ: $(n-1)k \leq (n-2)k$. Бұл мүмкін емес (мұндағы k – қарастырылушы контур доғаларының саны). Ал әр пункттен бір реттен өтетін контурдан тұратын маршрутта (6.4) шектеуі орындалады: $x_{ij} = 0$ кезінде алатынымыз $u_i - u_j \leq n-2$; $x_{ij} = 1$ кезінде $u_i - u_j + (n-1) \cdot 1 = l - (l+1) + (n-1) = n-2$ (коммивояжер i пунктінен тікелей j пунктіне өткенде егер $u_i = l$, онда $u_j = l+1$).

Енді коммивояжер 1 пунктінен бір рет қана шығып, тек қана бір рет 1 пунктіне кіреді деген шартты алып тастауға болады, өйткені ол қалған шектеулердің салдары болып табылады. Сондықтан (6.2) мен (6.3) шарттары $i = \overline{2, n}$ мен $j = \overline{2, n}$ үшін жазылған. Сонымен қатар, есептің математикалық моделінің өзінде басқарылатын айнымалылар x_{ij} , $(i, j = \overline{1, n})$ тек қана екі мүмкін мәнді 0 немесе 1 қабылдауы айқын талап етілмейді. Дегенмен, берілген шектеулер арқасында ол айнымалылар шындығында тек екі мәннің бірін: 0 немесе 1 қабылдайды. Осы (6.4) шектеуіне $u_i - u_j$ айырмасы кіргендіктен U_i көмекші айнымалалар мәндері нақты константаға дейінгі дәлдікпен анықтала алады ($i = \overline{2, n}$); Сондықтан есептің математикалық моделінде бұл айнымалаларға теріс еместік шарты мен бүтін сандылық шарты қойылмаған.

Коммивояжер есебі әдетте осы кластағы есептер үшін арнайы жасалған әдістер арқылы шығарылады.

6-дәрісті пысықтау сұрақтары

Төмендегі есептердің мазмұнды қойылымын қалыптастырып, басқарылатын және басқарылмайтын айнымалыларын атап, оларды шығару әдістерін көрсетіңіздер:

- диета есебі;
- ресурстарды үлестіріу есебі;
- салааралық экономика моделі;
- таңдау есебі;
- коммивояжер есебі.

6- семинар сабақ. Тағайындау есебі мен коммивояжер есебін шығару әдістері

№6 аудиториялық жұмыстың тапсырмалары

6.1. Айталық, бізде 4 қойма A_1, A_2, A_3, A_4 және 4 дүкен B_1, B_2, B_3, B_4 бар дейік. Әр қойманың әр дүкенге дейінгі арақашықтығы төмендегі матрица арқылы берілсін.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Қосынды арақашықтық минимум болатындай қойманы дүкендерге телудің амалын жасау қажет. Мұндай есепті тағайындау есебі дейміз. Оны венгер алгоритмі арқылы шығарамыз.

Шығару алгоритмі:

1. Есеп минимумге шығарылады. Бұл қадамдағы мақсат – C матрицасында саны максимум нөлдер алу. Ол үшін C матрицасындағы әрбір жолдағы минимум элементті табамыз да, оны сәйкес жолдардың әр элементтерінен шегереміз. Дәл осылай әр бағандағы минимум элементтерді де шегереміз. Егер матрица квадраттық болмаса, онда оны берілген матрицадағы максимум санға тең құндарды қойыу арқылы, квадраттық түрге келтіреміз.
2. Егер бірінші қадамнан соң тағайындау жасай алсақ, яғни әрбір жол мен әрбір бағаннан нөлдік элемент таңдай алсақ, онда алынған ыңешім тиімді болады. Ал тағайындаудың сәті түспесе, үшінші қадамға көшеміз.
3. Матрицадағы барлық нөлдерді түзулердің минимум санымен сызып, сызылмай қалған элементтер арасынан ең азын таңдаймыз. Содан соң соны түзулердің қиылысындағы элементтерге қосамыз, ал сызылмаған элементтерден шегереміз. Одан соң екінші қадамға ораламыз.

6.2. Коммивояжер есебін шекаралар мен тармақтар әдісімен шығару

1. Бастапқы мәліметтер матрицасын құру

Әуелі қалаларды жалғайтын жолдардың ұзындығын кесте арқылы өрнектейміз:

Қала	1	2	3	4
1	М	5	11	9
2	10	М	8	7
3	7	14	М	8
4	12	6	15	М

Қаланың өз-өзіне дейінгі қашықтығы M әрпімен белгіленген. Кейде шексіздікпен де белгіленеді. Демек, жолдың бұл ұзындығын шартты түрде шексіздікке тең деп аламыз.

2. Жолдардағы минимумдарды анықтау

Әрбір жолдағы минимум мәнін анықтап, оны жеке бағанға (d_i)

жазамыз.

Қала	1	2	3	4	d_i
1	М	5	11	9	5
2	10	М	8	7	7
3	7	14	М	8	7
4	12	6	15	М	6

1. Жолдарды редукциялау

Жолдарды редукциялаймыз, яғни жолдағы әр элементтен табылған тиісті (d_i) мәнін шегереміз.

Қала	1	2	3	4	d_i
1	М	0	6	4	5
2	3	М	1	0	7
3	0	7	М	1	7
4	6	0	9	М	6

Нәтижесінде әр жолдан кемінде бір нөлдік ұя көреміз.

4. Бағандардағы минимумдарды табу

Одан әрі әр бағанның минимум (d_j) мәнін табамыз. Осы минимумдарды жеке жолға толтырамыз.

Қала	1	2	3	4	d_i
1	М	0	6	4	5
2	3	М	1	0	7
3	0	7	М	1	7
4	6	0	9	М	6
d_j	0	0	1	0	

4. Бағандар редукциясы

Матрицаның әр бағанының элементтерінен оған сәйкес d_j мәнін шегереміз.

Қала	1	2	3	4	d_i
1	М	0	5	4	5
2	3	М	0	0	7
3	0	7	М	1	7
4	6	0	8	М	6
d_j	0	0	1	0	

Нәтижесінде әр бағаннан кемінде бір нөлдік ұя табылады.

6. Нөлдік ұялардың бағасын есептеу

Соңғы алынған матрицадағы әр нөлдік ұяларға «бағалау» жасаймыз. Ол дегеніміз ұя орналасқан жол мен бағандағы минимум элементтердің қосындысын білдіреді, бұл кезде ұядағы нөлдің өзі есепке алынбайды. Бұрынғы табылған d_j мен d_i ескерілмейді. Алынған қосындыны сол ұяға жақша ішінде жазамыз.

Қала	1	2	3	4
1	М	0 (4)	5	4
2	3	М	0	0
3	0	7	М	1
4	6	0	8	М

Сонымен, барлық нөлдік ұялар үшін:

Қала	1	2	3	4
1	М	0 (4)	5	4
2	3	М	0(5)	0
3	0(4)	7	М	1
4	6	0(6)	8	М

7. Матрица редукциясы

Бағасы үлкен нөлдік ұяны таңдаймыз. Оның мәнін «М» әрпімен алмастырамыз. Біз жолдың бір кесіндісін таптық. Соны жазамыз (біздің мысалда 4-шіден 2-шіге қозғаламыз).

Екі «М» пайда болған жолды немесе бағанды сызып тастаймызсыз. Кері жолға сәйкес ұяға тағы бір «М» әрпін қоямыз (өйткені біз кері оралмаймыз ғой)

Қала	1	2	3	4
1	М	0 (4)	5	4
2	3	М	0(5)	М
3	0(4)	7	М	1
4	6	М	8	М

8. Егер толық жол әлі де табылмаса, онда 2-қадамға көшеміз, ал табылса 9-қадамға көшеміз

Егер жолдың барлық кесінділерін таппасақ, онда 2-қадамға көшіп қайтадан жолдар мен бағандардағы минимумдарды анықтап, оларды редукциялап, нөлдік бағандарға бағалау жасаймыз т.с.с.,

Егер жолдың барлық кесіндісі табылса, онда 9-қадамға көшеміз.

9. Маршрут жолының қорытынды ұзындығын есептеу

Жолдың барлық кесінділерін тапқан соң, оларды өз-ара жалғастырып, жолдың жалпы ұзындығын есептейміз. Қалаларды жалғастыратын жолдардың ұзындығын бастапқы кестеден аламыз.

Біздің мысалдағы маршрут: $4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 4$.

Жолдың жалпы ұзындығы: $L = 30$.

6.3. Нысандарға ресурстарды тағайындау есебін шығарыңыз

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

Шешуі.

1-ші қадам. 1, 2, 3 және 4 жолдардағы минимум элемент мәні тиісінше 2, 4, 11 және 4. Әрбір жолдағы элементтерден тиісті минимум мәндерді шегергенде, алатынымыз

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow$$

1, 2, 3 және 4 бағандардағы элементтердің тиісті минимум мәндері: 0, 0, 5, 0. Осыларды әр бағанның элементтерінен шегергенде шығатыны:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow$$

2-ші қадам. Бірде-бір толық тағайындау жасалмағандықтан, бағалар матрицасын жетілдіреміз.

3-ші қадам. 1-бағанды, 3-жолды, 2-жолды (немесе 2-бағанды) сызып қоямыз. Сызылмаған минимум элементтің мәні 2:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ \cancel{11} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{4} \\ \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \min = 2.$$

Барлық сызылмаған элементтерден оны алаып, екі сызықтың қиылысындағы элементке қосақанда:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Сонымен

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Жауабы. Бірінші ресурс 3-ші нысанға, екінші — 2-ші нысанға, төртіншісі — 1-ші нысанға, үшінші ресурс ресурс — 4-ші нысанға жіберіледі. Тағайындау құны: $9 + 4 + 11 + 4 = 28$.

1-ескертпе. Егер әуелгі матрица квадраттық болмаса, онда жалған ресурстар немесе жалған нысандар енгізу арқылы бастапқы матрица квадратты түрге келтіріледі.

6.4. Коммивояжер есебін венгер әдісімен шығарыңыз:

М	3	4	2	7
5	М	8	4	3
2	3	М	7	5
3	2	9	М	1
1	2	3	5	М

Шешуі.

1. Матрицаны жолдар бойынша редукциялаймыз. Осыған орай, жаңадан алынған матрицаның әр жолы кемінде бір нөлді иеленеді.

М	1	2	0	5	2
2	М	5	1	0	3
0	1	М	5	3	2
2	1	8	М	0	1
0	1	2	4	М	1

1. Бұдан соң дәл осы амалды бағандар үшін қайталаймыз:

М	0	0	0	5
2	М	3	1	0
0	0	М	5	3
2	0	6	М	0
0	0	0	4	М
0	1	2	0	0

Минимум элементтерді шегерген соң, толық редукцияланған матрица аламыз.

2. Барлық тағайындаулар нөлдік құнға ие болатын ұйғарымды шешімді іздейміз.

M	[-0-]	[-0-]	[0]	5
2	M	3	1	[0]
[0]	[-0-]	M	5	3
2	[0]	6	M	[-0-]
[-0-]	[-0-]	[0]	4	M

3. Нәтижесінде S_3 эквивалент матрицасын табамыз:

M	0	0	0	5
2	M	3	1	0
0	0	M	5	3
2	0	6	M	0
0	0	0	4	M

4. Бастапқы матрицада орналасқан (ұялардағы) элементтерге аналогия бойынша тағайындаудың минимум құнын есептеуге мүмкіндік беретін X тағайындау матрицасын анықтаймыз.

M	[-0-]	[-0-]	[0]	5
2	M	3	1	[0]
[0]	[-0-]	M	5	3
2	[0]	6	M	[-0-]
[-0-]	[-0-]	[0]	4	M

Осыдан көретін маршрут: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

Демек, $G_{\min} = 2 + 2 + 3 + 3 + 2 = 12$.

№6 үй жұмысының тапсырмалары.

Коммивояжер есебін венгер әдісімен шығарыңыздар:

6.5.

x	1	10	6
7	x	3	8
12	9	x	4
5	2	11	x

6.6.

x	9	7	5
2	x	12	10
8	1	x	4
6	11	3	x

6.7.

x	5	2	10
4	x	8	12
11	6	x	7
3	9	1	x

6.8.

x	1	8	12
3	x	6	10
9	4	x	2
5	7	11	x

6.9.

x	6	8	3
9	x	1	4
12	7	x	11
2	5	10	x

6.10.

x	8	6	2
3	x	11	9
7	10	x	4
1	5	12	x

6.11.

x	11	3	6
8	x	1	4
2	7	x	9
12	5	10	x

6.12.

x	10	8	11
5	x	2	7
9	12	x	3
6	1	4	x

6.13.

x	3	8	4
1	x	10	2
7	9	x	5
11	6	12	x

6.14.

x	6	1	3
7	x	9	5
2	4	x	11
10	12	8	x

6.15.

x	2	6	1
12	x	10	7
5	3	x	4
9	11	8	x

6.16.

x	3	9	11
4	x	7	1
12	10	x	6
8	2	5	x

6.17.

x	6	8	3
2	x	10	5
12	9	x	11
4	7	1	x

6.18.

x	4	9	6
3	x	10	12
1	11	x	5
8	2	7	x

6.19.

x	4	11	1
10	x	5	8
12	7	x	2
3	6	9	x

6.20.

x	6	2	4
11	x	12	7
8	10	x	1
3	5	9	x

6.21.

x	4	6	2
12	x	10	8
1	7	x	5
11	3	9	x

6.22.

x	1	8	5
12	x	9	2
10	4	x	6
3	11	7	x

6.23.

x	12	4	9
5	x	6	2
10	1	x	8
3	11	7	x

6.24.

x	12	2	6
3	x	5	11
8	1	x	9
10	4	7	x

6.25.

x	2	10	5
8	x	1	7
6	3	x	12
4	9	11	x

6.26.

x	12	3	7
5	x	9	11
8	6	x	1
2	10	4	x

6.27.

x	2	8	1
11	x	12	5
4	6	x	9
7	10	3	x

5.28.

x	6	3	8
1	x	10	5
12	4	x	9
7	11	2	x

6.29.

x	1	11	4
7	x	5	9
3	8	x	2
6	10	12	x

6.30.

x	11	5	3
2	x	9	7
6	4	x	1
8	12	10	x

7-дәріс. Сызықтық программалаудағы көлік есебі (Ф.Хичкок, Т.Купманс)

Қайбір біртекті өнім өндірушілердің (зауыттардың) саны – m , ал сол өнімді тұтынушылардың саны – n болсын. Сонымен, әбір A_i өндірушідегі өнім көлемі тиісінше $a_i, i = \overline{1, m}$ бірлік делік. Сол өнімдерді B_j тұтынушыларына сәйкесінше $b_j, j = \overline{1, n}$ бірлік көлемінде жеткізу қажет. Біз i -өндірушіден j -тұтынушыға жүк бірлігін жеткізу құны – c_{ij} белгілі деп санаймыз.

Осы мәліметтерді ескере отырып, тұтынушылардың барлық сұранысын қанағаттандыратын және тасымал құны минимум болатын жүк тасудың тиімді жоспарын жасау керек.

Енді i -өндірушіден j -тұтынушыға жеткізілетін жүк бірлігінің мөлшерін x_{ij} арқылы белгілесек, онда есептің шартын келесі кесте (бұдан былай жоспарлау матрицасы деп аталатын) түрінде жаза аламыз (7.1-кесте).

7.1-кесте

Өндірушілер	Тұтынушылар				Қолдағы қор
	B_1	B_2	$\dots$	B_m	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$ $\cdot$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$ $\cdot$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$ $\cdot$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Сұраныстар	b_1	b_2	$\dots$ $\cdot$	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Есептің математикалық моделін құрайық. Мәлімет бойынша i -өндірушіден j -тұтынушыға x_{ij} жүк бірлігі жеткізілетіндіктен, оны тасымалдау құны $c_{ij} x_{ij}$ болады. Барлық жоспарлы тасымал құны қосар қосынды арқылы өрнектеледі:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} .$$

Шектеулер жүйесін есептің келесі шарттарынан аламыз:

а) барлық жүктер тасылуы қажет, яғни $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = 1, 2, \dots, m)$

(бұл теңдеулер 1-кестенің жолдарынан алынады);

б) барлық сұраныстар қанағаттандырылуы тиіс, яғни

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad (j=1,2,\dots,n)$$

(теңдеулер 1-кестенің бағандарынан алынады).

Сонымен, көлік есебінің математикалық моделі сызықтық

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \quad (7.1)$$

функциясының

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (7.2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (j = \overline{1, n}) \quad (7.3)$$

шектеулеріндегі ең кіші мәнін табуды білдіреді екен.

Қарастырылып отырған моделде қосынды қор қосынды сұранысқа тең, яғни

$$\sum a_i = \sum b_j. \quad (7.4)$$

деп аламыз. Мұндай моделдер *жабық* моделдер делінеді.

7.1-теорема. *Қорлар көлемінің қосындысы сұраныстар көлемінің қосындысымен беттесетін кез келген транспорт есебінің шешімі бар. Теореманы дәлелдеу үшін көрсетілген шарттарда есептің кемінде бір жоспары бар екендігін және сызықтық функция жоспарлар жиынында шектелгендігін көрсету қажет*

◀ Мәселен $\sum a_i = \sum b_j = M > 0$ дейік. Онда $x_{ij} = a_i b_j / M$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) жоспар болып табылады, өйткені олар (7.2), (7.3) шарттарын қанағаттандырады. Шынында да, x_{ij} мәндерін (7.2) және (7.3) өрнектеріне қойсақ:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i}{M} M = a_i, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{M} = \frac{b_j}{M} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{b_j}{M} M = b_j. \end{aligned}$$

Енді C_{ij} мәндерінің арасынан ең үлкенін $C' = \max C_{ij}$ таңдап аламыз да, (7.1) сызықтық функциясындағы барлық коэффициенттерді C' мәнімен алмастырамыз; сонда (7.2) өрнегін ескеріп алатынымыз:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \leq C' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = C' \sum_{i=1}^m a_i = C' M.$$

Енді C_{ij} мәндерінің арасынан ең кішісін $C'' = \min C_{ij}$ таңдап аламыз да, (7.1)

сызықтық функциясындағы барлық коэффициенттерді C'' мәнімен алмастырамыз; сонда (7.2) өрнегін ескеріп алатынымыз:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \geq C'' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = C'' \sum_{i=1}^m a_i = C'' M$$

Соңғы екі теңсіздікті бір қосар теңсіздікке біріктіріп, ақырында алатынымыз

$$C'' M \leq Z \leq C' M,$$

яғни сызықтық функция транспорт есебінің жоспарлар жиынында шектелген екен. ►

Бастапқы тірек жоспарын құру. Сызықтық программалаудың басқа есептеріндегідей транспорт есебінің тиімді жоспарын іздеудің итерациялық процесі тіректік жоспардан басталады.

Транспорт есебінің (7.2), (7.3) шектеулер жүйесін қарастырайық. Ол (7.4) қатынасымен байланысқан $m+n$ теңдеулер жүйесі мен mn белгісізді қамтиды. Егер (7.2), (7.3) жүйелерінің теңдеулерін жеке-жеке мүшелеп қоссақ, онда бірдей екі теңдеу аламыз. Жоғарыдағы 7.1-кестеде мұндай қосу тиісінше жолдар мен бағандарды мүшелеп қосумен пара-пар.

Шектеулер жүйесінде бірдей екі теңдеудің болуы оның сызықты тәуелділігін білдіреді. Егер бұл теңдеулердің бірін жойсақ, онда жалпы жағдайда шектеулер жүйесі $m+n-1$ сызықты тәуелсіз теңдеулерді қамтуы керек, демек, транспорт есебінің ерекшеленбеген тіректік жоспары $m+n-1$ он компоненттерді немесе тасымалды қамтиды.

Сонымен, қайбір жолмен транспорт есебінің ерекшеленбеген тіректік жоспары алынса, онда оның компонентері мәндерінің $(x_{ij}), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ матрицасында (7.1-кесте) тек қана $m+n-1$ элементтері ғана оң, ал қалғандары нөлге тең.

Егер транспорт есебінің шарттары мен оның тіректік жоспарлары 7.1-кесте түрінде жазылса, онда нөлден ерекше тасымалдар тұрған ұялар *бос емес* деп, қалғандары *бос* деп аталады. Бос емес ұялар базистік белгісіздерге сай келеді де, ерекшеленбеген тіректік жоспар үшін олардың саны $m+n-1$ болады. Егер транспорт есебінің шектеулері (7.2), (7.3) түрінде жазылса, онда тіректік жоспарға енгізілген базистік айнымалыларға сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі сай келетіндігі белгілі. Транспорт есебінің шарттарын 1-кесте түрінде жазғандағы жоспардың тіректік болуы оның ациклді екендігінен шығады. Яғни кестеде барлық төбелері бос емес ұяда жататын тұйық цикл құру мүмкін емес.

Цикл дегеніміз – тек қана екі көршілес ұялар кестенің бір бағанында немесе бір жолында орналасатын, әрі соңғы ұя нақ бірінші ұя тұрған жолдан немесе бағаннан табылатын $(i_1 j_1)(i_1 j_2) \times (j_2 i_2) \dots (j_l i_m)$ түріндегі ұялар жинағы.

Цикл құру қайбір бос емес ұядан басталады да, тік бұрышпен бұрылатын және жол бойымен (баған бойымен) қозғалатын келесі бос емес ұяға баған бойымен (жол бойымен) көшеді және сол сияқты жалғаса отырып бастапқы ұяға оралуға ұмтылады. Егер мұндай оралу мүмкін болса, онда цикл тұйықталған

және жоспар тіректік емес. Тік бұрышпен бұрылу жүзеге асатын ұялар циклдің төбелерін анықтайды. Кері жағдайда жоспар тіректік болғаны. Транспортесібінің кез келген жоспары $(m + n - 1)$ -ден артық бос емес ұяны қамтыса тіректік жоспар болмағаны, өйткені оған сызықты тәуелді векторлар жүйесі сай келеді. Мұндай жоспар кезінде кестеде әрқашан бос емес ұялар санын $(m + n - 1)$ -ге дейін кемітетін тұйық цикл құруға болады.

Егер тіректік жоспарды анықтайтын, демек, ациклді бос емес ұяларға қайбір бос емес ұяны бос ұяны қоссақ, жоспар тіректік емес болады да, бір төбесінен басқалары бос емес ұяда жататын жалғыз цикл пайда болады.

Транспорт есебінің бастапқы жоспарын сызықтық программалау есебінің тіректік жоспарын құрғандағыдай әдістермен құруға болады. Дегенмен, бұл көптеген есептеулерді қажет етеді. Транспорт есебінің бастапқы жоспарын құрудың бірнеше қарапайым схемалары бар. Оларды мысалдармен көрсетуге болады.

Солтүстік-батыс бұрыш әдісі. Мәселен, көлік есебінің шарты 7.2-кесте арқылы берілсін делік. Жүк бірлігін тасымалдау құнына көңіл аудармай B_1 тұтынушысының сұранысын A_1 өндірушісінің есебінен қанағаттандыра бастайық. Ол үшін $a_1 = 100$ шамасын $b_1 = 200$ шамасымен салыстырамыз,

7.2-кесте

Өндіру-шілер	Тұтынушылар					Қор-лар
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Сұраныс	200	200	100	100	250	850

$a_1 < b_1$, яғни $a_1 = 100$ бірлігін $A_1 B_1$ ұясының төменгі сол жақ бұрышына жазамыз. Бірінші өндірушінің қоры толық таусылғандықтан, бірінші жолдың қалған ұяларын сызамыз. B_1 сұранысы $200 - 100 = 100$ бірлігіне қанағаттанбай қалды. Осы қалдықты A_2 өндірушісінің қорымен салыстырамыз, $100 < 250$ болғандықтан, 100 бірлікті $A_2 B_1$ ұясына жазып, B_1 тұтынушысының сұранысын толық қанағаттандырамыз да, бірінші бағандағы қалған ұяларды назардан тыс қалдырамыз.

A_2 өндірушісінде 150 бірлік жүк қалды. Енді B_2 тұтынушысының сұранысын A_2 өндірушіде қалған жүктер есебінен толтырамыз. Ол үшін бұл қалдықты B_2 тұтынушысының сұранысымен салыстырамыз: $150 < 200$, ендеше 150 бірлікті $A_2 B_2$ ұясына жазамыз, A_2 қоры толық таусылғандықтан, екінші жолдың қалған ұяларын қарастырмаймыз. B_2 сұранысы 50 бірлікке қанағаттанбай қалды. Оны A_3 өндірушісінің есебінен толықтырып, қалған қалдық арқылы B_3

сұранысын қанағаттандыруға кірісеміз. Осылай үдерісті барлық тұтынушылардың сұранысы қанағаттанғанша жалғастыра отырып, бастапқы тірек-жоспарды құруды аяқтаймыз.

Сонымен табице 7.2 –кестесіндегі ұялардың оң жақ жоғарғы бұрышында жүк бірлігін тасымалдау құны жазылса, сол жақ төменгі бұрышына тасымалдау жоспарын анықтайтын сандар жазылады, олардың жол бойынша қосындысы тиісті өндірушінің қорын білдірсе, баған бойынша қосындысы тиісті тұтынушының сұранысын білдіреді.

Енді 7.2-кестесіндегі жоспар тірек-жоспар болатындығын тексереміз. Бос емес A_1B_1 ұясынан қозғалысты толық ұялар арқылы бастап, оның өзі түгіл басқа деңгейлес ұяға толық ұяға жете алмайтындығымызды көреміз. Демек, жоспар – тірек жоспар. Сонымен қатар, ол ерекшеленбеген, өйткені дәл $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ бос емес ұяны қамтиды.

Бастапқы тірек-жоспарды солтүстік-батыс әдісімен құрғанда жүк бірлігін тасымалдау құнын ескерген жоқпыз, сондықтан бұл жоспар тиімді жоспардан алшақ жатыр. Қарастырылған әдіс есептеулерді компьютер арқылы жүргізгенде қолданылады.

Құрылған жоспардың жалпы құны:

$$Z = 100 \cdot 10 + 100 \cdot 2 + 150 \cdot 7 + 50 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot 16 + 250 \cdot 13 = 6950 \text{ (құн бірлігі)}.$$

Егер тірек-жоспар құрғанда жүк бірлігін тасымалдау құнын ескерсек, онда тиімді жоспарға мейлінше жақындай түсеміз.

Минимум құн әдісі. Бұл әдісте барлық құндар кестесінің арасынан ең кішісі таңдалады да, соған сәйкес ұяға a_i мен b_j сандарының кішісі толтырылады.

Одан соң қоры толығымен түгесілген өндірушіге сай жол (немесе сұранысы толығымен қанағаттандырылған тұтынушыға сай баған), немесе өндірушінің қоры таусылған және сұранысы толық қанағаттандырылған жол мен баған бұдан әрі қарастырылмайды. Кестенің қалған бөлігінен тағы да минимум құн таңдалады да, барлық қорлар үлестіріліп сұраныстар қанағаттандырылғанша қорларды үлестіру процесі жалғаса береді. Осы әдістің көмегімен жоғарыда қарастырылған есептің тіректік жоспарын құрайық. Оның шартын 7.3-кестеге толтырамыз.

