Министерство науки и высшего образования Республики Казахстан
Комитет науки
Институт математики и математического моделирования

Традиционная международная апрельская математическая конференция
в честь Дня науки Республики Казахстан

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы 2023

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан

Председатель программного комитета — академик НАН РК Кальменов Т. Ш.
Председатель организационного комитета — член-корреспондент НАН РК Байжанов Б. С.
Ученый секретарь — доцент Сахауева М. А.

Члены Программного комитета:
профессор Алексеева Л. А. (Алматы, Казахстан)
профессор Асанова А. Т. (Алматы, Казахстан)
член-корреспондент НАН РК Байжанов Б. С. (Алматы, Казахстан)
д.ф.-м.н. Вербовский В. В. (Алматы, Казахстан)
д.ф.-м.н. Даирбеков Н. С. (Алматы, Казахстан)
академик НАН РК Джумадильдаев А. С. (Алматы, Казахстан)
член-корреспондент НАН РК Кулпешов Б. Ш. (Алматы, Казахстан)
профессор Нурсултанов Е. Д. (Нур-Султан, Казахстан)
член-корреспондент НАН РК Садыбеков М. А. (Алматы, Казахстан)
академик НАН РК Харин С. Н. (Алматы, Казахстан)

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:
Ж. Адиль (ИМММ)
А. О. Бекетаева (ИМММ)
М. И. Алькенов (ИМММ)
Т. Е. Жакупбеков (ИМММ)
Э. А. Бакирова (ИМММ)
О. А. Умбетбаев (ИМММ)

Содержание

Пленарные доклады

Председатели: член-корреспондент НАН РК Садыбеков М. А.
академик НАН РК Кальменов Т. Ш.
член-корреспондент НАН РК Кулпешов Б. Ш.

Нийенхейсовые операторные поля: вопросы классификации и геодезически эквивалентные метрики

Динмухаммед Жулдызбайулы АКПАН

МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: akpandz@my.msu.ru

В докладе будет рассказано про классификацию n-мерных операторов Нийенхейса, когда характеристическое отображение инвариантов (коэффициентов характеристического многочлена) имеет ранг меньше n. Основным методом доказательств является использования методов Теории Особенностей, а именно особенностей типа A_k.

Определение. *Пусть M^n — гладкое многообразие и $L = (L^i_j)$ — гладкое тензорное поле типа $(1,1)$. Кручением Нийенхейса или тензором Нийенхейса называется тензор типа $(1,2)$, который задается инвариантно:*

$$N_L(u,v) = L^2[u,v] + [Lu, Lv] - L[Lu, v] - L[u, Lv],$$

где u, v — векторные поля.

Операторное поле L называется оператором Нийенхейса, если $N_L \equiv 0$.

Пусть $\chi(t) = det(tE - L) = t^n + \sigma_1 t^{n-1} + \ldots + \sigma_n$.

Теорема. *Пусть L — оператор Нийенхейса, причем $trL = \sigma_1 = x_1, \ldots, \sigma_{n-1} = x_{n-1}$ и $detL = \sigma_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ (в смысле Морса). Пусть $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ имеет невырожденную особенность по переменной y в нуле. Тогда все операторы Нийенхейса имеют вид:*

$$L = \begin{bmatrix} -x_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -x_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -x_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \pm 2y \\ -\frac{y}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть далее (M^n, g) будет римановым многообразием, две метрики $g \sim \bar{g}$ будем называть геодезически эквивалентными, если они задают одну и ту же геодезическую после перепараметризации. Ясно, что это некоторая система уравнений в частных производных. Очень удобной записью системы уравнений в частных производных относительно двух метрик является:

$$\nabla_k L_{ij} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik},$$

где $L = (\frac{det\bar{g}}{detg})^{\frac{1}{n+1}} g\bar{g}^{-1} g$, $\lambda_i = \frac{1}{2}\frac{\partial(tr(Lg^{-1}))}{\partial x^i}$.

Оператор, который получается $R = Lg^{-1}$ является оператором Нийенхейса. Получаем линейную систему УрЧП относительно метрики g_{ij}. В докладе будут показаны примеры геодезически эквивалентных метрик для малых размерностей.

Поддержка: Автор является стипендиатом фонда Базис.

Ключевые слова: операторы Нийенхейса, кручение Нийенхейса, геометрия Нийенхейса, интегрируемые системы, эквивалентные метрики.

2010 Mathematics Subject Classification: 37K05, 37K06, 37K10, 37K25, 37K50, 53B10, 53A20, 53B20, 53B30, 53B50, 53B99, 53D17.

Литература

[1] Akpan D. Zh. Singularities of two-dimensional Nijenhuis operatros, *European Journal of Mathematics*, **8**:4 (2022), 1328–1340.

[2] Akpan D. Zh. Almost differentially non-degenerate Nijenhuis operators, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **29**:4 (2022), 413–416.

[3] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Konyaev A. Yu. Nijenhuis geometry, *Advances in Mathematics*, **394**:108001 (2022).

[4] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Konyaev A. Yu. Applications of Nijenhuis geometry II: maximal pencils of multi-Hamiltonian structures of hydrodynamic type, *Nonlinearity*, **34**:8 (2021), 5136–5162.

Двухфазная сферическая задача Стефана с источником тепла Джоуля и нелинейными тепловыми коэффициентами

С.Н. ХАРИН[1,2,a] Т.А. НАУРЫЗ[1,2,b], А. БРИОЗЗО[3,c], Д. БОЛАТИ[3,d]

[1] *Казахско-Британский Технический Университет, Алматы, Казахстан*
[2] *Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан*
[3] *Universidad Austral, Росарио, Аргентина*
E-mail: [a]*staskharin@yahoo.com*, [b]*targyn.nauryz@gmail.com*, [c]*ABriozzo@austral.edu.ar*, [d]*JBollati@austral.edu.ar*

Представлена математическая модель, описывающая динамику замкнутого контактного нагрева с испарением металла при мгновенном взрыве микровыступа и процессом зажигания дуги, в которой температурное поле для зоны испарения металла введено в виде линейного уравнения теплостойкости и убывания. Необходимо определить температурные поля для жидкой и твердой фаз металла, описываемые сферическим уравнением теплопроводности с нелинейными тепловыми коэффициентами и джоулевым источником тепла. Метод решения задачи, основанный на преобразовании переменных подобия, позволяет свести задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению и интегральному уравнению типа Вольтерра. Существование и единственность интегральных уравнений доказаны с помощью теоремы о неподвижной точке в банаховом пространстве.

Согласно этой модели, касающийся микровыступ контакта мгновенно взрывается за счет зажигания дуги с мощностью P, приложенной к точке касания $r = 0$, что может быть описано δ-функцией

$$P\delta(r,t) = P \cdot \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right)}{2a\sqrt{\pi t}}, \tag{1}$$

где a — коэффициент температуропроводности. Для моделирования теплообмена необходимо ввести три области D_0, D_1 и D_2. Область D_0 $(0 < r < \alpha(t))$ — зона паров металла, D_1 $(\alpha(t) < r < \beta(t))$ и D_2 $(\beta(t) < r < \infty)$ — жидкая и твердая зоны соответственно.

Моделирование температурного поля в паровой зоне D_0 предполагает, что температура в этой зоне снижается от температуры θ_i, необходимой для ионизации паров металлов в точке взрыва $r = 0$, до температуры кипения θ_b на границе паровой и жидкостной зоны $r = \alpha(t)$. Учитывая, что толщина паровой зоны достаточно мала по сравнению с жидкостной, эту зону D_0 можно рассматривать как тепловое сопротивление между дугой и жидкостной зоной, т.е. температура уменьшается линейно

$$\theta_0(r,t) = \theta_i - (\theta_i - \theta_b)\frac{r}{\alpha(t)}. \tag{2}$$

Свободная граница $r = \alpha(t)$ может быть определена из баланса тепловых потоков на этой границе

$$\frac{P}{2a\sqrt{\pi t}} = -\lambda_b \frac{\partial \theta_0}{\partial r}\bigg|_{r=\alpha(t)} + L_b\gamma_b\alpha'(t), \tag{3}$$

где λ_b, γ_b и L_b — теплопроводность, плотность материала и скрытая теплота при кипении. Для температуры жидкой и твердой зон имеем уравнения

$$c_1(\theta_1)\gamma_1(\theta_1)\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda_1(\theta_1) r^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial r}\right] + \rho_1(\theta_1) j_1^2, \quad r \in D_1, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$c_2(\theta_2)\gamma_2(\theta_2)\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda_2(\theta_2) r^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r}\right] + \rho_2(\theta_2) j_2^2, \quad r \in D_2, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$\lambda_1(\theta_1(\alpha(t),t))\frac{\partial \theta_1}{\partial t}\bigg|_{r=\alpha(t)} = -\frac{P\exp-\left(\frac{r^2}{4a^2t}\right)}{2a\sqrt{\pi t}}\bigg|_{r=\alpha(t)} = -\frac{Pe^{-\alpha_0^2}}{2a\sqrt{\pi t}}, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$\theta_1(\beta(t),t) = \theta_m, \qquad t > 0, \tag{7}$$

$$\theta_2(\beta(t),t) = \theta_m, \qquad t > 0, \tag{8}$$

$$-\lambda_1(\theta_1(\beta(t),t))\frac{\partial\theta_1}{\partial r}\bigg|_{r=\beta(t)} = -\lambda_2(\theta_2(\beta(t),t))\frac{\partial\theta_2}{\partial r}\bigg|_{r=\beta(t)} + l_m\gamma_m\beta'(t), \quad t > 0, \tag{9}$$

$$\theta_2(\infty,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{10}$$

$$\theta_2(r,0) = 0, \;\; \alpha(0) = \beta(0) = 0, \tag{11}$$

где $c_i(\theta_i)$, $\gamma_i(\theta_i)$, $\lambda_i(\theta_i)$ и $\rho_i(\theta_i)j_i^2$, $i = 1,2$ — удельная теплоемкость, плотность, теплопроводность и джоулев нагрев соответственно, все они зависят от температуры, θ_m — температура плавления, l_m — скрытая теплота плавления, γ_m — эталонная плотность при плавлении , $\alpha(t)$ — это свободная граница, к которой прикладывается мощность электричества, а $\beta(t)$ — это положение границы раздела жидкость-твердое тело, которое необходимо найти.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09258948 МОН РК и проекты 80020210100002 и 80020210200003 из Universidad Austral, Росарио, Аргентина.

Ключевые слова: задача Стефана, замкнутые электрические контакты, нелинейные тепловые коэффициенты, подобная замена, теория неподвижной точки.

2010 Mathematics Subject Classification: 80A22, 80A23, 35C11

Литература

[1] Kharin S.N. *Mathematical Models of Phenomena in Electrical Contacts*, The Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, A.P. Ershov Institute of Informatics System, Novosibirsk, (2017).

[2] Kharin S.N., Nouri H., Amft D. Dynamics of Arc Phenomena at Closure of Electrical Contacts in Vacuum Circuit Breakers, *IEEE Transactions on Plasma Science*, **19**:1 (2005), 491–497.

[3] Holm R. *Electrical Contacts. Theory and Applications*, Fourth Edition, Springer-Verlag, Berlin, (1981).

Теория функциональных пространств и её приложения. Доклад в связи со столетием Т.И. Аманова

Д.Б. БАЗАРХАНОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: dauren.mirza@gmail.com

В докладе будет дана (по необходимости краткая) ретроспектива теории функциональных пространств и родственных разделов функционального анализа в тесной связи с научной биографией Тулеубая Идрисовича Аманова.

В частности, будут достаточно подробно обсуждены главные научные результаты Тулеубая Идрисовича, освещены основные факты его преподавательской и научно-организационной деятельности. Кроме того, будет дан краткий обзор научных исследований в Отделе теории функций и функционального анализа Института математики и математического моделирования и в Республике Казахстан в целом, проводимых по настоящее время по основным направлениям научного творчества Тулеубая Идрисовича или близкой проблематике.

Funding: Автор был поддержан грантом AP14869246 МНВО РК.

Ключевые слова: функциональное пространство, полигармонический оператор, краевая задача, вариационный метод, вложение, интерполяция, доминирующая смешанная гладкость.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E35, 42B05, 42B15, 42B20, 42B25, 42B30, 42B35, 42B37, 42C40.

Дифференциальные уравнения и функциональные пространства на стратифицированных множествах

Н.С. ДАИРБЕКОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: Nurlan.Dairbekov@gmail.com

Стратифицированное множество Ω, в первом приближении, есть связное подмножество эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$, состоящее из конечного числа попарно непересекающихся связных подмногообразий (без края), называемых стратами:

$$\Omega = \bigcup_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \sigma_{kj}.$$

Первый индекс показывает размерность страты, а второй является номером страты данной размерности; k может меняться от нуля до n. Предполагаются выполненными следующие требования на взаимные примыкания страт:

- замыкание $\overline{\sigma}_{kj}$ каждой страты компактно, а её граница $\partial\sigma_{kj} = \overline{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ является объединением некоторых страт из Σ;
- для любых двух страт $\sigma_{kj}, \sigma_{mi} \in \Sigma$ пересечение замыканий $\overline{\sigma}_{kj} \cap \overline{\sigma}_{mi}$ либо пусто, либо состоит из некоторых страт набора Σ.

Множество Ω предполагается представленным в виде объединения двух непересекающихся частей, “внутренности” Ω° и “границы” $\partial\Omega^\circ = \Omega \setminus \Omega^\circ$. В качестве Ω° допустимо взять любое открытое связное подмножество Ω, состоящее из некоторых страт и такое, что замыкание Ω° совпадает с Ω.

Стратифицированное множество Ω снабжается так называемой *стратифицированной мерой*, для которой множество $\omega \subset \Omega$ измеримо, если каждое пересечение $\sigma_{kj} \cap \omega$ измеримо в смысле k-мерной меры Лебега на σ_{kj}. *Стратифицированная мера* μ на Ω (точнее на $\mathcal{M}$) определяется формулой:

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \mu_k(\omega_{kj}),$$

в которой $\mu_k(\omega_{kj})$ обозначает k-мерную меру Лебега множества $\omega_{kj} = \omega \cap \sigma_{kj}$.

Основные функциональные пространства, пространства Лебега и пространства Соболева, определяются по стратифицированной меры.

В докладе будет дан обзор теорем вложения, в частности выполнимость неравенства Пуанкаре

$$\int\limits_{\Omega} |u - P(u)|^q \, d\mu \leq C \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, d\mu$$

и неравенства Соболева – Гальярдо

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u|^q d\mu \right)^{1/q} \leq C \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Будет описано применение этих неравенств к разрешимости эллиптических уравнений на стратифицированных множествах с граничными условиями Дирихле, Неймана и Венцеля.

Также будет дан обзор свойств гармонических функций на стратифицированном множестве: теорема о среднем, неравенство Харнака, устранимые особенности.

Основные понятия и некоторые результаты можно найти в работах [1–3]

Funding: Автор был поддержан грантом AP14871251 МОН РК.

Ключевые слова: оператор Лапласа, гармоническая функция, стратифицированное множество.

2010 Mathematics Subject Classification: 31C05, 35J15, 58J05

Литература

[1] Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, Москва (2005).

[2] Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Сарыбекова Л. О. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве, *Алгебра и анализ*, **30**:5 (2018), 149–158.

[3] Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Сарыбекова Л. О. Неравенство Пуанкаре и p-связность стратифицированного множества, *Сиб. матем. журн.*, **59**:30 (2018), 1291–1302.

Методы оптимизации в обратных задачах

С.И. КАБАНИХИН

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: kabanikhin@sscc.ru

В докладе будут рассмотрены методы оптимизации, которые используются при решении обратных задач. Основой таких методов является построение минимизирующей последовательности, в которой номер итерации является параметром регуляризации и должен быть согласован с уровнем погрешности в данных. В силу некорректности обратных задач анализ сходимости проводится при предположении, что решение обратной задачи существует и принадлежит некоторому заданному классу — множеству корректности (как правило, компакту).

Будут рассмотрены также методы оптимизации на основе эволюционных алгоритмов, использующих идеи из эволюционной биологии для нахождения оптимальных значений параметров. Они могут быть эффективными в задачах оптимизации с большим количеством параметров или когда функция потерь не является гладкой. Выбор метода оптимизации зависит от конкретной задачи и особенностей модели. Как правило, градиентный спуск является наиболее распространенным методом оптимизации в моделях машинного обучения.

Некоторые свойства Ньютонового потенциала

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: kalmenov.t@mail.ru

В работе Кальменова Т.Ш., Сурагана Д. [1] доказано, что Ньютоновый (объемный) потенциал

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon(x-y) f(y) dy, \quad x \in \Omega \subset R^n, \tag{1}$$

где $\varepsilon(x-y)$ — фундаментальное решение уравнения

$$-\Delta_x \varepsilon(x-y) = \delta(x-y), \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$-\Delta_x u = f(x) \tag{3}$$

и однородному потенциальному граничному условию

$$N\left[u\right]|_{x\in\partial\Omega} = -\frac{u(x)}{2} + \int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_y}(x-y)u(y) - \varepsilon(x-y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y)\right)dS_y = 0, \quad x\in\partial\Omega. \tag{4}$$

Обратно, если $u\in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (3) и однородному граничному условию (4), то решение этой задачи $u(x)$, т.е. задачи (3)–(4) независимо от формы областей, выписывается в явном виде через Ньютоновый потенциал, т.е. в виде интеграла (1).

Естественно, можно ожидать, что уравнение Лапласа при неоднородном потенциальном граничном условии, т.е. решение задачи

$$-\Delta u = f(x), \tag{5}$$

$$N\left[u\right]|_{x\in\partial\Omega} = -\frac{u(x)}{2} + \int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_y}(x-y)u(y) - \varepsilon(x-y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y)\right)dS_y = \varphi(x), \quad x\in\partial\Omega \tag{6}$$

также выписывается в явном виде.

В работе, используя свойства следов фундаментального решения $\varepsilon(x-y)$ на границе $\partial\Omega$ показано, что решение задачи (5)–(6) в явном виде может быть найдено только для специальных областей Ω.

В работе также приводятся некоторые спектральные свойства Ньютонового потенциала.

Funding: Автор был поддержан грантом AP14871460 и AP09260126 МНВО РК.

Ключевые слова: потенциал Ньютона, фундаментальные решения, потенциальные граничные условия.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J08, 35A08.

Литература

[1] Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала, *Доклады РАН*, **4**:428 (2009), 16–19.

Convolution equations on the Lie group $G=(-1,1)$ and their applications

Roland DUDUCHAVA

The University of Georgia & A.Razmadze Mathematical Institute, Tbilisi, Georgia

For each Lie group G equiped with a manifold and the group operation (multiplication or sum $x\circ y$, inverse element, neutral element) there exists the unique left or right invariant Haar measure d_Gx, homeomorphism $c(x)\ :\ G\to\hat{G}$ to an unitary group $\hat{G}$, called the representation of the Lie group G and, finally, perhaps the most important, the Fourier transformation $\mathcal{F}_G$, which is an isomorphism of the Lebesgue-Hilbert spaces

$$\mathcal{F}_G\ :\ \mathbb{L}_2(G)\to\mathbb{L}_2(\hat{G}), \tag{1}$$

with the inverse transformation $\mathcal{F}_G^{-1}$.

Most interesting in applications are convolution equations on different Lie groups

$$W_a^0\varphi(x) := \mathcal{F}_G^{-1}a\mathcal{F}_G\varphi(x) = c\varphi(x) + \int_G k(x\circ y^{-1})\varphi(y)d_Gy = f(x), \qquad x\in G. \tag{2}$$

where the Fourier transform of the kernel $a(\xi)=c+(\mathcal{F}_Gk)(\xi)$, $\xi\in\hat{G}$ is called the symbol. Under certain conditions equation (2) has a unique solution $\varphi(x)=(W_{a^{-1}}^0f)(x)$;

To such equations belong celebrated classical convolution equations of Wiener-Hopf on the axes $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, of Mellin equations on the half axes $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ and Töplitz equations on the grid of integers $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. These equations have ample of applications in problems of Mathematical Physics, Probability theory, Elasticity theory etc.

I will speak about a Lie algebra-interval $G = (-1, 1)$, which is equiped with the group operation $x \circ y := (x+y)(1+xy)^{-1}$, $x, y \in G$. The invariant Haar measure is $d_G x := (1-x^2)^{-1} dx$ and the Fourier transformation

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{G}} v)(\xi) := \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{i\xi} \frac{v(y)dy}{1-y^2} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{i\xi} v(y) d_G y, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

These tools allow to solve exactly convolution integro-equations on this group

$$\sum_{k=0}^{n} \left[a_k \mathfrak{D}^k u(t) - b_k \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-\tau^2}{1-t^2}\right)^{\alpha_k} \frac{\mathfrak{D}^k u(\tau) d\tau}{\tau - t} \right] = f(t), \qquad a_k, b_k, \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathcal{J}, \tag{4}$$

where $\mathfrak{D} u(x) := -(1-x^2)\dfrac{d}{dx} u(x)$ is the natural derivative of functions on the group G (the generator of the Lie algebra) and $(\mathcal{F}_G \mathfrak{D}) = -2i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$.

It turned out that to the class of convolution equations (4) belong the following celebrated airfoil (Prandtl) equation with important applications

$$\boldsymbol{P} u(x) = \frac{c_0 u(x)}{1-x^2} + \frac{c_1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{u'(y)dy}{y-x} = f(x), \qquad x \in \mathcal{J} \tag{5}$$

Also singular Tricomi and Lavrentjev-Bitsadze equation, which emerge in solving partial differential equations of mixed type. Moreover, Laplace-Beltrami equation on the unit sphere in $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ is also a G-convolution operator with a parameter.

In conclusion we touch recent results obtained in collaboration with Duván Cardona, Arne Hendrickx & Michael Ruzhansky (Ghent University, Belgium) concerning Global pseudo-differential operators on the Lie group (cube) $G = (-1, 1)^n$.

Inverse scattering method via Gelfand–Levitan–Marchenko equation for nonlinear Klein–Gordon equation coupled with a scalar field

Mansur I. ISMAILOV[1,2]
[1]*Department of Mathematics, Gebze Technical University, Kocaeli, Turkey*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
mismailov@gtu.edu.tr

A class of negative order Ablowitz–Kaup–Newell–Segur nonlinear evolution equations are obtained by applying the Lax hierarchy of the Manakov system [1]. The inverse scattering problem on the whole axis is examined in the case where Manakov system becomes the classical Zakharov–Shabat system consists of two equations and admits a real symmetric potential. Referring to these results, the N–soliton solutions for the the nonlinear Klein–Gordon equation coupled with a scalar field [2] are obtained by using the inverse scattering method via the Gelfand–Levitan–Marchenko equation [3,4]. (This is joint work with C. Sabaz).

Funding: The author is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09260126).

Keywords: Manakov system, negative order AKNS hierarchy, Inverse scattering method, Gelfand–Leitan–Marchenko equation, Klein–Gordon equation coupled with a scalar field.

2010 Mathematics Subject Classification: 37K15, 35C08, 35L70

References

[1] Manakov S.V. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electro-magnetic waves, *Sov. Phys. Jetp.*, **38** (1974), 248-253.

[2] Hirota R., Otha Y. Hierarchies of coupled soliton equations, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **60:3** (1991), 798 - 809.

[3] Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. Theory of solitons: the inverse scattering method, Consultants Bureau, New York (1984).

[4] Ablowitz M.J., Segur H. *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM, Philadelphia (1981).

Algebraic and elementary properties of Rogers Semilattices

Manat MUSTAFA

Department of Mathematics, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan
E-mail:manat.mustafa@nu.edu.kz

Studying computability phenomena leads to intriguing directions in mathematics and applications (as seen in [1-3]). Recursive mathematics and computability theory involve situations that naturally necessitate the study of constructive objects. When examining the algorithmic properties of such objects, the best approach is to use the techniques and notions from the theory of computable numberings.

Arbitrary numbering of a countable class is a mapping which assigns natural indices to all elements of this class. Goncharov and Sorbi proposed a general method for studying classes of objects that can be constructively described in formal languages with a Gödel numbering for formulas [4]. According to their approach, a numbering is computable if there exists a function that is computable and, for every object and its index in the numbering, produces a Gödel index of its constructive description. Thus, an object's index relative to any computable numbering can be considered its constructive description.

If there exists a computable function which translates indices of the sets in the first numbering into the indices of the same sets in the second numbering, then the first numbering is said to be reducible to second one. Numberings which are reducible to each other are called equivalent. Rogers semilattice of a family is a quotient structure of all computable numberings of the given family modulo equivalence of the numberings ordered by the relation induced by reducibility of numberings. The Rogers semilattice represents the algorithmic complexity of computations of the set as a whole, and problems in the theory of computable numberings concern mainly the algebraic and elementary properties of Rogers semilattices. The Rogers semilattice are used also as a tool to classify properties of computable numberings for different families.

In this presentation, I will discuss the latest results regarding the computable numberings of a range of sets in different hierarchies[5-7], as well as the algebraic and elementary characteristics of the Rogers semilattices.

Funding: The author were supported by Nazarbayev University Faculty Development Competitive Research Grants 021220FD3851.

Keywords: Computability theory. Computable numbering theory, Rogers Semilattices.

2010 Mathematics Subject Classification: 03D45 (06A12), 03C57, 35K20 03D25, 03D30

References

[1]Edited by Y.L. Ershov, S.S. Goncharov, A. Nerode, J.B. Remmel. *Handbook on Recursive Mathematics. Volume 1, Recursive model theory.* Elsevier,Amsterdam, (1998).

[2] Edited by Yu. L. Ershov, S.S. Goncharov, A. Nerode, J.B. Remmel, V.W. Marek. *Handbook on Recursive Mathematics. Volume 2, Recursive Algebra, Analysis and Combinatorics.*Elsevier, Amsterdam, (1998).

[3] Yu.L.Ershov, S.S.Goncharov. *Constructive models.* Plenum Press Corp., New-York, (1999).

[4] S.S.Goncharov, A.Sorbi. Generalized computable numberings and non-trivial Rogers semilattices, *Algebra and Logic*, **36**:4 (1997), 359–369.

[5] I.Herbert, M.Mustafa, S.Jain, S, Lempp, F.Stephan. Reductions between Types of Numberings, *Annals of Pure and Applied Logic*, **170**:12 (2019).

[6] S.A.Badaev, B.S.Kalmurzaev, N.Mukash, M.Mustafa,. One-Element Rogers Semilattices in the Ershov Hierarchy, *Algebra Logic*, **60** (2021), 284–287.

[7] N.Bazhenov, M.Mustafa, S.Ospichev. Rogers semilattices of punctual numberings, *Mathematical Structures in Computer Science*, **32**:2 (2022), 164–188.

Finite-Time Stability of Fractional-Order Discontinuous Nonlinear Systems with State-Dependent Saturation Impulse and Asymmetric Saturation Impulse

Rajan RAKKIYAPPAN

Department of Mathematics, Bharathiar University, Coimbatore, India
E-mail:rakkigru@gmail.com

The concepts of finite-time stability (FTS) and finite-time contractive stability (FTCS) for fractional-order discontinuous nonlinear systems (FODNs) with state-dependent saturation impulses (SDSI) and state-dependent asymmetric saturation impulses (SDASI) will be discussed here. We will initially discuss the necessary and sufficient conditions for discontinuous function and both saturation impulses. Furthermore, a dead zone function exists for the state-dependent impulses when they are considered as asymmetric characteristics. By the method of mathematical induction, the theory of convex analysis and Filippov mapping, we are discussing those stability criteria for FODNs with saturation and asymmetric saturation impulses. The proposed theoretical conclusions will be validated by two numerical simulations with saturation and asymmetric saturation impulses.

Navier-Stokes Equations of Non-Newtonian fluids and Applications in Polymer Processing

Dongming WEI

Department of Mathematics, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan
E-mail:dongming.wei@nu.edu.kz

In this talk, an introduction to the theory of rheology and non-Newtonian fluids is provided as the background on mathematical modeling of such fluid flows. Applications and motivation of the study of the Navier-Stokes (NS) problems arising from chemical engineering are demonstrated. Some mathematical analysis of the NS equations including existence and uniqueness is reviewed from the earlier studies. Numerical analysis of approximation of the NS equations by iterative and penalty method is reported. Recent results will be presented from the research projects funded by Kazakhstan Ministry of Education (AP05134166) and Nazarbayev University (021220FD4651) on the topic. Future research plans on particle filled fluids, coating die free boundary flows, solid fluid interactions, flow manifold design and body optimization are discussed.

Higher-dimensional partitions

Damir YELIUSSIZOV

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: yeldamir@gmail.com

Higher-dimensional partitions were introduced by P. A. MacMahon [1] as a natural generalization of the usual (one-dimensional) integer partitions and (two-dimensional) plane partitions. While these objects arise in various fields including algebra, geometry, combinatorics, probability and statistical physics, not much is known about d-dimensional partitions for $d \geq 3$, cf. [2].

The story about higher-dimensional partitions involves some wrong conjectures starting famously from MacMahon [1] on their enumeration and generating function, and later on their asymptotics [3] suggested by physicists based on experiments from Monte Carlo simulations.

In the talk, I will summarize the history of higher-dimensional partitions (starting from important results on the usual integer and plane partitions), show several open problems and discuss some recent progress on this topic.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14871710 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: integer partitions, plane partitions, higher-dimensional partitions.

2010 Mathematics Subject Classification: 05A17

References

[1] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, Cambridge University Press, Vol. 1 and 2 (1916).

[2] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2, Cambridge (1999).

[3] S. Balakrishnan, S. Govindarajan, and N. S. Prabhakar, On the asymptotics of higher-dimensional partitions, *J. Phys. A* **45** (2012), 055001.

1 Алгебра, математическая логика и геометрия

Руководители:	д.ф.-м.н. Вербовский В. В. академик НАН РК Джумадильдаев А. С.
Секретарь:	Умбетбаев О. А.

Формульно-определимый модельный компаньон теории

А. КАСАТОВА[1,a], А. КАБИДЕНОВ[2,b] М. БЕКЕНОВ[3,c]

[1] *Медицинский университет Караганды, Караганды, Казахстан*
[2,3] *Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]Kassatova@qmu.kz, [c]bekenov50@mail.ru

В работе [1] на множестве полных теорий языка первого порядка рассматривалось произведение $\bullet$ и прямое произведение P_iT_i, $i{\in}I$, где T_i полные теории.

Определение 1. Класс моделей K называем формульно-определимым, если существует модель $A{\in}K$ такая, что $\{\,X|Th(X){\bullet}Th(A){=}Th(A)\}{=}K$, где $Th(X)$ — элементарная теория модели X. Теория $Th(A)$ в этом случае называем определителем класса K.

Определение 2. Модельный компаньон T' теории T называется формульно-определимым, если класс моделей модельного компаньона T' формульно-определим.

Исследуется существование модельного компаньона для аксиоматизируемого индуктивного класса моделей.

Теорема 1. *Если для аксиоматизируемого индуктивного класса моделей K класс его экзистенционально-замкнутых моделей формульно-определим, то теория класса K имеет модельный компаньон.*

Пример. Для теории булевых алгебр формульно-определимым модельным компаньоном является теория безатомных булевых алгебр.

Funding: Работа третьего из авторов выполнена при грантовом финансировании № AP09259295 Комитета науки Министерства науки и высшего образования РК

Ключевые слова: полные теории, произведение, формульно-определимые теории, модельный компаньон.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Бекенов М.И., Нуракунов А.М. Полугруппа теорий и её решётка идемпотентных элементов, *Алгебра и логика*, **60**:1 (2021), 3–22.

[2] Eklof P., Sabbagh G. Model-completions and modules, *Annals of Mathematical Logic*, **2**:3 (1971), 251–295.

Об алгебрах бинарных формул для слабо циклически минимальных теорий с тривиальным определимым замыканием

Бейбут Шайыкович КУЛПЕШОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Данный доклад касается понятия *слабой циклической минимальности*, первоначально изученного в [1]. Пусть $A \subseteq M$, где $\mathcal{M}$ — циклически упорядоченная структура. Множество A называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ выполняется следующее свойство: для любого $c \in M$ с условием $K(a, c, b)$ имеет место $c \in A$ или для любого $c \in M$ с условием $K(b, c, a)$ справедливо $c \in A$. *Слабо циклически минимальная структура* есть циклически упорядоченная структура $M = \langle M, K, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Пусть $\mathcal{M}$ — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $G := \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$. Следуя стандартной теоретико-групповой терминологии, группа G называется *k-транзитивной*, если для любых попарно различных $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ и попарно различных $b_1, b_2, \ldots, b_k \in M$ существует $g \in G$, для которого $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2, \ldots, g(a_k) = b_k$.

Конгруэнцией на $\mathcal{M}$ называется любое G-инвариантное отношение эквивалентности на $\mathcal{M}$. Группа G называется *примитивной*, если G является 1-транзитивной и не существует нетривиальных собственных конгруэнций на $\mathcal{M}$.

Пусть f — унарная функция в M с $Dom(f) = I \subseteq M$, где I — открытое выпуклое множество. Мы говорим что f является *монотонной вправо (влево) на* I, если она сохраняет (обращает) отношение K, т.е. для любых $a, b, c \in I$ таких, что $K(a, b, c)$, мы имеем $K(f(a), f(b), f(c))$ $(K(f(c), f(b), f(a)))$.

Будем говорить, что слабо циклически минимальная теория имеет *ранг выпуклости* 1, если не существует определимого отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов.

В работе [2] были описаны счетно категоричные 1-транзитивные непримитивные слабо циклически минимальные структуры ранга выпуклости 1 с тривиальным определимым замыканием с точностью до бинарности.

Алгебры бинарных формул являются инструментом для исследования связей между элементами множеств реализаций типов на бинарном уровне относительно суперпозиции бинарных определимых множеств. Мы будем рассматривать алгебры бинарных изолирующих формул, первоначально изученные в работах [3, 4], где под бинарной изолирующей формулой понимается формула вида $\varphi(x, y)$, не имеющая параметров и такая, что для некоторого параметра a формула $\varphi(a, y)$ изолирует некоторый полный тип из $S_1(\{a\})$. Понятия и обозначения, относящиеся к этим алгебрам, можно также найти в работах [3, 4]. В последние годы алгебры бинарных формул изучаются интенсивно и получили свое продолжение в работах [5]–[8].

В настоящем докладе мы обсуждаем алгебры бинарных изолирующих формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1 с 1-транзитивной непримитивной группой автоморфизмов и тривиальным определимым замыканием. Также мы представляем критерий коммутативности таких алгебр. Нами доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная непримитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости 1 с $dcl(a) = \{a\}$ для некоторого $a \in M$. Тогда алгебра $\mathfrak{P}_M$ бинарных изолирующих формул коммутативна $\Leftrightarrow$ для любой выпуклой вправо формулы $R(x, y)$, не являющейся эквивалентность-генерирующей, функция $r(y) := \mathrm{rend}\, R(M, y)$ является монотонной вправо на M.*

Funding: Данное исследование поддержано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Гранты BR20281002 и AP19674850).

Ключевые слова: слабая циклическая минимальность, алгебра бинарных изолирующих формул, коммутативность

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

Литература

[1] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures, *Mathematical Logic Quarterly* **51**:4 (2005), 377–399.

[2] Kulpeshov B.Sh. On $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures, *Mathematical Logic Quarterly* **52**:6 (2006), 555–574.

[3] Судоплатов С.В. *Классификация счетных моделей полных теорий*, Издательство НГТУ, Новосибирск (2018).

[4] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports* **11** (2014), 362–389.

[5] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах, *Алгебра и логика*, **56**:1 (2017), 20–54.

[6] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий, *Алгебра и логика*, **57**:6 (2018), 662–683.

[7] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры бинарных формул для композиций теорий, *Алгебра и логика*, **59**:4 (2020), 432–457.

[8] Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий, *Алгебра и логика*, **60**:4 (2021), 369–399.

О почти вполне ортогональности 1-типов в слабо о-минимальных теориях

Бейбут Шайыкович КУЛПЕШОВ[1,a], Сергей Владимирович СУДОПЛАТОВ[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[1] *Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан*
[2] *Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
E-mail: [a]*b.kulpeshov@kbtu.kz*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

Настоящий доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Мы говорим, что тип p является *не слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют L_A-формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Другими словами, тип p является *слабо ортогональным* типу q ($p \perp^w q$), если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное расширение до полного 2-типа над A.

В настоящем докладе мы исследуем новый вариант ортогональности неалгебраических 1-типов в слабо о-минимальных теориях: почти вполне ортогональность.

Нам понадобится понятие (p, q)-секатора, введенное в [2]. Пусть $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы, $p \not\perp^w q$. Будем говорить, что L_A-формула $\phi(x, y)$ является (p, q)-*секатором*, если существует $a \in p(M)$ такой, что $\phi(a, M) \cap q(M) \neq \emptyset$, $\neg\phi(a, M) \cap q(M) \neq \emptyset$, $\phi(a, M) \cap q(M)$ выпукло, и $[\phi(a, M) \cap q(M)]^- = [q(M)]^-$.

Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Будем говорить, что тип p *не почти вполне ортогонален* типу q ($p \not\perp^{aq} q$), если существуют (p, q)-секатор $U(x, y)$ и A-определимое отношение эквивалентности $E_q(x, y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так, что для любого $a \in p(M)$ существует $b \in q(M)$ такой, что $\sup U(a, M) = \sup E_q(b, M)$.

Будем говорить, что T является *почти вполне о-минимальной*, если понятия слабой и почти вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Пример. Пусть $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, E^2, R^2 \rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченном как обычно, а P_1 с $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченном лексикографически. Символ бинарного отношения E определяется следующим образом: для любых $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in P_1(M)$ имеет место $E((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \Leftrightarrow a_1 = a_2$. Символ бинарного отношения R интерпретируется следующим образом: для любых $(a_1, a_2) \in P_1(M), b \in P_2(M)$ имеет место $R((a_1, a_2), b) \Leftrightarrow b < a_1 + \sqrt{2}$.

Может быть установлено, что $Th(M)$ — слабо о-минимальная теория. Отношение $E(x, y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим $P_1(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Пусть $p(x) := \{P_1\}$, $q(x) := \{P_2\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset)$, $p \not\perp^w q$, но $p \perp^{aq} q$, т.е. $Th(M)$ не является почти вполне о-минимальной.

Ранг выпуклости формулы введен в [3]. В частности, слабо о-минимальная теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует параметрически определимого отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов. Понятие квазирационального 1-типа введено в [4]. Мы говорим, что неалгебраический $p \in S_1(A)$ является *квазирациональным вправо (влево)*, если существует выпуклая L_A-формула $U_p(x) \in p$ такая, что для любой достаточной насыщенной модели $M' \succ M$ $\sup U_p(M') = \sup p(M')$ ($\inf U_p(M') = \inf p(M')$).

Доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $\Gamma_1 = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, $\Gamma_2 = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\}$ — максимальные попарно слабо ортогональные семейства квазирациональных и иррациональных 1-типов над $\emptyset$ соответственно для некоторых $m, l < \omega$. Тогда T имеет в точности $3^m 6^l$ счетных моделей $\Leftrightarrow$ теория T — почти вполне о-минимальная.*

Funding: Данное исследование поддержано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Гранты BR20281002 и AP19674850).

Ключевые слова: слабая о-минимальность, ортогональность типов, ранг выпуклости, число счетных моделей

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

Литература

[1] Macpherson H.D., Marker D., and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Transactions of the American Mathematical Society*, **352**:12 (2000), 5435–5483.

[2] Kulpeshov B.Sh. Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories, *Annals of Pure and Applied Logic*, **45** (2007), 354–367.

[3] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties, *The Journal of Symbolic Logic*, **63** (1998), 1511–1528.

[4] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, **66** (2001), 1382–1414.

О видах предгеометрий ациклических теорий

Сергей Борисович МАЛЫШЕВ

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
E-mail: sergei2-mal1@yandex.ru

Приводится описание видов предгеометрий [1] для ациклических теорий [2]. Вводятся новые понятия a-предгеометрии, a-модулярности и a-локально конечности.

Определение 1. a-Предгеометрией называется множество S вместе с определённой операцией замыкания $\mathrm{cl} : P(S) \to P(S)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) для любого $X \subseteq S$ выполняется $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$;
2) для любого $X \subseteq S$ выполняется $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$;
3) для любого $X \subseteq S$ если $a \in \mathrm{cl}(X)$, то $a \in \mathrm{cl}(Y)$ для некоторого конечного $Y \subseteq X$.

Определение 2. Для ациклических теорий T в качестве a?размерности $dim_a(A)$, где $A \subseteq M \models T$, рассматривается значение $\mu_A + \sum_{D'} \nu_{A \cap D'}$, где μ_A ? число конечных деревьев $D \subseteq M$ с условием $A \cap D \neq \emptyset$, а $\nu_{A \cap D'}$? число вершин наименьших деревьев K бесконечных деревьев $D' \subseteq M$ с условием $A \cap D' \subseteq K$.

Определение 3. a-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl} \rangle$ называется *a-модулярной*, если для любых acl-замкнутых множеств $X_0, Y_0 \subseteq S$, X_0 независимо от Y_0 относительно $X_0 \cap Y_0$, т.е. для любых конечномерных acl-замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно:

1) если существует бесконечное дерево D, для которого $X \cap Y \cap D = \emptyset$, $X \cap D \neq \emptyset$, $Y \cap D \neq \emptyset$, то выполняется равенство:

$$\dim_a(X \cap D) + \dim_a(Y \cap D) +$$

$$+\rho(X \cap D, Y \cap D) = \dim_a((X \cup Y) \cap D),$$

где $\rho(X \cap D, Y \cap D)$ — число вершин кратчайшего пути между вершинами $x \in X \cap D$ и $y \in Y \cap D$;

2) в остальных случаях для компонент связности D выполняется равенство:

$$\dim_a(X \cap D) + \dim_a(Y \cap D) - \dim_a(X \cap Y \cap D) = \dim_a((X \cup Y) \cap D).$$

Определение 4. *a-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ называется a-*локально конечной*, если для любого конечного подмножества $A \subseteq S$, множество $\mathrm{acl}(A)$ конечно.*

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть T — ациклическая теория. Тогда a-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ любой насыщенной модели $M = \langle S, R\rangle$ теории T является a-модулярной.*

Определение 5. 1) Будем называть вершину a в графе *n-вершиной* (*∞-вершиной*), если она инцидентна n рёбрам (бесконечному числу рёбер).

2) Назовём *n-окрестностью* вершины a множество вершин, соединённых с ней через n рёбер. Это множество обозначается через $N_n(a)$.

3) Последовательность натуральных чисел и символа ∞ будем называть *кодом* вершины a от вершины b, если i-тый элемент последовательности является степенью i-той вершины на пути от элемента b к элементу a.

4) Будем говорить, что вершины имеют *один тип*, если на каждой их окрестности имеется одно и тоже число вершин одинакового кода.

Теорема 2. *Пусть T — ациклическая теория. Тогда для любой модели $M = \langle S, R\rangle$ теории T выполняются следующие условия:*

1) *если в модели имеется бесконечное число конечных компонент, то a-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ не является a-локально конечной $\Leftrightarrow$ можно выделить бесконечное число конечных множеств с вершинами одного типа;*

2) *если в модели имеется бесконечная компонента, то a-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ не является a-локально конечной $\Leftrightarrow$ при замыкании некоторой вершины можно выделить бесконечную возрастающую подпоследовательность натуральных чисел n такую, что на n-окрестности можно выделить конечное множество вершин одного типа.*

Funding: Настоящее исследование поддержано Российским научным фондом, проект № 22-21-00044.

Ключевые слова: предгеометрия, ациклическая теория, a-предгеометрия, a-модулярность, a-локально конечность.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C30, 05C63

Литература

[1] Pillay A. *Geometric Stability Theory*, Clarendon Press, Oxford (1996).

[2] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*, Наука, Москва (1990), 384 с.

Геометрические свойства гиперраспределения в Евклидовом пространстве

Д.Б. МУТИГОЛЛАЕВА[1,a],

[1] *КазНУ им.Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]danagul24.04.2000@gmail.com,

В настоящей работе рассмотрены некоторые геометрические свойства $(n-1)$-распределения в евклидовом пространстве E_n.

Пусть n-мерное Евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $\mathcal{R}^x = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ инфинитезимальное перемещение которого определяется дифференциальными уравнениями:

$$d\vec{x} = \omega^J \vec{e}_J, d\vec{e}_J = \omega_J^K \vec{e}_K \tag{1}$$

$(J, K, L, ... = 1, 2, ..., n; I, J, K, ... = 1, 2, ..., n-1)$

Формы ω^J и ω_J^K удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\omega^J = \omega^K \wedge \omega_J^K, D\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K \tag{2}$$

Пусть в некоторой области $G \subset E_n$ задана вещественная функция $f(x^1, x^2, ..., x^n)$. Условие $f = const.$ расслаивает область G на ∞^1 поверхностей V_{n-1} (поверхностей уровня этого инварианта), касательные пространства к этим поверхностям задают в области $G(n-1)$-распределение Δ_{n-1}.

Теорема 1. *Для того, чтобы выполнялось соотношение $y = tX$, необходимо и достаточно, чтобы геометрический объект Λ_{in}^n был нулевым.*

Теорема 2. *Интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u})$ являются линиями кривизны относительно $\Delta(X)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_k (-1)^{k-1}(\Lambda_{ik}^n - \rho\gamma_{ik})det\|\Lambda_{iL_K}^n\| = 0(L_K \neq K),$$

где $\rho-$ корень уравнения $det\|\Lambda_{ik}^n - \rho\gamma_{ik}\| = 0$.

Теорема 3. *Если интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u}), \vec{e}_1 \in \Delta(\vec{u})$ являются геодезическими, то $det\|\Lambda_{iL_k}^n = 0\|$ и тензоркривизны гиперповерхности V_{n-1} удовлетворяет условию: $R_{stpq} = 0$, если хотя бы один из индексов равен единице $(L_K \neq K; K \neq 1)$.*

Аналогично убеждаемся, что справедлива.

Теорема 4. *Чтобы геодезическая линия $\Delta(\vec{u}), \vec{e}_1 \in \Delta(\vec{u})$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\gamma^{ik}\Lambda_{K1}^n = 0(i \neq 1).$$

Литература

[1] Фавар Ж. *Курс локальной дифференциальной геометрии*, ИЛ, Москва (1960).

[2] Фоменко А.Т. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, МГУ (1988).

[3] Эйзенхарт Л.П *Риманова геометрия*, Изд-во иностр. лит., М.-Л. (1948).

[4] Розендорн Э. Р., Соколов Д.Д. О восстановлении двумерной псевдоримановой метрики по заданной кривизне, *Фундаментальная и прикладная математика*, **11**:1 (2005), 85–92.

[5] Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве, в: *Лит. матем. сб.*, У1, 4 (1966), 475–491.

Расстояние Громова–Хаусдорфа между множествами вершин правильных многоугольников, вписанных в одну окружность

Талант Камбарович ТАЛИПОВ[1,a]

[1] *КФ МГУ им. Ломоносова, Астана, Казахстан*

E-mail: [a]*talipovtalant.live@gmail.com*,

1. Предварительные сведения. Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать $d(x, y)$ или $|xy|$. Для непустых $A, B \subset X$ определим

$$d_H(A, B) = \max\Big\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a, b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a, b)\Big\}.$$

Определение. Величина $d_H(A, B)$ называется **расстоянием Хаусдорфа** между A и B. Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z'), состоящую из метрического пространства Z' и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). Положим

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\big\{r : \exists(X', Y', Z'), d_H(X', Y') \leqslant r\big\}.$$

Определение. Величина $d_{GH}(X,Y)$ называется расстоянием **Громова–Хаусдорфа** между X и Y.

Определение. Для множеств X, Y **соответствием** между X и Y называется $R \subset X \times Y$ такое, что для любого $x \in X$ существует $y \in Y$, для которых $(x,y) \in R$ и, обратно, для любого $y \in Y$ существует $x \in X$, для которых $(x,y) \in R$. Если X, Y — метрические пространства, то определим **искажение соответствия** R следующим образом: $\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||x_1x_2| - |y_1y_2|\big| : (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R\Big\}$.

Множество всех соответствий между X и Y будем обозначать $\mathcal{R}(X,Y)$.

Теорема 1 [1]. *Для произвольных ограниченных метрических пространств X и Y выполняется*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

2. Основные результаты. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ обозначим через P_n множество вершин правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность S^1. Отметим, что P_2 — пара диаметрально противоположных точек. Наделим множества P_n метрикой, индуцированной с окружности. Для $m, n \geqslant 2$ положим $p_{m,n} = d_{GH}(P_m, P_n)$.

Теорема 2. *Пусть $2 \leqslant n \leqslant m$ и m делится на n без остатка, тогда*

$$p_{n,m} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m}.$$

Теорема 3. *Пусть $m \geqslant 2$, тогда*

$$p_{2,m} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}, & \text{если } m \text{ — нечетное;} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}, & \text{если } m \text{ — четное.} \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть $m \geqslant 3$, а r — остаток от деления m на 3, тогда*

$$p_{3,m} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{m}, & \text{если } r = 0; \\ \frac{\pi}{3} - \frac{r\pi}{3m}, & \text{если } r \neq 0. \end{cases}$$

Ключевые слова: метрическая геометрия, расстояние Громова–Хаусдорфа, метрическое пространство, ультраметрическое пространство.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*, Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований (2004).

Алгебры бинарных изолирующих формул для графов Мычельского

Дмитрий ЕМЕЛЬЯНОВ[1,a],

[1] *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия]*
E-mail: [a]dima-pavlyk@mail.ru

Определение 1. *Мычельскиан или граф Мычельского* неориентированного графа — граф, созданный применением конструкции Мычельского [1]. Конструкция сохраняет отсутствие треугольников, но увеличивает хроматическое число.

Определение 2. *Конструкция Мычельского* строится так, пусть n вершин заданного графа G — это v_0, v_1 и так далее. Граф Мычельского $\mu(G)$ графа G содержит G в качестве подграфа и ещё $n+1$ вершин — по вершине u_i для каждой вершины v_i графа G, и ещё одна вершина w. Каждая вершина u_i соединена ребром с w так, что вершины образуют звезду $K_{1,n}$. Кроме того, для каждого ребра $v_i v_j$ графа G граф Мычельского включает два ребра —$u_i v_j$ и $v_i u_j$.

Применяя построение мычельскиана повторно, начиная с графа с единственным ребром, получим последовательность графов $M_i = \mu(M_{i-1})$, будем называть их графами Мычельского. Несколько первых графов в этой последовательности — это графы $M_2 = K_2$ с двумя вершинами, соединёнными ребром, цикл $M_3 = C_5$ и M_4 это граф с 11 вершинами и 20 рёбрами.

Описаны алгебры бинарных изолирующих формул [2] для графов Мычельского в общем виде. Замено, что каждое применение конструкции Мычельского к графу увеличивает диаметр графа на 1, получили зависимость $d = i - 2$ при M_i , где $i > 3$.

Алгебра $\mathfrak{M}_\mathfrak{i}$ для графа Мычельского M_i, с диаметром графа $n = i - 2$, задаётся следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	n
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{n\}$
1	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\ldots$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$
2	$\{2\}$	$\{1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6\}$	$\ldots$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$
3	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	$\ldots$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$
4	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$	$\ldots$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	$\{n\}$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$	$\ldots$	$\{0,1,2,3,\ldots,n\}$

Теорема 1. *Алгеба бинарных изолирующих формул для графа Мычельского M_i будет изоморфна алгебре $\mathfrak{M}_\mathfrak{i}$.*

Funding: Автор был поддержан грантом РНФ № 22-21-00044.

Ключевые слова: алгебра бинарных формул, графы Мычельского, теория моделей, модель теории, графы.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Jan Mycielski *Sur le coloriage des graphes*, Colloq. Math.. — 1955. — Т. 3. — С. 161—162.

[2] Sudoplatov S.V. *Classification of Countable Models of Complete Theories*, NSTU, Novosibirsk (2018).

Binary weakly ordered minimal theories and conservative extensions

Zhanar Adil[1,a] Bektur Baizhanov[2,b], Yevgeniy Vasilyev[3,c]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, RK*

[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, RK*

[3] *Memorial University of Newfoundland, Corner Brook, Canada*

E-mail: [a]zhanar.adil@mail.ru, [b]baizhanov@hotmail.com, [c]yvasilyev@grenfell.mun.ca

Let $\mathfrak{M} = (M; \Sigma)$ be an elementary submodel of a model $\mathfrak{N} = (N; \Sigma)$ $(\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N})$. We say that $\mathfrak{N}$ is n-conservative extension of $\mathfrak{M}$ $(\mathfrak{M} \prec_{n,c} \mathfrak{N})$, if for any $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ $(l(\bar{\alpha}) = n)$ its n-type is definable. $\mathfrak{N}$ is conservative extension of $\mathfrak{M}$ $(\mathfrak{M} \prec_c \mathfrak{N})$, if it is n-conservative extension for any $n < \omega$. L. van den Dries [1] proved that any any elementary extension of real closed field is conservative, or any n-type over all real numbers is definable. Marker-Steinhorn [2] proved that any 1-conservative pair of o-minimal models is conservative. B.Baizhanov [3] constructed 1-conservative, non 2-conservative pair of models of weakly o-minimal theory.

Theorem *Let T be a binary weakly ordered minimal theory and $\mathfrak{M} \prec_{1,c} \mathfrak{N}$. Suppose $\mathfrak{M} \not\prec_c \mathfrak{N}$ and, consequently, there exists $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ such that $tp(\bar{\alpha}|M)$ is not definable, length of tuple $\bar{\alpha}$ is minimal. Then there exists irrational 1-type over M, $r \in S_1(M)$ such that $tp(\bar{\alpha}|M) \not\perp^w r$, $tp(\bar{\alpha}|M) \perp^a r$.*

Corollary 1 (Analogy of Marker-Steinhorn Theorem) *Let T be a binary weakly ordered minimal theory. If T is quite o-minimal or almost o-minimal, then for any elementary pair of models $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ the following holds: $\mathfrak{M} \prec_{1,c} \mathfrak{N}$ implies $\mathfrak{M} \prec_c \mathfrak{N}$.*

Corollary 2 (Analogy of L.van den Dries Theorem) *Let $\mathfrak{M} = (M; \Sigma)$ be a model of a binary weakly ordered minimal theory. Then there exists $\mathfrak{M}^+ = (M; \Sigma^+)$ weakly ordered minimal expansion of $\mathfrak{M}$, such that any type over M is definable.*

Funding: The first author was supported by the grant no. AP09058169 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: definability type, conservative extension, orthogonality weakly and almost

2010 Mathematics Subject Classification: 03C99

References

[1] L. van den Dries Remarks on Tarski's problem concerning $(R, +, \cdot, exp)$, *Logic Colloquium '82*, North-Holland, 1984, 97–121.

[2] D.Marker, Ch. Steinhorn Definable types in o-minimal theories, *The Journal of Symbolic Logic*, **59** (1994), 185–198.

[3] B.S. Baizhanov Definiability of 1-Types in Weakly O-Minimal Theories, *Siberian advances in mathematics*, **16**:2 (2006), 1–33.

Classifying of subvarities of varities of bicommutative algebra with identity $(ab)c + (ba)c + (ca)b + c(ba) + c(ab) + b(ac) = 0$

Zhaniya AKHMETOVA

SDU, Almaty, Kazakhstan
E-mail: 211101005@stu.sdu.edu.kz

THE ABSTRACT TEXT

One of the important problem of the theory of polynomial identitites in algebra is describe all varieties of algebras with given system of identities. Our aim is to classify all subvarieties of the variety of bicommutative algebras. Classifying is usually done in the language of lattices. [1] completely describes the subvarieties of variety of the associative algebra. This work describes in detail the subvarieties of a variety of a bicommutative algebra with the identity (ab)c+(ba)c+(ca)b+c(ba)+c(ab)+b(ac)=0.

Defenition 1. *An algebra $(A, \cdot)$ is called bicommutative if any $a, b, c \in A$ are satisfied the following identities*

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b, \tag{1}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c). \tag{2}$$

Theorem 1. *Let f be generator of irreducible S_n-submodule of $P_n(\mathfrak{M})$. Then the consequence of higher degrees from the f are equivalent to the following identities:*

$$(a) \quad f_{(n+1)}, f = f_n, n = 1, 2$$

$$(b) \quad g_{(n+1)}, f = f_n, n = 1, 2, 3$$

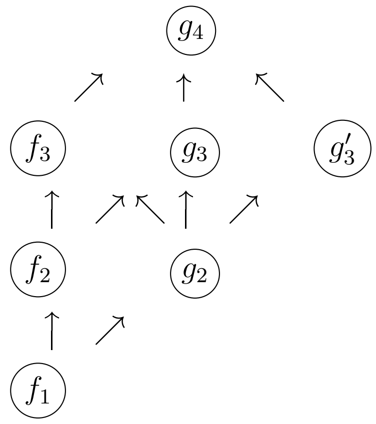
$$(c) \quad g_{(n+1)}, f = g_n, n = 2, 3$$

$$(d) \quad g_{(n+1)}, f = f_n, n = 2$$

$$(e) \quad g'_{(n+1)}, f = f_n, n = 2$$

$$(f) \quad g'_{(n+1)}, f = g_n, n = 2$$

To illustrate this theorem we can use this form:



Keywords: varieties of algebras, bicommutative algebra, polynomial identity, S_n-module.

2010 Mathematics Subject Classification: 16r10, 16s34

References

[1] V. Drensky and L. Vladimirova *Varities of associative algebras*, Pliska, Studia Mathematica Bulgarica, (8): 144-157, 1986.

On submajorisation of the Rotfeld's inequality

Maktagul Alday[1,a], Zhuldyz Sotsial[2,b] Tolkynay Yelemes[2,c]

[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
[2] Astana IT University, Astana, Kazakhstan
E-mail: aldai_m@enu.kz, [b]Zhuldyz.Sotsial@astanait.edu.kz, [c]tolkynay.yelemes@astanait.edu.kz

We denote the set of all $n \times n$ complex matrices by $\mathbb{M}_n$ and the Schatten p-norm $(0 < p \leq \infty)$ by $\|\cdot\|_p$. Rotfel'd [1] proved that if $x,\ y \in \mathbb{M}_n$ and $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ is a concave function, then

$$\|f(|x+y|)\|_1 \leq \|f(|x|) + f(|y|)\|_1. \tag{1}$$

Uchiyama [2] extended (1) that for any unitarily invariant norm $\|\cdot\|$ and concave function $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$\|f(|x+y|)\| \leq \|f(|x|)\| + \|f(|y|)\|, \qquad x, y \in \mathbb{M}_n. \tag{2}$$

In [3], the author interpolated (2) by proving that for all unitarily invariant norms $\|\cdot\|$ and concave functions $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$,

$$\|f(|x+y|)\| \leq \|f(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} |x|+|y| & x^*+y^* \\ x+y & |x^*|+|y^*| \end{pmatrix})\| \leq \|f(|x|)\| + \|f(|y|)\|, \qquad x, y \in \mathbb{M}_n.$$

We denote by $L_0(0,\alpha)$ the space of Lebesque measurable real-valued functions f on $(0,\alpha)$ and define the decreasing rearrangement function $f^* : (0,\alpha) \mapsto (0,\alpha)$ for $f \in L_0(0,\alpha)$ by

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 :\ \mu(\{\omega \in (0,\alpha) :\ |f(\omega)| > s\}) \leq t\}, \qquad t \geq 0.$$

If $f, g \in L_0(0,\alpha)$ satisfy that $\int_0^t f^*(s)ds \leq \int_0^t g^*(s)ds$ for all $t \geq 0$, we say that f is *submajorized* by g, denote by $f \preccurlyeq g$.

Let $(\mathcal{M}, \tau)$ be a semi-finite von Neumann algebra. We denote by $L_0(\mathcal{M})$ the set of all τ-measurable operators and by $\mu_t(x)$ the generalized singular number of $x \in L_0(\mathcal{M})$.

Theorem 1. *Let $x, y \in L_0(\mathcal{M})$. If $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ is an increasing continuous function, then*

$$\mu_t(g(|x+y|)) \leq \mu_t(g(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} |x|+|y| & x^*+y^* \\ x+y & |x^*|+|y^*| \end{pmatrix})), \qquad 0 < \tau < \tau(1).$$

Theorem 2. *Let $x, y \in L_0(\mathcal{M})$. If $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ is a concave function, then*

$$\mu(f(|x+y|)) \preccurlyeq \mu(f(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} |x|+|y| & x^*+y^* \\ x+y & |x^*|+|y^*| \end{pmatrix})) \preccurlyeq \mu(f(|x|)) + \mu(f(|y|)).$$

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Science and High Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871523).

Keywords: generalized singular value, τ-measurable operator, semi-finite von Neumann algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 46L52, 47L05

References

[1] Rotfel'd S. J., The singular values of a sum of completely continuous operators, *Top. Math. Phys.* **3** (1969), 73-378.

[2] Uchiyama M., Subadditivity inequality of eigenvalue sums, *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2005), 1405–1412.

[3] Zhang Y., Interpolating the Rotfel'd inequality for unitarily invariant norms, *Linear Algebra Appl* **574** (2019) 60–66.

On countable categoricity of semantic Jonsson quasivarieties of unars and graphs

Aibat Yeshkeyev[1,a], Alina Yarullina[1,b], Sultan Amanbekov[1,c].

[1] *Buketov Karaganda University, Karaganda, Kazakhstan*
E-mail: [a]modth1705@mail.ru, [b]linka14221@mail.ru, [c]amanbekovsmath@gmail.com.

The abstract is dedicated to the study of the model-theoretic properties of well-known and sufficiently prime classes in the sense of signatures of algebras, particularly unars and graphs. The abstract is a continuation of the work [1]. Let us recall the main definitions which will be needed.

Definition 1. $[2, 80]$ A theory T is said to be Jonsson, if it satisfies the following conditions:
1) T has an infinite model;
2) T is inductive;
3) T has JEP property;
4) T has AP property.
A theory is called Robinson if it is universal and has JEP and AP properties.

Definition 2. $[2, 80]$ Let $\kappa \geq \omega$. Jonsson theory T is called κ-categorical, if any two models of power κ of theory T are isomorphic to each other.

Definition 3. Model A of theory T is called existentially closed model of theory T, if for any model B of theory T such that $A \subseteq$ B, for any $\exists$ - formula $\exists x\varphi(x, \overline{y})$, for any $\overline{a}$ from A $(l(\overline{a})) = (l(\overline{y}))$ from $B \models \exists x\varphi(x, \overline{a})$ follows that $A \models \exists x\varphi(x, \overline{a})$

We will denote a class of existentially closed models of theory T as $E(T)$. We will need the following theorem proved by Ye.A. Palyutin for construction of main results of the thesis.

