$\varphi_j(x,t) \in W_2^2(Q),\ \gamma D_t^p \varphi\,|_{t=0} = D_t^p \varphi\,|_{t=T}\ ,\ \eta D_x^p \varphi\,|_{\partial\Omega} = D_x^p \varphi\,|_{\partial\Omega}\ , p = 0,1;\ j = 1,2;$

Теорема Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $\lambda c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_1 > 0$ для всех $(x,t) \in \overline{Q}$, здесь $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, $|\,\eta\,| \geq 1$, и пусть существует малое положительное число σ такое, что имеют место оценки $\delta_0 - 21\sigma^{-1} \geq \delta > 0$, $q \equiv M \cdot \sum\limits_{i=1}^{2} \left\|(1 + D_y^3) f_i\right\|_{W_2^3(G)} < 1$, (где $\delta_0 = min\{\lambda, \delta_1, \lambda\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\}$,
$M = 2\sigma\,\lambda\,\eta^{-2}\mathfrak{F}^2\ c_1 c_2 c_3$; где $c_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4}{\left(1+\mu_k^2\right)^3}$, $\mu_k = \frac{k\pi}{\ell}$, c_2, c_3- постоянные числа, которые определяется из теоремы вложения Соболева).
Тогда для любых функций $(1+D_y^3)g \in W_2^1(G)$; $(1+D_y^3)f_i \in W_2^3(G)$, $i = 1,2$; существует единственное решение задачи (1)-(5) из указанного класса U.

Доказательство. Теорема доказывается методами априорных оценок, Галеркина, последовательности приближений и сжимающихся отображений.

Литература

1. **Бицадзе А.В., Самарский А.А.** *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач.* Докл. АН СССР. -1969. V. 185, no 4. – С. 739–740.
2. **Бицадзе А.В.** *О нелокальных краевых задачах* Докл. АН СССР. -1989, т. 277. no 1, – с. 17–19.
3. **Ильин В.А., Моисеев Е.И.** *Нелокальная краевая задача первого рода для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовке.* Дифференциальные уравнения. -1987, V. 23, no 7, – С. 1198–1207.
4.**Джамалов.С.З.** *О корректности некоторых линейных многоточечных задач управления для волнового уравнения и уравнения Пуассона.* ДАН РУз.-1992. no 6-7. – С. 9-11.
5. **Джамалов С.З.** *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.* Монография. Ташкент. 2021г, – 176 с.

О регулярности решения гиперболического уравнения

Дженалиев М.Т.[1], Серик А.[1,2]
[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;
muvasharkhan@gmail.com
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
serikakerke00@gmail.com

Пусть Ω – ограниченная область в R^n с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Мы обсуждаем вопросы о регулярности решения следующей начально-граничной задачи

$$\partial_t(t^\beta \partial_t u) - \Delta u = f \text{ in } Q = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$u = 0 \text{ on } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0,\ \ \lim_{t\to+0} t^\beta \partial_t u(x,t) = 0 \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

которая изучалась в диссертации Н. Кахарман [1]. В частности, им установлен следующий результат:

Теорема 1. Пусть $\beta \in [0,1)$, $f \in L^2(Q)$, $(-\Delta)^{1-\nu} f \in L^2(Q)$, где $\nu = (1-\beta)/(2-\beta)$, т.е. параметр ν меняется на полуинтервале: $\nu \in (0, 1/2]$.

Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима, и имеет место априорная оценка

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,t^\beta}(Q)} \equiv \|t^\beta \partial_t u\|^2_{W^1_2(0,T;\, L^2(\Omega))} + \|u\|^2_{L^2(0,T;W^2_2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))}$$

$$\le C\left[\|f\|^2_{L^2(Q)} + \|(-\Delta)^{1-\nu} f\|^2_{L^2(Q)}\right]. \tag{4}$$

Замечание 1. Если $\beta = 0$, тогда уравнение (1) не вырождена. Более того, как только вырождение уравнения (1) "увеличивается" (то есть, когда параметр β возрастает от 0 до 1), требование на гладкость функции f на правой стороне уравнения (1) также соответственно возрастает.