Кестедегі минимум құнды таңдаймыз (бұл құн A_1B_4 ұясына орналастырылған), жүктің 100 бірлігін осы ұяға толтырамыз да, бірінші жол мен төртінші бағанды қарастырудан аластаймыз. Құндардың қалған кестелеріндегі ең кішісі A_2B_1 және A_3B_5 ұяларына орналасқан. Олардың кез келгенін толтырамыз, мысалы A_2B_1 . Сонда $200 < 250$, демек оған 200 мәнін жазамыз да, b_1 бағанын қарастырудан шығарамыз. Ал A_3B_5 200 бірлікті жазамыз да, A_3 бағанын қарастырудан аластаймыз. Құндардың қалған кестелеріндегі ең кішісін тағы таңдаймыз да процесті барлық қорлар үлестіріліп, сұраныстар толық қанағаттандырылғанша жалғастыра береміз. Нәтижесінде алынған жоспар

$X = (x_{14} = 100; x_{21} = 200; x_{22} = 50; x_{35} = 200; x_{42} = 150; x_{43} = 100; x_{45} = 50)$, қалған айнымалылар мәні нөлге тең. Жоспар циклдерді қамтымайды да, жеті оң тасымалдан тұрады. Демек ол ерекшеленген тіректік жоспар. Оның бағасын анықтасақ:

$$Z=100 \times 1 + 200 \times 2 + 50 \times 7 + 200 \times 2 + 150 \times 8 + 100 \times 12 + 50 \times 13 = 4300 \text{ (бірлік)}$$

Тасымал жоспарының құны айтарлықтай аз, демек ол тиімді жоспарға жақын деген сөз.

7.3-кесте

Өндіруші-лер	Тұтынушылар					Қорлар
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
	—	—	—	100	—	
A_2	2	7	10	6	11	250
	200	50	—	—	—	
A_3	8	5	3	2	2	200
	—	—	—	—	200	
A_4	11	8	12	16	13	300
	—	150	100	—	50	
Сұраныстар	200	200	100	100	250	850

Екі дүркін басымдық әдісі. Егер құндар кестесі өте үлкен болса, онда барлық элементтерді іріктеп шығу қиынға түседі. Бұл жағдайда екі дүркін қабылдау әдісі қолданылады. Енді сол әдісті баяндайық.

Әрбір бағандағы құны минимум ұяны $\vee$ белгісімен таңбалаймыз. Одан соң әр жолдағы ұялар үшін дәл осыны қайталаймыз. Нәтижесінде қайбір ұялар $\vee \vee$ белгісіне ие болады. Оларда жол бойынша да, баған бойынша да минимум құн табылады. Бұл ұяларға максимум тасымал көлемдері толтырылады да тиісті жол немесе баған қарастырылудан тыс қалдырылады. Одан соң тасымалдарды үлестіру $\vee$ таңбалы ұялар бойынша жүзеге асады. Кестенің қалған бөлігінде тасымалдар минимум құн бойынша үлестіріледі.

Екі дүркін басымдық әдісін шарты 7.4-кестеде келтірілген есепке қолданайық. Әуелі A_2B_1, A_1B_4, A_3B_5 ұяларын, содан соң A_4B_2 ұясын толтырамыз. Кестенің қалған бөліктеріне біртіндеп құны минимум A_2B_3, A_4B_3, A_4B_5 ұяларын толтырамыз.

Осы 7.4-кестеде алынған жоспар ерекшеленген тіректік жоспар болып табылады. Оның құнын табайық:

$$Z=100 \times 1 + 200 \times 1 + 50 \times 10 + 200 \times 2 + 200 \times 8 + 50 \times 12 + 50 \times 13 = 4250 \text{ (бірлік)}.$$

7.4-кесте

Өндірушілер	Тұтынушылар					Қорлар
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 —	7 —	4 —	✓ ✓ 1 100	4 —	100
A_2	✓ ✓ 2 20 0	7 —	10 50	6 —	11 —	250
A_3	8 —	✓ 5 —	✓ 3 —	✓ 2 —	✓ ✓ 2 200	200
A_4	11 —	✓ 8 200	12 50	16 —	13 50	300
Сұраныстар	20 0	200	100	100	250	850

Сонымен, екі дүркін қабылдау әдісімен алынған тіректік жоспар ең кіші құнға ие екен, демек ол тиімді жоспарға мейлінше жақын.

7-дәрісті нысықтау сұрақтары

1. Көлік есебінің қойылымы
2. Өткеру қабылеті шектеулі көлік есебінің ерекшеліктері.
3. Бастапқы тірек-жоспар құру әдістері.
4. Жабық модель
5. Ашық модель
6. Солтүстік-батыс бұрыш әдісі.
7. Минимум құн әдісі.
8. Екі дүркін басымдық әдісі.

7-семинар сабақ. Көлік есебін шығару әдістерін қолдану

№7 аудиториялық жұмыс тапсырмалары:

7.1. A_1, A_2, A_3 үш қоймасына тиісінше бірдей типтегі 140, 160, 120 бірліктегі жүктер түсті. Осы жүктерді 150, 90, 100, 80 көлемінде B_1, B_2, B_3, B_4 пункттеріне тасу керек. Тасымал тарифі

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

матрицасымен берілген. Солтүстік батыс бұрыш әдісін қолданып осы көлік есебінің тасымал жоспарын жасаңыз.

Шешуі. Барлық мәліметті кестеге енгіземіз:

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	4	2	140
A_2	8	4	1	4	160
A_3	9	7	3	6	120
Тұтынушылар	150	90	100	80	420

Жөнелту пункттерінің саны $m = 3$, ал қабылдау пункттерінің саны $n = 4$. Демек есептің тірек жоспары кестенің толтырылған $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ ұясында тұрған сандармен анықталады.

Жөнелтушілердегі жүк саны: $\sum_{i=1}^3 A_i = 140 + 160 + 120 = 420$.

Қабылдау пункттеріндегі жүкке жалпы сұраныс:

$$\sum_{j=1}^4 B_j = 150 + 90 + 100 + 80 = 420.$$

$$\sum_{i=1}^3 A_i = \sum_{j=1}^4 B_j.$$

Көлік есебінің жабық моделін алдық. Есепті солтүстік-батыс бұрыш әдісімен шығарамыз.

$A_1 \leq B_1$. Демек, (A_1, B_1) ұясына $\min(A_1, B_1) = 140$ санын орналастырамыз.

Сонда A_1 пунктіннің қоры толық таусылғанын көреміз. Сондықтан A_1 пунктін әрі қарай қарастырмаймыз да, B_1 пунктіннің сұранысын санаймыз $150 - 140 = 10$.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 140	3	4	2	140 [140]
A_2	8 10	4	1	4	160 [160]
A_3	9	7	3	6	120 [120]
Тұтынушылар	150 [150]	90 [150]	100 [150]	80 [150]	420

$A_2 > B_1$. Демек, (A_2, B_1) ұясына $\min(A_2, B_1) = 10$ санын орналастырамыз. B_1 пунктiнiң сұранысы толық қанағаттанды. Сондықтан, B_1 пунктiн әpi қарай қарастырмаймыз да, A_2 пунктiнiң қорын санаймыз: $160 - 10 = 150$.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 140	3	4	2	140 [140]
A_2	8 10	4	1	4	150 [160]
A_3	9	7	3	6	120 [120]
Тұтынушылар	0 [150]	90 [150]	100 [150]	80 [150]	420

Осылай үдерісті жалғастырып, $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ -қадамда алатынымыз:

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 140	3	4	2	0 [140]
A_2	8 10	4 90	1 60	4	0 [160]

A_3	9	7	3	6	0
			40	80	[120]
Тұтынушылар	0	0	0	0	420
	[150]	[150]	[150]	[150]	

Тірек жоспарын жазамыз:

$$X = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 90 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 80 \end{bmatrix}.$$

Бұл кездегі тасымал құны былай есептеледі:

$$F = 2 \cdot 140 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 90 + 1 \cdot 60 + 3 \cdot 40 + 6 \cdot 80 = 1380.$$

7.2. Кестеде берілген көлік есебін минимум құн әдісімен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1	2	150
A_2	3	4	5	1	100
A_3	3	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

Шешуі. Тасымал тарифі

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

матрицасымен берілген. Жөнелту пункттерінің саны $m = 3$, ал қабылдау пункттерінің саны $n = 4$. Демек есептің тірек жоспары кестенің толтырылған $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ ұясында тұрған сандармен анықталады.

Жөнелтушілердегі жүк саны: $\sum_{i=1}^3 A_i = 150 + 100 + 100 = 350..$

Қабылдау пункттеріндегі жүкке жалпы сұраныс:

$$\sum_{j=1}^4 B_j = 140 + 100 + 70 + 40 = 350.$$

$$\sum_{i=1}^3 A_i = \sum_{j=1}^4 B_j.$$

Көлік есебінің жабық моделін алдық. Есепті минимум құн әдісімен шығарамыз. Мұндағы 1 ге тең минимум тариф (A_1, B_3) ұясында тұр. Сондықтан осы ұяны толтырамыз. $A_1 > B_3$. Демек, (A_1, B_3) ұясына 70 санын жазамыз. B_3 пунктiнiң сұранысы толық қанағаттанды. Сондықтан, B_3 бағанын әрi қарай қарастырмаймыз да, A_1 пунктiнiң қорын санаймыз: $150-70=80$.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1 70	2	80 [150]
A_2	3	4	5	1	100 [100]
A_3	3	6	3	4	100 [100]
Тұтынушылар	140 [140]	100 [100]	0 [70]	40 [40]	350

Мұндағы 1 ге тең минимум тариф (A_2, B_4) ұясында тұр. Сондықтан осы ұяны толтырамыз. $A_2 > B_4$. Демек, (A_2, B_4) ұясына 40 санын жазамыз. B_4 пунктiнiң сұранысы толық қанағаттанды. Сондықтан, B_4 бағанын әрi қарай қарастырмаймыз да, A_2 пунктiнiң қорын санаймыз: $100-40=60$.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1 70	2	80 [150]
A_2	3	4	5	1 40	60 [100]
A_3	3	6	3	4	100 [100]
Тұтынушылар	140 [140]	100 [100]	0 [70]	0 [40]	350

Осылай үдерісті жалғастыра отырып, $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ -қадамда алатынымыз:

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 80	3	1 70	2	0 [150]
A_2	3 60	4	5	1 40	0 [100]
A_3	3	6 100	3	4	0 [100]
Тұтынушылар	0 [140]	0 [100]	0 [70]	0 [40]	350

Алынған тірек жоспары:

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{80} & 0 & \mathbf{70} & 0 \\ \mathbf{60} & 0 & 0 & \mathbf{40} \\ 0 & \mathbf{100} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Бұл кездегі тасымал құны:

$$F = 2 \cdot 80 + 1 \cdot 70 + 3 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 100 = 1050.$$

7.3. Кестеде берілген көлік есебін минимум құн әдісімен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	4	2	140
A_2	8	4	1	4	160
A_3	9	7	3	6	120
Тұтынушылар	150	90	100	80	420

7.4. Кестеде берілген көлік есебін екі дүркін басымдылық әдісімен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	4	2	140
A_2	8	4	1	4	160
A_3	9	7	3	6	120
Тұтынушылар	150	90	100	80	420

7.5. Кестеде берілген көлік есебін солтүстік –батыс әдісімен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1	2	150
A_2	3	4	5	1	100
A_3	3	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

№7 үй жұмысының тапсырмалары:

7.6. Кестедегі көлік есебін үш түрлі әдіспен шығарыңыз:

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	8	4	2	150
A_2	2	4	3	4	160
A_3	9	7	5	6	140
Тұтынушылар	150	100	100	100	450

7.7. Кестеде берілген көлік есебін үш түрлі әдіспен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	3	10	2	150
A_2	3	4	5	9	100
A_3	3	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

7.8. Кестеде берілген көлік есебін үш түрлі әдіспен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	14	2	140
A_2	8	4	1	4	160
A_3	9	7	3	6	140
Тұтынушылар	150	90	120	80	440

7.9. Кестеде берілген көлік есебін үш түрлі әдіспен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	3	4	2	240
A_2	8	4	6	4	160
A_3	9	7	3	5	120
Тұтынушылар	140	200	100	80	520

7.10. Кестеде берілген көлік есебін үш түрлі әдіспен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	10	2	150
A_2	3	4	5	1	100
A_3	2	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

8-Дәріс. Көлік есебіндегі потенциалдар әдісі

Бастапқы тіректік жоспарды құрудың қарастырылған әдістерімен ерекшеленген немесе ерекшеленбеген жоспар ала аламыз. Сызықтық программалау есебі ретіндегі транспорт есебінің құрылған тіректік жоспарын симплекс-әдіс көмегімен тиімді жоспарға дейін жеткізуге болғанымен, mn белгісізді қамтитын симплекс кестелер өте шұбалаңқы және есептеу жұмыстарының көлемі үлкен болғандықтан тиімді жоспар алу үшін неғұрлым қарапайым әдістер пайдаланылады. Солардың ішіндегі ең кең таралған әдіс – потенциалдар әдісі.

8.1-теорема. Егер транспорт есебінің $X^* = (x_{ij}^*)$ жоспары тиімді болса, онда оған $m + n$ сандар жүйесінен

$$\begin{aligned}U_i^* + V_j^* &= C_{ij} & x_{ij}^* > 0, \\U_i^* + V_j^* &\leq C_{ij} & x_{ij}^* = 0 \\(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).\end{aligned}$$

шарттарын қанағаттандыратын U_i^* мен V_j^* сандары сәйкес келеді. Бұл U_i^* мен V_j^* сандары тиісінше өндірушілер мен тұтынушылардың потенциалдары деп аталады.

◀ Бізге

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

сызықтық функциясын берілген

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

шектеулерінде минимумдайтын көлік есебін қайбір бастапқы сызықтық программалау есебінің түйіндес есебі ретінде қарастыруға болады. Ол үшін бастапқы есептегі әрбір $x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i$ шарттарына U_i ($i = \overline{1, m}$) айнымалысын, ал әрбір $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j$ шарттарына V_j ($j = \overline{1, n}$) айнымалысын сай келеді деп санаймыз. Сонда

$$f = \sum_{i=1}^m a_i U_i + \sum_{j=1}^n b_j V_j \rightarrow \max,$$

$$U_i^* + V_j^* \leq C_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

X^* жоспары түйіндес есептің тиімді жоспары болғандықтан $Y^* = (U_i^*, V_j^*)$

жоспары бастапқы есептің жоспары болып табылады да, түйіндістік теоремасының негізінде

$$\max f = \min Z$$

немесе

$$\sum_{i=1}^m a_i U_i^* + \sum_{j=1}^n b_j V_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}^*, \quad x_{ij}^* \geq 0.$$

8.1-теоремасының негізінде түйінді есептің тиімді жоспарының оң компоненттеріне сай бастапқы есептің шектеулері қатал теңдікті, ал нөлге тең компоненттеріне сәйкестері – теңсіздіктерді қанағаттандырады, яғни

$$U_i^* + V_j^* = C_{ij}, \quad x_{ij}^* > 0; \quad U_i^* + V_j^* \leq C_{ij}, \quad x_{ij}^* = 0. \blacktriangleright$$

Әрі қарай келесі теореманы дәлелсіз пайдаланамыз.

8.2-теорема. Егер бастапқы есептің шектеулер жүйесіне тиімді жоспардың компоненттерін қойғанда i – шектеу теңсіздікке айналса, онда түйінді есептің тиімді жоспарының i – компоненті нөлге тең. Егер түйінді есептің тиімді жоспарының i – компоненті оң болса, онда бастапқы есептің i – шешімі оның тиімді шешімін қатаң теңдік түрінде қанағаттандырады.

Бұл теоремадан шығатыны: бастапқы тіректік жоспар тиімді болуы үшін келесі шарттар орындалуы қажет:

а) әрбір бос емес ұя үшін потенциалдар айырмасы осы ұяда тұрған тасымалдар бірлігінің құнына тең болуы қажет:

$$U_i + V_j = C_{ij}; \quad (8.1)$$

б) әрбір бос ұя үшін потенциалдар айырмасы осы ұяда тұрған тасымалдар бірлігінің құнынан кіші немесе тең болуы керек:

$$U_i + V_j \leq C_{ij}. \quad (7.2)$$

Егер кемінде бір бос емес ұя (7.6) шартын қанағаттандырмаса, онда тіректік жоспар тиімді емес, оны тиімділік шарты бұзылатын ұяға тиісті базистік вектор енгізу арқылы жоспарды жақсартуға болады (яғни ұяға қайбір жүк бірлігін ауымтыру керек).

Сонымен, жоспардың тиімділігін тексеру үшін әуелі потенциалдар жүйесін құру қажет. Потенциалдар әдісінің алгоритмін қолдануды 3-кестеде алынған тіректік жоспар үшін көрсетейік. Ол үшін кестеге потенциалдар мәндері жазылатын жол мен бағанды қосамыз да, нәтижесінде 5-кестені аламыз.

Дәлелденген теорема негізінде бастапқы тірек-жоспар тиімді болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажет:

а) бос емес ұядағы потенциалдар қосындысы осы ұяда тұрған бірлікті тасымалдау құнына тең болуы қажет:

$$U_i + V_j = C_{ij} \quad (8.3)$$

б) әрбір бос ұядағы потенциалдар қосындысы бірлікті тасымалдау құнынан асып кетпеуі керек:

$$U_i + V_j \leq C_{ij} . \quad (8.4)$$

Егер кемінде бір бос ұя шартын (8.4) қанағаттандырмаса, онда тірек-жоспардың тиімді болмағаны. Ондайда тиімділік шарты бұзылатын тиісті ұяға сай векторды базиске енгізу арқылы жоспарды жақсартуға болады.

Сонымен, жоспардың тиімділігін тексеру үшін әуелі потенциалдар жүйесі құрылуы қажет екен.

Потенциалдар әдісін қарастырып, оның қолданылуын 7.3-кестесінде алынған тірек-жоспарына қолданылық.

Ол үшін кестеге потенциалдар мәндері жазылатын қосымша жол мен қосымша баған қосамыз (нәтижесінде 8.1-кестесін аламыз).

1. Потенциалдар жүйесін құру. Потенциалдар жүйесін құру үшін

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

шартын пайдаланамыз. Мұндағы C_{ij} – i -жол мен j -бағандағы бос емес ұядағы жүк бірлігінің құны.

Потенциалдар жүйесін ерекшеленбеген тіректік жоспар үшін ғана құра аламыз. Мұндай жоспар $m+n-1$ бос емес ұяны қамтығандықтан, ол үшін $m+n$ белгісізі бар сызықтық тәуелсіз $m+n-1$ теңдеулер жүйесін құрамыз. Теңдеулер саны белгісіздер санынан бірге кем болғандықтан, жүйе анықталмаған. Сондықтан бір белгісізге (әдетте u_i айнымалысына) нөл мәнін береміз. Бұдан соң қалған потенциалдар бірімәнді анықталады. Мәселен, u_i потенциалы белгілі дейік; онда (8.3) теңдігінен шығатыны:

$$V_j = C_{ij} - U_i ,$$

Егер v_i потенциалы белгілі болса, онда дәл сол теңдіктен алатынымыз

$$U_i = C_{ij} - V_j$$

Сонымен, белгісіз потенциалды анықтау үшін бос емес ұядағы C_{ij} шамасынан белгілі потенциалды азайтамыз.

Төмендегі 8.1-кестедегі тіректік жоспар – ерекшеленген, өйткені бос емес бір ұя жетпейді. Сондықтан, бос емес ұялардың көпшілігін қамтитын жолды (A_4 жолы) таңдаймыз да, $u_4 = 0$ деп ұйғарамыз. Осы A_4 жолында u_4 потенциалын тиісінше V_2 , V_3 , V_5 потенциалдарымен байланыстыратын үш бос емес ұя (A_1B_2 , A_4B_3 , A_4B_5) бар. Осы потенциалдарды анықтайық:

$$V_2 = C_{42} - U_4 = 8 - 0 = 8, V_3 = C_{43} - U_4 = 12 - 0 = 12, V_5 = C_{45} - U_4 = 13 - 0 = 13.$$

Осы u_4 потенциалының көмегімен тағы да белгісіз қайбір потенциалды анықтау мүмкін емес, сондықтан оны $\vee$ белгісімен таңбалаймыз. Енді потенциалдары анықталып қалған B_2 , B_3 , B_5 бағандарын кезекпен қарастырамыз. Мұндағы B_2 бағанында v_2 потенциалын u_2 мен u_1

потенциалдарымен байланыстыратын бос емес екі ұя (A_2B_2 мен A_4B_2) бар; U_4 потенциалы анықталып қойған. Енді A_2B_2 ұясына көшеміз де C_{22} көмегімен белгісіз потенциалды анықтаймыз: $U_2 = C_{22} - V_2 = 7 - 8 = -1$. Осы v_2 потенциалын $\vee$ белгісімен таңбалаймыз да B_3 бағанына көшеміз.

8.1-кесте

Жоспарлау матрицасы		Тұтынушылар					Қорлар
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Өндіріс үнілер	$u_i \backslash v_j$	$\vee$ $v_1 = 3$	$\vee$ $v_2 = 8$	$\vee$ $v_3 = 12$	$\vee$ $v_4 = 13$	$\vee$ $v_5 = 13$	
A_1	$\vee$ $u_1 = -12$	10	7	4	1 100	4	100
A_2	$\vee$ $u_2 = -1$	2 200	7 50	10 1	+6 6	11 1	250
A_3	$\vee$ $u_3 = -1$	8	5	3	2 0	+2 200	200
A_4	$\vee$ $u_4 = 0$	11	+8 150	12 100	16	- 13 50	300
Сұраныстар		200	200	100	100	250	650

Бұл бағанда белгісіз потенциалдармен v_3 байланысатын бос ұялар жоқ. Енді v_3 потенциалын $\vee$ таңбасымен белгілеп B_3 бағанына көшеміз. Онда бос емес v_5 потенциалын белгісіз u_3 потенциалымен байланыстыратын бір ұя (A_3B_5) бар. Сол потенциалды анықтаймыз: $U_3 = C_{32} - V_5 = 2 - 13 = -11$. Содан соң v_3 потенциалын $\vee$ таңбасымен белгілеп, бағандардағы белгісіз потенциалдар пайдаланылып қойғандықтан, жолдардың $\vee$ таңбасымен әлі белгіленбеген ұялардағы белгілі потенциалдарына көшеміз.

Бос емес A_2B_1 ұясындағы u_2 потенциалы белгісіз v_1 потенциалымен байланысқан. Осы потенциалды $V_1 = 2 - (-1) = 3$ табамыз да u_2 потенциалын $\vee$ таңбасымен белгілейміз.

Ал A_3 жолында u_3 потенциалын бағандардың белгісіз потенциалдарымен байланыстыратын бос емес ұялар жоқ.: U_3 потенциалын $\vee$ таңбасымен белгілейміз.

Енді бағандардың $\vee$ таңбасымен әлі белгіленбеген ұялардағы белгілі потенциалдарына көшеміз (бұл v_1 потенциалы). Бірақ B_1 бағанында v_1 потенциалын жолдардың белгісіз потенциалдарымен байланыстыратын бос емес ұялар жоқ.. Сондықтан v_1 потенциалын $\vee$ таңбасымен белгілейміз. Потенциалдар жүйесін құру тоқтатылды, u_1 мен v_4 потенциалдары

анықталмай қалды. бұл тіректік жоспар ерекшеленгендіктен болды (бос емес бір ұя жетпей қалды). Ерекшеленгендікті жою үшін *бос емес жалған* ұялар делінетін нөлдік тасымалдар енгізу арқылы бос емес ұялар санын $(m + N = 1)$ -ге жеткіземіз.

Енді u_1 мен v_4 потенциалдарын анықтау үшін потенциалдарының бірі анықталған A_1 жолының немесе B_4 бағанының бір бос ұясын *бос емес жалған* ұяға айналдырамыз. Есеп сызықтық функцияны минитмумдауға шығарылатындықтан ең кіші құн тұрған ұяны *бос емес жалған* ұяға айналдырған жөн. A_1 жолының немесе B_4 бағанының бос емес ұяларындағы құндарды қарастыра отырып A_3B_4 ұясына сай келетін кіші құн ($\min C_{ij} = 2$) мәнін таңдаймыз да, ол ұяға нөл жазып бос емес деп есептейміз. Енді A_3B_4 ұясы v_4 потенциалын u_3 потенциалымен байланыстырады: $v_4 = C_{34} - u_3 = 2 - (-11) = 14$. Одан соң мына потенциалға көшеміз $u_1 = C_{14} - v_4 = 1 - 13 = -12$.

Потенциалдар жүйесі құрылып бітті. Енді потенциалдар таңбаланған $\vee$ белгісін өшіру керек. Құрылған жүйенің дұрыстығын тексерелік. Ол жолдардың бос емес ұяларын қарастырып, әрқайсысы үшін потенциалдар айырмасын табамыз. Егер барлық бос емес ұялар үшін (8.3) теңдігі орындалса, онда жүйе дұрыс құрылған. Кері жағдайда жүйені қайта құру керек, немесе (8.3) орындалатындай өзгертулер жасау қажет.

2. *Бос ұялар үшін тиімділік шартының орындалуын тексеру.*

Жолдарды қарастырып әр бос ұя үшін (7.5) шартын тексереміз, яғни қиылыста тұрған бос ұялардағы потенциалдарды қосамыз да, қосындыны сол ұялардағы бағалармен салыстырамыз. Егер барлық бос ұялар үшін $u_i + v_j \leq C_{ij}$ болса, онда жоспар тиімді. Егер кері жағдайға ұшырасақ, онда жоспар тиімсіз. Онда тиімділік шарты орындалмайтын әр ұя үшін $(u_i + v_j) - C_{ij} > 0$ айырмасын тауып, оның мәнін осы ұяның сол жақ төменгі бұрышына жазамыз.

8.1-кестедегі бос ұялар үшін біртіндеп мыналарды аламыз:

A_1 жолы үшін: $-9 < 10, -4 < 7, 0 < 4, -8 < 4$; A_2 жолындағы A_2B_3 ұясы үшін: $11 > 10$ немесе $11 - 10 = 1$; тиімділік шарты бұзылды, ендеше осы ұяға бірге тең айырманы жазамыз; A_2B_4 ұясы үшін алатынымыз $12 > 6, 12 - 6 = 6$, шарт тағы да бұзылды, алтыға тең айырма осы ұяға жазылады; A_2B_5 ұясы үшін алатынымыз $12 > 11, 12 - 11 = 1$, бірге тең айырма осы ұяға жазылады. A_3 жолы үшін: $-8 < 8, -3 < 5, 1 < 3$; A_4 жолы үшін: $3 < 11, 13 < 16$.

Сонымен тиімділік шарты бұзылған үш ұя бар, айырмалар тиісінше 1, 6, 1.

3. *Тасымал жіберілетін ұяны таңдау.* Сызықтық программалаудың

көлік есебі сызықтық функцияны минимумдауға шығарылатындықтан, оны шығару алгоритмі минимумға есеп шығарудың симплекс әдісіндегідей принциптерге бағынуы керек.

Егер бос емес ұяларды базис құрайтын векторлармен, ал бос емес еместерді қалған векторлармен теңдестірсек, онда сызықтық программалаудың жалпы есебінде базиске $\max \theta_0 (z_j - c_j)$ мәнін сай вектор енгізіледі. Көлік есебінде z_j

мәні $(U_i + V_j)$ потенциалдар қосындысымен алмастырылғандықтан тасымалға $\max[(U_i + V_j) - c_{ij}]$ мәніне сай ұя бірінші толтырылады.

Сонымен, қарастырылған мысалда $\max(1;6;1)=6$, ендеше A_2B_4 ұясын толтырамыз. Ол үшін әуелі оған қанша бірлік жүк бөлінетіндігін анықтау қажет.

4. Цикл құру және жүк үлестірімінің шамасын анықтау. Үлестірілуге

тиісті жүк бірлігінің мөлшерін анықтау үшін толтырылатын бос ұяны «+» таңбасымен белгілейміз. Бұл ұя бос емес ұялар санатына қосылатындығын білдіреді. Кестедегі бос емес ұялар саны $m + n$ болғандықтан, «+» таңбасымен белгіленген төбелерінен басқа төбелері бос емес ұялардан табылатын жалғыз цикл пайда болады. Қозғалысты «+» таңбасымен белгіленген ұялардан бастап кезекпен «-» және «+» таңбаларын қоя отырып, осы циклді іздейміз. Одан соң $\theta_0 = \min x_{ij}$ шамасын табамыз, мұндағы x_{ij} – циклдің «-» таңбасымен белгіленген төбелеріндегі тасымалданатын жүктер бірлігінің шамасы. Бұл θ_0 шамасы табылған цикл бойынша жүктің қанша бірлігін үлестіруге болтындығын көрсетеді. Цикл бойымен қозғала отырып θ_0 шамасын «+» таңбасымен белгіленген бос ұяға жазамыз. Осы шаманы «-» таңбасымен белгіленген ұялардағы тасымал көлемінен алып тастаймыз да, «+» таңбасымен белгіленген ұялардағы тасымал көлеміне қосамыз. Егер θ_0 шамасына бірнеше минимум тасымал сай келсе, ондаазайту кезінде жаңа алынатын тіректік жоспарда бос емес ұялар саны $m + n - 1$ болатындай етіп сәйкес ұяларға нөлдік тасымалдар қалдырамыз.

