

<https://doi.org/10.5281/zenodo.8071877>  
УДК 53.532.5.01

## МОДИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОЛМОГОРОВА В ТЕОРИИ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

**Ю.В. Нужнов,**

д.ф.-м.н., проф.,

Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби,

г. Алматы

**Аннотация:** Представлены аналитические выражения коэффициентов Колмогорова, полученные на основе теории автономного статистического моделирования мелкомасштабной турбулентности ASMTurbS. Показано, что в обобщенной области турбулентного течения эти коэффициенты являются функциями коэффициента внешней перемежаемости, тогда как в области течения диссипативной жидкости они являются универсальными постоянными.

**Ключевые слова:** теория статистического моделирования, мелкомасштабная турбулентность, коэффициенты Колмогорова, перемежаемость

### Введение

В теории мелкомасштабной турбулентности Колмогорова [1, 2] до сих пор остается нерешенным вопрос о постоянстве коэффициентов пропорциональности продольных структурных функций (далее – коэффициентов Колмогорова). Суть вопроса заключается в том, что с теоретической точки зрения такие коэффициенты не могут быть постоянными согласно «казанскому» замечанию Ландау [3, 4] (за исключением, возможно, коэффициента Колмогорова в законе «четырёх пятых»). Более того, теоретические и экспериментальные исследования [5, 6] убедительно указали на функциональную зависимость коэффициентов Колмогорова от величины коэффициента внешней перемежаемости, т.е. на зависимость этих коэффициентов от местоположения рассматриваемой точки в турбулентном потоке. В то же время многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют

об обратном, – значения коэффициентов Колмогорова в его известных законах «четырёх пятых» и «двух третей» являются универсальными постоянными.

Цель данной статьи, – получить аналитические выражения коэффициентов Колмогорова на основе теории автономного статистического моделирования ASMTurbS и прояснить вопрос об универсальности коэффициентов Колмогорова в свете «казанского» замечания Ландау.

### **Анализ данного вопроса**

Особенностью теории Колмогорова является то, что за ее основу принимается некоторая область турбулентного течения  $G$ , мелкомасштабная структура которой является *локально однородной*. Однако в оригинальных работах Колмогорова [1, 2] эта область не была конкретизирована в смысле эффектов перемежаемости [7, 8], – при разработке теории K41 явление внешней перемежаемости еще не было известно, а при разработке теории K62 явление внутренней перемежаемости еще мало изучено. Именно в этой связи под областью  $G$  стала пониматься пространственно-временная область, в заданной точке которой теоретико-вероятностное (статистическое) усреднение мгновенных характеристик мелкомасштабной турбулентности является безусловным; как следствие, продольные структурные функции K62 в этой области представляются как безусловные.

В то же время в теоретических исследованиях [5, 6], уникальность которых обусловлена учетом эффектов *внешней* перемежаемости, продольные структурные функции были полными, т.е. представляли собой определенный симбиоз условных средних турбулентной и нетурбулентной жидкостей. Это же относится к теории ASMTurbS [7-9], особенностью которой является учет эффектов *внутренней* перемежаемости; здесь полные продольные структурные функции представляют собой определенный симбиоз сосуществования условных средних диссипативной и недиссипативной жидкостей.

Неопределенность «местоположения» области  $G$  в перемежающемся турбулентном потоке, как выясняется, послужила основанием известного «казанского» замечания Ландау с выводом о неуниверсальности коэффициентов пропорциональности продольных структурных функций и, в частности, коэффициентов Колмогорова  $C_k^{(n)}$  в теории K41 [1]. В результате в «уточненном варианте теории

Колмогорова К62 [2] эти коэффициенты уже явно зависели от координат, т.е.  $C_k^{(n)} = C_k^{(n)}(\mathbf{x})$ . В то же время в законах Колмогорова «четырех пятых» (когда  $C_k^{(3)}$ ) и «двух третей» (когда  $C_k^{(2)}$ ) коэффициенты Колмогорова считаются универсальными постоянными. Более того, универсальность таких значений часто подтверждаются на практике. Нашей задачей является прояснить данную создавшуюся ситуацию в теории мелкомасштабной турбулентности.

