

М. К. Дауылбаев

ЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРО-
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
С МАЛЫМ
ПАРАМЕТРОМ

$\varepsilon \rightarrow 0$

Алматы 2009

М. К. Дауылбаев

ЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Алматы

«Қазақ университеті»

2009

ББК 22.161.6
УДК 517.948.34
Д 12

Рекомендовано к изданию
Ученым советом механико-математического факультета
и РИСО КазНУ им. аль-Фараби

Рецензенты:

академик НАН РК, доктор физико-математических наук,
профессор *К.А. Касымов*;
доктор физико-математических наук, профессор *Д.С. Джумабаев*

Дауылбаев М.К.

Д 12 Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром. – Алматы: Казак университеті, 2009. - 190 с.

ISBN 9965-30-761-X

В пособии изложены основы асимптотической теории сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений произвольного порядка. Получены явные формулы решений, даны асимптотические оценки решений и разности между решениями линейных сингулярно возмущенных и невозмущенных задач. Построены и обоснованы асимптотические разложения решений этих уравнений.

Книга предназначена для студентов и магистрантов специальности «Математика», а также для специалистов в области теории дифференциальных уравнений, прикладной математики и механики.

Д $\frac{1602070100 - 064}{460 (05) - 09}$ 059-05

ББК 22.161.6

ISBN 9965-30-761-X

© Дауылбаев М.К., 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Раздел 1. Задача Коши без начального скачка для сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений для линейных интегро-дифференциальных уравнений.....	7
1.1. Постановка задачи	7
1.2. Фундаментальная система решений	8
1.3. Построение начальных функций	12
1.4. Оценка решения	19
1.5. Асимптотическое разложение решений	34
1.6. Оценка коэффициентов разложений	41
1.7. Теорема существования и единственности и об оценке остаточного члена асимптотического разложения.....	43
Раздел 2. Задача Коши с начальным скачком для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений	46
2.1. Постановка задачи	46
2.2. Интегральное представление решений.....	49
2.3. Асимптотические оценки решений	55
2.4. Оценка разности	58
2.5. Алгоритм построения асимптотического разложения решений	74
2.6. Оценка коэффициентов разложений	81
2.7. Оценка остаточного члена асимптотического разложения	83
Раздел 3. Задача Коши с начальными скачками любого порядка для линейных интегро-дифференциальных уравнений	89
3.1. Постановка задачи	89
3.2. Фундаментальная система решений.....	92
3.3. Начальные функции	98
3.4. Интегральное представление решения.....	111
3.5. Оценка решения	145

3.6	Теорема о близости решения сингулярно возмущенной задачи к решению соответствующей невозмущенной задачи. Вычисление начального скачка	148
3.7	Алгоритм построения асимптотического разложения решений	162
3.8	Оценка коэффициентов разложений	170
3.9	Оценка остаточного члена асимптотического разложения	172
Раздел 4. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений во внутренней точке.....		
4.1	Постановка задачи	181
4.2	Интегральное представление и оценка решений	183
Рекомендуемая литература		189

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уравнения, для которых не выполнено предположение о регулярности вхождения параметра, называются сингулярно возмущенными. Внешним признаком сингулярно возмущенной задачи для дифференциальных уравнений является наличие малого параметра при старшей производной. По сравнению с регулярно возмущенными задачами исследование сингулярно возмущенных задач представляет большую трудность. В таких задачах невозмущенная (вырожденная) задача относится другому типу, чем исходная сингулярно возмущенная задача, например, понижение порядка, потеря начальных и граничных условий и другие. И, таким образом, разложение типа Пуанкаре не является пригодным во всей области изменения независимого переменного. Сингулярно возмущенные уравнения играют весьма существенную роль в многочисленных приложениях, поскольку оказалось, что они являются адекватными математическими моделями конкретных прикладных задач физики, техники, механики, химической кинетики, теории управления и автоматического регулирования, теории гироскопов и других.

Книга посвящена качественному исследованию влияния интегральных членов на асимптотическое поведение решений и построению асимптотического разложения решений сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений произвольного порядка с начальными условиями в левой, правой и во внутренней точках рассматриваемого отрезка и состоит из четырех разделов и списка рекомендуемых литератур.