Theorem 1. [3] *In order for the algebraic system A to be some ω-categorical universal, it is necessary and sufficient that the following conditions will be satisfied:*
1) A is locally finite;
2) there is a function $g : \omega \to \omega$ such that for every $a \in A$ and for every finite subset $X \subseteq A$ the type $tp(a, X, A)$ is realized in every subsystem $B \subseteq A$ that contains X and has a power $\geq g(|X|)$.

Let us consider the notions of Jonsson spectrum of class K and connected with it semantic Jonsson quasivariety.

Definition 4. A set $J(Th(K)) = \{\Delta \mid \Delta$ is Jonsson theory, $\Delta = Th(K) \cup \{\varphi^i\}\}$ where $\varphi^i \in \forall\exists(L_0)$ and $\varphi^i \notin Th(K)$, $i \in \{0,1\}$, $Th(K)$ is elementary theory of quasivariety class K, $\forall\exists(L_0)$ is a set of all $\forall\exists$ sentences of language L

Definition 5. A set $JC = \{C_\Delta \mid \Delta \in J(Th(K)), C_\Delta$is a semantic model of $\Delta\}$ is said to be Jonsson semantic quasivariety of class K.

Definition 6. [4] A set $JSp(K)$ of Jonsson theories of signature σ, where $JSp(K) = \{T \mid T$ is Jonsson theory and $\forall A \models K, A \models T\}$, is said to be Jonsson spectrum of K.

As class K we will use all existing universal unars or undirected graphs denoted as K_U and K_G respectively.

Definition 7. A set $RSp(JC)$ of Robinson theories of signature σ, where $RSp(JC) = \{\Delta \mid \Delta$ is Robinson theory and $\forall C_\Delta \in JC, C_\Delta \models \Delta\}$, is said to be Robinson spectrum of class JC, where JC is Jonsson semantic quasivariety.

Let us consider factor-set $RSp(JC_U)_{/\bowtie}$ of Robinson spectrum of JC_U that is Jonsson semantic quasivariety of Robinson unars parted by means of cosemanticness relations and consider the properties of $[\Delta_U] \in RSp(JC_U)_{/\bowtie}$. We will denote a class of existentially closed models of class $[\Delta_U]$ as $E([\Delta_U])$.

Theorem 2. *Let $[\Delta_U]$ be a class of ω-categorical Robinson theory of unars. Then the following conditions are equivalent:*
1) $A \in E([\Delta_U])$, where A is a model of class $[\Delta_U]$;
2) A is disjoint union of components with cycles of the same length.

Corollary 1. *Classes $[\Delta_U]$ of countable-categorical Robinson theories of unars are total-categorical*

Let us consider factor-set $RSp(JC_G)_{/\bowtie}$ of Robinson spectrum of JC_G that is Jonsson semantic quasivariety of Robinson graphs parted by means of cosemanticness relations and consider the properties of $[\Delta_G] \in RSp(JC_G)_{/\bowtie}$. We will denote a class of existentially closed models of class $[\Delta_G]$ as $E([\Delta_G])$.

Theorem 3. *Let $[\Delta_G]$ be a class of ω-categorical Robinson theory of undirected graphs. Then the following conditions are equivalent:*
1) $B \in E([\Delta_G])$, where B is a model of class $[\Delta_G]$;
2) B is infinite quite disconnected graph.

Corollary 2. *Classes $[\Delta_G]$ of countable-categorical Robinson theories of graphs are total-categorical*

All definitions that were not given in the abstract can be found in [2].

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09260237 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Jonsson theory, unars, graphs, Robinson theory, quasivariety, semantic Jonsson quasivariety, Jonsson spectrum, Robinson spectrum, equivalence class, cosemanticness.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Eshkeev A.R., Ospanov R.M., (2006). Opisanie ekzistencional'no-zamknutyh modelej schetno-kategorichnyh jonsonovskih universalov unarov i grafov. // Vestnik Karagandinskogo universiteta. Seriya Matematika, 3, S. 38–44.

[2] Yeshkeyev, A.R., Kassymetova, M.T. (2016). *Yonsonovskie teorii i ih klassy modelei [Model Theory and their Classes of Models].* Karaganda: Izdatelstvo KarGU [in Russian]

[3] Palyutin E.A. Modeli so schetno-kategorichnymi universal'nymi teoriyami // Algebra i logika. — 1971. — T. 10. — No 1. — S. 23–32.

[4] Yeshkeyev, A.R., Ulbrikht, O.I. (2019). JSp-kosemantichnost R-modulei [JSp-cosemanticness of *R*-modules]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 16, 1233–1244.

On Robinson spectrum of the semantic Jonsson quasivariety of unars

Aibat YESHKEYEV[1,a], Alina YARULLINA[1,b], Sultan AMANBEKOV[1,c], Maira KASSYMETOVA[1,d]

[1] *Buketov Karaganda University, Karaganda, Kazakhstan*
E-mail: [a]*modth1705@mail.ru,* [b]*linka14221@mail.ru,* [c]*amanbekovsmath@gmail.com,* [d]*mairushaasd@mail.ru*

The study of model-theoretic relations of classical algebras and their syntactic properties from the Jonsson theories consideration, which are, generally speaking, incomplete, allows one to describe quite broad classes of theories. The abstract is a continuation of the work [1]. Let us recall the main definitions that are needed.

Definition 1. $[2, 80]$ A theory T is said to be Jonsson, if:

1) T has at least one infinite model;
2) $T$is $\forall\exists$-axiomatizing;
3) T has JEP;
4) T has AP.

$\forall$-axiomatizing Jonsson theory is called the Robinson theory.

We can consider the Jonsson spectrum for K, which can be defined as follows.

Definition 2. [3] A set $JSp(K)$ of Jonsson theories of language L, where $JSp(K) = \{T \,|T$ is Jonsson theory and $K \subseteq Mod(T)\}$, is said to be Jonsson spectrum of K.

Definition 4. A set $J(Th(K)) = \{\Delta \mid \Delta$ is Jonsson theory, $\Delta = Th(K) \cup \{\varphi^i\}\}$ where $\varphi^i \in \forall\exists(L_0)$ and $\varphi^i \notin Th(K)$, $i \in \{0, 1\}$, $Th(K)$ is elementary theory of quasivariety class K, $\forall\exists(L_0)$ is a set of all $\forall\exists$ sentences of language L

Definition 5. A set $JC = \{C_\Delta \mid \Delta \in J(Th(K)), C_\Delta$is a semantic model of $\Delta\}$ is said to be semantic Jonsson quasivariety of class K.

As class K we will use all existing universal unars and construct the next notion.

Definition 6. A set $RSp(JC_U)$ of Robinson theories of language L, where $RSp(JC_U) = \{\Delta \mid \Delta$ is Robinson theory of unars and $\forall C_\Delta \in JC_U, C_\Delta \models \Delta\}$, is said to be Robinson spectrum of class JC_U, where JC_U is semantic Jonsson quasivariety of Robinson unars.

We consider the cosemanticness relation on Robinson spectrum $RSp(JC_U)$ and get the partition onto equivalence classes $[\Delta] \in RSp(JC_U)_{/\bowtie}$, where $RSp(JC_U)_{/\bowtie}$ will be a factor-set.

Definition 7. [1] A fourset $(\Omega, \nu, \mu, \varepsilon)$ is called characteristic C and is denoted by $char(C)$, if

$\Omega = \{\chi(a) : a \in C\}, \qquad \nu \;\; \omega \setminus \{0\} \to \omega \cup \{\infty\}$ such that $\forall m > 0$,

$$\nu(m) = \begin{cases} k, \text{if the quantity } \; m-\text{loops in } \; C \; \text{ is equal to } \; k < \omega, \\ \infty, \text{otherwise;} \end{cases}$$

$\mu : \Omega \to \omega \cup \{\infty\}$ such that if $\alpha \in \Omega$ and $\alpha \in \chi(a)$, then $\mu(\alpha) = k(a)$, if $k(a) < \omega$ and $\mu(\alpha) = \infty$, if $k(a) = |C|$;

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, \text{if } \; |\{a \in C : \chi(a) = \omega\}| = 0, \\ \infty, \text{otherwise.} \end{cases}$$

C is a semantic model of Robinson unars theory.

Definition 8. [1] Let us call arbitrary fourset $(\Omega^{**}, \nu^{**}, \mu^{**}, \varepsilon^{**})$ a characteristic if the following conditions are satisfied:

1) $\varnothing \neq \Omega^{**} \subseteq \{\omega\} \cup (\omega \times \omega)$; 2) $\nu^{**} : \omega \setminus \{0\} \to \omega \cup \{\infty\}$;
3) $\mu^{**} : \Omega^{**} \to \omega \cup \{\infty\}$;
4) $\varepsilon^{**} \in \{0, \infty\}$;
5) $\omega \in \Omega^{**} \Leftrightarrow \varepsilon = \infty$;
6) $(n, m) \in \Omega^{**} \cap (\omega \times \omega) \& 0 \leq k < n \Rightarrow (k, m) \in \Omega^{**}$;

7) $\nu^{**}(m) > 0 \Leftrightarrow (0,m) \in \Omega{*}{*}$;
8) $|\Omega^{**}| = \omega \Rightarrow \omega \in \Omega^{**}$;
9) $(n,m) \in \Omega^{**} \cap (\omega \times \omega) \Rightarrow (\mu(n,m) = 0 \Leftrightarrow (n+1,m) \neq \Omega^{**})$;
10) $\omega \notin \Omega^{**} \& |\Omega^{**}| < \omega \Rightarrow \exists m < \omega(\nu(m) = \infty) \vee \exists n < \omega, m < \omega \quad ((n,m) \in \Omega^{**} \& \mu(n,m) = \infty)$;
11) $|\Omega^{**}| = \omega \Rightarrow \begin{cases} \mu(\omega) \geq k, \text{if } \exists k, l < \omega(k = max\{\mu(n,m) : (n,m) \in \Omega^{**}, n+m \geq l\}) \\ \mu(\omega) = \infty, \text{otherwise}; \end{cases}$
12) $\mu^{**}(\omega) > 0$.

DEFINITION 9. As a characteristic $Char([\Delta])$ we will understand $Char(\mathfrak{C}_{[\Delta]})$.

Theorem 1. *1) Every class $[\Delta]$ has a characteristic.*
2) For any characteristic π there is a class $[\Delta]$, that has characteristic π.
3) Two classes $[\Delta_1], [\Delta_2]$ are equivalent iff their characteristics are equal.

Here π is some arbitrary fourset $(\Omega^{**}, \nu^{**}, \mu^{**}, \varepsilon^{**})$, $[\Delta] \in RSp(JC_U)_{/\bowtie}$

All definitions that were not given in the abstract can be found in [2].

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09260237 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Jonsson theory, unars, universal theory, Robinson theory, quasivariety, semantic Jonsson quasivariety, Jonsson spectrum, Robinson spectrum, equivalence class, cosemanticness.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Eshkeev A.R., Mustafin T.G. Opisanie jonsonovskih universalov unarov // Issledovaniya v teorii algebraicheskih sistem: Sb. nauch. tr. — Karaganda: Izd. KarGU, 1995. — S. 51–57.

[2] Yeshkeyev, A.R., & Kassymetova, M.T. (2016). *Yonsonovskie teorii i ih klassy modelei [Model Theory and their Classes of Models]*. Karaganda: Izdatelstvo KarGU [in Russian]

[3] Yeshkeyev, A.R., & Ulbrikht, O.I. (2019). JSp-kosemantichnost R-modulei [JSp-cosemanticness of R-modules]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 16, 1233–1244.

Cayley's first hyperdeterminant and multiplanar networks

Alimzhan Amanov,[1], Damir Yeliussizov[2]

[1,2] *Kazakh-British Technical University, and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [1]*alimzhan.amanov@gmail.com*, [2]*yeldamir@gmail.com*

Cayley's first hyperdeterminant is a unique (up scale) $\mathrm{SL}(n)^{\times d}$-invariant polynomial of degree n on the tensor space $(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$ for even d, given by

$$\det(X) = \sum_{\sigma_2,\ldots,\sigma_d \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma_2) \cdots \mathrm{sgn}(\sigma_d) \prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma_2(i),\ldots,\sigma_d(i)},$$

where S_n is the symmetric group and $X = (X_{i_1,\ldots,i_d}) \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$ is written as a multidimensional matrix in a fixed basis. The function $\det(X)$ was studied by Cayley in 1845 [2]. Even though this function has many nice properties generalizing the properties of the matrix determinant, some of its basic properties are still unknown. For instance, it is not known how to describe when $\det(X) = 0$ and this problem is in general NP-hard to decide [1].

By a *d-multiplanar network* we call an acyclic directed graph G that lies in a union of d half-planes $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ with a common pivot line L (in $\mathbb{R}^3$). For simplicity we assume that L is perpendicular to xy-plane. For instance, 2-multiplanar network is a planar graph. A *multipath* of G is a union of paths $P_1 : A \to B_1, \ldots, P_d : A \to B_d$, where for each $i = 1, \ldots, d$ the path P_i starts at a *source* $A \in L$ and ends at a *sink* $B_i \in \alpha_i$. When multipaths have no common vertices we call them *non-intersecting*. For $i = 1, \ldots, n$, select n points $B_1^i, \ldots, B_n^i \in \alpha_i$ in increasing order of z-coordinate. Let $X_{i_1,\dots,i_d}$ be the number of multipaths with sinks $B^1_{i_1},\dots,B^d_{i_d}$. Note that $X=(X_{i_1,\dots,i_d})$ can be viewed as an element in $(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$.

Theorem 1. $\det(X)$ *counts the number of tuples* $(M_1,\dots,M_n)$ *of non-intersecting multipaths, where* M_j *is a multipath with the sinks* $B^1_j,\dots,B^d_j$ *for* $j=1,\dots,n$.

This theorem is an analog of the celebrated Lindström–Gessel–Viennot lemma [3] about non-intersecting paths in planar graphs. We also have a weighted and more general version of Theorem 1 which works for some generalized d-dimensional networks.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14871710 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: hyperdeterminants, multiplanar networks

2010 Mathematics Subject Classification: 05A19, 05E05, 52B05

References

[1] A. Barvinok, New algorithms for linear k-matroid intersection and matroid k-parity problems, Math. Program. **69** (1995), 449–470.

[2] A. Cayley, On the theory of determinants, Trans. Cambridge Phil. Soc. VIII (1843), 1–16.

[3] I. Gessel, X. Viennot, Determinants, paths, and plane partitions, preprint, 1989, 132(197.15).

On topological properties of quasivarieties of modular lattices

Ainur Basheyeva[1,a], Svetlana Lutsak[2,b], Amantai Asanbekov[3,c], Olga Voronina[4,d]

[1] *L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

[2,4] *M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk, Kazakhstan*

[3] *Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyzstan*

E-mail: [a]*basheyeva3006@gmail.com*, [b]*sveta_lutsak@mail.ru*, [c]*asanbekov_aman@mail.ru*, [d]*oavy@mail.ru*

A finite algebra $\mathcal{A}$ with discrete topology τ generates a topological quasivariety $\mathbf{Q}_\tau(\mathcal{A})$ consisting of all topologically closed subalgebras of non-zero direct powers of $\mathcal{A}$ endowed with the product topology. Profinite algebras are exactly those that are isomorphic to inverse limits of finite algebras. Such algebras are naturally equipped with Boolean topologies. A topology τ is Boolean if it is compact, Hausdorff, and totally disconnected. A topological quasivariety $\mathbf{Q}_\tau(\mathcal{A})$ is standard if every Boolean topological algebra with the algebraic reduct in $\mathbf{Q}(\mathcal{A})$ is profinite. In this case, we say that algebra $\mathcal{A}$ generates a standard topological quasivariety.

The questions of the standardness of quasivarieties have been investigated by many authors. The problem "Which finite lattices generate a standard topological prevariety?" was suggested by D.M. Clark, B.A. Davey, M.G. Jackson and J.G. Pitkethly in the paper [1]. The paper [2] found sufficient conditions under which a quasivariety contains a continuum of non-standard subquasivarieties.

We investigate the topological quasivariety generated by the specific finite modular lattice $\mathcal{A}$ and prove that it is not standard. We would like to note that there is an infinite number of lattices similar to the lattice $\mathcal{A}$. The main result of this work is as follows.

Theorem. *The topological quasivariety generated by the lattice* $\mathcal{A}$ *is not standard.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan ([1]Grant No. AP13268735, [2,4]Grant No. AP09058390).

Keywords: lattice, quasivariety, standard topological quasivariets

2010 Mathematics Subject Classification: 06B15, 08C15

References

[1] Clark D.M., Davey B.A., Jackson M.G., Pitkethly J.G. The axiomatizability of topological prevarieties, *Advances in Mathematics*, **218** (2008), 1604–1653.

[2] Kravchenko A.V., Nurakunov A.M., Schwidefsky M.V. Structure of quasivariety lattices. IV. Nonstandard quasivarieties, *Siberian Math. J.*, **62** (2021), 850-858.

Expansion of a model of an ordered superstable theory by an externally definable set

Bektur BAIZHANOV[1,a], Fatima SARGULOVA[2,b]

[1]*Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Suyleman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@hotmail.com*, [b]*fsargulova@gmail.com*

Let $\mathbb{M} = \langle M; \Sigma \rangle$ be a model of theory T. We say that $\langle M; \Sigma^+ \rangle$ is an expansion of model $\mathbb{M}$, where $\Sigma \subset \Sigma^+$ and there is a formula $\varphi(\bar{x})$ of signature Σ^+ such that the set $\varphi(M^n)$ is non-definable with parameters from the model $\langle M; \Sigma \rangle$.

There are different ways to expand given model with aim to understand what properties of theory preserves this expansion and expanded by differen non-definable subset: elementary submodel, indiscernible set, the graph of unary function, arbitrary set. Macperson-Marker-Steinhorn [1] for special case proved in o-minimal theory weak o-minimality expanded by convex subset by consideration the relation of formulas expanded language in expanded model with the formulas in initial language in elementary extension of initial model. This approach is called after time the name externally definable expansion. So, let $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ and $\Theta(x, \bar{\alpha})$, $\bar{\alpha} \in N \setminus M$. Let $A = \{a \in N | \mathfrak{N} \models \Theta(a, \bar{\alpha})\}$, then $A \cap M$ is called to be externally definable subset in $\mathfrak{M}$. Notice that this set in stable theory is definable in $\mathfrak{M}$. Thus expansion model by externally definable set has sense just in non-stable theory. B.S. Baizhanov [2] proved, that expansion of models of weakly o-minimal theories by externally definable subsets admits quantifier elimination and preserves weakly o-minimality. Shelah [3] proved, that expansion of model of NIP theory by externally definable subsets preserves NIP. V. Verbovskiy [4], F.Wagner and A. Pillay [5] gave simplified proof of Shelah. Baizhanov-Verbovskiy [6] introduced notions ordered omega-stable, ordered superstable, ordered stable and proved that these theories are dependent. Following theorem of Shelah externally definable expansion of ordered stable theory is ordered stable.

In report we consider the questions of externally definable expansion of models of ordered superstable theory.

Funding: The second author is supported by the grant no. AP09058169 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: ordered stable theory, model expansion, types.

2010 Mathematics Subject Classification:

References

[1] D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Translations of the American Mathematical Society*, **352** (2000), 5435–5483.

[2] B.S. Baizhanov Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, **66** (2001), 1382–1414.

[3] S. ShelahDependent first order theories. Continued *Israel Journal of Mathematics*, **173**:1 (2009), 3–45. https://doi.org/10.1007/11856-009-0082-1

[4] V. Verbovskiy Dependent theories. The Shelah's theorem, *Proceeding of International conference Contemporary problems of mathematics, informatics and control, dedicated to 60th anniversary of M.B. Aidarkhanov*, **1**:2 (2008), 439–441.

[5] A. Pillay On externally definable sets and a theorem of Shelah, *Algebra, logic, set theory, Stud. Log.(Lond.)*, (2007)

[6] B. Baizhanov, V. Verbovskiy Ordered stable theories, *Algebra and Logic*, **50**:3, 303–325. 2011.

Expansion of a model of a complete theory by a type-definable set

Sayan BAIZHANOV[1,a], Bektur BAIZHANOV[2,b]

[1]*Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*sayan-5225@mail.ru*, [b]*baizhanov@math.kz*

Definition. Let $\mathbb{M} = \langle M; \Sigma\rangle$ be a model of theory T. We say that $\langle M; \Sigma^+\rangle$ is an expansion of model $\mathbb{M}$, where $\Sigma \subset \Sigma^+$ and there is a formula $\varphi(\bar{x})$ of signature Σ^+ such that the set $\varphi(M^n)$ is non-definable with parameters from the model $\langle M; \Sigma\rangle$.

Main problem: to find conditions on new relations, under which the desired properties of the initial model are preserved.

Among such properties are the following: decidability of an elementary theory of an expanded model (for example, decidability of the theory of the field of real numbers, expanded with a unary exponential function), model completeness, stability, superstability, omega-stability, strong minimality, weak and strong o-minimality, finite cover property, absence of a formula with the independence property, and so on. As a new predicate, non-definable in the original model, elementary submodels, selected automorphisms, indiscernible subsets, externally definable set and just a subsets without any restrictions (the general case).

Expansion of a model by elementary submodel (pair of models) considered by B. Poizat (stable case) [1] and E. Bouscaren studied the pairs of superstable theories with dimensional order property [2]; J. Baldwin and M. Benedict [3] proved stability of an expansion of model of a stable theory by a predicate, which distinguishes a non-definable set, over which the model is saturated. A. Wilkie [4] proved that an expansion by a unary exponential function the field of real numbers, whose elementary theory admits quantifiers elimination is decidable and o-minimal, has a model complete and o-minimal theory, Macpherson, Marker, Steinhorn [5] proved that expansion by externally definable set in o-minimal theory for special case preserves weakly o-minimality, B.S. Baizhanov [6] proved, that expansion of models of weakly o-minimal theories by externally definable subsets admits quantifier elimination and preserves weakly o-minimality. Shelah [7] proved, that expansion of model of NIP theory by externally definable subsets preserves NIP. V. Verbovkiy [8] and A. Pilay [9] gave simplified proofs of Shelah's theorem.

A natural question about on expansion by type-definable relation arises. We will discuss the conditions for theories preserving the properties by expansion by a unary type-definable relation. There is an expansion of a omega-stable that does not preserve stability by 1-type definable set.

Funding: The authors were supported by the grant no. 0122PK00831 AP14972657 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: stable theory, model expansion, types.

2010 Mathematics Subject Classification:

References

[1] B. Poizat Pairs de structure stables, *The Journal of Symbolic Logic*, **48** (1983), 239–249.

[2] E. Bouscaren Dimensional order property and pairs of models, *Annals of Pure and Applied Logic*, **41** (1989), 205–231.

[3] J.T. Baldwin, M. Benedikt Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models, *Translations of the American Mathematical Society*, **352** (2000), 4937–4969.

[4] A.J. Wilkie Model-completeness results for expansions of the real field by restricted Pfaffian functions and the exponential function, *Journal of the American Mathematical Society*, **9** (1996), 1051–1094.

[5] D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Translations of the American Mathematical Society*, **352** (2000), 5435–5483.

[6] B.S. Baizhanov Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, **66** (2001), 1382–1414.

[7] S. ShelahDependent first order theories. Continued *Israel Journal of Mathematics*, **173**:1 (2009), 3–45. https://doi.org/10.1007/s11856-009-0082-1

[8] V. Verbovskiy Dependent theories. The Shelah's theorem, *Proceeding of International conference "Contemporary problems of mathematics, informatics and control", dedicated to 60th anniversary of M.B. Aidarkhanov*, **1**:2 (2008), 439–441.

[9] A. Pillay On externally definable sets and a theorem of Shelah, *Algebra, logic, set theory, Stud. Log.(Lond.)*, (2007)

V-independent sequences

Bektur BAIZHANOV[1,a], Yevgeniy VASILYEV[2,b], Nargiza TAZABEKOVA[3,c]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Memorial University of Newfoundland, Corner Brook, Canada*
[3] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@hotmail.com*, [b]*yvasilyev@grenfell.mun.ca*, [c]*tazabekova.nargiz@gmail.com*

We assume that M is a saturated model of a complete theory T, A is a set such that M is $|A|^+$-saturated, p, q are non-isolated one-types.

Neighborhood of the element α in type $p \in S_1(A)$ ($\alpha \models p$) denoted and defined by

$$V_p(\alpha) := \{\beta \in p(M) | \text{ there exists A-formula } \phi(x,y), \beta \in \phi(M,\alpha) \subset p(M), \phi(\beta, M) \subset p(M)\}.$$

It follows from the definition that (non-definable) binary relation $x \in V_p(y)$ is an equivalence relation.

Assume that $p, q \in S_1(A)$ and there exists a $2-A$-formula $H(x,y)$ such that for any $\alpha \in p(M)$ and any $\beta \in q(M)$, $H(\alpha, M) \subset q(M)$, $H(M,\beta) \subset p(M)$.

Lemma 1. *Suppose $H(M,\beta) \subseteq V_p(\alpha)$ for some $\alpha \in p(M)$ and some $\beta \in q(M)$. Then $\cup_{\gamma \in V_q(\beta)} H(M,\gamma) = V_p(\alpha)$.*

We say that one-type p is not almost orthogonal to one-type q ($p \not\perp^a q$), there is a $2-A$-formula $H(x,y)$ such that for any $\alpha \in p(M)$, $H(\alpha, M) \subset q(M)$.

A type q is less or equal to type p with respect to Rudin-Keisler order ($q \leq_{RK} p$), if in any model containing A, the realization of p implies the realization of q. It follows from definitions that $p \not\perp^a q$ implies $q \leq_{RK} p$.

We will assume that the theory T has the property:

(*) For any any two one-types the following holds. If $p \not\perp^a q$, then $q \not\perp^a p$.

This assumption means that on the set $S_1(A)$ the binary relation $\not\perp^a$ is an equivalence relation. We say that $p \not\perp^b q$, if $p \not\perp^a q$ and there exists $2-A-$formula $H(x,y)$ such that for any $\alpha \in p(M)$ there exists $\beta \in q(M)$, $H(\alpha, M) \subseteq V_q(\beta)$. We will assume that the theory T has the property:

(**) For any two one-types the following holds: If $p \not\perp^a q$, then $q \not\perp^b p$ and $p \not\perp^b q$.

Weakly o-minimal theory has the property (**).

It follows from (**) and Lemma 1 that for such theories it is possible to introduce the notion of a neighborhood of element α in another one-type.

Let $\alpha \in p(M)$, $p \not\perp^a q$, $\beta \in q(M)$, $H(M,\alpha) \subseteq V_q(\beta)$. The neighborhood of element α in one-type q is the set $V_q(\alpha) := \{\delta | \models H(\delta,\gamma),\ \gamma \in V_p(\alpha)\}$. By Lemma 1 we have $V_p(\alpha) = V_p(\beta)$ and $V_q(\alpha) = V_q(\beta)$.

Thus, for theories satisfying (**) there is a partition of model M over set A and consequently, we have an equivalence relation over A.

Let $A \subset M$, $\alpha, \beta \in M$, $p := tp(\alpha|A)$, $q := tp(\beta|A)$. We say, that α and β are V-equivalent over A and denote $\alpha \approx_A \beta$, if either $tp(\alpha|A) = tp(\beta|A)$ is isolated or $p \not\perp^a q$ and $V_p(\alpha) = V_p(\beta)$ (equivalently, $V_q(\alpha) = V_q(\beta)$). Notice, that in general case, this relation of equivalence is not definable.

Definition 1. *Let I be countable sequence $< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ... >_{n<\omega}$. For $m < i < \omega$ denote by $p_{m,i} := tp(\alpha_i|A\bar{\alpha}_m)$, $p_i := tp(\alpha_i|A)$. We say that I is V-independent sequence over set A, if for any $m < i \neq j < \omega$ we have $\alpha_i \not\approx_{A\bar{\alpha}_m} \alpha_j$ or equivalently, $V_{p_{m,i}}(\alpha_i) \cap V_{p_{m,i}}(\alpha_j) = \emptyset$.*

We say, that I, a V-independent sequence over A, is V_p-indiscernible sequence over A, if $tp(\alpha_i|A\bar{\alpha}_m) = tp(\alpha_j|A\bar{\alpha}_m)$, $tp(\alpha_i|A) = tp(\alpha_j|A) = p$ for any $m < i \neq j < \omega$.

We will discuss the possibility of giving a characterization of an arbitrary model of theory with (**) by the family of independent sequences (V_p-indiscernible sequences) and if such a family can serve as an invariant for a model like in Baldwin-Lachlan result for $\aleph_1$-categorical theories.

Keywords: V-independent sequences, V$_p$-indiscernible sequences, geometric structures, neighborhoods

2010 Mathematics Subject Classification: 03C99

References

[1] B.S. Baizhanov Classification of one-types in weakly o-minimal theories and its corollaries, preprint, (1996)

[2] Bernstein A., Vassiliev E. Geometric structures with dense independent subset. in the journal, *Selecta Mathematica*, **22**:191 (2016), 191–225.

[3] B.S. Baizhanov Expansion of an o-minimal model by unary convex predicates, *Researches in theory of algebraic systems*, (1995), 3-23.

[4] B.S. Baizhanov, N.S. Tazabekova, A.D. Yershigeshova, T.S. Zambarnaya Types in small theories, *Kazakh Mathematical Jornal*, **55** (2015), 38-56.

Notes on countable theories: linear orders and n-arity

Bektur BAIZHANOV[1,a], Tatyana ZAMBARNAYA[1,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]baizhanov@math.kz, [b]zambarnaya@math.kz

The talk includes some observations regarding complete countable theories of countable signatures and their countable models.

Given a countable, not necessarily linearly ordered, theory of a countable signature, we construct a corresponding countable linearly ordered theory of a countable signature while preserving the number of countable non-isomorphic models. This is done by introducing a new equivalence relation with dense co-dense equivalence classes for distinct elements of models of the initial theory, which “respects” the initial signature. We show one-to-one correspondence between classes of models of these theories, hence proving the following theorem.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{M} = \langle M; \Sigma\rangle$ be a countable structure of a countable signature Σ. Then there exists a countable linearly ordered structure M^* such that $I(Th(M), \aleph_0) = I(Th(M^*), \aleph_0)$.*

Corollary 1. *If there exists a theory T of a countable signature such that $I(T, 2^{\aleph_0}) = \aleph_1$, then there exists a linearly ordered theory T^* of a countable signature such that $I(T^*, 2^{\aleph_0}) = \aleph_1$.*

Corollary 1 shows that, in attempts to solve Vaught's conjecture, we can safely exclude non-linearly-ordered theories from our consideration, but, at the same time, this restriction is not of a substantial matter.

A theory T is said to be n-ary if every its formula is equivalent to a boolean combination of formulas with at most n free variables.

Theorem 2. *Let T be a complete countable theory. Suppose that T is n-ary for some $n < \omega$, and let $p \in S_m(T)$, where $m > n$. Then the type p is a unique extension of the set $\bigcup\limits_{\substack{p' \in S_n(T),\\ p' \subset p}} p'$ to a complete m-type over an empty set.*

That is, the m-type p is uniquely determined by a union of a suitable family of n-types over an empty set.

Funding: The second author was supported by the grant no. AP09058169 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: countable theory, linear order, number of countable models, Vaught's conjecture, n-ary theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

On multilinear part of the Kleinfeld algebras

TULENBAEV, K.M.1[1,a], KUNANBAYEV A.K.2[2,b] S.A. BOLAT[3,b]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2] Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty, Kazakhstan
[3] Kazakh National University after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]kaysart1@mail.ru, [b]kunanbayev@math.kz
[c]bbsaniya.1411@gmail.com

The Kleinfeld algebras are given by identity:

$$x \circ (y \circ z) = y \circ (z \circ x)$$

. The Kleinfeld algebras were introduced by E. Kleinfield in [2]. B. A. Kupershmidt studied Kleinfeld algebras in [1]. We use program, written on Haskell, to compute multilinear part of small dimensions. We obtain tha $P(3) = 7, P(4) = 27, P(5) = 130, P(6) = 759, P(7) = 5205, P(8) = 40990$.

Theorem 1. *Let A be a Kleinfeld algebra then*
$P(n) \leq n! + \frac{94*(n-4)^3 - 467*(n-4)^2 + 801*(n-4) - 408}{2}$

Funding: The first author is grateful to grant AP14869221 "Applications of combinatorial K-theory" MES RK.

Keywords: Nonassociative algebras, Kleinfeld algebras.

2010 Mathematics Subject Classification: 16R10, 17A50, 17A30, 17D25, 17C50

References

[1] Kupershmidt B.A. *Phase Spaces of Algebras*, University of Tennessee, Knoxville (2010).

[2] Kleinfeld E. Right Alternative Rings, *Proceedings of the America Mathematical Society*, **4**:6 (1953), 939–944.

Constant expansions of dense meet-trees and their countable spectra

Aigerim DAULETIYAROVA[1,a],

[1] Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
[1] Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: [a]d_aigera95@mail.ru

Our research is connected with constructions of Ehrenfeucht theories possessing various additional properties, with findings and investigating structural properties of Ehrenfeucht theories. M. G. Peretyat'kin [2] has constructed a complete decidable theory T^1 having exactly 3 nonisomorphic countable models by expanding a dense meet-tree structure [1] with constants $c_n^{(0)}$, $n \in \omega$, such that $c_n^{(0)} < c_{n+1}^{(0)}, n \in \omega$. Here a dense meet-tree means that $\mathcal{M} = \langle M; <, \sqcap \rangle$ is a lower semilattice without least and greatest elements such that: (a) for each pair of incomparable elements, their join does not exist; (b) for each pair of distinct comparable elements, there is an element between them; (c) for each element a there exist infinitely many pairwise incomparable elements greater than a, whose infimum is equal to a. Consequently, the theory was used as a base to produce examples in the context of Ehrenfeucht theories.

The following theorem shows that additional expansions of $T_{\rm dmt}$ by strictly decreasing sequences of constants preserve the Ehrenfeuchtness of the theory and extends possibilities for characteristic representations of Ehrenfeucht theories.

Theorem 1. *Let T be a countable constant expansions of the dense meet-tree theory $T_{\rm dmt}$ with k number of increasing sequence of constants $(c_n^{(i,0)})_{n\in\omega}$ and for each i there is $\tau(i)$ number of decreasing sequence of constants $(c_n^{(1,i)})_{n\in\omega}, \ldots, (c_n^{(\tau(i),i)})_{n\in\omega}$ defining the function*

$d(m) = \{i \mid \tau(i) = m\}$, *so that* $c_n^{(i,0)} < c_n^{(1,i)}, \ldots, c_n^{(i,0)} < c_n^{(\tau(i),i)}$, $n \in \omega$ *and* $c_n^{(j,i)} \parallel c_n^{(t,i)}$ *for each* $1 \leq j \neq t \leq \tau(i)$. *Then* T *has exactly* $3^{d(0)} \cdot 6^{d(1)} \cdot 3^{3 \cdot d(2)} \cdot 3^u$ *countable models, where the number* u *depends on a theory and can be defined as* $\prod_{s=2}^{n} 3^{s \cdot C_s^2}$.

Keywords: meet-tree, countable model, expansion, Ehrenfeucht theories.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C35

References

[1] Mennuni R. Weakly binary expansions of dense meet-trees, *Mathematical Logic Quarterly*, **68**:1 (2022), 32–47.

[2] Peretyat'kin M. G. On complete theories with a finite number of denumerable models, *Algebra and Logic*, **12**:5 (1973), 310–326.

Two-dimensional Choudhury algebras

K.M. TULENBAEV[1,a], G.K. DUISENBAY[2,b] 6[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *Kazakh National University after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*kaysart1@mail.ru*, [b]*gulnaz17102001@gmail.com*

A nonassociative algebra A over a field K is called a Choudhury algebra if it satisfies the following identity:

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ z) \circ y$$

Choudhury algebras were introduced by B. A. Kupershmidt in [1].

We prove the following theorems. **Theorem 1.** *Any commutative Choudhury algebra is associative.*

Theorem 2. *Let* A *to be non commutative Choudhury algebra and* $dim A^2 = 2$, $A = lin < e_1, e_2 >$

$e_1e_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$
$e_1e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$
$e_2e_1 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$
$e_2e_2 = \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2$
We have 1-parametric algebra $A(\alpha_1)$
$\gamma_1 = \alpha_1$ and other coefficients are zero. and 1-parametric algebra $A(\beta_1)$
$\theta_2 = \beta_1$ and other coefficients are zero. and 2-parametric algebra $A(\alpha_1, \beta_1)$
$\theta_2 = \beta_1$, $\gamma_2 = \alpha_1$ and other coefficients are zero.

Funding:The first author is grateful to grant AP14869221 "Applications of combinatorial K-theory" MES RK.

Keywords: Nonassociative algebras, Choudhury algebras.

2010 Mathematics Subject Classification: 16R10, 17A50, 17A30, 17D25, 17C50

References

[1] Kupershmidt B.A. *Phase Spaces of Algebras*, University of Tennessee, Knoxville (2010).

Transposed n-Poisson algebras

Askar DZHUMADIL'DAEV[1,a],

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a] *dzhuma@hotmail.com*

A notion of transposed Poisson algebras [1] can be easily generalized for n-ary case (see [2]). It is an algebra $(A, \omega, \bullet)$ with n-ary operation ω and binary operation $\bullet$, such that (A, ω) is n-Lie, $(A, \bullet)$ is associative commutative and for any $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$n\, a_0 \bullet \omega(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \omega(a_0 \bullet a_i, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n).$$

Construction details of n-Lie algebras considered below see [3],[4].

Theorem 1. *Let A be W-type $(n+1)$-Lie algebras defined on $A=K[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ by*

$$\omega(a_1,\ldots,a_{n+1}) = det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \partial_1 a_1 & \partial_1(a_2) & \cdots & \partial_1(a_{n+1}) \\ \partial_2 a_1 & \partial_2(a_2) & \cdots & \partial_2(a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_n a_1 & \partial_n(a_2) & \cdots & \partial_n(a_{n+1}) \end{bmatrix}.$$

Then $(A,\omega,\cdot)$ is transposed $(n+1)$-Poisson.

Theorem 2. *Let $p=3$ and $A=K[x]$ with 4-wronskian*

$$\omega(a_1,a_2,a_3,a_4) = det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \partial(a_1) & \partial(a_2) & \partial(a_3) & \partial(a_4) \\ \partial^2(a_1) & \partial^2(a_2) & \partial^2(a_3) & \partial^2(a_4) \\ \partial^3(a_1) & \partial^3(a_2) & \partial^3(a_3) & \partial^3(a_4) \end{bmatrix}.$$

Then $(A,\omega,\cdot)$ is transposed 4-Poisson.

Let W_n be wronskian, defined on differentiable functions $g_1=g_1(x),\ldots,g_n=g_n(x)$ by

$$W_n(g_1,\ldots,g_n) = \det\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1' & g_2' & \cdots & g_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_1^{(n-1)} & g_2^{(n-1)} & \cdots & g_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Then for any functions $f=f(x), g_1=g_1(x),\ldots,g_n=g_n(x)$ the following identity holds

$$n\,f\,W_n(g_1,\ldots,g_n) =$$

$$W_n(f\,g_1,g_2,\ldots,g_n)+W_n(g_1,f\,g_2,\ldots,g_n)+\cdots+W_n(g_1,g_2,\ldots,f\,g_n).$$

Theorem 3. *Let $L=K[x]$ with n-Wronskian*

$$\omega(a_1,a_2,\ldots,a_n) = det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \partial(a_1) & \partial(a_2) & \ldots & \partial(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \partial^{n-1}(a_1) & \partial^{n-1}(a_2) & \ldots & \partial^{n-1}(a_n) \end{bmatrix}$$

Then (L,ω) is homotopy n-Lie and $(L,\omega,\cdot)$ is homotopy transposed n-Poisson.

Theorem 4. *Let 3-product in $L=K[x]$ is given by*

$$\omega(a_1,a_2,a_3) = det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \partial(a_1) & \partial(a_2) & \partial(a_3) \\ \partial^5(a_1) & \partial^5(a_2) & \partial^5(a_3) \end{bmatrix} +$$

$$2\,det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \partial^2(a_1) & \partial^2(a_2) & \partial^2(a_3) \\ \partial^4(a_1) & \partial^4(a_2) & \partial^4(a_3) \end{bmatrix} +$$

$$det\begin{bmatrix} \partial(a_1) & \partial(a_2) & \partial(a_3) \\ \partial^2(a_1) & \partial^2(a_2) & \partial^3(a_3) \\ \partial^3(a_1) & \partial^3(a_2) & \partial^3(a_3) \end{bmatrix}$$

Then (L,ω) is homotopy 3-Lie. If $p=3$, then $(L,\omega,\cdot)$ is homotopy transposed 3-Poisson.

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09259551).

Keywords: n-Lie algebras, Poisson algebras

2010 Mathematics Subject Classification: 17D99

References

[1] Bai C., Bai R., Guo L., Wu Y., *Transposed Poisson algebras, Novikov-Poisson algebras, and 3-Lie algebras,* arXiv:2005.01110, 2021.
[2] Patricia Damas Beites, Bruno Leonardo Macedo Ferreira, Ivan Kaygorodov, *Transposed Poisson structures,* arXiv:2007.00281v1, 2022.
[3] A.S. Dzhumadil'daev, *Identities and derivations for Jacobian algebras,* Contemp. Math. v.315, 245-278, 2002.
[4] A.S. Dzhumadil'daev, *n-Lie Structures That Are Generated by Wronskians,* Siberian Math. Journal, **46**(2005), No.4, pp. 601 - 612.

Weak Leibniz algebras and transposed Poisson algebras

Askar DZHUMADIL'DAEV[1,a],

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a] *dzhuma@hotmail.com*

A weak Leibniz algebra is defined by the following polynomial identities

$$[a,b]c = 2a(bc) - 2b(ac), \quad a[b,c] = 2(ab)c - 2(ac)b.$$

Example. Any two-sided Leibniz algebra is weak Leibniz. In particular, any Lie algebra is weak Leibniz.

Example. Let $\epsilon_i \in K$, for $i \in I$, and A_ϵ is an algebra with base $e_i, i \in \mathbf{Z}$, and multiplcation

$$e_i e_j = (i-j)e_{i+j} + \sum_{s \in I} \epsilon_s e_{i+j+s}.$$

Then the algebra A_ϵ is non-Lie simple weak Leibniz algebra. Note that any simple Leibniz algebra is Lie.

An algebra with two binary operations $A = (A, \circ, \bullet)$, is called *transposed Poisson* (see [1]), if $(A, \circ)$ is Lie, $(A, \bullet)$ is associative commutative and associative part acts on Lie part as 1/2-derivation,

$$2a \bullet (b \circ c) = (a \bullet b) \circ c + b \bullet (a \circ c), \quad \forall a, b, c \in A.$$

Theorem 1. $(p \neq 2)$ *If A is weak Leibniz, then the algebra $(A, \circ, \bullet)$ is transposed Poisson, where $a \circ b = ab - ba, a \bullet b = ab + ba$. Conversely, if $(A, \circ, \bullet)$ is transposed Poisson, then the algebra A with multiplication $ab = 1/2(a \circ b + b \circ a)$ is weak Leibniz.*

An algebra $(A, \cdot, \bullet)$ is called *Novikov-Poisson,* if

I. $(A, \cdot)$ is (left) Novikov, for any $a, b, c \in A$,

$$(a \cdot b - b \cdot a) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) - b \cdot (a \cdot c), \quad (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b,$$

II. $(A, \bullet)$ is associative commutative, such that for any $a, b, c \in A$,

$$a \bullet (b \cdot c) = (a \bullet b) \cdot c, \quad a \cdot (b \bullet c) = (a \cdot b) \bullet c + b \bullet (a \cdot c),$$

Proposition. *Let $A = (A, \cdot, \bullet)$ be Novikov-Poisson algebra. Then for any $u, v \in A$ the algebra $A_{u,v} = (A, \circ_u, \bullet_v)$, where*

$$a \circ_u v = u \bullet (a \cdot b - b \cdot a), \quad a \bullet_v b = v \bullet (a \bullet b),$$

is transposed Posson and the algebra $A_{u,v}$ under multiplication $ab = 1/2(a \circ_u b + a \bullet_v b)$ is weak Leibniz.

A weak Leibniz algebra $A = (A, \cdot)$ is called *special,* if there exists transposed Poisson algebra $B_{u,v}$ constructed by Novikov-Poisson algebra B for some $u, v \in B$, such that A is a subalgebra of $B_{u,v}$.

Let us construct a non-associative non-commutative polynomial of degree 5 by

$$h(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) =$$

$$(((t_5t_1)t_2)t_3)t_4 - (((t_5t_1)t_3)t_2)t_4 - (((t_5t_2)t_1)t_3)t_4+$$

$$(((t_5t_2)t_3)t_1)t_4 + (((t_5t_3)t_1)t_2)t_4 - (((t_5t_3)t_2)t_1)t_4-$$

$$2(((t_5t_1)t_4)t_2)t_3 + 2(((t_5t_1)t_4)t_3)t_2 + 2(((t_5t_2)t_4)t_1)t_3-$$

$$2(((t_5t_2)t_4)t_3)t_1 - 2(((t_5t_3)t_4)t_1)t_2 + 2(((t_5t_3)t_4)t_2)t_1.$$

The polynomial $h(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ is skew-symmetric under variables t_1, t_2, t_3.

Theorem 2. *The identity $h = 0$ is a special weak Leibniz identity, i.e., it holds for special weak Leibniz algebras, but not for all weak Leibniz algebras.*

In particular $h = 0$ is identity for the algebra A_ϵ. Any simple Lie algebra except sl_2 and Witt algebra W_1 is exceptional. It will be interesting to construct non-Lie simple exceptional weak Leibniz algebra (if exists).

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09259551).

Keywords: Leibniz algebras, special identity, Poisson algebras.

2010 Mathematics Subject Classification: 17D99

References

[1] Bai C., Bai R., Guo L., Wu Y., *Transposed Poisson algebras, Novikov-Poisson algebras, and 3-Lie algebras,* arXiv:2005.01110, 2021.

Ternary Tortkara algebras under Jacobian

Askar DZHUMADIL'DAEV[1,a], Saule ABDYKASSYMOVA [2,b]

[1 2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a] *dzhuma@hotmail.com,* [b] *saule_asan@hotmail.com*

Zinbiel algebras are defined by the following identity

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b + b \circ a) \circ c.$$

For example, an algebra $A = K[x]$ with multiplication $a \circ b = b \int_0^x a\, dx$ is Zinbiel.

Let $[a, b] = a \circ b - b \circ a$ and $\{a, b\} = a \circ b + b \circ a$ are Lie and Jordan commutators. In [1] Loday has established that a plus-algebra $A^{(+)} = (A, \{\,,\,\})$ of any Zinbiel algebra A is associative commutative. In [2] it was proved that a minus-algebra $A^{(-)} = (A, [\,,\,])$ of any Zinbiel algebra A satisfies so called Tortkara identity

$$[[a, b], [c, d]] + [[a, d], [c, b]] = [J[a, b, c], d] + [J[a, d, c], b],$$

where $J[a, b, c] = [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b]$ is Jacobian.

In [3] Bremner has found identity for Tortkara algebra endowed by ternary product $[[a, b], c]$. Now we endow Tortkara algebra A by ternary product $J[a, b, c]$. Let us introduce the following commutator polynomials of degree 7,

$$F_1(a, b, c, d, e, f, g) =$$

$$J[a,d,J[e,f,J[b,c,g]]]-J[a,d,J[e,g,J[b,c,f]]]+J[a,d,J[f,g,J[b,c,e]]]-$$
$$J[a,e,J[d,f,J[b,c,g]]]+J[a,e,J[d,g,J[b,c,f]]]-J[a,e,J[f,g,J[b,c,d]]]+$$
$$J[a,f,J[d,e,J[b,c,g]]]-J[a,f,J[d,g,J[b,c,e]]]+J[a,f,J[e,g,J[b,c,d]]]-$$
$$J[a,g,J[d,e,J[b,c,f]]]+J[a,g,J[d,f,J[b,c,e]]]-J[a,g,J[e,f,J[b,c,d]]]+$$
$$J[d,e,J[a,b,J[c,f,g]]]-J[d,e,J[a,c,J[b,f,g]]]-J[d,e,J[a,f,J[b,c,g]]]+J[d,e,J[a,g,J[b,c,f]]]-$$
$$J[d,f,J[a,b,J[c,e,g]]]+J[d,f,J[a,c,J[b,e,g]]]+J[d,f,J[a,e,J[b,c,g]]]-J[d,f,J[a,g,J[b,c,e]]]+$$
$$J[d,g,J[a,b,J[c,e,f]]]-J[d,g,J[a,c,J[b,e,f]]]-J[d,g,J[a,e,J[b,c,f]]]+J[d,g,J[a,f,J[b,c,e]]]+$$
$$J[e,f,J[a,b,J[c,d,g]]]-J[e,f,J[a,c,J[b,d,g]]]-J[e,f,J[a,d,J[b,c,g]]]+J[e,f,J[a,g,J[b,c,d]]]-$$
$$J[e,g,J[a,b,J[c,d,f]]]+J[e,g,J[a,c,J[b,d,f]]]+J[e,g,J[a,d,J[b,c,f]]]-J[e,g,J[a,f,J[b,c,d]]]+$$
$$J[f,g,J[a,b,J[c,d,e]]]-J[f,g,J[a,c,J[b,d,e]]]-J[f,g,J[a,d,J[b,c,e]]]+J[f,g,J[a,e,J[b,c,d]]]-$$
$$J[a,J[b,d,e],J[c,f,g]]+J[a,J[b,d,f],J[c,e,g]]-J[a,J[b,d,g],J[c,e,f]]-$$
$$J[a,J[b,e,f],J[c,d,g]]+J[a,J[b,e,g],J[c,d,f]]-J[a,J[b,f,g],J[c,d,e]],$$

$$F_2(a,b,c,d,e,f,g)=$$
$$2(J[d,e,J[f,g,J[a,b,c]]]-J[d,f,J[e,g,J[a,b,c]]]+J[d,g,J[e,f,J[a,b,c]]]+$$
$$J[e,f,J[d,g,J[a,b,c]]]-J[e,g,J[d,f,J[a,b,c]]]+J[f,g,J[d,e,J[a,b,c]]]),$$

$$F_3(a,b,c,d,e,f,g)=$$
$$3(J[a,b,J[c,d,J[e,f,g]]]-J[a,b,J[c,e,J[d,f,g]]]+J[a,b,J[c,f,J[d,e,g]]]-J[a,b,J[c,g,J[d,e,f]]]-$$
$$J[a,b,J[d,e,J[c,f,g]]]+J[a,b,J[d,f,J[c,e,g]]]-J[a,b,J[d,g,J[c,e,f]]]-$$
$$J[a,b,J[e,f,J[c,d,g]]]+J[a,b,J[e,g,J[c,d,f]]]-J[a,b,J[f,g,J[c,d,e]]]$$
$$-J[a,c,J[b,d,J[e,f,g]]]+J[a,c,J[b,e,J[d,f,g]]]-J[a,c,J[b,f,J[d,e,g]]]+J[a,c,J[b,g,J[d,e,f]]]+$$
$$J[a,c,J[d,e,J[b,f,g]]]-J[a,c,J[d,f,J[b,e,g]]]+J[a,c,J[d,g,J[b,e,f]]]+$$
$$J[a,c,J[e,f,J[b,d,g]]]-J[a,c,J[e,g,J[b,d,f]]]+J[a,c,J[f,g,J[b,d,e]]]$$
$$+J[b,d,J[a,c,J[e,f,g]]]-J[b,e,J[a,c,J[d,f,g]]]+J[b,f,J[a,c,J[d,e,g]]]-J[b,g,J[a,c,J[d,e,f]]]$$
$$-J[c,d,J[a,b,J[e,f,g]]]+J[c,e,J[a,b,J[d,f,g]]]-J[c,f,J[a,b,J[d,e,g]]]+J[c,g,J[a,b,J[d,e,f]]]$$
$$-J[b,J[a,c,d],J[e,f,g]]+J[b,J[a,c,e],J[d,f,g]]-J[b,J[a,c,f],J[d,e,g]]+J[b,J[a,c,g],J[d,e,f]]$$
$$+J[c,J[a,b,d],J[e,f,g]]-J[c,J[a,b,e],J[d,f,g]]+J[c,J[a,b,f],J[d,e,g]]-J[c,J[a,b,g],J[d,e,f]]$$
$$+J[d,J[a,b,c],J[e,f,g]]-J[e,J[a,b,c],J[d,f,g]]+J[f,J[a,b,c],J[d,e,g]]-J[g,J[a,b,c],J[d,e,f]]),$$

$$F_6(a,b,c,d,e,f,g)=$$
$$6(-J[a,d,J[b,c,J[e,f,g]]]+J[a,e,J[b,c,J[d,f,g]]]-J[a,f,J[b,c,J[d,e,g]]]+J[a,g,J[b,c,J[d,e,f]]]$$
$$+J[a,J[b,c,d],J[e,f,g]]-J[a,J[b,c,e],J[d,f,g]]+J[a,J[b,c,f],J[d,e,g]]-J[a,J[b,c,g],J[d,e,f]]).$$

Let

$$F(a,b,c,d,e,f,g)=F_1(a,b,c,d,e,f,g)+F_2(a,b,c,d,e,f,g)+F_3(a,b,c,d,e,f,g)+F_6(a,b,c,d,e,f,g).$$

Theorem. *For any Tortkara algebra A its ternary algebra (A,J) has no non-trivial identity in degree 5 and satisfies the identity of degree 7*

$$F(a,b,c,d,e,f,g)=0.$$

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09259551).

Keywords: Zinbiel algebras, Tortkara algebras, Ternary algebras.

2010 Mathematics Subject Classification:17D99

References

[1] Loday J.-L., Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras, *Math. Scand.,* 77(1995), No.2, p.189 - 196.

[2] Dzhumadil'daev A.S., Zinbiel algebras under q-commutators, *Journal of Mathematical Sciences,* v.144, p. 3909–3925 (2007).

[3] Bremner M, On Tortkara triple systems, *Commun. Algebbra*, **46**(2018), p. 2396–2404.

Polynomial identities in Noviov algebras

Nurlan ISMAILOV
Astana IT University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: nurlan.ismail@gmail.com

A vector space N over a field $\mathbf{k}$ equipped with a product $(x, y) \mapsto x \circ y$ is called a *Novikov algebra* if the following identities hold for all $x, y, z \in N$:

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z),$$
$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y.$$

Theorem 1.[1] Let N be a Novikov algebra over a field of zero characteristic satisfying a nontrivial identity. Then N is right associator nilpotent.

We say that a differential polynomial algebra satisfies a *weak Novikov identity* if we can substitute for its variables only Novikov polynomials.

Theorem 2.[1] Every Novikov PI-algebra over a field of characteristic zero satisfies a differential polynomial identity of the form

$$a_1^{(2)} \cdots a_p^{(2)} a_{p+1} \cdots a_{p+q} = 0,$$

for some $p, q \geq 1$.

Theorem 3.[1] Every multilinear T-ideal of the free Novikov algebra is finitely generated.

Corollary 1.[1] Over a field of zero characteristic, every system of Novikov identities is equivalent to a finite one.

This is joint work with Vladimir Dotsenko (University of Strasburg, France) and Ualbai Umirbaev (Wayne State University, USA).

Funding: The author was supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14870282).

Keywords: Novikov algebras, Specht problem.

2020 Mathematics Subject Classification: 13N15, 16R50, 17D99, 18M70.

References

[1] V. Dotsenko, N. Ismailov and U. Umirbaev. Polynomial identities of Novikov algebras *Mathematische Zeitschrift*, **303**:(3), 60, (2023). https://doi.org/10.1007/s00209-023-03231-8

Locally nilpotency of polynomial mappings and polynomial automorphism

R.K. KERIMBAYEV,

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: ker_im@mail.ru

This article discusses polynomial mappings, which are some of the most mysterious objects. One of the tricky problems with polynomial mappings is their reversibility. The main difficulty is the absence of a ring structure in the set of polynomial mappings. The set of polynomial mappings constitutes only a semigroup. Their superposition is considered an operation. The polynomial mappings of A. V. Yagzhev, H. Bass, E. Connel, and D. Wright are considered. In accordance with this mapping, the local nilpotency of the polynomial mapping formed by homogeneous polynomials is shown. This result is related to the fact that the Jacobi matrix of the polynomial map is nilpotent. In this case, the method of matrix multiplication is different from the usual multiplication. Since matrices are variable, their multiplication depends on the points. As the points change, the corresponding Jacobi matrix also changes.

Theorem. *A polynomial mapping with homogeneous polynomials of the same degree has a nilpotent Jacobi matrix, then it is locally nilpotent.*

Keywords: polynomial maps, Jacobian, local nilpotency.

References

[1] H. Bass, E. Connel and D. Wright The Jacobian Conjecture:Reduction of Degree and Formal Expansion of the Inverse, *Bulletin of the American Mathe metical Society*, **1**:7 (1982), 287–330.

[2] A.V. Yagzhev On Keller's problem, *Siberian Math*, **1**:21 (1980), 747–754.

[3] Arno vann den Essen Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture, Birkhauser, (2000).

[4] Kerimbayev R.K. A Geometric Solution to the Jacobian Problem, *Journal of New Theory*, **1**:24 (2018), 44–49.

Two-dimensional Almost Lie algebras

K.M. TULENBAEV[1,a], A.B. KOKENAEVA[2,b] A.K. SADYKANOVA[2,c]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Kazakh National University after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]kaysart1@mail.ru, [b]kokenaeva09.00@gmail.com
[c]sadykanovaaihanym@gmail.com

A nonassociative algebra A over a field K is called a Almost Lie algebra if it satisfies the following identities:

$$(x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0$$

$$x \circ (y \circ z) - (z \circ x) \circ y = 0$$

Almost Lie algebras were introduced by B. A. Kupershmidt in [1]. Every Lie algebra is Almost Lie algebra. We classify all two-dimensional Almost Lie algebras over field of characteristic $\neq 3$. We prove the following theorem

Theorem 1. *Let A be an Almost Lie algebra and $dimA = 2$. If A is not Lie algebra then A is commutative, associative and nilpotent of nilpotency length, equal to* 3

Funding: The first author is grateful to grant AP14869221 "Applications of combinatorial K-theory" MES RK

Keywords: Nonassociative algebras, Almost Lie algebras.

2010 Mathematics Subject Classification: 16R10, 17A50, 17A30, 17D25, 17C50

References

[1] Kupershmidt B.A. *Phase Spaces of Algebras*, University of Tennessee, Knoxville (2010).

On ranks and spectra for families of constant expansions of theories

Beibut KULPESHOV[1,a], Sergey SUDOPLATOV[2,b]

[1] Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
[2] Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: [a]b.kulpeshov@kbtu.kz, [b]sudoplat@math.nsc.ru

We describe possibilities of RS-ranks, ds-degrees, and e-spectra e-Sp [1] for families of constant extensions of theories and establish rank links for families of theories with Cantor-Bendixson ranks (CB-ranks) for given theories [2]. We show that the e-minimality [3] of a family of constant expansions of the theory is equivalent to the existence and uniqueness of a nonprincipal type with a given number of variables. In particular, for strongly minimal theories this means that the non-principal 1-type is unique over an appropriate tuple. We obtain a model-theoretic characterization for the existence of the least generating set for a family of theories. We also prove that any inessential finite expansion of an o-minimal Ehrenfeucht theory preserves the Ehrenfeucht property, and this is true for constant expansions of dense spherically ordered theories [4]. For the expansions under consideration, the dynamics of the values of countable spectra is described.

Let T be a complete theory in a language L, $\overline{a}$ be a tuple of new constant symbols, of length $l(\overline{a})=n$. We denote by $\mathcal{T}_{T,\overline{a}}$ the set of all expansions $T(\overline{a})$ of T by constants in $\overline{a}$.

Proposition. *For any theory T and a tuple $\overline{a}$ the following conditions are equivalent:* (1) *$\mathcal{T}_{T,\overline{a}}$ contains an approximating subfamily;* (2) *$S^{l(\overline{a})}(T)$ is infinite.*

Corollary 1. *For any theory T the following conditions are equivalent:* (1) *for some tuple $\overline{a}$, $\mathcal{T}_{T,\overline{a}}$ contains an approximating subfamily;* (2) *$S(T)$ contains nonisolated types, i.e., T is not ω-categorical and does not have finite models.*

Corollary 2. *For any theory T and a tuple $\overline{a}$ with finite $S^{l(\overline{a})}(T)$, $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})=0$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})=|S^{l(\overline{a})}(T)|$.*

Theorem 1. (1) *For any type $p\in S^n(T)$ and a tuple $\overline{a}$ with $l(\overline{a})=n$, $\mathrm{CB}_n(p)=\mathrm{RS}_{\mathcal{T}_{T,\overline{a}}}(T\cup p(\overline{a}))$.* (2) *For any tuple $\overline{a}$, $\mathrm{CB}_{l(\overline{a})}(T)=\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})$.* (3) *For any tuple $\overline{a}$, if $\mathrm{CB}_{l(\overline{a})}(T)=\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})$ is an ordinal then $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})$ equals CB-degree of $S^{l(\overline{a})}(T)$.*

Corollary 3. *For any theory T and a tuple $\overline{a}$ the following conditions are equivalent:* (1) *$\mathcal{T}_{T,\overline{a}}$ is e-minimal;* (2) *T has unique nonprincipal $l(\overline{a})$-type.*

Corollary 4. *For any strongly minimal theory T, a tuple $\overline{a}$ and an element b the following conditions are equivalent:* (1) *$\mathcal{T}_{T(\overline{a}),b}$ is e-minimal;* (2) *T has a nonprincipal 1-type over $\overline{a}$.*

Theorem 2. (1) *If $\mathcal{T}_{T,\overline{a}}$ is finite then $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})=0$.* (2) *If $\mathcal{T}_{T,\overline{a}}$ is infinite and has finitely many accumulation points then $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})=\mathrm{ds}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})$.* (3) *If $\mathcal{T}_{T,\overline{a}}$ is infinite and has infinitely many accumulation points then $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})\leq\min\{2^{|T|},\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})\}$, and $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})=|\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})|$ if $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})$ is an ordinal. Moreover, if T is countable, then $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})=\min\{2^{\omega},\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{T,\overline{a}})\}$.*

Theorem 3. *For any countable theory T the following conditions are equivalent:* (1) *for any tuple $\overline{a}$, $\mathcal{T}_{T,\overline{a}}$ has the least generating set;* (2) *T has a prime model.*

Theorem 4. *Let T be an o-minimal theory. If T is Ehrenfeucht then for any $\mathcal{M}\models T$, for any $n<\omega$ and for any $\bar{a}=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in M$ the theory $T_1=Th(\langle\mathcal{M},\bar{a}\rangle)$ is also Ehrenfeucht. Moreover,* (1) *if each a_i is a realization of an isolated or a rational 1-type over $\emptyset$ then $I(T_1,\omega)=I(T,\omega)$;* (2) *if there exist $1\leq s\leq n$ and $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_s\leq n$ such that a_{i_t} is a realization of an irrational type p_{i_t} over $\emptyset$ for every $1\leq t\leq s$, where $l=\dim\{p_{i_1},p_{i_2},\ldots,p_{i_s}\}$, then $I(T_1,\omega)=6^{m_T-l}3^{k_T+2l}$.*

Corollary 5. Let $\mathcal{T}$ be the family of all o-minimal Ehrenfeucht theories, $\mathcal{T}_{\bar{a}}$ be the family of all expansions $T(\bar{a})$ of T by constants in $\bar{a}$ for each $T\in\mathcal{T}$, where $\bar{a}$ is a tuple of new constant symbols. Then $\mathcal{T}_{\bar{a}}$ preserves o-minimality and Ehrenfeuchtness.