### **Аналитическое выражение коэффициентов Колмогорова**

Основанием теории *ASMTurbS* являются постулаты, сформулированные в [9] в виде *следующих* гипотез.

*Гипотеза ASMTurbS 1.* Все положения статистической теории мелкомасштабной турбулентности Колмогорова применимы только для *диссипативной* жидкости турбулентного течения.

*Гипотеза ASMTurbS 2.* Все *гидродинамические* величины, входящие в выражения структурных функций Колмогорова, являются *статистическими*.

Отсюда следует, что мелкомасштабная структура диссипативной жидкости развитых турбулентных течений локально изотропна, а условные продольные структурные функции в этой жидкости представляются в виде

$$S_d^{(n)}(r) = C_{kd}^{(n)} \langle \varepsilon \rangle_d^{n/3} r^{n/3} \left( \frac{l}{L_d} \right)^{-\langle \mu \rangle_d n(n-3)/18} \quad (1)$$

где  $\langle \mu \rangle_d$  и  $C_{kd}^{(n)}$  – коэффициенты Колмогорова как универсальные постоянные величины статистического характера; коэффициент  $\langle \mu \rangle_d$  в (1) мы будем называть «экспоненциальным» коэффициентом Колмогорова. В то же время мелкомасштабная структура в обобщенной области таких течений локально неоднородна (из-за эффектов перемежаемости), так что согласно [7, 8, 9] и в силу  $\langle \varepsilon \rangle \cong \gamma_d \langle \varepsilon \rangle_d$  полные продольные структурные функции мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений имеют вид:

$$S_f^{(n)}(\mathbf{x}, r) = \gamma_d S_d^{(n)}(r) \quad (2)$$

Другими словами, функции (2) представляют собой полные статистические средние

$$S_f^{(n)}(\mathbf{x}, r) = C_{kd}^{(n)} \gamma_d \langle \varepsilon \rangle_d^{n/3} r^{n/3} \left( \frac{l}{L_d} \right)^{-\langle \mu \rangle_d n(n-3)/18} \quad (3)$$

где  $\gamma_d = \gamma_d(\mathbf{x})$  – коэффициент перемежаемости диссипативной жидкости. Таким образом, неоднородность мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений определяется величиной коэффициента  $\gamma_d$ ; в самой диссипативной жидкости коэффициент  $\gamma_d = 1$ , тогда как его взаимосвязь с внутренним коэффициентом перемежаемости  $\gamma_{dt}$  задается соотношением  $\gamma_d = \gamma\gamma_{dt}$ .

Проведем теперь модификацию теории K62 на базе теории *ASMTurbS*. Согласно принятым гипотезам *ASMTurbS* 1 и 2, безусловные структурные функции K62 принимают вид:

$$S_m^{(n)}(r) = C_{km}^{(n)} \gamma_d^{n/3} \langle \varepsilon \rangle_d^{n/3} r^{n/3} \left( \frac{l}{L} \right)^{-(\mu)n(n-3)/18} \quad (4)$$

где  $C_{km}^{(n)}$  и  $\langle \mu \rangle$  – модифицированные коэффициенты Колмогорова (далее – коэффициенты Колмогорова-Ландау ввиду их функциональной зависимости от величины коэффициента перемежаемости).

Теперь условие эквивалентности безусловных и полных средних дает:

$$S_m^{(n)}(r) = S_f^{(n)}(\mathbf{x}, r) = \gamma_d S_d^{(n)}(r) \quad (5)$$

Выражение (5) позволяет определить функциональную зависимость коэффициентов Колмогорова-Ландау  $C_{km}^{(n)}$  (4) от величины коэффициента внутренней перемежаемости в виде

$$C_{km}^{(n)} = C_{kd}^{(n)} \gamma_d^{1-n/3+(\mu)an(n-3)/18} \left( \frac{l}{L} \right)^{(\mu)-(\mu)d n(n-3)/18} \quad (6)$$

со значениями коэффициентов Колмогорова  $C_{kd}^{(n)} = const$  при  $n = const$ , и  $\langle \mu \rangle_d = const$ . Определение функциональной зависимости коэффициента  $\langle \mu \rangle$  в (6) дано в [9].