Қарастырылған мысалда A_2B_4 ұясын «+» таңбасымен белгілеп, 8.2-кестеде келтірілген циклді табамыз. Сонда $\theta_0 = \min(50,50,0) = 0$, яғни нөлдік тасымалды A_2B_4 ұясына орналастыру қажет, қалған сандар нөлді қосып немесе алғаннан өзгермейді.

θ_0 шамасын қайта үлестіру нәтижесінде тағы да тиімділікке тексерілетін жаңа ерекшеленбеген жоспар алынды (8.3-кесте). Жаңа тіректік жоспарды тиімділікке тексеру үшін қайтадан потенциалдар жүйесін құрып, әр бос ұя үшін тиімділік критерийінің орындалуын тексере аламыз.

Егер алынған жоспар тиімсіз болса, онда 4-бапта келтірілген есептеулерді жасау қажет. Процесс барлық бос ұялар (8.3) шартын қанағаттандырғанша жалғаса береді.

5. қайта үлестіру нәтижесінде θ_0 алынған жаңа тірек-жоспар қайтадан тиімділікке тексеріледі(8.2-кестесі).

Жаңа тірек-жоспарды тиімділікке тексеру үшін қайтадан потенциалдар жүйесі құрылады да әрбір бос ұялар үшін тиімділік шарты тексеріледі.

8.2-кесте

Жоспарлау матрицасы		Тұтынушылар					Қорлар
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Өндіруші	v_j	3	8	12	13	13	
u_i							
A_1	+	10	7	4	1	4	100
	-6			2	100 -	3	
A_2	-11	2	7	10	+ 6	11	
		200	50	1	0	1	250
A_3	-11	8	5	3	2	2	
						200	200
A_4	0	11	+ 8	12	16	13	
			150	100		50	300
Сұраныстар		200	200	100	100	250	850

6. *Потенциалдар жүйесін өзгерту.* Жаңа 8.2-кестеде келтірілген тіректік жоспарда әзірше ескі потенциалдар көрсетілген. Бұрын бос болған A_2B_4 ұясы енді бос емеске айналды. Бос емес ұя үшін $u_i + v_j = C_{ij}$ шарты орындалуы қажет. Шындығында да: $u_2 + v_4 = -1 + 13 = 12 \neq 6$. Демек, u_2 , және v_4 шамаларының бірін алтыға азайту керек. Мұндайда азайтқан потенциал қалған потенциалдарды ең аз өзгеріске ұшырататындай болуы керек екендігі түсінікті. Сонымен, егер v_4 потенциалын өзгертіп, u_2 потенциалын өзгеріссіз қалдырсақ, онда тек қана u_1 потенциалын ғана өзгеріске ұшырата аламыз; кері жағдайда қалған потенциалдардың барлығы өзгеріске ұшырайды.

Енді u_2 потенциалын «!» таңбасымен ал v_4 потенциалын «-» таңбасымен белгілейміз. A_1B_4 ұясы бос емес болғандықтан v_4 потенциалының өзгеруі u_1 потенциалын өзгертуді қажет етеді оны «+» таңбасымен белгілейміз. Осымен өзгерістер тізбегі үзіледі.

Сонымен «-» таңбасымен белгіленген потенциалдардың мәндері азаяды да, «+» таңбасымен белгіленгендер ұлғаяды. Нәтижесінде барлық бос емес ұялар үшін 8.3 шарты орындалады. v_4 потенциалының мәні 6 бірл. азайғандықтан, B_4 бағанында тиімділік шартын қанағаттандырмайтын бос ұялар пайда бола алмайды. Егер ондай ұялар бар болса, онда олар жойылып кетеді, өйткені осы шарт орындалмайтын ұялар үшін алтыға тең айырма максимум болады.

Тиімділік шартын қанағаттандырмайтын бос ұялар потенциалы артқан қатарда (бағанда) ғана пайда бола алады. u_1 потенциалы 6 бірл. артты, сондықтан A_1 қатарының бос ұяларын тиімділікке тексеру керек: $-3 < 10$; $2 < 7$; $6 > 4$; $7 > 4$; A_1B_3 және A_1B_5 ұялары бұл шартты қанағаттандырмайды; бұлар үшін $u_i + v_j - C_{ij}$ айырмаларының шамаларын тауып, оларды сәйкес ұялардың сол жақ төменгі бұрышына жазамыз. $\max(2; 3; 1; 1) = 3$ екендігін анықтаймыз. A_1B_5 ұясы жүктелінуге тиісті болғандықтан оны «+» таңбасымен белгілейміз де 7.7-кестеде үзік сызықпен көрсетілген циклді тағайындаймыз.

Цикл төбелерін «-» және «+» таңбаларымен кезекпен белгілейміз және табамыз: $\theta_0 = \min(50, 50, 100)$. Цикл бойынша 50 бірл. жүкті A_1B_5 ұясына бөлеміз

және 8.3-кестеде келтірілген тіректік жоспарды аламыз. Біз $\theta_0 = 50$ мәніне циклдың «-» таңбасымен белгіленген екі ұясы ие болатындықтан, алынған тіректік жоспарда A_2B_2 ұясында нөлдік тасымал қалдырылған.

8.3-кесте

Жоспарлау матрицасы		Тұтынушылар					Қорлар
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Өндіруші	$v_j \backslash u_i$	3	8	12	7	13	
A_1	- 61	- 10	7	4	1	4	100
A_2	-1	2	7	10	6	11	250
A_3	+ -11 -8	8	5	3	2	2	200
A_4	0	11	8	12	16	13	300
Сұраныстар		200	200	100	100	250	850

Соңғы итерация нәтижесінде жоспар 150 бірлікке жақсарды. Алынған тіректік жоспарда потенциалдар жүйесін өзгертіп, оны тиімділікке тексереміз. Тиімділік шартын айырмасы екіге және бірге тең екі ұя қанағаттандырмайды, сондықтан жүкті A_1B_3 ұясына бөлеміз. Оны және «+» таңбасымен белгілеп, 8.3-кестеде пунктир сызықпен көрсетілген үлестіру циклын құрамыз. Циклдар әртүрлі конфигурацияға ие болуы, өзара қиылысуы да мүмкін (8.3-кесте).

Цикл төбелерін «-» және «+» таңбаларымен белгілеп, үлестіру шамасын табамыз: $\theta_0 = \min(50, 0, 100) = 0$. Нөлдік тасымалды A_1B_3 ұясына орналстырып, жаңа тіректік жоспарды аламыз және потенциалдар жүйесіне өзгерістер енгіземіз. Құрылған потенциалдар жүйесі 8.3-кестеде келтірілген жоспардың тиімді екендігі туралы қорытынды жасауға мүмкіндік береді. Оның құны 4150 бірлікке тең.

Көлік есебінің ашық моделі. Қорлар қосындысы мен сұраныстар қосындысы беттесетін, яғни $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ шартын ұанағаттандыратын көлік есебі жабық модел деп аталады, кері жағдайда ашық модел аламыз. ашық модел екі түрлі жағдайда кездеседі:

а) қорлар қосындысы сұраныстар қосындысынан артық:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j ;$$

б) сұраныстар қосындысы қорлар қосындысынан артық

$$\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i .$$

Екі жағдайда да сызықтық функция бірдей болғанымен, шектеулер түрі әртүрлі.

Ашық модель жабық моделге келтіру арқылы шешіледі.

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, & i = 1, \overline{m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = 1, \overline{n} \end{cases} \quad (\text{а жағдайы})$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, & i = 1, \overline{m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = 1, \overline{n} \end{cases} \quad (\text{б жағдайы})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

(а) жағдайында сұранысы болатын B_{n+1} жалған тұтынушы енгізіледі де,

б) жағдайында қоры $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ болатын жалған A_{m+1} өндірушісі енгізіледі.

Жалған тұтынушыға жүк бірлігін жеткізу құны, сол сияқты жалған өндірушіден жүк бірлігін жеткізу құны нөлге тең деп саналады, өйткені шын мәнінде ешқандай тасымал жасалмайды.

Осындай түрлендіруден соң, жабық модель алынады да әдеттегі әдіспен шешіледі. Қандай да бір көлік есебін шешуден бұрын, оның қай моделге жататындығын байқап алу қажет.

8-дәрісті нысықтау сұрақтары

1. Потенциалдар әдісі.
2. Ерекшеленбеген тірек-жоспар.
3. Потенциалдар жүйесін құру
4. Бос емес ұялардағы тиімділік шартын тексеру.
5. Жүк жөнелтілетін ұяны таңдау.
6. Цикл құру жөнелтілетін жүк көлемін үлестіруді анықтау.
7. Потенциалдар жүйесін өзгерту

8- семинар сабақ. Көлік есебін шешуде потенциалдар әдісін қолдану

№8 аудиториялық жұмыс тапсырмалары

8.1. Шарттары кесте арқылы берілген көлік есебін потенциалдар әдісімен шығарыңыз:

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1	2	150
A_2	3	4	5	1	100
A_3	3	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

Шешуі. Әуелі бұрын баяндалған әдістердің бірін қолданып, тірек жоспар құрамыз. Мәселен минимум құн әдісін қолдандық делік. Онда $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ қадамнан соң алатын тірек жоспарымыз:

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 80	3	1 70	2	0 [150]
A_2	3 60	4	5	1 140	0 [100]
A_3	3	6 100	3	4	0 [100]
Тұтынушылар	0 [140]	0 [100]	0 [70]	0 [40]	350

Тірек жоспары:

$$X = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 70 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Бұл кездегі тасымал құны:

$$F = 2 \cdot 80 + 1 \cdot 70 + 3 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 100 = 1050.$$

Алынған тірек жоспарын тиімділікке тексереміз. Ол үшін жөнелту пункттері мен қабылдау пункттерінің потенциалдарын табамыз. Ұяларды толтыру үшін 7 белгісізі бар 6 теңдеудің жүйесін құрамыз:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 2$$

$$\beta_3 - \alpha_1 = 1$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 3$$

$$\beta_4 - \alpha_2 = 1$$

$$\beta_1 - \alpha_3 = 3$$

$$\beta_2 - \alpha_3 = 6$$

Енді $\alpha_1 = 0$ деп алып, табатынымыз:

$$\beta_2 = 2, \beta_3 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -3, \beta_4 = 0, \beta_5 = 5.$$

Әрбір бос ұя үшін $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$ сандарын есептейміз.

$$\alpha_{12} = 2, \alpha_{14} = 2, \alpha_{22} = 2, \alpha_{23} = -3, \alpha_{33} = -1, \alpha_{34} = -3.$$

Алынған сандарды қоршап, кестенің тиісті ұяларына жазамыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 80	3 2	1 70	2 -2	150
A_2	3 60	4 2	5 -3	1 140	100
A_3	3	6 100	3 -3	4 -1	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

α_{ij} сандарының ішінде оң таңбалылары бар, демек бұл жоспар тиімді емес. Ең үлкен оң сан A_1 жолы мен B_2 бағанының қиылысында тұр. Осы бос ұя үшін есептеу циклін құрамыз. Ол үшін бұл ұяға «+» таңбасын қоямыз, ал қалған ұялар кезектесіп «+» және «-» таңбаларына ие болады.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 - 80	3 + 2	1 70	2 -2	150
A_2	3 60	4 2	5 -3	1 140	100
A_3	3 +	6 - 100	3 -3	4 -1	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

Ұялардағы сандардың миустарының ең кішісі 80 ге тең. Осы сан тұрған ұя бос болуы қажет. Жаңа кестедегі басқа сандар былай алынады. Плюс таңбалы ұяларға 80 саны қосылады д, минус таңбалы ұялардан 80 саны шегеріледі. Сондағы шығатыны:

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3 80	1 70	2	150
A_2	3 60	4	5	1 40	100
A_3	3 80	6 20	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

Тірек жоспары:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 80 & 70 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 40 \\ 80 & 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Бұл кездегі тасымал құны:

$$F = 3 \cdot 80 + 1 \cdot 70 + 3 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 3 \cdot 80 + 6 \cdot 20 = 890.$$

Жоспарды тиімділікке тексереміз. Ол үшін жөнелту пункттері мен қабылдау пункттерінің потенциалдарын табамыз. Ұяларды толтыру үшін 7 белгісізі бар 6 теңдеудің жүйесін құрамыз: Ол үшін жөнелту пункттері мен қабылдау пункттерінің потенциалдарын табамыз. Ұяларды толтыру үшін 7 белгісізі бар 6 теңдеудің жүйесін құрамыз: $\beta_2 - \alpha_1 = 3$

$$\beta_3 - \alpha_1 = 1$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 3$$

$$\beta_4 - \alpha_2 = 1$$

$$\beta_1 - \alpha_3 = 3$$

$$\beta_2 - \alpha_3 = 6$$

Енді $\alpha_1 = 0$ деп алып, табатынымыз:

$$\beta_2 = 3, \beta_3 = 1, \alpha_3 = -3, \beta_3 = 0, \alpha_2 = -3, \beta_4 = -2.$$

Әрбір бос ұя үшін $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$ сандарын есептейміз.

$$\alpha_{11} = -2, \alpha_{14} = -4, \alpha_{22} = 2, \alpha_{23} = 1, \alpha_{23} = -1, \alpha_{33} = 1, \alpha_{34} = -3.$$

Алынған сандарды қоршап, кестенің тиісті ұяларына жазамыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 -2	3 80	1 70	2 -4	150
A_2	3 60	4 2	5 -1	1 40	100
A_3	3 80	6 20	3 1	4 -3	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

α_{ij} сандарының ішінде оң таңбалылары бар, демек бұл жоспар тиімді емес.

Ең үлкен 2 оң саны A_2 жолы мен B_2 бағанының қиылысында тұр. Осы бос ұя үшін есептеу циклін құрамыз. Ол үшін бұл ұяға «+» таңбасын қоямыз, ал қалған ұялар кезектесіп «+» және «-» таңбаларына ие болады.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 -2	3 80	1 70	2 -4	150
A_2	3 60	4 2 +	5 -1	1 40	100
A_3	3 80	6 20 -	3 1	4 -3	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

Ұялардағы сандардың минустарының ең кішісі 20 ға тең. Осы сан тұрған ұя бос болуы қажет. Жаңа кестедегі басқа сандар былай алынады. Плюс таңбалы ұяларға 20 саны қосылады, минус таңбалы ұялардан 20 саны шегеріледі. Сондағы шығатыны:

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3 80	1 70	2	150
A_2	3 40	4 20	5	1 40	100
A_3	3 100	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

Тірек жоспары:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 80 & 70 & 0 \\ 40 & 20 & 0 & 40 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Бұл кездегі тасымал құны:

$$F = 3 \cdot 80 + 1 \cdot 70 + 3 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 3 \cdot 100 = 850.$$

Жоспарды тиімділікке тексереміз. Ол үшін жөнелту пункттері мен қабылдау пункттерінің потенциалдарын табамыз. Ұяларды толтыру үшін 7 белгісізі бар 6 теңдеудің жүйесін құрамыз: Ол үшін жөнелту пункттері мен қабылдау пункттерінің потенциалдарын табамыз. Ұяларды толтыру үшін 7 белгісізі бар 6 теңдеудің жүйесін құрамыз:

$$\beta_2 - \alpha_1 = 3$$

$$\beta_3 - \alpha_1 = 1$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 3$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = 4$$

$$\beta_4 - \alpha_2 = 1$$

$$\beta_1 - \alpha_3 = 3$$

Енді $\alpha_1 = 0$ деп алып, табатынымыз:

$$\beta_2 = 3, \beta_3 = 1, \alpha_2 = -1, \beta_1 = 2, \beta_4 = 0, \alpha_3 = -1.$$

Әрбір бос ұя үшін $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$ сандарын есептейміз.

$$\alpha_{11} = 0, \alpha_{14} = -2, \alpha_{23} = -3, \alpha_{33} = -1, \alpha_{23} = -1, \alpha_{33} = 1, \alpha_{34} = -3.$$

α_{ij} сандарының ішінде оң таңбалылары жоқ. Демек табылған жоспар тиімді.

Жауабы. Тиімді жоспар

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 80 & 70 & 0 \\ 40 & 20 & 0 & 40 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Бұл кездегі тасымал құны:

$$F = 3 \cdot 80 + 1 \cdot 70 + 3 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 3 \cdot 100 = 850.$$

8.2. Мәліметтері кестеде берілген көлік есебін потенциалдар әдісімен шығарыңыз.

Тұтынушылар Жеткізушілер	B_1	B_2	B_3	B_4	Тауар қоры
A_1	7	20	3	15	225
A_2	3	14	10	20	250
A_3	15	25	11	19	125
A_4	11	12	18	6	100
Тауар сатып алуға тапсырыс	120	150	110	235	

8.3. Мәліметтері кестеде берілген көлік есебін потенциалдар әдісімен шығарыңыз.

Тұтынушылар		B_1	B_2	B_3	B_4
Өндірушілер		220	150	250	180
A_1	300	4	5	170	6
A_2	250	7	2	1	5
A_3	200	6	1	4	2

Шешуі. Жүктің $a = 300 + 250 + 200 = 750$ қосынды қоры $b = 220 + 150 + 250 + 180 = 750$ қосынды сұраныстан кем болғандықтан, бұл есеп ашық есеп қатарына жатады. Бұл есепті тасымалдау тарифі нөлге тең, жүк қоры $a' = b - a = 50$ жалған A'_4 өндірушісін қосу арқылы жабық есепке келтіреміз.

Ұяларды $(4,2) \rightarrow (3,2) \rightarrow (2,3) \rightarrow (3,4) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,4)$ тәртібімен толтыра отырып, минимум құн әдісімен алғашқы тірек жоспарын құрамыз, да, келесі кестені аламыз:

Тұтынушылар \ Өндірушілер		B_1	B_2	B_3	B_4
		220	150	250	180
A_1	300	4 220	5	3	6 80
A_2	250	7	2	1 250	5
A_3	200	6	1 100	4	2 100
A'_4	50	0	0 50	0	0

Алынған жоспарды талдайық. Бұл есепте $m+n-1=4+4-1=7$, ал толтырылған ұялар саны дәл 6 екенін көреміз. Ендеше толтырылған жоспар ациклді болуы үшін тағы бір ұяға нөл санын жазамыз. Оған мысалы, (4.3) ұясын таңдалық. Базистік ұялардағы потенциалдарды есептейміз

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 6, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2, \\ u_4 + v_2 = 0, \\ u_4 + v_3 = 0, \\ u_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = -4, \\ u_3 = -4, \\ u_4 = -5, \\ v_1 = 4, \\ v_2 = 5, \\ v_3 = 5, \\ v_4 = 6, \end{cases}$$

Содан соң бос ұялардағы мына айырманы есептейміз:

$$\Delta c_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

Нәтижесінде төмендегі кесте алынады:

Тұтынушылар \ Өндірушілер		B_1	B_2	B_3	B_4	
		220	150	250	180	u
A_1	300	4 220	5 0	3 -2	6 80	0
A_2	250	7	2	1 250	5	-4
A_3	200	6	1 100	4	2 100	-4
A'_4	50	0	0 50	0	0	-5
	v	4	5	5	6	

Δc_{ij} сандарының арасында терістері бар болғандықтан, белгіленген цикл бойынша жүктерді $\min(80,100,0) = 0$ шамасына қайта үлестіреміз. Сонда (1,3) ұясы (4,3) ұясының орнына базистік болады да, келесі кесте алынады:

Тұтынушылар Өндірушілер		B_1	B_2	B_3	B_4	
		220	150	250	180	u
A_1	300	4 220 0	5	3 0	6 80	0
A_2	250	7 5	2 -1	1 250	5 1	-2
A_3	200	6 6	1 100	4 + 5	2 100 -	-4
A'_4	50	0 1	0 50 -	0 2	0 -1 +	-5
	v	4	5	5	6	

Бұл жоспар да тиімді емес, өйткені $\Delta c_{22} = \Delta c_{22} = -1$. Бұл жоспарды кестеде көрсетілген цикл бойынша $\Delta x = \min(50,100) = 50$ шамасын а

қайта үлестіру арқылы жақсартамыз. Бұл кестедегі қайта үлестіру баспалдақ цикл арқылы жүзеге асады.

Тұтынушылар Өндірушілер		B_1	B_2	B_3	B_4	
		220	150	250	180	u
A_1	300	4 220 0	5	3 0 +	6 80 -	0
A_2	250	7 5	2 -1 +	1 250 1	5 1	-2
A_3	200	6 6	1 150 -	4 +	2 50	-4
A'_4	50	0 2	0 -	0 1	0 3 50	-6
	v	4	5	5	6	

Соңғы кестедегі $a'_4 = 50$ жалған жүгі B_4 тұтынушысына 50 бірлік жүк жетпей қалғанын көрсетеді. Сондағы тиімді жоспардағы қосынды тасымалдау құны:

$$z_{\min} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} = 4 \cdot 220 + 3 \cdot 80 + 2 \cdot 80 + 1 \cdot 170 + 1 \cdot 70 + 2 \cdot 130 = 1780.$$

Мұндағы барлық айырмалар оң. Демек, жоспар тиімді. Сонымен

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 220 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 80 & 170 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 130 \end{pmatrix}$$

8.4. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті потенциалдар әдісімен шығарыңыз.

Тұтынушы Өндірушілер		B_1	B_2	B_3
		20	25	30
A_1	24	6	4	2
A_2	28	3	5	4
A_3	23	3	6	3

8.5. Төрт өндіруші A_i ($i = \overline{1,4}$) тиісінше 100, 400, 200 және 100 бірлік көлеміндегі өнімдерін сұраныстары 150, 100, 150, 200 және 250 бірлік болатын бес B_j ($j = \overline{1,5}$) тұтынушыға жеткізуі керек. Жүк бірлігін тасымалдау құны төмендегі кестеде берілген.

B_j A_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	6	8	12	16
A_2	16	10	8	6	15
A_3	4	1	9	11	13
A_4	3	2	7	7	15

8 үй жұмысының тапсырмалары

8.6. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті потенциалдар әдісімен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1	2	150
A_2	3	4	5	1	100
A_3	3	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

8.7. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті потенциалдар әдісімен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1	2	250
A_2	3	4	5	1	100
A_3	3	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

8.8. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті потенциалдар әдісімен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	3	1	2	150
A_2	3	4	4	1	200
A_3	3	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

8.9. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті потенциалдар әдісімен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	3	1	2	150
A_2	3	4	6	1	250
A_3	3	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

8.10. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті потенциалдар әдісімен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	1	2	150
A_2	3	4	8	1	250
A_3	1	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

9- дәріс. Көлік есебін шешудің дельта-әдісі

Сызықтық программалау арқылы көлік есебін шешкенде тасымалдау жоспарын құру кезінде есепті шешуге жұмсалатын уақыт аса маңызды. Екі дүркін басымдылық әдісі мен потенциалдар әдісін қолданып, 10-15 өндірушісі мен 15-20 тұтынушысы бар көлік есебін шығарғанда 4-6 сағат үздіксіз есептеу жасау қажет. Өйткені қолданылатын алғашқы тірек жоспарын құру әдістері тиімділіктен алыс шешімдер алуға мүмкіндік береді. Осыған орай, практикада дельта-әдісін потенциалдар әдісімен бірге қолдану тиімді жоспарды табуды 3-4 есе жылдамдататынын байқалды. Бұл әдісті қолданғанда тиімді жоспар міндетті түрде табылады. Енді дельта-әдіс алгоритмін төмендегі қолдану мысалына тоқталалық.

9.1-кесте

Жоспар лау матриц асы	Тұтынушылар						a_i	Δa_i	$\min \overline{\Delta c_{ij}}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6			
Өндіру шілер		V	V						
A_1	10 200 0	19 8	17 10	18 1 1	16 1	21 5	450	+ 250	8 3
A_2	13 3	14 3	11 4	+ 17 100 0	18 3	- 19 3	400	+ 300	3
A_3	15 5	- 11 300 0	7 400 0	19 2	19 4	22 6	150	- 550	
A_4	14 4 3	+ 13 2 1	12 5 4	18 1 150 0	21 6 5	23 7 6	150	0	1
A_5	21 11	23 12	10 3	20 3	15 150 0	16 100 0	250	0	3
b_j	200	300	400	250	150	100	140 0	-	-

1. Әрбір бағандағы ең кіші құнды таңдап, оны бағанның барлық құндарынан алып тастап, ΔC_{ij} өсімшелерінің кестесін $\overline{\Delta C_{ij}}$ кестесіне түрлендіреміз. ΔC_{ij} мәнін тиісті C_{ij} мәнінің астына жазамыз.

2. Әрбір бағандағы ең кіші құнды таңдап, оны бағанның барлық құндарынан алып тастап, ΔC_{ij} өсімшелерінің кестесін C_{ij} кестесіне түрлендіреміз. $\overline{\Delta C_{ij}}$ мәнін тиісті ΔC_{ij} мәнінің астына жазамыз. Егер қандай да бір жолда бірінші түрлендіруден кейінгі нөлдік шешім жазылып қойған болса, онда бұл жолдағы өсімшелерде өзгеріссіз қалдырамыз да, нөлдік шешімді қамтымайтын жолдарды түрлендіреміз.

Кестедегі $\min \Delta C_{ij} = 1$ орындалатын A_4 жолының өсімшелері түрлендіруге тиісті болады. Кестеде пайда болған нөлдер таңдалған бағандардағы ең кіші құндарға қатысты ең кіші құндардың өсімшесін білдіреді.

3. Бір нөлдік өсімшені қамтитын бағандарды және оны қамтитын

ұяларды қарастырып, өндірушілер қорының шамасына көңіл аудармай, тұтынушысын толтырайық. Одан соң екі нөлдік өсімшелерді қамтитын бағандар мен оны қамтитын ұяларды қарастырып, алдыңғы бекітілген өндірушілер мен олардың қорларын ескере отырып толтырамыз. Дәл осындай ретте үдеріс, барлық сұраныстар көлемі өндірушілерге бекітілгенше жалғаса береді.

Кестеде B_1, B_3, B_3, B_5 және B_6 бағандарда нөлдік өсімшелі бір-бір ұя бар. Осы ұяларға тиісті тұтынушылардың сұраныстарын толтырамыз. B_4 бағаны A_2B_4 және A_4B_4 ұяларында тұрған екі нөлдік өсімше бар. A_4 өндірушісіне 150 бірлік сұраныс, ал A_2 өндірушісіне 400 бірлік сұраныс бекітіледі. Барлығы 250 бірлік болғандықтан, A_4 өндірушісінің қалауын толық қанағаттандырамыз да, 100 бірлікті A_2 өндірушісіне бекітеміз.

Нәтижесінде құндардың нөлдік өсімшесі бойынша сұраныстарды өндірушілерге бекітудің алғашқы қадамы жасалды.

4. Жолдар үшін есептейтініміз: $\Delta a_i = a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}, i = 1, \dots, m$. Егер барлық

$\Delta a_i = 0$ болса, онда қадам жасау тоқтатылады. Барлық жүк құнның минимум өсімшелерімен тасылғандықтан., бұл шешім тиімді шешім.

Жалпы жағдайда алатынымыз: а) бір жолдар үшін $\Delta a_i = 0$ (мұндай нөлдік жолдар делінеді); б) басқалар үшін $\Delta a_i < 0$ (мұндай жолдар асқын жолдар деп аталады да, «-» таңбасымен белгіленеді); в) үшіншілері үшін $\Delta a_i > 0$ (мұндай жолдар жеткіліксіз жолдар делінеді де, «+» арқылы белгіленеді).