Theorem 5. *Let T be an Ehrenfeucht constant expansion of a dense n-spherical theory. Then for any $\mathcal{M}\models T$, for any $m<\omega$ and for any $\bar{a}=\langle a_1,\ldots,a_m\rangle\in M$ the theory $T_1=$*

$Th(\langle\mathcal{M},\bar{a}\rangle)$ is also Ehrenfeucht. Moreover, (1) if each a_i is a realization of an isolated 1-type or a rational 1-type over $\emptyset$, i.e., a 1-type responsible for 3 countable models, then $I(T_1,\omega)=I(T,\omega)$; (2) if there exist $1\leq s\leq m$ and $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_s\leq m$ such that a_{i_t} is a realization of an irrational type p_{i_t} over $\emptyset$, i.e., a 1-type, responsible for 2^k+2 countable models, with $k\geq 2$ for every $1\leq t\leq s$, then each addition of the constant a_{i_t} replaces its multiplier 2^k+2 in $I(T,\omega)$ by $(2^{k-1}+2)^n$ for $I(T_1,\omega)$.

Corollary 6. *Let $\mathcal{T}$ be the family of all Ehrenfeucht constant expansions of dense n-spherical theories, $\mathcal{T}_{\bar{a}}$ be the family of all expansions $T(\bar{a})$ of T by constants in $\bar{a}$ for each $T\in\mathcal{T}$, where $\bar{a}$ is a tuple of new constant symbols. Then $\mathcal{T}_{\bar{a}}$ preserves Ehrenfeuchtness.*

Funding: The research is supported by Russian Scientific Foundation, Project No. 22-21-00044.

Keywords: rank, spectrum, family of theories, constant expansion.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C15, 03C50

References

[1] Sudoplatov S.V. Ranks for families of theories and their spectra, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:2 (2021), 2959–2968.

[2] Sudoplatov S.V., Tanović P. Semi-isolation and the strict order property, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **56**:4 (2015), 555–572.

[3] Sudoplatov S.V. Approximations of theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **17** (2020), 715–725.

[4] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Spherical orders, properties and countable spectra of their theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2023 (to appear). arXiv:2208.05097 [math.LO], 2022.

On the quasivariety lattice of Lukasiewicz algebras

Svetlana LUTSAK[1,a], Olga VORONINA[2,b]

[1,2] *M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk, Kazakhstan*
E-mail: [a]*sveta_lutsak@mail.ru*, [b]*oavy@mail.ru*

We study Birkhoff-Maltsev problem for Lukasiewicz algebras. The main purpose of this work is to identify some nontrivial properties of the quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{L})$ of the variety $\mathbf{L}$ generated by the set of all finite Lukasiewicz algebras.

Recall that a quasivariety is a class of algebras of the same type that is closed under subalgebras, direct products (including the direct product of an empty family) and ultraproducts. A variety is a quasivariety which is closed under homomorphic images. A quasivariety $\mathbf{K}'$ which is contained in a quasivariety $\mathbf{K}$ is called a subquasivariety of $\mathbf{K}$. The set $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ of all subquasivarieties of a given quasivariety $\mathbf{K}$ forms a complete lattice (under inclusion) which is called a lattice of quasivarieties of $\mathbf{K}$ or a quasivariety lattice of $\mathbf{K}$.

The Lukasiewicz algebra is called an algebra

$$\mathcal{L}_p=\left(\left\{0,\frac{1}{p},...,\frac{p-1}{p},1\right\},\to,\neg\right),p\geq 1,$$

with the operations defined as follows: for all x,y $x\to y=\min\{1,1-x+y\}$ and $\neg x=1-x$.

The main result of this work is the following theorem.

Theorem. *Let $\mathbf{L}$ be the variety generated by the set of all finite Lukasiewizc algebras. Then $\mathbf{L}$ is Q-universal and contains continuum many Q-universal quasivarieties, quasivarieties having no covers in the quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{L})$, subclasses $\mathbf{K}\subseteq\mathbf{L}$ having the property (N), subclasses $\mathbf{K}\subseteq\mathbf{L}$ having the property (N) but which are not Q-universal, non-standard subquasivarieties without an independent basis of quasi-identities,non-standard subquasivarieties with the so-called finitely split basis of quasi-identities.*

Note that in [1] it was proved that the considered quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{L})$ does not satisfy any non-trivial lattice's identity.

The results obtained demonstrate the structural and algorithmic complexity of the quasivariety lattice of the variety generated by the set of all finite Lukasiewicz algebras.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058390).

Keywords: lattice, quasivariety, quasivariety lattice, Lukasiewicz algebras

2010 Mathematics Subject Classification: 06B15, 08C15

References

[1] Dziobiak W. On subquasivarlety lattices of semi-primal varieties, *Algebra Universalis*, **20** (1985), 127–129.

Countable models in complete theory

Guldar SAPARGALIYEVA

Suleyman Dimerel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: 190103025@stu.sdu.edu.kz

Number of non-isomorphic countable models of the complete countable theory is important characteristic of the class complete theories. In our report we will consider examples of theories having maximal ($2^{\aleph_0}$) non-isomorphic countable models from the class of stable theories and from the class of unstable theories. For the class of stable theories we give the examples based on the notion of dimension of formulas [1] and for the class of unstable theories we give the examples of the theories with definable linear order, as well of weakly o-minimal theory [2] and as well non-weakly o-minimal theory [3].

Keywords: non-isomorphic models, dimension, stable theory.

2010 Mathematics Subject Classification:

References

[1] J.T. Baldwin, A.H. Lachlan On strongly minimal sets, *The Journal of Symbolic Logic*, **36** (1971), 70–96.

[2] A. Alibek, B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, T.S. Zambarnaya Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1, *Annals of Pure and Applied Logic*, **169**:11, (2018), 1190–1209.

[3] B. Baizhanov, J.T. Baldwin, T. Zambarnaya *Finding* 2^{ω} *countable models for ordered theories, Siberian Electronic Mathematical Reports*, **15** (2018), 719–727.

Basis of the free noncommutative Novikov algebra

B. K. SARTAYEV

Sobolev institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: baurjai@gmail.com

It is well-known that every associative Lyndon-Shirshov word corresponds to a unique nonassociative Lyndon-Shirshov word by the arrangement of parentheses and the set of such words forms the basis of the free Lie algebra, see [3]. The analogue of that result for the group appeared in [4].

In the same way, we consider an associative algebra in alphabet X with derivation d and denote it by $\mathrm{As}\langle X\rangle^{(d)}$. As an analogue for the associative Lyndon-Shirshov words, we consider a subset of basis monomials of $\mathrm{As}\langle X\rangle^{(d)}$ of a weight -1, where the weight function is defined as follows:

$$\mathrm{wt}(x) = -1, \quad x \in X;$$
$$\mathrm{wt}(d(u)) = \mathrm{wt}(u) + 1; \quad \mathrm{wt}(uv) = \mathrm{wt}(u) + \mathrm{wt}(v).$$

For every monomial of $\mathrm{As}\langle X\rangle^{(d)}$ of the weight -1, we define the rule of the arrangements of parentheses and the product operations $\succ$, $\prec$. In that way, we obtain the set of nonassociative monomials with operations $\succ$ and $\prec$. Such a set is the basis of a free noncommutative Novikov algebra, which is defined by the following identities:

$$x \succ (y \prec z) = (x \succ y) \prec z, \tag{6}$$
$$(x \prec y) \succ z - x \succ (y \succ z) = x \prec (y \succ z) - (x \prec y) \prec z. \tag{7}$$

The identities (6), (7) first appeared in [2]. Also, that algebra is derived in [1].

The main motivation for this work is as follows: the defining identities of Novikov algebra come from commutative algebra with derivation under the operation

$$a \circ b = ab' \text{ or } a \circ b = a'b.$$

It depends on the definition of the Novikov algebra(left or right). The variety of noncommutative Novikov algebras is a generalization of the variety of Novikov algebras in the case $a \succ b = b \prec a$(or $\succ^{op} = \prec$). In that case, identity (6) comes to right-commutative (left-commutative) and identity (7) comes to left-symmetric (right-symmetric). Therefore, we obtain the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nov} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\succ^{op}=\prec"'] & \mathrm{Com}^{(d)} \arrow[d, hook, "\cdot^{op}=\cdot"] \\
\text{N-Nov} \arrow[r, hook] & \mathrm{As}^{(d)}
\end{tikzcd}$$

where N-Nov and $\mathrm{Com}^{(d)}$ stand for varieties of noncommutative Novikov algebras and commutative algebras with derivation, respectively.

Funding: The author was supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14870282).

Keywords: Novikov algebra, associative algebra, derivation, polynomial identities, free algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 17D25, 16W25, 16Z10

References

[1] P. S. Kolesnikov, B. Sartayev, A. Orazgaliev, Gelfand–Dorfman algebras, derived identities, and the Manin product of operads, Journal of Algebra 539, 260–284 (2019).

[2] J.-L. Loday, On the operad of associative algebras with derivation, Georgian Math. J. 17(2), 347–372 (2010).

[3] A. I. Shirshov, On free Lie rings, Mat. Sb., 45, No. 2, 113-122 (1958).

[4] K. T. Chen, R. H. Fox, and R. C. Lyndon, Free differential calculus. IV: The quotient groups of the lower central series, Ann. Math., 68, No. 2, 81-95 (1958).

On variations of rigidity

Sergey SUDOPLATOV[1,a]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

E-mail: [a]*sudoplat@math.nsc.ru*

We introduce variations of rigidity and describe possibilities of these variations.

Let T be a complete theory, $\mathcal{M}$ be a model of T, A be a set in $\mathcal{M}$, $b \in M$, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Following [1] the element $b \in M$ is called *n-algebraic* over A if $a \in \mathrm{acl}(A)$ and it is witnessed by a formula $\varphi(x, \overline{a})$, for $\overline{a} \in A$, with at most n solutions. If b is a 1-algebraic element over A then b is *definable* over A, i.e., $b \in \mathrm{dcl}(A)$.

Following [2] a structure $\mathcal{M}$ with unique automorphism is called *rigid*.

By the definition the 1-algebraicity of each element in M over the empty set, i.e., the condition $M = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ produces the rigid structure $\mathcal{M}$.

We separate the forms of rigidity of a structure as follows: the *semantic* one is defined in terms of trivial automorphism group, and the *syntactic* one is in terms of 1-algebraicity of the universe over the empty set.

Clearly, the syntactic rigidity implies the semantic one but not vice versa.

For a set A in a structure $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ is called *semantically A-rigid* or *automorphically A-rigid* if any A-automorphism $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ is identical. The structure $\mathcal{M}$ is called *syntactically A-rigid* if $M = \mathrm{dcl}(A)$.

A structure $\mathcal{M}$ is called *$\forall$-semantically / $\forall$-syntactically n-rigid* (respectively, *$\exists$-semantically / $\exists$-syntactically n-rigid*), for $n \in \omega$, if $\mathcal{M}$ is semantically / syntactically A-rigid for any (some) $A \subseteq M$ with $|A| = n$.

Clearly, syntactical A-rigidity and n-rigidity imply semantical ones, and vice versa for finite structures, but not vice versa for some infinite ones. Besides, if $\mathcal{M}$ is Q-semantically / Q-syntactically n-rigid, where $Q \in \{\forall, \exists\}$, then $\mathcal{M}$ is Q-semantically / Q-syntactically m-rigid for any $m \geq n$.

The least n such that $\mathcal{M}$ is Q-semantically / Q-syntactically n-rigid, where $Q \in \{\forall, \exists\}$, is called the *$Q$-semantical / Q-syntactical degree of rigidity* and it is denoted by $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{M})$ and $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{M})$, respectively. If such n does not exists we put $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{M}) = \infty$ and $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{M}) = \infty$, respectively.

Notice that all these characteristics have the upper bound $|M| - 1$ if the structure $\mathcal{M}$ is finite.

By the definition, for any structure $\mathcal{M}$ the following inequalities hold:

$$\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M}), \tag{8}$$

$$\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}), \tag{9}$$

$$\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}), \tag{10}$$

$$\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M}). \tag{11}$$

In view of inequalities (8) and (9) we have the following:

Proposition. 1. *For any $Q \in \{\forall, \exists\}$ the pairs $(\deg_{\rm rig}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{\rm rig}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{M}))$ belong to the set $\mathrm{DEG}_{rig}^{Q,\mathrm{sem},\mathrm{synt}} \rightleftharpoons \{(\mu, \nu) \mid \mu, \nu \in \omega \cup \{\infty\}, \mu \leq \nu\}$.*

A series of examples shows that the difference between $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M})$ and $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M})$ can be arbitrary large, i.e., $\mathrm{DEG}_{rig}^{\exists,\mathrm{sem},\mathrm{synt}}$ contains pairs with arbitrary large differences. We obtain the following theorem on distributions for these characteristics:

Theorem. *For each pair $(\mu, \nu) \in \mathrm{DEG}_{rig}^{\exists,\mathrm{sem},\mathrm{synt}}$ there exists a structure $\mathcal{M}_{\mu,\nu}$ such that $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}_{\mu,\nu}) = \mu$ and $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}_{\mu,\nu}) = \nu$.*

The following examples illustrate the inequalities (8)–(11).

Examples. 1. If a structure $\mathcal{M}$ is defined by a group trigonometry [3] with at least two elements then all $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{M})$ and $\deg_{\rm rig}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{M})$ equal 2. It admits generalizations for arbitrary natural degrees $n \geq 3$.

2. If $\mathcal{M}$ is an infinite structure in a language of unary predicates then exactly one of the following conditions hold: i) $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}) = \deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}) = \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}) = \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M}) = 0$, if $M = \mathrm{dcl}(\emptyset)$;

ii) $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}) = \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}) = 0$ and $\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M}) = \infty$, if $M \neq \mathrm{dcl}(\emptyset)$ and there are no distinct elements $a, b \in M$ with $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$; here $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}) = n$ if there are exactly n realizations of nonisolated 1-types in $\mathcal{M}$ and $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}) = \infty$ if there are infinitely many realizations of nonisolated 1-types in $\mathcal{M}$; iii) $\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}) = \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M}) = \infty$, otherwise, with similar arbitrary possibilities for $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M})$ and $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M})$ depending on cardinalities of sets of realizations of isolated and nonisolated 1-types.

Funding: The work was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012, and supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan, Grant No. AP19677451.

Keywords: semantically rigid structure, syntactically rigid structure, degree of rigidity.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C50, 03C52

References

[1] Sudoplatov S.V. On algebraic closures in models of elementary theories, in: Mathematical Logic and Computer Science. Proceedings of the International scientific conference, ENU, Astana (2022), 14–16.

[2] Hodges W. *Model theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[3] Sudoplatov S.V. *Group polygonometries*, Edition of NSTU, Novosibirsk (2013).

Distribution of periods of the continued fractions for quadratic irrationals $n\sqrt{d}$

Moldir TLEPOVA
Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: 211101014@stu.sdu.edu.kz

Simple continued fractions for any irrational numbers α is represented in the following form

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}} = [a_0, a_1; a_2; a_3; a_4; \cdots], \tag{1}$$

where a_0 is an integer and $a_1, a_2, a_3 \cdots$ are positive integers. When α is quadratic irrational, then according to the classical result due to Lagrange, the continued fraction must be eventually periodic [1]. Moreover, Galois showed that the periodic part of the continued fractions for the special quadratic irrational $\alpha = \sqrt{d}$, for d is square-free integer, is a palindrome and we can denote the expansion shortly in this form

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1; a_2; ...a_2; a_1, 2a_0}], \tag{2}$$

where the periodic part is over-lined. For a quadratic irrational α we let $D(\alpha)$ denote the length of the periodic part of its continued fractions. Recently, Gawron and Kobos [3] studied $(D(n\sqrt{d}))_{n=1}^{\infty}$ and showed that the sequence has infinitely many limit points. They ask a question whether it is true if for every non-square integer $d \geq 1$ and every $k \geq 1$ at least one of the numbers k or $k+1$ appears as a limit point of $(D(n\sqrt{d}))_{n=1}^{\infty}$.

Motivated by this research question we consider some special cases when continued fractions of $n\sqrt{d}$ has a period 2 or 3. Our main results are as follows.

Theorem 1. *Let a be a positive integer greater than or equal to 1, and let b be a divisor of $2a$, but $2a \neq b$. Suppose that d is a positive integer such that $d = a^2 + \frac{2a}{b}$. Then, $n\sqrt{d}$ has a periodic part with length 2, that is, $D(n\sqrt{d}) = 2$.*

Theorem 2. *Let a be a positive integer greater than or equal to 1, and let b^2+1 be a divisor of $2ab+1$, but $2a \neq b$. Suppose that d is a positive integer such that $d = a^2 + \dfrac{2ab+1}{b^2+1}$. Then, $n\sqrt{d}$ has a periodic part with length 3, that is, $D(n\sqrt{d}) = 3$.*

Moreover, we pose a new question whether it is true that for every $d \geq 1$ there exist infinitely many n such that $D(n\sqrt{d}) = 2$. Answering this question, we obtain the following result.

Theorem 3. *Let d be a positive square-free integer. Then, we have $D(n\sqrt{d}) = 2$ whenever a positive integer n satisfies the Pell's Diophantine equation $n^2 - dx^2 = 1$.*

Here the last equation is the exact representation of Pell's equation of the form $x^2 - Dy^2 = 1$. It is well-known that Pell's equation of this form has infinitely many solutions [2]. Consequently, we can answer positively to the question above that for $\forall d$ there exist infinitely many n such that $D(n\sqrt{d}) = 2$.

Keywords: Continued Fractions, Pells's equation, Quadratic Irrational.

2010 Mathematics Subject Classification: 11D09, 11A55

References

[1] Rockett A.M. *Continued fractions*, World Scientific, 1992.

[2] Conrad K.E. *Pell's equation-I, II*, University of Connecticut, 2016.

[3] Gawron F., Kobos T. *On length of the period of the continued fraction* $n\sqrt{d}$, in: *arXiv preprint arXiv:2106.02895*, 2021.

Stability of classes in the Jonsson spectra of semantic Jonsson quasivarieties

Aibat YESHKEYEV[1,a], Indira TUNGUSHBAYEVA[1,b]

[1] *Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan*
E-mail: [a]*aibat.kz@gmail.com*, [b]*intng@mail.ru*

The main idea of this work is to construct a link between the concept of quasivarieties and Jonsson theories. It is well-known that when a class K of L-structures is expanded, it is connected with the technique of Universal Algebra. And when $Th(K)$ does, we deal with Jonsson theories.

Let K be a variety (quasivariety) in the classical sense, as in [1]. Let us consider the following set of theories:

$$JTh(K) = \{T \mid T \text{ is a Jonsson theory and}$$
$$T = Th(K) \cup \{\varphi^i \mid \varphi \in \forall\exists(L_0), i \in \{0;1\}, \varphi \in L_0 \backslash Th(K)\}\}.$$

In other words, $JTh(K)$ is a set of Jonsson theories $\{T_1, T_2, ...\}$, where each T_j consists of the sentences from $Th(K)$ and universal-existential L-sentences, or their negations, that are not contained in $Th(K)$.

Since every theory $T \in JTh(K)$ is Jonsson, T has a semantic model C_T. In this manner, we have the class $\mathbb{JC} = \{C_1, C_2 ...\}$ of semantic models of the theories of $JTh(K)$. The obtained class of semantic models is called a semantic Jonsson variety (quasivariety).

We consider the Jonsson spectrum $JSp(\mathbb{JC})$ of the semantic Jonsson variety (quasivariety)$\mathbb{JC}$. It is defined as follows:

$$JSp(\mathbb{JC}) = \{\Delta \mid \Delta \text{ is a Jonsson theory and } \forall C_i \in \mathbb{JC}\ C_i \models \Delta\}.$$

Let us introduce a cosemanticness relation on $JSp(\mathbb{JC})$, and since it is an equivalence relation, we obtain a factor-set $JSp(\mathbb{JC})_{/\bowtie}$. Let $[\Delta]$ be a cosemanticness class, i.e. $[\Delta] \in JSp(\mathbb{JC})_{/\bowtie}$.

In this work, we study some stability properties of the obtained cosemanticness classes in the Jonsson sense. In [2], the following definition of Jonsson λ-stability was introduced. A Jonsson theory T is J-λ-stable if, for any T-existentially closed model A, and for any subset X of A,

$$|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda.$$

The following theorem is a test that connects λ-stability in sense of S.Shelah and J-λ-stability for Jonsson theories.

Theorem 1. [2] *Let T be a perfect Jonsson theory and let T be complete for existential sentences. Let $\lambda \geq \omega$. Then the following statements are equivalent:*

1) T is J-λ-stable;
2) T^* is λ-stable, where $T^* = Th(C)$, C is a semantic model of T.

The following theorem generalizes Theorem 1 for the cosemanticness classes within the study of Jonsson semantic varieties (quasivarieties).

Theorem 2. *Let $[\Delta] \in JSp(\mathbb{JC})_{/\bowtie}$ and let Δ be a perfect Jonsson theory complete for $\exists$-sentences for any $\Delta \in [\Delta]$. Then $[\Delta]$ is J-λ-stable iff $[\Delta]^*$ is λ-stable, where $[\Delta]^*$ is the center of the cosemanticness class $[\Delta]$.*

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09260237 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: Jonsson theory, semantic Jonsson quasivariety, Jonsson stability, Jonsson spectrum, variety, quasivariety.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C45, 03C05, 03C68

References

[1] Maltsev A.I. *Algebraicheskiie sistemy*, Izdatelstvo Nauka, Moscow (1970).

[2] Yeshkeyev A.R. On Jonsson stability and some of its generalizations, *Journal of Mathematical Sciences*, **166**:5 (2010), 646–654.

On the omitting of a family of non-isolated types in some special case

Olzhas UMBETBAYEV[1,a]
[1] Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]umbetbayev@math.kz

Theorem 1. *Let T be a countable theory of a signature Σ. Let $P := \langle p_n(x_n) : n \in \omega \rangle$ and $Q := \langle q_n(y_n) : n \in \omega \rangle$ be two sequences of non-isolated types over an empty set in the theory T such that for every natural number $n \in \omega$ there is a model $\mathfrak{M}_n$ of T such that $\mathfrak{M}_n$ realizes p_i and omits q_i for each $i \leq n$. Then there exists a countable model $\mathfrak{M}_\omega$ of T that realizes each type from P and omits each type from Q.*

This theorem follows from the following proposition and the classical omitting type theorem (Theorem 2). Theorem 1 has been proved in [1] under some additional hypotheses.

We say that T locally omits Σ if and only if for every formula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ which is consistent with T, there exists $\sigma \in \Sigma$ such that $\varphi \wedge \neg\sigma$ is consistent with T, that is, every consistent with T formula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ in $\mathfrak{L}$ be a non-isolated.

Proposition. Each type q_n is non-isolated in the countable theory $T_0 = T \cup \{p_n(d_n)\}_{n\in\omega}$, where $d_n \notin \Sigma$ for each n, and thus T_0 locally omits q_n for each $n < \omega$.

Theorem 2. [2] *Let T be a consistent theory in a countable language $\mathfrak{L}$, and for each $r < \omega$ let $\Sigma_r(x_1, ..., x_{n_r})$ be a set of formulas in n_r variables. If T locally omits each Σ_r, then T has a countable model which omits each Σ_r.*

Thus, the hypotheses of Theorem 1 and the conclusion of the Proposition imply that the hypotheses of Theorem 2 hold. Then there exists a countable model $\mathfrak{M}_\omega \models T_0$, which omits each type from Q. Note that since $p_n(d_n)$ is a part of T_0 for each $n < \omega$, each model of T_0 realizes each type from P. Since $T \subseteq T_0$, so $\mathfrak{M}_\omega \models T$.

Let T be a small and countable. In general T_0 need not be small. The question is, can we construct $\mathfrak{M}_\omega$ which realizes each type from P and omits each type from Q, such that $\mathfrak{M}_\omega$ is prime over $\{d_1, ..., d_n, ...\}$?

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14971869 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: small theory, countable model, omitting types, expansion by constants.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15,03C65

References

[1] Baizhanov B.S., Umbetbayev O.A., Zambarnaya T.S. On a criterion for omissibility of a countable set of types in an incomplete theory, *Kazakh Mathematical Journal*, **19**:1 (2019), 22–30.

[2] Chang C.C., Keisler H.J. *Model Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 73, Elsevier (1990).

On elimination of imaginaries in Hrushovski's strongly minimal sets

Viktor VERBOVSKIY[1,a],

[1] *Satbayev University, Almaty, Kazakhstan*
[1] *Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]viktor.verbovskiy@gmail.com,

By a Hrushovski sm-class we mean a class K_0 of finite $\mathcal{L}$-structures for a relational vocabulary $\mathcal{L}$ along with a notion of strong substructure which yields a generic structure that is a strongly minimal set D by a construction patterned by E. Hrushovski. In fact, there are a lot of variants of this construction. Here we consider the original Hrushovski's counterexample to Zilber's trichotomy conjecture and the example by G. Paolini, where he constructed examples of strongly minimal k-Steiner systems.

Recall that a pair of two disoint sets A and B is called a *good pair* if $B \leq A \cup B$, $\delta(B) = \delta(A \cup B)$, for any proper non-empty subset C of A it holds that $\delta(B) < \delta(C \cup B)$ and each element in B is in some relation with some element in A.

Theorem *Assume that there exists n such that for each $k \geq n$ and $\mu(A/B) \geq \delta(B)$ for each good pair (A/B). Then the elementary theory of this Hrushovski's example does not admit elimination of imaginaries.*

Theorem *Assume that there exists n such that for each $k \geq n$ and $\mu(A/B) \geq \delta(B)$ for each good pair (A/B). Then the elementary theory of the corresponding Steiner systems does not admit elimination of imaginaries.*

Funding: The authors were supported by the grant AP09259295 of SC of the MES of RK.

Keywords: elimination of imaginaries, stability, strongly minimal structure, definable closure

2010 Mathematics Subject Classification: 03C45, 03C68, 03C30

On definable subsets of an o-stable expansion of $(\mathbb{Z}, <, +)$

Aisha YERSHIGESHOVA[1,a]
[1] Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: [a]aisha.yershigeshova@gmail.com

Recall that when the number of types is less than $2^{|A|}$, for each set A of cardinality λ, we have a *stability* in λ.

Definition 1. Linear ordered structure $\mathfrak{M}$ is called *o-stable in* λ, if for any any subset $A \subseteq \mathfrak{M}$ such that $|A| \leq \lambda$ and for any arbitrary cut s in $\mathfrak{M}$ there exist the biggest λ complete types over A which are consistent with cut s.

Theory T is called *o-stable in* λ, if every model of T is o-stable.

Theory T is called *o-stable*, if there is a λ, such that T is λ stable.

Our question is the following: can we add a new relation P to $(\mathbb{Z}, <, +)$, which is not definable in this structure, so that the elementary theory of the expanded structure $(\mathbb{Z}, <, +, P)$ is o-stable.

Definition 2. We say that subsets $B, C \subseteq \mathbb{Z}$ are *eventually equal* if there is such $n \in \mathbb{Z}$ such that $B \cap (n, +\infty) = C \cap (n, +\infty)$.

Definition 3. A set is *tangled* if it eventually does not contain $n\mathbb{Z} + k$ for any n and k.

We showed the following lemmata.

Lemma 4. *For each definable subset there is an integer n such that is each interval of length n contains an element of the set and an element of its complement.*

Lemma 5. *Each definable subset is not tangled.*

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09259295 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: ordered group, o-minimality, expansion.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15,03C65

References

[1] Baizhanov B.S., Verbovskiy V.V. O-stable theories, *Algebra and Logic*, **50**:3 (2011), 303–325.

[2] Chang C.C., Keisler H.J. *Model Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 73, Elsevier (1990).

2 Дифференциальные уравнения, теория функций и функциональный анализ

Руководители:	профессор Асанова А.Т. профессор Базарханов Д.Б. профессор Нурсултанов Е.Д. член-корреспондент НАН РК Садыбеков М.А.
Секретари:	Бакирова Э.А. Кадирбаева Ж.М.

О критериях разрешимости нелокальной задачи для гиперболического уравнения

Перизат АБДИМАНАПОВА

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
Алматинский технолгический университет, Алматы, Казахстан
E-mail: peryzat74@mail.ru

На множестве $[0,\omega]\times[0,T]$ рассматривается нелинейная нелокальная краевая задача для гиперболического уравнения со смешанной производной

$$u_{x,t} = f(x,t,u,u_x), \quad u\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0,t)=\psi(t), \quad t\in[0,T], \tag{2}$$

$$g(x,u_x(x,0),u_x(x,T))=0, \quad x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где $f:[0,\omega]\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:[0,\omega]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – непрерывны.

Решением задачи (1)-(3) называется функция $u^*(x,t)\in C([0,\omega]\times[0,T],\mathbb{R})$, удовлетворяющая на множестве $[0,\omega]\times[0,T]$ уравнению (1) и условиям (2), (3).

Задача (1)-(3) сводится к эквивалентному семейству нелинейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, которая исследуется методом параметризации: предложен алгоритм решения, получены достаточные условия его сходимости, вместе с тем получены достаточные условия существования изолированного решения, для более узкого класса решений установлено, что эти условия являются необходимыми. В силу эквивалентности семейства нелинейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и задачи (1)-(3) установлены критерии разрешимости нелинейная нелокальная краевая задача для гиперболического уравнения со смешанной производной (1)-(3).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09058457.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, нелинейная задача, изолированное решение, необходимые и достаточные условия разрешимости.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L10, 35L20, 35L70

Литература

[1] Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Asanova A.T. A Nonlocal Boundary Value Problem for Systems of Quasilinear Hyperbolic Equations, *Doklady Mathematics*, **74**:3 (2006), 787–790.

Теоремы вложения для пространств со смешанными логарифмическими гладкостями

Габдолла АКИШЕВ

Казахстанский филиал МГУ, Астана, Казахстан
E-mail: akishev_g@mail.ru

Пусть $\bar{x}=(x_1,...,x_m)\in\mathbb{R}^m$ и $I^m=[0,2\pi)^m$, $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$, $\overline{\tau}=(\tau_1,...,\tau_m)$ и числа $\tau_j,p_j\in(1,+\infty)$, $j=1,...,m$. Через $L^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(I^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца, всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$ определенных на $\mathbb{R}^m$, имеющих 2π- период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\overline{p},\overline{\tau}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\tau_m}{p_m}-1}\left[\dots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\tau_1} t_1^{\frac{\tau_1}{p_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\dots\right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна , где $f^{*_1,...,*_m}(t_1,...,t_m)$ - невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1]).

В случае $p_1 = ... = p_m = \tau_1 = ... = \tau_m = p$ пространство Лоренца $L^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(I^m)$ с нормой $\|f\|_p$ (см. [2], гл. I, п. 1.1).

$\mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(I^m)$ – множество всех функций $f \in L^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(I^m)$, для которых интегральные средние по каждой переменной по периоду равны нулю. $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L(I^m)$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$. Положим $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$,

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1,...,k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1,...,m\right\}$, $s_j = 1,2,...$, $\omega_{\bar{k}}(f,\bar{t})_p$ —смешанный модуль гладкости функции $f \in L_p(I^m)$ (см. [2], [3]).

Пусть $1 \le p < \infty$, $0 < \theta \le \infty$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,...,m$. Через $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}$ обозначим пространство всех функций $f \in \mathring{L}_p(I^m)$, для которых

$$\|f\|_{S^{\bar{r}}_{p,\theta}\mathbf{B}} = \|f\|_p + \left[\int_0^1 ... \int_0^1 \omega^{\theta}_{\bar{k}}(f,\bar{t})_p \prod_{j=1}^{m} \frac{(1-\log t_j)^{\theta b_j}}{t_j} dt_1...dt_m\right]^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

где $\overline{b} = (b_1,...,b_m)$, $\overline{k} = (k_1,...,k_m)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,...,m$.

$S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B$ – пространство, состоящий из всех функций $f \in \mathring{L}_p(I^m)$, для которых

$$\|f\|_{S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B} = \left\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \prod_{j=1}^{m} (s_j+1)^{b_j\theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{\theta}_p\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \le +\infty$, $\overline{b} = (b_1,...,b_m)$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,...,m$.

Отметим, что эти классы являются аналогами пространств $\mathbf{B}^{0,b}_{p,\theta}$ и $B^{0,b}_{p,\theta}$, рассмотренных в [4]–[5].

Получены эквивалентые нормировки пространств $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}$ и $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B$ в терминах наилучшего приближения "углом" , "блоков" ряда Фурье функции. Установлены условия вложения этих пространств друг в друга. Найдены условия вложения пространств $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B}$ и $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B$ в пространство Лоренца $\mathring{L}^*_{p,\tau}(I^m)$, при $1 < \tau < p < \infty$. В частности, доказаны

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \le \infty$ *и числа* $b_j > -\frac{1}{\theta}$, *для* $j = 1,\dots,m$. *Тогда* $S^{0,\overline{v}}_{p,\theta}B \subset S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B} \subset S^{0,\overline{u}}_{p,\theta}B$, *где* $\overline{v} = (v_1,\dots,v_m)$, $\overline{u} = (u_1,\dots,u_m)$, $v_j = b_j + \frac{1}{\min\{2,p,\theta\}}$, $u_j = b_j + \frac{1}{\max\{2,p,\theta\}}$, *для* $j = 1,\dots,m$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < \tau \le \min\{2,p\}$, $1 < p < \infty$, $0 < \theta \le \infty$ *и* $\overline{b} = (b_1,\dots,b_m)$. *Если числа* $b_j > (\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta})_+ + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{p}$, *для* $j = 1,\dots,m$, *то* $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}B \subset L^*_{p,\tau}(I^m)$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < \tau < p < \infty$, $0 < \theta \le \infty$ *и* $\overline{b} = (b_1,\dots,b_m)$. *Если* $b_j + \frac{1}{\theta} > \frac{1}{\tau} - \frac{1}{p}$, *для* $j = 1,\dots,m$, *то* $S^{0,\bar{b}}_{p,\theta}\mathbf{B} \subset L^*_{p,\tau}(I^m)$.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского – Бесова, смешанная логарифмическая гладкость.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A10, 41A25, 42A05

Литература

[1] Blozinski A.P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **263**:1 (1981), 146–167.

[2] Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, Москва (1977)

[3] Аманов Т. И. *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Наука, Алма-ата (1976).

[4] Cobos F., Dominguez O., Triebel, H. Characterizations of logarithmic Besov spaces in terms of differences, Fourier-analytical decompositions, wavelets and semi-groups, *J. Funct. Anal.*, **270** (2016), 4386–4425.

[5] Dominguez, O. and Tikhonov S. Function spaces of logarithmic smoothness: embedding and characterizations, *Memoirs Amer. Mah. Soc.*, **282**:1393 (2023), 180 pp.

Критерий однозначной разрешимости спектральных задач Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе

Серик АЛДАШЕВ

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru

Многомерные гиперболо-эллиптические уравнения описывают важные физические, астрономические и геометрические процессы. Например, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

Теория краевых задач для гиперболо-эллиптических уравнений на плоскости хорошо изучена. Однако, насколько известно автору, их многомерные аналоги мало исследованы.

В данной работе установлен критерий однозначной разрешимости спектральных задач Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции этих задач.

Пусть $\Omega_\varepsilon-$ конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная при $t>0$ сферической поверхностью $\Gamma:|x|^2+t^2=1$, а при $t<0$ конусами $K_\varepsilon:|x|=-t+\varepsilon,\ K_1:|x|=1+t,\ \frac{\varepsilon-1}{2}\leq t\leq 0$, где $|x|$ - длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$, а $0\leq\varepsilon<1$.

Обозначим через Ω^+ и Ω_ε^- части области Ω_ε, лежащие в полупространствах $t>0$ и $t<0$, через $S^\varepsilon-$ общую часть границ области $\Omega^+,\ \Omega_\varepsilon^-$, представляющих собой множество $\{t=0,\ \varepsilon<|x|<1\}$ точек из E_m. Часть конусов $K_\varepsilon,\ K_1$, ограничивающих области Ω_ε^-, обозначим через S_ε, S_1 соответственно.

В области Ω_ε рассмотрим многомерное уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным действительным параметром μ

$$\Delta_x u+(sgnt)u_{tt}=\mu u, \tag{1}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m\geq 2$.

Рассмотрим следующие спектральные задачи Трикоми для уравнения (1).

Задача T_μ. Найти решение уравнения (1) в области Ω_ε при $t\neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_\varepsilon)\cap$ $\cap C^2(\Omega^+\cup\Omega_\varepsilon^-)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_\Gamma=0, u\Big|_{S_\varepsilon}=0 \tag{2}$$

или

$$u\Big|_\Gamma=0, u\Big|_{S_1}=0. \tag{3}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t,\ r\geq 0,\ 0\leq\theta_1<2\pi,\ 0\leq\theta_i\leq\pi,\ i=2,...,\ m-1,\ \theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leq k\leq k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S^\varepsilon)$, $l=0,1,...-$ пространства Соболева.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *При $\varepsilon=0$, задача (1), (2) для каждого μ имеет собственные функции.*

Теорема 2. *Если $\varepsilon>0$, то решение задачи (1), (2) $u(r,\theta,t)\equiv 0\Leftrightarrow\mu\neq-\gamma_s^2$.*

Следствие. *Задача (1), (2) имеет собственные значения* $\mu = -\gamma_s^2$ *и соответствующие им собственные функции.*

Теорема 3. *Для любого* $\varepsilon \geq 0$, *задача (1), (3) однозначно разрешима* $\Leftrightarrow \mu \neq -\gamma_s^2$.

Следствие. *Задача (1), (3) имеет собственные значения* $\mu = -\gamma_s^2$ *и соответствующие им собственные функции.*

Здесь γ_s- положительные нули функции Бесселя первого рода $J_s(z)$ целого порядка $s \geq \frac{m+1}{2}$.

Ключевые слова: критерий, спектральные задачи Трикоми, собственные значения, собственные функции, сферические функци.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10

Литература

[1] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, Москва (1981).

[2] Моисеев Е.И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром*, Изд.-во МГУ, Москва (1988).

[3] Алдашев С.А. Собственные значения и собственные функции задач Геллерстедта для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе, *Укр. матем. журнал*, **63**:6 (2011), 827–832.

О решение краевой задачи для уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами

Юсупжон АПАКОВ[1,a], Рахматилла УМАРОВ[2,b]

[1] *Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан*

[1,2] *Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан*

E-mail: [a]*yusupjonapakov@gmail.com*, [b]*r.umarov1975@mail.ru*

В работах [1-2], рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, при помощи построением функции Грина. В работе [3] было найдена решения уравнение с постоянными коэффициентами в виде $U_{xxx} - U_{yy} + A_1 U_{xx} + A_2 U_x + A_3 U_y + A_4 U = g_1(x,y)$, с другими краевыми условиями.

В области $D = \{(x,y): \quad 0 < x < p, \ 0 < y < q\}$ рассмотрим следующее уравнение третьего порядка в вида

$$L(u) = U_{xxx} - U_{yy} + A_1(x) U_{xx} + A_2(x) U_x + A_3(x) U + A_4 U_y = g_1(x,y), \tag{1}$$

где $p, \ q, A_4 \in R, \ , A_i(x), \ g_1(x,y), i = \overline{1,3}$ заданные, достаточно гладкие функции.

Заменой

$$U(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{3}\int\limits_0^x A_1(\xi)\,d\xi + \frac{A_4}{2}y\right) u(x,y),$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx} - u_{yy} + a_1(x) u_x + a_2(x) u = g(x,y), \tag{2}$$

Задача B_1. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}\left(\overline{D}\right)$ удовлетворяющую уравнению (2) и следующими краевыми условиями:

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$$u(0,y) = \psi_1(y), \quad u_x(p,y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(p,y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq q,$$

где $\psi_i(y), \ i = \overline{1,3}, g(x,y)$ заданные функции.

Теорема 1. *Если задача* B_1 *имеет решение, то при выполнении условий* $a_1(x) \geq 0, \ a_2(x) - \frac{1}{2}{a_1}'(x) \geq 0$, *оно единственно.*

Теорема 2. *Если выполняются следующие условия:*

$$1)\ \psi_i(y) \in C^3[0,q],\ i=\overline{1,3};$$

$$2)\ \frac{\partial^3 g(x,y)}{\partial x\partial y^2} \in C[0,q],\ 0 \le x \le p; \quad g(x,0)=g(x,q)=0;$$

$$3)\ 0 \le C < \frac{\lambda_1^2}{Kp(1+\lambda_1)};$$

$$4)\ a_1(p)=0;$$

то решение задачи B_1 существует.

Здесь $C=\max\{|a_1(x)|, |a_1{}'(x)-a_2(x)|, x\in[0,p]\}$, $\lambda_1=\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}$,

$$K=\frac{16}{3}\left(1-\exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right)\right)^{-1}.$$

Решение задачи B_1 имеет вид:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)\,d\xi+\int_0^p R_n(x,\xi)\,\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)\,d\xi d\xi+\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}\psi_3x^2+(\psi_{2n}-\psi_3p)\,x+\psi_{1n}\right)\sin\left(\tfrac{\pi n}{q}y\right).$$

Здесь

$$f_n(x)=-\left(\tfrac{a_2(x)}{\lambda_n^3}+1\right)\psi_{1n}-\left(\tfrac{xa_2(x)+a_1(x)}{\lambda_n^3}+x\right)\psi_{2n}-$$
$$-\left(\tfrac{xa_1(x)-pa_1(x)-xa_2(x)p}{\lambda_n^3}+\tfrac{a_2(x)}{\lambda_n^3}x^2+\tfrac{1}{2}x^2-px\right)\psi_{3n}+\tfrac{g_n(x)}{\lambda_n^3},$$

$G_n(x,\xi)$ функция Грина задачи

$$\begin{cases} V'''+\lambda_n^3V=\lambda_n^3f_n(x)-a_1V'-a_2V,\\ \quad V(0)=V'(p)=V''(p)=0.\end{cases}$$

Ключевые слова: уравнение третьего порядка, кратные характеристики, краевая задача, единственность, переменный коэффициент.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C10, 35G15

Литература

[1] Apakov Y.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics, *Nonlinear Analysis: Modeling and Control. -Vilnius*, **16**:3 (2011), 255–269.

[2] Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, *Украинский математический журнал*, **64**:1 (2012), 1–11.

[3] Apakov Y. P., Umarov R. A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **43**:3 (2022), 738–748.

Восстановление коэффициентов жесткости в случае струны, имеющей вид граф-дерева

Гауhар АУЗЕРХАН[a], Жансая БЕКТАЛ[b], Аиякоз БОЛАТКЫЗЫ[c]

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]*auzerkhan@math.kz*, [b]*zhansayabektal@gmail.com*, [c]*ayakozbolatkyzy@gmail.com*

Рассмотрим на граф-дереве с четырьмя поколениями задачу на собственные значения.

$$-y_j''(x_j)+q_j(x_j)y_j(x_j)=\lambda y_j(x_j), 0<x_j<b_j, j=0,1,2,....,14, \tag{1}$$

$$y_0(0) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} y_j(b_j) = y_m(0) = y_n(0), \\ y_j'(b_j) = y_m'(0) + y_n'(0) + k_j y_m(0), \; j = 0,1,2,3,4,5,6 \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $e_m, \; e_n$ - это дуги, пересекающиеся в одной вершине j.

$$\begin{aligned} y_7(b_7) &= y_8(b_8) = y_9(b_9) = y_10(b_10) \\ &= y_1(b_11) = y_12(b_12) = y_13(b_13) = y_14(b_14) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Теперь восстановление коэффициентов жесткости проводим, когда струна имеет вид граф-дерева. Условия (1) и (4) представляют граничные условия. В то же время условия (3) при $j = 0,1,2,3,4,5,6$ являются условиями согласования во внутренних вершинах графа. Когда коэффициенты жесткости

$$k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0,$$

то условия (3) совпадают с условиями Кирхгофа [1].

Таким образом, ставится задача однозначного восстановления коэффициентов жесткости $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ по некоторому набору собственных значений задачи (1) - (4). При этом функций $q_j(x_j)$ при $j = 0, 1, ..., 14$ считаются заданными.

Для решения поставленной задачи нам удобно ввести обозначения $s_j(x_j)$ при решения уравнения (1), подчиненные условиям Коши

$s_j(b_j) = 0, \; s_j'(b_j) = 1$

Решение задачи на собственные значения (1) - (4) обозначим через

$\{y_0(x_0), \; ..., y_{14}(x_{14})\}$

В докладе выявлены условия восстановления коэффициентов жесткости $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4,$ k_5, k_6 по некоторому набору собственных значений задачи (1) - (4).

Ключевые слова: Граф-дерево, коэффициент жесткости, условия Кирхгофа.

Литература

[1] Покорный Ю.В, Пенкин О.М, Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П, Шабров С.А. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2005) 272 с. - ISBN 5-9221-0425-X.

Интерполяция некоторых функциональных пространств типа Морри на торе

Шолпан БАЛГИМБАЕВА

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: sholpan.balgyn@gmail.com

Пусть $0 < \; u \leq p \leq \infty$. Пространство Морри $\widetilde{\mathcal{M}}_u^p \equiv \mathcal{M}_u^p \left(\mathbb{T}^d\right)$−совокупность всех $f \in L_u\left(\mathbb{T}^d\right)$ таких, что

$$\left\| f | \; \widetilde{\mathcal{M}}_u^p \right\| := \sup_{Q:|Q|\leq 1} |Q|^{1/p-1/u} (\int_Q |f(x)|^u dx)^{1/u} < \infty.$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ такая,что $\psi(x) = 1$, если $|x|_\infty \leq 1, \psi(x) = 0$, если $|x|_\infty \geq 3/2$. (Здесь $|x|_\infty = \max\{|x_\kappa| \; : \; \kappa = 1, \ldots, d\}, x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d)$

Положим $\varphi_0 \; := \psi, \;\; \varphi(x) := \varphi_0(\frac{x}{2}) - \varphi_0(x), \varphi_j(x) := \varphi(2^{1-j}x), \varphi_{-j} \equiv 0, \; j = 1, 2, \; \ldots.$ Тогда $\sum_{j=-\infty}^\infty \varphi_j(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}^d$.

Пусть $\ell_q := \ell_q(\mathbb{Z})$ – пространство числовых последовательностей $(a_j) := (a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ с конечной стандартной (квази)нормой.

Пусть $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ –пространство Шварца умеренных распределений, а $\widetilde{\mathcal{S}}' := \mathcal{S}'(\mathbb{T}^d)$ – подпространство $\mathcal{S}'$ распределений, 1-периодических по каждой переменной; $\hat{f} := \mathcal{F}(f)$ и $\mathcal{F}^{-1}(f)$ – прямое и обратное преобразования Фурье распределения $f \in \mathcal{S}'$.

Пусть $s \in \mathbb{R}, 0 < q \le \infty,\ 0 < u \le p \le \infty$.

Пространство Никольского-Бесова-Морри $\widetilde{\mathcal{N}}^s_{p,q,u} := \mathcal{N}^s_{p,q,u}(\mathbb{T}^d)$ состоит из всех распределений $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$ таких, что

$$\|f\ |\widetilde{\mathcal{N}}^s_{p,q,u}\| := \Big\|\Big\|\Big(2^{js}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}\varphi_j(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\Big)\ |\ \widetilde{\mathcal{M}}^p_u\Big\|\ |\ell_q\Big\| < \infty.$$

Пусть, кроме того, $u \ne \infty$. Пространство Лизоркина-Трибеля-Морри $\widetilde{\mathcal{E}}^s_{p,q,u} := \mathcal{E}^s_{p,q,u}(\mathbb{T}^d)$ состоит из всех распределений $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$ таких, что

$$\|f\ |\widetilde{\mathcal{E}}^s_{p,q,u}\| := \Big\|\Big\|\Big(2^{js}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}\varphi_j(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\Big)\ |\ \ell_q\Big\|\ |\widetilde{\mathcal{M}}^p_u\Big\| < \infty.$$

Пусть $\tau \in \mathbb{R}$. Пространство типа Никольского-Бесова, связанное с пространством Морри, $\widetilde{B}^{s,\tau}_{p,q} := B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{T}^d)$ состоит из всех распределений $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$ таких, что

$$\|f\ |\ \widetilde{B}^{s,\tau}_{p,q}\| := \sup_{Q\in\widetilde{\mathfrak{Q}}}\frac{1}{|Q|^\tau}\Big\{\sum_{j=j(Q)}^{\infty}\Big[\int_Q 2^{jsp}\Big|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}\varphi_j(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\Big|^p\Big]^{q/p}dx\Big\}^{1/q} < \infty.$$

При $0 < p < \infty$. Пространство типа Лизоркина-Трибеля, связанное с пространством Морри, $\widetilde{F}^{s,\tau}_{p,q} := F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{T}^d)$ состоит из всех распределений $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$ таких, что

$$\|f\ |\ \widetilde{F}^{s,\tau}_{p,q}\| := \sup_{Q\in\widetilde{\mathfrak{Q}}}\frac{1}{|Q|^\tau}\Big\{\int_Q\Big[\sum_{j=j(Q)}^{\infty}2^{jsq}\Big|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}\varphi_j(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\Big|^p q\Big]^{p/q}dx\Big\}^{1/p} < \infty,$$

здесь $\mathfrak{Q}$ – множество всех диадических кубов $Q := Q_{j\lambda} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid 2^jx - \lambda \in [0,\ 1)^d\},\ j \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{Z}^d$; $j(Q) = -\log_2 l(Q),\ \widetilde{\mathfrak{Q}}$ – множество всех диадических кубов $Q \subset [0,\ 1)^d$.

Рассмотрим еще пространство $\widetilde{\mathcal{B}}^{s,\tau}_{p,q} := \mathcal{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{T}^d)$, состоящее из всех распределений $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$ таких, что

$$\|f\ |\ \widetilde{\mathcal{B}}^{s,\tau}_{p,q}\| := \Big\{\sum_{j=0}^{\infty}\sup_{Q\in\widetilde{\mathfrak{Q}}}\Big[\int_Q 2^{jsp}\Big|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}\varphi_j(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\Big|^p\Big]^{q/p}dx\Big\}^{1/q} < \infty.$$

Ясно, что $\widetilde{\mathcal{B}}^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow \widetilde{B}^{s,\tau}_{p,q}$.

I. Действительная интерполяция. Пусть $0 < \theta < 1, s_0, s_1 \in \mathbb{R}, s_0 < s_1, 0 < p < \infty, 0 \le \tau \le \frac{1}{p}, 0 < q, q_0, q_1 \le \infty$. Положим $s := (1-\theta)s_0 + \theta s_1$.

Теорема 1. $\widetilde{\mathcal{B}}^{s,\tau}_{p,q} = (\widetilde{B}^{s_0,\tau}_{p,q_0}, \widetilde{B}^{s_1,\tau}_{p,q_1})_{\theta,q}$ *в смысле эквивалентных (квази)норм.*

Следствие 1. $\widetilde{\mathcal{B}}^{s,\tau}_{p,q} = (\widetilde{E}^{s_0,\tau}_{p,q_0}, \widetilde{G}^{s_1,\tau}_{p,q_1})_{\theta,q}$ *в смысле эквивалентных (квази)норм (здесь $E, G \in \{B, F\}$ любые).*

Следствие 2. $\widetilde{B}^{s,\tau}_{p,\infty} = (\widetilde{E}^{s_0,\tau}_{p,q_0}, \widetilde{G}^{s_1,\tau}_{p,q_1})_{\theta,\infty}$ *в смысле эквивалентных (квази)норм (здесь снова $E, G \in \{B, F\}$ любые).*

Ниже $0 < u \le p \le \infty$

Теорема 2. $\widetilde{\mathcal{N}}^{s,\tau}_{p,q,u} = (\widetilde{E}^{s_0,\tau}_{p,q_0,u}, \widetilde{G}^{s_1,\tau}_{p,q_1,u})_{\theta,q}$ *в смысле эквивалентных (квази)норм (здесь $E, G \in \{\mathcal{E}, \mathcal{N}\}$ и $p < \infty$ в случае $E = \mathcal{E}$ или $G = \mathcal{E}$).*

Следствие 3. *Если $s_0 = 0$, то $\widetilde{\mathcal{N}}^{s,\tau}_{p,q,u} = (\widetilde{\mathcal{M}}^p_u, \widetilde{E}^{s_1,\tau}_{p,q_1,u})_{\theta,q}$ в смысле эквивалентных (квази)норм (здесь $E \in \{\mathcal{E}, \mathcal{N}\}$).*

Следствие 4. *Если* $s_0 = 0$, *то* $\widetilde{\mathcal{N}}^{s,\tau}_{p,q,u} = (\widetilde{\mathcal{M}}^p_u, \widetilde{B}^{s_1,\frac{1}{p}-\frac{1}{u}}_{p,q_1})_{\theta,q}$ *в смысле эквивалентных (квази)норм.*

II. Комплексная интерполяция.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \theta < 1, s \in \mathbb{R}, 1 < q_0, q_1 \leq \infty$.

i) *Пусть* $1 < u_0 \leq p_0 < \infty, 1 < u_1 \leq p_1 < \infty$, *положим* $\frac{1}{u} := \frac{1-\theta}{u_0} + \frac{\theta}{u_1}, \frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. *Тогда*

$$[\widetilde{\mathcal{M}}^{p_0}_{u_0}, \widetilde{\mathcal{M}}^{p_1}_{u_1}]_\theta = \widetilde{\mathcal{M}}^p_u,$$

если и только если $u_0 p_1 = u_1 p_0$.

ii) *Пусть* $1 < u \leq p < \infty$. *Если* $\frac{1}{q} := \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, *то*

$$\widetilde{E}^s_{p,q,u} = [\widetilde{E}^s_{p,q_1,u}, \widetilde{E}^s_{p,q_2,u}]_\theta, E \in \{\mathcal{E}, \mathcal{N}\}.$$

Замечание. Теоремы 1, 2, 3 и следствия 1, 2, 3, 4 являются периодическими аналогами терем 2.1, 2.2, предложения 2.4 и следствий 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 фундаментального обзора [1] соответственно.

Funding: Автор была поддержана грантом AP09258831 МОН РК.

Ключевые слова: пространство Морри, пространство типа Никольского–Бесова, Лихоркина–Трибеля, интерполяция.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A05, 46E30

Литература

[1] Sickel W. Smoothness spaces related to Morrey spaces — a survey. II , *Eurasian Math. J.*, **4**:1 (2013), 82–124.

Внутреннекраевая задача со смещением для смешанно-гиперболического уравнения второго порядка

Жираслан БАЛКИЗОВ

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

E-mail: Giraslan@yandex.ru

На евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где m, $\lambda-$ заданные числа, причем $m > 0$, $|\lambda| \leq \frac{m}{2}$; $f = f\,(x, y) -$ заданная функция; $u = u\,(x, y) -$ искомая функция.

Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$, где Ω_1- это область, ограниченная характеристиками $\sigma_1 = AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$ и $\sigma_2 = CB : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$ уравнения (1) при $y < 0$, выходящими из точки $C = (r/2, y_C)$, $y_C = -\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}$, проходящими через точки $A = (0, 0)$ и $B = (r, 0)$, соответственно, и отрезком $I = AB$ прямой $y = 0$; Ω_2- область, ограниченная характеристиками $\sigma_3 = AD : x - y = 0$, $\sigma_4 = BD : x + y = r$ уравнения (1) при $y > 0$, выходящими из точек A и B, пересекающимися в точке $D = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ и отрезком $I = AB$.

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u\,(x, y)$ из класса $u\,(x, y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega\right) \cap C^2\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u\left[\theta_{01}\left(x\right)\right] = \psi_1(x), \qquad 0 \leq x \leq r, \tag{2}$$

$$\alpha_1(x)x^{1-\beta_2}D_{0x}^{\beta_1}\left\{t^{\beta-1}u\left[\theta_{00}(t)\right]\right\}+\alpha_2(x)D_{0x}^{\beta-1}u_y(t,0)+\alpha_3(x)u(x,0)=\psi_2(x),\quad 0<x<r, \quad (3)$$

где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)-$ заданные на отрезке $[0,r]$ функции, причем $\alpha_1^2(x)+\alpha_2^2(x)+\alpha_3^2(x)\neq 0\ \forall\ x\in[0,r]$.

Здесь $\theta_{00}(x)=\left(\frac{x}{2},-(2-2\beta)^{\beta-1}x^{1-\varepsilon}\right)$, $\theta_{01}(x)=\left(\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right)$ — аффиксы точек пересечения характеристик, выходящих из точки $(x,0)$ с характеристиками AC и AD уравнения (1) соответственно; $\beta_1=\frac{m-2\lambda}{2(m+2)}$, $\beta_2=\frac{m+2\lambda}{2(m+2)}$, $\beta=\beta_1+\beta_2=\frac{m}{m+2}$;

$$D_{cx}^{\gamma}\varphi(t)=\begin{cases}\frac{sgn(x-c)}{\Gamma(-\gamma)}\int\limits_c^x\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{1+\gamma}}, & \gamma<0,\\ sgn^{[\gamma]+1}(x-c)\frac{d^{[\gamma]+1}}{dx[\gamma]+1}D_{cx}^{\gamma-[\gamma]-1}\varphi(t), & \gamma>0,\end{cases} -$$

оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка $|\gamma|$, где $[\gamma]-$ есть целая часть числа γ [1, с. 28], [2].

Сформулированная и исследуемая в рамках данной работы задача (1)-(3) относится к классу краевых задач со смещением Жегалова-Нахушева [3], [4].

Доказана справедливость следующей теоремы.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть заданные функции $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f(x,y)$ таковы, что*

$$\alpha_1(x),\alpha_2(x),\alpha_3(x)\in C^1[0,r]\cap C^2(0,r),$$

$$\psi_1(x),\psi_2(x)\in C[0,r]\cap C^2(0,r),$$

$$f(x,y)\in C^1(\overline{\Omega_2}),$$

и выполнено одно из условий: либо

$$\alpha_2(x)-\gamma_2\alpha_1(x)\neq 0\ \ \forall\ x\in[0,r];$$

либо же

$$\alpha_2(x)-\gamma_2\alpha_1(x)\equiv 0,\ \alpha_3(x)+\gamma_1\alpha_1(x)\neq 0\ \ \forall\ x\in[0,r].$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение задачи (1)-(3).

В некоторых частных случаях решение задачи (1)-(3) получено и выписано в явном виде.

Ключевые слова: волновое уравнение, вырождающееся гиперболическое уравнение, уравнение Вольтерра, метод Трикоми, метод интегральных уравнений, методы теории дробного исчисления.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L51

Литература

[1] Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк., 301 с. (1995).

[2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* . Минск: Наука и техника, 688 с. (1987).

[3] Жегалов В.И. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках с разрывами на переходной линии* // Ученые записки Казанского государственного университета им. В.И. Ленина. **122**:3, 3–16 (1962).

[4] Нахушев А.М. *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. **5**:1, 44–59 (1969).

Решение дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией

Акбопе БЕЙСЕБАЕВА, Зейнеп ЖАНИБЕК

Южно-Казахстанский университет им.М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан
E-mail: akbope_a@mail.ru, zhanibekzeinep@mail.ru

В настоящей работе мы изучаем спектральную задачу для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и с краевыми условиями типа Неймана. Построена функция Грина изучаемой краевой задачи.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-u''(-x) = \lambda u(x) + f(x), -1 < x < 1, u'(-1) = 0, u'(1) = 0 \tag{1}$$

где $f(x)-$ непрерывная функция.

Теорема 1. *Если λ не является собственным значением однородной краевой задачи* (1), *то для любой непрерывной функции $f(x)$ ее решение представимо в виде*

$$u(x) = \frac{1}{8\rho}\left\{\frac{e^{\rho}-e^{-\rho}}{e^{\rho}+e^{-\rho}}\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\int\limits_{-1}^{1}\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)f(t)\,dt\right.$$

$$-i\frac{e^{\rho i}+e^{-\rho i}}{e^{\rho i}-e^{-\rho i}}\left(e^{\rho ix}+e^{-\rho ix}\right)\int\limits_{-1}^{1}\left(e^{\rho it}+e^{-\rho it}\right)f(t)\,dt$$

$$+\int\limits_{-1}^{-x}\left[-i\left(e^{\rho ix}+e^{-\rho ix}\right)\left(e^{\rho it}-e^{-\rho it}\right)+\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right)\right]f(t)\,dt$$

$$+\int\limits_{-x}^{x}\left[i\left(e^{\rho ix}-e^{-\rho ix}\right)\left(e^{\rho it}+e^{-\rho it}\right)-\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)\right]f(t)\,dt$$

$$\left.+\int\limits_{x}^{1}\left[i\left(e^{\rho ix}+e^{-\rho ix}\right)\left(e^{\rho it}-e^{-\rho it}\right)-\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right)\right]f(t)\,dt\right\}$$

Из теоремы вытекает важное

Следствие 1. Если λ не является собственным значением однородной краевой задачи (1), то существует единственная функция Грина задачи (1)

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{8\rho}\left\{\frac{e^{\rho}-e^{-\rho}}{e^{\rho}+e^{-\rho}}\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\int\limits_{-1}^{1}\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)f(t)\,dt\right.$$

$$\left.-i\frac{e^{\rho i}+e^{-\rho i}}{e^{\rho i}-e^{-\rho i}}\left(e^{\rho ix}+e^{-\rho ix}\right)\int\limits_{-1}^{1}\left(e^{\rho it}+e^{-\rho it}\right)f(t)\,dt + g(x,t,\lambda)\right\}$$

$$g(x,t,\lambda) = \begin{cases} -i\left(e^{\rho ix}+e^{-\rho ix}\right)\left(e^{\rho it}-e^{-\rho it}\right)+\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), -1 \le t < -x \\ i\left(e^{\rho ix}-e^{-\rho ix}\right)\left(e^{\rho it}+e^{-\rho it}\right)-\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right),\ -x \le t \le x \\ i\left(e^{\rho ix}+e^{-\rho ix}\right)\left(e^{\rho it}-e^{-\rho it}\right)-\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right),\ x < t \le 1 \end{cases}$$

В случае краевых условий типа Дирихле разрешимость задачи рассмотрена в работе [1].