В результате модифицированный закон Колмогорова «двух третей» с учетом  $\langle \varepsilon \rangle \cong \gamma_d \langle \varepsilon \rangle_d$  записывается в виде

$$S_m^{(2)}(\mathbf{x}, r) = C_{km} \gamma_d^{2/3} \langle \varepsilon \rangle_d^{2/3} r^{2/3} \left( \frac{l}{L} \right)^{\langle \mu \rangle / 9} \quad (7)$$

где  $C_{km} = C_{km}^{(2)}$  – коэффициент Колмогорова-Ландау, тогда как коэффициент Колмогорова  $C_{kd}^{(2)} = 2.3$  согласно опытным данным [5, 6]. Таким образом,

$$C_{km} = C_{kd}^{(2)} \gamma_d^{1-2/3-\langle \mu \rangle_d / 9} \left( \frac{l}{L} \right)^{(\langle \mu \rangle_d - \langle \mu \rangle) / 9} \quad (8)$$

На рисунке 1 представлены результаты расчета коэффициента Колмогорова-Ландау  $C_{km}$  (8), выполненные в пересчете значений

$\gamma_d \Rightarrow \gamma$  [9]. Интересно заметить, что функциональная универсальность коэффициента  $C_{km}$  наблюдается только для значений коэффициента внешней перемежаемости  $\gamma \geq 0.4$ ,

Аналогичная процедура модификации закона Колмогорова «четырёх пятых» даёт аналитическое выражение полной структурной функции третьего порядка. При этом согласно (6) значения коэффициентов Колмогорова-Ландау и коэффициентов Колмогорова совпадают, т.е.  $C_{km}^{(3)} = C_{kd}^{(3)}$ .

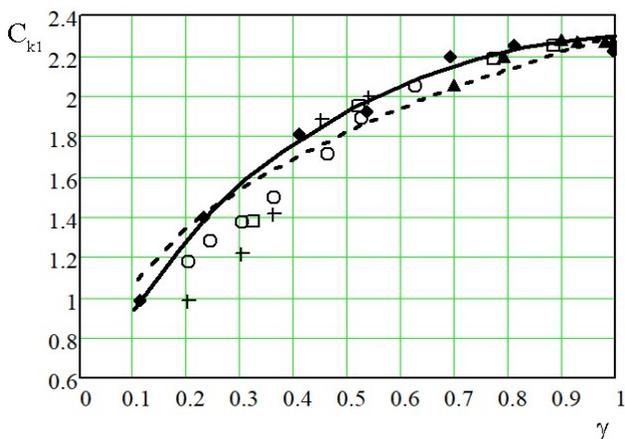


Рисунок – Универсальная функциональная зависимость коэффициента Колмогорова-Ландау  $C_{km}$  (8) от величины коэффициента внешней перемежаемости с параметром  $l/L = 2 \cdot 10^{-4}$ . Универсальный коэффициент Колмогорова  $C_{kd}^{(2)} = 2.3$ . Значки – опытные данные [5, 6]

Величина коэффициента Колмогорова  $C_{kd}^{(3)} = -4/5$  найдена теоретически и подтверждена экспериментальными данными. При этом эта величина реализуется только в диссипативной локально изотропной жидкости турбулентного течения. Важно также заметить, что коэффициент  $C_{km}^{(3)}$  является единственным коэффициентом Колмогорова-Ландау, который не зависит от коэффициента перемежаемости.