Согласно теоремы 1 и результатов из [2, 3], имеем

Теорема 2. Пусть $\beta = 0$ и выполнено одно из следующих условий

$$f \in L^2(Q),\ \ \partial_t f \in L^2(Q), \tag{4}$$

или

$$f \in L^2(Q),\ (-\Delta)^{1/2} f \in L^2(Q). \tag{5}$$

Тогда задача (1)–(3) (с невырожденным уравнением) однозначно разрешима в пространстве

$$u(t) \in W^{2,2}_{2,1}(Q) \equiv \left\{ v(t) |\, v(t) \in L^2(0,T; W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)),\ \ \partial_t^2 v(t) \in L^2(Q) \right\},$$

и имеет место соответствующая априорная оценка

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,1}(Q)} \le C\left[\|f\|^2_{L^2(Q)} + \|\partial_t f\|^2_{L^2(Q)}\right], \tag{6}$$

или

$$\|u\|^2_{W^{2,2}_{2,1}(Q)} \le C\left[\|f\|^2_{L^2(Q)} + \|(-\Delta)^{1/2} f\|^2_{L^2(Q)}\right]. \tag{7}$$

Заметим что, в частности, ответы на вопросы обеспечения гладкости решения гиперболического уравнения могут быть получены, используя результаты из [2, 4]. Представим, например, результат, следующий из ([2], глава 5, Теорема 8.1, Замечание 8.1 и Предложения 8.1).

Теорема 3. Пусть функция f задана условиями

$$f \in L^2(0,T; W^2_2(\Omega)),\ \partial_t^3 f \in L^2(Q), \tag{8}$$

$$f(x,0) = \partial_t f(x,0) = \partial_t^2 f(x,0) = 0. \tag{9}$$

Тогда решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет включениям

$$u \in W^{4,4}_{2,1}(Q) \Leftrightarrow u,\ \partial_t u \in L^2(0,T; W^4_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)),\ \ \partial_t^4 u \in L^2(Q).$$

Возникают следующие вопросы:

Вопрос 1. Что можно сказать о регулярности решения задачи (1)–(3) для $\beta = 1 \cup (1, 2) \cup 2$?

Вопрос 2. Возможно ли формулировать условия теоремы 1 в терминах гладкости функции $f(x, t)$ по переменной t, каким будет терема 2 для случая $\beta = 0$?

Вопрос 3. Возможно ли формулировать условия (8)–(9) теоремы 3 в терминах гладкости функции $f(x, t)$ относительно переменной x?

В докладе мы обсуждаем ответы на эти и на другие, близкие к ним, вопросы.

Литература

1. **Кахарман Н.** *Общие регулярные граничные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений.* Алматы: КазНУ. - 2023. - 77 с.
2. **Lions J.-L., Magenes E.** *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. II.* Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag. - 1972.
3. **Ладыженская О.А.** *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука. - 1973.
4. **Lions J.-L., Magenes E.** *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. I.* Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag. - 1972.

Коэффициентная обратная задача для уравнения смешанного параболо - гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения типа

Дурдиев Д.К.
Бухарское отделение Института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан;
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
d.durdiev@mathinst.uz

Пусть Ω_T область на плоскости переменных x, y, состоящая из двух частей, т.е. $\Omega_T = \Omega_{1T} \bigcup \Omega_{2T}$, где $\Omega_{1T} = \Big\{(x, y) : \ 0 < x \le T, \ 0 < y < 1\Big\}$, $\Omega_{2T} = \Big\{(x, y) : \ -y < x \le y + T, \ -\frac{T}{2} < y < 0\Big\}$, T - фиксированное положительное число. В этой области рассмотрим следующее уравнение:

$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy} - q(x)u = 0, \quad y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Уравнение (1) смешанного параболо - гиперболического типа. Для него линия изменения типа $y = 0$ не является характеристикой.

Прямая задача. Найти в области Ω_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным и краевым условиям:

$$u|_{x=0} = \varphi(y), \quad u|_{y=1} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{y=-x} = \psi(x), \quad x \in \left[0, \frac{T}{2}\right]. \tag{2}$$

В (2), (3) функции $\varphi(y)$, $\psi(x)$ считаются заданными.