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке КН МНиВО РК (грант AP13068539)

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с инволюцией, разложения по собственным функциям, базис.

Литература

[1] А. А. Сарсенби, Б. Х. Турметов. Базисность системы собственных функций диф- ференциального оператора второго порядка с инволюцией, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки,.*, **29(2): 183-196**:2019 (год).
DOI: https://doi.org/10.20537/vm190204

Разрешимость нелокальной задачи для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области

Аширмет БЕКИЕВ

Каракалпакский государственный университет, г. Нукус, Узбекистан
E-mail: ashir1976@mail.ru

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ \ 0 < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lv \equiv v_{tt}\,(x,t) - v_t\,(x,t) - v_{xxxx}\,(x,t) - b^2 v\,(x,t) = f\,(x,t)\,,$$

где $b = const$ и $f(x,t)$ – заданная функция.

Задача 1. Найти в области Ω функцию $v\,(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$v\,(x,t) \in C^{3,0}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right) \bigcap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega\right), \tag{1}$$

$$Lv \equiv f\,(x,t)\,, \quad (x,t) \in \Omega \tag{2}$$

$$v\,(x,0) = \varphi\,(x)\,,\ \ v\,(x,\beta) = \psi\,(x)\,,\ \ 0 \le x \le 1 \tag{3}$$

$$v\,(0,t) = v\,(1,t)\,,\ \ v_x\,(0,t) = 0,\ \ v_{xx}\,(0,t) = v_{xx}\,(1,t)\,,\ \ v_{xxx}\,(0,t) = 0,\ \ 0 \le t \le \beta \tag{4}$$

где $\varphi\,(x)\,,\ \psi\,(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi\,(0) = \varphi\,(1)\,,\ \psi\,(0) = \psi\,(1)\,,\ \varphi'\,(0) = \psi'\,(0) = 0,\ \varphi''\,(0) = \varphi''\,(1)\,,\ \psi''\,(0) = \psi''\,(1)\,, \varphi'''\,(0) = \psi'''\,(0) = 0$. Система функций

$$X_0\,(x) = 1,\ \ X_{2k-1}\,(x) = \cos\lambda_k x,\ \ X_{2k}\,(x) = x\sin\lambda_k x,\ \ \lambda_k = 2k\pi,\ \ k = 1,2,... \tag{5}$$

и

$$Y_0\,(x) = 2\,(1-x)\,,\ \ Y_{2k-1}\,(x) = 4\,(1-x)\cos\lambda_k x,\ \ Y_{2k}\,(x) = 4\sin\lambda_k x,\ \ \lambda_k = 2k\pi,\ \ k = 1,2,...$$

биортогонально и образуют базис Рисса в $L_2\,[0,\ 1]$ [1-3].

Корректность краевой задачи устанавливается доказательством существования и единственности решения. Решение задачи найдено виде ряда составленных из базисных функций Рисса (5).

Теорема 1. *Если* $\varphi\,(x)\,, \psi\,(x) \in C^6\,[0,1]$, $\varphi^{(2i)}\,(0) = \varphi^{(2i)}\,(1)$, $\psi^{(2i)}\,(0) = \psi^{(2i)}\,(1)$, $\varphi^{(2i+1)}\,(0) = \psi^{(2i+1)}\,(0) = 0,\ i = 0,1,2,$ *и* $f\,(x,t) \in C^{3,0}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right),\ f\,(0,t) = f\,(1,t)\,,\ f_x\,(0,t) = 0, f_{xx}\,(0,t) = f_{xx}\,(1,t)$, *то существует единственное решение задачи (1)-(4).*

Ключевые слова: нелокальная задача, биортогональная система, базис Рисса, существование, единственность решения.

Литература

[1] Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи, *Дифференциальные уравнения*, **35** (1999), 1094–1100.

[2] Мегралиев Я. Т., Велиева Б. К. Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни-Люка с нелокальными условиями, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29**:2 (2019), 166–182.

[3] Сабитов К.Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа, *Известия вузов. Математика.* **2** (2011), 71–85.

Обобщения аналогов задач Гурса и Дарбу-Гурса-Бодо в классах обобщенных функций конечного порядка

Амангельди БЕРДИМУРАТОВ

Пермский национальный исследовательский политехнический университет Россия, г. Лысьва
E-mail: aman2460@mail.ru

Введение

Пусть π параллелепипед в R^n , n – граней которого лежат в координатных подпространствах $\xi_i = 0, i = 0, 1, 2, ..., n$ Обозначим через π_i его $(n-1)$-мерную грань, лежащую в подпространстве $\xi_i = 0, i = 0, 1, 2, ..., n$
Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в матричной форме: $P(D)u = 0$ (1) где $u = (u_1, ..., u_n)$неизвестная вектор функция а$P_{ij}(D)$,$i = \overline{1,t}, j = \overline{1,s}$ произвольные линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, а числа t и s произвольны. Аналоги классических задач типа Гурса и Дарбу-Гурса-Бодо для обобщенных решений задаются следующим образом: вместо значения решения и его производных на гранях (которые, вообще говоря не определены если у гиперплоскости этих граней характеристические) решение задается сразу в некоторой окрестности. Двумерный случай при $n = 2$ задача типа Гурса рассмотрена в [2], а при $n = 3$ задача типа Дарбу-Гурса-Бодо рассмотрена в [1,4].

Постановка задачи

Рассмотрим следующий аналог вышеуказанных задач , которая имеет место указанное свойство продолжаемости, если для системы выполнено условия, аналогичное тому, которые налагаются в классических задачах типа Гурса и Дарбу-Гурса-Бодо: характеристическое множество системы принадлежит окрестности объединения n гиперплоскостей, соответствующих указанным граням. Задача: при каких условиях всякое сообщение решение системы (1) определенное в окрестности объединения n соседних граней $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \pi_i$ параллелепипеда π, может быть продолжено в некоторую окрестность этого параллелепипеда.

Теорема. Пусть для некоторого $c_0 > 0$, $N \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C}^n; |z_i| \leqslant c_0\}$. Тогда для любой окрестности L компакта $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \pi_i$ существует $L^{'}$ параллелепипеда π такая, что для целого qвсякую обобщенную функцию $u \in [W_L^q]^s$ являющуюся обобщенным решением системы (1) на L можно продолжить функцией $v \in \left[W_{L'}{}^{q-c_1}\right]^s$ являющейся обобщенным решением системы (1) на $L^{'}$ причем $\|v\|_{L'}^{q-c_1} \leq c_2 \|u\|_L^q$ где c_2 не зависит от u а c_1 зависит лишь от оператора $P\,(D)$.

Заключение. Получено условия, в задачах типа Гурса и Дарбу-Гурса-Бодо: характеристическое множество системы принадлежит окрестности объединения n гиперплоскостей, соответствующих указанным граням.

Ключевые слова:несобственная точка, преобразование Фурье, выпуклый компакт, финитные функции, целые аналитические функции, характеристическая функция, алгебраическое множество.

Литература

[1] Ахмедов Ш.А. Бердимуратов А.М. *О продолжении обобщенных решений уравнений в частных производных, заданных в окрестности трех характеристических подпространств*, //Докл.АН Тадж.ССР.-1984.-том27,№11.-с.619-620.,г.Душанбе

[2] Ахмедов Ш.А. О единственности продолжения обобщенных решений бесконечного порядка заданных в окрестности двух характеристических подпространств.// *Докл.АН Тадж.ССР.-1987.-томXXX,№9.-с.541-544.*, **1**:2 (год), 3–45.

[3] Паламодов В.П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, в: М, физматгиз, 1967. 488 с.

[4] Бердимуратов А.М. Метод экспоненциального представления Паламодова и его приложение к некоторым аналогам классических задач в пространствах обобщенных функций, в: Бишкек ,2017г,134с.

Ограниченность некоторого класса матричных операторов из l_{pv} в l_{qu}

Айгуль БЕСЖАНОВА[a], Айнур ТЕМИРХАНОВА[b]

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: [a]*beszhanova@mail.ru*, [b]ainura-t@yandex.kz

Пусть $1 < p, q < \infty$ весовые последовательности. Пусть l_{pv} - пространство последовательностей $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел, для которых конечна норма $\|f\|_{pv} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$.

Рассмотрим вопрос ограниченности операторов

$$\left(A^+ f\right)_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} f_j, i \geq 1, \tag{1}$$

$$\left(A^- f\right)_j = \sum_{i=j}^{\infty} a_{ij} f_i, j \geq 1 \tag{2}$$

из l_{pv} в l_{qu}, где $a_{ij} > 0, i \geq j \geq 1$, т.е. выполнение следующего неравенства

$$\|A^{\pm} f\|_{qu} \leq C\|f\|_{pv}, \forall f \in l_{pv}. \tag{3}$$

При $a_{ij} = 1, i \geq j \geq 1$ операторы (1), (2) совпадают с дискретными операторами Харди.[1-3] В работах [4,5] получены критерии ограниченности и компактности операторов, где элементы матрицы (a_{ij}) удовлетворяют дискретному «условию Ойнарова».

В 2012 году работе [6] был введен широкий класс матриц $O_n^+, O_n^-, n \geq 0$ и установлены необходимые и достаточные условия ограниченности операторов (1), (2) из l_{pv} в l_{qu} при $1 < p \leq q < \infty$, где соответствующие матрицы принадлежат этим классам. Однако условия ограниченности операторов (1), (2), матрицы которых принадлежат классам $O_n^+, O_n^-, n > 1$ для случая $1 < q < p < \infty$, все еще открытая задача. Цель данной работы установить необходимые и достаточные условия ограниченности операторов (1), (2) из l_{pv} в l_{qu} при $1 < q < p < \infty$ когда матрицы этих операторов принадлежат классу O_2^+.

В дальнейшем символ $M << K$ означает, что $M \leq cK$, где константа $c > 0$ зависит только от несущественных параметров. Если $M << K << M$, то $M \approx K$.

Введем определение класса O_2^+.

Определение 1. Пусть (a_{ij}) неотрицательная матрица, где a_{ij} не убывает по первому индексу для всех $i \geq j \geq 1$ Матрица (a_{ij}) принадлежит классу O_2^+, если существуют неотрицательные матрицы $(a_{ij}^{2,0})$, $(a_{ij}^{2,1})$, $(a_{ij}^{(1)})$, число $r_2 \geq 1$ такие, что $(a_{ij}^{(1)}) \in O_1^+$

$$\frac{1}{r_2}(a_{ik}^{2,0} + a_{ik}^{2,1} a_{kj}^{(1)} + a_{kj}) \leq a_{ij} \leq r_2(a_{ik}^{2,0} + a_{ik}^{2,1} a_{kj}^{(1)} + a_{kj})$$

при всех $i \geq k \geq j \geq 1$.

Замечание 1. Как показано в работе [6] матрицы $(a_{ij}^{2,0})$, $(a_{ij}^{2,1})$, $(a_{ij}^{(1)})$ можно считать неубывающими по первому индексу и не возрастающими по второму индексу.

Теорема 1. *Пусть* $1 < q < p < \infty$ *и* $(a_{ij}) \in O_2^+$. *Тогда оператор (1) ограничен из* l_{pv} *в* l_{qu} *тогда и только тогда, когда* $M^+ = \max\{M_{2,0}^+, M_{2,1}^+, M_{2,2}^+\}$, *где*

$$M_{2,0}^+ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=i}^{\infty} (a_{si}^{2,0})^q u_s^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{i} v_j^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_j^{-p'} \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,1}^+ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=i}^{\infty} \left(a_{si}^{2,1}\right)^q u_s^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{i} \left(a_{ij}^{(1)}\right)^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^+ \left(\sum_{j=1}^{i} \left(a_{ij}^{(1)}\right)^{p'} v_j^{-p'} \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,2}^+ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{i} (a_{ij})^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^+ \left(\sum_{s=1}^{i} (a_{is})^{p'} v_s^{-p'} \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}, \Delta^+ g_i = g_i - g_{i-1}.$$

Кроме того, $\|A^+\|_{p\to q} \approx M^+$.

Ключевые слова: Нервавенство Харди, матричный оператор, ограниченность оператора.

Литература

[1] Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G, *Inequalities, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1952. –P. 160.*

[2] Kufner A., Maligranda L. Persson L-E, The Hardy inequality-About its history and some related results, *Vydavatelsky Servis, Plzen*, **1**:2007, p. 162.

[3] Bennett G, Some elementary inequalities II, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 39*, **1**:1988, p. 385-400

[4] Oinarov, R, Okpoti, CA, Persson, LE, Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case q < p, *Math Inequal Appl*, **1**:2007, p. 843-861

[5] Ойнаров Р. О., Шалгинбаева С.Х., Весовая аддитивная оценка одного класса матричных операторов, *Известия НАН РК. // Серия физико-математическая. № 1*, **1**:2004, p. 39-49

[6] R. Oinarov, Zh. Taspaganbetova, BCriteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators, *Journal of Inequalities and Applications* , **1**:2012, p. 1-18

Начально-краевые задачи для двумерного волнового уравнения с нелокальными условиями по пространственным переменным, являющиеся многомерными обобщениями задачи Самарского-Ионкина

Мырзагали БИМЕНОВ[1,2,a], Махмуд САДЫБЕКОВ[1,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *ЧУ "Шымкентский университет" , Шымкент, Казахстан*
E-mail: [a]bimenov@mail.ru, [b]sadybekov@math.kz

В докладе рассматривается постановка новых начально-краевых задач для двумерного волнового уравнения с нелокальными условиями по пространственным переменным, являющимися многомерными обобщениями задачи Самарского-Ионкина. Областью рассмотрения задачи является круговой цилиндр Q с осью вдоль оси t. Ставятся классические начальные условия на основании цилиндра и новые нелокальные краевые условия на пространственных (боковых) границах цилиндра. Пусть $\Omega = \{(r,\varphi) : 0 \le r < 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ - единичный круг, $Q = \{(r,\varphi,t) : 0 \le r < 1, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 < t < T\}$ - прямой круговой цилиндр. Будем рассматривать новую нелокальную краевую задачу для двумерного волнового уравнения:

$$u_{tt}(r,\varphi,t) - \Delta u(r,\varphi,t) = f(r,\varphi,t),\ (r,\varphi,t) \in Q, \tag{1}$$

где Δ - оператор Лапласа в полярных координатах (r,φ). Будем использовать классические начальные условия

$$u|_{t=0} = \tau(r,\varphi),\ u_t|_{t=0} = \nu(r,\varphi),\ (r,\varphi) \in \Omega, \tag{2}$$

и нелокальные краевые условия на боковой границе кругового цилиндра

$$u(1,\varphi,t) - \alpha u(1,2\pi-\varphi,t) = 0,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\varphi,t) - \frac{\partial u}{\partial r}(1,2\pi-\varphi,t) = 0,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Здесь $\alpha \neq 1$ - фиксированное действительное число. Правую часть уравнения и начальные условия мы берем из следующего "стандартного"класса гладкости для гиперболических задач: $f(r,\varphi,t) \in C^{1+\epsilon}(\bar{Q})$; $\tau(r,\varphi) \in C^{2+\epsilon}(\bar{\Omega})$; $\nu(r,\varphi) \in C^{1+\epsilon}(\bar{\Omega})$. Дополнительно от $\tau(r,\varphi)$ и $\nu(r,\varphi)$ потребуем удовлетворение краевым условиям (3), (4). Для решения начально-краевой задачи (1)-(4) мы применяем методику сведения к последовательному решению двух начально-краевых задач с самосопряженными краевыми условиями по пространственной переменной, предложенную в [1] для случая одномерных параболических начально-краевых задач с неусиленно регулярными краевыми условиями. Основным результатом работы является доказательство корректности сформулированной задачи в классическом смысле.

Funding: Авторы поддержаны грантом No AP14869063 МНВО РК.

Keywords: многомерное волновое уравнение, нелокальное краевое условие, условие Самарского-Ионкина, классическое решение.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35L20

References

[1] Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with not Strongly Regular Boundary Conditions, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, **216** (2017), 330–348.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ДРОБНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Назарбай БЛИЕВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Рассмотрим некоторые важные, на наш взгляд, применения результатов, изложенных в книге автора [1] которая издана и на английском языке [2](перевод профессоров H.Begehr и R.Radoc из Германии).

I. Теория обобщенных аналитических функции продолжена в [1] на крайние случаи, не охваченные в известных работах И.Н. Векуа и L. Bers, что расширило и круг важных приложений, указанных И.Н. Векуа.

II. Введенны пространства Бесова, вложенные в класс непрерывных функций, в которых справедлива нетеровая теория для класса линейных сингулярных уравнений с ядром Коши [3] и для систем таких уравнений [4]

III. Известные методы решения краевых (Римана-Гильберта) задач для аналитических функций и эллиптических дифференциальных уравнений на плоскости существенно используют свойства интегралов типа Коши, формул Сохоцкого. В [1] изучены необходимые свойства ряда таких интегральных операторов в B-пространствах Бесова. Остановимся кратко на некоторых из них.

Пусть G ограниченная область (комплексной) плоскости с ляпуновской границей $\Gamma \in C^{\nu}, 0 < \nu \le 1$.

$$T_f = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(z)dG_\zeta}{\zeta - x}, \Pi_f = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(z)dG_\zeta}{\zeta - x}^2 (dG_\zeta = d\xi d\eta, \zeta = \xi + i\eta, z = x + iy).$$

Сингулярный интеграл Π_f понимается в смысле главного значения по Коши.

Теорема 1.1. Оператор T_f переводит пространство $B^{\alpha}_{\rho,\theta}, 1 < \theta < \infty, 1 \leq \theta \leq \infty, 0 < \alpha < 1$, в $B^{1+\alpha}_{\rho,\theta}$ и ограничен

$$|T_f|_{B^{1+\alpha}_{\rho,\theta}(G)} \leq M_1 \, ||f|| _{B^{\alpha}_{\rho,\theta}(G)}. \tag{1}$$

Оператор Π_f переводит $B^{\alpha}_{\rho,\theta}(G)$ в себя и ограничен

$$|\Pi_f|_{B^{\alpha}_{\rho,\theta}(G)} \leq M_2 \, ||f|| _{B^{\alpha}_{\rho,\theta}(G)}. \tag{2}$$

и

$$\frac{\partial T_f}{\partial z} = \Pi_f.$$

Теорема 1.2. Если $f \in B^{\alpha}_{\rho,1}(G), 1 < \rho < 2, \alpha = \frac{2}{\rho} - 1 < \nu \leq 1$, то T_f будет непрерывной функцией z на всей плоскости $E : T_f \in C(E)$.

Лемма 1.2. Пусть $f(t) \in B^{\tau}_{\rho,\theta}(\Gamma)$, где τ, ρ, θ удовлетворяют одному из условий а) $\tau = \frac{1}{\rho}, 1 < \rho < 2, \theta = 1$; б) $\tau > \frac{1}{\rho}, 1 < \rho < 2, \theta \geq 1$; в) $\tau > 1 - \frac{1}{\rho}, \rho \geq 2, \theta > 1$; и пусть выполнено неравенство $\tau + \frac{1}{\rho} - 1 < \nu \leq 1$.

Тогда интеграл типа Коши $\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}$ принадлежит в $B^{\alpha}_{\rho,1}(G), \alpha = \tau + \frac{1}{\rho} - 1$, притом

$$|\Phi(z)|_{B^{1+\alpha}_{\rho,\theta}(G)} \leq M_3 \, ||f|| _{B^{\tau}_{\rho,\theta}(\Gamma)}. \tag{3}$$

Отметим один интересный, на наш взгляд, результат вытекающий из Леммы. В случае а) имеем $f(t) \in B^{\frac{1}{\rho}}_{\rho,1}(\Gamma) \subset C(\Gamma), 1 < \rho < 2$.

Заметим, что $B^{\frac{1}{\rho}}_{\rho,1}(\Gamma)$ не вложено в $C^{\beta}(\Gamma)$ ни при каком $0 < \beta < 1$, а интеграл типа Коши $\Phi(z) \in C(\bar{G})$ имеет граничные значения $\Phi \pm (t)$ (изнутри G и извне $\bar{G}$) и $||\Phi \pm (t)|| _{B^{\tau}_{\rho,\theta}}(\Gamma) \leq M_4 \, ||f|| _{B^{\tau}_{\rho,\theta}}(\Gamma)$

Сингулярный интеграл $S_{\Gamma} f = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t}, t \in \Gamma$, понимаемый в смысле главного значения по Коши, ограничен в $B^{\tau}_{\rho,\theta}(\Gamma)$ и справедливы формулы Сохоцкого-Племеля.

Применения указанных результатов к краевым задачам сопряжения (Римана-Гильберта) опубликованы в виде пяти статей в журнале. "Complex Var. Elliptic Equations."за 2020-2023г.г. Далее можно рассматривать применения этих результатов к решению краевых задач для эллиптических уравнений на плоскости в дробных пространствах.

Литература

[1] Блиев Н.К. *Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах*, Наука, Алма-Ата(1985).

[2] Bliev N. *Generelized analytic functions in fractional spaces*, Addesion Longman Inc., Longman(Boston), USA(1997) (Pitman Monograps and Surveys in Pure and Applied Mathematics 86).

[3] Блиев Н.К. Сингулярные интегральные операторы с ядром Коши в дробных пространствах, *Сибирский математический журнал*, **47**:1 (2006), 37–45.

[4] Блиев Н.К. *Система сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши в пространствах Бесова*, Доклады НАН РК, (2007), No.5, 5–9.

Задача тепловой диффузии с обобщенным условием Самарского

Гульнара ДИЛДАБЕК[1,2,a], Марина ИВАНОВА[1,3,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[3] *Южно-Казахстанская медицинская академия, Шымкент, Казахстан*
E-mail: [a]*dildabek@math.kz*, [b]*ivanova@math.kz*

В докладе рассматривается одна математическая задача, моделирующая процесс тепловой диффузии в однородном тонком проводе, концы которого соединены между собой (в кольцо). Длина провода равняется l и на него не действуют внешние источники. Мы рассматриваем задачу диффузии тепла в этом проводе с изменением времени при известном начальном распределении тепла в проводе. Задачи о тепловой диффузии многократно рассмтаривались ранее. В данном докладе мы рассматриваем задачу с нелокальным интегральным условием, которое обобщает хорошо известное условие Самарского. Если через $u(x,t)$ мы обозначим значение температуры в точке x провода в момент времени t, то (как хорошо известно) процессс распространения тепла описывается уравнением теплопроводности

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0. \tag{1}$$

Математическое рассмотрение уравнения (1) мы проводим в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$. Начальное состояние (распределение тепла) в проводе задано начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq l. \tag{2}$$

Так как провод замкнут, то температура на его обоих концах совпадает:

$$u(0,t) - u(l,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

К точке смыкания концов провода $x = l$ температурное соединение не идеально, так что тепловые потоки могут не совпадать. Мы рассматриваем модель, в которой средняя величина температуры по особо выделенным участкам провода является постоянной. За выделение этих участков отвечает функция $q(x) \in W_2^2(0,1)$. И это условие может быть представлено в виде

$$\int_0^l q(x)u(x,t)dx = Const,\ 0 \leq t \leq T. \tag{4}$$

Условие (4) обобщает известное условие А.А. Самарского, которое (при $q(x) = 1$) было им использовано при моделировании процессов в высокотемпературной плазме.

Теорема 1. *Пусть $q(x) \in W_2^2(0,1)$ и $q'(0) \neq q'(l)$. Тогда для любой начальной функции $\varphi(x) \in W_2^2(0,1)$ существует единственное сильное решение $u(x,t) \in W_2^{2,1}(\Omega)$.* Доказательство теоремы основано на применении метода разделения переменных и результатов работ [1-3].

Funding: Авторы поддержаны грантом №AP09260752 МНВО РК.

Keywords: уравнение теплопроводности, условие Самарского, сильное решение, нелокальное краевое условие, математическая модель, базис Рисса.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 335K15

References

[1] Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition, *Eurasian Math. J.*, **4**:3 (2013), 53–62.

[2] Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition, *Differential Equations*, **48**:6 (2012), 896–900.

[3] Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. Об устойчивости свойства базисности одного типа задач на собственные значения при нелокальном возмущении краевого условия, *Уфимск. матем. журн*, **3**:2 (2011), 28–33.

Об одной спектральной задаче для бигармонического оператора в прямоугольной области

Мувашархан ДЖЕНАЛИЕВ[1,a], Мади ЕРГАЛИЕВ[1,2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*muvasharkhan@gmail.com*, [b]*ergaliev.madi.g@gmail.com*

В прямоугольной области $\Omega_a = \{x, y| -1 < x < 1,\ -a < y < a,\ 0 < a = \mathrm{const} \leq 1\}$ с границей $\partial\Omega_a$ мы изучаем спектральную задачу:

$$\Delta^2 w = \lambda^2(-\Delta w),\ (x, y) \in \Omega_a, \tag{1}$$

$$w = 0,\ \partial_{\vec{n}} w = 0,\ (x, y) \in \partial\Omega_a, \tag{2}$$

где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ – оператор Лапласа, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_a$, исключая вершины прямоугольника Ω_a.

Во-1-х, мы рассматриваем случай квадратной области Ω_1, т.е. $a = 1$. В этом случае задача (1)–(2) была предметом изучения работ [1, 2], а также монографий [3, 4]. Она названа задачей исследования колебаний изгибов зажатой квадратной пластины, в отличие от задачи для закрепленной пластины, где второе условие в (2) заменяется на следующее:

$$\Delta w = 0,\ (x, y) \in \partial\Omega_1, \tag{3}$$

и последняя названа базовой спектральной задачей. Спектр базовой задачи дает нижнюю оценку собственных значений исходной задачи, которая, вообще говоря, может быть и достаточно грубой. Для улучшения этой оценки используется семейство специальных промежуточных задач, получаемых последовательным "усилением" условий (3) и получением условий, аппроксимирующих второе условие из (2). Этот подход называют методом промежуточных задач Ароншайна-Вайнштейна [3, 4]. Отметим, что в работах [3, 4] также отмечается важность задачи (1)–(2) для строительной механики, механики судостроения и т.д.

Мы пришли к задаче (1)–(2) (в точности, не проводя никаких искусственных преобразований), изучая вопросы численного решения прямых и обратных задач для линеаризованного двумерного уравнения Навье-Стокса. При этом мы использовали известное (для двумерного случая) понятие функции тока.

Ранее, спектральная задача (1)–(2) была нами изучена в работе [5] для случая, когда область Ω представляет собой круг с единичным радиусом.

Замечание. В ([3], глава VII, п. 2) указано следующее: "Если зажатая пластина имеет форму квадрата или любую другую форму, отличную от круга, то" ... собственные значения ... "нельзя выразить точно через элементарные или протабулированные специальные функции."

Для формулировки базовой задачи мы будем заменять вторые граничные условия из (2) только частично. А, именно, вместо условий (2) будем иметь

$$\begin{cases} w(-1, y) = \partial_x w(-1, y) = w(1, y) = \partial_x w(1, y) = 0, \\ w(x, -1) = \partial_y^2 w(x, -1) = w(x, 1) = \partial_y^2 w(x, 1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Во-2-х, отдельно рассматривается случай $a \neq 1$, т.е. когда область Ω_a является прямоугольником. Отмечаются отличия нижних оценок собственных значений задачи (1)–(2) с помощью промежуточных спектральных задач как в соответствии с формулами (3), так и – с формулами (6).

Funding: Авторы были поддержаны грантом BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: спектральная задача, бигармонический оператор, прямоугольная область, промежуточная задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 35R30, 65N21

Литература

[1] Weinstein A. *Étude des spectres des equations aux dérivées partielles de la théoriè des plaques élastiques.* Mém. des Sciences math., facs. 88. Thèses de l´entre-deux-guerres, Gauthier-Villars, Paris (1937), 1–63.

[2] Aronszajn N. Rayleigh-Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues. I, II, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **34** (1943), 474–480, 594–601.

[3] Gould S.H. *Variational Methods for Eigenvalue Problems. An Introduction to the Weinstein Method of Intermediate Problems*, 2nd edition, University of Toronto Press, London: Oxford University Press (1966). XVI+275 p.

[4] Weinstein A., Stenger W. *Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues. Theory and Ramifications*, Academic Press, New York – London (1972). XII+236 p.

[5] Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Yergaliyev M.G. On the numerical solution of one inverse problem for a linearized two-dimensional system of Navier-Stokes equations, *Opuscula Math.*, **42**:5 (2022), 711–727.

Неравенства типа Гальярдо–Ниренберга для пространств типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля на многомерном торе, связанных с пространствами Морри

Айзере ЖАНАБИЛОВА

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: zh.aizere2001@gmail.com

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ такая,что $\psi(x) = 1$, если $|x|_\infty \le 1, \psi(x) = 0$, если $|x|_\infty \ge 3/2$. (Здесь $|x|_\infty = \max\{|x_\kappa| \ : \ \kappa = 1, \dots, d\}, x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$)

Положим $\varphi_0 \ := \psi, \ \ \varphi(x) := \varphi_0(\frac{x}{2}) - \varphi_0(x), \varphi_j(x) := \varphi(2^{1-j}x), \varphi_{-j} \equiv 0, \ j = 1, 2, \ \dots$. Тогда $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}^d$.

Пусть $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца умеренных распределений, а $\widetilde{\mathcal{S}'} := \mathcal{S}'(\mathbb{T}^d)$ — подпространство $\mathcal{S}'$ распределений, 1-периодических по каждой переменной; $\hat{f} := \mathcal{F}(f)$ — преобразование Фурье распределения $f \in \mathcal{S}'$.

При $0 < p, q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $0 \le \tau \le 1/p$

$$\tilde{B}_{p,q}^{s,\tau} := B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in \tilde{S}' : \left\| f \middle| \tilde{B}_{p,q}^{s,\tau} \right\| < \infty \right\}$$

— гладкостное пространство типа Никольского–Бесова на торе $\mathbb{T}^d$, ассоциированное с пространством Морри, где

$$\left\| f \middle| \tilde{B}_{p,q}^{s,\tau} \right\| = \sup_{Q \in \tilde{\mathfrak{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \left\{ \sum_{j=j(Q)}^{\infty} \left[\int_Q 2^{jsp} |\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \varphi_j(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}|^p dx \right]^{\frac{q}{p}} \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

При $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $0 \le \tau \le 1/p$

$$\tilde{F}_{p,q}^{s,\tau} := F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in \tilde{S}' : \left\| f \middle| \tilde{F}_{p,q}^{s,\tau} \right\| < \infty \right\}$$

— гладкостное пространство типа Лизоркина-Трибеля на торе $\mathbb{T}^d$, асоциированное с пространством Морри, где

$$\left\| f \middle| \tilde{F}_{p,q}^{s,\tau} \right\| = \sup_{Q \in \tilde{\mathfrak{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \left\{ \int_Q \left[\sum_{j=j(Q)}^{\infty} 2^{jsp} |\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \varphi_j(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}|^q \right]^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

(Естественная модификация при $p = \infty$ и/или $q = \infty$.) Здесь $\mathfrak{Q}$ — множество всех диадических кубов $Q := Q_{j\lambda} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid 2^j x - \lambda \in [0,\ 1)^d\},\ j \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{Z}^d$; $l(Q) = 2^{-j}$ — длина ребра куба $Q := Q_{j\lambda}$, $j(Q) = -\log_2 l(Q)$; $\widetilde{\mathfrak{Q}}$ — множество всех диадических кубов $Q \subset [0,\ 1)^d$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < q, q_0, q_1 \leq \infty,\ -\infty < s_0 < s_1 < \infty,\ \tau_0, \tau_1 \geq 0,\ 0 < \theta < 1$.

(i) Пусть $0 < p_0, p_1 < \infty$. *Положим*

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \tau := (1-\theta)\tau_0 + \theta\tau_1, \quad s := (1-\theta)s_0 + \theta s_1.$$

Тогда существует положительная константа C *такая, что неравенство*

$$\left\| f \middle| \tilde{F}^{s,\tau}_{p,q} \right\| \leq C \left\| f \middle| \tilde{F}^{s_0,\tau_0}_{p_0,q_0} \right\|^{1-\theta} \left\| f \middle| \tilde{F}^{s_1,\tau_1}_{p_1,q_1} \right\|^{\theta}$$

выполняется для всех $f \in S'\left(\mathbb{T}^d\right)$.

(ii) Пусть $0 < p_0 < \infty$. *Положим*

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0}, \quad \tau := (1-\theta)\tau_0 + \theta\tau_1, \quad s := (1-\theta)s_0 + \theta s_1.$$

Тогда существует положительная константа C *такая, что неравенство*

$$\left\| f \middle| \tilde{F}^{s,\tau}_{p,q} \right\| \leq C \left\| f \middle| \tilde{F}^{s_0,\tau_0}_{p_0,q_0} \right\|^{1-\theta} \left\| f \middle| \tilde{B}^{s_1,\tau_1}_{\infty,\infty} \right\|^{\theta}$$

выполняется для всех $f \in S'\left(\mathbb{T}^d\right)$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < q, q_0, q_1 \leq \infty,\ -\infty < s_0 < s_1 < \infty,\ \tau_0, \tau_1 \geq 0,\ 0 < \theta < 1,\ 0 < p_0, p_1 < \infty$. *Пусть далее* p, τ *и* s *как в теореме 1 и*

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Тогда существует положительная константа C *такая, что неравенство*

$$\left\| f \middle| \tilde{B}^{s,\tau}_{p,q} \right\| \leq C \left\| f \middle| \tilde{B}^{s_0,\tau_0}_{p_0,q_0} \right\|^{1-\theta} \left\| f \middle| \tilde{B}^{s_1,\tau_1}_{p_1,q_1} \right\|^{\theta}$$

справедливо для всех $f \in S'\left(\mathbb{T}^d\right)$.

Funding: Автор была поддержана грантом AP09258831 МОН РК.

Ключевые слова: пространство типа Никольского–Бесова/Лизоркина–Трибеля, пространство Морри, неравенство типа Гальярдо–Ниренберга.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E35

Литература

[1] Sickel W. Smoothness spaces related to Morrey spaces – a survey. I , Eurasian Math. J. 3 (2012), No 3, 110–149

Изучение задач многопериодических решений методом периодических характеристик матричного оператора дифференцирования двумерных линейных систем

Амире ЖУМАГАЗИЕВ[a], Жайшылык САРТАБАНОВ[b]

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail: [a]charmeda@mail.ru, [b]sartabanov42@mail.ru

Рассмотрим двумерную линейную систему

$$D^0x = B^0x + f^0(\tau, t) \tag{1}$$

с матричным оператором дифференцирования $D^0 = E\frac{\partial}{\partial\tau} + A^0\frac{\partial}{\partial t}$ по $(\tau, t) \in R \times R$, $R = (-\infty, +\infty)$, где E – единичная матрица второго порядка, A^0 и B^0 – постоянные 2×2-матрицы, $f^0(\tau, t) = (f_1^0(\tau, t), f_2^0(\tau, t))$ – вектор-функция переменных $(\tau, t) \in R \times R$ гладкости степени $(1, 1)$ и периода (θ, ω) по (τ, t):

$$f^0(\tau + \theta, t + \omega) = f^0(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{(1,1)}(R \times R).$$

Выбрав матрицу K, приводящую матрицу A^0 к жордановой форме J, вводим в системе (1) замену

$$x = Ky$$

и получим новую систему

$$Dy = By + f(\tau, t) \tag{2}$$

с матричным оператором дифференцирования $D = E\frac{\partial}{\partial\tau} + J\frac{\partial}{\partial t}$ и с входными данными

$$J = K^{-1}AK, \quad B = K^{-1}B^0K, \quad f(\tau, t) = K^{-1}f^0(\tau, t).$$

Предположим, что система (1) узкогиперболическая, следовательно,

$$J = diag[\lambda_1, \lambda_2], \quad \lambda_j \in R, \quad j = 1, 2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{3}$$

В связи с условием (3) переменной t соответствуют две характеристики. Следовательно, оператор D имеет двумерную характеристическую систему уравнений

$$\frac{dt_j}{d\tau} = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \quad t_1 = t_2 = t,$$

каждое из которых рассмотрим на бесконечной цилиндрической поверхности, образованной прямым произведением $R \times S_\theta$, где $\tau \in R$, $t = t_j \in S_\theta$, $j = 1, 2$. При этом имеем характеристики

$$t_j = t_j^0 + \lambda_j s\left(\tau - \tau^0\right) \equiv \beta_j\left(\tau, \tau^0, t_j^0\right), j = 1, 2,$$

где $s(\tau) = \theta\{\theta^{-1}\tau\}$, $\{\tau\}$ – означает дробную часть $\tau \in R$ и обладает свойствами

$$\frac{ds(\tau)}{d\tau} = 1, \quad s(\tau + \theta) = s(\tau), \quad (\tau, s(\tau)) \in R \times S_\theta.$$

Ставим задачу об установлении условий существования многопериодических решений периода (θ, ω) однородной линейной системы

$$Dy = By \tag{4}$$

и неоднородной системы (2) методом работы [1].

Предположим, что $B = B(\tau, t_1, t_2)$ и $f(\tau, t) = \varphi(\tau, t_1, t_2)$ являются (θ, ω, ω)-периодическими гладкими матрично-векторными функциями. Далее, вводим оператор проектирования P для управления переменными t_1 и t_2, так, чтобы при произведении матриц и их композиции с вектор-функцией в каждой системе стояла своя переменная. Затем, строим матрицант $U(\tau, t_1, t_2)$ системы (4):

$$DU(\tau, t_1, t_2) = B(\tau, t_1, t_2)U(\tau, t_1, t_2), \quad U(0, t_1, t_2) = E.$$

Таким образом, доказаны нижеследующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы однородная система допускала (θ, ω, ω)-периодические по (τ, t_1, t_2) решения, необходимо и достаточно, чтобы система*

$$[U(\theta, t_1, t_2) - E]\, u(t_1, t_2) = 0 \tag{5}$$

допускала (ω, ω)-периодические гладкие по (t_1, t_2) собственные функции $u(t_1, t_2)$.

Теорема 2. *Если система (5) имеет только нулевое (θ, ω, ω)-периодическое решение, то неоднородная система (2) допускает единственное (θ, ω, ω)-периодическое решение.*

В некритическом случае при $B = const$ аналоги этих теорем доказаны в [1].

Данная работа представляет обобщение этих результатов на общий случай, которые получены новым подходом, основанном на периодических характеристиках оператора D.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, узкогиперболическое уравнение, периодическая характеристика, многопериодичность.

2010 Mathematics Subject Classification: 35B10, 35E15, 35F35, 35L02, 32W99.

Литература

[1] Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Y.T. On a New Method for Investigation of Multiperiodic Solutions of Quasilinear Strictly Hyperbolic System, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **1**:12 (2022), 32–48.

Задача со смещением для модельного уравнения смешанного типа в области эллиптическая часть которой горизонтальная полоса

Р. ЗУННУНОВ[1,a], D. JUNG[1,2,b]

[1] *Институт математики им. В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан*

[2] *Tashkent International School,Ташкент, Узбекистан*

E-mail: [a]*r.zunnunov@mathinst.uz*, [b]*dana26688@gmail.com*

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, m = const > 0 \tag{12}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x, y) :\ -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$, а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB прямой $y = 0$ и характеристиками

$$AC :\ x - [2/(m + 2)]\,(-y)^{(m+2)/2} = 0, BC :\ x + [2/(m + 2)]\,(-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0)$, $B\,(1, 0)$. Введем обозначения

$$\beta = m/\,(2m + 4)\,,\ \ l_0 = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}, l_1 = \{(x, y) : -\infty < x < 0,\ y = 0\}$$

$$l_2 = \{(x, y) : 1 < x < +\infty,\ y = 0\}, l_3 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty,\ y = 0\}$$

$$\theta_0(x)=\left(\frac{x}{2},-\left[\frac{m+2}{2}\cdot\frac{x}{2}\right]^{\frac{2}{m+2}}\right),\ \ \theta_1(x)=\left(\frac{1+x}{2},-\left[\frac{m+2}{2}\cdot\frac{1-x}{2}\right]^{\frac{2}{m+2}}\right).$$

Здесь $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ есть точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)\in l$, с характеристиками AC и BC соответственно.

Задача TS. Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\Omega\cup\overline{l_1}\cup\overline{l_2}\cup AC\cup BC)\cap C^1(\Omega\cup l_1\cup l_2)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$, причем $u_y(x,0)$ при $x=0$ и $x=1$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2;

3) удовлетворяет условиям

$$u_y(x,0)=\psi_i(x),\forall x\in l_i,(i=1,2)$$

$$u(x,1)=\psi_3(x),\forall x\in l_3$$

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x,y)=0,\ \text{равномерно по}\ \ y\in[0,1]$$

$$a(x)\left\{D_{0x}^{1-\beta}\left[u(\theta_0(x))\right]\right\}+b(x)\left\{D_{x1}^{1-\beta}\left[u(\theta_1(x))\right]\right\}+$$

$$+c(x)u_y(x,0)+g(x)u(x,0)=d(x),\quad \forall x\in l,$$

где $\psi_i(x)$,$\psi_3(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $g(x)$, $d(x)$ - заданные функции, причем $a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)+g^2(x)\neq 0$, $\forall x\in\bar{l}$; $a(x),b(x),c(x),g(x),d(x)\in C^1\left(\bar{l}\right)$; $\psi_i(x)\in C(l_i)$ и при $x=0$, $x=1$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ а для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенствам

$$|\psi_i(x)|\leq M_1|x|^{-1-\sigma},M_1,\sigma=const,\sigma>0$$

Кроме этого $\psi_3(x)\in C(l_3)$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяет неравенству

$$|\psi_3(x)|\leq M_2|x|^{-\epsilon},M_2,\epsilon=const,\epsilon>0$$

а $D_{0x}^{\alpha}[f(x)]$ и $D_{x1}^{\gamma}[f(x)]$ — операторы дробного в смысле Римана-Лиувилля интегро-дифференцирования [1].

В ограниченной и неограниченной областях вопросы однозначной разрешимости задачи TS при выполнении условий $c(x)=g(x)=0$, исследовались в работах [2,3]. В случае когда $c(x)=g(x)\neq 0$ эллиптическая часть является верхней полуплоскостью и исследовано в работе [4]. В данной статье , исследуется вопрос однозначной разрешимости задачи со смещением в неограниченной области эллиптическая часть которой является горизонтальной полосой. При ограничениях неравенственного типа на известные функции методом интегралов энергии доказана теорема единственности. Методом функций Грина и путем редукции к уравнению Фредгольма второго рода устанавливается существование решения исследуемой задачи, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

Ключевые слова:задача со смещением, модельное уравнение смешанного типа, горизонтальная полоса, метод интегралов энергии, метод функций Грина, теория интегральных уравнений.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10

Литература

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника.-1987.*

[2] Кумыкова С.К. Об одной задаче с нелокальными краевыми условиями на характеристике для уравнения смешанного типа, *Дифференциальные уравнения* . 1 (1974) 78-88.

[3] Денисова З.Г. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения в неограниченной области *Дифференциальные уравнения* 1 (1978) 170-173.

[4] Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области *Дифференциальные уравнения* 8 (2012) 1140-1149.

Свойства решетки геометрических трипотентов в нейтральном SFS-пространстве

Мухтар ИБРАГИМОВ[1,a], Сарсенбай ТЛЕУМУРАТОВ[2,b]

[1] *Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан*
[2] *Нукусский горный институт, Нукус, Узбекистан*
E-mail: [a]mukhtar-i@bk.ru, [b]sarsenbay-2011@mail.ru

Граневo симметричные пространства впервые введены и исследованы Я.Фридманом и Б.Руссо в работах [1-4] как геометрическая модель квантовой механики. Основной целью проекта исследования этих пространств было геометрическая характеризация пространств состоянии операторных алгебр, точнее предсопряженных пространств JBW^*-троек, допускающих алгебраическую структуру. Мы в этой работе используем понятия, терминологии и обозначения из этих работ. В [2, Предложение 4.5] доказано, что для любого фиксированного геометрического трипотента ω в нейтральном сильно гранево симметричном пространстве (SFS-пространстве) Z множество $L_\omega := \{v \in GU : v \le \omega\} \cup \{0\}$ является полной ортомодулярной решеткой с наименьшим элементом 0, наибольшим элементом ω и ортодополнением $v \mapsto v^\perp = \omega - v$. В работе [5], когда существует геометрический трипотент e для которого $Z_2(e) = Z$ и L_e является булевой алгеброй, нами дано описание сильно гранево симметричным пространствам, которые изометрически изоморфны к предсопряженному пространству атомичной коммутативной алгебры фон Неймана. А в работе [6] для геометрического трипотента e для которого $Z_1 = co(F_e \bigcup F_{-e})$ и когда L_e является булевой алгеброй, дано описание сильно гранево симметричным пространствам, которые изометрически изоморфны L_1-пространству. При получении этих описании ключевое место играет предположение, что L_e является булевой алгеброй. Поэтому очень важно найти условия, при которых L_ω является булевой алгеброй. В этой работе мы привели эти условия в нейтральном SFS-пространстве.

Предварительные сведения

Пусть Z действительное или комплексное нормированное пространство. Элементы $f, g \in Z$ называются взаимно ортогональными, если $\|f+g\| = \|f-g\| = \|f\|+\|g\|$. Взаимно ортогональность элементов $f, g \in Z$ обозначается в виде $f \diamond g$. По норме выставленной гранью единичного шара Z_1 пространства Z является не пустое множество (обязательно $\neq Z_1$) имеющий вид $F_x = \{f \in Z_1 : f(x) = 1\}$, где $x \in Z^*, \|x\| = 1$. Для любого подмножества $S \subset Z$ положим $S^\diamond = \{f \in Z : f \diamond g, \forall g \in S\}$ и назовем $S^\diamond$ ортогональным дополнением к S. Элемент $u \in Z^*$ называется проективной единицей, если $\|u\| = 1$ и $\langle u, F_u^\diamond \rangle = 0$.

Определим симметричную грань как выставленную по норме грань F в Z_1 с следующим свойством: существует линейная изометрия S_F из Z на Z, с $S_F^2 = I$ (мы называем такое отображение симметрией), такая, что множество неподвижных точек S_F является $\overline{sp}F \bigoplus F^\diamond$.

Определение 1. *Действительное или комплексное нормированное пространство Z называется слабо гранево симметричным пространством (WFS-пространством), если каждая по норме выставленная грань Z_1 является симметричной.*

Геометрическим трипотентом называется проективная единица $u \in Z^*$ со свойством, что $F := F_u$ является симметричной гранью и $S_F^* u = u$ для некоторой симметрии S_F соответствующей F. Через SF и GU обозначаем множества всех симметричных граней Z_1

и геометрических трипотентов в Z_1^*, соответственно. Для $u, v \in GU$ будем писать $u \leq v$, если $F_u \subset F_v$.

На WFS — пространстве Z по каждой симметричной грани F_u определяются обобщенные Пирсовские проекторы $P_k(u), k = \{0, 1, 2\}$, следующим образом:

$$P_1(u) = \frac{1}{2}(I - S_{F_u}), P_1(u)(Z) = \{f \in Z : S_u f = -f\}$$

$P_0(u)$ и $P_2(u)$ проектируют Z на $F_u^\diamond$ и $\overline{sp} F_u$, соответственно. Для удобства введем следующие обозначения: $P_k(u)(Z) = Z_k(u), Z_k^*(u) = U_k(u), S_{F_u} = S_u$, где $k \in \{1, 2, 3\}$.

Геометрический трипотент u называется минимальным, если $dim U_2(u) = I$. Через M обозначим множество всех минимальных геометрических трипотентов. Геометрический трипотент u называется неразложимым, если для $v \in GU$ из $v \leq u$, вытекает $v = u$. Через I обозначим множество всех неразложимых геометрических трипотентов. Так как, каждый минимальный геометрический трипотент является неразложимым, то $M \subset I$. Сжимающий проектор Q на нормированном пространстве Z называется нейтральным, если для любого $f \in Z$ из $\|Qf\| = \|f\|$ вытекает $Qf = f$.

Нормированное пространство Z называется нейтральным, если для каждой симметричной грани F_u соответствующий проектор $P_2(u)$ является нейтральным. Если симметричная грань F состоит из одной точки, то ее будем называть выставленной по норме точкой.

Определение 2. *WFS-пространство Z называется сильно гранево симметричным пространством (SFS- пространством), если для каждой симметричной грани F_u из Z_1 и каждого $v \in Z^*$ с $\|v\| = 1$ и $F_u \subset F_v$ и имеем $S_u^* v = v$, где S_u — симметрия, соответствующая F_u.*

Пусть Z — сильно гранево симметричное пространство и $u, w \in GU$. Если $u \leq w$ и $u \neq w$, то из [2, Лемма 4.2] вытекает, что $(w - u) \in GU$ и $(w - u) \diamond u$. В этом случае геометрический трипотент $w - u$ называется ортогональным дополнением u и обозначается $u^\perp$.

Основной результат

Напомним [5], что грань F выпуклого множества K называется расщепленной гранью, если существует грань G , называемая дополнительной к F , такая, что $F \cap G = \emptyset$ и K прямая выпуклая сумма $F \bigoplus_C G$, т.е. любой элемент $f \in K$ может быть однозначно представлен в виде $f = tg + (1-t)h$, где $t \in [0; 1]$, $g \in F$, $h \in G$. Теперь приведем некоторые сведение из теории решеток, необходимых для изложения результатов. В ортомодулярной решетке L скажем, что элемент a коммутирует с эементом b, если $b = (a \wedge b) \vee (\acute{a} \wedge b)$, где $\acute{a}$ является ортодополнением a. В $L_\omega := \{v \in GU : v \leq \omega\} \cup \{0\}$ (см. [2, Предложение 4.5]) $\acute{a}$ совпадает с $a^\perp$.

Теорема (Фоули-Холланда). *Если в ортомодулярной решетке L один из элементов a, b или c коммутирует двумя другими, то*

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

и

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

где $\{x, y, z\} = \{a, b, c\}$.

Теорема. *Пусть Z нейтральное SFS — пространство и $\omega \in GU$. Предположим, что для любого $u \in L_\omega$ симметричная грань F_u единичного шара Z_1 является расщепляемой относительно $F_{u^\perp}$, т.е. выполняется равенство*

$$F_\omega = F_u \bigoplus_C F_{u^\perp}$$

.

Тогда L_ω является булевой алгеброй.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующее леммы.

Лемма 1. *Пусть Z нейтральное SFS — пространство и $\omega \in GU$. Если для $u \in L_\omega$ симметричная грань F_u единичного шара Z_1 является расщепляемой относительно $F_{u^\perp}$, т.е. $F_\omega = F_u \bigoplus_C F_{u^\perp}$,* то для любого $x \in L_\omega$ выполняется только один из следующих случаев:

(i) $x \leq u$;;

(ii) $x \leq u^\perp$;

(iii) $x \wedge u \neq 0$ и $x \wedge u^\perp \neq 0$.

Лемма 2. *Пусть Z нейтральное SFS — пространство и $\omega \in GU$. Предположим, что для любого $u \in L_\omega$ симметричная грань F_u единичного шара Z_1 является расщепляемой относительно $F_{u^\perp}$. Тогда любые два элементы x и y решетки L_ω взаимно коммутирует, т.е. выполняется следующие равенства:*

(a) $y = (x \wedge y) \vee (x^\perp \vee y)$;

(b) $x = (y \wedge x) \vee (y^\perp \wedge x)$.

Ключевые слова: нейтральное SFS — пространство, расщепляемая грань, булева алгебра.

Литература

[1] Friedman Y. and Russo B. A geometric spectral theorem, *Quart. J. Math. Oxford.*, **1986**, Vol. 37.(2), pp. 263-277.

[2] Friedman Y. and Russo B. Affine structure of facially symmetric spaces, *Math.Proc.Cambridge Philos. Soc.*, **1989**, 106, pp. 107-124..

[3] Friedman Y. and Russo B. Geometry of the Dual ball of the Spin Factor, *Proc.Lon.Math. Soc.*, **1992**,65., pp. 142-174.

[4] Friedman Y. and Russo B. Classification of atomic facially symmetric spaces, *Canad. J.Math.*, **1993**, pp. 65., 33-87..

[5] Hanche-Olsen H. Split faces and structure of operator algebras.*Math. Scand.*,**48**, 1981, pp. 137-144.

[6] Grown G. A note on distributive sublattices of an orthomodular lattice, *J.Natur. Sei.and Math.* **16**, 1976, pp. 75-80.

О квадратичной близости собственных функций «невозмущенного» и «возмущенного» операторов дифференцирования на отрезке

Нурлан ИМАНБАЕВ[1,2]

[1] *Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, Шымкент, Казахстан*
[2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

В функциональном пространстве $W_2^1(-1,1)$ рассматривается задача на собственные значения оператора дифференцирования на отрезке

$$L_1 y = y'(t) = \lambda y(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \tag{1}$$

$$y(-1) - y(1) = \lambda \int_{-1}^{1} \Phi(t) y(t) dt, \tag{2}$$

где $\Phi(t)$ - функция ограниченной вариации и $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$, λ - комплексное число, спектральный параметр.

Сопряженная задача.

$$L_1^* v = v'(t) + \vec{\lambda}\Phi(t)v(-1) = \vec{\lambda} v(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \tag{1*}$$

с краевым условием

$$v(-1) = v(1), \tag{2*}$$

то есть нагруженный оператор дифференцирования.

В случае, когда $\Phi(t) = 0$, имеем «невозмущённую» спектральную задачу:

$$L_0 y = y'(t) = \lambda y(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad y(-1) = y(1). \tag{3}$$

Числа $\lambda_k^0 = ik\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ являются собственными значениями, при этом $\forall C > 0$, $y_{k_0}^0 = C \cdot e^{ik\pi t}$ - собственные функции «невозмущённого» оператора L_0, которые образуют полную ортонормированную систему и базис Рисса в пространстве $L_2(-1,1)$. При $\lambda = 0$, $y(t) = C \neq 0$ является собственным значением и собственной функцией оператора L_1.

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\Phi(t)$ - функция ограниченной вариации и $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$. Тогда все собственные значения «возмущённых» операторов L_1 и L_1^* принадлежат полосе $|Re\lambda| = x < k^1$ при некотором k^1, образуют счётное множество и имеют асимптотику $\lambda_k^{(1)} = ik\pi + \underline{\underline{O}}(1)$. При $k \to \infty$, соответствующие собственные функции $y_k^{(1)}(t) \approx C \cdot e^{ik\pi t} \cdot e^{\varepsilon t}$ при $k \to \infty$, $\varepsilon \approx \underline{\underline{O}}(1)$, $\forall C > 0$.*

В настоящей заметке доказывается, что системы $\left\{y_{k_0}^0(t)\right\}$ и $\left\{y_k^1(t)\right\}$ – квадратично близкие в $L_2(-1,1)$.

Лемма. *Система $\{y_k^1(t)\}$, следовательно и система $\{v_k^1(t)\}$ образуют базис Рисса в пространстве $L_2(-1,1)$, но не являются ортонормированными.*

Замечание. *В качестве примера в частном случае можно взять $\Phi(t) = \cos 2\pi t$, $\cos 2\pi = \cos(-2\pi) = 1$.*

Funding: Автор поддержан грантом AP09260752.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, собственные функции, собственные значения, сопряженная задача, квадратичная близость.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B09, 34L10, 34L15

Литература

[1] Иманбаев Н.С. О нелокальном возмущении задачи на собственные значения оператора дифференцирования на отрезке, *Вест. Удмуртского унив. – Математика.* , **31**:2 (2021), 186–193.

Обратная задача для возмущенного уравнения четвертого порядка с инволюцией

Асельхан ИМАНБЕТОВА[a], Болат СЕЙЛБЕКОВ[b]

Южно-Казахстанский университет им.М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан
E-mail: [a]aselek_enu@mail.ru, [b]bolat_3084@mail.ru

Для одномерного возмущенного уравнения четвертого порядка с инволюцией

$$u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + \alpha \cdot u_{xxxx}(-x,t) = f(x) \tag{1}$$

в прямоугольной области $(x,t) \in \Omega = \{-1 < x < 1,\ 0 < t < T\}$, рассмотрим задачу нахождения пары функции $u(x,t), f(x)$, удовлетворяющих уравнению (1). При этом функция $u(x,t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), u(x,T) = \psi(x), u_t(x,0) = 0, \in [-1,1],$$

и краевым условиям условиям типа Дирехле

$$u(-1,t) = 0, (1,t) = 0, u_{xx}(-1,t) = 0, u_{xx}(1,t) = 0, t \in [0,T],$$

где $-1 < \alpha < 1$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданные достаточно гладкие функции.
С помощью метода Фурье доказано существование и единственность решения обратной задачи.

Теорема. Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^6[-1,1]$, $\varphi^{VI}(x)$, $\psi^{VI}(x) \in L_2(-1,1)$, $\cos\sqrt{1+\alpha}\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)^2 T \leq \delta_0 < 1$, $\cos\sqrt{1-\alpha}(\pi k)^2 T \leq \delta_1 < 1$, $k \in N$ и $\frac{d^j\varphi(\mp 1)}{dx^j} = 0$, $\frac{d^j\psi(\mp 1)}{dx^j} = 0$, $j = 0,2,4$. Тогда существует единственное решение обратной задачи, которое можно записать в виде

$$u(x,t)=\varphi(x)+\frac{1}{\pi^6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{1+\alpha}\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)^2 t}{1-\cos\sqrt{1+\alpha}\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)^2 T}\frac{\varphi_{k1}^{(6)}-\psi_{k1}^{(6)}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^6}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x$$

$$+\frac{1}{\pi^6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{1-\alpha}(\pi k)^2 t}{1-\cos\sqrt{1-\alpha}(\pi k)^2 T}\frac{\varphi_{k2}^{(6)}-\psi_{k2}^{(6)}}{k^6}\sin\pi kx,$$

и

$$f(x)=\varphi^{IV}(x)+\alpha\cdot\varphi^{IV}(-x)+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{k1}^{(6)}-\psi_{k1}^{(6)}}{1-\cos\sqrt{1+\alpha}\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)^2 T}\frac{1+\alpha}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{k2}^{(6)}-\psi_{k2}^{(6)}}{1-\cos\sqrt{1-\alpha}(\pi k)^2 T}\frac{1-\alpha}{k^2}\sin\pi kx,$$

где

$$\varphi_{k1}^{(6)}=\int_{-1}^{1}\varphi^{VI}(x)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x dx,\quad \varphi_{k2}^{(6)}=\int_{-1}^{1}\varphi^{VI}(x)\sin\pi kx dx,$$

$$\psi_{k1}^{(6)}=\int_{-1}^{1}\psi^{VI}(x)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x dx,\quad \psi_{k2}^{(6)}=\int_{-1}^{1}\psi^{VI}(x)\sin\pi kx dx.$$

Прямые задачи для возмущенного уравнения четвертого порядка с инволюцией были рассмотрены в работе [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МНиВО РК (грант AP13068539).

Литература

[1] Kirane M„ Sarsenbi, AA, Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative, *Fractal and Fractional.*, **7(2): 131**:2023 (год). https://doi.org/10.3390/fractalfract7020131

Краевая задача для уравнения с дробной производной, имеющее две линии вырождения

Бахром ИРГАШЕВ

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
Институт Математики им.В.И.Романовского АН РУз
E-mail: bahromirgasev@gmail.com

В области $\Omega=\Omega_x\times\Omega_y$, $\Omega_x=\{x:\ 0<x<1\}$, $\Omega_y=\{y:\ 0<y<1\}$, рассмотрим уравнение

$$(-1)^{k+1}D_{0x}^{\alpha}u(x,y)-x^s y^m\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}=0, \tag{1}$$

где $0<\alpha<1$, $0\leq m<k$, $0\leq s$, $s,k\in R$, $D_{0x}^{\alpha}-$ оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка α

$$D_{0x}^{\alpha}u(x,y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial x}\int_{0}^{x}\frac{u(\tau,y)\,d\tau}{(x-\tau)^{\alpha}}.$$

Для уравнения (1) рассмотрим задачу.

Задача A. Найти решение уравнения (1) из класса

$$D_{0x}^{\alpha}u\left(x,y\right)\in C\left(\Omega\right),\ x^{1-\alpha}u\left(x,y\right)\in C\left(\bar{\Omega}_x\times\Omega_y\right),$$

$$\frac{\partial^{k-1}u\left(x,y\right)}{\partial y^{k-1}}\in C\left(\Omega_x\times\bar{\Omega}_y\right),\ \frac{\partial^{2k}u\left(x,y\right)}{\partial y^{2k}}\in C\left(\Omega_x\times\Omega_y\right),$$

удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial^j u\left(x,0\right)}{\partial y^j}=\frac{\partial^j u\left(x,1\right)}{\partial y^j}=0,\ \ 0<x\leq 1,\ j=0,1,...,k-1,$$

$$\lim_{x\to 0}D_{0x}^{\alpha-1}u\left(x,y\right)=\varphi\left(y\right),$$

здесь функция $\varphi\left(y\right)$ – достаточно гладкая и удовлетворяет естественным условиям согласования.