## Заключение

В результате исследования коэффициентов Колмогорова, проведенного на основе теории ASMTurbS, выясняется следующее:

1) неоднородность мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений обусловлена эффектами внутренней перемежаемости диссипативных полей таких течений;

2) коэффициенты Колмогорова являются универсальными постоянными только в диссипативной жидкости турбулентного течения;

3) модифицированные коэффициенты Колмогорова, названные коэффициентами Колмогорова-Ландау, обладают универсальной функциональной зависимостью от величины коэффициента внутренней перемежаемости.

Таким образом мы приходим к выводу, что «противоречие» между теорией Колмогорова и «казанским» замечанием Ландау может быть устранено, если вместо безусловного среднего диссипации энергии мелкомасштабных флуктуаций скорости использовать ее полное среднее, а в ее полном среднем учесть эффекты внутренней перемежаемости диссипативной жидкости.

В заключение о хорошем соответствии функциональной зависимости коэффициента Колмогорова-Ландау в законе «двух третей» с опытными данными, которые представлены на Рисунке.

Прежде всего надо сказать, что полученная функциональная зависимость этого коэффициента может быть использована на практике с гораздо большей эффективностью, чем имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные со значительным «разбросом» его постоянных значений. Однако такое «хорошее» соответствие было достигнуто во многом за счет величины параметра  $l/L = 2 \cdot 10^{-4}$ , которая выбиралась из условия «наилучшего» совпадения с опытными данными.

И здесь имеется одна проблема, – использованные для сравнения опытные данные (которые приведены на рисунке) были выполнены в предположении локальной изотропии во всей турбулентной (а не диссипативной) жидкости турбулентного течения (это было сделано вынужденно ввиду чрезвычайной сложности соответствующих экспериментальных исследований).

Ясно, что для более тщательного тестирования коэффициентов Колмогорова-Ландау требуются специальные экспериментальные исследования мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений.

### Список литературы

- [1] Kolmogorov A.N. 1941. Local turbulence structure in incompressible viscous fluid at very high Reynolds numbers, Dokl. Akad Nauk SSSR 30. 299-303p.
- [2] Kolmogorov A.N. 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structures of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds numbers, J. Fluid Mech. 13, pp. 82-85.
- [3] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. 1987. Fluid Mechanics, 2nd edition. Pergamon Press, Oxford.
- [4] Frisch U. Turbulence. 1995. The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge University Press.
- [5] Kuznetsov, V. R. and Sabel'nikov, V. A. 1990. Turbulence and Combustion. New York: Hemisphere (Kuznetsov, V. R., Sabelnikov, V. A. 1986. Turbulence and combustion. Moskow. Nauka Press, in Russian).
- [6] Kuznetsov, V. R., Praskovsky, A. A. and Sabelnikov, V. A. 1992. Fine-scale turbulence structure of intermittent shear flow. J. Fluid Mech., 243. 273-295 p.
- [7] Нужнов, Ю.В. Перспективы дальнейшего развития теории мелкомасштабной турбулентности Колмогорова / Ю.В. Нужнов // Фундаментальные и прикладные аспекты развития современной науки: Сборник научных статей по материалам XII Международной научно-практической конференции, Уфа, 12 мая 2023 года. В 4 частях, Часть 1. – Уфа: "Научно-издательский центр "Вестник науки", 2023. – С. 32-39. – EDN FZXAWZ. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7987895>
- [8] Нужнов Ю.В. К теории мелкомасштабной турбулентности. Закон Колмогорова “двух третей” в свете замечания Ландау // Флагман науки: научный журнал. Май 2023.- СПб., Изд.ГНИИ "Нацразвитие", 2023. № 4 (4). 6 с. DOI 10.37539/2949-1991.2023.4.4.038.
- [9] Nuzhnov Yu. 2013. Some results of statistical modeling of the small-scale turbulence structure revealed with consideration of intermittency//

IMECE. – California, San Diego. – Vol.7A: Fluids Engineering Systems and Technologies. – 7 p.

© Ю.В. Нужнов, 2023