Біз қарастырған мысалда $\Delta a_1 = 450 - 200 = 250$; $\Delta a_2 = 400 - 100 = 300$; $\Delta a_3 = 150 - 700 = -550$; $\Delta a_4 = 150 - 150 = 0$; $\Delta a_5 = 250 - 250 = 0$. Яғни A_1 мен A_2 - жеткіліксіз, A_3 - асқын, ал A_4 пен A_5 - нөлдік жолдар. Жабық моделде асқын жолдардың Δa_i қосындысы жеткіліксіз жолдардың Δa_i қосындысына тең болу қажет. $\Delta a_1, \Delta a_2$, және Δa_3 нөлге тең болмағандықтан, бірінші бекітулер жоспар болмайды. Жоспар алу үшін сұраныстың артық 550 бірлігін A_1 мен A_2 өндірушілеріне тиісінше 250 және 300 көлемінде бекітіп, қайта бекітілген сұраныстардың минимум құнын алу керек. Ол үшін келесі амалдар жасалады.

5. Асқын жолдағы толық ұялардағы $\vee$ белгісімен таңбалаймыз. 9.1-

кестедегі бұл бағандар B_2 мен B_3 .

6. Әрбір жеткіліксіз және нөлдік жолдар үшін таңбаланған бағандарда тұрған $\Delta \bar{C}_{ij}$ шамаларын салыстырып, ең кішісін кестенің соңғы графасына

жазамыз. Сонда: $\min(8,10)=8$ (жеткіліксіз A_1 жолы үшін); $\min(3,4)=3$ (жеткіліксіз A_2 жолы үшін); $\min(12,3)=3$ (нөлдік A_5 жолы үшін). Бұл мәндер A_3 өндірушісінен тікелей A_1, A_2, A_4, A_5 өндірушілеріне сұраныс бірлігін қайта бекіткендегі бұл қадамдағы күн өсімшесі қандай болатынын көрсетеді.

7. Кестенің соңғы графасындағы $\overline{\Delta C_{ij}}$ шамаларын салыстырып, ең кішісін нөлдік жолдардағы $\overline{\Delta C_{i_0j}}$ шамасымен салыстырамыз. Мұндайда екі жағдай кездеседі: а) әрбір нөлдік жолда $\min \overline{\Delta C_{ij}} \leq \overline{\Delta C_{i_0j}}$; б) қайбір нөлдік жолда $\min \overline{\Delta C_{ij}} > \overline{\Delta C_{i_0j}}$.

Егер (а) шарты орындалса, онда таңбаланған бағандағы $\min \overline{\Delta C_{ij}}$ мәніне сай келетін ұяда асқын жолдан тікелей қайта бекіту жасалады. Қайта белгілеу шамасы мынаған тең: $\min(x_{ij}; |\Delta a_{i_0}|)$, мұндағы x_{ij} - асқын жолдағы таңбаланған бағанда тұрған тасымал шамасы; Δa_{i_0} - асқын және жеткіліксіз жолдардағы айырым шамасы.

8. Егер қайбір нөлдік жол үшін (б) шарты орындалса, онда осы нөлдік жол арқылы асқын жолдан жеткіліксіз жолға баратын тізбек арқылы қайта бекітуді тексереміз. Таңбаланған бағандағы нөлдік жолда тізбек құру үшін $\overline{\Delta C_{ij}} \leq \min \overline{\Delta C_{i_0j}}$ орындалатын ұяны табамыз да, оны «+» таңбасымен белгілейміз. Дәл осы бағандағы асқын жолда тұрған толық ұяны табамыз да, оны «-» таңбасымен белгілеп тізбектің басы ретінде аламыз. Құрылған тізбекпен «-» тен «+» ке қарай қозғалып, нөлдік жолға тап боламыз. Одан әрі баған бойымен жеткіліксіз жол ұясына ауысып, оны «+» таңбасымен белгілейміз. Тізбек құрылды.

9. Егер матрицада нөлдік онда қайта бекіту тізбегі бірнеше нөлдік нүктелер арқылы өтесе, олардың саны едәуір көбейеді. Сондықтан келесі ережеге сүйенген дұрыс. Бір нөлдік жолдан екіншісіне өткенде алынған өсімшелердің қосындысын анықтаймыз да, осы жолдағы таңбаланған бағандардағы минимум өсімшемен салыстырамыз. Егер алынған қосынды бұл минимумнан асып кетсе, онда осы жол бойымен тізбектің қарастырылуы тоқталады. Сол сияқты, жеткіліксіз жолға көшуде алынған өсімше қосындысы басқа нөлдік жолдардағыдан кем болса да осы жол бойымен тізбектің қарастырылуы тоқталады.

10. Әрбір тізбек үшін «-» таңбалы ұялардағы өсімшелердің алгебралық қосындысы теріс, ал «+» таңбалардың оң деп санап, $\sum_i \sum_j \overline{C_{ij}}$ қосындысын құрастырамыз.

Алынған қосындыны $\min \overline{\Delta C_{ij}}$ шамасымен салыстырамыз: а) егер құрылған барлық тізбек үшін $\sum_i \sum_j \overline{C_{ij}} \geq \min \overline{\Delta C_{ij}}$ болса, онда оларды лақтырып тастап,

тікелей қайта бекітуге көшеміз; б) егер $\sum_i \sum_j \overline{C_{ij}} < \min \Delta \overline{C_{ij}}$ болса, онда қайта бекітуді осы қосынды ең кіші тізбек бойына жасаймыз. Бұл кезде ықтимал қайта бекіту көлемі $\min(x_{i_k j_p}; a_{i_r})$ болады. Мұндағы $x_{i_k j_p}$ - «-» таңбалы ұялардағы тасымалды көрсететін сандар, $1 \leq k \leq m, 1 \leq p \leq n$; a_{i_r} - $1 \leq k \leq m$ тізбегі басталып және аяқталатын асқын және жеткіліксіз жолдардағы мәндердің айырмасы. Тізбек бойымен қозғала отырып, «-» таңбалы ұялардағы мәндерден қайта бекіту шамасын шегеріп, ал «+» таңбалы ұялардағы мәндерге қайта бекіту шамасын қосып, бұл шаманы a_{i_r} шамасына өзгертеміз. Нәтижесінде, өндірушілерге тұтынушыларды бекітудің жаңа кестесін

9- дәрістің нысықтау сұрақтары

1. Нөлдік жолдар дегеніміз не?
2. Асқын жолдар дегеніміз не?
3. Кемшін жолдар дегеніміз не?
4. Егер әрбір нөлдік жолда $\min \Delta \overline{C_{ij}} \leq \Delta \overline{C_{i_0 j}}$ орындалса, қандай амал жасалады?
5. Қайбір нөлдік жолда $\min \Delta \overline{C_{ij}} > \Delta \overline{C_{i_0 j}}$ болса, қандай амал жасалады?

9-семинар сабақ. Көлік есебін шешудің дельта-әдісінің жалғасы

9.1-кестесіндегі соңғы графадан жеткіліксіз жолдар үшін табатынымыз: $\min \Delta \overline{C}_{ij} = \min\{8,3\} = 3$. Осын мәнді нөлдік жолдардағы $\Delta \overline{C}_{ij}$ мәндерімен салыстырамыз.

Нөлдік A_4 жолы үшін алгоритмнің 7 (б) бабы орындалып тұрғандықтан қайта бекітуді тізбек бойынша жүзеге асырамыз. Тізбек құру үшін A_4 жолынан таңбаланған бағанда тұрған $\Delta \overline{C}_{4,2} = 1$ өсімшесін табамыз. Бұл ұяны «+» таңбасымен белгілейміз. Асқын жолдағы B_2 бағанынан толтырылған A_3B_2 ұясын анықтап, оны «-» таңбасымен белгілейміз. Қозғалысты тізбектің $A_3B_2 - B_2A_4$ буындарынан бастап A_4 нөлдік жолына келеміз; ондағы толық A_4B_4 ұясын табамыз да, оны «-» таңбасымен белгілейміз; одан соң B_4 бағанымен жылжып, жеткіліксіз жолдағы толтырылмаған ұяға көшеміз. Бұл жағдайда тізбек құруды «+» таңбаларымен белгіленген екі ұямен аяқтаймыз (B_1A_4 және B_2A_4). Екі тізбек алынды: $A_3B_2 - B_2A_4 - A_4B_4 - B_4A_1$ және $A_3B_2 - B_2A_4 - A_4B_4 - B_4A_2$. Өсімшелер қосындысын есептейміз:

$$\sum_i \sum_j \Delta \overline{C}_{ij} = 0 + 1 + 0 + 1 = 2 \text{ (бірінші тізбек үшін),}$$

$$\sum_i \sum_j \Delta \overline{C}_{ij} = 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \text{ (екінші тізбек үшін).}$$

Екі тізбек үшін де қосынды үштен кем, демек, екеуі де жарамды. Қайта бекіту үшін екінші тізбекті таңдаймыз, өйткені ондағы қосынды біріншідегі қосындыдан кем.

Қайта үлестіру шамасын анықтайық: $\min(300; 150; 550; 300) = 150$. Тізбек бойымен қозғала отырып, 150 бірлікті қайта үлестіреміз, одан соң Δa_1 мен Δa_3 шамаларын осы санға өзгертеміз. Нәтижесінде 9.2-кестесінде көрсетілген жаңа бекітулерді аламыз.

9.2- кесте. Дельта әдіспен тиімді тірек жоспарын алу.

Жоспар- лау матрица- сы	Түпталыушылар						a_i	Δa_i	$\min \Delta \overline{C}_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6			
Өндіру- шылар		V	V						
A_1	10 200 0	19 8	17 10	18 1	16 1	21 5	450	+	8
A_2	13 3	14 3	11 4	17 250 0	18 3	19 3	400	+	3
A_3	15 5	11 150 0	7 400 0	19 2	19 4	22 6	150	-	400
A_4	14 4 3	13 2 150 1	12 5 4	18 1 0	21 6 5	23 7 6	150	0	1
A_5	21 11	23 12	10 3	20 3	15 150 0	16 100 0	250	0	3
b_j	200	300	400	250	150	100	140	-	-

11. Қайта үлестірім жасалған соң, таңбаланған бағандарды аластау мүмкіндігін қарастырамыз. Егер асқын жолдағы толтырылған ұя толтырылмай қалса немесе асқын жол нөлдік жолға айналса, онда таңбаланған

баған аласталады. Бұл жағдайда келесі итерацияны алгоритмнің 6 бабынан бастаған жөн.

Егер таңбаланған бағандар саны өзгеріссіз қалса, онда келесі итерация 7-баптан басталады.

12. Қайта бекіту үдерісін барлық жолдар нөлдікке айналғанша жалғастыра береміз. Тасымалдаудың алынған жоспарын тиімділікке потенциалдар әдісімен тексереміз. Соңғы кестеде бірінші итерациядан соң таңбаланған бағандар мен асқын жолдар саны өзгеріссіз қалды. Сондықтан бұрынғыдай $\Delta \overline{C_{ij}} = 3$ және A_4 жолы үшін алатынымыз $1 < 3$. Үлестірімді A_2B_2 ұясынан басталып, A_4 нөлдік жолдың A_4B_2 ұясына келетін тізбек арқылы тексереміз. Бірақ A_4B_2 ұясынан A_4 нөлдік жолы бойымен қозғалысты жалғастыру мүмкін емес. A_4 нөлдік жолы үшін алатынымыз $\Delta \overline{C_{ij}} = \Delta \overline{C_{i,j}} = 3$, сондықтан тікелей қайта бекітуді A_3 жолынан $\min \Delta \overline{C_{ij}}$ тұрған A_2B_2 ұясына жасаймыз.

Енді қайта үлестіру шамасын анықтаймыз $\min(150; 400; 150) = 150$. Осыны пайдаланып соңғы кестеге өзгеріс енгізсек, төменгі кестеде келтірілген жаңа бекітулер аламыз. Нәтижесінде A_3B_2 ұясы босады да, таңбаланғандар санатынан шықты, A_2 жолы нөлдікке айналды.

Асқын жолдар мен нөлдік жолдардың таңбаланған бағандарындағы $\min \Delta \overline{C_{ij}}$ шамасын есептеп, оларды 9.3-кестесінің соңғы графасына торлтырамыз. Жеткіліксіз жолдар үшін табатынымыз $\min \Delta \overline{C_{ij}} = 10$. Нөлдік жолдарда тұрған кез-келген $\Delta \overline{C_{i_0j}}$ мәні оннан кіші болғандықтан, тізбек бойынша қайта үлестіру мүмкіндігін барлық нөлдік жолдар үшін тексеру қажет. Тексеруді A_5 нөлдік жолынан бастаймыз, өйткені оған сәйкес $\min \Delta \overline{C_{i,j}} = 3$.

9.3-кесте. Дельта – әдіс арқылы тиімді тірек жоспарын алу

Жоспа матриц асы	Тұтынушылар						a_i	Δa_i	$\min$ $\Delta \overline{C_{ij}}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6			
Өндіру шілер			V						
A_1	10 200 0	19 8	17 10	18 1	+ 16 1	21 5	450	+	10
A_2	13 3	14 150 3	11 4	17 250 0	18 3	19 3	400	0	4
A_3	15 5	11 0	- 7 400 0	19 2	19 4	22 6	150	-	250
A_4	14 4 3	13 2 150 1	12 5 4	18 1 0	21 6 5	23 7 6	150	0	4
A_5	21 11	23 12	+ 10 3	20 3	- 15 150 0	16 100 0	250	0	3
b_j	200	300	400	250	150	100	140 0	-	-

Ендеше A_5B_3 ұясын «+» таңбасымен белгілеп, «-» таңбасымен белгіленетін A_3B_3 ұясынан бастап тізбек құрамыз. A_5 жолында толтырылған екі ұя бар болғандықтан, олардың әрқайсысы арқылы тізбек құрып, өсімшелер қосындысын табамыз:

$$A_3B_3 - A_3B_5 - A_5B_5 - B_5A_1 \Rightarrow -0 + 3 - 0 + 1 = 4;$$

$$A_3B_3 - A_3B_5 - A_5B_6 - B_6A_1 \Rightarrow -0 + 3 - 0 + 5 = 8.$$

Бірінші тізбек үшін өсімшелер қосындысы төртке тең, ал қалған нөлдік жолдардағы $\Delta C_{ij} = 4$ болғандықтан, қайта үлестіру ықтималдығын солар арқылы қарастырған жөн. Демек, $\min(400; 150) = 150$ үлестірімін бірінші тізбек арқылы жасаймыз. Нәтижесінде тізбек құру қайтадан A_5 жолдың A_5B_3 ұясынан басталатын 9.4-кестесін аламыз.

Мына тізбектер:

$$A_3B_3 - B_3A_5 - A_5B_6 - B_6A_1 \Rightarrow -0 + 3 - 0 + 5 = 8 \text{ және}$$

$$A_3B_3 - B_3A_5 - A_5B_6 - B_6A_2 - A_2B_4 - B_4A_1 \Rightarrow -0 + 3 - 0 + 3 - 0 + 1 = 7$$

төрттен көп өсімшелер қосындысын береді. Сондықтан, қайта үлестіру мүмкіндігін қалған нөлдік жолдар арқылы қарастырамыз. A_2 жолы үшін

$$A_3B_3 - B_3A_2 - A_2B_4 - B_4A_1 \Rightarrow -0 + 4 - 0 + 1 = 5;$$

$$A_3B_3 - B_3A_2 - A_2B_2 - B_2A_1 \Rightarrow -0 + 4 - 3 + 8 = 9.$$

9.4-кесте. Дельта-әдіс арқылы тиімді тірек жоспарын алу

Жоспа матриц асы	Тұтынушылар						a_i	Δa_i	$\min \overline{\Delta c_{ij}}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6			
Өндіру шілер			V						
A_1	10 200 0	19 8	17 10	+ 18 1	16 150 1	21 5	450	+ 100	10
A_2	13 3	14 150 3	+ 11 4	- 17 250 0	18 3	19 3	400	0	4
A_3	15 5	11 0	- 7 250 0	19 2	19 4	22 6	150	- 100	
A_4	14 4 3	13 2 150 1	12 5 4	18 1 0	21 6 5	23 7 6	150	0	4
A_5	21 11	23 12	10 150 3	20 3	15 0	16 100 0	250	0	3
b_j	200	300	400	250	150	100	140 0	-	-

Ендеше $\min(250; 250; 100; 100) = 00$ үлестірімін үшінші тізбек арқылы жасаймыз. Нәтижесінде барлық жолдары нөлдікке айналған 9.5-кестесін аламыз. Демек, соңғы итерация нәтижесінде жоспар алдық. Құрылған потенциалдар жүйесі бұл жоспардың тиімді екендігін көрсетеді.

9.5кесте.Дельта –әдіс арқылы тиімді тірек жоспарын алу

Жоспарлау матрицасы		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
Өндірушілер	Потенциалдар	10	15	12	18	16	18	

A_1	0	100	10	19	8	17	10	18	1	150	1	21	5	450
A_2	-1	13	3	150	3	100	4	150	0	17	18	19	3	400
A_3	-5	15	5	11	0	7	150	0	2	19	19	22	6	150
A_4	-2	14	4	13	2	12	5	18	1	21	23	7	6	150
A_5	-2	21	11	23	12	10	150	3	20	15	16	100	0	250
b_j		200	300	400	250	150	100	140	0					

№9 аудиториялық жұмыс тапсырмалары

9. 1. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті дельта әдіспен шығарыңыз.

Тұтынушы Өндірушілер		B_1	B_2	B_3
		20	25	30
A_1	24	6	4	2
A_2	28	3	5	4
A_3	23	3	6	3

9.2. Есепті дельта әдіспен шығарыңыз.

Төрт өндіруші A_i ($i = \overline{1,4}$) тиісінше 100, 400, 200 және 100 бірлік көлеміндегі өнімдерін сұраныстары 150, 100, 150, 200 және 250 бірлік болатын бес B_j ($j = \overline{1,5}$) тұтынушыға жеткізуі керек. Жүк бірлігін тасымалдау құны төмендегі кестеде берілген.

Тұтынушы Өндірушілер		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1		1	6	8	12	16
A_2		16	10	8	6	15
A_3		4	1	9	11	13
A_4		3	2	7	4	15

№9 үй жұмысының тапсырмалары

9.3. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті дельта әдіспен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1	2	150
A_2	3	4	5	1	100
A_3	3	6	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

9.4. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті дельта әдіспен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1	2	250
A_2	3	4	5	1	100
A_3	3	6 100	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

9.5. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті дельта әдіспен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	3	1	2	150
A_2	3	4	5	1	200
A_3	3	6 100	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

9.6. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті дельта әдіспен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	3	1	2	150
A_2	3	4	3	1	250
A_3	3	6 100	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

9.7. Көлік есебі төмендегі кестемен берілген. Есепті дельта әдіспен шығарыңыз.

Жөнелтетін пункттер	Қабылдайтын пункттер				Жүк қоры
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	1	2	150
A_2	3	4	3	1	250
A_3	1	6 100	3	4	100
Тұтынушылар	140	100	70	40	350

Ү. ЖЕЛІЛІК ЖОСПАРЛАУ ЖӘНЕ БАСҚАРУ

13- дәріс. Желілік жоспарлау мен басқару есебі. Желілік график құру.

Басшылық қызметтегілердің анағұрлым күрделі процестер мен жоспарларда сенімді шешім қабылдауына жәрдемдесетін мүлтіксіз құрал іздестіру нәтижесінде жоспарлау мен басқарудың желілік әдістері пайда болды. Олар тұтас кешенге енетін қандай да бір көзделген істі өз-ара байланысқан жұмыстарды атқару арқылы жүзеге асыратын жағдайларда қолданылады.

Желілік жоспарлау жүйелеріндегі басқару нысаны дегеніміз – белгілі бір ресурстарды иеленген және белгілі бір мақсатқа жеткізетін жұмыстардың

кешенін орындайтын ұжым. Басқаруды желілік жоспарлау әдісі қай кезеңде де неғұрлым дұрыс шешім қабылдауға, жұмыстың кейбір бөлігіндегі уақыт пен жабдықтар қорын анықтауға және аса жүктелген басқа жерлеріне ауыстыруға мүмкіндік береді. Проектінің орындалу үдерісін бейнелеу мен оларды желілік жоспарлау әдісімен басқаруға желілік моделдер пайдаланылады.

Желілік жоспарлау әдістерін алғаш рет XX ғасырдың 50-жылдарының аяғында АҚШ ғалымдары жасап, құрылыс саласында және «Полиарис» зымыран жүйесін жасақтауда қолданды. Атап айтқанда құрылыс саласында СРМ (сындарлы жол) әдісі, ал зымыран жүйесінде PERT (программаларды шолу және бағалау) әдісі пайдаланылды.

Қазіргі шақта желілік жоспарлау және басқару әдістері табысты қолданылатын салалар:

- жұмыстар кешенін жүзеге асырудың күнтізбелік жоспарын жасау;
- жұмыс барысында туындап қалатын үзілістерді болжау және ескеру арқылы «жетекші буын» қағидасына сай жұмыстар кешенін басқару;
- әртүрлі деңгейдегі басшылар мен жұмысты орындаушылар арасындағы жауапкершілікті тағайындау және тұтастай алғандағы басқару тиімділігін арттыру;
- уақыт резервін, сонымен қатар материалдық, еңбек пен қаржы ресурстарын анықтау және жұмсау, мұның сыртында проектін орындау мерзімі мен шығындарын тиімділеу.

Желілік жоспарлау мен басқару әдістерінің математикалық негізі – өндірістік үдерістің (орындалатын жұмыстар ретінің) желілік график түрінде бейнеленуі. Желілік график есептеу әдістерінің жиынтығынан тұратын, салмақтары берілген графтың арнайы дербес түрін білдіреді. Желілік жоспарлау мен басқару жүйесінде жұмыстар кешенін басқару мен жоспарлауға қатысты ұйымдық және бақылау шаралары да қамтылады. Желілік моделдің негізгі элементтері - *жұмыстар* мен *оқиғалар*. Желілік жоспарлаудағы *жұмыс* терминінің бірнеше мағанасы бар:

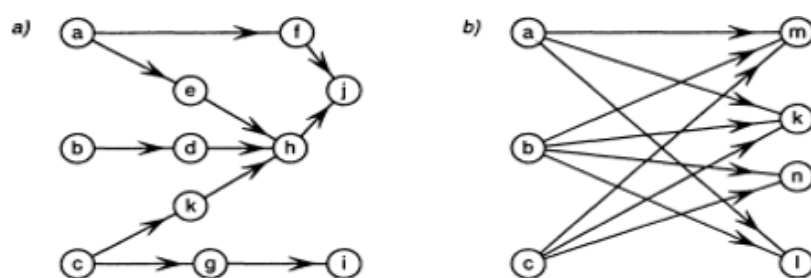
- біріншіден, бұл *нақты жұмыс* — ресурс жұмсауды қажетсінетін (мысалы бұйымды құрастыру, аспапты сынақтан өткізу т.с.с.), уақыт мерзіміне

созылған үдеріс. Әр нақты жұмыс мінсіз сипатталуы, анық болуы және жауапты орындаушыға бекітілген болуы қажет;

- екіншіден, бұл - еңбек шығынын қажетсінбейтін (мысалы боялған бұйымның кебуін күту, металдың тозуы, бетонның қатаюы т.с.с.) уақыт мерзіміне созылған үдеріс – **күту**.

- үшіншіден, бұл – тәуелділік немесе **жалған жұмыс**, яғни екі немесе одан да көп жұмыстар арасындағы еңбек шығындалмайтын, материалдық ресурстар мен уақыт жұмсалмайтын логикалық байланыс. Ол бір жұмыстың мүмкіндігі екіншісінің нәтижесіне тікелей байланысты екендігін көрсетеді. Әрине, жалған жұмыстың ұзақтығы нөлге тең деп алынады.

Оқиға — *проектінің жекеленген кезеңін білдіретін қайбір үдерістің аяқталу сәті*. Оқиға дербес жұмыстың жеке нәтижесі немесе бірнеше жұмыстың қорытынды нәтижесі болуы мүмкін. Оқиға оның алдындағы барлық жұмыс біткенде ғана жүзеге асады. Кейінгі жұмыстар оқиға аяқталған соң ғана басталады. Осыдан оқиғаның екі ұдайлық сипаты шығады: өзіне дейінгі жұмыстар үшін ол *аяқталған*, ал өзінен кейінгілер үшін *бастапқы* оқиға. Мұндайда, оқиғаның ұзақтығы жоқ, ілезде жүзеге асады деп саналады. Сондықтан, желілік моделге енгізілетін әр оқиға толық, дәл және жан-жақты анықталған, оның қисындалуы тікелей өзіне дейінгі барлық жұмыстың нәтижесін қамтуы керек.

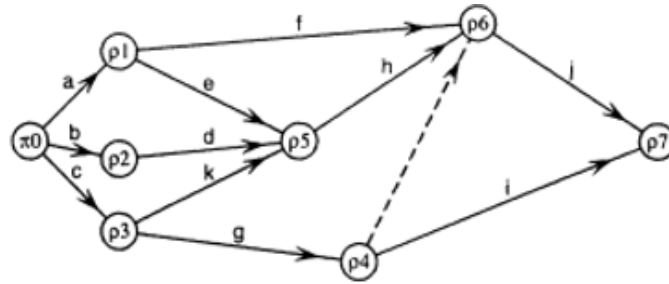


13.1-сурет. «Төбе-жұмыс» желісінен фрагмент: а – дұрыс мысал; б – бұрыс мысал.

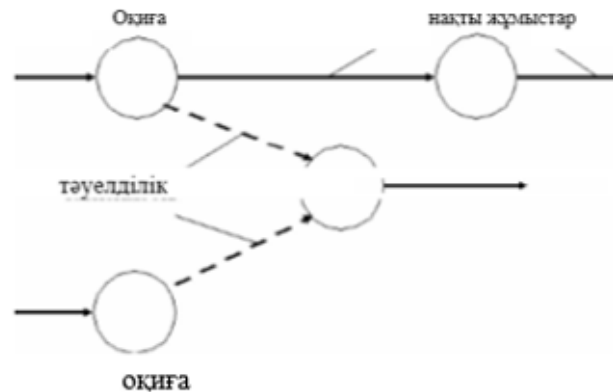
Желілік графикте (немесе графта) оқиғалар дөңгелекшелермен (графтың төбелерімен), ал жұмыстар – жебелермен (бағдарлы доғалармен) кескінделеді (13.1-сурет).

«Жұмыстар–байланыстар» желілік графигінің «оқиғалар–жұмыстар» графигінен айырмашылығы – олар жалған жұмыстарды қамтымайды. Егер желілік моделде сандық бағалау болмаса, онда модель *құрама желі* деп аталады.

Дегенмен, практикада көбіне жұмыстардың ұзақтығы, сол сияқты басқа да мысалы еңбек-шығыны, баға параметрлері берілген желілер жиі қолданылады.



13.2-сурет. «Төбе-оқиға» желісінің фрагменті



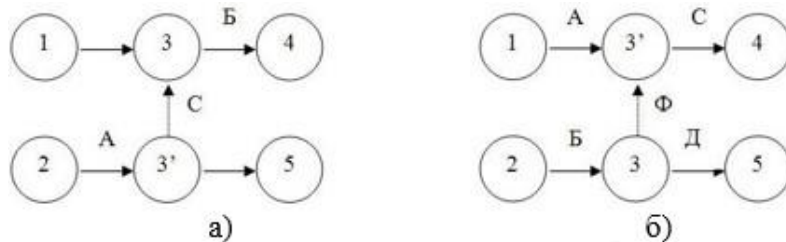
13.3-сурет. Желілік моделдің негізгі элементтері.