Справедлива следующая теорема существования.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi\left(y\right)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi\left(y\right)\in C^{2k}\left[0,1\right],\ \ \varphi^{(j)}\left(0\right)=\varphi^{(j)}\left(1\right)=0,$$

$$\left(y^m\varphi^{(2k)}\left(y\right)\right)^{(j)}\left(0\right)=\left(y^m\varphi^{(2k)}\left(y\right)\right)^{(j)}\left(1\right)=0,\ y^m\varphi^{(2k)}\left(y\right)\in C^{2k}\left[0,1\right],\ j=0,1,...,k-1.$$

Тогда решение задачи A существует в виде следующего ряда:

$$u\left(x,y\right)=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}}\left(-\lambda x^{\alpha+s}\right)Y_k\left(y\right),$$

здесь $Y_k\left(y\right)$ - собственные функции задачи

$$\left\{\begin{array}{l} Y^{(2k)}(y)=(-1)^k\lambda y^{-m}Y(y),\\ Y^{(j)}(0)=Y^{(j)}\left(1\right)=0,\ j=0,1,...,k-1,\end{array}\right.$$

$$\varphi_k=\int\limits_0^1\varphi\left(y\right)y^{-m}Y_k\left(y\right)dy,$$

$$E_{\alpha,m,l}\left(t\right)=\sum_{i=0}^{\infty}t^i\prod_{j=0}^{i}\frac{\Gamma\left(\alpha\left(jm+l\right)+1\right)}{\Gamma\left(\alpha\left(jm+l+1\right)+1\right)},\ c_0=1$$

- функция Килбаса-Сайго [1].

Единственность поставленной задачи показывается спектральным методом.

Отметим, что аналогичная задача для уравнения второго порядка с одной линией вырождения рассматривалась в работе [2].

Ключевые слова: уравнение, четный порядок , дробная производная, краевая задача, собственное значение, собственная функция, ряд, сходимость, существование, единственность.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G31

Литература

[1] Kilbas A.A., Saigo M. On solution of integral equations of Abel-Volterra type, *Differ.Integral Equ.*, **5**:8 (1995), 993–1011. [2] Smadiyeva A.G. Well-posedness of the initial-boundary value problems for the time-fractional degenerate diffusion equations, *Bulletin of the Karaganda University.Mathematics series.*, **107**:3 (2022), 145–151.

Об одной обратной задаче типа Бицадзе-Самарского для дробного параболического уравнения с вырождением

Бахтиер КАДИРКУЛОВ[1,a], Окилжон ЭРГАШЕВ[2,b]

[1] *Ташкентский государственный университет востоковедения, Ташкент, Узбекистан*
[2] *Национальный исследовательский университет "ТИИИМСХ Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [a]kadirkulovbj@gmail.com, [b]okiljonergashev@gmail.com

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующую обратную задачу типа Бицадзе-Самарского:

Задача BS**.** Требуется найти пару функций $(u(x,t), g(x))$ из класса

$$u, {}_C D_{0t}^{\alpha} u, u_{xx} \in C(\overline{\Omega}), g(x) \in C[0,1],$$

удовлетворяющих в области Ω уравнению

$${}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = t^{\beta} u_{xx}(x,t) + g(x)$$

и условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), u(x,T) = \psi(x),\ 0 \le x \le 1,$$
$$u(0,t) = 0, u(1,t) = u(x_0,t),\ 0 \le t \le T.$$

Здесь ${}_C D_{0t}^{\alpha},\ 0 < \alpha \le 1$ - интегро-дифференциальный оператор Капуто [1], $\varphi(x), \psi(x)$ - заданные функции, $\beta \ge 0, 0 < x_0 < 1$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема:

Теорема. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi(x) \in C^4[0,1],\ \varphi(0) = \varphi''(0) = 0, \varphi^{(i)}(1) = \varphi^{(i)}(x_0), i = 0,2,$$

$$\psi(x) \in C^6[0,1],\ \psi(0) = \psi''(0) = 0, \psi^{(i)}(1) = \psi^{i}(x_0), i = 0,2,4.$$

Тогда задача BS имеет единственное решение.

Ключевые слова: обратная задача, оператор Капуто, параболическое уравнение дробного порядка, базис Рисса, сопряженная задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K65, 34R30, 34K37, 34L10

Литература

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier Science, Amsterdam (2006).

Спектральные свойства одномерного Ньютонового потенциала

Тынысбек КАЛЬМЕНОВ[a], А.КАДИРБЕК[b], А.КЫДЫРБАЙКЫЗЫ[c]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]kalmenov.t@mail.ru, [b]royale.ayan@gmail.com, [c]atirgul.kydyrbaykyzy@bk.ru

Рассмотрим одномерный Ньютоновой потенциал

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \big|x - t\big| f(t)dt, \quad x \in (0,1). \tag{1}$$

Непосредственном вычислением можно установить что $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$u''(x) = f(x)$$

и граничным условиям

$$N_1(u) = u'(0) + u'(1) = 0$$
$$N_2(u) = u'(1) - u(0) - u(1) = 0. \tag{2}$$

Поэтому спектральная задача для Ньютонового потенциала

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \big|x - t\big| e_k(t)dt = \frac{e_k(x)}{\lambda_k} \tag{3}$$

сводится к спектральной задаче

$$u''(x) = \lambda u \tag{4}$$
$$N_1(u) = 0, \quad N_2(u) = 0, \tag{5}$$

Отметим что оператор (1)-самосопрожянный и имеет полную ортонормированную систему собственных векторов. Умножив в $L_2(0,1)$ уравнение (1) на $u(x)$ получим

$$(u''(x), u(x))_{L_2(0,1)} = u'(1)u(1) - u'(0)u(0) - \int_0^1 (u'(x))^2 dx = \lambda \int_0^1 (u(x))^2 dx. \tag{6}$$

Учитывая граничные условия (2) равенство (6) перепишем в виде

$$\lambda \int_0^1 \big(u(x)\big)^2 dx = -u'(0)\big(u(1) + u(0)\big) - \int_0^1 (u'(x))^2 dx. \tag{7}$$

Так как правая часть незнакоопределена, то нельзя ожидать что собственные значения задачи (4)-(5) будут знакоопределенными.

Теорема. *По крайней мере одно собственное значение задачи (4)-(5) является положительным.*

Теперь исследуем самосопряженную часть одномерной задачи Коши.

Известно что решение одномерной задачи Коши (т.е одномерный оператор Коши) для уравнения (1) представим в виде

$$L_k^{-1} f = \int_0^x (x - t) f(t) dt \tag{8}$$

а самосопряженный оператор Коши к оператор $L_k^{-1} f$ имеет вид

$$(L_k^{-1})^* f = \int_1^x (x - t) f(t) dt. \tag{9}$$

Тогда оператор Коши представим в виде

$$L_k^{-1} f = \frac{L_k^{-1} + (L_k^{-1})^*}{2} f + i \frac{L_k^{-1} - (L_k^{-1})^*}{2i} f \tag{10}$$

оператор $\frac{L_k^{-1} + (L_k^{-1})^*}{2}$ является самосопряженной частью оператора Коши, а $\frac{L_k^{-1} - (L_k^{-1})^*}{2i}$ мнимой частью (несамосопряженной частью) оператора Коши L_k^{-1}.

Лемма. *Самосопряженная часть оператора Коши совпадает с одномерным потенциалом Ньютона, т.е*

$$\frac{(L_k^{-1} + L_k^{-1})^*}{2} f = \frac{1}{2}\int_0^1 \big|x - t\big| f(t) dt$$

Эта лемма связывает классический одномерный потенциал Ньютона с классическим одномерным оператором Коши.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP14871460 и AP09260126 МНВО РК.

Ключевые слова: потенциал Ньютона, спектральная задача, граничные условия Ньютонового потенциала.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35A08

Литература

[1] Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала, *Доклады РАН.* **4**:428 (2009), 16–19.

Критерии единственности решения нелокальной по времени задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений

Балтабек КАНГУЖИН[a], Бакытбек КОШАНОВ[b]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]kanguzhin53@gmail.com, [b]koshanov@list.ru

Пусть Ω – конечная двумерная область, ограниченная при $y>0$ кривой Ляпунова σ, оканчивающейся в окрестности точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$ малыми дугами **нормальной кривой** $\sigma_0:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{9}y^3=\frac{1}{4}$, а при $y<0$ – характеристиками $OC: x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=0$, $BC: x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=1$.

В области $Q=\Omega\times(0,T)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^n u(x,y;t)}{\partial t^n}+\sum_{j=1}^{n}p_j(t)\frac{\partial^{n-j}u(x,y;t)}{\partial t^{n-j}}=$$

$$y\frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial y^2}+f(x,y;t),\quad (x,y)\in\Omega,\quad 0<t<T \tag{1}$$

с краевыми условиями по t

$$U_\nu(u(x,y;\cdot))=0,\quad \nu=1,2,\ldots,n,\quad (x,y)\in\Omega \tag{2}$$

и с условиями по (x,y)

$$u(x,y;t)\big|_{\sigma_0}=0,\quad \sigma_0:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{9}y^3=\frac{1}{4}, \tag{3}$$

$$x^{5/6}D_{0+}^{1/6}\left(u\left(\chi_0(x);t\right)x^{-2/3}\right)+(1-x)^{5/6}D_{1-}^{1/6}\left(u\left(\chi_1(x);t\right)(1-x)^{-2/3}\right)=0, \tag{4}$$

где

$$u\left(\chi_0(x);t\right)=u\left(x,-\left[\frac{3x}{2}\right]^{2/3};t\right),\ 0\le x\le\frac{1}{2},$$

$$u\left(\chi_1(x);t\right)=u\left(x,-\left[\frac{3(1-x)}{2}\right]^{2/3};t\right),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1,\quad 0<t<T.$$

Здесь граничные условия задаются с помощью дробных производных Римана-Лиувилля [1]

$$D_{0+}^{1/6}g(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{g(t)}{(x-t)^{1/6}}dt,\quad D_{1-}^{1/6}g(x)=-\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{g(t)}{(t-x)^{1/6}}dt.$$

Главной целью данной статьи является установление критерия единственности решения задачи (1)–(4).

Операторная запись вышеприведенной задачи (1)–(4) имеет вид

$$Bu=Au(x,y;t)+f(x,y;t),\quad (x,y;t)\in Q. \tag{5}$$

Здесь оператор B действует по переменной t, а оператор A действует по переменным (x, y) и их спектральные свойства приведены в данной статье.

В работе [3] вычислены сопряженные краевые условия. В работе [4] доказана, что оператор A является самосопряженным в пространстве $L_2(\Omega)$.

Требование I. Система двухточечных граничных условий

$$U_1(u(x,y;\cdot)) = 0, \ldots, U_n(u(x,y;\cdot)) = 0, \quad (x,y) \in \Omega$$

эквивалентна некоторым нормированным регулярным в смысле Биркгофа краевым условиям [2].

Теорема 1. *Пусть выполнено требование I. Тогда однородное операторное уравнение*

$$Bu = Au \tag{6}$$

имеет только тривиальное решение $u \in D(B) \cap D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma(B) \cap \sigma(A) = \varnothing, \tag{7}$$

где $\sigma(B)$ и $\sigma(A)$ – спектры операторов B и A соответственно.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP 08855402, AP 14869558 МОН РК.

Ключевые слова: эллиптические операторы высших порядков, регулярные краевые задачи по времени, граничные операторы, единственность решения, собственные функций, полные ортонормированные системы.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G05, 35G10, 35P05

Литература

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of fractional differential equations*, Elsevier (2006).

[2] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Москва (1969).

[3] Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов, *Изв. вузов. Матем.*, **2** (1964), 82–93.

[4] Кальменов Т.Ш. О самосопряженных краевых задачах для уравнения Трикоми, *Дифференциальные уравнения*, **19**:1 (1983), 66–75.

Восстановление граничных условий дифференциальных операторов на графах по набору собственных значений

Балтабек КАНГУЖИН[1,2,a], Жалгас КАЙЫРБЕК[1,2,b] Гауһар АУЗЕРХАН[2,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]kanguzhin53@gmail.com, [b]kaiyrbek.zhalgas@gmail.com [c]auzerkhanova@gmail.com

Пусть $\Gamma = \{V, E\}$ -граф-звезда, где V множество его вершин, занумерованных от 0 до $m+1$; а множество E означает множество его дуг $e_1, e_2, ..., e_m$. На каждой дуге e_j выполняется дифференциальное уравнение

$$-y''(x_j) + p_j(x_j)y_j(x_j) = f_j(x_j), \;\; 0 < x_j < b_j \tag{1}$$

В дальнейшем предполагаем, что функций $p_j(x), x \geq 1$ являются вещественными непрерывными на e_j. Вершина $(m+1) \in V$ называется внутренней вершиной графа-звезды. Во внутренней вершине $(m+1$ выполняются законы Кирхгофа

$$\begin{cases} y_{m+1}(b_{m+1}) = y_1(0) = ... = y_m(0) \\ y'_{m+1}(b_{m+1}) = y'_1(0) + ... + y'_m(0) \end{cases} \tag{2}$$

Вершины $0, 1, ..., m$ называются граничными вершинами графа-звезды. Для дальнейших целей удобно ввести функций $c_j(x_j), s_j(x_j), j = 1, 2, ..., m+1$. При каждом j $c_j(x_j), s_j(x_j)$ функций являются решениями однородного дифференциального уравнения

$$-y''(x_j) + p_j(x_j)y_j(x_j) = 0, \; 0 < x_j < b_j \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} c_j(0) = s'_j(0) = 1, c'_j(0) = s_j(0) = 0, \; j = 1, 2, ..., m, \\ c_{m+1}(b_{m+1}) = s'_{m+1}(b_{m+1}) = 1, c'_{m+1}(b_{m+1}) = s_{m+1}(b_{m+1}) = 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Решение задачи Коши для уравнений Штурма-Лиувилля (1),(2) с условиями Коши в точке $x_{m+1} = 0$*

$$\theta_{m+1}(0) = 0, \; \theta'(0) = 0 \tag{4}$$

обозначим через $\Theta = (\theta_1(x_1), \theta_2(x_2), ..., \theta_{m+1}(x_{m+1}))$ и оно имеет вид

$$\theta_{m+1}(x_m+1) = \int_0^{x_{m+1}} \begin{vmatrix} c_{m+1}(x_{m+1}) & s_{m+1}(x_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t)dt, \quad x_{m+1} \in (e_{m+1}),$$

$$\theta_{m+1}(x_m+1) = \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & A_j s_j(x_j) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t)dt + \int_0^{x_j} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & s_j(x_j) \\ c_j(t) & s_j(t) \end{vmatrix} f_j(t)dt.$$

где $A_1, A_2, ..., A_m$-произвольные числа, подчиненные требованию $A_1 + A_2 + ... + A_m = 1$.Из теоремы 1 следует, что решение задачи Коши (1),(2) зависит от $m+1$ произвольных постоянных. Постоянные $A_1, A_2, ..., A_m$ определяют в точке $x_{m+1} = b_{m+1}$ доли потоков по дугам $e_1, e_2, ..., e_m$относительно потока на дуге e_{m+1}. Числа $A_1, A_2, ..., A_m$ будем называть константами связи.

Ключевые слова: Собственные значения, условия Кирхгофа, граф-звезда, волновое уравнение, формула Даламбера.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G05, 35G10, 35P05

Краевая задача с условиями типа Штурма для уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом

Мадина МАЖГИХОВА

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: mazhgihova.madina@yandex.ru

В работе исследуется линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

где $D_{0t}^{\alpha}u(t)$ – дробная производная Римана – Лиувилля [1], $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $H(t)$ – функция Хевисайда, λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число.

Определение. Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u(t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-n}u(t) \in C^n(0,1)$, $u(t) \in L(0,1)$, и удовлетворяющую этому уравнению.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = c_i, \quad i = \overline{1,p}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk} \lim\limits_{t\to 1} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = c_{p+j}, \quad j = \overline{1,q}, \end{cases} \tag{2}$$

причем $p+q=n, n\in\mathbb{N}$, $a_{ik}, b_{jk}, c_i, c_{p+j}$ – заданные постоянные.

В работе доказана теорема существования и единственности решения задачи (1), (2).

Ключевые слова: уравнение дробного порядка, уравнение с запаздывающим аргументом, краевая задача, обобщенная задача типа Штурма.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34K10

Литература

[1] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, Москва (2003).

Теорема Харди-Литтлвуда

Асхат МУКАНОВ[a], Ерлан НУРСУЛТАНОВ[b]

Казахстанский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, Астана, Казахстан

E-mail: [a]*mukanov.askhat@gmail.com*, [b]*er-nurs@yandex.ru*

Мы рассматриваем классическую теорему Харди-Литтлвуда (см. [5, 12 Глава]).

Теорема A. *Пусть* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– невозрастающие, неотрицательные последовательности, и пусть интегрируемая на* $[0,1]$ *функция* $f(x)$ *имеет тригонометрический ряд Фурье* $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2\pi kx+b_k\sin 2\pi kx)$. *Тогда для всех* $1<p<\infty$,

$$\|f\|_{L_p([0,1])}\asymp\frac{a_0}{2}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-2}(a_k^p+b_k^p)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Аналогичный результат для функции $f(x)$ с рядом Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{2\pi ikx}$, где $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{c_k\}_{k=0}^{-\infty}$ – невозрастающие, неотрицательные последовательности выглядит следующим образом:

$$\|f\|_{L_p([0,1])}\asymp\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(|k|+1)^{p-2}|c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1<p<\infty. \tag{2}$$

Соотношения (1), (2) были обобщены во многих работах, (см. [1-4] и библиографию в них). В основном обобщение теоремы Харди-Литтлвуда получают путем ослабления условия монотонности коэффициентов Фурье, тем самым расширяя класс допустимых последовательностей. В недавней работе [1] было получено соотношение (1) для последовательностей из, так называемого, класса обобщенно монотонных последовательностей GM_1, содержащего класс монотонных последовательностей.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность (вообще говоря, комплексных) чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит классу GM_1, если существуют $C>0$ и $\lambda>1$, такие, что для всех $n\in\mathbb{N}$ выполняется условие:

$$\sum_{k=n}^{2n}|a_k-a_{k+1}|\le C\sum_{k=\frac{n}{\lambda}}^{\lambda n}\frac{|a_k|}{k}. \tag{3}$$

Существенным достижением в работе [1] заключается в том, что авторы не накладывают на коэффициенты Фурье условие неотрицательности и рассматривают последовательности вещественных чисел, удовлетворяющих условию (3).

Мы рассматриваем другие классы обобщенно монотонных последовательностей. В частности, был рассмотрен следующий класс.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ принадлежит классу GM_2, если существует $C > 0$, такое, что для всех $n \geq 0$ выполняется условие:

$$\sum_{[2^{n-1}]\leq|m|<2^n} |a_m - a_{m+1}| \leq C \sup_{[2^{n-1}]\leq|m|\leq 2^n} \frac{1}{|m|+1} \left|\sum_{j=0}^{m} a_j\right|.$$

Для данного класса была получена теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \mathrm{GM}_2$*, и пусть интегрируемая на* $[0,1]$ *функция* $f(x)$ *имеет тригонометрический ряд Фурье* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$*. Тогда для всех* $1 < p < \infty$,

$$\|f\|_{L_p([0,1])} \asymp \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)^{p-2}|c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty.$$

Замечание 1. Особенностью теоремы 1 является то, что коэффициенты $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ комплекснозначные. Помимо этого в работе мы сравниваем рассматриваемые нами классы обобщенно монотонных последовательностей с классами, рассмотренных в предыдущих работах.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP14870361 МНВО РК.

Ключевые слова: пространство Лебега, тригонометрические ряды Фурье, обобщенная монотонность.

2010 Mathematics Subject Classification: 42A16, 42A32

Литература

[1] Dyachenko M., Mukanov A., Tikhonov S. Hardy-Littlewood theorems for trigonometric series with general monotone coefficients, *Stud. Math.*, **250**:3 (2020), 217–234.

[2] Dyachenko M., Nursultanov E., Kankenova A. On summability of Fourier coefficients of functions from Lebesgue space, *J. Math. Anal. Appl.*, **419**:2 (2014), 959–971.

[3] Grigoriev S., Sagher Y., Savage T. General monotonicity and interpolation of operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **435**:2 (2016), 1296–1320.

[4] Nursultanov E. Net spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type, *Sb. Math.*, **189**:3 (1998), 399–419.

[5] Zygmund A. *Trigonometric series, third ed., vols I, II*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).

О полноте корневых векторов сингулярного оператора порожденного линейной частью оператора Кортевега-де Фриза

Мусакан МУРАТБЕКОВ

Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, Тараз, Казахстан
E-mail: [a]musahan_m@mail.ru

Вопросам разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений нечетного порядка и в частности, для уравнения Кортевега-де Фриза посвящена значительная литература [1-5] и цитируемые там работы. В отличие от этих интересных работ, в этой работе в пространстве $L_2(\Omega)$ рассматривается оператор порожденной линейной частью оператора Кортевега-де Фриза. Для этого оператора в неограниченной области с неограниченным коэффициентом будут изучены следующие вопросы: - существование резольвенты; - разделимость (максимальная регулярность решений); - компактность резольвенты; - оценки сингулярных чисел. Помимо выше указанных вопросов, в работе исследуется вопрос о полноте корневых векторов.

Ключевые слова: оператор Кортевега-де Фриза, резольвента, разделимость, сингулярные числа.

2010 Mathematics Subject Classification: 47A10

Литература

[1] Temam R. Sur un probleme non linearie, *Journal de Mathmatiques Pures et Appliques*, **48**:2 (1969), 159–172.

[2] Villanueva A. On Linearized Korteweg-de Vries Equations, *Journal of Mathematics Research*, **4**:1 (2012), 2–8.

[3] Taflin E. Analytic Linearization of the Korteweg-de Vries Equation, *Pacific Journal of Mathematics*, **108**:1 (1983), 203–220.

[4] Kato T. On the Korteweg-de Vries Equation, *Manuscripta math.*, **28** (1979), 89–99.

[5] Saut J., Temam R. Remarks on the Korteweg-de Vries Equation, *Isreal Journal of mathematics*, **1** (1979), 78–88.

Начально-краевые задачи для дробного параболического уравнения с инволюцией

Хамит МУРАТОВ[a], Батирхан ТУРМЕТОВ[b]

Международный казахско-турецкий университет им.Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: [a]87078220202h@gmail.com, [b]batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

В данной работе исследуются начально-краевые задачи для дробного параболического уравнения с инволюцией. Рассматриваемое нами уравнение является нелокальным обобщением уравнение теплопроводности включающий дробные значения производной по времени.

Для любого $\alpha \in (0,1]$ положим

$$D^\alpha y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \left(\ln \frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha} \delta y(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, 0 < \alpha < 1 \\ \delta y(t), \alpha = 1 \end{cases}$$

где $\delta = t\frac{d}{dt}$,D^α - оператор дифференцирования порядка α в смысле Адамара [1]. Обозначим $Q = \{(t,x) : 0 < t < T, 0 < x < p\}$, где p, T положительные действительные числа.

Пусть $\alpha \in (0,1], \beta > 0$. Рассмотрим в Q следующее уравнение

$$t^{-\beta} D_t^\alpha u(t,x) = a_0 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 u(t,p-x)}{\partial x^2}, (t,x) \in Q, \tag{1}$$

где a_0, a_1 некоторые действительные числа.

Регулярным решением уравнения (1) мы назовем функцию $u(t,x)$ из класса $C\left(\bar{Q}\right)$, обладающее свойством $t^{-\beta} D_t^\alpha u(t,x)$, $u_{xx}(t,x) \in C(Q)$ и удовлетворяющее в Q уравнению (1) в классическом смысле.

В данной работе исследуются следующие задачи:

Задача D. Найти регулярное решение уравнение (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), 0 \le x \le p, \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,p) = 0, 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция.

Задача N. Найти регулярное решение уравнение (1), для которой $u_x(t,x) \in C\left(\bar{Q}\right)$, удовлетворяющее начальному условию (2) и краевым условиям

$$u_x(t,0) = u_x(t,p) = 0, 0 \le t \le T. \tag{4}$$

В случае оператора Капуто аналогичные задачи исследовались в работе [2]. Обозначим

$$X_{D,k}(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin\left(\frac{k\pi}{p}x\right), \lambda_{D,k} = \left(a_0 + a_1(-1)^{k+1}\right)\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2,$$

$$X_{N,k}(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} cos\frac{k\pi x}{p}, \lambda_{N,k} = \left(a_0 + (-1)^k a_1\right)\left(\frac{k\pi x}{p}\right)^2, k \in N.$$

Основные утверждения относительно задач D и N изложены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha \leq 1, \beta > 0, a_0 \pm a_1 > 0$, $\varphi(x) \in C^2\left(\bar{Q}\right)$ *и выполняются условия* $\varphi(0) = \varphi(p) = 0$. *Тогда решение задачи* D *существует, единственно и представляется в виде ряда*

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^p \varphi(\tau) X_{D,k}(\tau) d\tau \right) R_\alpha \left(-\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right) X_{D,k}(x).$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha \leq 1, \beta > 0, a_0 \pm a_1 > 0$, $\varphi(x) \in C^2\left(\bar{Q}\right)$ *и выполняются условия* $\varphi'(0) = \varphi'(p) = 0$. *Тогда решение задачи* N *существует, единственно и представляется в виде*

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^p \varphi(\tau) X_{N,k}(\tau) d\tau \right) R_\alpha \left(-\frac{\lambda_{N,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right) X_{N,k}(x).$$

Здесь функция $R_\alpha(z)$ определяется равенством

$$R_\alpha\left(z\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{(i!)^\alpha}.$$

Funding:Данная работа была поддержана грантом AP09259074 МОН РК.

Ключевые слова: дробная производная,оператор Адамара, параболическое уравнение, инволюция, начально-краевая задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 34K29

Литература

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M, Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam (2006).

[2] Kirane M., Samet B., Torebek B. Determination of an unknown source term temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2017**:257 (2017), 1–13.

Начально-краевые задачи для волнового уравнения с неуслиненно регулярными краевыми условиями

Арайлым ОМАРБАЕВА[1,2,a], Махмуд САДЫБЕКОВ[1,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби , Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*arai-79@mail.ru*, [b]*sadybekov@math.kz*

Начально-краевые задачи для линейных уравнений гиперболического типа являются достаточно хорошо разработанной частью теории уравнений в частных производных (смотри, например, [1-3]). И одним из наиболее разработанных методов их решения является метод Фурье, который также называют методом разделения переменных или методом разложения по собственным функциям. Этот метод был хорошо разработан для случая самосопряженных краевых условий по пространственной переменной. Однако для случая несамоспряженных краевых условий задача еще остается открытой.

В работе рассматриваются начально-краевые задачи для одномерного волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

в области $\Omega = (x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T$, с нелокальными краевыми условиями общего вида

$$U_j(u) = a_{j1}u_x(0,t) + a_{j2}u_x(1,t) + a_{j3}u(0,t) + a_{j4}u(1,t) = 0, \quad j = 1,2. \tag{2}$$

Дополнительно задаются стандартные начальные условия

$$u(x,0)=\tau(x), u_t(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le 1. \tag{3}$$

Применение метода Фурье (метода разделения переменных) приводит к следующей спектральной задаче

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x),\ 0<x<1, \tag{4}$$

$$U_j(y)=a_{j1}y'(0)+a_{j2}y'(1)+a_{j3}y(0)+a_{j4}y(1)=0, \quad j=1,2. \tag{5}$$

Хорошо известно, что в случае, если условия (5) являются усиленно регулярными, то система корневых векторов задачи (4)-(5) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. И метод Фурье может быть реализован для решения задачи (1)-(3). Однако, когда краевые условия (5) являются неусиленно регулярными, система корневых векторов задачи (4)-(5) может не образовывать безусловного базиса. И это не дает возможности использования метода Фурье. В случае, когда краевые условия (5) являются нерегулярными, система корневых векторов задачи (4)-(5) не образует безусловного базиса. Таким образом, для применения метода Фурье остался необоснованным случай, когда краевые условия (5) являются неусиленно регулярными.

В настоящей работе рассматривается именно такой случай. Построен алгоритм доказательства корректности (в классическом и обобщенном смыслах) начально-краевой задачи (1)-(3) для случая, когда краевые условия (5) являются неусиленно регулярными. Этот метод может быть применим независимо от того, образует ли система корневых векторов задачи (4)-(5) безусловный базис в $L_2(0,1)$ или нет.

Методика основана на методе решения задач теплопроводности с неусиленно регулярными краевыми условиями [4].

Funding: Авторы поддержаны грантом №AP14869063 МНВО РК.

Keywords: волновое уравнение, нелокальное краевое условие, обобщенное решение, классическое решение, безусловный базис, Базис Рисса.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35L20

Литература

[1] Bateman H. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1959).

[2] Brown J.W. and Churchill R.V. *Fourier Series and Boundary Value Problems* (Fifth Edition), McGraw-Hill, New York (1993).

[3] Courant R. and Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*, Volume 1 (1953), Volume 2 (1962), Interscience, New York.

[4] Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with not Strongly Regular Boundary Conditions, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, **216** (2017), 330–348.

Об одном решении нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка

Нургул ОРУМБАЕВА[a], Тенгеш ТОКМАГАМБЕТОВА[b] Алуа МАНАТ[c]

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: [a]Orumbayevan@mail.ru, [b]tenggesh.tokmagambetova@gmail.com, [c]manat.alua@mail.ru

На $\Omega=[0,X]\times[0,Y]$ рассматривается нелокальная краевая задача

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(0,y)=\varphi(y), \quad y\in[0,Y], \tag{2}$$

$$\alpha_1(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}+\alpha_2(x)\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x\partial y}=$$

$$=\psi(x)+\alpha_3(x)\frac{\partial u(x,Y)}{\partial x}+\alpha_4(x)\frac{\partial^2 u(x,Y)}{\partial x\partial y},\quad x\in[0,X], \tag{3}$$

$$\beta_1(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}+\beta_2(x)\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x\partial y}=$$

$$=\theta(x)+\beta_3(x)\frac{\partial u(x,Y)}{\partial x}+\beta_4(x)\frac{\partial^2 u(x,Y)}{\partial x\partial y},\quad x\in[0,X], \tag{4}$$

где функции $f(x,y), a(x,y), b(x,y), d(x,y)$ непрерывны на Ω, функции $\alpha_j(x), \beta_j(x)$, $j=\overline{1,4}$, $\psi(x), \theta(x)$ непрерывно-дифференцируемы на $[0,X]$, $\varphi(y)$ непрерывно-дифференцируемая на $[0,Y]$ функция.

В сообщении исследуются вопросы существования и единственности решения нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения. Справедливо утверждение

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) функции $a(x,y), b(x,y), d(x,y), f(x,y)$ непрерывны на Ω,

2) функция $\varphi(y)$ непрерывно-дифференцируема на $[0,Y]$,

3) функции $\psi(x), \theta(x)$ непрерывно-дифференцируемы на $[0,X]$,

4) $\|\Delta(x)\|\le\gamma$, где $\gamma>0$,

5) $q=\frac{1}{\gamma}\max\Big(\rho_1,\rho_2\Big)\frac{e^{2M(\max\{X,Y\}+2)\max\{X,Y\}}}{\max\{X,Y\}+2}(XY+X)(A+DX)<1$,

где

$$\max_{(x,y)\in\Omega}\|a(x,y)\|<A,\quad \max_{(x,y)\in\Omega}\|b(x,y)\|<B,\quad \max_{(x,y)\in\Omega}\|d(x,y)\|<D,$$

$$\Delta(x)=\Big(\alpha_1(x)-\alpha_3(x)\Big)\Big(\beta_2(x)-\beta_3(x)Y-\beta_4(x)\Big)-$$

$$-\Big(\alpha_2(x)-\alpha_3(x)Y-\alpha_4(x)\Big)\Big(\beta_1(x)-\beta_3(x)\Big)\neq 0,$$

$$\rho_1=\Big(\max_{x\in[0,X]}\|\beta_2(x)-\beta_3(x)Y-\beta_4(x)\|+\max_{x\in[0,X]}\|-\alpha_2(x)+\alpha_3(x)Y+\alpha_4(x)\|\Big)\times$$

$$\times\Big(\max_{x\in[0,X]}\|\alpha_3(x)+\beta_3(x)\|Y+\max_{x\in[0,X]}\|\alpha_4(x)+\beta_4(x)\|\Big),$$

$$\rho_2=\Big(\max_{x\in[0,X]}\|\alpha_1(x)-\alpha_3(x)\|+\max_{x\in[0,X]}\|-\beta_1(x)+\beta_3(x)\|\Big)\times$$

$$\times\Big(\max_{x\in[0,X]}\|\alpha_3(x)+\beta_3(x)\|Y+\max_{x\in[0,X]}\|\alpha_4(x)+\beta_4(x)\|\Big),$$

тогда нелокальная задача (1)-(4) имеет единственное решение.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09259780 МОН РК.

Ключевые слова: краевая задача, нелокальная задача, дифференциальное уравнение, метод последовательных приближений, задача Гурса.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution, *Journal of Mathematical analysis and Applications*, **461** (2018), 817–836.

[2] Kozhanov A.I., Pinigina N.R. A mixed problem for some classes of nonlinear thirdorder equations, *Math. USSR-Sb.*, **4**:46 (1983), 507—525.

[3] Zikirov O.S. Local and nonlocal boundary value problems for hyperbolic equations of the third order, *Contemporary mathematics and its applicationser*, **68** (2011), 101–120.

О суммируемых решениях одного дифференциального уравнения

Кордан ОСПАНОВ[a] , Бекмурат ЕЛТУРЕЕВ[b]

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: [a]kordan.ospanov@gmail.com, [b]ertureevbekmurat@gmail.com

В работе рассматривается следующее уравнение с неограниченными коэффициентами

$$L_0y = -s(x)\left(\rho(x)y'\right)' + r(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, а $s \geq 1$, $\rho > 0$, $r \geq 1$ и q - гладкие функции от x, $f \in L_1(\mathbb{R})$. Через L обозначим замыкание в L_1 дифференциального оператора $L_0y = -s\left(\rho y'\right)' + ry' + qy$ с $D(L_0) = C_0^{(2)}(\mathbb{R})$.

Решением (1) назовем элемент $y \in D(L)$ такой, что $Ly = f$.

Мы устанавливаем достаточные условия существования и единственности решения y уравнения (1), а также выполнения следующего неравенства максимальной регулярности

$$\|s\left(\rho y'\right)'\|_1 + \|ry'\|_1 + \|qy\|_1 \leq C\|f\|_1,$$

где $\|\cdot\|_1$ - норма в $L_1(\mathbb{R})$. Кроме того, мы приводим условия компактности резольвенты L^{-1} и оценку поперечников по Колмогорову одного множества, связанного с решением.

Funding: Первый автор был поддержан грантом AP14870261 КН МНВО РК.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, сильное решение, корректность, коэрцитивная оценка, поперечник множества решений.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34C11, 47A10

О неравенстве Харнака для мягкого лапласиана на стратифицированном множестве

Олег ПЕНКИН

Институт математики и математического моделирования. Алматы. Казахстан.
Воронежский государственный университет. Воронеж. Россия.
E-mail: o.m.penkin@gmail.com

В докладе обсуждается результат, полученный совместно с Н.С. Даирбековым и Д.В. Савастеевым в рамках общего исследования классической разрешимости задачи Дирихле для мягкого лапласиана на стратифицированном множестве. Отсутствие полноценной теоремы о среднем для лапласиана на стратифицированном множестве $\Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ делает задачу доказательства неравенства Харнака для гармонических в смысле такого лапласиана функций довольно трудоёмкой. Тем не менее удалось получить точный аналог неравенства Харнака для неотрицательных гармонических функций в классической форме $\sup u \leq C \inf u$, выполняющегося на любом компакте в Ω_0 с независящей от u константой. Точные описания относящихся к данной тематике понятий можно найти в работах [1],[2]. Ранее неравенство Харнака доказывалось лишь для специальных компактов, составленных лишь из точек страт максимальной и на единицу меньшей размерности (Беседина С.В.). Нами сняты все ограничения. Оказалось даже, что неравенство Харнака выполняется даже для стратифицированных множеств, не допускающих классическую разрешимость задачи Дирихле.

Funding: Работа поддержана грантом AP14871251 МОН РК.

Ключевые слова: оператор Лапласа, стратифицированное множество, гармоническая функция.

2010 Mathematics Subject Classification: 31C05, 35J15, 58J05

Литература

[1] Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве, *Алгебра и Анализ*, **30**:5 (2018), 149–158.

[2] Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Неравенство Пуанкаре и p-стратифицированного множества, *Сиб. Мат. Журнал.*, **59**:30 (2018), 1291–1302.

Формула Даламбера для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Лиувилля

Арсен ПСХУ

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: pskhu@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,y) = 0. \tag{1}$$

Здесь через $\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma}$ обозначена дробная производная Лиувилля порядка σ, $\sigma \in (0,2)$, по переменной y, с началом в точке $y = -\infty$ [1]:

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(n-\sigma)} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \int_{-\infty}^{y} u(x,t)(y-t)^{n-\sigma-1} dt,$$

где $\sigma \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$ (т.о. в рассматриваемом случае $n \in \{1,2\}$).

Уравнение (1) совпадает с уравнением диффузии при $\sigma = 1$ и при $\sigma \to 2$ переходит в волновое уравнение. Решение последнего, как известно, может быть представлено формулой Даламебра, а именно в виде суммы решений уравнений первого порядка $u_x + u_y = 0$ и $u_x - u_y = 0$. Оказывается, аналогичное представление имеет место и для уравнений вида (1). В случае уравнения с дробной производной с началом в конечной точке такое представление найдено в [2].

В данной работе показано, что любое решение уравнения (1) может быть записано в виде суммы решений уравнений в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right) u^+(x,y) = 0 \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right) u^-(x,y) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha = \sigma/2$. Также, найдены соотношения, связывающие следы решений уравнений (1) и (2) на боковых участках границы прямоугольной области.

Ключевые слова: диффузионно-волновое уравнение, дробная производная Лиувилля, формула Даламбера.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11, 35L05

Литература

[1] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, Москва (2003).

[2] Псху А.В. Первая краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81**:6 (2017), 158–179.

О критерии регулярной разрешимости переопределенной задачи Коши для уравнения Геллерстедта

Александр РОГОВОЙ[1,a], Тынысбек КАЛЬМЕНОВ[2,b]

[1]Университет Мирас, Шымкент, Казахстан
[2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]rog2005@list.ru, [b]kalmenov.t@mail.ru

Минимальные операторы, порожденные переопределенными граничными условиями для дифференциальных уравнений, применяются в описании регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений и тесно связаны с теорией сужений и расширений операторов. Построение минимальных дифференциальных операторов важно и с практической точки зрения для обратных задач математической физики. Настоящая работа посвящена изучению переопределенной задачи Коши для уравнения Геллерстедта. Как известно, глубокое изучение уравнений смешанного типа было начато с работы Ф.Трикоми [1], а изученная им задача получила название задачи Трикоми. С.Геллерстедт решает задачу Трикоми для более общего уравнения [2], которое впоследствии было названо уравнением Геллерстедта. Нами установлен критерий критерий регулярной разрешимости дифференциального оператора, порожденного переопределенной задачей Коши для уравнения Геллерстедта. Доказательство основано на свойствах потенциала Геллерстедта, свойствах решений задачи Гурса в характеристическом треугольнике и специальных функциях.

Переопределенная задача Коши. В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной отрезком $AB: y=0,\ 0<x<1$, и характеристиками $AC:\ x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0$ и $BC:\ x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$ уравнения

$$Lu \equiv -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \tag{1}$$

требуется найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \tag{2}$$

$$u\Big|_{AC:\, x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0}=0, \quad u\Big|_{BC:\, x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1}=0. \tag{3}$$

Доказана следущая основная теорема.

Теорема 1. *Переопределенная задача Коши (задача (1)-(3)) регулярно разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\int\limits_0^\xi d\xi_1 \int\limits_1^\xi \frac{(\eta_1-\xi_1)^{2\beta}}{(\xi-\xi_1)^\beta\,(\eta_1-\xi)^\beta}\cdot f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1=0, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^\xi d\xi_1 \int\limits_1^\xi \frac{\eta_1-\xi_1}{(\xi-\xi_1)^{1-\beta}\,(\eta_1-\xi)^{1-\beta}}\cdot f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1=0. \tag{5}$$

где функция f_1 определяется по заданной функции $f(x,y)$ из уравнения (1). При этом решение задачи (1)-(3) представимо по формуле

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_0^\xi d\xi_1 \int\limits_1^\eta R(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1)\cdot f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1, \tag{6}$$

где $R(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1)$ - функция Римана задачи Гурса:

$$R(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) = k \cdot \frac{(\eta_1 - \xi_1)^{2\beta}}{(\eta - \xi_1)^{\beta} (\eta_1 - \xi)^{\beta}} \cdot F(\beta, \beta; 1; \sigma). \tag{7}$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP14871460 КН МНВО РК.

Ключевые слова: переопределенная задача Коши, уравнение Геллерстедта, критерий, минимальный дифференциальный оператор, гипергеометрическая функция.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L80, 35M10, 35N30, 33C05

Литература

[1] Tricomi F. *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2 ordine di tipo misto* , Mem. Lincei, Ser. V, XIV, fasc. VII (1923).

[2] Gellerstedt S. *Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte, Ph.D. Thesis* , Almqvist & Wiksells, Uppsala (1935).

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ В СЛУЧАЕ ОТСУТСТВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ДАННЫХ

Махмуд САДЫБЕКОВ[1,a], Алтынай МЫРЗАХМЕТОВА[1,2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби (докторант, 2курс), Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*sadybekov@math.kz*, [b] *myrzakhmetova@math.kz*

В докладе рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности при периодических краевых условиях в случае отсутствия согласования начальных и граничных данных.

Задача Р. Найти в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности

$$u_t - k^2 u_x x = f(x, t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

и периодическим краевым условиям

$$\left\{ \begin{array}{r} u_x(0, t) - u_x(l, t) = 0, \\ u(0, t) - u(l, t) = 0. \end{array} \right\} \tag{3}$$

Хорошо известно, что для существования классического решения необходимо выполнение условий согласования. Например, условиями согласования нулевого и первого порядков являются

$$A_0 \equiv \varphi(0) - \varphi(l) = 0, \;\; A_1 \equiv \varphi'(0) - \varphi'(l) = 0. \tag{4}$$

Условие согласования второго порядка возникают, когда мы рассматриваем решения задачи из класса $u \in C^{2,1}_{x,t}(\bar{\Omega})$. Для функций из такого класса мы можем перейти к пределу в уравнении (1) при $t \to 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда получаем

$$A_2 = -k^2[\varphi''(0) - \varphi''(l)] - [f(0, 0) - f(l, 0)] = 0. \tag{4}$$

Для задачи с краевыми условиями Дирихле вопрос о решениях при рассогласовании граничных и начальных данных исследован в [1]. Нами рассматривается задача с нескольными краевыми условиями.

Теорема 1. Для любых $\varphi \in C^{2+\alpha}[0,l], f \in C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}(\bar{\Omega})$, не удовлетворяющих условиям согласования нулевого и первого порядков, задача (1)-(3) имеет единственное решение

$$u(x,t) = V_0(x,t) + V_1(x,t) + \upsilon(x,t), \tag{5}$$

где функции $V_0(x,t)$ и $V_1(x,t)$ - нерегулярные части решения, определяемые формулами

$$V_0(x,t) = -\frac{1}{2}A_0\left(\operatorname{erfc}\frac{x}{2k\sqrt{t}} - \operatorname{erfc}\frac{l-x}{2k\sqrt{t}}\right), \tag{5}$$

$$V_1(x,t) = A_1 k\sqrt{t}\left(i\operatorname{erfc}\frac{x}{2k\sqrt{t}} + i\operatorname{erfc}\frac{l-x}{2k\sqrt{t}}\right), \tag{6}$$

а $\upsilon(x,t)$ принадлежит классу $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x,t}(\bar{\Omega})$ и для неё справедлива оценка

$$\|\upsilon\|^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\Omega} \leq C\left\{\|\varphi\|^{2+\alpha}_{[0,l]} + \|f\|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\Omega}\right\}. \tag{7}$$

Теорема 2. Для любых $\varphi \in C^{2+\alpha}[0,l], f \in C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}(\bar{\Omega})$, не удовлетворяющих условиям согласования первого и второго порядков, задача (1)-(3) имеет единственное решение

$$u(x,t) = V_0(x,t) + V_1(x,t) + V_2(x,t) + \upsilon(x,t),$$

где функции $V_0(x,t)$, $V_1(x,t)$ и $V_2(x,t)$- нерегулярные части решения, определяемые формулами (5), (6) и

$$V_2(x,t) = A_2\frac{t}{i^2\operatorname{erfc}0}\left(i^2\operatorname{erfc}\frac{x}{2k\sqrt{t}} - i^2\operatorname{erfc}\frac{l-x}{2k\sqrt{t}}\right). \tag{8}$$

а $\upsilon(x,t)$ принадлежит классу $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x,t}(\bar{\Omega})$ и для нее справедлива оценка (7).

Funding: Авторы поддержаны грантом №AP14869063 МНВО РК.

Keywords: уравнение теплопроводности, условие Самарского, сильное решение, нелокальное краевое условие, математическая модель, базис Рисса.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 335K15

Литература

[1] Bizhanova G.I. Solutions in Holder spaces of boundary-value problems for parabolic equations with nonconjugate initial and boundary data, в: *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, Vol.171, No.1, 9–321.

Задача определения ядра уравнения вязкоупругости с дополнительной информацией специального вида

Журабек САФАРОВ

Институт Математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан
Ташкентский университет информационных технологий имени ал- Хоразмий, Ташкент, Узбекистан
E-mail: j.safarov65@mail.ru

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения колебания струны с памятью в области $\Omega = \{(x,t) : x > 0, t \in R\}$:

$$u_{tt} - u_{xx} - \int\limits_0^t m(\tau)u_{xx}(x,t-\tau)d\tau = 0, \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

с начальным и граничными условиями

$$u\mid_{t<0}\equiv 0, \tag{2}$$

$$u\mid_{x=0}=\delta(t), \qquad t\in R, \tag{3}$$

где $\delta(t)-$ дельта-функция Дирака. Для определения неизвестной функции $m(t), t>0$ дополнительное условие задается в следующем специальном виде:

$$u_x(0,t)+\int\limits_0^t m(\tau)u_x(0,t-\tau)d\tau=f(t), \tag{4}$$

$f(t)-$ заданная при $t>0$ функция.

Задание дополнительной информации в таком специальном виде использовались в работах [1], [2] для определения функции памяти среды, входящей в гиперболическое и параболическое уравнения.

Сначала исследуется прямая задача уравнения (1) - (3), при этом мы получаем интегральное уравнение относительно искомой функции $u(x,t)$ и необходимые условия на данные задачи. Далее исследуется обратная задача по определению ядра интегрального члена по имеющиеся информации (4), о решении прямой задачи. Обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений для неизвестных функций. К последней в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами (как в работах [3]–[5]) применяется принцип сжатых отображений.

Предположим,что функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t)=-\delta'(t)-\frac{h(0)}{2}\delta(t)+\theta(t)f_0(t), \tag{5}$$

где $f_0(t)-$ регулярная функция.

Основным результатом данной работы является следующая теорема глобальной однозначной разрешимости обратной задачи.

Теорема. *Пусть функция $f(t)$ имеет вид (5) и $f_0(t)\in C^1[0,T]$, $T>0$. Тогда в области D_2 существует единственное решение обратной задачи $m(t)\in C^2[0,T]$ для любого $T>0$.*

Ключевые слова: интегро- дифференциальное уравнение,обратная задача,дельта-функция Дирака, уравнение вякоупругости.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L10; 35L20; 35D99;

Литература

[1] J. Janno, L. Von Wolfersdorf. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity, *Mathematical methods in the applied sciences*, **20**:4 (1997), pp. 291–314.

[2] J. Janno, L. Von Wolfersdorf. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow, *Inv.Ill - Posed Problems*, **4**:1 (1996), pp. 39–66.

[3] Z.S. Safarov, D.K. Durdiev. Inverse Problem for an Integro-Differential Equation of Acoustics, *Differential Equations*, **54**:1 (2018), pp. 134–142.

[4] Jurabek Sh. Safarov. Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics, *J. Sib. Fed. Univ. Math Phys.*, **11**:6 (2018), pp. 753–763.

[5] Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров. Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области, *Матем. заметки*, **97**:6 (2015) С. 855-867.

Собственные функции антипериодической задачи для дифференциального уравнения с инволюцией

Абдисалам САРСЕНБИ[a], Элмира МУСИРЕПОВА[b]

Южно-Казахстанский университет им.М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан
E-mail: [a]*abdisalam.sarsenbi@auezov.edu.kz*, [b]*musrepova_elmira@mail.ru*

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с инволюцией

$$-y^{''}(x)+\alpha y^{''}(-x)+q(x)y(x)=\lambda y(x),\quad -1<x<1 \quad (1)$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$y(-1)=-y(1),\quad y^{'}(-1)=-y^{'}(1),\quad (2)$$

где $-1<\alpha<1$. Эта задача является несамосопряженной спектральной задачей, так как коэффициент $q(x)=q_1(x)+iq_2(x)$ является комплекснозначной функцией, $q(x)\in L_1(-1,1)$.

Сопряженная спектральная задача имеет следующий вид:

$$-z^{''}(x)+\alpha z^{''}(-x)+\overline{q}(x)z(x)=\overline{\lambda}z(x)$$

с краевыми условиями (2). В случае уравнения с постоянными коэффициентами

$$-y^{''}(x)+\alpha y^{''}(-x)=\lambda y(x),\quad -1<x<1,\ \ y(-1)=-y(1),\quad y^{'}(-1)=-y^{'}(1)\quad (3)$$

собственные функции задачи образуют полную ортонормированную систему в классе $L_2(-1,1)$:

$$\left\{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x,\ \ \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right\}, k=0,1,2,...$$

Путем сравнения с этой системой системы собственных функций задачи (1), (2) получен следующий результат.

Теорема. *Если все собственные значения спектральных задач (1), (2) и (3) являются простыми, то система собственных функций задачи (1), (2) образует базис пространства* $L_2(-1,1)$.

Справедливость теоремы в случае задачи Неймана, периодической задачи установлена в работах [1], [2].

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке КН МНиВО РК (грант AP13068539).

Литература

[1] Sarsenbi, A.A.; Sarsenbi, A.M., On Eigenfunctions of the Boundary Value Problems for Second Order Differential Equations with Involution, *Symmetry 2021.*, **1**: (2021). https://doi.org/ 10.3390/sym13101972

[2] Sarsenbi, A.A., Sarsenbi, A.A. The Expansion Theorems for Sturm-Liouville Operators with an Involution Perturbation, *Preprints 2021*, **1**: (2021). 2021090247 doi: http://dx.doi.org/ 10.20944/ preprints202109.0247.v1

Разрешимость смешанных задач для возмущенного волнового уравнения с инволюцией

Абдижахан САРСЕНБИ[a], Элмира МУСИРЕПОВА[b]

Южно-Казахстанский университет им.М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан
E-mail: [a]abdizhahan.sarsenbi@auezov.edu.kz, [b]musrepova_elmira@mail.ru

Для одномерного возмущенного волнового уравнения с инволюцией

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - \alpha u_{xx}(-x,t) - q(x)u(x,t),\ (x,t) \in \Omega \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), -1 \leq x \leq \qquad (2)$$

и краевыми условиями типа Дирихле

$$u(-1,t) = 0, u(1,t) = 0 \qquad (3)$$

установлено существование и единственность решения, где $\Omega = \{\ -1 < x < 1, t > 0\}$, $-1 < \alpha < 1$. Отметим,что рассмотрен случай когда $q(x)$ является комплекснозначной функцией.

Решение задачи ищем в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}t \right) X_k(x), \qquad (4)$$

где $\{X_k(x)\}$ система собственных функций несамосопряженной спектральной задачи

$$L_\alpha X(x) \equiv -X''(x) + \alpha X''(-x) + q(x)X(x) = \lambda X(x), \qquad (5)$$

образующая базис Рисса в классе $L_2(-1,1)$.
Еще одним из важных установленных нами результатов является базисность Рисса собственных функций спектральной задачи (5) с комплекснозначным коэффициентом $q(x)$. Попутно получены условия на коэффициенты $q(x)$, обеспечивающие требуемое расположение комплексных собственных значений на комплексной λ - плоскости, которые также имеют важные значения в настоящем исследовании. Эти факты играют важную роль при доказательстве следующего результата.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:
1) все собственные значения спектральной задачи (5) являются простыми,
2) функция $q(x) \in C^2[-1,1]$,
3) функция $\phi(x) \in C^4[-1,1]$ и функции $\phi(x), L_\alpha\phi$ удовлетворяют условиям (3),
4) функция $\psi(x) \in C^2[-1,1]$ и удовлетворяет условиям (3).

Тогда смешанная задача (1), (2), (3) имеет единственное решение, которое представимо в виде ряда (4).

Аналогичные результаты в случае периодических и антипериодических краевых условий установлена в работе [1].

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке КН МНиВО РК (грант AP13068539).

Литература

[1] Mussirepova, E, Sarsenbi, AA, Sarsenbi, AM., Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument, *Math Meth Appl Sci.*, **45** (17): 11262- 11271 (2022). doi:10.1002/mma.8448

Исследование многопериодических решений методом периодических характеристик оператора дифференцирования систем

Жайшылык САРТАБАНОВ

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, казахстан
E-mail: sartabanov42@mail.ru

Проблемы многопериодических решений $x = x(\tau, t)$ периода (θ, ω) систем

$$Dx = f(\tau, t, x), \quad f(\tau, t, x) \in C^{(0,e,\tilde{e})}_{\tau,t,x}\left(S_\theta \times S^m_\omega \times R^n\right) \tag{1}$$

с оператором дифференцирования $D = \frac{\partial}{\partial\tau} + \langle e, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$ по $\tau \in S_\theta$, $t = (t_1, ..., t_m) \in S_{\omega_1} \times ... \times S_{\omega_m} = S^m_\omega$ исследовались [1] методом диагональных характеристик $\delta(\sigma, \tau, t) = t - \tau + \sigma$, который приводил начальную задачу с условием $x|_{\tau=\tau^0} = u(t) \in C^{(e)}_t\left(S^m_\omega\right)$ к системе интегральных уравнений

$$x(\tau, t) = u\left(\delta\left(\tau^0, \tau, t\right)\right) + \int\limits_{\tau^0}^{\tau} f\left(\sigma, \delta\left(\sigma, \tau, t\right), x\left(\sigma, \delta\left(\sigma, \tau, t\right)\right)\right) d\sigma, \tag{2}$$

где композиции функций $u(t)$, $f(\tau, t, x)$ и характеристик $\delta(\tau^0, \tau, t), \delta(\sigma, \tau, t)$ нарушают θ-периодичность системы по τ и стало невозможным применение различных методов приближений и преобразований для установления существования и построения искомых (θ, ω)-периодических решений, за исключением некритического случия квазилинейных систем, где e и $\tilde{e}$ – векторы m и n-мерные с единичными компонентами, S_α – окружность длины α.

Такая проблема об отрицательном влиянии диагональных характеристик в иследовании таких задач стояла в течении долгих лет со времен появления метода изучения задач квазипериодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе перехода к задачам многопериодических решений систем с оператором дифференцирования D.

Для решения этой проблемы пришлось анализировать мысли о рассмотрении уравнения характеристик $\dot{t} = e$ оператора D на различных многообразиях евклидового пространства. Например, в случае рассмотрения его на плоском многообразии мы приходим к диагональным характеристикам, о которых упоминалось выше. Его можно рассматривать также на конечном тороидальном и цилиндрическом многобразиях. В решении поставленной проблемы наиболее удобным оказалось рассмотрение его на бесконечном цилиндрическом многобразии, которое порождало понятие винтовой спиралевидной характиристики $\beta(\sigma, \tau, t) = t - s(\tau - \sigma)$ оператора дифференцирования D, где $s(\tau) = \theta\{\theta^{-1}\tau\}$, $\{\tau\}$ – дробная часть $\tau \in R$. При этом наряду с системой (1) интегральная система по решению начальной задачи вида

$$x(\tau, t) = u(\beta(\tau^0, \tau, t)) + \int\limits_{\tau^0}^{\tau} f(\sigma, \beta(\sigma, \tau, t), x(\sigma, \beta(\sigma, \tau, t)))d\sigma \tag{3}$$

строится многопериодическими входными данными периода (θ, ω). В данном случае θ-периодическая характеристика $\beta(\sigma, \tau, t)$ по σ и τ не имеет отрицательного влияния в явном виде как диагональная характиристика $\delta(\sigma, \tau, t)$. Характеристика $\beta(\sigma, \tau, t)$ – винтовая, следовательно, она периодическая периода θ.

На основе описанного метода можно доказать нижеследующую теорему об условии многопериодичности решений системы (1).

Теорема. *Для того чтобы решение* $x = \varphi(\tau, t, \beta(0,\tau,t), u(\beta(0,\tau,t)))$ *системы (1) была* (θ,ω)*-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы начальная функция* $u(t)$ *была решением класса* $C_t^{(e)}(S_\omega^m)$ *функциональной* ω*-периодической системы*

$$u(t) = \varphi(\theta, t, t, u(t)). \tag{4}$$

В случае метода диагональных характеристик аналог условия (4) представлен функционально-разностной системой [2, 3].

Ключевые слова: оператор дифференцирования, многопериодическая интегральная система, плоские многообразия, цилиндрические многообразия, диагональная характеристика, периодическая характеристика, условие многопериодичности.

2010 Mathematics Subject Classification: 35B10, 35E15, 35F50, 32W99

Литература

[1] Харасахал В.Х. *Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Алма-Ата (1970).

[2] Умбетжанов Д.У., Сартабанов Ж.А. О необходимом и достаточном условии многопериодичности решения одной системы уравнений в частных производных с одинаковой главной частью, в: *КН.: Мат и мех.*, КазГУ, Алма-Ата (1972), 22–27.

[3] Сартабанов Ж.А. Об одном способе изучения периодических решений уравнений в частных производных специального вида, *Известия АН КазССР Сер. Физ-мат* , (1989), 42–48.

Обратная задача для двухмерного возмущенного уравнения четвертого порядка с инволюцией

Болат СЕЙЛБЕКОВ[a], Асельхан ИМАНБЕТОВА[b]

Южно-Казахстанский университет им.М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан
E-mail: [a]*bolat_3084@mail.ru*, [b]*aselek_enu@mail.ru*

Настоящая работа посвящена исследованию существования и единственности решения смешанных задач для двумерного возмущенного уравнения четвертого порядка с инволюцией

$$u_t(x,y,t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x,y,t) + \alpha \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(-x,y,t) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} u(x,y,t) = f(x,y) \tag{1}$$

в прямоугольной области $(x,y,t) \in E = -1 < x, y < 1, 0 < t < T$, рассмотрим задачу нахождения пары функций $u(x,y,t)$, $f(x,y)$, удовлетворяющих уравнению (1). При этом функция $u(x,y,t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), u(x,y,T) = \psi(x,y), x, y \in [-1,1]$$

и краевым условиям периодического вида

$$u(-1,y,t) = u(1,y,t), u_x(-1,y,t) = u_x(1,y,t)$$

,

$$u_{xx}(-1,y,t) = u_{xx}(1,y,t), u_{xxx}(-1,y,t) = u_{xxx}(1,y,t), t \in [0,T]$$

где $|\alpha| < 1$, $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ известные достаточно гладкие функции.
С помощью метода разделения переменных доказано существование и единственность решения обратной задачи.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_{x,y}^{i,j}(\pm 1) = \psi_{x,y}^{i,j}(\pm 1) = 0$, $i = 0,1,2,3,4,5$, $j = 0,2,4$ *и* $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y) \in C^6[-1,1]\times[-1,1]$, $\varphi^{VI}(x,y)$, $\psi^{VI}(x,y) \in L_2(-1,1)\times(-1,1)$. *Тогда существует единственное решение обратной задачи которое можно записать в виде*

$$u(x,y,t) = \varphi(x,y) + \frac{1-e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 t}}{1-e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 T}} \frac{\varphi_0^{(6)} - \psi_0^{(6)}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6} \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-e^{-\left[(1+\alpha)(\pi k)^4 + \left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right)^4\right]t}}{1-e^{-\left[(1+\alpha)(\pi k)^4 + \left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right)^4\right]T}} \frac{\varphi_{k1}^{(6)} - \psi_{k1}^{(6)}}{(\pi k)^6} \cos \pi k x \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi y$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-e^{-(2-\alpha)(\pi k)^4 t}}{1-e^{-(2-\alpha)(\pi k)^4 T}} \frac{\varphi_{k2}^{(6)} - \psi_{k2}^{(6)}}{(\pi k)^6} \sin \pi k x \sin \pi k y,$$

и

$$f(x,y) = \varphi_x^{IV}(x,y) + \alpha\cdot\varphi_x^{IV}(-x,y) + \varphi_y^{IV}(x,y) + \frac{\varphi_0^{(6)} - \psi_0^{(6)}}{1-e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 T}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{k1}^{(6)} - \psi_{k1}^{(6)}}{1-e^{-\left[(1+\alpha)(\pi k)^4 + \left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right)^4\right]^4 T}} \frac{(1+\alpha)(\pi k)^4 + \left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right)^4}{(\pi k)^6} cos\pi k x \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi y$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{k2}^{(6)} - \psi_{k2}^{(6)}}{1-e^{-(2-\alpha)(\pi k)^4 T}} \frac{2-\alpha}{(\pi k)^2} \sin \pi k x \sin \pi k y,$$

где

$$\varphi_0^{(6)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi_y^{VI}(x,y)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)dxdy, \quad \psi_0^{(6)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \psi_y^{VI}(x,y)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)dxdy,$$

$$\varphi_{k1}^{(6)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi_x^{VI}(x,y)\cos \pi k x \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi y dxdy, \quad \varphi_{k2}^{(6)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi_x^{VI}(x,y)\sin \pi k x \sin \pi k y dxdy,$$

$$\psi_{k1}^{(6)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \psi_x^{VI}(x,y)\cos \pi k x \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi y dxdy, \quad \psi_{k2}^{(6)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \psi_x^{VI}(x,y)\sin \pi k x \sin \pi k y dxdy.$$

В случае краевых условий типа Дирихле разрешимость прямой задачи рассмотрена в работе [1].

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке КН МНиВО РК (грант AP13068539)

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с инволюцией, разложения по собственным функциям, базис.

Литература

[1] Kirane M,, Sarsenbi, AA, Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative, *Fractal and Fractional.*, **7(2): 131**:2023 (год). https://doi.org/10.3390/fractalfract7020131

Спектр преобразовании Гильберта в пространстве Орлича над $\mathbb{R}$

Рамазан ТАСТАНКУЛ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: ramazan.tastankul@mail.ru

Пусть f комплекснозначная локально интегрируемая функция на $\mathbb{R}$. Тогда Преобразование Гильберта $\mathcal{H}f$ функции f определяется следующим интегралом

$$(\mathcal{H}f)(x) := \frac{1}{\pi i} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{f(t)}{x-t} dt \tag{1}$$

почти всюду когда существует предел.