В разделе 1 рассмотрены интегро-дифференциальные уравнения, асимптотические свойства решений которых аналогичны свойствам решений чисто дифференциальных уравнений. Отличие состояло лишь в том, что уравнения для коэффициентов асимптотического разложения в случае интегро-дифференциальных уравнений являются несколько более сложными, чем в случае дифференциальных уравнений. Таким образом, можно сказать, что добавление в уравнение интегральных членов приводит к некоторому усложнению алгоритма построения асимптотического разложения решения, а качественное поведение решения не изменится. Поэтому возникает проблема в выявлении

и, тем самым, найти начальный скачок интегрального члена $\Delta(t)$, который выражается формулой:

$$\Delta(t) = \frac{\bar{\omega}_n(t_0)}{\bar{\omega}(t_0)} H_{n-1}(t, 0), \quad (4.16)$$

где $\bar{\omega}(t_0)$ имеет вид (4.4), а $\bar{\omega}_n(t_0)$ – определитель, получаемый из определителя $\bar{\omega}(t_0)$ заменой его n -го столбца столбцом из элементов $\alpha_1 - P(t_0), \dots, \alpha_n - P^{(n-1)}(t_0)$.

Рекомендуемая литература

1. Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. // Trans. Amer. Math. Soc., - 1908. – № 9. – P. 219 – 231.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1979. – 503 с.
3. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
4. Ван – Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. - 272 с.
6. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. – М.: МГУ. – 1989. – 156 с.
7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., - 1990. – 208 с.
8. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. - 1957. - Т. 12.- № 5. - С. 3-122.
9. Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1972. - 356 с.
10. Касымов К.А. Линейные сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения второго порядка. – Алматы: изд-во Китап, - 1981. – 112 с.
11. Касымов К.А. Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. – Алматы: Изд-во Санат. – 1997. – 195 с.
12. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. - 400 с.

13. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. - М.: Наука, 1975. - 248 с.
14. Nagumo M. Uber das Verhalten der Intergrale von $\lambda y'' + f(x, y, y', \lambda) = 0$ für $\lambda \rightarrow 0$, *ibid.* 21 (1939), 529-534.
15. Найфэ А. Методы возмущений. - М.: Наука, 1976. - 456 с.
16. Noaillon P. Developpements asymptotiques dans les equations differentielles lineares a parametre variable. - Mem. Soc. Sci. Liege, - 1912. - 3, № 11. - 197 p.
17. Schlesinger L. Uber asymptotische Darstellungen der Losungen linearer Differential systemeabe Funktionen eines Parametere. - Math. Ann., - 1907. - 63. - S. 207 - 300.
18. Чанг К., Хауэс К. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. - М.: Мир, - 1988. - 248 с.
19. Дауылбаев М.К. Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения. - Алматы: Изд - во Казак университети, -1999. - 170 с.
20. Касымов К.А., Дауылбаев М.К. Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. Москва - Минск. - 1999. - Т. 35, - № 6. - С. 822 - 830.
21. Дауылбаев М.К. Асимптотика решений нелинейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. - 2000. - Т. 41. - № 1. - С. 60 - 72.
22. Дауылбаев М.К., Касымов К.А. Задача Коши с начальными скачками для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений / Ред. Сиб.мат.журн. Сиб.отд. РАН - Новосибирск, 2003.-20 с. Деп.в ВИНТИ. 13.03.2003, № 449-В 2003.
23. Касымов К.А., Дауылбаев М.К. Сингулярно возмущенные линейные интегро-дифференциальные уравнения с начальными скачками любого порядка. // Известия ВУЗов. Математика. - Казань -2003. - № 7 (494). - С. 70 - 75.

Учебное издание

Дауылбаев Муратхан Кудайбергенович

**ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ**

Учебное пособие

Выпускающий редактор З.У. Усенова
Оформление обложки З.Т. Акажановой

ИБ № 4435

Подписано в печать 28.04.09. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать RISO. Объем 11,875 п.л. Тираж 500 экз. Заказ № 215.
Издательство «Казак университети» Казахского национального
университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71. КазНУ.

Отпечатано в типографии издательства «Казак университети».