Желілік графиктер жоспарлаудың бастапқы кезеңінде құрылады. Әуелі жоспарланатын үдеріс жеке жұмыстарға жіктеледі, жұмыстар мен оқиғалардың тізімі жасалады, олардың логикалық байланыстары мен орындалу тәртібі ойластырылып, жұмыстар жауапты орындаушыларға бекітіледі. Солардың және қолдағы нормативтердің көмегімен әр жұмыстың ұзақтығы бағаланады. Одан соң желілік график құрастырылады. Желілік графикті ретке келтірген соң, оқиғалар мен жұмыстардың параметрлері есептелінеді, уақыт қорлары мен *сындарлы жол* анықталады. Ақырында, желілік графикке талдау мен тиімділеу жасалады. Қажет болса жұмыстар мен оқиғалардың параметрлері қайыра есептелініп, график жаңадан сызылады.

Желілік графикті құру ережесі:

1. Желілік графиктерді басынан аяғына дейін, яғни солдан оңға қарай құру қажет;
2. Желілік графиктегі жұмыстарды, күтуді немесе тәуелділікті білдіретін жәбелер түрлі ұзындықтар мен көлбеулерді иеленсе де, олар ордината өсінен солға шығып кетпей, солдан оңға қарай бағытталуы керек. Және олар әрқашан алдыңғы оқиғадан келесісіне, яғни реттік нөмірі кіші оқиғадан реттік нөмірі үлкеніне бағытталады;
3. Желілік график құрғанда алдыңғы жұмыстың толық аяқталуын күтпей-ақ, келесі жұмысты бастауға болады. Мұндайда келесі

- жұмыстың жаңа жұмыс басталатын жеріне қосымша оқиға енгізу арқылы алдыңғы жұмысты екі жұмысқа «жіктейміз»;
4. *Желілік моделде қорытынды оқиғадан басқа бірде бір жұмыс шықпайтын, яғни «тығырықты» оқиғалар бомауы қажет.* Мұндайда туындаған келеңсіздікті жою үшін оқиғалар мен жұмыстардың өз-ара байланысын жете зерттеу керек.
 5. *Желілік графикте бастапқы оқиғадан басқа, бірде-бір жұмыс жалғаспайтын «құйырышық» оқиғалар болмауы қажет.* Желіде мұндай оқиғалар кездесе, оның алдындағы жұмыстарды атқарушыларды анықтап, осы жұмыстарды желіге енгізу қажет.
 6. *Желіде тұйықталған контурлар мен тұзақтар, яғни кейбір оқиғаларды өз-өзімен байланыстыратын жолдар болмайды.* Контур пайда болғанда бастапқы мәліметтерге қайта оралып, жұмыстар құрамын тексеріп, мұндай жағдайдың болмауын қамсыздандыру қажет.
 7. *Кез-келген екі оқиға бірден артық жұмыс-жебемен байланыспайды.* Бұл шарт паралель орындалатын жұмыстарды бейнелегенде туындайды. Егер бұл жұмыстарды осы күйінде қалдырсақ, әр түрлі екі жұмыс та бірдей таңбаланғандықтан, түсінбестікке ұшыраймыз. Дегенмен, бұл жұмыстардың мазмұны, оларды орындаушылардың құрамы және жұмысқа жұмсалатын ресурстар айтарлықтай айырмашылықта болуы мүмкін. Мұндайда *жалған оқиға* мен *жалған жұмыс* енгізу ұсынылады да, паралель жұмыстардың бірі осы жалған оқиғамен тұйықталады. Жалған жұмыстар графикте пунктир сызықтармен бейнеленеді (13.4- сурет).
 8. *Желіде жалғыз бастапқы оқиға және жалғыз қорытынды оқиға болғаны жөн.* Егер құрылған желіде бұлай болмаса, онда жалған жұмыс пен жалған оқиға енгізу арқылы қалаған нәтижеге жете аламыз. Жалған жұмыс пен жалған оқиға бірқатар басқа жағдайларда да қолданылады. Соның бірі – нақты жұмыстармен байланыспаған оқиғаларды белгілеу. Мысалы, А мен Б жұмыстары бір-біріне байланыссыз орындалатын болса да, өндіріс шарты бойынша Б жұмысы А жұмысы бітпей тұрып, бастала алмайды. Бұл жағдай С жалған жұмысын енгізуге мәжбүрлейді (13.4.а –суреті). Екінші жағдай – жұмыстардың байланысының толық болмауы. Мысалы С жұмысы өзінің басталуы үшін А мен Б жұмыстарының аяқталуын күтеді, ал Д жұмысы тек қана Б жұмысына ғана тәуелді, А жұмысымен байланысы жоқ. Онда 13.4.б-суретінде көрсетілгендей, Ф жалған жұмысы мен 3' жалған оқиғасын енгізу талап етіледі. Мұнан басқа, жалған жұмыстар нақты кешігу мен күтуді бейнелеу үшін де енгізіледі. Алдыңғы жағдайлардан мұндағы айырмашылық – жалған жұмыс уақыт арқылы сипатталады.



13.4-сурет. Жалған жұмыс пен жалған оқиға енгізудің мысалдары

Кез-келген жұмыстың алдындағы оқиға осы жұмысты аяқтайтын оқиғадан солға таман орналасқан, нөмірі осы жұмысты аяқтайтын оқиға нөмірінен кіші болатын оқиғалар мен жұмыстардың орналасуы желілік графиктің тәртіптелгендігін білдіреді. Басқаша айтқанда тәртіптелген желілік графикте барлық жұмыс-доғалар солдан оңға қарай, нөмірі кіші оқиғадан нөмірі үлкен оқиғаға қарай бағытталған.

Толық жолдардың ең ұзағы **сындарлы жол** деп аталады. Сындарлы жол сындарлы мерзімде барлық жұмыстарды орындауға кететін қажетті уақыт мөлшерін анықтайды. Сындарлы жолдағы жұмыстар мен оқиғалар да сындарлы деп аталады.

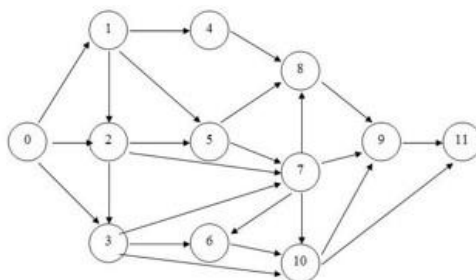
13-дәрісті нысықтау сұрақтары

1. Желілік жоспарлау есебінің қойылымы.
2. Желілік жоспарлау есептері.
3. Желілік жоспарлаудың негізгі ұғымдары.
4. Желілік графиктер құру тәртібі.
5. Желілік графиктер құру ережесі.

13-семинар сабақ. Желілік графикті тәртіптендіру

№13 аудиториялық тапсырма

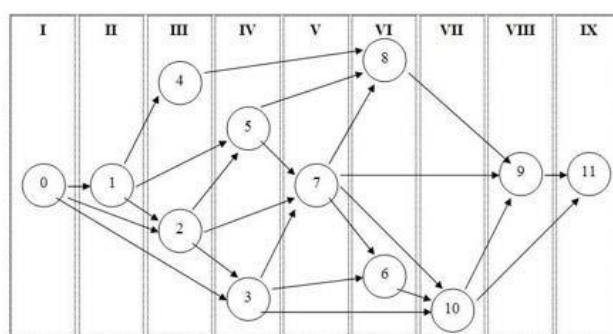
13.1. Проектіні құрғанда 12 оқиға: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 және олардың байланыстыратын 24 жұмыс: (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 6), (3, 7), (3, 10), (4, 8), (5, 8), (5, 7), (6, 10), (7, 6), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (9, 11), (10, 9), (10, 11) атап көрсетілген. Оның 13.5-суретінде көрсетілген желілік графикті тәртіптендіріңіз.



13.5.-сурет. Тәртіптенбеген желілік график.

Шешуі: Желілік графикті тәртіптендіру деп кез-келген жұмыстың алдындағы оқиғаның солға қарай орналасуын және оның нөмірінің осы жұмысты аяқтайтын оқиға нөмірінен кіші болуын айтамыз.

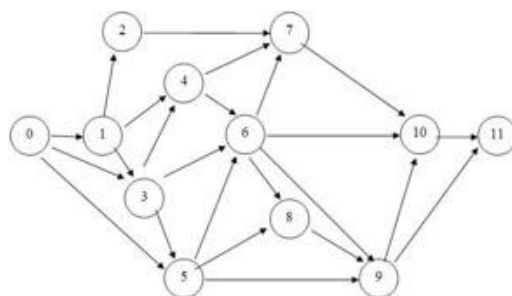
Бастапқы графикті бірнеше вертикаль қабаттарға бөлеміз (оларды пунктир сызықтармен қоршап, рим цифрлары арқылы белгілейміз). I қабатқа бастапқы 0 оқиғасын орналастырып, ойша графиктен бұл оқиғаны және одан шығатын жұмыс-жебелерді алып тастаймыз. Сонда II қабатты құрап тұрған оқиға 1 кіретін жебесіз қалады. Ойша оқиға 1 мен одан шығатын жұмыстарды сызып тастасақ, онда III қабатты құрап тұрған 4 және 2 оқиғалар кіретін жебесіз қалады. Осы үдерісті жалғастыра отырып, 13.6.-суретінде көрсетілген графикті аламыз.



13.6. -сурет- Қабаттар арқылы желілік графикті тәртіптендіру

Енді біз оқиғаларды алғашқы нөмірлегеніміз онша дұрыс емес екендігін көреміз, өйткені 6-оқиға VI қабатта жатыр және алдыңғы қабаттағы 7-оқиғадан кіші нөмірге ие. Дәл осыны 9 бен 10 оқиғалары үшін де айта аламыз.

Оқиғалардың нөмірленуін графиктегі орналасуларына сай өзгертіп, тәртіптенген желілік график аламыз (13.7-сурет).

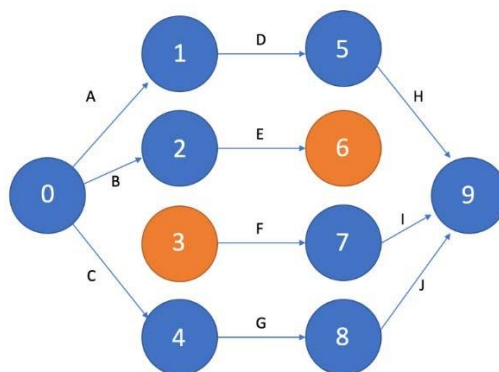


13.7-сурет. Тәртіптенген желілік график.

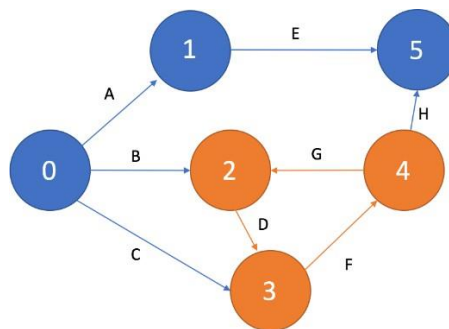
Жол – тізбектегі әр жұмыстың ақырғы оқиғасы өзінен кейінгі жұмыстың бастапқы оқиғасымен беттесетін жұмыстардың кез-келген тізбегі. Бастапқы оқиғадан қорытынды оқиғаға дейінгі жол **толық жол** деп аталады. Бастапқы оқиғадан берілген аралық оқиғаға дейінгі жол осы оқиға қарсаңындағы жол делінеді. Бірде бір не бастапқы оқиға, не қорытынды оқиғасы жоқ кез-келген екі оқиғаны қосатын жол – осы оқиғалар арасындағы жол. Жолдың ұзақтығы оны құраушы жолдардың ұзақтықтарының қосындысымен анықталады.

№13 үй жұмысының тапсырмалары

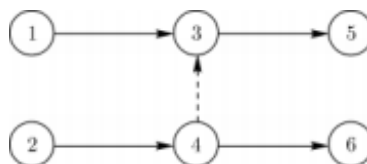
- 13.1. Бір бастапқы жұмысы бар желілік графиктің бастамасын көрсетіңіз.
- 13.2. Үш бастапқы жұмысы бар желілік графиктің бастамасын көрсетіңіз.
- 13.3. Тізбектеліп орындалатын жұмыстардың желілік графигін көрсетіңіз.
- 13.14. *B* мен *C* жұмыстарын жүзеге асыру үшін *A* жұмысының аяқталуын талап ететін желілік графикті салыңыз.
- 13.4. *C* жұмысын орындау үшін *A* мен *B* жұмыстарының аяқталуын талап ететін желілік графикті салыңыз.
- 13.5. *D* жұмысын орындау үшін *A* мен *B* жұмыстарының аяқталуын, ал *C* жұмысының жұмысын бастау *A* жұмысы аяқталған соң жүзеге асатын желілік график салыңыз
- 13.6. Желідегі тығырық оқиғасы мен құйыршық оқиғаларды көрсетңіз.



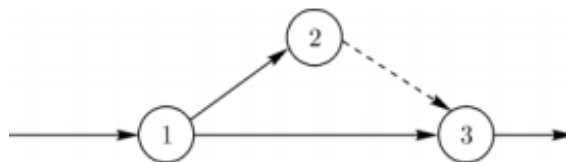
13.7. Желілік графиктегі G жұмысы жалпы нәтиженің бөлігі болған кездегі циклді жойыңыз.



13.8. Жұмыстардың орындалу ретін көрсетіңіз



13.9. Суреттегі оқиғалардың орналасуын түсіндіріңіз.



13.10. А, В, С үдерістері берілген. Мұндағы С үдерісі А мен В үдерістерінен тәуелді болғандағы желілік графикті салыңыз

14-дәріс. Желілік жоспарлаудың уақыттық параметрлері. Гант диаграммасы. Сындарлы жол әдісі. Желілік жоспарлаудың ықтималдықты сипаттамалары.

Желілік жоспарлаудың уақыттық параметрлері. *Оқиға орындалуының ерте (немесе күтілетін) мерзімі* осының алдындағы оқиғаға сай максимум жолдың ұзындығымен анықталады. Сондықтан *оқиғаның орындалуының кеш (немесе шекті) мерзімі* жұмыстан соң орын алатын оқиға туындауының максимум уақыты мен осы оқиғаға дейінгі жұмыс уақытының айырмасына тең. *Оқиға уақытының резерві* оның орындалуының кеш мерзімі мен ерте мерзімінің айырмасы ретінде анықталады.

Сындарлы оқиғаларда резерв жоқ, өйткені сындарлы жолдағы кез-келген оқиғаның орындалуын кешіктіру дәл осы мерзімге қорытындылаушы оқиғаның орындалуын ұлғайтады.

Егер желілік график жалғыз сындарлы жолды иеленсе, онда бұл жол барлық сындарлы оқиғалар, яғни нөлдік резервті оқиғалар арқылы өтеді. Егер сындарлы жол бірнешеу болса, онда оларды сындарлы оқиғалар арқылы анықтау қиындыққа соқтырады. Өйткені сындарлы оқиғалар арқылы сындарлы жолдар да, сындарлы емес жолдар да өтеді. Мұндай жағдайда сындарлы жолдарды анықтау үшін сындарлы жұмыстарды қолданған жөн. Қайбір жұмыстар ерте, кеш немесе аралық мерзімде басталуы (аяқталуы) мүмкін. Бұдан былай, графикті тиімділегенде жұмысты *жұмыстың ұзақтығы* деп аталатын берілген интервалға орналастырамыз.

Жұмыстың басталуының ерте мезгілі кейінгі оқиғаның ерте басталу мерзімімен беттеседі. *Жұмыстың басталуының кеш мезгілі* алдыңғы оқиғаның кеш басталу мерзімімен беттеседі.

Сонымен, желілік модел аясында жұмыстың кеш басталуы мен ерте басталуы шектеулерге сәйкес көршілес оқиғалармен тығыз байланысты екен.

Егер жол сындарлы болмаса, онда ол қарастырылып отырған жол мен сындарлы жол айырмасымен анықталатын *уақыт резервіне* ие болады. Ол осы жолға тиесілі жұмыстардың барлығының ұзақтығын қаншаға созуға болатындығын көрсетеді. Осыдан сындарлы емес жолдың бөліктеріндегі кез келген жұмыстың уақыттық резерві бар деген қорытынды шығаруға болады.

Жұмыстың уақыттық резервін төртке бөлінеді. *Уақыттың толық резерві* жұмыстар кешенінің орындалу мерзімі өзгермегенде берілген жұмыстың орындалуын қаншаға ұлғайтуға болатындығын көрсетеді. Уақыттың толық резерві осы жұмыс арқылы өтетін максимум жол резервіне тең.

Бірінші түрдегі уақыттың дербес резерві – жұмыстың ұзақтығын оның бастапқы оқиғасының кеш мезгілін сақтай отырып өзгерте алатын уақыт резерві.

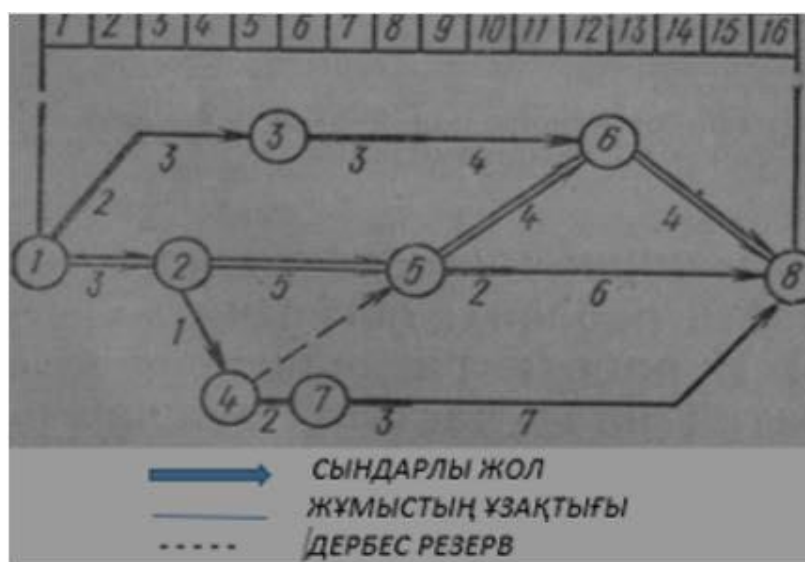
Екінші түрдегі уақыттың дербес резерві немесе *уақыттың еркін резерві* – жұмыстың ұзақтығын оның бастапқы оқиғасының кеш мезгілін сақтай отырып өзгерте алатын уақыт резерві.

Уақыттың тәуелсіз резерві дегеніміз – уақыттың толық резервінің

алдыңғы барлық жұмыстар кеш мерзімде бітетін, ал кейінгі барлық жұмыстар ерте мерзімде басталатын бөлігі.

Уақыттың тәуелсіз резервін пайдалану басқа жұмыстардың уақыт резервтеріне әсер етпейді. Тәуелсіз резервтер алдыңғы жұмыс ұйғарымды кеш мезгілде орындалып, ал кейінгі жұмыстар ерте мезгілде орындалуға ұмтылатын жағдайларда қолданылады. Егер тәуелсіз резерв шамасы нөлге тең немесе оң болса, онда мұндай мүмкіндіктерге ие боламыз. Егер де бұл шама теріс болса, онда мұндай мүмкіндік жоқ. Өйткені алдыңғы жұмыс әлі бітпей тұрып келесі жұмыс басталмайды. Яғни бұл шаманың теріс болуында ешқандай мағана жоқ. Нақтысында басталуы мен аяқталуы максимум жолдарда жатпайтын жұмыстар ғана тәуелсіз резервке ие болады. Сындарлы жолда жататын жұмыстар да, сындарлы оқиғалар да уақыт резервін иеленбейді.

Уақыт масштабында желілік график құру. Практикада календарлық мерзімге байланысқан, уақыт масштабында құрылған желілік графиктер

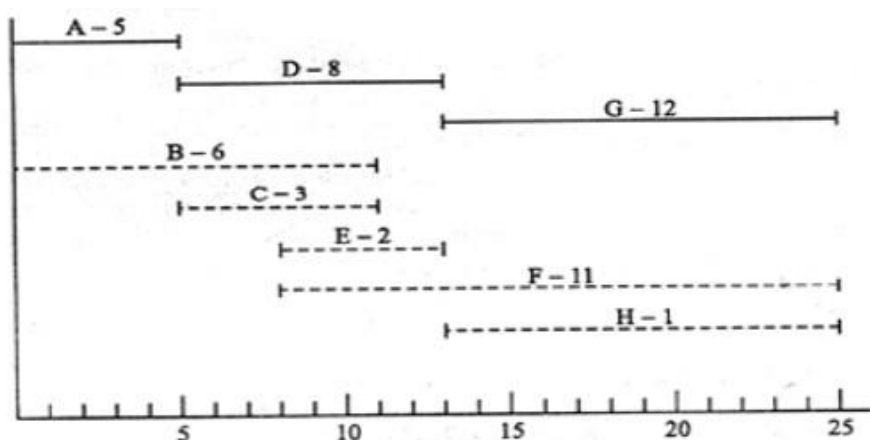


14.1-сурет. Уақыт масштабындағы график

кеңінен таралған. Жұмыс барысын бақылауда мұндай график уақыттың белгілі бір аралығында орындалатын жұмыстарды тез анықтап, қажет болса олардың кешігуі мен озуын есептеп, ресурстарды қайта үлестіруге мүмкіндік береді. Жұмыстың бастапқы мәліметтері мен нақты орындалуына өзгерістер енгізілгенде, мұндай желілік графиктерге түзету енгізу қиындықтарға соқтыратындықтан, бұл әдіс кішігірім желілік графиктер де ғана қолданылады.

Гант диаграммасы Өндірістік үдерісті немесе проектіні уақыт бойынша көрнекі түрде көрсету әдістерінің бірі – Гант диаграммасы. Ол – проектінің есептері уақыт бойынша жалғасқан, оқиғаның басталу және аяқталу датасы, кешіктірулер мен басқа да уақыттық параметрлерді білдіретін кесінділер арқылы сипатталатын – горизонталь сызықтық диаграмма. Гант диаграммасы – үдеріс екі түрде көрсетілетін график. Сол жақта проект есептердің тізіміндегі жұмыстың аты мен оның оны орындау ұзақтығы

толтырылған кесте ретінде ұсынылады. Осы кестеде жұмыстардың орындалу реті көрсетіледі. Оң жақта проектінің әрбір жұмысы, оның орындалу ұзақтығы график түрінде кескінделеді (14.2--сурет).



14.2-сурет. Гант диаграммасы

Сындарлы жол (CPM) әдісі. Әдіс проектінің басынан аяғына дейінгі аралықтағы өз-ара қарым-қатынасы ескерілген ең ұзаққа созылатын жұмыстарды анықтауға негізделген. Сындарлы жол әдісінде операцияның ұзақтығы жеткілікті дәлдікпен анықталады. Бұл әдістің негізгі жетістігі - сындарлы жолда жатпайтын жұмыстардың орындалу мерзімін қалауымызша өзгерте алатындығымыз. Сындарлы жол әдісінің ақырғы нәтижесі – проектінің орындалуының уақытқа сай графигінің құрылуы. Ол үшін арнайы есептеулер жасалады. Алдыңғы үдеріс аяқталмайынша келесі үдеріс басталмайтындықтан, проектінің аяқталу уақыты бастапқы және соңғы төбені қосатын жолдағы жұмыстардың ұзақтықтарының қосындысынан асып кете алмайды. *Жолға енетін үдерістер ұзақтығының қосындысы жолдың ұзындығы деп аталады. Сындарлы жол деп ұзынды максимум жолды айтамыз.*

Мысал 14.1. Барлық мәліметтері 14.1-кестеде келтірілген желілік графиктің оқиғаларының ең ерте басталатын, ең кеш басталатын мерзімдерін есептеп, сындарлы жолды тауып, сындарлы емес доғалардың қарқындылығының коэффициентін және барлық жұмыстардың толық және тәуелсіз уақыт резервтерін анықталық.

14.1-кесте

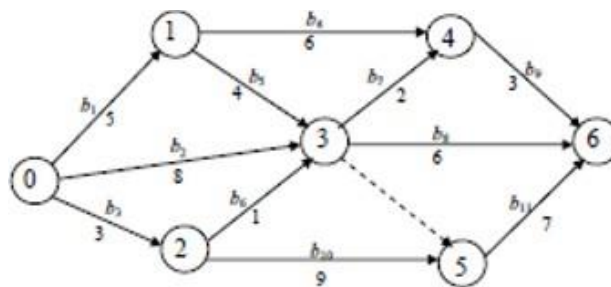
жұмыс	Жұмыс ұзақтығы	Қай жұмыстан соң басталады
b_1	5	-
b_2	8	-
b_3	3	-
b_4	6	b_1

b_5	4	b_1
b_6	1	b_3
b_7	2	b_2, b_5, b_6
b_8	6	b_2, b_5, b_6
b_9	3	b_4, b_7
b_{10}	9	b_3
b_{11}	7	b_2, b_5, b_6, b_{10}

Шешуі. Кестедегі мәліметтерді ықшам түрде жазалық:

$b_1(5) \rightarrow b_4(6), b_5(4); b_3(3) \rightarrow b_6(1), b_{10}(9); b_2(8), b_5(4), b_6(1) \rightarrow b_7(2), b_8(6);$
 $b_4(6), b_7(2) \rightarrow b_9(3); b_2(8), b_5(4), b_6(1), b_{10}(9) \rightarrow b_{11}(7).$

Енді құрылымдық желілік график құрып, дұрыс нөмірленген оқиғаларды енгіземіз (14.4-сурет)



14.4-сурет. Желілік график.

Оқиғаның ең ерте орындалуының мерзімі: $T_p(i) = \max_{j \in I} \{T_p(j) + t_{ij}\}$, мұндағы максимум i оқиғасының алдандағы барлық j оқиғалары бойынша тікелей алынады. Бастапқы оқиғаға мән береміз $T_p(0) = 0$. Сонда

$$T_p(1) = T_p(0) + t_{01} = 0 + 5 = 5;$$

$$T_p(2) = T_p(0) + t_{02} = 0 + 3 = 3;$$

$$T_p(3) = \max\{T_p(0) + t_{03}, T_p(1) + t_{13}, T_p(2) + t_{23}\} = \max\{5 + 4, 0 + 8, 3 + 1\} = 9;$$

$$T_p(4) = \max\{T_p(1) + t_{14}, T_p(3) + t_{34}\} = \max\{5 + 6, 9 + 2\} = 11;$$

$$T_p(5) = \max\{T_p(2) + t_{25}, T_p(3) + t_{35}\} = \max\{3 + 9, 9 + 0\} = 12;$$

$$T_p(6) = \max\{T_p(3) + t_{36}, T_p(4) + t_{46}, T_p(5) + t_{56}\} = \max\{9 + 6, 11 + 3, 12 + 7\} = 19.$$

Ендеше сындарлы уақыт $T_{кр} = 19$. Проект орындалуының минимум мерзімі - 19 күн.