Пусть теперь $L_\Phi(\mathbb{R})$ пространство Орлича над $\mathbb{R}$. Известно что, (см. [1]), преобразование Гильберта ограничен из $L_\Phi(\mathbb{R})$ в само себя если пространство Орлича $L_\Phi(\mathbb{R})$ рефлексивна.

Предположим что пространство Орлича $L_\Phi(\mathbb{R})$ рефлексивна. А значит преобразование Гильберта ограничен в $L_\Phi(\mathbb{R}) : \mathcal{H} : L_\Phi(\mathbb{R}) \to L_\Phi(\mathbb{R})$. Тогда из спектральной теории линейных операторов известно что спектр преобразовании Гильберта не пуст. И наша работа заключается в изучении спектра данного оператора. Также известно что $\mathcal{H}^2 = I$, где I тождественный оператор на $L_\Phi(\mathbb{R})$([1]).

Для того чтобы описать спектр преобразовании Гильберта в $L_\Phi(\mathbb{R})$ мы возпользовались теорией абстрактных Банаховых алгебр [2]. Пусть $\mathcal{B}$ абстрактная Банахова алгебра. Элемент $E \in \mathcal{B}$ называется алгебраическим если найдется полином

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i$$

с коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{C}$ и $\alpha_n \neq 0$ такие что

$$p(E) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i E^i = 0.$$

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{B}$ абстрактная Банахова алгебра и $E \in \mathcal{B}$ алгебраический элемент такой что $p(E) = 0$. Тогда,*

(1) *Резольвента элемента E представима в виде*

$$R_\lambda(E) = \frac{1}{p(\lambda)} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i B_i$$

где

$$B_j = \sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k E^{k-i-1}.$$

2. *Спектр элемента E, $\sigma(E)$, содержится во множестве нулей полинома p.*

3. *Если степень полинома n минимальная, то спектр равен множеству нулей полинома p.*

Из утверждения 1, и приведенных выше фактов приходим к следующей основной теореме

Теорема 1. *Пусть пространство Орлича $L_\Phi(\mathbb{R})$ рефлексивна и $\mathcal{H}$ преобразование Гильберта на $L_\Phi(\mathbb{R})$. Тогда*

(i) $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma_p(\mathcal{H}) = \{\pm 1\}$.
(ii) $\rho = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ *и резольвента имеет следующую форму*

$$R_\lambda(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}(\lambda+1)^{-1}(I-\mathcal{H}) + \frac{1}{2}(\lambda-1)^{-1}(I+\mathcal{H}).$$

Ключевые слова: Преобразование Гильберта, спектр оператора, резольвента, пространство Орлича.

2010 Mathematics Subject Classification: 42A99, 46E15, 46E30, 47A10

Литература

[1] Boyd D.W. *The Hilbert transformation on rearrangement invariant Banach spaces.*, Canadian Journal of Mathematics, (1967) 19, 599-616.

[2] Jörgens K. *Linear integral operators.*, volume 13. Pitman Advanced Publishing Program (1982).

О представимости уравнения Ито в виде стохастических уравнений Лагранжа с непотенциальными силами определенной структуры

Марат ТЛЕУБЕРГЕНОВ[1,2,a], Гулмира ВАСИЛИНА[1,3,b], Асылай АБДРАХМАНОВА[1,2,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[3] *АУЭС имени Г. Даукеева, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*marat207@mail.ru*, [b]*v_gulmira@mail.ru*, [c]*asilaiaa2001@mail.ru*

В классе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) задача Гельмгольца [1] исследована достаточно полно [см., например, 2], а в работах [3-5] задача Гельмгольца исследуется при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений.

В работе [6] в классе ОДУ исследовалась некоторая модификация задачи Гельмгольца. В настоящей работе эта модификация задачи Гельмгольца решается в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Постановка задачи. Пусть задано стохастическое уравнение второго порядка

$$d\dot{x}_\nu = F_\nu(x,\dot{x},t)dt + \sigma_{\nu j}(x,\dot{x},t)d_0\xi^j, \quad \nu = \overline{1,n}.;\ j = \overline{1,m}. \tag{1}$$

Ставится задача построения по заданному уравнению (1) эквивалентных уравнений вида

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k}dt = Q_k(x,\dot{x},t)dt + \sigma'_{kj}(x,\dot{x},t)d_0\xi^j, \quad k = \overline{1,n} \tag{2}$$

с заданной структурой сил Q_k.

Предполагаем, что функции, входящие в приведенные выше уравнения, обладают необходимой для дальнейших рассуждений гладкостью и удовлетворяют теореме существования и единственности решения задачи Коши в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито [7]. Пусть (Ω, U, P) – вероятностное пространство с потоком $\{U_t\}$. Здесь $\{\xi^1(t), \xi^2(t), ..., \xi^m(t)\}$ – система винеровских процессов с единичной матрицей локальных дисперсий, а эквивалентность решений уравнений (1) и (2) понимается в смысле почти наверное.

Задача построения уравнения (2) по заданному уравнению (1) при отсутствии случайных возмущений $\sigma_{\nu j} \equiv \sigma'_{\nu j} \equiv 0$ рассмотрена в [6], а при наличии случайных возмущений и $Q_k \equiv 0$ исследована в [3] методом дополнительных переменных. Здесь и далее по повторяющимся индексам сомножителей предполагается суммирование.

Иначе говоря, ставится задача определения по заданным $F_\nu, \sigma_{\nu j}$ условий на функции L и $\sigma'_{\nu j}$, при которых уравнение (2) было бы эквивалентно уравнению (1) с заданной структурой сил Q_k.

В случае, когда Q_k – произвольные непотенциальные силы, доказана теорема.

Теорема 1. *Необходимыми и достаточными условиями представимости уравнения (1) в виде уравнения (2) с произвольными непотенциальными силами являются условия*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_\nu} = \delta_k^\nu, \quad \text{где} \quad \delta_k^\nu = \begin{cases} 1, \nu = k \\ 0, \nu \neq k \end{cases}, \tag{3}$$

$$\sigma'_{kj}(x, \dot{x}, t) = \sigma_{\nu j}(x, \dot{x}, t). \tag{4}$$

А в случае, когда Q_k допускают обобщенную функцию Релея $R(x, \dot{x})$, т.е. имеет место представление $Q_k(x, \dot{x}) = -\dfrac{\partial R}{\partial x_k}$, тогда уравнение (2) запишется в виде

$$d(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}) - \frac{\partial L}{\partial x_k} dt = -\frac{\partial R}{\partial x_k} + \sigma'_{kj}(x, \dot{x}, t) d_0 \xi^j, \tag{5}$$

и справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Необходимыми и достаточными условиями представимости (1) в виде (5) с непотенциальными силами, допускающими функцию Рэлея, являются условия (3), (4) и* $\dfrac{\partial R}{\partial x_k} = \dfrac{\partial L}{\partial x_k} - \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial t} - \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial x_\nu} \dot{x}_\nu - F_k(x, \dot{x}, t)$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09258966 МНВО РК.

Ключевые слова: уравнение Ито, уравнение Лагранжа, непотенциальные силы, случайные возмущающие силы.

2010 Mathematics Subject Classification: 34Cxx, 60G07, 60H10

Литература

[1] Гельмгольц Г. О физическом значении принципа наименьшего действия, в: *Вариационные принципы механики*, Физматгиз, М. (1959), 430–459.

[2] Santilli R.M. *Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1978).

[3] Tleubergenov M.I., Azhymbaev D.T. Stochastic problem of Helmholtz for Birkhoff system, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*, **1**(93) (2019), 78–87.

[4] Tleubergenov, M.I., Azhymbaev D.T. On the Solvability of Stochastic Helmholtz Problem, *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, **253**(2) (2021), 297–305.

[5] Marat Tleubergenov, Gulmira Vassilina, Darkhan Azhymbaev. Stochastic Helmholtz problem and convergence in distribution, *Filomat*, **36**:7 (2022), 2451–2460.

[6] Шорохов С.Г. Представимость систем дифференциальных уравнений в виде уравнений механики с заданной структурой сил, *Дифференциальные уравнения*, **24**:10 (1988), 1738–1746.

[7] Ватанабэ С., Икэда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М. (1986).

Об одном общем решении краевой задачи с импульсным воздействием

Агила ТЛЕУЛЕСОВА[a], Айдана ОРАЗБЕКОВА[b]

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: [a]agila_72@mail.ru, [b]mt-513@mail.ru

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in (0, T), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^n, \tag{2}$$

$$x(\theta_i + 0) - x(\theta_i - 0) = p_i, i = \overline{1, m}, \tag{3}$$

где $n \times n$ матрица $A(t)$ и n - вектор $f(t)$ кусочно- непрерывные на $[0, T]$ с возможными разрывами в точках импульсных воздействий $t = \theta_i$.

Возьмем Δ_{m+1}: $t_0 = 0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_m < \theta_{m+1} = T$. Обозначим через $C([0,T], \Delta_{m+1}, R^{n(m+1)})$ пространство систем $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m+1}(t))$, где функции $x_r : [t_{r-1}, t_r) \to R^n$ непрерывны и $\lim\limits_{t \to t_r - 0} x_r(t)$, $r = \overline{1, m+1}$, с нормой $||x[\cdot]||_2 = \max\limits_{r=\overline{1,m+1}} \sup\limits_{t \in [t_{r-1}, t_r)} ||x_r(t)||$.

Пусть $x(t)$ - решение уравнения (1) и $x_r(t)$ - его сужение на интервал $[t_{r-1}, t_r)$, т. е. $x_r(t) = x(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, m+1}$. Тогда $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m+1}(t)) \in C([0,T], \Delta_{m+1}, R^{n(m+1)})$, и его элементы $x_r(t)$, $r = \overline{1, m+1}$, удовлетворяют следующей системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + f(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, m+1}. \tag{4}$$

Введем параметры $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1, m+1}$. Делаем подстановку $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ на каждом r-ом интервале $[t_{r-1}, t_r)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + f(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad r = \overline{1, m+1}, \tag{5}$$

с начальным условием

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad r = \overline{1, m+1}. \tag{6}$$

Для любого фиксированного $\lambda_r \in R^n$, $r = \overline{1.m+1}$ задача Коши (5), (6) имеет единственное решение $u_r(t, \lambda_r)$ и система функций $u[t, \lambda] = (u_1(t, \lambda_1), u_2(t, \lambda_2)$ $, \dots, u_{m+1}(t, \lambda_{m+1})) \in C([0,T], \Delta_{m+1}, R^{n(m+1)})$.

Аналогично [1, 1008 с.], введем новое общее решение для обыкновенного дифференциального уравнение с импульсным воздействием (1).

Определение 1. [1] *Пусть $u[t, \lambda] = (u_1(t, \lambda_1), u_2(t, \lambda_2), \dots, u_{m+1}(t, \lambda_{m+1}))$ будет решением задачи Коши (5), (6) для параметра $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$. Тогда функция $x(\Delta_{m+1}, t, \lambda)$, заданная равенствами*

$x(\Delta_r, t, \lambda) = \lambda_r + u_r(t, \lambda_r)$ для $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, и

$x(\Delta_{m+1}, T, \lambda) = \lambda_{m+1} + \lim\limits_{t \to T-0} u_{m+1}(t, \lambda_{m+1})$,

называется Δ_{m+1} общим решением для уравнений (1).

Как следует из определения 1, общее решение Δ_{m+1} зависит от $m+1$ произвольных векторов $\lambda_r \in R^n$ и удовлетворяет уравнению (1) для всех $t \in (0,T) \backslash \{\theta_r, r = \overline{1, m+1}\}$.

Возьмем $X_r(t)$, фундаментальную матрицу обыкновенного дифференциального уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1, m+1},$$

и запишем решения для задачи Коши с параметрами (5), (6) в виде:

$$u_r(t, \lambda_r) = X_r(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\lambda_r + X_r(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r),$$

$r = \overline{1, m+1}$.

Теорема 1. *Пусть кусочно-непрерывная на $[0,T]$ функция $\widetilde{x}(t)$ с возможными точками разрыва $t = t_r$, $r = \overline{1, m}$, и $x(\Delta_{m+1}, t, \lambda)$ - общее решение Δ_{m+1} для уравнения (1). Предполагаем что функция $\widetilde{x}(t)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению (1) для всех $t \in (0,T) \backslash \{t_r, r = \overline{1, m}\}$. Тогда существует единственная $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$ такой что, равенство $x(\Delta_{m+1}, t, \tilde{\lambda}) = \tilde{x}(t)$ выполняется для всех $t \in [0,T]$.*

Keywords: $\triangle_{m+1}$ general solution, initial approximation, boundary value problems with impulsive action.

References

[1] Dzhumabaev, D. S. New General Solutions of Ordinary Differential Equations and The Methods for The Solution of Boundary-Value Problems, *Ukrainian Mathematical journal*,(2019) 1006-1031

[2] Assanova A. T. and TleulessovaA. B. Nonlocal problem for a system of partial differential equations of higher order with pulsed actions, *Ukrainian Mathematical journal*, (2020) 1821-1842

Прямые и обратные задачи для параболического уравнения с множественной инволюцией

Батирхан ТУРМЕТОВ

Международный казахско-турецкий университет им.Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: e-mail batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

В данной работе вводится понятия нелокального аналога оператора Лапласа и для соответствующего нелокального параболического уравнения в цилиндрической области изучаются прямые и обратные задачи. Доказаны теоремы о существования и единственности решения рассматриваемых задач.

Пусть $Q = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega-$ единичный шар из $R^n, n \geq 2$, $\partial\Omega-$ единичная сфера. Для любого $x = (x_1, ..., x_n)$ из $\bar{\Omega}$ рассмотрим отображения $S_j x = (x_1, ..., x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, ...x_n), 1 \leq j \leq l, l \leq n$. Если рассмотрим всевозможные произведения отображений вида $S_j x$, то общее количество таких отображений, с учетом отображения $S_0 x = x$ будет равняться 2^l. Если ввести запись индекса суммирования i в двоичной системе счисления $(i_n...i_1)_2 \equiv i$, где $i_k = 0, 1$ при $k = 1, ..., l$, то мы можем рассмотреть отображения вида $S_l^{i_l} \cdot ... \cdot S_1^{i_1} x$.

Пусть $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_{2l-1}$ — некоторый набор действительных чисел. Введем оператор

$$L_l v(x) = \sum_{i=0}^{2^l-1} a_i \Delta v\left(S_l^{i_l} ... S_1^{i_1} x\right)$$

Отметим, что спектральные вопросы оператора L_l изучены в работе [1].

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = L_l u(t, x) + F(t, x), (t, x) \in Q, \tag{1}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), x \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(t, x) = 0, 0 \leq t \leq T, x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Решением задачи (1)-(3) назовем функцию $u(t, x) \in C(\bar{Q})$, для которой $u_t(t, x)$ и $L_x u(t, x)$ принадлежат классу $C(Q)$, и удовлетворяют условиям (1)-(3) в классическом смысле.

Введем обозначение $\theta_k = \sum\limits_{i=0}^{2^l-1} (-1)^{k \otimes i} a_i$, где $k = 0, 1, ..., 2^l-1, k \otimes i \equiv (k_l...k_1)_2 \otimes (i_l...i_1)_2 = k_1 \cdot i_1 + ... + k_l \cdot i_l$.

Теорема 1. *Пусть в задаче (1)-(3) коэффициенты* $a_i, i = 0, 1, ..., 2^l - 1$ *такие, что для всех* $k = 0, 1, ..., 2^l - 1$ *выполняются условия* $\theta_k > 0$, *функции* $\varphi(x)$ *и* $F(t, x)$ *удовлетворяют условиям:*

$$1)\ \varphi(x) \in C^q\left(\bar{\Omega}\right), \frac{\partial^{q+1}\varphi(x)}{\partial x_1^{q_1} ... \partial x_n^{q_n}} \in L_2\left(\Omega\right), q_1 + ... + q_n = q + 1, q = \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

$$\varphi(x)|_{\partial\Omega} = \Delta\varphi(x)|_{\partial\Omega} = ... = \Delta^{\left[\frac{q}{2}\right]}\varphi(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0;$$

$$2)\ F(t,x) \in C^q\left(\bar{Q}\right), \frac{\partial^{q+1} F(t,x)}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} \in L_2\left(\Omega\right), q_1 + \dots + q_n = q+1, q = \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

$$F(t,x)|_{\partial\Omega} = \Delta F(t,x)|_{\partial\Omega} = \dots = \Delta^{\left[\frac{q+2}{4}\right]} F(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда решение задачи (1)-(3) существует и единственно.

В работе также изучены обратные задачи по отысканию множителей правой части $F(t,x) = f(x)g(t)$, зависящих от пространственных переменных и времени. Аналогичные задачи для классического параболического уравнения в случае $n = 2$ и $\Omega-$ прямоугольник изучены в работе [2].

Funding: Данная работа была поддержана грантом AP09259074 МОН РК.

Ключевые слова:параболическое уравнение, нелокальное уравнение,множественная инволюция, прямая задача,обратная задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 34K29

Литература

[1] Turmetov B., Karachik V. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution, *Symmetry*, **13**:1781 (2021), 1–20.

[2] Сабитов К.Б., Зайнулов А.Р. Обратные задачи для двумерного уравнения теплопроводности по отысканию правой части, *Известия Вузов.Математика*, **3** (2021), 83–97.

Вычислительный алгоритм решения второй начально-краевой задачи для уравнения диффузии с дробной производной по времени

Марат УМИРБЕКОВ[1,a], Махмуд САДЫБЕКОВ[1,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*umyrbekov.marat@gmail.com*, [b]*sadybekov@math.kz*

В докладе рассматривается вторая начально-краевая задача для уравнения субдиффузии. То есть для уравнения теплопроводности с дробной производной по времени:

$$D_t^\alpha u(x,t) = a(x)u_{xx}(x,t) + b(x)u_x(x,t) + c(x)u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

где $u(x,t)$ - искомая функция, а $a(x), b(x), c(x), f(x,t)$ - известные функции. Показатель $0 < \alpha < 1$ - это порядок дробной производной по времени.

В работе используется дробная производная Капуто:

$$D_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{dv(s)}{ds}(t-s)^{-\alpha} ds.$$

Задача рассматривается в пространственном интервале $0 < x < l$ и временном интервале $0 < t < T$. Рассматриваются граничные условия типа Неймана

$$u_x(0,t) = g_1(t), u_x(l,t) = g_2(t) \tag{2}$$

и начальное условие

$$u(x,0) = \phi(x), 0 \le x \le l, \tag{3}$$

где $g_1(t), g_2(t)$ и $\phi(x)$ - заданные функции.

В случае, когда вместо краевого условия (2) используется условие Дирихле

$$u(0,t) = g_1(t), u(l,t) = g_2(t) \tag{4}$$

эта задача была подробно исследована в [1]. Основным результатом является разработка параллельных алгоритмов решения начально-краевой задачи (2)-(3) для уравнения диффузии с дробным временем (1). После применения конечно-разностной схемы для аппроксимации базисного уравнения задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений для каждого последующего временного уровня. Разработанные параллельные алгоритмы основаны на алгоритме Томаса, алгоритме параллельной прогонки и методе ускоренной сверхрелаксации для решения этой системы.

Funding: Авторы поддержаны грантом No AP19175805 МНВО РК.

Keywords: уравнение диффузии, условие Неймана, дробная производная, вычислительный алгоритм, параллельные вычисления, метод прогонки.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 335K15, 65M12

References

[1] Sultanov M.A., Akimova E.N., Misilov V.E., Nurlanuly Y. Parallel Direct and Iterative Methods for Solving the Time-Fractional Diffusion Equation on Multicore Processors, *Mathematics*, **10**:3 (2022), 323.

Об одном подходе к решению многоточечной краевой задачи для интегро- дифференциальных уравнений типа пантографа

Кайрат УСМАНОВ[1,a], Кулзина НАЗАРОВА[2,b] Жаннур ТУРГАНБАЕВА[3,c]

[1] *Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави, Туркестан, Казахстан*

E-mail: [a]kairat.usmanov@ayu.edu.kz, [b]kulzina.nazarova@ayu.edu.kz, [c]zhannur.turganbayeva@ayu.edu.kz

Уравнения пантографа (в том числе и в случае $\alpha > 1$) изучаются давно. В 1940 г. K.Mahler [1] ввел в теорию чисел функционально-дифференциальные уравнения такого типа. В 1971 году L.Fox и др. [2] и J.Ockendon и др. [3] предложили такого рода уравнения в качестве моделей для изучения некоторых промышленных задач. В работе [4] A.Iserles и Y.Liu изучали интегро-дифференциальное уравнение пантографа.

Многоточечные краевые задачи для различных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их применения рассмотрены во многих работах. Многоточечные краевые условия являются важными в прикладном плане, так как имеют прямое отношение к теории сплайна и интерполирования, а также используются в исследовании задач с многоопорными балками. Например, в работе [5] многоточечные краевые условие применены при проектировании мостов.

Поэтому, в настоящей работе мы решили исследовать многоточечную краевую задачу для интегро-дифференциальных уравнений, имеющие преобразования типа пантографа. Для определения однозначной разрешимости исследуемой задачи, будет применен метод параметризации профессора Д.Джумабаева [6].

На отрезке $[0,1]$ рассматривается многоточечная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения типа пантографа

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \int\limits_0^1 K(t,s)x(\varepsilon s)ds + f(t), \quad t \in [0,1],\ \varepsilon \leq 1,\ \ x \in R^n, \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m} B_i x(\theta_i) = d, d \in R^n, \tag{2}$$

$$0 = \theta_0 < \ldots < \theta_k = \varepsilon < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m = 1,$$

где матрица $K_1(t,s)$ непрерывна на $[0,1]$, матрица $K(t,s)$ непрерывна соответственно на $[0,1]\times[0,1]$, а n- мерная вектор-функция $f(t)$ непрерывна на $[0,1]$. B_i, $i=\overline{0,m}$- постоянные матрицы.

К краевой задаче (1), (2) применяем метод параметризации, для этого производим разбиение: $[0,1) = \bigcup\limits_{r=1}^{m} [t_{r-1}, t_r)$, где $t_i = \theta_i, \quad i = \overline{0,m}$. Обозначим $h = \max\{h_1, h_1, \ldots, h_m\}$, $h_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \quad i = \overline{1,m}$, $\alpha = \max\limits_{t\in[0,1]} \|A(t)\|$, $\beta = \max\limits_{t,s\in[0,1]} \|K(t,s)\|$.

Введя обозначения $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1,m}$, $\lambda_{m+1} = \lim\limits_{t\to 1-} x_m(t)$ и на каждом интервале $t \in [t_{r-1}, t_r)$ произведем замену $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$, $r = \overline{1,m}$. Тогда исходную краевую задачу формально разбиваем на две части, т.е. на задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения типа пантографа и систему алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Требуя однозначную разрешимость полученной задачи Коши, однозначную разрешимость исследуемой краевой задачи сведем к обратимости полученной матрицы систем алгебраических уравнений. На основе метода параметризации установим:

Теорема. *Краевая задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда матрица $Q_\varepsilon(h)$ была обратима при $h \in (0, h_0]$, где $e^{\alpha h_0}\beta h_0 < 1$.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом № AP09259137 МОН РК.

Ключевые слова:функционально-дифференциальные уравнения, интегро - дифференциальные уравнения типа пантографа, краевая задача, метод параметризации.

2010 Mathematics Subject Classification: 45J05, 45J99, 34K28

Литература

[1] Mahler K. On a special functional equation, *J. london Math. Soc.*, **1**:2 (1 940), 115–123.

[2]L. Fox, D. F. Mayers, J. R. Ockendon and A. B. Tayler On a functional differantical equation, *IMA Journal of Applied Mathematics* , **8**:3 (1971), 271–307.

[3] J.R. Ockendon, A.B. TaylerThe dynamics of a current collection system for an electric locomotive, *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society*, **322**:1551 (1971), 447–468

[4] A. Iserles, Yunkang Liu *On pantograph integro-differential equations*, University of Cambridge, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, (1993).

[5] Geng F., Cui M. Multi-point boundary value problem for optimal bridge design, *Int. J. Comput. Math.*, **87** 2010, 1051–1056.

[6] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *Comput Maths Math Phys.* **29**1989, 34–46.

О некоторых свойствах одной специальной функции Фокса с четырьмя параметрами

Фатима ХУШТОВА

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: khushtova@yandex.ru

Пусть $0 < \rho \leqslant 2$, μ, σ и $\nu \in \mathbb{C}$, $(\sigma+\nu)/2 \notin \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию от комплексного переменного z

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = H_{2,3}^{2,1}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2 \,\middle|\, \begin{matrix} (1-\sigma/2, 1),\ (\mu-\rho\sigma/2, \rho) \\ (\nu/2, 1),\ (1-\sigma/2, 1),\ (-\nu/2, 1) \end{matrix}\right], \tag{1}$$

где $H_{2,3}^{2,1}[\ldots]$ – *H-функция Фокса* [1], [2]. Функция (1) возникает при исследовании краевых задач для дифференциального уравнения с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и производной дробного порядка по временной переменной [3], [4]. Частными случаями функции (1) являются функции

$$\mathcal{J}_\nu^{1,1,\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\gamma\left(\nu; \frac{z^2}{4}\right), \quad \mathcal{J}_\nu^{1,1,2+\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right),$$

$$\mathcal{J}_\nu^{1,1,2-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} E_{1,1+\nu}\left(-\frac{z^2}{4}\right), \quad \sqrt{z}\mathcal{J}_{-1/2}^{2\rho,\mu,3/2}(z) = \sqrt{2\pi}\phi\left(-\rho, \mu-\rho; z\right),$$

$$\mathcal{J}_{\nu}^{1,1,\sigma}(z)=\frac{\Gamma\left((\sigma+\nu)/2\right)}{\Gamma\left(1+\nu\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\Phi\left((\sigma+\nu)/2,1+\nu;-\frac{z^2}{4}\right).$$

Здесь $\gamma\,(\nu;z)$ – неполная гамма-функция [5, с. 254], $E_{\rho,\mu}\,(z)$ – функция типа Миттаг-Леффелера [6, с. 117], $\phi\,(\rho,\mu;z)$ – функция Райта [7], $\Phi\,(a,c;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция [5, с. 237].

Для функции (1) справедливы свойства

Свойство 1. *Имеет место формула*

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma}(z)=(-1)^n\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu+n\rho,\sigma+2n}(z)+\sum_{k=0}^{n-1}d_k\left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-2k},\quad n=1,2,...,$$

где

$$d_k=\frac{(-1)^k\Gamma\left((\nu+\sigma)/2+k\right)}{\Gamma\left(\mu+\rho k\right)\Gamma\left(1+(\nu-\sigma)/2-k\right)}.$$

Свойство 2. *Справедлива формула*

$$z^{1-\sigma}\frac{d}{dz}\left[z^{\sigma}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)\right]=\frac{2}{\rho}\left[\mu\,\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)-\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma}(z)\right].\tag{13}$$

Свойство 3. *Имеет место формула дифференцирования*

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2})\right]=z^{\mu-n-\rho\sigma/2-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu-n,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2}),\tag{14}$$

где $\lambda=const$, $n=1,2,...$

Некоторым другим свойствам функции (1) посвящены работы [8]-[10].

Ключевые слова: функция Фокса, уравнение диффузии, оператор Бесселя.

2010 Mathematics Subject Classification: 33C60, 33D15

Литература

[1] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Т. 3. Дополнительные главы*, Наука, Москва (1986).

[2] Kilbas A.A., Saigo M. *H-Transform. Theory and Applications*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York and Washington, D.C. (2004).

[3] Хуштова Ф.Г. Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля, *Математические заметки*, **99**:6 (2016), 921–928.

[4] Хуштова Ф.Г. Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля, *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 460–470.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Т. I.*, Наука, Москва (1965).

[6] Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, Москва (1966).

[7] Wright E.M. The generalized Bessel function of order greater than one, *The Quarterly Journal of Mathematics*, **os-1**:1 (1940), 36–48.

[8] Хуштова Ф.Г. Об интегральном представлении Меллина–Барнса одной специальной функции, *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*, **6** (2022), 19–27.

[9] Хуштова Ф.Г. О некоторых свойствах одной специальной функции, *Доклады АМАН*, **22**:2 (2022), 34–40.

[10] Хуштова Ф.Г. Некоторые формулы дробного интегрирования от одной функции Фокса с четырьмя параметрами, *Доклады АМАН*, **22**:4 (2022), 29–38.

Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в области эллиптическая часть которой горизонтальная полоса

А.А.Эргашев[1,a], Ф.Э.Юлдашева[1,2,b]

[1] Кокандский государственный педагогический институт, Коканд, Узбекистан
[2] Академический лицей Международного Вестминстерского Университета в Ташкенте, Ташкент, Узбекистан
E-mail: [a]ergashev1967@bk.ru, [b]feyuldasheva@gmail.com

Рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода

$$\mathrm{u}_{xx} + sign\, y|y|^m u_{yy} = 0, 0 < m < 1 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $D = D_1 \cup J \cup D_2$,
где $D_1 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$, $J = \{(x, y) : y = 0,\ 0 < x < 1\}$ а D_2 - конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB прямой $y = 0$ и характеристиками

$$AC:\ x - [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 0, BC:\ x + [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и пересекающимися в точке $C(1/2, -((2-m)/4)^{2/(2-m)})$.

Введем обозначения $\beta = m/\,(2m + 4)$, $J_1 = \{(x, y) : y = 0, -\infty < x < 0\}$, $J_2 = \{(x, y) : y = 0,\ 1 < x < +\infty\}$,$J_3 = \{(x, y) : y = 1, -\infty < x < +\infty\}$.

Задача T. Найти функцию $u(x, y)$ со следующим и свойствами:

1) $u(x, y) \in C(D \cup \overline{J_1} \cup \overline{J_2} \cup AC \cup BC)$;

2) первые ее производные непрерывны в D_1 и D_2 причем $u_y(x, +0) = -u_y(x, -0)$, $0 < x < 1$, и в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ производная u_y может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка;

3) $u(x, y) \in C^2(D_1)$ удовлетворяет уравнению (1);

4) $u(x, y)$ в D_2 есть обобщенное решение уравнения (1) из класса R , введенного И.Л. Каролем [1];

5) $u(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$u_y(x, 0) = \psi_i(x), \forall x \in J_i, (i = 1, 2)$$

$$u(x, 1) = \psi_3(x), \forall x \in J_3$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x, y) = 0, (\text{равномерно по}) \forall y \in [0, 1]$$

$$u\mid_{AC} = \psi(x), \forall x \in [0, 1/2]$$

где $\psi_i(x)$, $\psi_3(x)$, $\psi(x)$ - заданные функции, причем $\psi_i(x)$ в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка а также $\psi_i(x) \in C(J_i)$, а для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенствам

$$|\psi_i(x)| \leq M_1|x|^{-1-\sigma}, M_1, \sigma = const, \sigma > 0.$$

Функция $\psi_3(x) \in C(J_3)$, имеет вторую производную ограниченную и интегрируемую в $[0, 1/2]$ а для достаточно больших $|x|$ удовлетворяет неравенству

$$|\psi_3(x)| \leq M_2|x|^{-\epsilon}, M_2, \epsilon = const, \epsilon > 0.$$

В данной работе , исследуется вопрос однозначной разрешимости видоизмененной задачи Трикоми в неограниченной области эллиптическая часть которой является горизонтальной полосой. Единственность решения доказывается методом интегралов энергии . Методом функций Грина и путем редукции к уравнению Фредгольма второго рода устанавливается существование решения исследуемой задачи, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

Ключевые слова: задача Трикоми, уравнение смешанного типа второго рода, горизонтальная полоса, метод интегралов энергии, метод функций Грина.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10

Литература

[1] Кароль И.Л. Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа . Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд.физ.-мат.наук.- Ленинград.1952.

A nonlocal problem for integro-partial differential equations of mixed type

Aziza ABILDAYEVA[1,a], Anar ASSANOVA[1,b], Aigul SABALAKHOVA[2,c]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *M.Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan*
E-mail: [a]*azizakz@mail.ru*, [b]*assanova@math.kz*, [c]*sabalahova@mail.ru*

On the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ we consider a nonlocal problem for a system of integro-partial differential equations of mixed type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x)+$$

$$+\varphi_1(t,x)\int_0^T \psi_1(s,x)\frac{\partial u(s,x)}{\partial x}ds + \varphi_2(t,x)\int_0^t \psi_2(s,x)\frac{\partial u(s,x)}{\partial x}ds, \qquad (1)$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} + P_0(x)u(0,x)+$$

$$+S_2(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=T} + P_0(x)u(T,x) = d(x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2)$$

$$u(t,0) = \theta(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (3)$$

where $u(t,x) = (u_1(t,x),...,u_n(t,x))$ is unknown function, the $n \times n$ matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $\varphi_1(t,x)$, $\varphi_2(t,x)$, $\psi_1(t,x)$, $\psi_2(t,x)$ are continuous on Ω, the n vector function $f(t,x)$ is continuous on Ω, $n \times n$ matrices $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_2(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, n vector function $d(x)$ is continuous on $[0,\omega]$, the n vector function is continuously differentiable on $[0,T]$.

Continuous function $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ that has a continuous partial derivatives $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ on Ω is called a solution to the nonlocal problem for the system of integro-partial differential equations of mixed type (1)–(3) if it satisfies system (1) and conditions (2), (3) for all $(t,x) \in \Omega$ and $x \in [0,\omega]$, $t \in [0,T]$, respectively.

We study the solvability of the nonlocal problem for the system of integro-partial differential equations of mixed type with degenerate kernels.

Using a new functions [1] the original problem is reduced to a family of boundary value problems for the system Volterra-Fredholm integro-differential equations with an unknown functions [2].

Further, we are transfered this problem to the family of boundary value problems for the $2n$ system Fredholm integro-differential equations with an unknown functions.

For solving this problem we use Dzhumabaev's parametrization method [3-6].

Then, by introducing an additional functional parameter as the value of the solution on the boundary of the domain, the problem is reduced to an equivalent problem containing a family of Cauchy problems for a system of Fredholm integro-differential equations with unknown functions. We apply results in [7-10] for establishing the solvability conditions of the family of boundary value problems for the $2n$ system Fredholm integro-differential equations with an unknown functions.

Conditions for the unique solvability of the original problem are obtained in terms of the solvability of families of Cauchy problems for the system of Fredholm integro-differential equations.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09258829).

Keywords: nonlocal problem, integro-partial differential equations of mixed type, family of boundary value problems, integro-differential equations of mixed type, parametrization method, solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K10, 34K29, 34K34, 45J05

References

[1] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **402**:1 (2013), 167–178.

[2] Assanova A.T., Sabalakhova A.P., Toleukhanova Z.M. On the unique solvability of a family of boundary value problems for integro-differential equations of mixed type, *Lobachevskii J. Math.*, **42**:6 (2021), 1228–1238.

[3] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[4] Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integrodifferential equations, *Math. Methods Appl. Sci.*, **41**:7 (2018), 1439–1462.

[5] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, *J. Comp. Appl. Math.*, **327**:1 (2018), 79–108.

[6] Dzhumabaev D.S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary value problems, *Ukranian Math. J.*, **71**:7 (2019), 1006–1031.

[7] Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Z.M. and Uteshova R.E. A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations, *Comp. Appl. Math.*, **39**:3 (2020), Art. 248.

[8] Assanova A.T., Bakirova E.A., Vassilina G.K. Well-posedness of problem with parameter for an integro-differential equation, *Analysis (Germany)*, **40**:4 (2020), 175–191.

[9] Bakirova E.A., Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M. A problem with parameter for the integro-differential equations, *Math. Modelling and Anal.*, **26**:1 (2021), 34–54.

[10] Abildayeva A.D., Kaparova R.M., Assanova A.T. To a unique solvability of a problem with integral condition for integro-differential equation, *Lobachevskii J. Math.*, **42**:12 (2021), 2697–2706.

On the best constant for hypoelliptic Sobolev inequality

Yermurat ADILBEKOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan
E-mail: adilbekov.yermurat@gmail.com

In this talk, we investigate the best constant in hypoelliptic homogeneous Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequality. We refer to the recent works [1] and [2] for the best constants in the Sobolev inequality with inhomogeneous norm and critical Gagliardo-Nirenberg inequality, where the best constants were expressed in the variational form as well as in terms of the ground state solutions of the nonlinear Schrödinger equation.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (Suleyman Demirel University, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058474).

Keywords: Sobolev inequality, hypoelliptic operator, best constant.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 43A80

References

[1] Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Yessirkegenov N. Best constants in Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities on graded groups and ground states for higher order nonlinear subelliptic equations, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **59**: (2020), Art. No. 175.

[2] Ruzhansky M., Yessirkegenov N. Critical Gagliardo-Nirenberg, Trudinger, Brezis-Gallouet-Wainger inequalities on graded groups and ground states, *Commun. Contemp. Math.*, **24**:8 (2022), Art. No. 2150061.

Inverse source problems for heat convection system governing Kelvin-Voigt flows

Stanislav ANTONTSEV[1], Khonatbek KHOMPYSH[2,a]

[1] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia*
[2] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a] konat_k@mail.ru

In this work, we consider some inverse source problems for the following heat convection system governing motion of incompressible viscoelastic Kelvin-Voigt fluids

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} - \varkappa\Delta\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla\pi = \mathbf{g}(\mathbf{x},t)\theta(x,t) + f(t)\mathbf{h}(\mathbf{x},t), \quad (x,t)\in Q_T$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (x,t)\in Q_T,$$

$$\theta_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\theta - \lambda\Delta\theta = j(t)\phi(\mathbf{x},t), \quad (x,t)\in Q_T,$$

which is supplemented with the initial conditions

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}),\, \theta(\mathbf{x},0) = \theta_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega,$$

the dirichlet boundary condition for $\theta(\mathbf{x},t)$

$$\theta(\mathbf{x},t) = 0, \ (\mathbf{x},t)\in\Gamma_T,$$

and for $\mathbf{v}$ the sticking-boundary condition

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t)\in\Gamma_T$$

or the sliding-boundary condition

$$\mathbf{v}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{D}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n})\times\mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{x},t)\in\Gamma_T$$

and with the integral overdetermination conditions

$$\int\limits_{\Omega}\mathbf{v}\sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x} = e(t), \ \int\limits_{\Omega}\theta\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \delta(t), \ t\geq 0,$$

where $Q_T = \Omega\times(0,T)$, and Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^d$, $d = 2,3$, with a smooth boundary $\partial\Omega$.

The inverse problems consist of finding velocity $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, pressure $\pi(\mathbf{x},t)$, temperature $\theta(\mathbf{x},t)$, and intensities of external forces $f(t)$ and heat source $j(t)$. The talk deals to establish the existence and uniqueness of weak and strong solutions of these posed inverse problems.

Funding: This work has been funded by Grant number AP19674862 the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (MES RK), Kazakhstan.

Keywords: Inverse problem; Kelvin-Voigt; heat convection; incompressible viscoelastic fluids.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q35; 76D03; 76A10

Radial and logarithmic refinements of the weighted Hardy inequality

Kuralay APSEIT

Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: kuralay.apseit@sdu.edu.kz

In this talk, we discuss weighted versions of radial and logarithmic refinements of the following Hardy's inequality using the factorization method of differential operators from [1]-[3]:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |(\nabla f)(x)|^2 d^n x \geqslant \int_\Omega |x-x_0|^{-2} |f(x)|^2 \Bigg\{ & \frac{(n-2)^2}{4} \\ & + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{j}\left[\ln_k\left(\gamma/|x-x_0|\right)\right]^{-2}\Bigg\} d^n x,\end{aligned} \qquad (1)$$

valid for $f \in C_0^\infty(\Omega)$, assuming that $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, is open and bounded with $x_0 \in \Omega, m \in \mathbb{N}$, and the logarithmic terms $\ln_k\left(\gamma/|x-x_0|\right), k \in \mathbb{N}$.

Moreover, we discuss generalizations of these results on homogeneous Lie groups.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (Suleyman Demirel University, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691).

Keywords: factorization method, Hardy's inequality, homogeneous Lie group, stratified group.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30,26D10

References

[1] Gesztesy, F., Littlejohn, L. L. Factorizations and Hardy–Rellich-type inequalities. Non-linear partial differential equations, mathematical physics, and stochastic analysis, *EMS Ser. Congr. Rep.,Eur. Math. Soc., Zürich.*, (2018), 207–226.

[2] M. Ruzhansky and N. Yessirkegenov. Factorizations and Hardy–Rellich inequalities on stratified groups, *Journal of Spectral Theory*, **10(4)**, (2021), 1361–1411

[3] F.Gesztesy, L. L. Littlejohn, I. Michael, And Michael M. H. Pang. Radial and Logarithmic refinements of Hardy's inequality, *St Petersburg Math. J.*, **30(3)**:1,(2019), 429–436.

Asymptotic behavior of the solution of a boundary value problem with an initial jump for a singularly perturbed integro-differential equation

Zhanar ARTYKBAYEVA[a], Aziza MIRZAKULOVA[b]

Al-Farabi Kazakh National University
E-mail: [a]artykbaeva.zhanar@gmail.com, [b]mirzakulovaaziza@gmail.com

We consider third-order linear differential equation with a small parameter at the two highest derivatives

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t)y'' + A_1(t)y' + A_2(t)y = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} H_j(t,x)y^{(j)}(x,\varepsilon)dx \qquad (1)$$

for $0 < t < 1$ with the initial conditions

$$h_1 y \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha,\; h_2 y \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta,\; h_3 y \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma, \qquad (2)$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $A_i(t)$ $(i = \overline{0,2})$, $F(t)$, $H_0(t,x)$, $H_1(t,x)$ and $H_2(t,x)$ are given functions and α, β, γ are known constants. Let us assume that:

I. $A_i \in C^2[0,1]$, $i = \overline{0,2}$, $F \in C[0,1]$, and $H_0,\ H_1,\ H_2 \in C(D)$, where $D = \{0 \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1\}$.

II. $A_1(t) \ne 0,\ 0 \le t \le 1$.

III. The roots of the "additional characteristic equation"

$$\mu^2 + A_0(t)\mu + A_1(t) = 0$$

satisfy the conditions $Re\mu_1(t) < -\gamma_1 < 0,\ Re\mu_2(t) < -\gamma_2 < 0$.

IV. Assume that 1 is not an eigenvalue of the kernel $H(t,s,\epsilon)$.

Under the assumptions I-IV, we obtain the analytical formula of the solution for the boundary value problem with initial jump (1)-(2). Theorem about the existence and uniqueness of the solution is proved. Using the asymptotic properties of the Cauchy and boundary functions, the asymptotic estimate of the solution was obtained. From this asymptotic estimate, we showed that the solution of problem (1)-(2) at the point $t = 0$ has an initial jump of order zero of the second degree. Other type of boundary value problems for the equation (1) are considered in [1-3].

Keywords: singularly perturbed equation, asymptotic estimate, Cauchy function, boundary function, small parameter, fundamental solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B08

References

[1] Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E. Asymptotic behavior of solutions of singular integro-differential equations, *An Interdisciplinary Journal of Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*, **5**:2 (2016), 147–154.

[2] Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E. Boundary-value problems with initial jumps for singularly perturbed integro-differential equations, *Journal of Mathematical Sciences*, **222**:3 (2017), 214–225.

[3] Dauylbayev M. K., Artykbayeva Zh., Konysbaeva K. Asymptotic behavior of the solution of a singularly perturbed three-point boundary value problem with boundary jumps, *International Journal of Mathematics and Physics*, **10**:2 (2019), 47–52.

Direct and inverse problems for the Barenblatt-Zheltov-Kochina type fractional equations with the Hilfer fractional derivative

Ravshan ASHUROV[1,a], Yusuf FAYZIEV[2,b], Nozima TUKHTAEVA[1,c]

[1] *Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Student Town str.,100174, Tashkent, Uzbekistan*

[2] *National University of Uzbekistan, Student Town str.,100174, Tashkent, Uzbekistan*

E-mail: [a]*ashurov@gmail.com*, [b]*fayziev.yusuf@mail.ru*, [c]*nozimatoxtayeva3715@gmail.com*

Let H be a separable Hilbert space and the operator $A : H \to H$ be a self-adjoint, positive, unbounded arbitrary operator with the domain of definition $D(A)$. Suppose that operator A has a complete orthonormal system of eigenfunctions $\{v_k\}$ in the space H and the corresponding set of positive eigenvalues $\{\lambda_k\}$. We can renumber eigenvalues non-descendingly, that is, write $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \cdots \to +\infty$.

Let the vector-function (or simply function) $g(t)$ be defined in the interval $[0, +\infty)$ with values in H. The Hilfer fractional derivative of order $0 < \alpha < 1$ and $0 \le \beta \le 1$ are defined as (see e.g.[1])

$$D^{\alpha,\beta} g(t) = I^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I^{(1-\beta)(1-\alpha)} g(t). \tag{1}$$

Let $0 < \alpha < 1$ and $0 \le \beta \le 1$ are given numbers. Consider the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} u(t) + A(1 + \gamma D_t^{\alpha,\beta}) u(t) = f, \quad 0 < t \le T, \\ I^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t)|_{t=+0} = \varphi, \quad 0 < t \le T. \end{cases} \tag{2}$$

Definition 1. We call a function $u(t) \in C((0,T];H)$ the solution of the problem (2), if $D_t^{\alpha,\beta}u(t),\ A(D_t^{\alpha,\beta}u(t)),\ Au(t) \in C((0,T];H)$ and it satisfies conditions (2).

Theorem 1. Let $f \in H$.

i) If $\gamma > 0$ and $\varphi \in D(A)$, then there is a unique solution to the direct problem (2) and it has the form

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k t^{-\delta} E_{\alpha,1-\delta}(-\mu_k t^{\alpha}) + \frac{f_k}{1+\gamma\lambda_k} t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu_k t^{\alpha}) \right] v_k, \tag{3}$$

where $f_k,\ \varphi_k$ are the Fourier coefficients of the functions f and φ respectively, $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{1+\gamma\lambda_k}$ and $\delta = (1-\alpha)(1-\beta)$.

ii) If $\gamma = 0$ and $\varphi \in H$, then there is a unique solution to the forward problem and it has the form

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k t^{-\delta} E_{\alpha,1-\delta}(-\lambda_k t^{\alpha}) + f_k t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^{\alpha}) \right] v_k.$$

Here $E_{\rho,\mu}(z)$ is the two parametric Mittag-Leffler function.

The main goal of this work is to study the inverse problem of determining the right-hand side of equation in problem (2). Now assume that in problem (2), along with the function $u(t)$, the function f is also unknown. To study the inverse problem, we need an additional condition. As an additional condition, we use the following:

$$\int_0^T u(\tau)d\tau = \psi. \tag{4}$$

We call the problem (2) with an additional condition (4) *the inverse problem* of finding the pair $\{u(t), f\}$. The solution of the inverse problem is defined in exactly the same way as Definition 1.

The following theorem holds for the inverse problem.

Theorem 2. Let $\psi \in D(A)$ and $\varphi \in D(A)$ if $\gamma > 0$, and $\varphi \in H$ if $\gamma = 0$. Then the inverse problem (2), (4) has a unique solution $\{u(t), f\}$ and this solution has the form

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k t^{-\delta} E_{\alpha,1-\delta}(-\mu_k t^{\alpha}) + \frac{f_k}{1+\gamma\lambda_k} t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\mu_k t^{\alpha}) \right] v_k \tag{5}$$

and

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k, \tag{6}$$

where

$$f_k = \left(\frac{\psi_k}{T^{\alpha+1} E_{\alpha,\alpha+2}(-\mu_k T^{\alpha})} - \frac{T^{1-\delta} E_{\alpha,2-\delta}(-\mu_k T^{\alpha})}{T^{\alpha+1} E_{\alpha,\alpha+2}(-\mu_k T^{\alpha})} \varphi_k \right) (1+\gamma\lambda_k)$$

and $\psi_k,\ \varphi_k$ are the Fourier coefficients of the functions ψ and φ respectively.

Keywords: Cauchy problems, the Hilfer derivatives, inverse problems.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11; 34A12

References

[1] Hilfer R. (ed.). Applicationsof fractional calculs in physics, World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London and Hong Kong, (2000).

Inverse problem for the subdiffusion equation with fractional Caputo derivative

Ravshan ASHUROV[1,a], Marjona SHAKAROVA[2,b]

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Student Town str.,100174, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: [a]ashurovr@gmail.com, [b]shakarova2104@gmail.com

Let $\rho \in (0,1]$ be a fixed number. Consider the following initial-boundary value problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x)g(t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Here $f(x)$, $g(t)$ and $\varphi(x)$ are continuous functions in the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ and D_t^ρ stands for the Caputo fractional derivative.

The main purpose of this study is the inverse problem of determining the right-hand side of the equation, namely function $f(x)$. To solve the inverse problem, we consider an additional condition of the following form:

$$u(x,t_0) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

where t_0 is a given fixed point of the segment $(0,T]$.

In order to prove the existence of solutions of forward and inverse problems, it is necessary to study the convergence of the following series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau |h_k|^2, \quad \tau > \frac{N}{2}, \tag{3}$$

where h_k are the Fourier coefficients of function $h(x)$. In the case of integers τ, by V.A. Il'in, conditions are obtained for the convergence of such series in terms of the membership of function $h(x)$ in the classical Sobolev spaces $W_2^k(\Omega)$. To formulate these conditions, we introduce the class $\dot{W}_2^1(\Omega)$ as the closure in the $W_2^1(\Omega)$ norm of the set of all functions that are continuously differentiable in Ω and vanish near the boundary of Ω.

The theorem of V.A. Il'in [1] states that, if function $h(x)$ satisfies the conditions

$$h(x) \in W_2^{\left[\frac{N}{2}\right]+1}(\Omega) \quad and \quad h(x), \Delta h(x), ..., \Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]} h(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega), \tag{4}$$

then the number series (3) converges. Similarly, if in (3) we replace τ by $\tau + 2$, then the convergence conditions will have the form:

$$h(x) \in W_2^{\left[\frac{N}{2}\right]+3}(\Omega) \quad and \quad h(x), \Delta h(x), ..., \Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} h(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega). \tag{5}$$

Lemma 1. Let $\rho = 1$, $g(t) \in C^1[0,T]$ and $g(t_0) \neq 0$. Then there exists a number k_0 such that, starting from the number $k \geq k_0$, the following estimates hold:

$$\frac{C_0}{\lambda_k} \leq |b_{k,1}(t_0)| \leq \frac{C_1}{\lambda_k},$$

where

$$b_{k,1}(t_0) = \int_0^{t_0} e^{-\lambda_k s} g(t_0 - s) ds$$

and constants C_0 and $C_1 > 0$ depend on k_0 and t_0.

Lemma 2. Let $\rho \in (0,1)$, $g(t) \in C^1[0,T]$ and $g(0) \neq 0$. Then there exist numbers $m_0 > 0$ and k_0 such that, for all $t_0 \leq m_0$ and $k \geq k_0$, the following estimates hold:

$$\frac{C_0}{\lambda_k} \leq |b_{k,\rho}(t_0)| \leq \frac{C_1}{\lambda_k},$$

where

$$b_{k,\rho}(t_0) = \int\limits_0^{t_0} g(t_0 - s)s^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-\lambda_k s^\rho)ds$$

and constants C_0 and $C_1 > 0$ depend on m_0 and k_0.

Let $\mathbb{N} = K_\rho \cup K_{0,\rho}$, where $\mathbb{N}$ is the set of all natural numbers. K_ρ and $K_{0,\rho}$ are sets such that: if $b_{k,\rho}(t_0) \neq 0$, $k \in K_\rho$, otherwise, if $b_{k,\rho}(t_0) = 0$, then $k \in K_{0,\rho}$.

Theorem 1. *Let $\rho \in (0,1]$, $g(t) \in C[0,T]$ and $g(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$. Moreover let function $\varphi(x)$ satisfy condition (4) and $\psi(x)$ satisfy condition (5). Then there exists a unique solution of the inverse problem (1)-(2).*

Theorem 2. *Let function $\varphi(x)$ satisfy condition (4) and $\psi(x)$ satisfy condition (5). Further, we will assume that for $\rho = 1$ the conditions of Lemma 1 are satisfied, and for $\rho \in (0,1)$, the conditions of Lemma 2 are satisfied and t_0 is sufficiently small. If set $K_{0,\rho}$ is empty, i.e. $b_{k,\rho}(t_0) \neq 0$, for all k, then there exists a unique solution of the inverse problem (1)-(2). If set $K_{0,\rho}$ is not empty, then for the existence of a solution to the inverse problem, it is necessary and sufficient that the following conditions*

$$\psi_k = \varphi_k E_\rho(-\lambda_k t_0), \quad k \in K_{0,\rho},$$

be satisfied. In this case, the solution to the problem (1)-(2) exists, but is not unique.

Keywords: forward and inverse problems, the Caputo derivatives, Fourier method.

References

[1] Il'in V.A. On the solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations, *Russian Math. Surveys*, **15**:2 (1960), 97–154.

A numerical method for solving boundary value problem for Volterra-Fredholm integro-differential equations

Elmira BAKIROVA[1,2,a], Zhazira KADIRBAYEVA[1,3,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan*
[3] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*bakirova1974@mail.ru*, [b]*zhkadirbayeva@gmail.com*

We consider the system of Volterra-Fredholm integro-differential equations with degenerate kernels

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \int\limits_0^T \psi_k(s)x(s)ds + \sum_{k=1}^m \phi_k(t) \int\limits_0^t \chi_k(s)x(s)ds + f(t), \quad t \in (0,T), \qquad (1)$$

with boundary condition

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \qquad (2)$$

where the matrices $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\phi_k(t)$, $\psi_k(s)$, $\chi_k(s)$, $k = \overline{1,m}$ and vector $f(t)$ are continuous on $[0,T]$.

A solution to problem (1), (2) is a vector function $x(t)$, continuous on $[0, T]$ and continuously differentiable on $(0, T)$. It satisfies the integro-differential equation (1) and boundary condition (2).

Many questions of physics and technology lead to the study of integro-differential equations. Integro-differential equations of mixed type contain integral terms of Volterra and Fredholm, also called Volterra-Fredholm integro-differential equations. Many problems in biology, chemistry and mechanics lead to the Volterra-Fredholm integro-differential equations [1], [2].

In the present paper, the results of article [3] are extended to the two-point boundary value problem for the system of Volterra-Fredholm integro-differential equations with degenerate kernels (1), (2). Using the algorithms of the Dzhumabaev parametrization method [4], a numerical approach for solving problem (1), (2) is proposed.

Funding: This research has been funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674730).

Keywords: Volterra-Fredholm integro-differential equation, parametrization method, algorithm

2010 Mathematics Subject Classification: 34K10, 34K28, 45J99

References

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht (2004).

[2] Yuzbasi S. Numerical solutions of system of linear Fredholm-Volterra integro-differential equations by the Bessel collacation method and error estimation, *Appl. Math. Comp.*, **250**:2 (2015),320–338.

[3] Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integrodifferential equations, *Math. Methods Appl. Sci.*, **41**:7 (2018), 1439–1462.

[4] Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

Szegö type factorization of Haagerup noncommutative Hardy spaces

Turdebek N. BEKJAN

Astana IT University, Astana, Kazakhstan
E-mail: t.nurlybekuly@astanait.edu.kz

We studied the Szegö type factorization for the non-tracial case and extended the Szegö type factorization in [2].

Let $\mathcal{M}$ be a σ-finite von Neumann algebra equipped with a normal faithful state φ, and let $\mathcal{A}$ be a maximal subdiagonal algebra of $\mathcal{M}$.

Lemma 1. *Let $h \in H^1(\mathcal{A})$ and $[\mathcal{D}\mathcal{E}(h)]_1 = L^1(\mathcal{D})$. If $x, y \in L^2(\mathcal{M})$ satisfy $xy = h$, then there is an isometry $u \in \mathcal{M}$ such that $u^*y,\ xu \in H^2(\mathcal{A}),\ \mathcal{E}(xuu^*y) = \mathcal{E}(h)$.*

Lemma 2. *Let $1 \le r \le \infty,\ 2 \le p,\ q \le \infty$ and $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Suppose that $h \in H^r(\mathcal{A})$ and $[\mathcal{D}\mathcal{E}(h)]_r = L^r(\mathcal{D})$. If $x \in L^p(\mathcal{M}),\ y \in L^q(\mathcal{M})$ satisfy $xy = h$, then there is an isometry $u \in \mathcal{M}$ such that $u^*y \in H^q(\mathcal{A}),\ xu \in H^p(\mathcal{A}),\ \mathcal{E}(xuu^*y) = \mathcal{E}(h)$.*

Theorem 1. *Let $1 \le r \le \infty,\ 2 \le p,\ q \le \infty$ and $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. If $h \in H^r(\mathcal{A})$ and $[\mathcal{D}\mathcal{E}(h)]_r = L^r(\mathcal{D})$, then there are $h_1 \in H^q(\mathcal{A}),\ h_2 \in H^p(\mathcal{A})$ such that $\mathcal{E}(h) = \mathcal{E}(h_1)\mathcal{E}(h_2)$ and $\|h\|_r = \|h_1\|_p \|h_2\|_q$.*

Theorem 2. *Let $\mathcal{M}$ be finite. Suppose $0 < r, p,\ q \le \infty$ satisfy $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ and let $h \in H^r(\mathcal{A})$ satisfy $[\mathcal{D}\mathcal{E}(h)]_r = L^r(\mathcal{D})$. If $x \in L^p(\mathcal{M}),\ y \in L^q(\mathcal{M})$ satisfy $xy = h$, then there is an unitary $u \in \mathcal{M}$ such that $u^*y \in H^q(\mathcal{A}),\ xu \in H^p(\mathcal{A})$.*

Funding: The author is supported by the Science Committee of the Ministry of Science and High Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14870431).

Keywords: subdiagonal algebras, Haagerup noncommutative H^p-space, Szegö type factorization.

2010 Mathematics Subject Classification: 46L52, 47L05

References

[1] Bekjan T. N. and Xu Q., Riesz and Szegö type factorizations for noncommutative Hardy spaces, *J. Oper. Theory* **62** (2009), 215–231.

[2] Ji G. and Saito K-S., Factorization in subdiagonal algebras. *J. Funct Anal* **159** (1998), 191–202.

The weighted Hölder spaces generated by the problems for the parabolic equations with incompatible initial and boundary data

Galina BIZHANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: galina_math@mail.ru

When we study the boundary value problems for the parabolic equations in the Hölder spaces we require the fulfillment of the compatibility of the initial and boundary data. This guarantee the continuity of the solution and all its admissible derivatives in the closure of domain. Let the problem is the mathematical model of physical process. If the process is continuous, then the compatibility of the initial and boundary data is fulfilled. If the given functions and coefficients of the problem have jumps, then the initial and boundary data are not compatible, but the process can pass.

The incompatibility of the data leads th the appearance of the singular solutions. In [1] – [4] there were found these singular solutions in the explicit form of the problems for the heat equations with constant coefficients. If we consider the problems for the parabolic equations with variable coefficients, we should study the solutions in the weighted spaces. The weighted Hölder space with the weight $t^{1/2}\, e^{\delta_0 \frac{x^2}{t}}$, $\delta_0 > 0$, was determined to solve the first one–dimensional boundary value problem [5], here $x > 0$ is the distance from the point x to the boundary $x = 0$. G. Liberman studied the problems in [6] in the weighted Hölder space with the parabolic weight $(x^2+t)^{1/2}$. The relation between these two weighted spaces is established. It is proved that the solution of the problem is represented in the sum of the Hölder function and the singular functions belonging to the Hölder weighted space, the number of them equals the number of the incompatibility of the initial and boundary data.

Funding: The author is supported by the grant no. AP14871251 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: parabolic equation, incompatibility of the initial and boundary data, weighted Hölder space, existence, uniqueness, estimates of the solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B65, 35A20, 35B25

References

[1] Bizhanova G. I. On exact solutions of one – dimensional two phase free boundary problems for parabolic equations, *Notes of PDMI*, **318**, (2004), 42–59.

[2] Bizhanova G. I. Solution in the Hölder space of the boundary value problems for the parabolic equations wirh incompatibility of the initial and boundary data, *Contamporary Mathematics. Fundamental Directions*, **36**, (2010), 12–23.

[3] Bizhanova G. I., Shaimardanova M. N. Solution of the nonregular problem for the heat equation with the time derivative in the boundary condition, *Mathematical Journal*, **16**, (2016), 35–57.

[4] Bizhanova G. I. Classical solution of a nonregular conjunction problem for the heat equations, *Mathematical Journal*, **10**, (2010), 37–48.

[5] Bizhanova G. I. Investigation of the solvability of the first boundary value problem for the parabolic equation with incompatible initial and boundary data, *Notes of PDMI*, **508**, (2021), 39–72.

[6] Liberman G. *Second Order Parabolic Differential Equations*, World Scientific, 1996.

On the embedding of the space of generalized fractional-maximal functions in rearrangement-invariant spaces

Nurzhan BOKAYEV[1,a], Amiran GOGATISHVILI[2,b], Azhar ABEK[3,c]

[1,3] L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
[2] Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic
E-mail: [a]bokayev2011@yandex.ru, [b]gogatish@math.cas.cz [c]azhar.abekova@gmail.com

The space of generalized fractional-maximal functions is determined. The question of embedding such a space in permutation-invariant spaces is considered.

DEFINITION 1. Let $R \in (0;\infty]$. A function $\Phi : (0;R) \to R_+$ belongs to the class $B_n(R)$ if the following conditions hold: Φ decreases and is continuous on $(0;R)$; there exists a constant $C \in R_+$ such that

$$\int_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}d\rho \le C\Phi(r)r^n, \ \ r \in (0,R).$$

Let $\Phi : R_+ \to \mathbb{R}$. The generalized fractional-maximal function $M_\Phi f$ is defined for the function $f \in E(\mathbb{R}^n) \cap L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ by the equality

$$(M_\Phi f)(x) = \sup_{r>0} \Phi(r) \int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

where $B(x,r)$ is a ball with the center at the point $x \in \mathbb{R}^n$ and radius r.

In the case $\Phi(r) = r^{\alpha-n}$, $\alpha \in (0;n)$ we obtain the classical fractional-maximal function $M_\alpha f$.

Let E is rearrangement-invariant space (briefly: RIS [1]). We introduce the space of generalized fractional maximal functions $M_E^\Phi = M_E^\Phi(R^n)$ as the set of the functions u, for which there is a function $f \in E(R^n)$ such that

$$u(x) = (M_\Phi f)(x),$$

$$\|u\|_{M_E^\Phi} = inf\{\|f\|_E : f \in E(R^n), \ \ M_\Phi f = u\}.$$

Let f^* be a decreasing rearrangement of f ([1]). We consider the following cone of decreasing rearrangements of generalized fractional maximal functions equipped with functional:

$$K_1 \equiv KM_E^\Phi := \{h \in L^+(\mathbb{R}_+) : h(t) = u^*(t),\ t \in \mathbb{R}_+,\ u \in M_E^\Phi\},$$

$$\rho_{K_1}(h) = \inf\{\|u\|_{M_E^\Phi} : u \in M_E^\Phi;\ u^*(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Let E' is the associated RIS, $\widetilde{E}$ and $\widetilde{E}'$ are their Luxemburg representations, i.e. RIS such that $\|f\|_E = \|f^*\|_{\widetilde{E}}$, $\|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\widetilde{E}'}$ [1] .

In the following Theorem 1 we give the criterion for embedding the space of generalized fractional maximal functions in rearrangement invariant spaces $X(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 1. Let $\Phi \in B_n(\infty)$. The embedding

$$M_E^\Phi(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X(\mathbb{R}^n)$$

is equivalence to the embedding

$$K_1M_E^\Phi(\mathbb{R}_+) \mapsto \widetilde{X}(\mathbb{R}_+)).$$

Theorem 2. Let $\Phi \in B_n(\infty)$. The optimal RIS $X_0 = X_0(\mathbb{R}^n)$ for embedding

$$M_E^\Phi(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X(\mathbb{R}^n)$$

is defined by following norm:

$$\|f\|_{\widetilde{X}_0(0,\infty)} = \sup_{g^*} \left\{ \int_0^\infty f^*(\tau)g^*(\tau)d\tau : g \in L_0(0,\infty), \sup_{\int_0^t h(s)ds \le \int_0^t g^*(s)ds} \left\| \int_t^\infty \Phi(s^{1/n}) sh(s)ds \right\|_{E'} \le 1 \right\}.$$

Note that in the works [2, 3, 4] the generalized Riesz potential was considered using the convolution operator:

$$Af(x) = (G * f)(x) = 2\pi^{-n/2} \int_{R^n} G(x-y)f(y)dy.$$

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14869887 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: generalized fractional maximal function, non-increasing rearrangements, cones, rearrangement invariant space, optimal embedding.

2010 Mathematics Subject Classification: 42B25, 46E30, 47B38, 26D10.

References

[1] Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of Operators*, Pure and Applied Mathematics 129, Academic Press, Boston, MA, 1988, p.469.

[2] Goldman M.L.On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **55**: 8-10 (2010), 817-832.

[3] Bokayev N.A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh.*Cones of functions with monotonocity conditions for generalized Bessel and Riesz potentials.* Mathem. Notes. 104 (2018), no. 3., 356–373.

[4] Bokayev N.A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh.*Criteria for embeddings of generalized Bessel and Riesz potential spaces in rearrangement invariant spaces.* Eurasian Math. Journal. 10 (2019), no. 2., 8–29

Local and blowing up solutions to a nonlinear time-space fractional diffusion equation

Meiirkhan BORIKHANOV

Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh–Turkish University, Turkistan, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: meiirkhan.borikhanov@ayu.edu.kz, borikhanov@math.kz

In the present paper, we study the Cauchy-Dirichlet problem to a nonlocal nonlinear diffusion equation with polynomial nonlinearities

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{0|t}u + (-\Delta)^s_p u = \gamma|u|^{m-1}u + \mu|u|^{q-2}u,\ \gamma,\mu \in \mathbb{R},\ m>0, q>1,$$

involving time-fractional Caputo derivative $\mathcal{D}^{\alpha}_{0|t}$ of order $\alpha \in (0,1)$ given by (see [1])

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{0|t}u(t) = I^{1-\alpha}_{0|t}\frac{d}{dt}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u'(s)\,ds,\quad \forall t \in (0,T]$$

and space-fractional p-Laplacian operator $(-\Delta)^s_p$, for $s \in (0,1), p>1$ defined by

$$(-\Delta)^s_p u(x) = C_{N,s,p}\,\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}dy,$$

where $C_{N,s,p} = \frac{sp2^{2s-2}}{\pi^{\frac{N-1}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{N+sp}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(1-s)}$ is a normalization constant and "P.V." is an abbreviation for "in the principal value sense" (see [2]).

We give a simple proof of the comparison principle for the considered problem using purely algebraic relations, for different sets of γ, μ, m and q.

The Galerkin approximation method is used to prove the existence of a local weak solution. The blow-up phenomena, existence of global weak solutions and asymptotic behavior of global solutions are classified using the comparison principle.

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14972726).

Keywords: fractional calculus, quasilinear parabolic equation, comparison principle, local, blow-up and global solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11, 35A01, 35B51, 35K55.

References

[1] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies (2006).

[2] del Teso F., Gómez-Castro D., Vázquez J. L. Three representations of the fractional p-Laplacian: Semigroup, extension and Balakrishnan formulas, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **24**:4 (2021), 966–1002.

Tricomi problem for mixed parabolic-hyperbolic equation with non-classical boundary condition

Bauyrzhan DERBISSALY

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: derbissaly@math.kz

We consider the mixed parabolic-hyperbolic type equation

$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy}, \ y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, \ y < 0, \end{cases} = f(x, y) \text{ in } \Omega, \tag{1}$$

where Ω is a simple connected domain, located in the plane of independent variables x and y, bounded by $y > 0$ with segments $AA_0, \ BB_0, \ A_0B_0$, where $A(0, 0), \ B(1, 0), \ A_0(0, 1), \ B_0(1, 1)$ and by $y < 0$ with characteristics $AC : x + y = 0, \ BC : x - y = 1$ of the equation (1).

We use the following notations: $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0), \ \Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$.

Problem T. Find a function $u(x, y)$ with the following properties:

1. $u(x, y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^{1,2}_{x,y}(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2)$;
2. $u(x, y)$ satisfies equation (1) in Ω_1 and Ω_2;
3. $u(x, y)$ satisfies the following boundary conditions:

$$u(x, y)_{|AA_0} = \psi(y), \ 0 \leq y \leq 1, \tag{2}$$

$$(u_x(x, y) + au_y(x, y))_{|A_0B_0} = 0, \tag{3}$$

$$u(x, y)_{|AC} = 0, \tag{4}$$

where a is a positive number, f, ψ are given functions with the necessary smoothness.

In the case $a = 0$, the condition (3) will be equivalent to the condition $u(x, y)_{|A_0B_0} = \psi(1)$. In this case, the problem **T** coincides with the well-known Tricomi problem. Thus, we call the problem **T** an analogue of the Tricomi problem.

The boundary condition (3) are observed during the cooling process of a thin solid rod, one end of which is in contact with a liquid [1]. Another possible application of such boundary condition is mentioned in [2] as modeling a boundary reaction during chemical diffusion, where the term $du_x(1, t)$ represents the diffusion transfer of materials to the boundary.

In this paper the conditions for the correctness of the formulated Tricomi (1)-(4) problem are found.

Funding: The research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (No. AP14972331).

Keywords: parabolic-hyperbolic type equation, Tricomi problem, non-classical boundary condition, problem with spectral parameter in boundary condition, Riesz basis.

2010 Mathematics Subject Classification:35A09, 35L05, 35M13

References

[1] Langer, R. E. *A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid*, Tohoku Mathematical Journal 55, 360–375, 1932.

[2] Cannon, J. R. *The One-dimensional Heat Equation, CA: Addison-Wesley Publishing Company, 1984.*

Spectrum of the perturbed Laplace-Beltrami operator

Karlygash DOSMAGULOVA[a], Mukhamadi KHASSEN, Yernur CHAKENOV

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]karlygash.dosmagulova@gmail.com

Let S^2 be the two-dimensional sphere of the Euclidean space R^3. Choose [1] a fixed reversible self-adjoint Laplace-Beltrami operator $B_0 = B_0^* = I - \Delta_{S^2}$ acting in the Hilbert space $L_2(S^2)$. The domain of definition of this operator is denoted as $W_2^2(S^2) \subset L_2(S^2)$. We formulate new correlatively solvable problems for the operator $(I - \Delta_{S^2})$ on the punctured sphere $S_0^2 = S^2 \backslash \{x_0\}$. Here x_0 is a fixed point in S^2 [2,3]. For $x_0 \in S^2$ there is a finite set of elements $\{\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x)\}$ defined as follows:

$$\psi_0(x) = \varepsilon(x,t), \quad \psi_1(x) = \frac{\partial}{\partial t_1}\varepsilon(x,t), \quad \psi_2(x) = \frac{\partial}{\partial t_2}\varepsilon(x,t),$$

where $x \in S_0^2$.

Let $h(t)$ be an arbitrary element of the class $W_{2,U}^2(S_0^2)$. Then the function $h(x)$ is represented as the following:

$$h(x) = g(x) - \alpha_0\psi_0(x) - \alpha_1\psi_1(x) - \alpha_2\psi_2(x), \tag{1}$$

where $g(x)$ is some smooth function of the space $W_2^2(S^2)$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ are some complex numbers. Moreover, representation (1) is unique.

Theorem 1. *Let $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ be an arbitrary set of linear functionals on the space $L_2(S^2)$. Then for any $f \in L_2(S^2)$ the following problem*

$$B_0 J h(x) = f(x), \quad x \in S_0^2, \quad U_k(h) = \gamma_k(B_0 J h), \quad k = 0,1,2 \tag{2}$$

has a unique solution of the class $W_{2,U}^2(S_0^2)$. The operator corresponding to problem (2) will be denoted by B_γ.

Keywords: Laplace-Beltrami operator, two-dimensional punctured sphere, well-posed problems, Green's functions.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J08, 35J25, 35P15

References

[1] Feng D., Yuan X. *The Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Balls Book*, Springer Monographs in Mathematics, New York (2013).

[2] Kanguzhin B., Fazullin Z. On the localization of the spectrum of some perturbations of a two-dimensional harmonic oscillator, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **66**:6-7 (2021), 1194–1208.

[3] Kanguzhin B.E. Changes in a finite part of the spectrum of the Laplace operator under delta-like perturbations, *Differential Equations*, **55**:10 (2019), 1328–1335.

Global existence and blow-up of solutions to porous medium equation and pseudo-parabolic equation for Baouendi-Grushin operator

Aishabibi DUKENBAYEVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: a.dukenbayeva@sdu.edu.kz

In this talk, we discuss a global existence and blow-up of the positive solutions to the initial-boundary value problem of the nonlinear porous medium equation and the nonlinear pseudo-parabolic equation for the Baouendi-Grushin operator. Our proof is based on the Poincaré inequality from the paper [1] for the Baouendi-Grushin operator and the concavity argument.

This talk is based on the joint research with Michael Ruzhansky (Ghent University, Belgium).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14972714).

Keywords: Hardy inequalities, Baouendi-Grushin operator, factorization method.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K91, 35B44, 35A01

References

[1] D. Suragan, N. Yessirkegenov. Sharp remainder of the Poincaré inequality for Baouendi–Grushin vector fields, *Asian-European Journal of Mathematics*, 16(3): Art. No. 2350041, 2023.

"Isolated" solution of a boundary value problem for a nonlinear loaded hyperbolic equation

Symbat KABDRAKHOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: symbat2909.sks@gmail.com

We consider the following boundary value problem for loaded hyperbolic equations with mixed derivatives:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + A_0(x,t)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0} + f\Big(x, x_0, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\Big), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

Here $f : \overline{\Omega} \times R^2 \to R$, -continuous on $\bar{\Omega}$, $\psi(t)-$ and satisfies the condition $\psi(0) = \psi(T)$. Functions $A(x,t), A_0(x,t)$ are continuous on $\bar{\Omega}$, x_0 is the load point.

A function $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, that has partial derivatives $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \in C(\overline{\Omega})$, is called a solution of problem (1)-(3), if it satisfies equation (1) for all $(x,t) \in \overline{\Omega}$, take the value $\psi(t)$, $t \in [0,T]$ on the characteristic $x = 0$ and has equal values on the characteristics $t = 0$, $t = T$ for all $x, x_0 \in [0,\omega]$.

Nonlinear hyperbolic equations with loading arise in various fields such as hydromechanics, acoustics and geophysics. The study of these equations is important for understanding the behavior of physical systems and developing numerical methods for solving them. One of the important classes of solutions to these boundary value problems are isolated solutions. The existence of isolated solutions is not always guaranteed, and determining the conditions for their existence is a difficult task. Over the years, many researchers have studied the topic of sufficient conditions for the existence of an isolated solution of the boundary value problem for a nonlinear loaded hyperbolic equation. These conditions depend on several factors such as the equation's properties, the boundary conditions, and the loading, and may involve various functional spaces and analytical techniques. The study of these conditions has led to significant progress in the theory of nonlinear hyperbolic equations and has motivated the development of new numerical methods.

Several authors have contributed to this research area, and their work has provided important insights into the topic. Some of the notable works include papers by L. V. Kantorovich, G. M. Fikhtengol'ts, V. A. Solonnikov, S. D. Eidelman, S. A. Lomov, A. V. Bitsadze, O. A. Ladyzhenskaya [1], Nakhushev A.M.[2], among others. Also, boundary value problems for loaded differential equations have been studied by many authors [3-5].

In this paper, researched sufficient conditions for the existence of an "isolated" solution of a boundary value problem for a nonlinear loaded hyperbolic equation are studied.

Funding: The author was supported by the grant no. AP09058457 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: loaded equation, isolated solution, sufficient conditions, nonlinear hyperbolic equation.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06

References

[1] Ladyzhenskay O. A. Solvability of the first boundary value problem for a loaded nonlinear hyperbolic equation *Journal of Soviet Mathematics*, **415**:5 (1981), 1245-1267.

[2] Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Nauka, Moscow (2012).

[3] Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **58**:4 (2009), 508-516.

[4] Assanova A. T., Imanchiyev A. E., Kadirbayeva Zh. M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*,**41**:4 (2008), 1439-1462.

[5] Kadirbayeva Zh.M., Kabdrakhova S.S., Mynbyaeva S.T. A computational method of solving the boundary value problem for impulsive systems of essentially loaded differential equations, *Lobachevskii J. of Math.*, **42**:15 (2021), 3675–3683.

A multipoint problem for impulsive systems of essentially loaded differential equations

Zhazira KADIRBAYEVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

We consider the following linear multi-point boundary value problem for systems of essentially loaded differential equations with impulse effect:

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^{m} M_i(t) \lim_{t\to\theta_i+0} \dot{x}(t) + f(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1} D_j x(\theta_j) = d, \quad d \in R^n, \quad x \in R^n, \tag{2}$$

$$B_i \lim_{t\to\theta_i-0} x(t) - C_i \lim_{t\to\theta_i+0} x(t) = \varphi_i, \quad \varphi_i \in R^n, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Here $(n \times n)$ -matrices $A_0(t)$, $M_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$, and n-vector-function $f(t)$ are piecewise continuous on $[0,T]$ with possible discontinuities of the first kind at the points $t = \theta_i$, $(i = \overline{1,m})$;

D_j, $(j = \overline{0, m+1})$, B_i and C_i, $(i = \overline{1, m})$ are constant $(n \times n)$-matrices, and φ_i, $(i = \overline{1, m})$ and d are constant n vectors, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

A solution to problem (1)–(3) is a piecewise continuously differentiable vector function $x(t)$ on $[0, T]$ which satisfies the system of essentially loaded differential equations (1) on $[0, T]$ except the points $t = \theta_i$, $(i = \overline{1, m})$, the condition (2), and conditions of impulse effects at the fixed time points (3).

Many important problems of mathematical physics and mathematical biology lead to boundary-value problems for loaded equations [1]. Problems for essentially loaded differential equations with impulse effects and methods for finding their solutions considered in [2, 3]. These problems arise when modeling various processes of natural science.

In the present paper, a linear multi-point boundary value problem for systems of essentially loaded differential equations with impulse effect is investigated. The Dzhumabaev parameterization method [4] is used for solving this problem. A numerical algorithm is offered for solving the considering problem.

Funding: This research has been funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19174331).

Keywords: essentially loaded differential equation, impulse effect, parametrization method, algorithm

2010 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06

References

[1] Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Nauka, Moscow (2012).

[2] Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations, *Computational and Applied Mathematics*, **37**:4 (2018), 4966–4976.

[3] Kadirbayeva Zh.M., Kabdrakhova S.S., Mynbyaeva S.T. A computational method of solving the boundary value problem for impulsive systems of essentially loaded differential equations, *Lobachevskii J. of Math.*, **42**:15 (2021), 3675–3683.

[4] Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities with remainder terms

Madina KALAMAN

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: 211101011@stu.sdu.edu.kz

Inspired by the recent work [1], in this talk we discuss Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities with remainder terms. For this, we first obtain a weighted Hardy identity that implies an improved Hardy inequality. In particular case, we get an improvement version of the classical Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality. Moreover, the constants are obtained in explicit forms.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (Suleyman Demirel University, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691).

Keywords: Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality, Hardy identity, anisotropic Euclidean space.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 43A80

References

[1] Ruzhansky M., Suragan D., Yessirkegenov N. Extended Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, and remainders, stability, and superweights for Lp-weighted Hardy inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*, **5**: (2018), 32–62.

Hardy-type inequalities for a class of iterated operators

Aigerim KALYBAY[1,a], Ryskul OINAROV[2,b]

[1] *KIMEP University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
E-mail: [a]*kalybay@kimep.kz*, [b]*o_ryskul@mail.ru*

Let $I=(0,\infty)$, $1<p,q<\infty$ and $0<\theta<\infty$. Suppose that u, v and w are weight functions, i.e., positive functions measurable on I. Moreover, $\|f\|_{p,v}\equiv\|vf\|_p=\left(\int\limits_0^\infty v(t)|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ is the norm of the Lebesgue space $L_{p,v}(I)\equiv L_p(v,I)$.

For $f\geq 0$ we consider the following Hardy-type inequality:

$$\|Kf\|_{q,u}\leq C\|f\|_{p,v}, \tag{1}$$

where

$$Kf(x)=\left(\int\limits_0^x w(t)\left(\int\limits_0^t f(s)\,ds\right)^{\theta}dt\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

In 2013, in the paper [1], it was proved that the boundedness of the multidimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a Morrey-type space is equivalent to the validity of inequality (1). Motivated by this connection with Morrey-type spaces, in the last decade inequality (1) have been studied in many works.

The main result reads:

Theorem 1. *Let $1<q<\min\{p,\theta\}<\infty$. Then inequality (1) holds if and only if*

$$B=\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_z^\infty u(x)\left(\int\limits_z^x w(t)dt\right)^{\frac{q}{\theta}}dx\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\int\limits_0^z v^{1-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}v^{1-p'}(z)dz\right)^{\frac{p-q}{pq}}<\infty.$$

Moreover, $C\approx B$, where C is the best constant in (1).

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09259084 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: integral operator, Hardy-type inequality, weight function, Lebesgue space.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D15, 47B38, 26D10

References

[1] Burenkov V.I., Oinarov R. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space, *Math. Inequal. Appl.*, **16**:1 (2012), 1–19.

Inverse problem for Kelvin-Voigt equations with memory

Khonatbek KHOMPYSH[a], Aidos SHAKIR[b]

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]*konat_k@mail.ru*, [b]*ajdossakir@gmail.com*

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$, with a smooth boundary $\partial\Omega$. $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $T<\infty$ is a bounded cylinder with $\Gamma_T=\partial\Omega\times[0,T]$. This work deals with the recovering of a time-dependent source function $f(t)$, velocity field $\mathbf{u}$ and a pressure p from the following system of integro-differential Kelvin-Voigt equations governing flows of incompressible viscoelastic fluids

$$\mathbf{u}_t-\varkappa\Delta\mathbf{u}_t-\nu\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}-\int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},s)ds+\nabla p=f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\ \text{ in }\ Q_T,$$

$$\mathbf{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=0 \ \text{ in } \ Q_T,$$

supplemented with the initial condition

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega,$$

the boundary condition

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=0 \quad \text{on} \quad \Gamma_T,$$

and the integral overdetermination condition

$$\int_\Omega \mathbf{u}\omega d\mathbf{x}=e(t),\ \ t\in[0,T],$$

where, $\mathbf{g}(\mathbf{x},t), K(t), \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \omega(\mathbf{x}), e(t)$ are given functions, ν and $\varkappa>0$ are coefficients of the kinematic viscosity and relaxation of the fluids. In this work, we establish the issues of local and global in time existence and uniqueness of weak and also strong generalized solutions.

Funding: This research work has been funded by Grant number AP09057950 the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (MES RK), Kazakhstan.

Keywords: inverse problem, Kelvin-Voigt system with memory, global existence and uniqueness.

2010 Mathematics Subject Classification: 76M21, 35R30; 76D05; 35Q35; 35A01; 35D35

An Inverse problem for pseudoparabolic equation with memory

Khonatbek KHOMPYSH[a], Moldir SHAZYNDAYEVA[b]

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]konat_k@mail.ru, [b]moldir.trz@gmail.com

In this work, we consider the following inverse problem for the pseudoparabolic equation with memory

$$y_t\left(x,t\right)-\alpha y_{xx}\left(x,t\right)-\beta y_{xxt}\left(x,t\right)-\int\limits_0^t K(t-\tau)y_{xx}(x,\tau)d\tau=f(x)g(x,t)+h(x,t), \qquad (1)$$

$$(x,t)\in Q_T:=(0,l)\times[0,T],$$

which supplemented with the initial condition

$$y\left(x,0\right)=y_0\left(x\right), \quad x\in[0,l], \qquad (2)$$

the boundary conditions

$$y\left(0,t\right)=y\left(l,t\right)=0, \quad t\in[0,T], \qquad (3)$$

and with the final overdetermination condition

$$y\left(x,T\right)=a\left(x\right), \quad x\in[0,l]. \qquad (4)$$

The studying of inverse problem consists of finding of the functions $y(x,t)$ and a coefficient of right-hand side $f(x)$ from the system (1)-(4) under the given constants α,β and the given functions $y_0(x), a(x), g(x,t), h(x,t)$, and $K(t)$. In this talk, we study the questions of existence, uniqueness and the stability of a strong generalized solution.

Funding: This work was partially supported by the Grant AP19676624.

A maximum principle for time-fractional diffusion equation with memory

Samat MAMBETOV

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh–Turkish University, Turkistan, Kazakhstan
E-mail: samat.mambetov@ayu.edu.kz

In the present paper, we consider the following time-fractional diffusion equation with memory

$$\partial_{0|t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}I_{0|t}^{\beta}u(x,t)+F(x,t) \text{ in } (0,a)\times(0,T], \tag{1}$$

supplemented with the initial and boundary conditions

$$u(x,0)=\phi(x) \text{ on } [0,a], \tag{2}$$

$$u(0,t)=\psi_1(t), u(a,t)=\psi_2(t) \text{ for } 0\le t<T, \tag{3}$$

since a and T are real numbers that are positive, the functions F, ϕ, ψ_1 and ψ_2 are continuous in a way that $\phi(0)=\psi_1(0)$ and $\phi(a)=\psi_2(0)$. Here, $I_{0|t}^{\beta}$ is the Riemann-Liouville fractional integral of order $\beta>0$, defined as (see [1])

$$I_{0|t}^{\beta}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1}u(x,s)\,ds, \quad t\in(0,T],$$

and $\partial_{0|t}^{\alpha}=I_{0|t}^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ is the left Caputo fractional derivative with $\alpha\in(0,1)$.

The purpose of this paper is to study the maximum principle of linear fractional diffusion equation (1)-(3).

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09259578).

Keywords: time-fractional diffusion equation, fractional derivative, maximum principle, initial–boundary-value problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 35B50, 26A33, 35R11.

References

[1] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies (2006).

Compactness of commutators for Riesz potential on Local Morrey-type spaces

Dauren MATIN[a] Talgat AKHAZHANOV[b] Aidos ADILKHANOV[c]

L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
E-mail: [a]d.matin@mail.ru, [b]talgat-a2008@mail.ru
[c]adilkhanov-kz@mail.ru

The paper considers Morrey-type local spaces from $LM_{p\theta}^{w}$ The main work is the proof of the commutator compactness theorem for the Riesz potential $[b,I_\alpha]$ in local Morrey-type spaces from $LM_{p\theta}^{w_1}$ to $LM_{q\theta}^{w_2}$. In this paper we consider the Riesz Potential in the following form $I_\alpha f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy$, The Riesz Potential I_α plays an important role in the harmonic analysis and theory of operators. For a function $b\in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ by M_b denote multiplier operator $M_bf=bf$, where f- measurable function. Then the commutator between I_α and M_b

is defined by $[b, I_\alpha] = M_b I_\alpha - I_\alpha M_b = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{[b(x)-b(y)]f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$. The commutators for Riesz Potential were investigated. It is said that the function $b(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ belongs to the space $BMO(\mathbb{R}^n)$, if $\|b\|_* = \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |b(x) - b_Q|\, dx = \sup_{Q\in\mathbb{R}^n} M(b,Q) < \infty$, where Q - cube $\mathbb{R}^n$ and $b_Q = \frac{1}{|Q|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$. By $VMO(\mathbb{R}^n)$ we denote the BMO-closure $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, where $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ the set of all functions from $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ with compact support. Through the $\chi(A)$ denotes the characteristic function of the set $B \subset \mathbb{R}^n$, and ${}^cA$ denotes the complement of A.

Theorem 1. Let $1 < p \le q < \infty$, $0 < \alpha < n$ and $b \in VMO(\mathbb{R}^n)$. $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $w_1, w_2 \in \Omega_\theta$ satisfy the conditions $\left\| w_2(r) \left(\frac{r}{t+r}\right)^{\frac{n}{p}} \right\|_{L_\theta(0,\infty)} \le \|w_1(r)\|_{L_\theta(t,\infty)}$,

$A_0^* := sup_{t>0}(\int_t^\infty \int_\tau^\infty (1 + ln\frac{\tau}{r})drw(\tau)d\tau)^{\frac{1}{q}}[\int_t^\infty v(t)dv]^{-\frac{1}{p}}$,

$A_1^* := sup_{t>0}W^{\frac{1}{q}}(t)(\int_t^\infty (\frac{U_*(\tau)}{V_*(\tau)})^{p'} v(\tau)d\tau)^{\frac{1}{p'}} < \infty$. Then the commutator $[b, I_\alpha]$ is a compact operator from $LM_{p\theta}^{w_1}$ to $LM_{p\theta}^{w_2}$.

Funding: This work is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP14969523).

Keywords: Compactness, Commutators, Riesz Potential, Local Morrey-type spaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Multidimensional Hardy inequality and applications

Kairat MYNBAEV

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: k_mynbayev@ise.ac

We report a series of results on the Hardy inequality and its applications. They hold for a Hardy type operator generated by a family of subsets $\{\Omega(t) : t \ge 0\}$ of an open set Ω in a Hausdorff topological space X. The condition on this family will be stated in full. The conditions on the subsets are based on the following observation. In the classical case one can notice that the subdomain $\Omega(t) = (0,t)$ of $\Omega = (0,\infty)$ has $\omega(t) = t$ as the boundary in the relative topology and that $\Omega(t) = \{s \in \Omega : \omega(s) < \omega(t)\}$.

Sinnamon [1] considered the Hardy inequality under similar conditions. His method consists in reducing the multidimensional problem to a one-dimensional and requires one additional step to write out the conditions in terms of original weights and measures. Our method is direct. We develop two approaches. One derives from Prokhorov [2] and the other is elementary, based on binary partitions. For the lack of space, we formulate just one of the main statements. For the applications, we only mention their one-dimensional predecessors.

We write $A \asymp B$ to mean that $c_1 A \le B \le c_2 A$ with constants c_1, c_2 that do not depend on weights and measures. Let Ω be an open subset of a Hausdorff topological space X with σ-additive measures μ, ν. The measures are defined on a σ-algebra $\mathfrak{M}$ that contains the Borel-measurable sets.

Assumption. a) $\{\Omega(t) : t \ge 0\}$ is a one-parametric family of open subsets of Ω which satisfy monotonicity: for $t_1 < t_2$, $\Omega(t_1)$ is a proper subset of $\Omega(t_2)$.

b) $\Omega(t)$ start at the empty set and eventually cover almost all Ω: $\Omega(0) = \cap_{t>0}\Omega(t) = \varnothing$, $\nu(\Omega \backslash \cup_{t>0} \Omega(t)) = 0$.

c) Further, denote $\omega(t) = \overline{\Omega(t)} \cap \overline{(\Omega\backslash\Omega(t))}$ the boundary of $\Omega(t)$ in the relative topology. We require the boundaries to be disjoint and cover almost all Ω: $\omega(t_1) \cap \omega(t_2) = \varnothing$, $t_1 \ne t_2$, $\nu(\Omega \backslash \cup_{t>0} \omega(t)) = 0$.

d) Passing to a different parametrization, if necessary, we can assume that $\nu(\Omega \backslash \cup_{t\le N} \omega(t)) > 0$ for any $N < \infty$.

It follows that for ν-almost each $y \in \Omega$ there exists a unique $\tau(y) > 0$ such that $y \in \omega(\tau(y))$, which allows us to define

$$Tf(y) = \int_{\Omega(\tau(y))} f d\nu, \ y \in \Omega,$$

for any non-negative $\mathfrak{M}$-measurable f. (A more general definition of a Hardy-type operator is given in [3].) We denote by C the least constant in the inequality

$$\left(\int_{\Omega} (Tf)^q \, u d\mu \right)^{1/q} \le C \left(\int_{\Omega} f^p v d\nu \right)^{1/p}.$$

For $1 < p \le q < \infty$ let

$$\Psi(t) = \left(\int_{\Omega \setminus \Omega(t)} u d\mu \right)^{1/q} \left(\int_{\Omega(t)} v^{-p'/p} d\nu \right)^{1/p'}.$$

In case $0 < q < p$, $1 < p < \infty$ put $1/r = 1/q - 1/p$ and

$$\Phi(y) = \left(\int_{\Omega \setminus \Omega(\tau(y))} u d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega(\tau(y))} v^{-p'/p} d\nu \right)^{1/p'}.$$

Theorem. *1) If $1 < p \le q < \infty$, then $A \le C \le 4A$ where $A = \sup_{t>0} \Psi(t)$.*

2) If $1 < p < \infty$ and $0 < q < p$, then $C \asymp B$, where $B = \left(\int_{\Omega} \Phi^r u d\mu \right)^{1/r}$.

In both cases we also have compactness statements.

Application 1. Heinig and Sinnamon (1998) obtained a criterion for the boundedness of $\int_{a(x)}^{b(x)} f d\nu$ where the functions a, b are non-negative, increasing, continuous and satisfy $a(0) = b(0)$, $a(x) < b(x)$ for $x \in (0, \infty)$, $a(\infty) = b(\infty) = \infty$.

Application 2. Sawyer (1990) and Stepanov (1993) considered $\int_0^x f d\nu$ on the cones of non-increasing functions and non-decreasing functions, resp.

Application 3. Sawyer (1990) found a condition for the boundedness of $\frac{1}{x} \int_0^x f d\nu$.

Keywords: Hardy inequality, boundedness, compactness, Hardy-Steklov operator, averaging operator.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 26D15 Secondary 47G10, 26D10

References

[1] Sinnamon S. One-dimensional Hardy-type inequalities in many dimensions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **128**:4 (1998), 833–848.

[2] Prokhorov D.V. The Hardy inequality with three measures, *Tr. Mat. Inst. Steklova*, **255** (2006), 233–245.

[3] Edmunds D.E., Kokilashvili V., Meskhi A. *Bounded and compact integral operators*, Mathematics and its Applications, vol. 543, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2002).

An algorithm for solving a periodic boundary value problem for impulsive Fredholm integro-differential equations

Sandugash MYNBAYEVA[1,2,a], Aigerim TANKEYEVA[2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*

E-mail: [a]*mynbaevast80@gmail.com*, [b]*aigerimtankeyeva@gmail.com*

The periodic boundary value problem for impulsive Fredholm integro-differential equations is considered

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{l=1}^{k} \int_0^T \varphi_l(t)\psi_l(s)x(s)ds + f(t), \, t \in (0,T) \setminus \{\theta_j\}, \, j = \overline{1,m}, \, x \in R^n, \tag{1}$$

$$(\theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = T),$$

$$x(0) = x(T), \tag{2}$$

$$\Delta x(\theta_j) = \sum_{i=0}^{j-1} d_{ij} x(\theta_i + 0), \quad j = \overline{1, m}, \tag{3}$$

where $\Delta x(\theta_j) = x(\theta_j + 0) - x(\theta_j - 0)$, the square matrices $A(t)$, $\varphi_l(t)$, $\psi_l(t)$ of order n are continuous on $[0, T]$, $f(t)$ is piecewise continuous on $[0, T]$, with the possible exception of the points $t = \theta_j$, $j = \overline{1, m}$, the square matrices d_{ij} of order n are constant.

Denote by $PC([0, T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^m)$ the space of piecewise continuous functions $x : [0, T] \to R^n$ continuous on $[\theta_{p-1}, \theta_p)$, $p = \overline{1, m+1}$, with the norm $||x||_1 = \sup\limits_{t \in [0,T]} ||x(t)||$.

A solution to problem (1)-(3) is defined as a piecewise continuously differentiable function $x(t) \in PC([0, T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^m)$ on $(0, T)$ satisfying the integro-differential equation (1), the periodic condition (2), and the impulsive input conditions (3).

In [1], the Dzhumabaev parametrization method [2] was applied to a linear boundary value problem for the impulsive Fredholm integro-differential equation to establish necessary and sufficient conditions for the solvability. These conditions were derived in the terms of a matrix which was constructed via the fundamental matrix of the differential part of equation and the resolvent of an auxiliary Fredholm integral equation.

In the communication, problem (1)-(3) is investigated and an algorithm for solving this problem is proposed.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09258829 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: periodic boundary value problem, impulsive integro-differential equations, parametrization method, solvability conditions, algorithm.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A37; 34B37; 45J05; 45J99; 34K28

References

[1] Dzhumabayev D.S. Solvability of a linear boundary value problem for a fredholm integro-differential equation with impulsive inputs, *Differential Equations*, **51**:9 (2015), 1180–1196.

[2] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29**:1 (1989), 34–46.

On the best constants for integral Hardy inequalities on homogeneous Lie groups

Imangali ORYNGALIYEV

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: imangali.oryngaliyev@gmail.com

The well-known fact that for L^p spaces with $0 < p < 1$, the Hardy inequality is not satisfied for arbitrary non-negative functions but is satisfied for non-negative monotone functions. The sharp constant was found in the Hardy-type inequality for non-negative monotone functions, and this statement was proved in work by Burenkov [1].

In [2], the study of Hardy inequalities was conducted on metric measure spaces that possess polar decompositions. Additionally, new weighted Hardy inequalities were presented on homogeneous Lie groups with $p = 1$ and $1 \leq q < \infty$.

In this work, we discuss some Hardy-type integral inequalities for $0 < p < 1$ via a second parameter $q > 0$ with sharp constant. These inequalities are new generalizations to the inequalities founded in [1].

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (Suleyman Demirel University, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691 and Grant No. AP09058474).

Keywords: Integral Hardy-type inequality, sharp constant, homogeneous Lie groups.

2020 Mathematics Subject Classification: 22E30, 26D15

References

[1] V. I. Burenkov. On the best constant in Hardy's inequality with $0 < p < 1$ for monotone functions, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 194: 59-63, 1993.

[2] M. Ruzhansky, A. Shriwastawa, B. Tiwari. A note on best constants for Weighted Integral Hardy inequalities on homogeneous groups, *arXiv: 2202.05873v1*, 2022.

On 2×2 positive matrices of τ-measurable operators

Myrzagali OSPANOV[a], Saule BURGUMBAYEVA[b]

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
E-mail: [a]Ospanov_mn@enu.kz, [b]burgumbayeva_sk@enu.kz

We denote the set of all $n \times n$ complex matrices by $\mathbb{M}_n$ and by $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n)$ the set of all 2×2 block matrices, i.e.,

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix},\ x_{i,j} \in \mathbb{M}_n,\ i,j = 1,2 \right\}.$$

We use the direct sum notation $x \oplus y$ for the block-diagonal matrix $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

Let $x, y \in \mathbb{M}_n$ be Hermitian matrices such that $\pm y \leq x$. In general,

$$s_j(y) \leq s_j(x), \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

not holds (see [p. 121, 1]). But, Burqan and Kittaneh [1] proved that the following relation holds.

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(y) \leq \prod_{j=1}^{k} s_j(x), \qquad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

Let $(\mathcal{M}, \tau)$ be a semi-finite von Neumann algebra. We denote by $L_0(\mathcal{M})$ the set of all τ-measurable operators and by $\mu_t(x)$ the generalized singular number of $x \in L_0(\mathcal{M})$. We generalize (1) for operators in $L_{\log_+}(\mathcal{M})$.

Theorem 1. *The following statements are equivalent:*

(i) If $x, y \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$ are self-adjoint operators such that $\pm y \leq x$, then $y \preccurlyeq_{\log} x$.

(ii) If $a, b \in \mathcal{M}$, $x, y \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$ and $\begin{pmatrix} x & z \\ z^* & y \end{pmatrix} \geq 0$, then

$$a^* z b + b^* z^* a \preccurlyeq_{\log} a^* x a + b^* y b.$$

(iii) If $x, y, z \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$ and $\begin{pmatrix} x & z \\ z^* & y \end{pmatrix} \geq 0$, then $z^* + z \preccurlyeq_{\log} x + y$.

(iv) If $x, y \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$ are positive operators, then $x - y \preccurlyeq_{\log} x + y$.

(v) If $x, y, z \in L_{\log_+}(\mathcal{M})$ and $\begin{pmatrix} x & z \\ z^* & y \end{pmatrix} \geq 0$, then $z^* \oplus z \preccurlyeq_{\log} x \oplus y$.

Corollary *The following statements are equivalent:*

(i) If $x, y \in \mathbb{M}_n$ are Hermitian matrices and $\pm y \leq x$, then

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(y) \leq \prod_{j=1}^{k} s_j(x), \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

(ii) If $x, y, z, a, b \in \mathbb{M}_n$ *and* $\begin{pmatrix} x & z \\ z^* & y \end{pmatrix} \geq 0$, *then*

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(a^*zb + b^*z^*a) \leq \prod_{j=1}^{k} s_j(a^*xa + b^*yb), \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

(iii) If $x, y, \in \mathbb{M}_n$ *and* $\begin{pmatrix} x & z \\ z^* & y \end{pmatrix} \geq 0$, *then*

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(z + z^*) \leq \prod_{j=1}^{k} s_j(x + y), \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

(iv) If $x, y \in \mathbb{M}_n$ *are positive semi-definite matrices, then*

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(x - y) \leq \prod_{j=1}^{k} s_j(x + y), \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

(v) If $x, y, \in \mathbb{M}_n$ *and* $\begin{pmatrix} x & z \\ z^* & y \end{pmatrix} \geq 0$, *then*

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(z \oplus z^*) \leq \prod_{j=1}^{k} s_j(x \oplus y), \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Science and High Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871523).

Keywords: generalized singular value, τ-measurable operator, semi-finite von Neumann algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 46L52, 47L05

References

[1] Burqan A. and Kittaneh F., Singular value and norm inequalities associated with 2×2 positive semidefinite block matrices *Electronic Journal of Linear Algebra* **32** (2017), 116–124.

[2] Lin M., Inequalities related to 2-by-2 block PPT matrices, *Oper. Matrices* **9**:4 (2015), 917–924.

[3] Fack T. and Kosaki H., Generalized s-numbers of τ-measurable operators *Pac. J. Math.* **123**:2 (1986), 269–300.

Spectrum of the Hilbert transform in Lorentz spaces over $\mathbb{R}_+$

B.OZBEKBAY[a], K.TULENOV[b], M.AKHYMBEK[c]

Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: [a]ozbekbay.b00@gmail.com, [b]tulenov@math.kz, [c], akhymbek@math.kz

Let f be a complex-valued locally integrable function on $\mathbb{R}_+$. The Hilbert transform Sf of the function f is defined by the following singular integral

$$(Sf)(t) := \frac{1}{\pi i} P.V. \int_0^\infty \frac{f(x)}{t - x} dx, \tag{1}$$

where $P.V.$ denotes the Cauchy principal value of the integral.

DEFINITION.[1. Definition 4.1] Let $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Then the Lorentz $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ space is the set of all Lebesgue measurable functions f such that the functional $\|f\|_{L_{p,q}} < \infty$, where

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{if } 1 < p < \infty,\ 1 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{if } 0 < p \le \infty,\ q = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

The Lorentz space $L_{p,q}$ is the generalization of the Lebesgue space L_p. If we take $p = q$, $L_{p,q}$ coincides with L_p and

$$\|f\|_{L_{p,p}} = \|f\|_{L_p}, \quad (f \in L_p). \tag{3}$$

Remark. The Hilbert transform is bounded from $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ to $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ [2].

Theorem 1. *Let $1 < p < \infty$ and $1 < q < \infty$. The Hilbert transform S maps $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ space to itself. Then the spectrum of the operator S is equal to the set*

$$\sigma(S) = \left\{\lambda : \lambda = \pm 1 \text{or} \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \frac{1}{p}\right\}.$$

Moreover, for λ, which belong to the resolvent set $\rho(S)$, we can define the resolvent operator $R(\lambda, S)$ in the following way

$$R(\lambda, S)f(x) = (\lambda^2 - 1)^{-1} \left\{\lambda f(x) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{w(\lambda)} (y-x)^{-1} f(y) dy\right\} \tag{4}$$

where $w(\lambda) = \dfrac{1}{2i\pi} \log \dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$ is holomorphic and $w(\infty) = 0$.

Keywords: Spectrum, Hilbert transform, Lorentz space.

References

[1] Bennett C., Sharpley R. C. *Interpolation of operators*, Academic press, (1988).

[2] Boyd, D. W. *The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces*, Canadian Journal of Mathematics, 19 (1967), pp. 599–617.

On some inequalities for positive matrix of τ measurable operators

Madi RAIKHAN[a], Aidana ZHALGAS[b]

Astana IT University, Astana, Kazakhstan

E-mail: [a]madi.raikhan@astanait.edu.kz, [b]Aidana.Zhalgas@astanait.edu.kz

Let $(\mathcal{M}, \tau)$ be a semi-finite von Neumann algebra, $L_0(\mathcal{M})$ be the set of all τ-measurable operators. We studied generalized singular numbers of 2×2 positive matrices with entries in $L_0(\mathcal{M})$. We proved the equivalence of several inequalities associated with these generalized singular numbers and gave symmetric norm's version of this results, i.e., we extend the related inequalities of 2×2 positive semi-definite block matrices in [1-5] to the 2×2 positive matrices of τ-measurable operators case. We prove that if $y \in L_0(\mathcal{M})$ is a self-adjoint operator, then

$$\mu_t(y) \le \mu_t(y_+ \oplus y_-), \qquad t > 0,$$

where $y_+,\ y_-$ are the positive and negative parts of y, respectively. We also prove the equivalence of the corresponding inequalities and some symmetric norm inequalities.

Theorem 1. *Let $x, y \in L_0(\mathcal{M})$ be self-adjoint operators such that $\pm y \le x$. Then*

$$2\mu_t(y) \le \mu_t((x+y) \oplus (x-y)) \le 2\mu_t(x \oplus x), \qquad t > 0.$$

Theorem 2. *The following statements are equivalent:*

(i) If $x, y \in L_0(\mathcal{M})$ are positive operators, then

$$\mu_t(x-y) \le \mu_t(x \oplus y), \qquad t > 0.$$

(ii) If $x, y \in L_0(\mathcal{M})$, then

$$2\mu_t(xy^*) \leq \mu_t(x^*x + y^*y), \qquad t > 0.$$

(iii) If $x, y, z \in L_0(\mathcal{M})$ and $\begin{pmatrix} x & z \\ z^* & y \end{pmatrix} \geq 0$, then

$$2\mu_t(z) \leq \mu_t(\begin{pmatrix} x & z \\ z^* & y \end{pmatrix}), \qquad t > 0.$$

(iv) If $x, y \in L_0(\mathcal{M})$ are self-adjoint operators such that $\pm y \leq x$, then

$$2\mu_t(y) \leq \mu_t((x + y) \oplus (x - y)), \qquad t > 0.$$

(v) If $x, y \in L_0(\mathcal{M})$ are self-adjoint operators, then

$$\mu_t(x + y) \leq \mu_t((x_+ + y_+) \oplus (x_- + y_-)), \qquad t > 0.$$

Corollary 1. *Let $x, y \in L_0(\mathcal{M})$ be self-adjoint operators. Then*

$$\mu_t(x + y) \leq \mu_t((x_+ + y_+) \oplus (x_- + y_-)), \qquad t > 0.$$

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Science and High Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14870431).

Keywords: generalized singular value, τ-measurable operator, semi-finite von Neumann algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 46L52, 47L05

References

[1] Audeh W. and Kittaneh F., Singular value inequalities for compact operators, *Linear Algebra Appl.* **437** (2019), 2516-2522.

[2] Bhatia R. and F. Kittaneh F., The matrix arithmetic-geometric mean inequality revisited, *Linear Algebra Appl.* **428** (2008),2177-2191.

[3] Burqan A. and Kittaneh F., Singular value and norm inequalities associated with $2x2$ positive semidefinite block matrices, *Electronic Journal of Linear Algebra* **32** (2017) 116-124.

[4] Han Y. and Shao J., More results on generalized singular number inequalities of τ-measurable operators, *J. Inequal. Appl.* **144**, (2016).

[5] Tao Y., More results on singular value inequalities of matrices, *Linear Algebra Appl.* **416** (2006), 724-729.

[6] Zhan X., Singular values of differences of positive semidefinite matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **22** (2000), 819-823.

Improved Rellich inequality with remainder terms

Meruert SEITKAN

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: 211101013@stu.sdu.edu.kz

In this work we obtain Hardy and Rellich identities with remainder terms on stratified Lie groups. By dropping non-negative terms, these identities imply Hardy and Rellich inequalities. In the Euclidean case we obtain improved Hardy and Rellich inequalities. Moreover, the constants are obtained in explicit forms. In the paper [1] similar results were obtained for particular cases.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (Suleyman Demirel University, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691).

Keywords: Hardy identity, Rellich identity , Hardy inequality, Rellich inequality, stratified Lie group.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 43A80

References

[1] Machihara S.,Ozawa T.,Wadade H. Remarks on the Rellich inequality, *Mathematische Zeitschrift*, **1**:2 (2017), 1367-1373.

Critical Hardy-Sobolev identities and inequalities

Yerkin SHAIMERDENOV[1,a], Nurgissa YESSIRKEGENOV[1,2,b]

[1] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a] yerkin.shaimerdenov@sdu.edu.kz, [b]n.yessirkegenov@sdu.edu.kz

Let us recall the Badiale-Tarantello conjecture [1]:
Let $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n-N}, 2 \leq N \leq n$ and $1 \leq p < N$. Then the constant $C_{N,p} = \frac{p}{N-p}$ in the inequality

$$\left\| \frac{f}{|x'|} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{N,p} \left\| \nabla f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1}$$

is optimal for all $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{x' = 0\})$, where $|x'|$ is the Euclidean norm on $\mathbb{R}^N$ and ∇ is the standard gradient. When $p < N$ this conjecture was proved first in [2], then recently in [3] by a different method.

In this talk, we show the critical case $p = N$ of the inequality (1) involving the logarithmic weight with an optimal constant. Moreover, we discuss stability type results, critical Sobolev type identities and higher-order versions. Interestingly, in the higher-order case, we obtain with a constant involving the Stirling numbers of second kind.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691).

Keywords: Badiale-Tarantello conjecture, critical Hardy inequality, Stirling number.

2020 Mathematics Subject Classification: 22E30, 11B73, 26D10

References

[1] Badiale M., Tarantello G. A Sobolev–Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **163** (2002), 259–293.

[2] Secchi S., Smets D., Willen M. Remarks on a Hardy–Sobolev inequality, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I **336**:10 (2003), 811–815.

[3] Ruzhansky M., Suragan D. On horizontal Hardy, Rellich, Caffarelli–Kohn–Nirenberg and p-sub-Laplacian inequalities on stratified groups, *J. Differ. Equ.* **262** (2017), 1799–1821

Strong generalised solution of the heat equation on a metric star graph

Z.A.SOBIROV[1,2,a], A.A.TUREMURATOVA[1,3,b]

[1] *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
[2] *V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent,Uzbekistan*
[3] *Branch of Russian Economic University named after G. V. Plekhanov in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]*z.sobirov@nuu.uz,* [b]*ariuxanturemuratova@gmail.com*

We investigate the heat conduction equation on the simple star graph. A star metric graph Γ with n bond consists of a finite set of vertices $V = \{v_k\}_{k=0}^n$ and a finite set of edges $E = \{e_k\}_1^j$, where the edge e_k connects the vertices v_0 and x_k, $k = overline 1, n$ (see in [2]). By assigning the intervalss $(0, l_k)$ to the bond e_k, $k = \overline{1, n}$, of the graph we define the coordinates on each of the edges. Where the vertex of the graph has a coordinate 0 in each bond. We put $G = \Gamma \times (0, T]$.

$W_2^{2,1}(G)$ is the Hilbert space consisting of all elements of $L_2(G)$ having generalized derivatives u_t, u_{x_i}, and $u_{x_i x_j}$ from $L_2(G)$. $\mathring{W}_2^{1,0}(G)$ is a subspace of $W_2^{1,0}(G)$ which dense set is smooth functions equal to zero on boundary vertices of graph (see [3]).

On each bounds we consider the heat conduction equation

$$Lu \equiv u_t^{(k)} - \Delta u^{(k)} = f^{(k)}, x \in \Gamma,\ t \in (0, T],\ k = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

where $\Delta u^{(k)} \equiv \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}$. We need to find strong solutions $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ of equation (1) in $W_{2,0}^{2,1}(G) \equiv W_2^{2,1}(G) \bigcap \mathring{W}_2^{1,0}(G)$, satisfying the initial conditions

$$u^{(k)}(x, 0) = \varphi^{(k)}(x),\ x \in \overline{e_k},\ k = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

the vertex conditions

$$u^{(k)}(0, t) = u^{(j)}(0, t),\ i \neq j,\ k, j = 1, 2, ..., n,\ t \in (0, T], \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \frac{\partial u^{(k)}(0, t)}{\partial x} = 0,\ k = 1, 2, ..., n,\ t \in (0, T], \tag{4}$$

and the boundary conditions

$$u_k(l_k, t) = 0,\ k = 1, 2, ..., n,\ t \in (0, T]. \tag{5}$$

We notice, that in [3] it was obtained weak solution of diffusion equation with fractional time derivative with $f \in L_\infty(0, T; L_2(\Gamma))$. In our case we obtained strong solutions of problem (1)-(5) when right hand side of the equation in $L_2(G)$.

Theorem. *Let $f \in L_2(G)$ and $\varphi \in \mathring{W}_2^1(\Gamma)$, then the problem (1)-(5) is uniquely solvable in $W_{2,0}^{2,1}(G)$ and the following estimates hold*

$$\frac{1}{4} ess \underset{0 \le \tau \le t}{sup} \|u\|_\Gamma^2 + \|u_x\|_{Q_t}^2 \le t\|f\|_{Q_t}^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_\Gamma^2$$

$$\|u_x(x, t)\|_{2,\Gamma}^2 + \int_{Q_T} (u_t^2 + (\Delta u)^2) dxdt = \|u_x(x, 0)\|_{2,\Gamma}^2 + \int_{Q_T} (Lu)^2 dxdt.$$

Keywords: heat conduction equation, metric graph, generalized solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B45, 35D30, 35D35.

References

[1] Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki*, Nauka, Moscow, (1973).

[2] Berkolaiko G., Kuchment P. Introduction to quantum graphs, *Mathematical surveys and monographs, AMS*, vol.186, (2013).

[3] Mehandiratta V., Mehra M., Leugering G. Existence and uniqueness of time-fractional diffusion equation on a metric star graph, *arXiv:2004.07933 [math.AP]*, (2020).

Recent progress on Hardy type inequalities

Durvudkhan SURAGAN

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstran
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

In this talk, we will discuss a new improvement of the classical L^p-Hardy inequality on the multidimensional Euclidean space. Recently, in [1], there has been a new kind of development of the one-dimensional Hardy inequality. Using some radialisation techniques of functions and then exploiting symmetric decreasing rearrangement argu- ments on the real line, the new multidimensional version of the Hardy inequality will be presented. Some consequences and generalizations will be also discussed. This talk is mainly based on [2]-[3].

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Rep. of Kazakhstan (Grant No. AP09057887).

Keywords: Hardy inequality; Sharp Constant; Symmetric rearrangement; Uncertainty principle.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 35A23, 46E35

References

[1] Frank R. L., Laptev A., Weidl T. An improved one-dimensional Hardy inequality, *J. Math. Sci.*, 268 (2022), 323–342.

[2] Roychowdhury P., Ruzhansky M., Suragan D. Multidimensional Frank-Laptev-Weidl improve- ment of the Hardy Inequality, *arxiv*:2209.08395 (2022).

[3] Suragan D. A survey of Hardy type inequalities on homogeneous groups, in: *Cerejeiras, P., Reissig, M. (eds) Mathematical Analysis, its Applications and Computation. ISAAC 2019. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 385.*, Springer, Cham (2022), 3–45.

Critical exponents for the evolution equations with combined nonlinearities

Berikbol T. TOREBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: torebek@math.kz

This work studies the large-time behavior of solutions to the quasilinear inhomogeneous parabolic equation with combined nonlinearities. This equation is a natural extension of the heat equations with combined nonlinearities considered by Jleli-Samet-Souplet in [1]. Firstly, we focus on an interesting phenomenon of discontinuity of the critical exponents. In particular, we will fill the gap in the results of [1] for the critical case. We are also interested in the influence of the forcing term on the critical behavior of the considered problem, so we will define another critical exponent depending on the forcing term.

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09259578)

Keywords: p-Laplace heat equation, combined nonlinearities, critical exponents, global solutions.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K92, 35B33, 35B44

References

[1] M. Jleli, B. Samet, P. Souplet, Discontinuous critical Fujita exponents for the heat equation with combined nonlinearities, *Proc. Am. Math. Soc.*, **148** (2020), 2579–2593.

On optimal domain for the hilbert transform in symmetric spaces

Kanat TULENOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
PDE and Analysis centre, Ghent University, Ghent, Belgium
E-mail: tulenov@math.kz

Over the last decades optimal domain and optimal range for some classical operators in harmonic analysis have been studied by many authors. In this work, we will discuss optimal domain for the Hilbert transform among symmetric spaces of measurable functions with trivial Boyd indices. We will show two examples of optimal domain spaces in a special case, when these optimal domains are symmetric spaces with trivial boyd indices. Similar problems were studied for finite Hilbert transform and Hardy type operators [1]-[4].

Funding: The author was supported by the grant no. BR20281002 from the Ministry of Science and Higher Education of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Optimal domain, Hilbert transform, symmetric space.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E30, 47B10, 46L51, 44A15; Secondary 47L20, 47C15.

References

[1] Curbera G.P., Okada S., Ricker W.J., nversion and extension of the finite Hilbert transform on $(-1, 1)$., *Ann. Mat. Pura Appl.*, **198**:5 (2019), 1861.

[2] Edmunds D.E., Mihula Z., Musil V., and Pick L., Boundedness of classical operators on rearrangement invariant spaces, *J. Funct. Anal.*, **278**:4 (2020), 108341.

[3] Soria J., Tradacete P., Optimal rearrangement invariant range for Hardy-type operators, *Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh*, **146 A** (2016), 865–893.

[4] Soria J., Tradacete P., Optimal domain for the Hardy operator, *J. Funct. Anal.*, **244**:1 (2007), 119–133.

On weighted integrability of the sum of series with monotone coefficients with respect to multiplicative systems

Mendybai TURGUMBAEV[1,a], Zauresh SULEIMENOVA[2,b], Dariga TUNGUSHBAEVA[3,c]

[1] *Karaganda Buketov university, Karaganda, Kazakhstan*
[2,3] *L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
E-mail: [a]*mentur60@mail.ru,* [b]*zr-s2012@yandex.ru,* [c]*dtungushbaeva@mail.ru*

In this work we consider the series with monotone coefficients on multiplicative systems. We investigate the problem: under what conditions imposed on the weight function and the coefficients of the series, the sum of this series will belong to the space Lp with the weight.

Let $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ is the multiplicative system with generating sequence $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, $p_k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$; $m_0 = 1$, $m_n = p_1 p_2 \cdots p_n$, $n \in \mathbb{N}$, [1], [2].

Definition. Let $\varphi(x)$ - be a non-negative measurable function on $[0, \infty)$. Let us say that $\varphi(x)$ satisfies condition B_1, if for all $x \geq 1$ the inequality

$$\int_x^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq C \frac{\varphi(x)}{x},$$

where C- is a positive number independent of x.

Theorem 1. Let $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x)$, $a_k \downarrow 0$ *at* $k \to \infty$ *and*

let $\varphi(x)$ *be a non-negative measurable function on* $[1, \infty)$. *Then*

1^0. *If* $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) \in L_p(0, 1)$ *and*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m_n - 1} a_k + a_{m_n} m_{n+1} \right)^p \int_{1/m_{n+1}}^{1/m_n} \varphi^p \left(\frac{1}{x} \right) dx < \infty,$$

then $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L_p(0,\ 1)$.

2^0. *If the function* $\varphi^{-p'}(x)$ *satisfies the condition* B_1 *and* $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L_p(0,\ 1)$, $\sup\limits_n p_n = K < \infty$, *then* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} a_k\right)^p \int_{1/m_{n+1}}^{1/m_n} \varphi^p\left(\frac{1}{x}\right) dx < \infty$.

Theorem 2. Let $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x)$, $a_k \downarrow 0$ *at* $k \to \infty$ *and*

let $\varphi(x)$ *be a non-negative measurable function on* $[1,\ \infty)$. *Then*

1^0. *If function* $\varphi^p(x)$ *satisfies condition* B_1 *and*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n}^p \cdot m_{n+1}^p \int_{1/m_{n+1}}^{1/m_n} \varphi^p\left(\frac{1}{x}\right) dx < \infty,$$

then $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L_p(0,\ 1)$.

2^0. *If* $\varphi^{-p'}(x)$ *satisfies condition* B_1 *and* $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L_p(0,\ 1)$, *then*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{m_{n+1}}^p \cdot m_{n+1}^p \int_{1/m_{n+1}}^{1/m_n} \varphi^p\left(\frac{1}{x}\right) dx < \infty.$$

Theorem 3. Let $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x), \quad a_k \downarrow 0 \ \textit{at}\ k \to \infty \ \textit{and}$$

let $\varphi(x)$ *be a non-negative measurable function on* $[1,\ \infty)$, $\sup\limits_n p_n = N < \infty$. *Then*

1^0. *If the function* $\varphi^p(x)$ *satisfies condition* B_1 *and*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \cdot n^p \int_n^{n+1} \frac{\varphi^p(x)}{x^2} dx < \infty, \textit{then}\ \varphi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L_p(0,\ 1).$$

2^0. *If* $\varphi^{-p'}(x)$ *it satisfies the condition* B_1 *and* $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L_p(0,\ 1)$, *then the converse assertion takes place.*

For the case of series in the Walsh system, similar results were obtained in [3].

Funding: The research of first avtor was supported by the grant no. AP14869887 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: The multiplicative systems, the weighted integrability of the sum of series, monotone coefficients, Hardy-Littlewood theorem.

2010 Mathematics Subject Classification: 42B25, 46E30, 47B38, 26D10.

References

[1] Agaev G.N., Vilenkin N.Ya., Jafarli G.M., Rubinshtein A.I. *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups*, Baku: "ELM" (1981).

[2] Golubov B.I., Efimov A.V., Skvortsov V.A. *Walsh series and transformations. Theory and applications*, Moscow: "Nauka" 1987.

[3] Simonyan A.S. *On - integrability of series in the Walsh-Paley system*, (1987), Dep. VINITI No. 1770 - B 87, p.15.

On a limit solution of a singular boundary value problem

Roza UTESHOVA[1,a], Yelena KOKOTOVA[2,b]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2] K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail: [a]ruteshova1@gmail.com, [b]kokotovae@mail.ru

We consider the differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

where $f(t,x) : (0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a continuous function. Let $x_0(t)$ be a function continuously differentiable on $(0,T)$. We suppose that the function $\alpha(t) = \|f'_x(t,x_0(t))\|$ satisfies the following relations:

$$\lim_{\delta \to 0+0} \int_{\delta}^{T/2} \alpha(t)dt = \infty, \qquad \lim_{\delta \to 0+0} \int_{T/2}^{T-\delta} \alpha(t)dt = \infty.$$

Various problems for equations with singularities at the endpoints of the domain intervals have been studied by numerous authors (see [1-3] and references therein). In order to study the behavior of solutions of equation (1) at singular points, one can use so-called "limit solutions". In [4], for a nonlinear differential equation considered on the whole real axis, the concept of a "limit solution as $t \to \infty$" was introduced. Some conditions were derived, under which all solutions of the differential equation from a functional ball coincide with a limit solution when $t \to \infty$. By means of Lyapunov transformations and limit solutions, regular two-point boundary value problems were constructed to approximate the restrictions of solutions bounded on the whole real line to a finite interval. To this end, iterative processes for unbounded operator equations [5] and the results obtained in [6] were used where analogous problems were studied for a linear ordinary differential equation.

It was proved that, under certain assumptions on the right-hand part of the equation, the limit solution $x_0(t)$ possesses an attracting property; i.e. there exists a functional ball centered at $x_0(t)$ where the differential equation has at least one solution, and all solutions from this ball coincide with $x_0(t)$. This property made it possible to solve the problem of approximation of a solution bounded on the whole real axis.

The attracting property of the limit solution was established under assumption that the differential equation linearized along the limit solution

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t,x_0(t))y$$

admits an exponential dichotomy on $\mathbb{R}$. However, if the differential equation has certain singularities in the domain, this assumption may be violated.

The concept of a limit solution was extended in [7] to the case of a nonlinear differential equation with a singularity at the left endpoint of the domain interval. In this case the limit solution was introduced with a weight which is chosen taking into account the singularities. It was proved that the weighted limit solution also has the attracting property.

In the present paper, we consider a singular boundary value problem for equation (1) on a finite interval. We define the concept of a limit solution at singular points and establish conditions under which this solution possess an attracting property. We then construct approximating regular two-point boundary value problems that allow us find approximate solutions of the singular boundary value problem with any specified accuracy.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP08855726, BR20281002).

Keywords: singular boundary-vaue problem, limit solution, approximation.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34A45, 34K28

References

[1] Kiguradze I.T., Shekhter B.L.Singular boundary-value problems for ordinary second-order differential equations, *J.Math.Sci*, **43**(1988), 2340–2417.