Оқиғаның кеш орындалуының мерзімі:

$$T_n(i) = \min_{j \in I} \{T_n(j) - t_{ij}\}, \text{ мұндағы}$$

минимум i оқиғасының кейінгі барлық j оқиғалары бойынша тікелей алынады. Ақырғы оқиғаға сындарлы уақытқа тең орындалудың ең кеш мерзімін береміз: $T_n(6) = T_{кр} = 19$. Сонда:

$$T_n(5) = T_n(6) - t_{56} = 19 - 7 = 12;$$

$$T_n(4) = T_n(6) - t_{46} = 19 - 3 = 16;$$

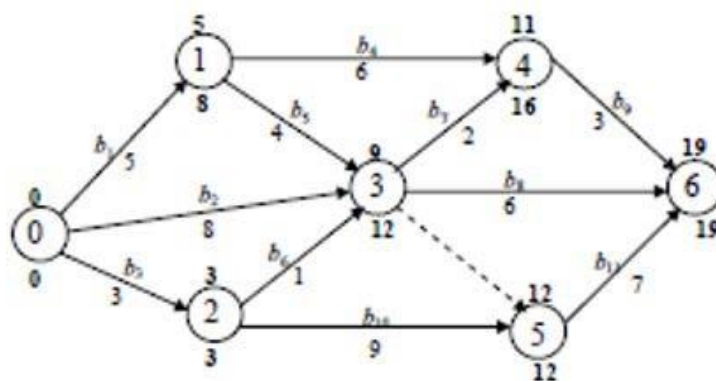
$$T_n(3) = \min\{T_n(6) - t_{36}, T_n(5) - t_{35}, T_n(4) - t_{34}\} = \min\{19 - 6, 12 - 0, 16 - 2\} = 12;$$

$$T_n(2) = \min\{T_n(5) - t_{25}, T_n(3) - t_{23}\} = \min\{12 - 9, 12 - 1\} = 3;$$

$$T_n(1) = \min\{T_n(4) - t_{14}, T_n(3) - t_{13}\} = \min\{16 - 6, 12 - 4\} = 8;$$

$$T_n(0) = \min\{T_n(3) - t_{03}, T_n(2) - t_{02}, T_n(1) - t_{01}\} = \min\{12 - 8, 3 - 3, 8 - 5\} = 0.$$

Есептеулер нәтижесін желілік графикпен бейнелейміз. Орындалудың ерте мерзімдерін осы оқиғаларды білдіретін дөңгелектердің үстіне, ал орындалулардың кеш мерзімдерін дөңгелектердің астына жазамыз (14.5-сурет).



14.5-сурет

Сындарлы уақыт $T_{кр} = 19$. Оқиға уақытының резерві $R(i) = T_n(i) - T_p(i)$.

Оқиғаның уақыттық сипаттамалары төменгі кестеде келтірілген.

Оқиға	Ерте мерзім $T_p(i)$	Кеш мерзім $T_n(i)$	Уақыт резерві
■ 0	0	0	0
1	5	8	3
■ 2	3	3	0
3	9	12	3
4	11	16	5
■ 5	12	12	0
■ 6	19	19	0

Сындарлы жол уақыттық резерві нөлге тең оқиғалар арқылы, яғни 0,2,5,6 оқиғалары арқылы өтеді.

Жұмыстардың уақыт резервтері.

$b_k = (i, j)$ жұмысының ерте басталатын

мерзімі i оқиғасының орындалуының ерте мерзіміне тең: $S_p(b_k) = T_p(j)$. Ал $b_k = (i, j)$ жұмысының ұйғарымды кеш аяқталатын мерзімі j оқиғасының орындалуының кеш мерзіміне тең: $E_{II}(b_k) = T_{II}(j)$.

Жұмыстар уақытының толық резерві:

$$r_{II}(b_k) = r_{II}(i, j) = T_{II}(j) - T_p(i) - t_{ij} = E_{II}(b_k) - S_p(b_k) - t_{ij}.$$

Жұмыстар уақытының тәуелсіз резерві:

$$r_H(b_k) = r_H(i, j) = T_p(j) - T_{II}(i) - t_{ij}.$$

Алынған нәтижелерді кестеге толтырамыз.

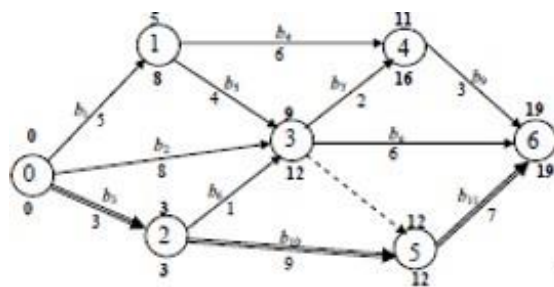
$b_k = (i, j)$ жұмысы	$t(b_k) = t_{ij}$ жұмысының ұзақтығы	$S_p(b_k)$	$E_{II}(b_k)$	$r_{II}(b_k)$	$r_H(b_k)$
$b_1 = (0, 1)$	5	0	8	3	0
$b_2 = (0, 3)$	8	0	12	4	1
$*b_3 = (0, 2)$	3	0	3	0	0
$b_4 = (1, 4)$	6	5	16	5	-3
$b_5 = (1, 3)$	4	5	12	3	-3
$b_6 = (2, 3)$	1	3	12	8	5
$b_7 = (3, 4)$	2	9	16	5	-3
$b_8 = (3, 6)$	6	9	19	4	1
$b_9 = (4, 6)$	3	11	19	5	0
$*b_{10} = (2, 5)$	9	3	12	0	0
$*b_{11} = (5, 6)$	7	12	19	0	0
$\varphi = (3, 5)$	0	9	12	3	0

$\varphi = (3, 5)$ жұмысы – жалған жұмыс. Сындарлы жұмыстар - b_3, b_{10}, b_{11} . Бұл жұмыстардың уақыттық резервтері нөлге тең. Сындарлы жол қосар жебемен бейнеленген (14.6-сурет).

Сындарлы емес b доғасының уақыттық резерві сындарлы учаскелерді түйықтайтын доға ұзындығынан сындарлы емес доғаның өз ұзындығын шегеру арқылы табылады: $R(b) = a - b$.

Сындарлы емес доға қарқындылығының коэффициенті:

$$N(b) = \frac{b}{a} = 1 - \frac{R(b)}{a}.$$



14.6-сурет.

Сындарлы емес доғалардың уақыттық резервтері мен қарқындылық коэффициенттері:

Сындарлы емес доғалар	a	b	Доғаның уақыттық резерві $R(b)$	Доғаның қарқындылық коэффициенті $N(b)$
(2, 3, 5)	9	1	8	$1/9 \approx 0,11$
(0, 3, 5)	12	8	4	$2/3 \approx 0,67$
(0, 1, 3, 5)	12	9	3	$3/4 = 0,75$
(0, 3, 6)	19	14	5	$14/19 \approx 0,74$
(0, 1, 3, 6)	19	15	4	$15/19 \approx 0,79$
(0, 1, 4, 6)	19	14	5	$14/19 \approx 0,74$
(0, 1, 3, 4, 6)	19	14	5	$14/19 \approx 0,74$
(2, 3, 6)	16	7	9	$7/16 \approx 0,44$
(2, 3, 4, 6)	16	6	10	$6/16 = 0,375$

Қарқындылық коэффициенттері $N(b) > 0.8$ доғалар сындарлы аймақты құрайды, қарқындылық коэффициенттері $0.6 \leq N(b) \leq 0.8$ доғалар сындарлы дерлік аймақты құрайды, қарқындылық коэффициенттері $N(b) \leq 0.6$ доғалар резервті аймақты құрайды. Біздің жағдайда сындарлы аймаққа тек сындарлы жол ғана тап болады да, (0, 1, 3, 6), (0, 1, 3, 5), (0, 3, 6), (0, 1, 4, 6), (0, 1, 3, 4, 6) және (0,3,5) доғалары ішкі сындарлы аймақта орналасады. Олардың ішіндегі ең қарқынды доға (0,1,3,6). Ол басқаларынан жылдам сындарлы доғаға айнала алады. Ал (2,3,5), (2,3,6) және (2,3,4,6) доғалары резервтік аймақ құрайды.

14- дәрісті нысықтау сұрақтары:

1. Желілік графиктің уақыттық параметрлері.
2. Уақыт масштабында желілік график құру.
3. Гант диаграммасы.
4. Сындарлы жол.
5. Сындарлы уақыт.
6. Оқиганың ең ерте орындалуының мерзімі.
7. Оқиганың ең кеш орындалуының мерзімі.
8. Оқиға уақытының резерві.
9. Жұмыстардың уақыт резервтері.
10. Жұмыстар уақытының толық резерві.
11. Жұмыстар уақытының тәуелсіз резерві.
12. Сындарлы емес доға қарқындылығының коэффициенті.

14- семинар сабақ. Желілік жоспарлардың ықтималдықты сипаттамалары.

14- аудиториялық тапсырмалар.

14.1. Төмендегі кестедегі мәліметтерге сүйеніп, үш параметрлі модель үшін проектінің орындалуын күтетін уақыттың ұзақтығын тауып, проектінің берілген мерзімнен кеш орындалмау ықтималдығын анықтап, проектінің орындалуына кепілді уақыт интервалын көрсетіп, проектінің берілген мерзімде максимум сенімді түрде жүзеге асуының ықтималдығын бағалау қажет.

Жұмыс	Алдындағы жұмыс	$t_{нec}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$
b_1	—	8	5	3
b_2	—	10	9	4
b_3	—	6	2	1
b_4	b_1	9	7	1
b_5	b_1	5	4	1
b_6	b_3	2	1	1
b_7	b_2, b_5, b_6	4	2	1
b_8	b_2, b_5, b_6	13	5	4
b_9	b_4, b_7	8	2	1
b_{10}	b_3	17	8	6
b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	10	8	2

Проектінің директив (берілген) мерзімі $T_{дир} = 21$ күн. Берілген сенімділік $\gamma = 0,95$. Дәл осы есептеулерді екі-параметрлі модел үшін жүргізіп, нәтижелерін салыстырыңыздар. $t_{нec}$ -пессимистік уақыт; $t_{вер}$ -ықтимал уақыт; $t_{опт}$ -оптимум уақыт.

Шешуі:

Үш-параметрлі моделдің күтілетін жұмыс ұзақтығы

$$t_{ож} = \frac{t_{нec} + 4t_{вер} + t_{опт}}{6}.$$

$$t_{ож}^1(b) = \frac{8 + 4 \cdot 5 + 3}{6} = \frac{31}{6} \approx 5.17 \approx 5;$$

$$t_{ож}^2(b) = \frac{10 + 4 \cdot 9 + 4}{6} = \frac{50}{6} \approx 8.33 \approx 8;$$

$$t_{ож}^3(b) = \frac{6 + 4 \cdot 2 + 1}{6} = \frac{15}{6} \approx 2.5 \approx 3;$$

$$t_{ож}^4(b) = \frac{9 + 4 \cdot 7 + 1}{6} = \frac{38}{6} \approx 6.33 \approx 6;$$

$$t_{ож}^5(b) = \frac{5 + 4 \cdot 4 + 1}{6} = \frac{22}{6} \approx 3.67 \approx 4.$$

Салыстыру үшін екі-параметрлі модель үшін күтілетін жұмыс ұзақтығын анықтаймыз:

$$t_{ож} = \frac{3t_{нес} + 2t_{онм}}{5},$$

$$t_{ож}^*(b_1) = \frac{3 \cdot 8 + 2 \cdot 3}{5} = \frac{30}{5} = 6;$$

$$t_{ож}^*(b_2) = \frac{3 \cdot 10 + 2 \cdot 4}{5} = \frac{38}{5} \approx 7.6 \approx 8;$$

$$t_{ож}^*(b_3) = \frac{3 \cdot 16 + 2 \cdot 1}{5} = \frac{20}{5} = 4;$$

$$t_{ож}^*(b_4) = \frac{3 \cdot 9 + 2 \cdot 1}{5} = \frac{29}{5} = 5.8 \approx 6;$$

$$t_{ож}^*(b_5) = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 1}{5} = \frac{17}{5} = 3.4 \approx 3.$$

Екі-параметрлі модель қарапайым болғанымен, бағалау дәлдігі төмен. Жұмыс ұзақтығының дисперсиясы:

$$\sigma^2(t_{ож}) = \left(\frac{t_{нес} - t_{онм}}{6} \right)^2, \quad \sigma^2(t_{ож}(b_3)) = \left(\frac{6-1}{6} \right)^2 = \left(\frac{5}{6} \right)^2 \approx 0,69;$$

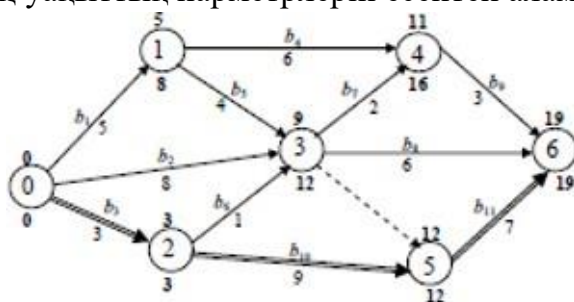
$$\sigma^2(t_{ож}(b_1)) = \left(\frac{8-3}{6} \right)^2 = \left(\frac{5}{6} \right)^2 \approx 0,69; \quad \sigma^2(t_{ож}(b_4)) = \left(\frac{9-1}{6} \right)^2 = \left(\frac{8}{6} \right)^2 \approx 1,78;$$

$$\sigma^2(t_{ож}(b_2)) = \left(\frac{10-4}{6} \right)^2 = 1; \quad \sigma^2(t_{ож}(b_5)) = \left(\frac{5-1}{6} \right)^2 = \left(\frac{4}{6} \right)^2 \approx 0,44;$$

Бастапқы кестені алынған нәтижелермен толықтырамыз:

Жұмыс	Қай жұмыстан соң	$t_{нес}$	$t_{еер}$	$t_{онм}$	$t_{ож}$	$t_{ож}^*$	σ^2
b_1	—	8	5	3	5	6	0,69
b_2	—	10	9	4	8	8	1,00
b_3	—	6	2	1	3	4	0,69
b_4	b_1	9	7	1	6	6	1,78
b_5	b_1	5	4	1	4	3	0,44
b_6	b_3	2	1	1	1	2	0,03
b_7	b_2, b_5, b_6	4	2	1	2	3	0,25
b_8	b_2, b_5, b_6	13	5	4	6	9	2,25
b_9	b_4, b_7	8	2	1	3	5	1,36
b_{10}	b_3	17	8	6	9	13	3,36
b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	10	8	2	7	7	1,78

Сонымен үш-параметрлі модель бір-параметрліге келтірілді. Енді желілік график құрып, оның уақыттық параметрлерін есептей аламыз (14.7-сурет).



14.7-сурет

Уақыттық параметрлер

Жұмыс	Алдындағы жұмыс	$t_{ож}$	σ^2
b_1	—	5	0,69
b_2	—	8	1,00
* b_3	—	3	0,69
b_4	b_1	6	1,78
b_5	b_1	4	0,44
b_6	b_3	1	0,03
b_7	b_2, b_5, b_6	2	0,25
b_8	b_2, b_5, b_6	6	2,25
b_9	b_4, b_7	3	1,36
* b_{10}	b_3	9	3,36
* b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	7	1,78

Күтілетін сындарлы уақыт $T_{кр} = 19$. Сындарлы жолда жатқан жұмыстар

b_3, b_{10}, b_{11} болғандықтан, сындарлы жол дисперсиясы:

$$\sigma_{кр}^2 = \sigma^2(b_3) + \sigma^2(b_{10}) + \sigma^2(b_{11}) = 0,69 + 3,36 + 1,78 = 5,83.$$

Сындарлы жолдың орташа квадраттық ауытқуы

$$\sigma_{кр} = \sqrt{5,83} \approx 2,41.$$

Проектінің берілген мерзімнен ($T_{дир} = 21$ күн) кеш орындалмауының ықтималдығы:

$$P(t_{кр} \leq 21) = 0,5 + \Phi\left(\frac{21-19}{2,41}\right) = 0,5 + \Phi(0,83) \approx 0,5 + 0,2967 \approx 0,8.$$

Ендеше проектінің берілген мерзімде орындауға 80 процент мүмкіндік бар екен. Проектті орындаудың кепілді уақыт интервалы «үш сигма» ережесінен табылады: $3\sigma_{кр} = 3 \cdot 2,41 = 7,23 \approx 7$. Яғни проект 0,9973 ықтималдығымен 19 ± 7 күнде орындалады.

$$P(12 \leq t_{кр} \leq 26) = P(|t_{кр} - 19| \leq 7) \approx P(|t_{кр} - 19| \leq 3\sigma_{кр}) = 0,9973.$$

Анағұрлым дәл мәндері

$$P(12 \leq t_{кр} \leq 26) = P(|t_{кр} - 19| \leq 7) = 2\Phi\left(\frac{7}{2,41}\right) - 2\Phi(2,90) = 2 \cdot 0,4981 - 0,9962 = 0,9981.$$

$$P(t_{кр} \leq 26) = 0,5 + \Phi\left(\frac{26-19}{2,41}\right) = 0,5 + \Phi(2,90) = 0,5 + 0,4981 = 0,9981.$$

Демек, проектінің орындалу мерзімі 26 күннен аспайды деп нық сеніммен айта аламыз.

Берілген $\gamma = 0,95$ үмітімен проектінің орындалуының максимум ықтимал мерзімін бағалаймыз. Лаплас фкнциясының кестесінен берілген γ үмітіне сай z_γ сенім коэффициентінің интервалын табамыз.

$$P(|t_{кр} - T_{кр}| \leq z_{0,95}\sigma_{кр}) = 2\Phi\left(\frac{z_{0,95}\sigma_{кр}}{\sigma_{кр}}\right) = 2\Phi(z_{0,95}) = 0,95$$

Ендеше

$$2\Phi(z_{0,95}) = 0,95 \Rightarrow \Phi(z_{0,95}) = 0,475 \quad z_{0,95} = 1,96$$

және

$$P(|t_{\text{кр}} - 19| \leq 1,96 \cdot 2,41) = P(|t_{\text{кр}} - 19| \leq 4,72) = P(14,28 \leq t_{\text{кр}} \leq 23,72) = 0,95.$$

Бұл 0,95 үмітімен проектті 14 пен 24 күн аралығында аяқталатындығын көрсетеді.

Берілген γ үмітімен проектінің орындалуының максимум ықтимал мерзімін дәлірек бағалауды мына формуладан аламыз:

$$P(t_{\text{кр}} \leq T) = 0,5 + \Phi\left(\frac{T - T_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}}\right) = 0,5 + \Phi(z_{\gamma}) = \gamma, \text{ где } T - T_{\text{кр}} = z_{\gamma} \sigma_{\text{кр}}.$$

Біздің жағдайда

$$0,5 + \Phi(z_{0,95}) = 0,95 \quad \Phi(z_{0,95}) = 0,45,$$

$$z_{0,95} = 1,65 \text{ н}$$

$$T = T_{\text{кр}} + z_{\gamma} \sigma_{\text{кр}} = 19 + 1,65 \cdot 2,41 \approx 19 + 3,98 = 22,98 \approx 23,$$

яғни, $\gamma = 0,95$ үмітімен проектті 23 күннен кеш бітпейді. Бұл кезде

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

түріндегі Лаплас функциясы қолданылған. Сол сияқты мұндай түрдегі Лаплас функциясының тақ, яғни $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, ал $x \geq 5$ кезінде $\Phi(x) \approx 0,5$.

14.2. Алдыңғы есепті екі параметрлі модель жағдайында қарастырыңыз.

14-үй жұмысының тапсырмалары.

14.3. Кестедегі мәліметтерге сүйеніп, үш параметрлі модель үшін

- а) проектінің орындалуын күтетін уақыттың ұзақтығын табу
- б) проектінің берілген мерзімнен кеш орындалмау ықтималдығын табу
- в) проектінің орындалуына кепілді уақыт интервалын анықтау
- г) проектінің берілген мерзімде максимум сенімді түрде жүзеге асуының ықтималдығын бағалау қажет.

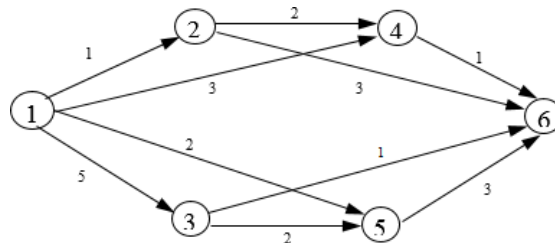
жұмыс	Қай жұмыстан соң басталады	$t_{\text{нec}}$	$t_{\text{вep}}$	$t_{\text{онm}}$
b_1	-	5	3	1
b_2	-	9	7	4
b_3	-	6	2	1
b_4	b_1	8	7	1
b_5	b_1	4	3	1
b_6	b_3	2	1	1
b_7	b_2, b_5, b_6	4	3	1
b_8	b_2, b_5, b_6	12	4	3

b_9	b_4, b_7	9	2	1
b_{10}	b_3	18	10	6
b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	9	7	2

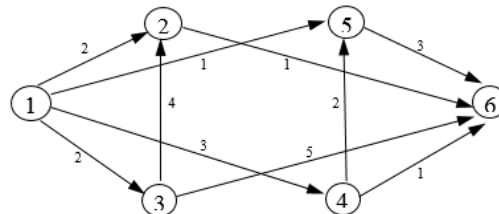
Проектінің директив (берілген) мерзімі $T_{дир} = 24$ күн. Берілген сенімділік $\gamma = 0,95$. Дәл осы есептеулерді екі-параметрлі модел үшін жүргізіп, нәтижелерін салыстырыңыздар. $t_{нес}$ -пессимистік уақыт; $t_{вер}$ -ықтимал уақыт; $t_{опт}$ -оптимум уақыт.

14.4. алдыңғы есепті екі параметрлі модель жағдайында қарастырыңыз.

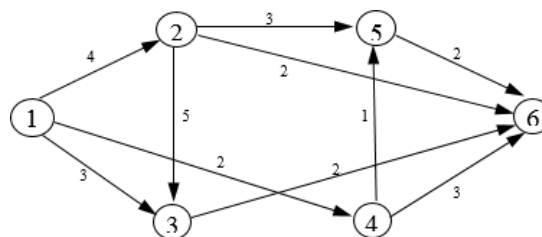
14.5. Желілі графиктің параметрлерін табыңыз және Гант диаграммасын құрыңыз



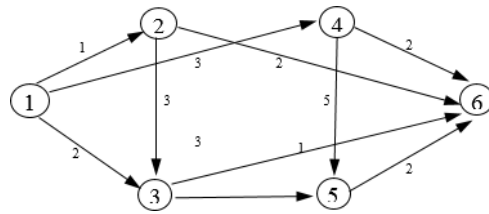
14.6. Желілі графиктің параметрлерін табыңыз және Гант диаграммасын құрыңыз



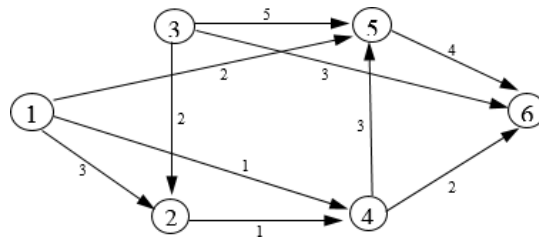
14.7. Желілі графиктің параметрлерін табыңыз және Гант диаграммасын құрыңыз



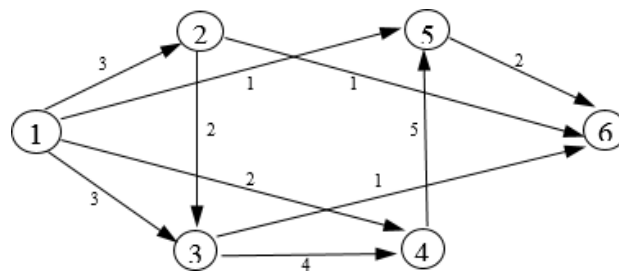
14.8. Желілі графиктің параметрлерін табу және Гант диаграммасын құру керек



14.9. Желілі графиктің параметрлерін табу және Гант диаграммасын құру керек



14.10. Желілі графиктің параметрлерін табу және Гант диаграммасын құру керек



15-дәріс. Желілік проектіні тиімділеудің әдістері

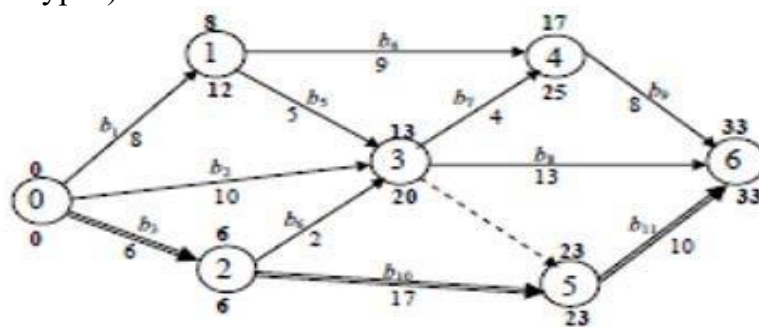
$S = 10$ млн теңге болсын.

Мысал 15.1. Проектінің бір күнінің құны:

Минимум қарқындылықтағы жұмыстың ұзақтығы - $t_{\text{нec}}$ ($t_{\text{нec}} = t_{\text{max}}$), ал ұйғарымды максимум ықтимал қарқындылықтағы жұмыстың ұзақтығы - $t_{\text{онm}}$ ($t_{\text{онm}} = t_{\text{min}}$) деп санап, проектінің құны тиімді орындалуының нұсқасын табу қажет. Қажетті мәліметтер мына кестеде келтірілген.

Жұмыс	Қай жұмыстан соң басталады	$t_{\text{нec}}$	$t_{\text{онm}}$	Жұмысты бір күнге қысқартудың құны S_k
b_1	—	8	3	6
b_2	—	10	4	8
b_3	—	6	1	4
b_4	b_1	9	1	6
b_5	b_1	5	1	3
b_6	b_3	2	1	2
b_7	b_2, b_5, b_6	4	1	3
b_8	b_2, b_5, b_6	13	4	9
b_9	b_4, b_7	8	1	5
b_{10}	b_3	17	6	10
b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	10	2	7

Шешуі: Минимум мерзімде орындалатын проектінің құнын минимумдау қажет. Ол үшін жұмыстардың ұзақтығы максимум болатын желілік график құрамыз (15.1-сурет).



15.1-сурет.

$T_{\text{кр}} = 33$. Проект құны $S(t_{\text{max}}) = 33 \cdot 10 = 330$ млн теңге.

Проект құнынын сындарлы жолдағы жұмыстардың қарқындылығын арттыру есебінен қысқарту:

Сындарлы емес доғалардағы резервтерді табамыз:

$$R(2, 3, 6) = (17 + 10) - (2 + 13) = 27 - 15 = 12,$$

$$R(0, 3, 6) = T_{\text{кр}} - (10 + 13) = 33 - 23 = 10,$$

$$R(0, 3, 4, 6) = 33 - (10 + 4 + 8) = 33 - 22 = 11,$$

$$R(0, 1, 3, 6) = 33 - (8 + 5 + 13) = 33 - 26 = 7,$$

$$R(0, 1, 3, 4, 6) = 33 - (8 + 5 + 4 + 8) = 33 - 25 = 8,$$

$$R(0, 1, 4, 6) = 33 - (8 + 9 + 8) = 33 - 25 = 8,$$

Жалған жұмысты қамтитын сындарлы емес доғалардың резерві:

$$R(2, 3, 5) = 17 - (2 + 0) = 17 - 2 = 15,$$

$$R(0, 3, 5) = (6 + 17) - (10 + 0) = 23 - 10 = 13,$$

$$R(0, 1, 3, 5) = (6 + 17) - (8 + 5 + 0) = 23 - 13 = 10.$$

Ең кіші резервті (0,1,3,6) доғасы иеленеді. Ол жеті күнге тең. Бұл доға барлық сындарлы жолға тиісті. Егер осы сындарлы жолды 7 күнге қысқартсақ, онда осы осы доға арқылы өтетін паралель сындарлы жол туындайды.

Сындарлы жолдағы жұмыстарды қысқартудың нұсқаларын қарастырамыз:

Белгілеулер:

S - проектідегі бір күннің құны,

S_k - проектідегі b_k жұмысының ұзақтығын бір күнге қысқарту құны,

Δ_k - бір күнге b_k жұмысын қысқартқандағы проектінің құны,

t_k^0 - b_k жұмысын қысқартауға болатын күн саны,

$\Delta_k < 0$ болса, проект құны өседі.

$\sum \Delta_k$ - b_k жұмысын бірнеше күнге қысқартқандағы проект құнының қосынды қысқаруы.

$$\Delta_k = S - S_k.$$

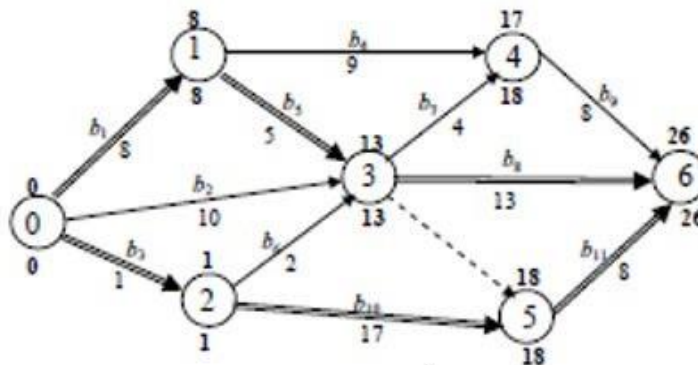
Бізде $S = 10$ млн теңге

ЖҰМЫС	$t_{\max}$	$t_{\min}$	S_k	$\Delta_k = S - S_k$	t_k^0	$\sum \Delta_k = \Delta_k$
b_3	6	1	4	$10 - 4 = 6$	$6 - 1 = 5$	$6 \cdot 5 = 30$
b_{10}	17	6	10	$10 - 10 = 0$	-	-
b_{11}	10	2	7	$10 - 7 = 3$	2	$3 \cdot 2 = 6$

Бәрінен бұрын b_3 жұмысын қысқартқан ұтымдырақ. Оны қысқартқан әрбір күн проектінің құнын 6 бірлікке азайтады, бірақ бұл жұмыс максимум 5 күнге қысқара алады (жұмыстың максимум ұзақтығы бір күнге дейінгі). Сындарлы жолды қысқартуы мүмкін тағы 2 күн қалды.

Келесі қысқартуға ұтымды - b_{11} жұмысы. Ықтимал қысқару резерві 8 күн. Оны қысқаратын әрбір күн проектінің жалпы құнын 3 млн теңгеге арзандатады. Демек бұл жұмысты 2 күнге қысқартамыз.

Проектінің жалпы құны бұл кезде $30 + 6 = 36$ млн теңгеге қысқарады. Нәтижесінде екінші сындарлы жол пайда болды.



15.2-сурет.

Проект құнын әрі қарай арзандату тек паралель екі сындарлы жолды бір уақытта қысқарту арқылы жүзеге асады.

Екінші нұсқадағы сындарлы уақыт - 26 күн.

Сындарлы емес жаңа доғалардың резервтерін қарастыралық

$$R(1, 4, 6) = (5 + 13) - (9 + 8) = 18 - 17 = 1,$$

$$R(3, 4, 6) = 13 - (4 + 8) = 13 - 12 = 1,$$

$$R(0, 3) = (8 + 5) - 10 = 13 - 10 = 3.$$

$b_6 = (2,3)$ жұмысы мен $\phi = (3,5)$ жалған жұмысы паралель сындарлы жолдардағы оқиғаларды жалғастырады. Бұл оқиғалар нөлдік уақыт резервін иеленген. Демек, бұл жұмыстарға сай доғалар резерві осы жұмыстардың толық резервтеріне тең немесе басқаша айтқанда осы доғалармен қосылған доғалардың басталу мерзімдерінің айырмасынан доғаның өз ұзындығын шегергенге тең.

$$R(2, 3) = r_{\pi}(b_6) = 13 - 1 - 2 = 10,$$

$$R(3, 5) = r_{\pi}(\phi) = 18 - 13 - 0 = 5.$$

Ең кіші резерв иеленген доғалар (1,4,6) мен (3,4,6). Ол бір күнге тең. Демек егер 1 күнге сындарлы жолдарды қысқарта алсақ, онда осы доғалардың біреуі немесе екеуі де сындарлы бола алады.

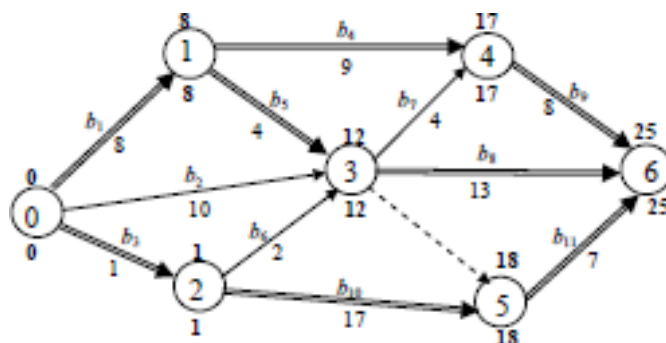
Паралель сындарлы жолдардағы жұмыстар жұбын қысқарту. Паралель сындарлы жолдардың әрқайсысынан қысқарту құны ең аз жұмыс таңдалады. Жоғарыдағы суреттегі (0,2,5,6) сындарлы жолында бұған b_3 жұмысын сай келеді. Бірақ оның қысқарту резерві таусылған. Ал келесі минимум құндва қысқаратын - b_{11} жұмысы. Екінші сындарлы (0,1,3,6) жолындағы мұндай жұмыс - b_5 жұмысы. Осы жұмыстарды қысқартуға болатын нұсқаларды тексеру қажет.

Барлық нұсқаларды талдаймыз. b_5 жұмысы ықтимал ұзақтығына дейін қысқарған. b_{10} жұмысын қысқарту проект құнын азайтпайтынын көрдік.

Сонда қалған жұмыстар b_{11} мен b_1 , b_{11} мен b_5 , b_{11} мен b_8 . Бізде b_{11} жұмысы 8 күнге дейін қысқартылып қойған.

Жұмыстар	Қысқарту резерві	$s_k + s_i$	$\Delta_{ki} = S - (s_k + s_i)$	t_{ki}^0	$\sum \Delta_{ki} = \Delta_{ki}$
$b_{11} + b_1$	$\min(8 - 2, 8 - 3) = 5$	$7 + 6$	$10 - 13 = -3$	–	–
$b_{11} + b_5$	$\min(8 - 2, 5 - 1) = 4$	$7 + 3$	$10 - 10 = 0$	1	0
$b_{11} + b_8$	$\min(8 - 2, 13 - 4) = 6$	$7 + 9$	$10 - 16 = -6$	–	–

b_{11} мен b_1 жұмыстарын 1 күнге қысқарту проект құнын 3 ақша бірлігіне өсіреді, b_{11} мен b_8 жұмыстарын 1 күнге қысқарту проект құнын 6 ақша бірлігіне өсіреді, b_{11} мен b_5 жұмыстарын 1 күнге қысқарту проект құнын өсірмейді де, кемітпейді де, бірақ жалпы ұзақтық мерзімді қысқартады. Сондықтан, осы қысқартуды қолданған жөн.



15.3-сурет.

Параллель үшінші сындарлы жол (0,1,4,6) туындады. Жұмыстарды проект құнының азайуымен қатар қысқарту одан әрі мүмкін емес. Өйткені сындарлы жолды қыс қарту үшін b_{11} мен b_5 жұмыстарымен қатар жаңа сындарлы жолдағы жұмыстардың b_4 немесе b_9 жұмыстарын бірін қысқарту керек еді.

Бірақ ендігі қықартылып қойған b_{11} мен b_5 жұмыстары проект құнын кеміте алмайды, ал олармен бірге тағы бір жұмысты қысқарту қосымша қаражат шығаруды қажет етеді. Ендеше құн бойынша проектiнiң орындалу ының тиімді нұсқасы алынды (15.3-сурет).

Оның орындалуының минимум мерзімі – 25 күн.

Орындалу құны $330 - 36 = 294$ млн теңге.

Бұны басқаша да есептеуге болады:

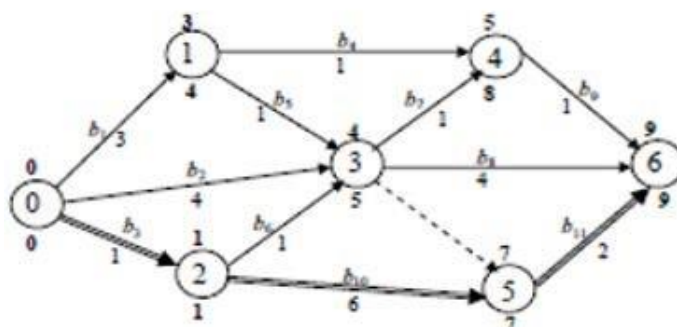
$25 \cdot 10 = 250$ – қосымша шығынсыз 25 күнгі жұмыс құны. Оған 5 күнге b_3 жұмысын, 3 күнге b_{11} жұмысын және 1 күнге b_5 жұмысын сақтауға кеткен шығынды қосу керек: $4 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 44$ млн теңге. $S(T_{opt}) = 250 + 44 = 294$ млн теңге. Тиімді нұсқадағы b_2, b_6, b_7 жұмыстарының уақыт резервтері:

$r_{II}(b_2) = 12 - 0 - 10 = 2$ күн, $r_{II}(b_6) = 12 - 1 - 2 = 9$ күн, $r_{II}(b_7) = 17 - 12 - 4 = 1$ күн.

Қалған жұмыстар қатаң түрде графикке сай орындалады. Төмендегі кестеде келтірілген мәліметтер арқылы проект барлық максимум қарқынды жұмыстармен орындалғандағы құнды есептеп, алынған нәтижелерді салыстыралық

ЖҰМЫС	$t_{\max}$	$t_{\min}$	t_k^0	S_k	
b_1	8	3	5	6	30
b_2	10	4	6	8	48
b_3	6	1	5	4	20
b_4	9	1	8	6	48
b_5	5	1	4	3	12
b_6	2	1	1	2	2
b_7	4	1	3	3	9
b_8	13	4	9	9	81
b_9	8	1	7	5	35
b_{10}	17	6	11	10	110
b_{11}	10	2	8	7	56

$$S_{\min} = 30 + 48 + 20 + 48 + 12 + 2 + 9 + 81 + 35 + 110 + 56 = 451.$$



15.4-сурет.

Проект барлық максимум қарқынды жұмыстармен орындалғанда 9 күнде аяқталады да, оның құны $9 \cdot 10 + 451 = 90 + 451 = 541$ млн теңге, яғни ол тиімді нұсқаға қарағанда екі қымбатқа түседі екен.

Проекті құнын сындарлы жолдар мейлінше мол жұмыстар санын қамтитын етіп қысқартуға болады. Бұл кезде ең бірінші қысқарту құны жоғары жұмыстарды қысқарту қажет.

«Кері жүріс» амалын қолданамыз. Барлық жұмыстарды минимум қысқартқан соң туындаған сындарлы емес доғалардың резервтерін табамыз.

$$\begin{aligned} R(2, 3, 5) &= 6 - (1 + 0) = 6 - 1 = 5, \\ R(0, 3, 5) &= (1 + 6) - (4 + 0) = 7 - 4 = 3, \\ R(0, 1, 3, 5) &= (1 + 6) - (3 + 1 + 0) = 7 - 4 = 3, \\ R(2, 3, 6) &= (6 + 2) - (1 + 4) = 8 - 5 = 3, \\ R(0, 3, 6) &= 9 - (4 + 4) = 9 - 8 = 1, \\ R(0, 1, 3, 6) &= 9 - (3 + 1 + 4) = 9 - 8 = 1, \\ R(2, 3, 4, 6) &= (6 + 2) - (1 + 1 + 1) = 8 - 3 = 5, \\ R(0, 3, 4, 6) &= 9 - (4 + 1 + 1) = 9 - 6 = 3, \\ R(0, 1, 3, 4, 6) &= 9 - (3 + 1 + 1 + 1) = 9 - 6 = 3, \\ R(0, 1, 4, 6) &= 9 - (3 + 1 + 1) = 9 - 5 = 4. \end{aligned}$$

Сындарлы уақыт минимум болып қалуы керек, яғни ол тоғыз күнге тең. Бұл сындарлы жолда жатқан жұмыстардың өзгеріссіз қалатындығын білдіреді. Олардың ықтимал мүмкін шекке дейін қысқарған ұзақтығы одан әрі өзгермейді. Сындарлы емес жолдарға тап болған жұмыстарды мүмкіндігінше молынан паралель сындарлы жолға ауыстыру арқылы олардың ұзақтығын ұлғайту қажет.

Бұл кезде ұзақтығы қатар ұлғайтылатын жұмыстардың анағұрлым ұтымды комбинациясын таңдалады. Бізде параллель сындарлы емес үш доға пайда болды (0,3,6), (0,1,3,4) және (0,1,4,6). Бұл доғалардың резервтері тиісінше бір, үш, және төртке тең. Ең кіші өлшем (0,3,6) доғасында. Бір мезгілде бұл доғаларды бір күнге ұлғайту үшін әрбір доғадан қосынды қысқаруының құны максимум болатын бір жұмысты таңдаймыз. Сонда бұл жұмыстарды бір күнге қысқартудың бас тарту бүкіл проектінің орындалуының минимум мерзімі сақталғандағы осы қадамдапроект құнының аздап кемуіне соқтырады. 3 оқиғасының резерві бір күнге тең болғандықтан, бұл оқиғаның орындалу мерзімі бұрынғыша қалуы немесе бір күнге ұзаруы мүмкін. Бұл кездегі (3,5) жалған жұмысының резерві кез келген жағдайда $7-5=2$ шамасынан кем бомайды. Демек, (2,3,5) доғасын әзірше қарастырмауға болады.

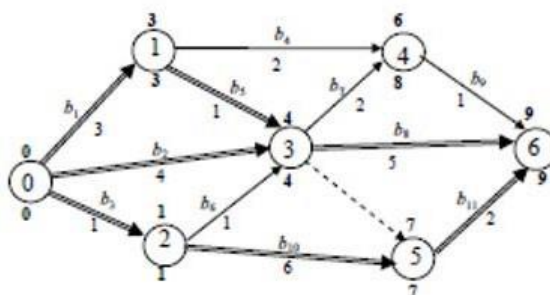
Параллель сындарлы емес жолдарды ұлғайтудың ықтимал нұсқаларын қарастыралық. Біздің сындарлы жолға тап болмаған жұмыстардың арасында бір күндік қысқару құны ең үлкені - b_8 жұмысы. Ол 9 млн теңге құрайды. Ол осы жұмысты қамтитын доғалардың арасындағы минимум резерв иеленетін сындарлы емес (0,3,6) доғасында жатыр. Резерв бір күнге тең. Бұл жұмыстың артық артық қысқару күнін жойсақ, проект құнын 9 млн теңгеге азайтамыз, сонда бұл доға сындарлы доғаға айналады. Осы жұмысты қамтитын, резерві бірге тең (0,1,3,6) доғасы да сындарлы доғаға айналады. b_8 жұмысымен қатар b_9 немесе b_4 және b_7 жұмыстарының мерзімін қысқарта аламыз. Қатарына сындарлы емес үш доғаның ұзындықтарын ұлғайтуды b_1 мен b_2 немесе b_2, b_4, b_5 , немесе b_2, b_4, b_7 немесе b_2, b_9 жұмыстарының мерзімін ұзарту есебінен де жүзеге асыра аламыз. Ал b_1, b_8 және b_4, b_5, b_8 жұмыстарының жиынтығын қарастырмаймыз, өйткені b_1, b_8 бен b_5, b_8 жұмыстары (0,3,6) доғасы сияқты бір күндік резерві бар (0,1,3,6) доғасында жатыр. Демек, бұл жұмыстардың әрқайсысының мерзімін бір күнге ұзарту бұл доғаны 2 күнге ұзартуға соқтырады. Бұл мүмкін емес.

Кестедегі мәліметтерге сүйеніп, мейлінше ұтымды комбинацияны табалық:

Доға	(0,3,6)		(0,1,3,4,6)				(0,1, 4,6)		
b_i	b_2	b_3	b_1	b_5	b_7	b_9	b_1	b_4	b_9
s_i	8	9	6	3	3	5	6	6	5

Жұмыс	Қысқартудың қосынды құны $\sum s_i$
$b_8 + b_9$	$9 + 5 = 14$
$b_4 + b_7 + b_8$	$6 + 3 + 9 = 18$
$b_1 + b_2$	$6 + 8 = 14$
$b_2 + b_4 + b_5$	$8 + 6 + 3 = 17$
$b_2 + b_4 + b_7$	$8 + 6 + 3 = 17$
$b_2 + b_9$	$8 + 5 = 13$

Сонымен, бәрінен де ұтымдысы - b_8, b_4 және b_7 жұмыстарының мезгілін бір күнге қысқарту екен. Бұл 18 млн теңге үнемдеуге мүмкіндік беріп, жаңа (0,3,6) мен (0,1,3,6) сындарлы жолдарын тудырады (15.5-сурет).



15.5-сурет

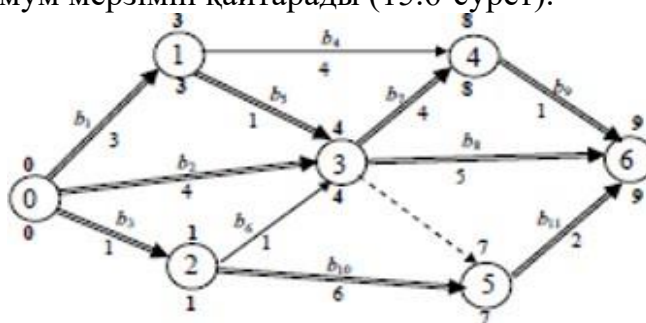
Жаңа сындарлы емес жолдар: (1,4,6) мен (3,4,6).

Қалған сындарлы емес b_4 , b_6 , b_7 , b_9 , жұмыстардың ішіндегі бір күндік мерзімі қысқаруының құны ең үлкені - b_4 жұмысы. Бұл жұмыстың бір күндік мерзімге қысқаруы 6 млн теңге. b_4 жұмысы жаңа пайда болған сындарлы доғаларды ескергендегі резерві $R(1,4,6) = (1+5) - (2+1) = 6 - 3 = 3$ күн болатын (1,4,6) доғасында жатыр. (3,4,6) доғасы иеленетін резерві $R(3,4,6) = 5 - (2+1) = 2$ күн. Енді b_4 жұмысының мерзімі 9 дан 2 күнге, b_7 жұмысының мерзімі 4 тен 2 күнге қысқарды, ал b_9 жұмысының мерзімі максимум қысқару 8 күннен бір күнге дейін қысқаруға ие болды. Сонымен, параллель, сындарлы емес (1,4,6) мен (3,4,6) доғаларды екі күнге ұзарта аламыз. Мұны b_9 жұмысының немесе b_4 және b_7 жұмыстарының мерзімін ұлғайту арқылы жүзеге асыра аламыз. Ең жақсы нұсқаны табалық.

Доға	(1,4,6)		(3,4,6)	
b_k	b_4	b_9	b_7	b_9
s_k	6	5	3	5

Жұмыс	Қысқарудың қосынды құны $\sum s_k$
b_9	5
$b_4 + b_7$	$6 + 3 = 9$

Мұнда b_7 мен b_4 жұмыстарының мерзімдерін қатар қысқарту үлкен үнем береді. Оларды екі күнге ұлғайтып, $2 \cdot 9 = 18$ млн теңге үнемдейміз. Нәтижесінде (3,4,6) доғасы сындарлыға айналады да, b_7 жұмысы өзінің ұйғарымды максимум мерзімін қайтарады (15.6-сурет).

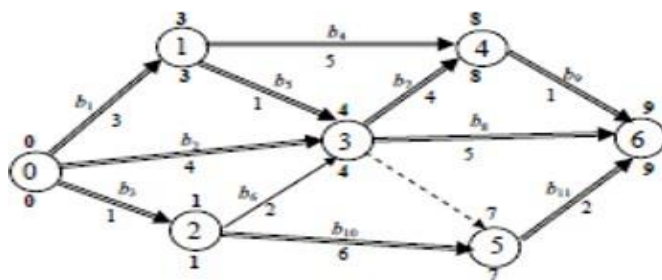


15.6-сурет.

Сындарлы емес болып тек қана b_4 және b_6 жұмыстары қалды. b_6 жұмысы әртүрлі сындарлы жолда жатқан, яғни уақыттық нөлдік резервті оқиғаларды жалғастырады. b_6 жұмысын қамтитын (2,3) доғасының уақыттық резерві осы жұмыстың толық резервіне тең $r_{II}(b_6) = 4 - 1 - 1 = 2$ күн, ал b_4 жұмысын қамтитын (1,4) доғасының резерві $r_{II}(b_4) = 8 - 3 - 4 = 1$ күн. Біз b_6 жұмысын 2 ден 1 күнге, ал b_4 жұмысын 9 дан 4 күнге қысқарттық.

Осыған орай, біз b_6 жұмысының мерзімін 1 күнге қысқартып, оған максимум мерзімін қайтара аламыз. Осылайша b_4 жұмысын да бір күнге ұзарта аламыз. Осы кезде (1,4) доғасы өзінің уақыттық резервін тауысып, сындарлы доғаға айналады да, уақыт резерві 1 күнге тең (2,3) доғасы сындарлы емес болып қала береді. Өйткені b_6 жұмысының мерзімін одан әрі ұлғайту мүмкін емес.

Бұл кезде проект құны $6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 8$ млн теңгеге қысқарады, өйткені b_4 жұмысының мерзімін бір күнге қысқарту 6 млн теңгеге тең, ал b_6 жұмысыныңкі – 2 млн теңге. Проект 9 күнде аяқталады деп санағанда, әрі қарай оның құнын кеміте алмапймыз, өйткені жалғыз сындарлы емес b_6 жұмысы ықтимал максимум мерзімді иеленеді (15.7-сурет)



15.7-сурет.

Ыңғайлы болуы үшін толтырылған барлық қадамды жалпы кестеге енгіземіз:

Қадам №	Жұмыстар	$\sum s_k$	t^y	$\Delta S = (\sum s_k) \cdot t^y$
1	$b_4 + b_7 + b_8$	$6 + 3 + 9 = 18$	1	18
2	$b_4 + b_7$	$6 + 3 = 9$	2	18
3	b_4	6	1	6
4	b_6	2	1	2

Мұндағы t^y - жұмыс мерзімін ұлғайту уақыты (күн есебімен),
 ΔS - үнемделген қаржы (млн теңге).

ЖҰМЫС	$t_{\max}$	$t_{\min}$	$t_{\text{сакр}}$			
b_1	8	3	3	5	6	30
b_2	10	4	4	6	8	48
b_3	6	1	1	5	4	20
b_4	9	1	5	4	6	24
b_5	5	1	1	4	3	12
b_6	2	1	2	0	2	0
b_7	4	1	4	0	3	0
b_8	13	4	5	8	9	72
b_9	8	1	1	7	5	35
b_{10}	17	6	6	11	10	110
b_{11}	10	2	2	8	7	56

Жұмыстарды қысқартуға бөлінген қосымша қаржы:

$$S_{\text{доп}} = 30 + 48 + 20 + 24 + 12 + 72 + 35 + 110 + 56 = 407 \text{ млн теңге.}$$

Жобаның 9 күнінің құны $10 \cdot 9 = 90$ млн теңге. Жоба минимум мерзімде аяқталғандағы оның жалпы минимум құны $90 + 407 = 497$ млн теңгені құрайды.

15- дәрісті нысықтау сұрақтары

1. Проект құнының сындарлы жолдағы жұмыстардың қарқындылығын арттыру есебінен қысқарту.
2. Сындарлы жолдағы жұмыстарды қысқартудың нұсқалары.
3. Паралель сындарлы жолдардағы жұмыстар жұбын қысқарту.
4. Проекті құнын сындарлы жолдар мейлінше мол жұмыстар санын қамтитын етіп қысқарту.
5. Ұзақтығы қатар ұлғайтылатын жұмыстардың анағұрлым ұтымды комбинациясын таңдау.

15-семинар сабақ. «Тура жүріс» әдісінің қадамдарын талдау арқылы желілік проектілерді тиімділеу.

Алдыңғы дәрісте баяндалған жолмен алған нәтижені проектінің құны бойынша тиімді нұсқаны алған соң, параллель жолдардағы жұмыстарды мейлінше ұтымды қысқартуды жалғастыра отырып, «тура жүріс» әдісімен де ала аламыз. Біз бұрынғыдай сындарлы жолдардың ұзындықтарын қысқартамыз, бірақ проект құны ұлғая бастайды. Бұл үдерісті сындарлы жолдардың кемінде біреуі өзінің минимум ықтимал мерзіміне жететін жұмыстарды ғана қамтығанда тоқталады. Әдетте «кері жүріс» әдісі «тура жүріс» әдісіне қарағанда саны аз қадамды қажет етеді. Осыны «тура жүріс» әдісінің қадамдарын талдау арқылы көрсетелік.

Белгілеулер енгізелік:

R_k^i - b_k жұмысының i -қадамға қалған қысқару резерві;

T_k^i - сындарлы жолдың i -қадамда алынған ұзындығы;

S^i - проектінің i -қадамнан кейінгі жалпы құны;

$\Delta^i = S - \sum s_k$ - таңдалған жұмыстар жиынтығының мерзімін бір күнге қысқартқандағы үнемделген қаржы;

t^0 - берілген қадамдағы таңдалған жұмыс жиынтық қысқаратын күн саны.

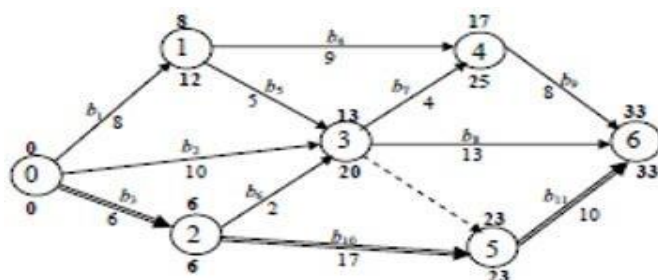
$S^i = S^{i-1} - t^0 \Delta^i$. Егер $\Delta^i > 0$, онда проектінің i -қадамдағы жалпы құны азаяды, ал $\Delta^i < 0$ болса - көбейеді.

15- аудиториялық жұмыстың тапсырмасы.

15.1. Желілік график арқылы қысқа мерзімде аяқталатын проектінің минимум құнын табу қажет (15.1-сурет)..

Шешуі: Желілік график құруды барлық жұмыстың максимум мерзімді кезінен бастайық (15.1-сурет). $T_{кр}^0 = 33$, Проект құны $S^0 = 330$.

1⁰-қадам. Сындарлы жолдан қысқару мерзімінің құны ең кіші жұмысты табамыз: ол - b_3 . Қажетті қысқарту резерві жұмыстың өз резерві мен осы жұмысты қамтитын сындарлы учаскелерге тірелген сындарлы емес доғалар резервінің минимумы ретінде анықталады.



15.1-сурет.

Бұл қадамдағы b_3 жұмысының мерзімін қысқарту резерві 5 күн, ал сындарлы емес доғалар резерві 7 күн, сондықтан жұмыс мерзімін 5 күнге қысқартамыз:
 $t^0 = \min(5; 7) = 5$.

$L_{\text{крит}}$	I (0, 2, 5, 6)		
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}
s_k	4	10	7
R_k^1	5	11	8

Қадам №	жұмыс	$\sum s_k$	Δ^i	t^0	$t^0 \cdot \Delta^i$	T_k^i	S^i
0	–	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	$10 - 4 = 6$	5	30	28	300

Жаңа сындарлы жол туындамады.

$$T_{кр}^1 = 33 - 5 = 28, S^1 = 330 - 30 = 300.$$

2⁰-қадам. Сындарлы жол бұрынғысынша қалғанымен, b_3 жұмысының мерзімін қысқарту резерві нөлге айналды. Енді сындарлы жолды қысқартуды қысқарту құны минимум жұмыс есебінен таңдаймыз, ондай жұмыс - b_{11} . Оны қысқарту резерві 8 күн. Бұл қадамдағы сындарлы емес доғалардың минимум резерві, яғни (0,1,3,6) доғасының резерві екі күнге тең. Демек, $t^0 = \min(8; 2) = 2$.

$L_{\text{крит}}$	I (0, 2, 5, 6)		
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}
s_k	4	10	7
R_k^2	0	11	8

Қадам №	жұмыс	$\sum s_k$	Δ^i	t^0	$t^0 \cdot \Delta^i$	T_k^i	S^i
0	–	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	$10 - 4 = 6$	5	30	28	300
2	b_{11}	7	$10 - 7 = 3$	2	6	26	294

Параллель сындарлы жол (0,1,3,6) туындады (15.2-сурет).

Енді $T_{кр}^2 = 28 - 2 = 26, S^2 = 330 - 6 = 294$.

3⁰-қадам. Бізде параллель екі сындарлы жол бар. Олардың әрқайсысынан қысқарту мерзімінің құны ең аз бір жұмыстан таңдаймыз.

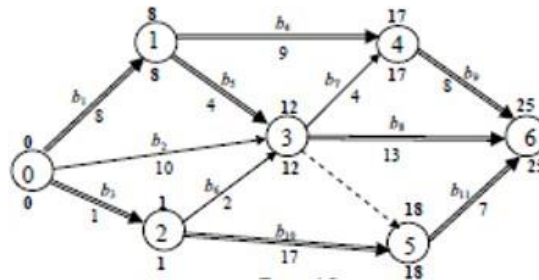
$L_{\text{крит}}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)		
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8
s_k	4	10	7	6	3	9
R_k^3	0	11	6	5	4	9

Бұл жұмыстар - b_5 және b_{11} . b_{11} жұмысының қысқарту резерві 6 күнге идеян қысқарды. Сындарлы емес (1,4,6) мен (3,4,6) доғалардағы ең кіші қысқарту құны бір күнге тең. Демек,

$$t^c = \min\{R_{11}^3, R_5^3, R(1, 4, 6), R(3, 4, 6)\} = \min\{6, 4, 1, 1\} = 1.$$

Қадам No	жұмыс	$\sum s_k$	Δ^i	t^0	$t^0 \cdot \Delta^i$	T_{Σ}^i	S^i
0	—	—	—	—	—	33	330
1	b_3	4	$10 - 4 = 6$	5	30	28	300
2	b_{11}	7	$10 - 7 = 3$	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	$3 + 7 = 10$	$10 - 10 = 0$	1	0	25	294

Сонымен, үшінші қадамда проект құны бойынша тиімді нұсқа табылды (15.8-сурет). Жаңа сындарлы жол (0,1,4,6) туындады, (1,4,6) доғасы сындарлығы айналды.



15.8-сурет.

Қосымша шығындарды мейлінше үнемдейтін сындарлы жолдарды қысқарту үдерісін жалғастыралық. Бұл кезде проект құнының ұлғайа бастайтынына назар аудармаймыз.

4⁰-қадам. Қалған сындарлы емес доғалар резервтері:

$$R(0, 3) = (8 + 4) - 10 = 2; \quad R(2, 3) = r_{\Sigma}(b_6) = 12 - 1 - 2 = 9;$$

$$R(3, 4) = r_{\Sigma}(b_7) = 17 - 12 - 4 = 1; \quad R(3, 5) = 18 - 12 = 6.$$

b_5 және b_{11} жұмыстарының резервтері бір күнге кеміді. Бізде енді үш параллель сындарлы жол бар. Қысқарылатын жұмыстардың ең ұтымды комбинациясын қарастыралық.

$L_{\text{қызғ}}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)		
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_2	b_8	b_1	b_4	b_9
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5
R_k^+	0	11	5	5	3	9	5	8	7

Әрбір сындарлы жолдан қысқарту құны ең кіші жұмыстарды тандаймыз. Олар b_{11} ($c_{11} = 7$ млн теңге), b_5 ($c_5 = 3$ млн теңге), және b_9 ($c_9 = 5$ млн теңге). Қысқартудың қосынды құны $7 + 3 + 5 = 15$ млн теңге. Нөлдік резервті b_3 жұмысы қарастырылмайды. Бірақ бірден екі сындарлы жолға тиесілі b_1 жұмысын қысқарту қатарынан II және III сындарлы жолдарын қысқартады. Демек, b_{11} мен b_1 комбинациясын да қарастыру қажет. Бұл жұмыстардың қосынды қысқарту құны $7 + 6 = 13$ млн теңге. Демек, дәл тап осы жұмыстарды бірінші кезекте қысқарту қажет. Ұйғарымды қысқарту шамасын анықталық. b_1 жұмысының мерзімін қысқарту 1 оқиғаның орындалу уақытын ығыстырады. Сонымен қатар дәл рсы шамаға 3 пен 4 оқиғаларының орындалуы да ығысады. Дегенмен оқиғаның басталу уақыты арасындағы қатынас сақталады. b_{11} жұмысының мерзімінің өзгеруі 6 оқиғасының

басталуына ғана әсер етеді де, 3 пен 4 оқиғасына ықпал етпейді. Бұл (3,4) сындарлы емес доғасының резерві b_{11} мен b_1 жұмыстары мерзімдерінің қысқаруына тәуелді емес. Ал резерві екіге тең (0,3) доғасы b_1 жұмысын қамтитын сындарлы жол учаскесіне тікелей тіреледі. Демек, b_{11} мен b_1 жұмыстары мерзімдерін бұл кезеңде тек 2 күнге ғана қыс қартамыз:

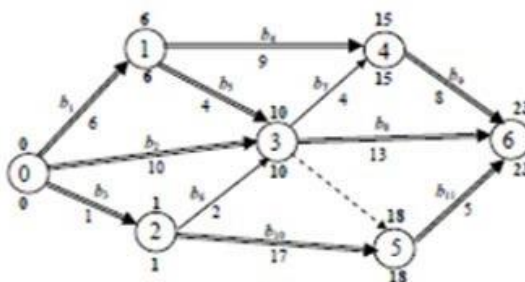
$$t^c = \min\{R_{11}^4, R_1^4, R(0,3)\} = \min\{5, 5, 2\} = 2.$$

Мәліметтерді кестеге толтыралық

№ шаға	Работы	Σs_k	Δ^i	t^c	$t^c \cdot \Delta^i$	$T_{кр}^i$	S^i
0	—	—	—	—	—	33	330
1	b_3	4	$10 - 4 = 6$	5	30	28	300
2	b_{11}	7	$10 - 7 = 3$	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	$3 + 7 = 10$	$10 - 10 = 0$	1	0	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	$6 + 7 = 13$	$10 - 13 = -3$	2	-6	23	300

Сонымен, бұл қадамдағы $T_{кр}^4 = 25 - 2 = 23$, $S^4 = 294 - (-6) = 300$.

Проект орындалу уақыты кішірейгенімен, проект құны өсе бастады. Тағы био сындарлы жол (0,3,6) туындады. b_1 мен b_{11} жұмыстарының резерві екі күнге қысқарды. Сындарлы емес жұмыстар - тек қана b_6 мен b_7 және (3,5) жалған жұмысы.



15.9-сурет.

Олардың әрқайсысы әртүрлі сындарлы жолдарда жатқан оқиғаларды жалғастырады, демек олардың әрқайсысы резервтері сәйкес жұмыстың толық резервімен беттесетін жеке сындарлы емес доғаларды білдіреді. Алынған барлық өзгерістерді желілік графикпен белгілейміз (15.9-сурет).

5⁰-қадам. Қалған сындарлы емес доғалар резервтері:

$$R(2,3) = 10 - 1 - 2 = 7, R(3,4) = 15 - 10 - 4 = 1, R(3,5) = 18 - 10 = 8.$$

Бізде төрт параллель сындарлы жол пайда болды. Мәліметтерді кестеге толтыралық:

$L_{жол}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)			IV (0,3,6)	
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_9	b_2	b_8
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5	8	9
R_k^5	0	11	3	3	3	9	3	8	7	6	9

II және III сындарлы жолдарды қысқарту олардың ортақ b_1 ($c_1 = 6$) арзан жұмыстары есебінен жүзеге асады: II сындарлы жолда b_5 және III сындарлы жолдағы b_9 ($b_5 + b_9 = 3 + 5 = 8$). I және IV жолдарынан ең арзан жұмыстарды аламыз: b_{11} ($s_{11} = 7$) және b_2 ($s_2 = 8$). Ендеше b_1, b_2, b_{11} жұмыстарын

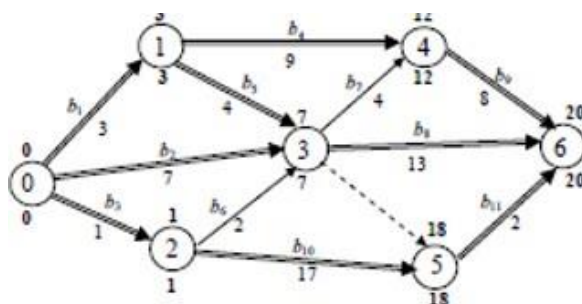
қысқартамыз. Бұл кездегі 1,3,және 4 оқиғалар бірдей ығысады, ал (3,4) доғасы бұрынғы бірге тең резервімен қайтадан сындарлы емеске айналады. Осыған орай, қысқарту уақыты ретінде алатынымыз:

$$t^c = \min\{R_{11}^5, R_1^5, R_2^5, R(2, 3)\} = \min\{3, 3, 6, 7\} = 3.$$

Қорытынды кестеге жасалған қадам нәтижелерін қосамыз:

№ шаға	Работы	$\Sigma \varepsilon_k$	Δ^l	t^c	$t^c \cdot \Delta^l$	$T_{кр}^l$	S^l
0	—	—	—	—	—	33	330
1	b_3	4	$10 - 4 = 6$	5	30	28	300
2	b_{11}	7	$10 - 7 = 3$	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	$3 + 7 = 10$	$10 - 10 = 0$	1	0	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	$6 + 7 = 13$	$10 - 13 = -3$	2	-6	23	300
5	$b_1 + b_2 + b_{11}$	$6 + 8 + 7 = 21$	$10 - 21 = -11$	3	-33	20	333

Сонымен, бесінші қадамның беретіні $T_{кр}^5 = 23 - 3 = 20$, $S^4 = 300 - (-33) = 333$ (15.10-сурет).



15.10-сурет.

6⁰-қадам. Алдыңғы қадам нәтижесінде b_1 мен b_{11} жұмыстарының резервтері нөлге дейін төмендеді. Бұдан былайғы проект мерзімін қысқартуларда бұл жұмыстар қатыспайды. Жаңа сындарлы жол туындаған жоқ. b_2 жұмысының резерві үшке қысқарып, үшке тең болды. Мәліметтер кестеде келтірілген.

$L_{жолы}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)			IV (0, 3, 6)	
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_2	b_2	b_8
ε_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5	8	9
R_k^6	0	11	0	0	3	9	0	8	7	3	9

Енді I сындарлы жолда b_{10} жұмысын ғана қысқартуға болады. Оны қысқарту резерві - 11 күн. II және IV жолдарын b_8 жұмысын немесе b_5 және b_2 қатар қысқарту есебінен жүзеге асады. III жолын осы жолдағы ең арзан жұмыс ретіндегі b_9 есебінен қысқартамыз. Сындарлы емес доғалардың жаңа резервтерін табамыз:

$$R(2, 3) = 7 - 1 - 2 = 4, R(3, 4) = 12 - 7 - 4 = 1, R(3, 5) = 18 - 7 = 11.$$

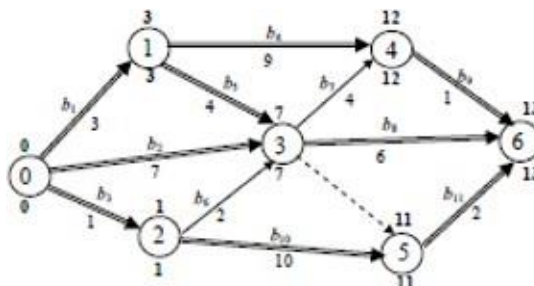
b_{10} , b_8 және b_9 жұмыстарының мерзімдерінің өзгеруі 5 пен 6 оқиғаларының басталу мерзімін өзгерткенімен, 2,3 және 4 оқиғаларының басталу мерзіміне

әсер етпейтіндіктен, қысқарту уақытын таңдағанда (3,5) сындарлы емес доғасының ғана резерві мен қарастырылатын жұмыстар резервіне тоқталу керек: $t^c = \min\{R_{10}^6, R_8^6, R_5^6, R(3, 5)\} = \min\{11, 9, 7, 11\} = 7$.

Сонымен, проект ұзақтығын тағы да 7 күнге қысқарту мүмкіндігін алдық. Алынған нәтижелермен кестені толықтырамыз:

№ шаға	Работы	Σs_k	Δ^i	t^c	$t^c \cdot \Delta^i$	$T_{кр}^i$	S^i
0	—	—	—	—	—	33	330
1	b_3	4	$10 - 4 = 6$	5	30	28	300
2	b_{11}	7	$10 - 7 = 3$	2	6	26	294
3	$b_3 + b_{11}$	$3 + 7 = 10$	$10 - 10 = 0$	1	0	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	$6 + 7 = 13$	$10 - 13 = -3$	2	-6	23	300
5	$b_1 + b_2 + b_{11}$	$6 + 8 + 7 = 21$	$10 - 21 = -11$	3	-33	20	333
6	$b_3 + b_5 + b_{10}$	$9 + 5 + 10 = 24$	$10 - 24 = -14$	7	-98	13	431

Сонымен, енді $T_{кр}^6 = 20 - 7 = 13$ күн, $S^6 = 333 - (-98) = 431$ млн теңге. Жаңа сындарлы жол туындаған жоқ (15.11-сурет)



15.11-сурет

Қысқарту үдерісін жалғастырамыз.

7⁰-қадам. Бұл қадамдағы сындарлы емес доғалардың резервтері:

$$R(2, 3) = 7 - 1 - 2 = 4, R(3, 4) = 12 - 7 - 4 = 1, R(3, 5) = 11 - 7 = 4, \text{ күн.}$$

Мәліметтер кестеге толтырылған:

$L_{\text{крит}}$	I (0, 2, 5, 6)				II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)			IV (0,3,6)	
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_9	b_2	b_8	
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5	8	9	
R_k^7	0	4	0	0	3	2	0	8	0	3	2	

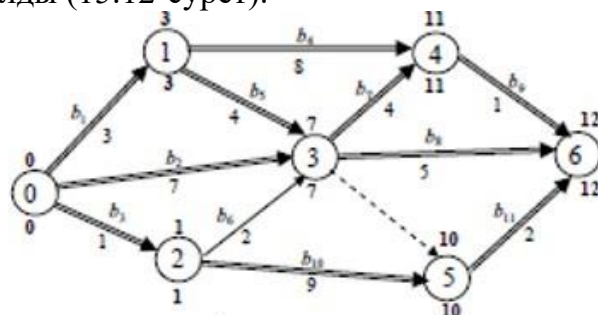
I сындарлы жолды бұрынғыдай тек b_{10} , жұмысы есебінен, II және IV сындарлы жолдарын b_8 жұмысы есебінен, ал III жолды b_4 жұмысы есебінен қысқарта аламыз. Үйғарымды қысқартулар мерзімдерін табамыз. 4 оқиғасы мерзімінің ығысуынан b_4 жұмысы мерзімін қысқарту (3,4) сындарлы емес доғасының резервін кішірейтетінін, ал b_{10} мен b_8 жұмыстарының мерзімін қысқарту мындарлы емес (3,5) доғасының резервін өзгертетінін көреміз. Бұо доғалар сындарлыға айналатындықтан, қысқарту мерзімін таңдағанда осы доғалардың резервтеріні назар аудару керек:

$$t^c = \min\{R_1^7, R_4^7, R_{10}^7, R(3, 4), R(3, 5)\} = \min\{8, 2, 4, 1, 4\} = 1.$$

Уақыттың минимум резерві(3,4) доғасында қалды. Тап сол доға жалпы ұйғарымды қысқару уақытын анықтайды. Соның арқасында ол сындарлы доғаға айналады да, жаңа сындарлы жол пайда болады. Осы қадамның қорытындысын кестеге толтырамыз:

№ шаға	Работы	Σs_k	Δ^i	t^c	$t^c - \Delta^i$	$T_{кр}^i$	S^i
0	—	—	—	—	—	33	330
1	b_3	4	$10 - 4 = 6$	5	30	28	300
2	b_{11}	7	$10 - 7 = 3$	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	$3 + 7 = 10$	$10 - 10 = 0$	1	0	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	$6 + 7 = 13$	$10 - 13 = -3$	2	-6	23	300
5	$b_1 + b_2 + b_{11}$	$6 + 8 + 7 = 21$	$10 - 21 = -11$	3	-33	20	333
6	$b_3 + b_5 + b_{10}$	$9 + 5 + 10 = 24$	$10 - 24 = -14$	7	-98	13	431
7	$b_4 + b_3 + b_{10}$	$6 + 9 + 10 = 25$	$10 - 25 = -15$	1	-15	12	446

Нәтижесінде сындарлы уақыт 12 күнге қысқарды да, проектінің жалпы құны 446 млн теңге болды (15.12-сурет).



15.12-сурет.

b_7 сындарлы жұмысқа айналды. Жаңа сындарлы жолдар $V(0,3,4,6)$ мен $V(1,3,4,6)$ пайда болды.

8⁰-қадам. Бұл қадамдағы сындарлы емес доғалардың резервтері:

$$R(2, 3) = 7 - 1 - 2 = 4,$$

$$R(3, 5) = 10 - 7 = 3.$$

Сындарлы жолдардағы жұмыс резервтерінің қысқаруын қайта есептеп, алынға сындарлы жолдардың кестесін қарастырамыз:

$L_{крит}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)			IV(0,3,6)	
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_9	b_2	b_8
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5	8	9
R_k^8	0	3	0	0	3	1	0	7	0	3	1

$L_{крит}$	V(0, 3, 4, 6)			VI (0, 1, 3, 4, 6)			
b_k	b_2	b_7	b_9	b_1	b_5	b_7	b_9
s_k	8	3	5	6	3	3	5
	3	3	0	0	3	3	0

Сындарлы жолдарға талдау жасау нәтижесінде бұл қадамда b_{10} , b_4 , b_5 және b_2 жұмыс мерзімдерін қысқартамыз. Ұйғарымды қысқарту мерзімін іздегенде осы қадамдағы таңдалған жұмыстардың мерзімін қысқарту уақыты (бұл b_{10} , b_5 , b_2 жұмыстары үшін 3 күн, ал b_4 жұмысы үшін 7 күн) мен әлі сындарлы

емес b_6 жұмысының ((2,3) доғасындағы) уақыт резерві 4 күнді ескеру қажет. Ал (3,5) сынының резервіне назар аудармаймыз, өйткені b_2 , b_5 және b_4 жұмыстарын қысқартқанда 3 пен 4 оқиғасының мерзімдері ығысады да, b_{10} жұмысын қысқарту 5 пен 6 оқиғаларының басталу мерзімдерін өзгертеді. Өйткені олар бірдей шамаға ығысады. 3 пен 5 оқиғаларының арасындағы тқатынас өзгермейді. Сондықтан сындарлы емес (3,5) доғасының резерві калпында қалады.

$$t^c = \min\{R_2^8, R_4^8, R_5^8, R_{10}^8, R(2, 3)\} = \min\{3, 7, 3, 3, 4\} = 3.$$

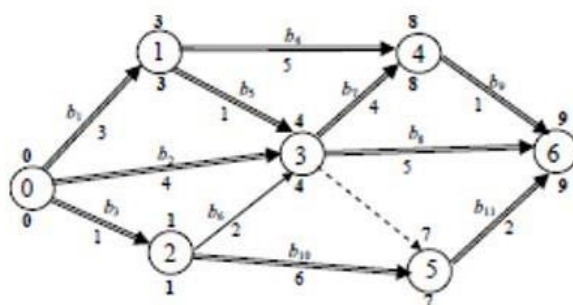
№ шаға	Работы	Σs_k	Δ^i	t^c	$t^c \cdot \Delta^i$	$T_{кр}^i$	S^i
0	—	—	—	—	—	33	330
1	b_3	4	$10 - 4 = 6$	5	30	28	300
2	b_{11}	7	$10 - 7 = 3$	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	$3 + 7 = 10$	$10 - 10 = 0$	1	0	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	$6 + 7 = 13$	$10 - 13 = -3$	2	-6	23	300
5	$b_1 + b_2 + b_{11}$	$6 + 8 + 7 = 21$	$10 - 21 = -11$	3	-33	20	333
6	$b_3 + b_2 + b_{10}$	$9 + 5 + 10 = 24$	$10 - 24 = -14$	7	-98	13	431
7	$b_4 + b_3 + b_{10}$	$6 + 9 + 10 = 25$	$10 - 25 = -15$	1	-15	12	446
8	$b_2 + b_4 + b_5 + b_{10}$	$8 + 6 + 3 + 10 = 27$	$10 - 27 = -17$	3	-51	9	497

Осы қадамды жасалық. Жаңа сындарлы жолдар туындаған жоқ. (2,3) доғасының резерві төрттен бірге дейін кеміді, өйткені 2 оқиғасының басталу мерзімсі бұрынғысынша қалда да, ал 3 оқиғасын ерте басталады.

Қорытындысында алатынымыз:

$$T_{кр}^8 = 12 - 3 = 9 \text{ күн}, S^8 = 446 - (-51) = 2497 \text{ млн теңге}.$$

Алынған нәтижелерді кестеге енгізіп, желілік график құрамыз (15.13-сурет)



15.13-сурет.

Сындарлы жолдардың жаңа сипаттамаларын қарастыралық:

$L_{крит}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)			IV (0, 3, 6)	
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_9	b_2	b_3
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5	8	9
R_k^9	0	0	0	0	0	1	0	4	0	0	1

$L_{крит}$	V (0, 3, 4, 6)			VI (0, 1, 3, 4, 6)			
b_k	b_3	b_7	b_9	b_1	b_5	b_7	b_9
s_k	8	3	5	6	3	3	5
	0	3	0	0	0	3	0

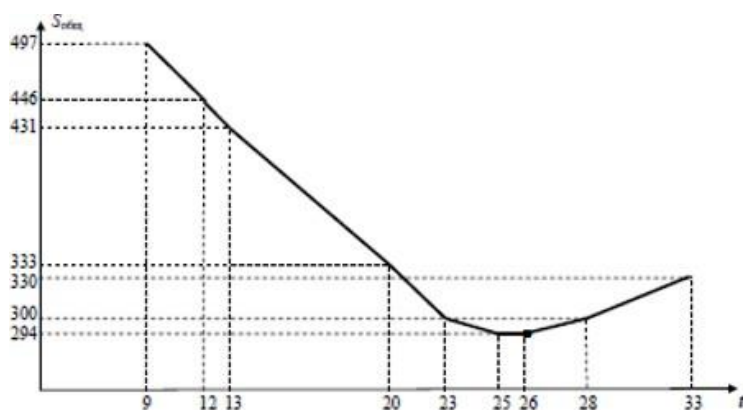
Байқайтынымыз: I (0,2,5,6) сындарлы жолын құрайтын барлық жұмыстар нөлдік қысқару резервін иеленеді, яғни олар өздерінің минимум мерзімдеріне жетеді. Бұ сындарлы уақыттың бұдан әрі қысқара алмайтындығын көрсетеді. Дниек біз проекті орындалу мерзімінің минимум мәнін таптық. Ол 9 күнге тең. Осы мерзімдегі проектінің құны 497 млн теңге. $b_1, b_2, b_3, b_5, b_9, b_{10}$ және b_{11} жұмыстары максимум ықтимал қарқындылықпен (яғни минимум мерзімде) орындалуы қажет, b_6 мен b_7 жұмыстарын жылдамтатуға қосымша шығын керек емес, оларды минимум қарқындылықпен (яғни ұйғарымды максимум мерзіммен) орындай беруге болады. b_4 жұмысын 9 күннен 5 күнге, ал b_8 жұмысын 13 күннен 5 күнге қысқару қажет. Бұл жұмыстардың қарқындалуы мүмкін, бірақ ол проект құнын өсіруде басқа әсер бермейді.

Сонымен, проектінің минимум уақытта минимум құнмен жүзеге асуының нұсқасын іздеудің қадамдық үдерісі аяқталды. Алынған нәтиже «кері жүріс» әдісімен алынған нәтижемен толық сай келеді.

Жасалған қадамдар бойынша проектінің тиімді жалпы құны мен оның орындалу уақытының арасындағы тәуелділік графигін құрамыз. Қажетті мәліметтерді жасалған қадамдардың қорытынды кестесінен аламыз. Нәтиже 15.14-суретінде көрсетілген.

№ шаға	Работы	Σs_k	t^c	$S_{доп}^i = t^c \cdot \Sigma s_k$	$T_{сп}^i$	S^i
0	—	—	—	—	33	330
1	b_1	4	5	$5 \cdot 4 = 20$	28	300
2	b_{11}	7	2	$2 \cdot 7 = 14$	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	$3 + 7 = 10$	1	$1 \cdot 10 = 10$	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	$6 + 7 = 13$	2	$2 \cdot 13 = 26$	23	300
5	$b_1 + b_2 + b_{11}$	$6 + 8 + 7 = 21$	3	$3 \cdot 21 = 63$	20	333
6	$b_3 + b_9 + b_{10}$	$9 + 5 + 10 = 24$	7	$7 \cdot 24 = 168$	13	431
7	$b_4 + b_8 + b_{10}$	$6 + 9 + 10 = 25$	1	$1 \cdot 25 = 25$	12	446
8	$b_2 + b_4 + b_5 + b_{10}$	$8 + 6 + 3 + 10 = 27$	3	$3 \cdot 27 = 81$	9	497

Мұндағы $S_{доп}^i = t^0 \cdot \Sigma s_k$ - i -қадамдағы жұмыс мерзімдерін қысқартуға жұмсалатын қосымша шығындар. Жалпы жұмсалған қосымша шығында 407 млн теңгеге тең.



15.14-сурет.

15 үй жұмысының тапсырмасы

15.2. Проектінің бір күнінің құны: $S = 12$ млн теңге болсын.

Минимум

қарқындылықтағы жұмыстың ұзақтығы - t_{nec} ($t_{nec} = t_{max}$), ал
ұйғарымды

максимум ықтимал қарқындылықтағы жұмыстың ұзақтығы - t_{onm} ($t_{onm} = t_{min}$)

деп санап, проектiнiң минимум құнмен қысқа мерзiмде орындалуының нұсқасын табу қажет. Қажеттi мәлiметтер мына кестеде келтiрiлген.

Жұмыс	Қай жұмыстан соң басталады	t_{nec}	t_{onm}	Жұмысты бір күнге қысқартудың құны S_k
b_1	—	8	3	6
b_2	—	10	4	8
b_3	—	6	1	4
b_4	b_1	9	1	6
b_5	b_1	5	1	3
b_6	b_3	2	1	2
b_7	b_2, b_5, b_6	4	1	3
b_8	b_2, b_5, b_6	13	4	9
b_9	b_4, b_7	8	1	5
b_{10}	b_3	17	6	10
b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	10	2	7

15.3. Проектінің бір күнінің құны: $S = 22$ млн теңге болсын.

Минимум

қарқындылықтағы жұмыстың ұзақтығы - t_{nec} ($t_{nec} = t_{max}$), ал
ұйғарымды

максимум ықтимал қарқындылықтағы жұмыстың ұзақтығы - t_{onm} ($t_{onm} = t_{min}$)

деп санап, проектiнiң минимум құнмен қысқа мерзiмде орындалуының нұсқасын табу қажет. Қажеттi мәлiметтер мына кестеде келтiрiлген

Жұмыс	Қай жұмыстан соң басталады	t_{nec}	t_{onm}	Жұмысты бір күнге қысқартудың құны S_k
b_1	—	8	3	6
b_2	—	10	4	8
b_3	—	6	1	4
b_4	b_1	9	1	6
b_5	b_1	5	1	3
b_6	b_3	2	1	2
b_7	b_2, b_5, b_6	4	1	3
b_8	b_2, b_5, b_6	13	4	9
b_9	b_4, b_7	8	1	5
b_{10}	b_3	17	6	10
b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	10	2	7