[2] Samoilenko A. M., Shkil' M. I., Yakovets' V. P.*Linear Systems of Differential Equations with Degenerations*, Vyshcha Shkola, Kyiv (2000).

[3] Kudryavtsev L. D.Problems with initial asymptotic data for systems of ordinary differential equations, *Dokl. Ros. Akad. Nauk*, **407**:2 (2006), 172–175.

[4] Dzhumabaev D. S.Singular boundary value problems and their approximation for nonlinear ordinary differential equations, *Journal of Comp. Math. and Math. Phys.*, **32**:1 (1992), 13–29.

[5] Dzhumabaev D. S.Convergence of iterative methods for unbounded operator equations, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, **41** (1987), 356–361.

[6] Dzhumabaev D. S.Approximation of bounded solutions and exponential dichotomy on the axis, *Journal of Comp. Math. and Math. Phys.*, **30**:6 (1990), 32–43.

[7] Dzhumabaev D. S., Uteshova R.E.Weighted limit solution of a nonlinear ordinary differential equation at a singular point and its property, *Ukrainian Math. J.*, **69**:12 (2018), 1997–2004.

Nonlinear Dynamical Analysis of Some Microelectromechanical Systems Resonators with Internal Damping

Dongming WEI[1,a], Daulet NURAKHMETOV[2,3,b], Christos SPITAS[2,c], Almir ANIYAROV[2,3,d], Dichuan ZHANG[2,e]

[1] *School of Sciences and Humanities, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*
[2] *School of Engineering, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*
[3] *Astana International University, Astana, Kazakhstan*
E-mail: [a]*dongming.wei@nu.edu.kz*, [b]*dauletkaznu@gmail.com*, [c]*christos.spitas@nu.edu.kz*, [d]*aniyarov.a@gmail.com*, [e]*dichuan.zhang@nu.edu.kz*

Microelectromechanical system (MEMS) is one of the active research areas in engineering. The growing demand for better microelectronic devices requires the creation of new technologies. Reviews of some of these devices can be found in Refs. [1],[2]. An important component in modeling of MEMS devices is the physical properties of the material. There are many materials which are good candidates for MEMS applications, but they have nonlinear mechanical properties. The most commonly used materials for MEMS applications are polysilicon, aluminum, and Titanium alloys etc. [1], [3]. We propose to study a natural generalization of the Kelvin-Voigt damping for the power-law materials in the following form:

$$\sigma = K|\varepsilon|^{n-1}\varepsilon + c_d|\dot{\varepsilon}|^{m-1}\dot{\varepsilon},$$

where σ, ε, K, c_d, $n \in (0,1)$ and m denote the stress, the strain, the strength and the strain-rate damping coefficient, the strain-hardening and the strain-rate sensitivity exponent, respectively [4]. Main results of our talk were published in [5].

Funding: The authors were supported by the grant no. OPCRP2020002 of the Nazarbayev University.

Keywords: power-law equation, MEMS, Kelvin-Voigt damping.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Younis, M.I. *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London (2011).

[2] Kostsov, E.G. Status and prospects of micro-and nanoelectromechanics. *Optoelectron.Instrument.Proc.*, **45**:3 (2009), 189–226.

[3] Ikizoglu, S., Ozgul, A. *Design considerations of a MEMS cantilever beam switch for pull-in under electrostatic force generated by means of vibrations.* Journal of Vibroengineering*, **16**:3 (2014), 1106–1113.*

[4] Kalpakjian, S., Schmid, S.R. *Manufacturing Engineering and Technology*, 7th edn., Pearson Education South Asia, Singapore (2014).

[5] Wei, D., Nurakhmetov, D., Spitas C., Aniyarov A., Zhang D. Nonlinear Dynamical Analysis of Some Microelectromechanical Systems Resonators with Internal Damping, *Acta Mechanica Sinica*, **37**:9 (2021), 1457–1466.

Spectrum of the Cesáro-Hardy operator in rearrangement invariant spaces

G. ZAUR[1,a], O. SADOVSKAYA[2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]*z.gulnur.t@gmail.com*, [b]*sadovskaya-o@inbox.ru*

The operators C_1 and C_∞ are defined on spaces $L_1(0,1)$ and $(L_1+L_\infty)(0,\infty)$, respectively, by

$$C_1 f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds, \quad t \in (0,1), \tag{1}$$

$$C_\infty f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds, \quad t \in (0,\infty). \tag{2}$$

The linear maps $C_1 : f \mapsto C_1 f$ and $C_\infty : f \mapsto C_\infty f$ are called the Cesáro-Hardy operator.

Definition. [1, Definition II 4.1] Let (Ω, Σ, μ) be a totally σ-finite measure space and let $\mathcal{M}^+(\Omega)$ denote the class of non-negative measurable functions on Ω.

Let $\rho : \mathcal{M}^+(\Omega) \to [0;\infty]$ satisfy the following five conditions for all f, g, $f_n \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, all measurable sets $E \in \Sigma$ with $\mu(E) < \infty$ and all constants $a \geq 0$

1. $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.e.,
   $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$, $\rho(af) = a\rho(f)$
2. $0 \leq g \leq f$ a.e. $\Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$
3. $0 \leq f_n \uparrow f$ a.e $\Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$
4. $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$
5. $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu < C_E \rho(f)$

for some constant C_E, $0 < C_E < \infty$, depending on E and ρ, but independent of f.

Then ρ is said to be rearrangement invariant if $\rho(f) = \rho(g)$ for every equimeasurable functions f and g in $\mathcal{M}^+(\Omega)$ and the Banach function space $X(\Omega)$ with given norm ρ is called rearrangement invariant (r.i.) space.

Remark. We consider the cases when $\Omega = (0,1)$ and $\Omega = (0,\infty)$.

The dilation operator $E_s : X(\Omega) \to X(\Omega)$ for $0 < s < \infty$ is defined by

$$(E_s f)(t) = f(st). \tag{3}$$

The upper and lower Boyd indices of r.i. space $X(\Omega)$ are respectively defined by [1, Definition III.5.12]

$$\overline{\alpha} := \inf_{0<s<1} \frac{-\log \|E_s\|_{X\to X}}{\log s}, \quad \underline{\alpha} := \sup_{s>1} \frac{-\log \|E_s\|_{X\to X}}{\log s}.$$

Remark. The Cesáro-Hardy operator is bounded from r.i. space $X(\Omega)$ to $X(\Omega)$ if and only if $\overline{\alpha} < 1$ [3, Theorem 1].

The following theorems are the main results of this paper.

Theorem 1. *Let $C_1 : X(0,1) \to X(0,1)$ be the Cesáro-Hardy operator mapping r.i. space $X(0,1)$ into itself. And let upper $(\overline{\alpha})$ and lower $(\underline{\alpha})$ Boyd indices of $X(0,1)$ be $0 \leq \underline{\alpha} \leq \overline{\alpha} < 1$. Then the spectrum of the operator C_1 in r.i. space $X(0,1)$ is the set*

$$\sigma(C_1) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : Re \left(\frac{1}{\lambda} \right) \geq 1 - \overline{\alpha} \right\}.$$

Theorem 2. *Let $C_\infty : X(0,\infty) \to X(0,\infty)$ be the Cesáro-Hardy operator defined as in (2). And let $X(0,\infty)$ be a rearrangement invariant space with upper and lower Boyd indices such that $0 \leq \underline{\alpha} \leq \overline{\alpha} < 1$. Then the spectrum of C_∞ in r.i. space $X(0,\infty)$ becomes the set*

$$\sigma(C_\infty) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : 1 - \overline{\alpha} \leq Re \left(\frac{1}{\lambda} \right) \leq 1 - \underline{\alpha} \right\}.$$

Note that the spectrum of C_∞ is the circle $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : Re \left(\frac{1}{\lambda} \right) = 1 - \overline{\alpha} \right\}$ when $\overline{\alpha}$ and $\underline{\alpha}$ coincide.

Funding: The first author was supported by the grant no. AP09258335 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: spectrum, Cesáro-Hardy operator, rearrangement invariant spaces, Boyd indices.

References

[1] Bennett C., Sharpley R. C. *Interpolation of operators*, Academic press (1988).

[2] Dowson H. R. *Spectral theory of linear operators*, Academic press (1978).

[3] Boyd, D. W. The spectral radius of averaging operators, *Pacific Journal of Mathematics*, **24**:1 (1968), 19–28.

[4] Boyd, D. W. Spectrum of Cesáro operator, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **29**:2-1 (1968), 31–34.

[5] Boyd, D. W. The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces, *Canadian Journal of Mathematics*, **19** (1967), 599–617.

[6] Boyd, D. W. Spaces between a pair of reflexive Lebesgue spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **18**:2 (1967), 215–219.

Weighted estimates of a class of matrix operator with three parameters

Nazerke ZHANGABERGENOVA

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str. 2, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: zhanabergenova.ns@gmail.com

Let $0 < q, p, r < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and $f = \{f_i\}_{i=1}^\infty$ arbitrary sequence of real numbers. Suppose that $u = \{u_i\}_{i=1}^\infty$, $v = \{v_i\}_{i=1}^\infty$ and $w = \{w_i\}_{i=1}^\infty$ be positive sequences of real numbers, which will be called weight sequences. We denote by $l_{p,v}$ the space of sequences f of real numbers such that

$$\|f\|_{p,v} = \left(\sum_{i=1}^\infty |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

For any $f \in l_{p,v}$ we consider the following discrete Hardy-type inequalities

$$\left(\sum_{n=1}^\infty u_n^q \left(\sum_{k=1}^n \left| w_k \sum_{i=k}^\infty a_{i,k} f_i \right|^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^\infty |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

where C is a positive constant independent of f and $(a_{i,k})$, $i \geq k$ is a matrix, whose non-negative entries satisfy the discrete Oinarov condition: there exists a constant $d \geq 1$, entries $a_{i,k}$ are almost non-decreasing in i and almost non-increasing in k, such that the inequalities

$$\frac{1}{d}(a_{i,j} + a_{j,k}) \leq a_{i,k} \leq d(a_{i,j} + a_{j,k}), i \geq j \geq k \geq 1 \tag{2}$$

We also need the following quantities: $J^-_{r,p}(\alpha,\beta) = \sup\limits_{f \neq 0} \frac{\left(\sum\limits_{k=\alpha}^\beta \left| w_k \sum\limits_{i=k}^\beta a_{i,k} f_i \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum\limits_{i=\alpha}^\beta |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}$, $f \in l_{p,v}$.

The purpose of the work is to obtain weighted estimates of inequalities (1) and its dual version for the cases: $1 < p \le q < \infty$ and $1 < r < \infty$; $p \le q < \infty$, $0 < p < 1$ and $1 < r < \infty$. Similiar integral inequalities were considered in works [1]-[4].

Theorem 1. *Let $0 < p \le 1$, $p \le q < \infty$ and $1 < r < \infty$. Let the entries of the matrix $(a_{i,k})$ satisfy condition (2). Then inequality (1) holds if and only if $B^+ = \max\{B_1^+, B_2^+\} < \infty$, where*

$$B_1^+ = \sup_{j\ge 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J^-_{r,p}(1,j),$$

$$B_2^+ = \sup_{j\ge 1} \left(\sum_{n=1}^{j} u_n^q \left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}.$$

Moreover, $C \approx B^+$, where C is the best constant in (1).

Theorem 2. *Let $1 < p \le q < \infty$ and $1 < r < \infty$. Let the entries of the matrix $(a_{i,k})$ satisfy condition (2). Then inequality (1) holds if and only if $M^+ = \max\{M_1^+, M_2^+, M_3^+\} < \infty$, where*

$$M_1^+ = \sup_{j\ge 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} J^-_{r,p}(1,j),$$

$$M_2^+ = \sup_{j\ge 1} \left(\sum_{n=1}^{j} u_n^q \left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}^r w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$M_3^+ = \sup_{j\ge 1} \left(\sum_{n=1}^{j} u_n^q \left(\sum_{k=1}^{n} w_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Moreover, $C \approx M^+$, where C is the best constant in (1).

Remark. The statements of the main results are also given for dual version of the inequality (1).

Funding: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan in the area "Scientific research in the field of natural sciences" [grant number AP09259084].

Keywords: Inequality, discrete Lebesgue space, Hardy-type operator, weights, quasilinear operator, matrix operator.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D15, 26D20

References

[1] Kalybay A. Weighted estimates for a class of quasilinear integral operators, *Siberian Math. J.*, **60**:2 (2019), 291–303.

[2] Kalybay A. Weighted estimates for a class of quasilinear integral operators, *Siberian Math. J.*, **60**:2 (2019), 376–390.

[3] Oinarov R., Kalybay A.Three parameter weighted Hardy-type inequalities, *Banach Journal Math.*,**2**:2 (2008), 85–93.

[4] Oinarov R., Kalybay A.A. Weighted estimates of a class of integral operators with three parameters, *J. Funct. Spaces. Appl.* (2016): 11

Factorizations and Hardy inequalities for the Baouendi-Grushin operator

Amir ZHANGIRBAYEV

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: amir.zhangirbayev@gmail.com

First, let us recall the Hardy inequality for Baouendi-Grushin vector fields by Garofalo [1],

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla_x f|^2 + |x|^{2\gamma} |\nabla_y f|^2\right) dz \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|x|^{2\gamma}}{|x|^{2+2\gamma} + (1+\gamma)^2 |y|^2}\right) |f|^2 dz, \tag{1}$$

where $z = (x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_k) = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ with $n = m + k,\ m, k \geq 1,\ \gamma \geq 0,\ Q = m + (1+\gamma)k$ and $f \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \backslash \{(0,0)\}\right)$. Here, $\nabla_x f$ and $\nabla_y f$ are the gradients of f in the variables x and y, respectively.

In this talk, we discuss some improved versions of the Hardy inequality for the Baouendi-Grushin operator by factorizing differential expressions, inspired by the work of Gesztesy and Littlejohn [2]. Similarly to [3], we also discuss the Hardy inequality with general weights $\phi(z)$ and $\psi(z)$. However, in this work, the inequality is generalised for the Baouendi-Grushin operator. In the special cases, the inequality recovers classical, critical and weighted Hardy inequalities in the Euclidean settings.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (Suleyman Demirel University, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691 and Grant No. AP09058474).

Keywords: Hardy inequalities, Baouendi-Grushin operator, factorization method.

2020 Mathematics Subject Classification: 26D10, 35J70

References

[1] N. Garofalo. Unique continuation for a class of elliptic operators which degenerate on a manifold of arbitrary codimension, *J. Differental Equations*, 104(1):117–146, 1993.

[2] F. Gesztesy, L. Littlejohn. Factorizations and Hardy-Rellich-type inequalities, *Non-Linear Partial Differential Equations, Mathematical Physics, and Stochastic Analysis*, EMS Ser. Congr. Rep., Zürich, 207–226, 2018.

[3] M. Ruzhansky, N. Yessirkegenov. Factorizations and Hardy-Rellich inequalities on stratified groups, *Journal of Spectral Theory*, 10(4):1361–1411, 2020.

Program manifold's stability of hydraulic actuator control systems

Sailaubay ZHUMATOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakstan
E-mail: sailau.math@mail.ru

Consider the problem of construction of the control systems with speed feedback, taking into account the compressibility of the fluid given $(n-s)$-dimensional program manifold $\Omega\,(t) \equiv \omega(t,x) = 0$, in the following form [1-3]:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f\,(t,x) - b_1\xi, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,, \\ &\dot{\xi} = z, \quad \dot{z} = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} z + \frac{1}{\lambda_2}\varphi(\sigma)\psi(\nu), \\ &\sigma = p^T\omega - q\xi - N\dot{\xi}, \end{aligned} \tag{1}$$

where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t) = 0$, and $b_1 \in R^n,\ p \in R^s$ are constant vectors,q, N are constant coefficients of position and speed feedbacks, σ is the total control impulse-signal, and $\varphi(\sigma)$ is function differentiable with respect to σ, satisfies the following conditions

$$\varphi(0) = 0 \wedge \varphi(\sigma)\sigma > 0 \quad \forall\sigma \neq 0 \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=0} < \chi > 0, \tag{2}$$

and the function $\psi(\nu)$ takes into account the actions of the external load.

Here $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ are expressed in terms of the coefficients of the equation of the hydraulic actuator, taking into account the compressibility of the fluid contained in the hydraulic cylinder[4]:

$$\lambda_1 = \frac{m}{k_{hl}}, \quad \lambda_2 = \frac{h}{k_{hl}}, \quad \lambda_3 = 1 + \frac{k_{he}}{k_{hl}}, a = \frac{m}{p_0 F}, \quad b = \frac{h}{p_0 F}, \quad c = \frac{k_0}{p_0 F},$$

the equation (1) will be written in the following form

$$\lambda_1 \dddot{\xi} + \lambda_2 \ddot{\xi} + \lambda_3 \dot{\xi} = \varphi(\sigma)\psi(\nu), \tag{3}$$

where the function $\varphi(\sigma) = k_\nu \sigma$ is continuous in σ and ν is determined by the formula

$$\nu = 1 - (a\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + c\xi) sign\sigma. \tag{4}$$

This problem reduce to investigation of quality properties of the following system with respect to vector-function ω [2, 3]:

$$\begin{aligned} &\dot{\omega} = -A\omega - b\xi, \quad t \in I = [0, \ \infty)\,, \\ &\dot{\xi} = z, \quad \dot{z} = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} z + \frac{1}{\lambda_2}\varphi(\sigma)\psi(\nu), \\ &\sigma = p^T\omega - q\xi - N\dot{\xi}, \end{aligned} \tag{5}$$

Here nonlinearity satisfies also to generalized conditions (2), and $F(t, x, \omega) = -A\omega, \ A \in R^{s\times s}, \ H = \dfrac{\partial\omega}{\partial x}, \ b = Hb_1$.

Using a non-singular transformation [5], the system (5) can be reduced to an equivalent form

$$\begin{aligned} &\dot{\omega} = -\rho\omega + \tfrac{1}{\lambda_2}\varphi(\sigma)\psi(\nu), \\ &\dot{\omega}_{s+2} = \tfrac{1}{\lambda_2}\varphi(\sigma)\psi(\nu), \\ &\sigma = g^T\omega, \end{aligned} \tag{6}$$

where

$$\omega_{s+1} = \xi, \omega_{s+2} = z, \mu_1 = 0, ..., \mu_{s+1} = 0,$$

$$\mu_{s+2} = 1, p_{s+1} = -q, p_{s+2} = -N,$$

and $\rho = diag(\rho_1, ..., \rho_s)$ are roots of equation

$$D(\rho) = \| A + \rho E \| = 0. \tag{7}$$

Theorem 1. *If the Erugin function is linear with respect to ω , the nonlinearity $\varphi(\sigma)$ satisfies condition (2), the function $\psi(\nu)$ is determined by formula (4), the coefficients of rigid and speed feedback are positive , the roots of equation (7) are different positive numbers and $\rho_{s+1} = \dfrac{k_{hl} + k_{he}}{m}$, then in order for the program manifold of the automatic system of indirect control, taking into account the compressibility of the fluid was absolutely stable with respect to the vector function ω, it suffices to satisfy equalities $g_k + 2l_k \sum_{i=1}^{s+1} \frac{l_i}{\rho_i + \rho_k} = 0 \quad k = \overline{1, ..., s+1}$, and inequality $g_{s+2} < 0$, where $l_1, ..., l_{s+1}$ are real numbers.*

Funding: This results are supported by grant of the Ministry education and science of Republic Kazakhstan No. AP 09258966 for 2021-2023 years.

Keywords: program manifold, indirect control system, external load, position and speed feedbacks.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C15, 34K29

References

[1] Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system.*, Nauka, Alma-Ata (1981).

[2] Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral curve, *Prikl. mat. Mech*, **10**:5 (1952), 659–670.

[3] Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G.,and other Conztruction program motion's system., Nauka, Moskow (1971).

[4] Khokhlov I.A. Electrohydraulic servo drive. M., Nauka. Moskow (1966).

[5] Letov A.M. Stability of nonlinear controlled systems. Nauka. Moskow (1962).

3 Математическое моделирование и уравнения математической физики

Руководители: профессор Алексеева Л.А.
д.ф.-м.н. Даирбеков Н.С.
академик НАН РК Харин С.Н.

Секретарь: Бакирова Э.А.

Об одной группе преобразований пространства, априори сохраняющих форминвариантность законов физики

М.М. АБЕНОВ *КазНУ имени Аль –Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: abenov60@gmail.com

Как известно, законы механики и других разделов теоретической физики одинаково формулируются в различных инерциальных системах отчета. На языке математики это означает то, что должно существовать невырожденное ортогональное преобразование четырехмерного пространства – времени, такое, что форма любого уравнения движения не должно изменяться (обеспечение форминвариантности уравнения) при таком линейном, невырожденном преобразовании четырехмерного континуума в себя.

В связи с этим отметим, что в современной теоретической физике признаны два вида ортогональных преобразований. Первые, так называемые преобразования Галилея сохраняют вид некоторых уравнений механики Ньютона, но не обеспечивают форминвариантность уравнений Максвелла в электродинамике. В свою очередь, знаменитые преобразования Лоренца, оставляя неизменными формы уравнений Максвелла, не обеспечивают форминвариантность уравнений механики Ньютона и ряда других, даже линейных уравнений теоретической физики. Причем о сохранении вида нелинейных уравнений движения (при этих преобразованиях) и говорить не приходится.

В данной работе автор дает описание (обоснование) одной группы невырожденных ортогональных преобразований четырехмерного пространства – времени в себя, априори обеспечивающих форминвариантность любого (линейного или нелинейного) уравнения движения теоретической физики. Показано, что преобразования Галилея являются частным случаем рассматриваемых им преобразований.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения движения, форминвариантность, группа Пуанкаре, регулярные 4 – векторы теоретической физики.

2010 Mathematics Subject Classification: 15A04, 37C80, 37J05

Литература

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика в 10-ти томах*, Наука, Москва (1988).

[2] Логунов А.А. *Лекции по теории относительности*, Наука, Москва (2002).

[3] Абенов М.М. *Четырехмерная математика:методы и приложения*, КазНУ, Алматы (2019).

Об одной краевой задаче для системы интегро-дифференциальных уравнений тепло- и массообмена с нормальными производными высокого порядка

Е.М. ХАЙРУЛЛИН[1,a], А.С. АЖИБЕКОВА[1,b]

[1] *Satbayev University, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*khairullin_42_42@mail.ru,* [b]*aliya_azhibek@mail.ru*

Рассматривается краевая задача

$$L_k[U_k(x,t)] = \mu_k \int_0^t \Delta U_k(x,\tau)d\tau + f_k(x,t), \quad k = 1,2, \tag{1}$$

в области

$$Q_T \equiv \left\{(x', x_n, t) : x' \in R^{n-1},\ x_n \in R_+,\ t \in]0,T[\right\},$$

удовлетворяющая начальным условиям:

$$U_k(x,0) = 0 \tag{2}$$

и граничным условиям:

$$\sum_{k=1}^{2} a_k U_k(x,t)\bigg|_{x_n=0} = \varphi_1(x',t), \quad (x',t) \in Q_T^{(1)} \equiv Q_T \setminus x_n, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{k_n=0}^{m_k} b_{k_n}^{(k)} \frac{\partial^{k_n} U_k(x,t)}{\partial {x_n}^{k_n}}\bigg|_{x_n=0} = \varphi_2(x',t), \quad m_k \geq 1, \tag{4}$$

где $L_k = (\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_k \Delta)$, Δ - оператор Лапласа по переменной $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; λ_k - положительные постоянные, причем $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; $\mu_k, a_k, b_{k_n}^{(k)}$ - заданные постоянные, $\mu_k \geq 0, b_m^{(k)} \neq 0$.

Решение краевой задачи (1)-(4) ищется в виде суммы теплового потенциала двойного слоя с неизвестными плотностями $\Psi_k(x',t)$ и функции Коши ИДУ (1). Приводится Лемма о нахождении пределов нормальных производных m-го порядка функции $U_k(x,t)$ в окрестности гиперплоскости $x_n = 0$. Используя Лемму и граничные условия (3) и (4), получена система интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ) относительно неизвестных плотностей $\Psi_k(x',t)$ с оператором $F_k \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \lambda_k \Delta_{x'}$, $k = 1,2$. Используя метод регуляризации, выделяя характеристическую часть СИДУ и применяя интегральные преобразования Фурье-Лапласа, найдено решение ИДУ при выполнении условия разрешимости.

Теорема. *Если $\varphi_k(x',t) \in C_{x',t}^{2,1}\left(Q_T^{(1)}\right)$, $f_k(x,t) \in C_{x_n}^{m}(Q_T)$ и $q_k = \frac{\lambda_1 z_k^2 - \lambda_2}{z_k^2 - 1} > 0$ (z_k - корни характеристического уравнения), то существует функция $U_k(x,t) \in C_{x_n}^{m}(Q_T)$, являющаяся решением краевой задачи (1)-(4), где неизвестные функции $\Psi_k(x',t)$ определяются из системы интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма.*

Funding: Работа поддержана грантом AP09259848 КН МОН РК.

Ключевые слова: тепло- и массообмен, интегро-дифференциальные уравнения, краевая задача, нормальные производные высокого порядка, условия разрешимости, регуляризация.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K45, 58J35

Литература

[1] Khairullin E.M., Azhibekova A.S. A general boundary value problem for heat and mass transfer equations with high order normal derivatives in boundary conditions, *AIP Conference Proceedings* **2325**, 020011 (2021); https://doi.org/10.1063/5.0041111.

Метод обобщенных функций в краевых задачах динамики термоупругих стержней

А.Н. ДАДАЕВА[1,a], Н.Ж. АЙНАКЕЕВА[2,b]

[1]*Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И.Сатпаева, Казахстан, Алматы*

[2]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

автора

E-mail: [a]dady1262@mail.ru,

[b]nursaule_math@mail.ru

Исследуются пространственно-одномерные краевые задачи несвязанной термоупругости [1,2], которые можно использовать для исследования термонапряженного состояния различных стержневых конструкции в условиях теплового нагрева и динамического нагружения. Рассматриваются задачи определения перемещений, деформаций, напряжений, температуры и тепловых потоков при различных краевых условиях на его концах и действующих силовых и тепловых источников по всей длине стержня.

На основе метода обобщенных функций [3,4] построены обобщенные решения нестационарных и периодических по времени краевых задач при действии силовых и тепловых источников различного типа. Действующие источники могут быть заданы и сингулярными обобщенными функциями.

Рассмотрены ударные упругие волны, которые возникают в таких конструкциях при действии ударных нагрузок. Получены регулярные интегральные представления обобщенных решений, которые дают аналитическое решение поставленных краевых задач. Особенность построенных решений делает их удобными для исследования сетевых термоупругих систем, которые можно моделировать термоупругими графами.

Ключевые слова:пространственно-одномерные уравнения термоупругости, краевые задачи, метод обобщенных функций, термонапряженное состояние

2020 Mathematics Subject Classification: 30E25,68M99

Литература

[1] Новацкий В. *Динамические задачи термоупругости.* , М.: Мир, 1970. 256 с.

[2] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* , М.: Наука, 1978. 512 с.

[3] Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения, *Математический журнал*, **6**:1 (2006). 16–32.

[4] Алексеева Л.А., Арепова Г. Обобщенные решения краевых задач для уравнения Даламбера с локальными и связанными граничными условиями, *Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series*, **138**:1 (2022). 23–35.

Краевые задачи волнового уравнения на звездном графе

Л.А. АЛЕКСЕЕВА[1,a], Г.Д. АРЕПОВА[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделировани, Алматы, Казахстан*

[2] *Университет имени Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан*
E-mail: [a]*alexeeva@math.kz*, [b]*arepovag@mail.ru*

Рассматривается звездный граф из N отрезков (A_0, A_j) длины L_j $(j = \overline{1, N})$ с общей вершиной A_0. На каждом отрезке вводится своя система координат (x_j, t) с началом в узле A_0: $x_j = 0$ и функций состояния $u_j(x_j, t)$ которые удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2}(x_j, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(x_j, t) = G_j(x_j, t), 0 < x_j < L_j, t > 0, \tag{1}$$

начальным условиям

$$u_j(x_j, 0) = 0, \quad 0 \le x_j \le L_j, \quad \frac{\partial}{\partial t}u_j(x_j, 0) = 0, \quad 0 \le x_j \le L_j. \tag{2}$$

Здесь рассмотрим три краевые задачи с краевыми условиями первого и второго на концах

$$u_j(L_j, t) = \omega_j(t), \quad t \ge 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}u_j(L_j, t) = p_j(t), \quad t \ge 0, \tag{4}$$

$$u_j(L_j, t) + \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}u_j(L_j, t) = d_j(t), \quad t \ge 0, \tag{5}$$

В узле A_0 рассмотрим линейные условия трансмиссии общего вида:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_{1ij}u_j(0, t) + \beta_{1ij}u_j(L_j, t) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{2ij}p_j(0, t) + \beta_{2ij}p_j(L_j, t) = b_i(t), \quad i = \overline{1, N}. \tag{6}$$

Для решения краевых задач на графе, сперва используется метод обобщенных функции на отрезке [1,2] и после используем преобразование Фурье по времени. Тогда граничные и контактные условия на графе примут вид

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_{1ij}\widehat{\omega}_{1j}(\omega) + \beta_{1ij}\widehat{\omega}_{2j}(\omega) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{2ij}\widehat{p}_j(\omega) + \beta_{2ij}\widehat{p}_j(\omega) = \widehat{b}_i(\omega), \quad i = \overline{1,N}. \tag{7}$$

Теорема. *Разрешающая система уравнений для трансформант краевых задач на графе имеет вид:*

$$\left\{ \begin{array}{cc} 0.5, & 0 \\ -0.5\cos k_jL_j, & -0.5k_j^{-1}\sin k_jL_j \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \widehat{w}_{1j}\ (\omega) \\ \widehat{p}_{1j}\ (\omega) \end{array} \right\} +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{cc} 0.5\cos k_jL_j, & 0.5k_k^{-1}\sin k_jL_j \\ 0.5, & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \widehat{w}_{2j}\ (\omega) \\ \widehat{p}_{2j}\ (\omega) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{1j}(x,\omega) \\ F_{2j}(x,\omega) \end{array} \right\}, \tag{8}$$

Системы $4N$ линейных алгебраических уравнений (6), (7) с граничными условиями (N) в соответствии с решаемой краевой задачей дают разрешающую систему уравнений для определения $4N$ граничных и узловых функций, по 4 на каждом элементе графа. Определитель этой системы позволяет определить спектральные характеристики этого звездного графа. Можно определить трансформанту Фурье $\widehat{u}_j(x_j,\omega)$ на каждом элементе графа, а затем построить их оригиналы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP09261033).

Литература

[1] Алексеева Л.А. *Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения*, Математический журнал. 2006. Т.6,№1.С.16-32.

[2] Алексеева Л.А., Арепова Г.Д. *Обобщенные решения краевых задач для уравнения Даламбера с локальными и связанными граничными условиями*, Вестник ЕНУ имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. 2022. Т.138,№1.С.23-35.

Биологическая инвазия в модели хищник-жертва со свободной границей

Алимардон Нуриддинович ЭЛМУРОДОВ

Институт математики Академия наук УзР, Ташкент, Узбекистана
E-mail: elmurodov@mathinst.uz,

В математической экологии иммиграция новых видов является одной из самых важных тем. С точки зрения математической экологии различные модели инвазии в последнее время выдвигались и исследовались многими математиками-экологами. Например, [1–2] предложили популяционные модели реакции-диффузии со свободной границей, чтобы понять процесс новой или инвазивной популяции.

Разумно предположить, что хищник вторгается в новую среду обитания со скоростью, пропорциональной градиентам хищников в ней. Такого рода свободные граничные условия уже вводились в [3–5]. Для более экологических предпосылок свободных граничных условий можно также обратиться к [6].

В процессе расселения хищников некоторые из них погибают от голода, холода и болезней. Мы хотим понять, как уровень смертности влияет на распространение. Поведение хищничества всегда меняется в зависимости от размера жертвы, и многие экологи отмечают, что функциональная реакция, зависящая от соотношения, более разумна для описания процесса хищничества для некоторых хищников. Основываясь на этих фактах, мы рассматриваем следующую реакционно-диффузионную систему хищник-жертва со свободной границей, включающую член смерти:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - m_1 u_x = u\,(1-u) - \frac{uv}{u+mv}, \quad Q = \{(t,x): 0 < x < l, t > 0\} \\ v_t - dv_{xx} - m_2 v_x = kv\left(1 - \frac{bv}{u+av}\right), \quad D = \{(t,x): 0 < x < s(t), t > 0\}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0 = s(0) < l, \\ u_x(t,0) = v_x(t,0) = u(t,l) = 0, \quad v(t,x) = 0, \quad s(t) \le x \le l, \quad t > 0, \\ \dot{s}(t) = -\mu v_x(t, s(t)), \quad t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = s(t)$ представляет определяемую движущуюся границу; $u(t,x)$ выражает плотность популяции видов-хищников, а $v(t,x)$ обозначает плотность популяции видов-жертв. a, b, d,m, k, μ и m_i $(i = 1,2)$ ‾ положительные константы. Подробное значение этих коэффициентов можно узнать из [7]. Начальные функции $u_0(x)$ и $v_0(x)$ соответственно удовлетворяют

$$\begin{cases} u_0(x) \in C^2([0,l]), \quad u_0'(0) = u_0(l) = 0 \quad \text{и} \quad u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad [0,l]; \\ v_0(x) \in C^2[0,s_0], \quad v_0(s_0) = 0, v_0'(0) = 0 \quad \text{и} \quad v_0(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad [0,s_0]. \end{cases}$$

Хищник $v(t,x)$ — это захватчик, который изначально существует в подинтервале $[0,s_0]$ из $[0,l]$ и имеет условия Лесли-Гауэра, которые измеряют потерю популяции хищников из-за редкости добычи. Жертва u (аборигенный вид) изначально распределена по всей области $[0,L]$. Наша основная цель — понять, как исходные данные $v_0(x)$ влияют на успех или неудачу вторжения хищника. Мы выводим дихотомию расширения и исчезновения и даем четкие критерии расширения и исчезновения в этой модели.

Теорема 1. *Пусть $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s(t)$ — решение (1) для $t \in [0,T], T > 0$. Тогда*

$$0 < u(t,x) \leqslant \max\{1, \|u_0\|_\infty\} = M_1, \quad \overline{Q}, \tag{15}$$

$$0 < v(t,x) \leqslant \max\{M_1 + a, \|v_0\|_\infty\} = M_2, \quad \overline{D}, \tag{16}$$

$$0 < \dot{s}(t) \leqslant M_3 = \mu N, \quad 0 < t \le T, \tag{17}$$

где $N = \max\left\{\frac{v_0(x)}{s_0 - x}, \frac{kM_2}{m_2}\right\}$.

Далее для каждого уравнения системы отдельно сформулируем соответствующую задачу:

$$\begin{cases} U_t = U_{yy} + F_1(t,y,U,V,U_y), \quad Q, \\ U(0,y) = U_0(y), \quad 0 \le y \le l, \\ U_y(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0 \quad t > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $F_1(t,y,U,V,U_y) = m_1 U_y - U(1-U) + V\left(\frac{U}{U+m}\right)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, и непрерывная в $\bar{Q}$ функция u удовлетворяет условиям (2). Если $U(t,y)$ имеет обобщенные производные U_{ty}, U_{yy}, интегрируемые с квадратом в Q, тогда*

$$|U_y(t,y)| \le M_4(M_2, b_0, u_0), \quad (t,y) \in \bar{Q},$$

$$|U|^Q_{1+\gamma} \le M_5(M_4),$$

$$|U|^Q_{2+\beta} \le M_6(M_5).$$

В случае (1) с помощью преобразования $\tau = t$, $y = \frac{x}{s(t)}$ выпрямляем границу. Тогда D будет отображаться в $\Omega = \{(\tau,y) : 0 < \tau, 0 < y < 1\}$, а для функции $w(\tau,y) = u(\tau, ys(\tau))$

получаем уравнение с ограниченными коэффициентами и правой частью. Используя устанавливаем оценки для $|w_y|, |w|_{1+\gamma}$ в $\bar{\Omega}$.

В этой статье мы покажем, что система (1) допускает единственное решение и для этой системы выполняется растекающаяся дихотомия исчезновения, а именно, при $t \to \infty$ либо

(i) хищник $v(x,t)$ успешно распространяется в новую среду в том смысле, что $s(t) \to \infty$, или

(ii) хищник $v(x,t)$ не может установиться и в конце концов исчезает, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} s(t) = s_\infty < \infty$, $\|v(x,t)\|_{C[0,s(t)]} \to 0$ и $u(x,t) \to 1$.

Ключевые слова: уравнение реакции-диффузии, со свободной границей, модели хищник-жертва, локальная неоднородность, прозрачные краевые условия.

2020 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Du Y. H., Lin, Z. G. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary. *SIAM J. Math. Anal.* **42**, (2010), 377–405.

[2] Wang M.X. On some free boundary problems of the prey-predator model. *J. Differ. Equ.* **256**:10, (2014), 3365–3394.

[3] Wang M.X. The diffusive logistic equation with a free boundary and sign-changing coefficient. *J. Differ. Equ.* **258**,(2015), 1252–1266.

[4] Yang R., Wei J. The effect of delay on a diffusive predator–prey system with modified Leslie–Gower functional response. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **40**:1, (2017), 51–73.

[5] Elmurodov A.N.,Rasulov M.S. On a Uniqueness of Solution for a Reaction-Diffusion Type System with a Free Boundary, *Lobachevskii Journal of Mathematics* **43** :8, (2022), 2099–2106.

[6] Murray J. D., *Mathematical biology. II: Spatial models and biomedical applications*, Springer, Berlin. (2003).

[7] Xiao D.M., Li W.X., Han M.A. Dynamics in a ratio-dependent predator-prey model with predator harvesting. *J. Math. Anal. Appl.* **324**, (2006), 14–29.

Краевая задача для термоупругой полуплоскости с полостью

Б.Н. АЛИПОВА

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан
University of Kentucky, KY, USA
E-mail: alipova.bakhyt@gmail.com

Исследование термодинамических процессов в средах и конструкциях относится к числу актуальных научно-технических проблем, для решения которых развиваются различные аналитические и численные методы. Математические модели термоупругих сред наиболее полно разработаны Новацким В.[1]. В работах [2-5] и др. на основе теории потенциала и прямых методов построения динамических аналогов формул Грина разработан метод граничных интегральных уравнений для решения краевых задач термоупругости в пространстве преобразований Лапласа. Однако число работ в данном направления по прежнему остается весьма ограниченным.

Здесь развивается МГИУ для исследования динамики термоупругого полупространства с цилиндрической полостью в условиях плоской деформации.

Рассматривается первая краевая задача динамики однородной термоупругой полуплоскости, ослабленной полостью, при заданных нагрузках и тепловом потоке на внутренней границе полости, требуется найти перемещения и температуру среды. Заданы действующие произвольные массовые силы и тепловые источники.

Для решения такой задачи методом граничных интегральных уравнений построен тензор Грина для термоупругого полупространства [6] со свободной границей. Используя свойство фундаментальных решений, построено решение (перемещения и температура) во всей области определения. В пространстве обобщенных функций получен аналог формулы Сомильяны для двусвязного полупространства. Построены граничные интегральные уравнения, позволяющие решать краевые задачи разного типа, включая данную краевую задачу.

Полученные формулы позволяют решать не только первую краевую задачу, но и 3 другие краевые задачи. Все построенные уравнения поддаются численному решению на основе интерполяции границы и искомых функций сплайнами, порядок которых выбирается в зависимости от требуемой точности решения задачи.

Ключевые слова: Краевая задача, термоупругая полуплоскость, полость, тензор Грина, обобщенная функция, граничные интегральные уравнения.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q77, 45B99, 74B99

Литература

[1] Nowacki W. *Thermoelasticity*, (1962).

[2] Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleishvily M.O., Burchuladze T.B., *Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleishvily M.O., Burchuladze T.B., 3D problems of mathematical theory of elasticity and thermoelasticity* , (1976).

[3] Dargush G.E., Banerdjee P.K. *Boundary element methods in three-dimensional thermoelasticity*, (1990).

[4] Sah J., Tasaka N. *TBoundary element analysis of linear coupled thermoelasticity problems by using Laplace transformation*, (1988).

[5] Алексеева Л.А., Купесова Б.Н.*Прикладная математика и механика*, 2:(2001), T.65, 334-345.

[6] Alexeyeva L. A., Alipova B. N. *Fundamental and Generalized Solutions of the Equations of Motion of a Thermoelastic Half-Plane with a Free Boundary*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **59**, 5 (2019).

Форсированные движения с переменным ускорением

К.Н. АНАХАЕВ[1,a] , М.Х. МИСИРОВ[1,b]

[1]*Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет им. В.М. Кокова. Нальчик, Россия*
E-mail: [a]anaha13@mail.ru, [b]misir56@mail.ru

Форсированные движения возникают при динамических (импульсных, гравитационных и др.) перемещениях как природных геофизических объектов, так и искусственных тел [1-3]. Особенностью таких движений является наличие переменного ускорения (положительного, отрицательного), для описания которых введен параметр «форсаж» Ф (м/сек^3) [4], характеризующий режим изменения ускорения во времени

$$\Phi = a'(t) = V''(t) = S'''(t)\,, \tag{18}$$

где $a(t)$, $V(t)$ и $S(t)$ - ускорение, скорость и пройденный путь. При этом, значение форсированной скорости движения V_Φ в общем случае будет равно

$$V_\Phi = V_0 + a_\Phi \cdot t; a_\Phi = a_0 + \Phi \cdot t = a_0 + \Phi_t, \tag{19}$$

где $\Phi_t = \Phi \cdot t$ - ускоряющаяся (замедляющаяся) часть форсированного переменного ускорения a_Φ; V_0 и a_0 - начальные значения скорости и ускорения.

В зависимости от величин a_0 и Ф получаются различные случаи форсированного движения с переменными ускорениями [4], при этом форсаж «Ф» может иметь как постоянное, так и переменное значения в виде различных функции. В частности, для случая постоянной величины форсажа $\Phi = const$ (соответствующему рывку), значение скорости V_C получим, интегрируя переменное ускорение (29)

$$V_C = V_0 + a_0 \cdot t + 0.5 \cdot \Phi \cdot t^2. \tag{20}$$

Пример движения по (20) (при $V_0 = 0$, $a_0 = 2$, Ф=2) дан Фильчаковым П.Ф. в [5, с. 302].

Для выражения же переменных значений форсажа Ф используем приближенных метод, широко распространенный в прикладных исследованиях, по которому подсчеты форсажа проводятся только по значению модуля времени в (*сек*), устанавливая при этом общую размерность в (*м/сек*^{3}). В качестве примера рассматривается свободное падение в сопротивляющейся среде парашютиста (ростом 1.7 м, массой 80 кг) в моменты времени t= 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 16; 20; 22 (*сек*) со скоростями V= 0; 17.0; 27.3; 32.5; 35.1; 36.4; 37.1; 37.6; 37.7 в (*м/сек*) – для данного случая форсаж Ф (*м/сек*^{3}) (на основе обратного расчета) и скорость V_Φ (*м/сек*) определяются зависимостями:

$$\Phi = -\frac{g}{t}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+0.065\cdot t^2}}\right]; V_\Phi = (g - \Phi_t)t = \frac{gt}{\sqrt{1+0.065\cdot t^2}}. \tag{21}$$

Значения скорости V_Φ= 0; 17.5; 27.5; 32.2; 34.5; 35.8; 36.6; 37.4; 37.8, подсчитанные по (21) достаточно близко (<< 2-3 %) согласуются с заданными исходными величинами.

Параметр «Ф» может быть использован для описания динамических характеристик форсированных движений (маятника [6, 7], безвихревых потоков [8] и др.).

Ключевые слова: форсированное движение, переменное ускорение, свободное падение.

2010 Mathematics Subject Classification: 70Б10, 70E15, 70K25

Литература

[1] Жуковский Н.Е. Теоретическая механика, *М.-Л. ГИТТЛ.*, (1952), -С 811

[2] Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс мат-анализа, *М.: Наука.*, 1971, -С 736.

[3] Анахаев К.Н. К расчету ускорения свободного падения на поверхности Земли, *Известия РАН. Механика твердого тела*, **№ 6**:(2017), -С 14–23.

[4] Анахаев К.Н. О движениях с переменным ускорением , *Известия КБНЦ РАН*, **№ 6**:(2022), -С 13-18.

[5] Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике, *Киев: Н. думка*, 1973, -С 743.

[6] Анахаев К.Н. К расчету математического маятника , *ДАН*, том.459:(2014), -С 288-293.

[7] Анахаев К.Н. О ротационном (вращательном) движении математического маятника , *ДАН*, том.462:(2015), -С 412-417.

[8] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика , *М*, 1963, -С 583.

О системе конкуренция-диффузия-адвекция с нелокальными граничными условиями

М.И. БОБАРХИМОВА[1,a], Б.Б. АНВАРЖОНОВ[2,b]

[1] *Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан*

[2] *Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан*

E-mail: [a]*kamina9314@mail.ru*, [b]*bunyodbek.anvarjonov@bk.ru*

В последние несколько десятилетий динамическое поведение конкурентно-диффузионных систем в однородных или гетерогенных средах широко изучалось. В [1, 2] авторы изучали динамику двух организмов, изменяя их коэффициенты случайной диффузии, ресурсоемкость и конкурентоспособность, а также описывали глобальную динамику двух организмов. Их исследования внесли выдающийся вклад в системы конкуренции и распространения. Для модели конкуренции двух организмов либо оба организма выживают, либо побеждают за счет вымирания других организмов [3,4]). В [5,6] изучали конкурентную систему Лотки-Вольтерры с периодической адвекцией среды обитания. С биологической точки зрения этот пульсирующий фронт путешествий предоставил возможность двум конкурирующим видам взаимодействовать в гетерогенных средах обитания. Основываясь на предположении, что ресурсная функция в пространственных переменных уменьшается, Lou et al. [6] описал конкуренцию между двумя водными организмами с разными стратегиями диффузии за один и тот же ресурс в системе реакция-диффузия-адвекция Лотки-Вольтерры. В [8] автор изучал влияние стратегий диффузии на исход конкуренции между двумя популяциями, в то время как виды распределены в соответствии с их соответствующей емкостью в конкурентно-диффузионных системах. Однако в системах конкуренции-диффузии-адвекции изучение разных видов с разными функциями распределения будет более сложным. Тан и Чен [9] изучали популяционную динамику конкуренции между двумя организмами с точки зрения речной экологии.

Мы исследуем проблему глобального направленного динамического поведения системы адвекции Лотки-Вольтерры между двумя организмами в гетерогенных средах, где два организма конкурируют за разные фундаментальные ресурсы.

Мы обсуждаем следующую глобальную динамику адвективной системы :

$$u_t = d_{1(}u)u_{xx} - \alpha_1 u_x + (a_1 - - - b_1 u - - - c_1 v), \quad -l < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$v_t = d_2(v)v_{xx} - \alpha_2 v_x + v(a_2 - - - b_2 u - - - c_2 v), \quad -l < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ge 0, \quad v(x,0) = v_0(x) \ge 0 \quad , -l < x < l, \tag{3}$$

$$u(t,-l) = m_1 u(t_1, - - - l_0), \quad u(t,l) = m_2 u(t,l_0), \quad 0 < t \le T, \tag{4}$$

$$v(t,-l) = n_1 v(t_1, - - - l_0), \quad v(t,l) = n_2 v(t,l_0), \quad 0 < t \le T, \tag{5}$$

где $u(x,t)$ и $v(x,t)$ — плотности популяции биологических организмов, a_i , b_i , c_i, m_i, n_i, α_i положительные константы и коэффициенты нелинейной диффузии $d_i(\xi), i = 1,2$ и положительные начальные функции $u_0(x), v_0(x)$ удовлетворяют следующим условиям

1)$d_i(\xi) > d_i(0) > 0, \quad i = 1,2, \quad d_i(\xi) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$ для всех ξ, принадлежащих замкнутому множеству;

2)$u_0(x) \in C^2[-l,l], \quad v_0(x) \in C^2([-l,l]), \quad 0 < l_0 < l$, $|m_i| \le 1, \quad |n_i| \le 1 \quad i = 1,2$

Известно, что доказательство классической разрешимости краевых задач тесно связано с априорными оценками шаудеровского типа. Известные методы получения этих оценок вплоть до границы опираются на нулевые граничные условия (или же гладкие граничные данные). Следовательно, для нелокальных задач эти методы не работают. Для каждого типа нелокальных условий надо будет разрабатывать своеобразный подход установления априорных оценок [10]. Здесь, в случае задачи с внутреннеграничными нелокальными условиями для параболической системы мы попробовали решит эту проблему.

Нелокальные условия являются естественным обобщением обычных краевых условий, а задачи с нелокальными граничными условиями имеют конкретные приложения .

Ключевые слова:Нелокальные условия, априорные оценки, система реакция-диффузия-адвекция, конкуренция, популяционной динамика

2020 Mathematics Subject Classification: 35B35, 35B32, 35K57

Литература

[1] He, X., Ni, W. *Global dynamics of the Lotka-Volterra competition-diffusion system: Diffusion and spatial heterogeneity* I. Commun.Pure Appl. Math. 2016, 69, 981–1014.

[2] He, X., Ni, W. *Global dynamics of the Lotka-Volterra competition-diffusion system with equal amount of total resources*, II. Calc.Var. Partial Differ Equ. 2016, 55, 25. Axioms 2021, 10, 195

[3] Wang, Q. *Global directed dynamics of a Lotka-Volterra competition-diffusion system* Nonlinear Anal. Real World Appl. 2020, 55, 103144.

[4] Du, L., Li, W., Wu, S. *Propagation phenomena for a bistable Lotka-Volterra competition system with advection in a periodic habitat.* Z. Angew. Math. Phys. 2019, 71 , 2402–2435.

[5] Du, L., Li, W., Wu, S. *Pulsating fronts and front-like entire solutions for a reaction-advection-diffusion competition model in a periodic habitat.* J. Differ. Equ. 2019, 266, 8419–8458.

[6] Lou, Y., Zhao, X., Zhou, P.*Global dynamics of a Lotka-Volterra competition-diffusion-advection system in heterogeneous environments.* J. Math. Pures Appl. 2019, 121, 47–82.

[7] Kamrujjaman, M. *Interplay of resource distributions and diffusion strategies for spatially heterogeneous populations.* J. Math. Model. 2019, 7, 175–198.

[8] Tang, D., Chen, Y.*Global dynamics of a Lotka-Volterra competition-diffusion system in advective homogeneous environments.* J.Differ. Equ. 2020, 269,1465–1483.

[9] Xu, F., Gan, W., Tang, D. *Global dynamics of a Lotka-Volterra competitive system from river ecology: General boundary conditions.* Nonlinearity 2020, 33, 1528—1541.

[10] Тахиров Ж. О. *Нелинейные колебания,* 2019, т. 22, №4 .

Восстановление двух коэффициентов в смешанной задаче для уравнения колебаний с неклассическим краевым условием

А. Ю. ЩЕГЛОВ[1,a], О. А. АНДРЕЯНОВА[2,b]

[1] *Университет МГУ-ППИ, Шэньчжэнь, Китай*
[2] *МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
E-mail: [a]*shcheg@cs.msu.ru*, [b]*oksashka@gmail.com*

Пусть при положительных значениях a, β, T, $l < aT$, имеется прямая задача

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x)g(t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$-\beta u_x(x,t)\big|_{x=0} = \mu(t) - u_t(x,t)\big|_{x=0}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u_x(x,t)\big|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $Q_T = \{(x,t): 0<x<l,\ 0<t\leqslant T\}$. Уравнения (1), (2), (3) описывают изменение амплитуды $u(x,t)$ малых поперечных колебаний струны, левый конец которой «испытывает сопротивление внешней среды, пропорциональное скорости её движения» (см. [1, Гл.II, §1, п.7]) и может находиться, например, в потоке жидкости, а правый конец струны не закреплен. Произведение $f(x)g(t)$ определяет плотность силы, действующей на боковую поверхность струны, коэффициент a – скорость распространения колебаний вдоль струны, коэффициент β – натяжение (сила натяжения) струны по направлению её оси, функция $\mu(t)$ – скорость внешней среды в плоскости поперечных колебаний струны при $x = 0$. Условия (4) – начальные.

Задача (1)-(4) может рассматриваться как модель движения бура в глубоких нефтяных скважинах, что определяет интерес к схожим задачам [2], [3].

Пусть в рамках обратной задачи при положительных значениях a, β, T, $l<aT$, известны функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$ при $x\in[0,l]$ и $t\in[0,T]$, и дополнительно задана функция $h(t)$, $t\in[0,T]$, такая, что

$$h(t) = u(l,t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

где $u(x,t)$ – решение задачи (1)-(4). Требуется восстановить функции $f(s)$ и $\mu(t)$ при $s\in[0,l]$, $t\in[0,\widehat{T}]$, $\widehat{T}= T-(l/a)$, и затем получить решение $u(x,t)$ задачи (1)-(4) на множестве $\Lambda_{l,T} = \{(x,t): 0\leqslant t\leqslant T-(l-x)/a,\ 0\leqslant x\leqslant l\}$, так, чтобы найденные функции $f(s)$, $\mu(t)$ и $u(x,t)$ удовлетворяли уравнению (1) на множестве $\Lambda_{l,T}$, условию (2) при $t\in[0,\widehat{T}]$, условиям (3), (5) при $t\in[0,T]$ и условиям (4).

Устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 1. *Если заданы функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$, $g(t)$, $\mu(t)$ такие, что значение $\mu'(0)$ существует, и выполняются условия*

$$\varphi(x) \in C^2[0,l], \quad \psi(x) \in C^1[0,l], \quad g(t) \in C^1[0,T], \quad \varphi'(l) = \psi'(l) = 0, \tag{6}$$

$$f(x)\in C[0,l],\ \mu(t)\in C[0,T],\ \mu(0)=\psi(0)-\beta\varphi'(0),\ \mu'(0)=a^2\varphi''(0)-\beta\psi'(0)+f(0)g(0), \tag{7}$$

то задача (1)-(4) *имеет единственное решение* $u(x,t) \in C^2(\overline{Q}_T)$.

Теорема 2. *Если заданы функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, *удовлетворяющие условиям* (6), *условию*

$$g(0) \neq 0, \tag{8}$$

а у функции $h(t)$ *существует значение* $h'(0)$, *и для* $h(t)$ *выполняются условия*

$$h(t) \in C[0,T], \quad h(0) = \varphi(l), \quad h'(0) = \psi(l),$$

то обратная задача (1)-(5) *не может иметь более одного решения.*

Теорема 3. *Пусть заданы функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, *удовлетворяющие условиям* (6), (8) *и условиям*

$$h(t) \in C^2[0,T], \quad h(0) = \varphi(l), \quad h'(0) = \psi(l).$$

Тогда существует решение обратной задачи (1)-(5).

Теорема 2 и теорема 3 доказываются для значений $T \in ((l/a),(3l/a)]$, что вполне демонстрирует схемы доказательств, с возможностью перенесения аналогичного анализа на бóльшие $T > (3l/a)$. На основе исследования решения обратной задачи предлагается итерационный алгоритм её приближенного решения.

Funding: Работа выполнена при частичной поддержке National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) и Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

Ключевые слова: уравнение колебаний, обратная задача, неклассическое краевое условие.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q99, 45D05, 45Q05

Литература

[1] Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.*, Гостехиздат, Москва (1953).

[2] Moiseev E. I., Kholomeeva A. A. Solvability of the mixed problem for the wave equation with a dynamic boundary condition, *Differential Equations*, **48**:10 (2012), 1392–1397.

[3] Moiseev E. I., Kholomeeva A. A., Frolov A. A. Boundary displacement control for the oscillation process with boundary conditions of damping type for a time less than critical, *J. of Math. Sci.*, **257**:1 (2021), 74–84.

[4] Baev A. V., Glasko V. B. The solution of the inverse kinematic problem of seismology by means of a regularizing algorithm, *J. Comput. Math. and Math. Phys.*, **16**:4 (1976), 96–106.

[5] Vasil'ev F. P., Kurzhanskij M. A., Razgulin A. V. On using Fourier method for solving a problem of string vibration control, *Moscow University Comput. Math. and Cybernetics*, :4 (1993), 3–8.

[6] Cannon J. R., Du Chateau P. An inverse problem for an unknown source term in a wave equation, *SIAM J. Appl. Math.*, **43**:3 (1983), 553–564.

[7] Zhang Guan Quan. On an inverse problem for 1-dimensional wave equation, *Sci. China. Ser. A. Math., Phys., Astron. and Tech. Sci.*, **32**:3 (1989), 257–274.

[8] Shcheglov A. Yu., Andreyanova O. A. The inverse problem for the nonhomogeneous oscillation equation on a half-line with a boundary condition of the third kind, *Comput. Math and Modeling*, **33**:1 (2022), 9–23.

О точных решениях уравнения неразрывности

Назым БОЛАТ

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: bolat.nazym.armankyzy@gmail.com

Рассмотрим плоскопараллельное, стационарное течение несжимаемой жидкости в некоторой области $G \subset R^2$. Как известно, в этом случае имеет место уравнение неразрывности вида

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0$$

где $V_1(x,y)$, $V_2(x,y)$ — искомые компоненты скорости частиц жидкости.

Известно, что точное решение уравнения (1) пишется в следующей форме:

$$\begin{cases} V_1 = u(x,y) \\ V_2 = -v(x,y) \end{cases}$$

где $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — произвольная, аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ в области $G \subset R^2$.

Данная формула описывает континуум точных решений уравнения неразрывности, где все решения соответствуют только безвихревым течениям жидкости, когда $rot\overrightarrow{\mathrm{V}} = 0$

Как известно, течение жидкости, происходящие в природе, осуществляются вихревым движением. Из чего следует необходимость описания метода, которое даст также вихревые решения уравнения неразрывности, $rot\overrightarrow{\mathrm{V}} \neq 0$

Определение Четыре скаляра (действительные либо комплексные числа) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$– называются разрешающими параметрами уравнения (1), если выполняется условие: $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$. Из этого определения следует, что уравнение (1) имеет бесчисленное множество наборов разрешающих параметров. Определенный набор мы будем обозначать так:

$$SP = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$$

Теорема Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — произвольная функция комплексного переменного, $SP = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ — произвольный набор разрешающих параметров. Тогда уравнение неразрывности (1) имеет точное решение вида:

$$\begin{cases} V_1 = \beta_1 u(\alpha_1 x, \alpha_2 y) \\ V_2 = \beta_2 v(\alpha_1 x, \alpha_2 y) \end{cases}$$

Литература [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.:Наука,1973.

[2] Абенов М.М. Четырехмерная математика: методы и приложения. — Алматы.: КазНУ. 2019.

[3] Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 6: Гидродинамика. 5-е изд. М.: Физматлит, 2006.

[5] Аристов С.Н., Князев Д.Е., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2006. Т. 43. №5. С. 547–566.

Об устранимой особенности гармонической функции на стратифицированном множестве

Н. С. ДАИРБЕКОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: Nurlan.Dairbekov@gmail.com

Описание устранимых осоенностей решений дифференциальных уравнений с частными производными в заданном функциональном классе традиционно привлекает внимание большого числа исследователей. Классическим результатом в этом направлении является теорема об устранимости множества нулевой емкости, в частности, множества конечной $(n-2)$-меры Хаусдорфа, для ограниченной гармонической функции на области эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

В докладе будут представлены результаты, полученные в совместной работе автора с О. М. Пенкиным и Д. В. Савастеевым, об аналоге теоремы об устранимой особенности для ограниченной гармонической функции в смысле “мягкого лапласиана” на стратифицированном множестве с плоскими внутренними стратами.

Определения стратифицированного множества и относящихся к нему понятий можно найти в [1]–[3].

Основной результат утверждает, при определенных условиях, что для такой функции на n-мерном стратифицированном множестве устранимым является объединение страт, размерность которых не превосходит $n-2$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP14871251 МОН РК.

Ключевые слова: оператор Лапласа, гармоническая функция, стратифицированное множество.

2010 Mathematics Subject Classification: 31C05, 35J15, 58J05

Литература

[1] Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, Москва (2005).

[2] Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Сарыбекова Л. О. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве, *Алгебра и анализ*, **30**:5 (2018), 149–158.

[3] Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Сарыбекова Л. О. Неравенство Пуанкаре и p-связность стратифицированного множества, *Сиб. матем. журн.*, **59**:30 (2018), 1291–1302.

О решениях в виде ортогональных многочленов двух переменных одной специальной системы

Ж.К. УБАЕВА[1,a], М.Ж. ТАЛИПОВА[2,b], Р.У. ЖАХИНА[3,b]

Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail: [a]zhanar-ubaeva@mail.ru, [b]mira-talipova@mail.ru

Постановка задачи. Рассматривается возможности построения решений неоднородной системы состоящей из двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(r_{j,k}-\alpha_{j,k}x^h)x^jy^kp_{j,k}=f_1(x,y),$$

$$\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(t_{j,k}-\beta_{j,k}y^h)x^jy^kp_{j,k}=f_2(x,y), \tag{1}$$

где $p_{0,0}(x,y)=Z(x,y)(j=0,k=0)$- общая неизвестная;$p_{j,k}$- различные порядки частных производной неизвестной функции $Z(x,y)$; $f_i(x,y)(i=1,2)$- аналитическая функция двух переменных [1].

Соответствующую однородную систему получим при $f_i(x,y)\equiv 0$. Они наиболее изучены. Исследование проводится при различных значениях постоянной h и ω. Например:

1. при $f_i(x,y)=0, h=1$-получим систему типа Кампе де Ферье;
2. Если $f_i(x,y)\neq 0, h\geq 2$ и $\omega=1$, то задача сводится к построению решения системы

$$\begin{gathered}x^2(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x^h)p_{2,0}-xy(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x^h)p_{1,1}+x(r_{1,0}-\alpha_{1,0}x^h)p_{1,0}+y(r_{0,1}-\alpha_{0,1}x^h)p_{0,1}+\\+(r_{0,0}-\alpha_{0,0}x^h)p_{0,0}=f_1(x,y),\\y^2(t_{0,2}-\beta_{0,2}y^h)p_{0,2}-xy(t_{1,1}-\beta_{1,1}y^h)p_{1,1}+x(t_{1,0}-\beta_{1,0}y^h)p_{1,0}+y(t_{0,1}-\beta_{0,1}y^h)p_{0,1}+\\+(t_{0,0}-\beta_{0,0}y^h)p_{0,0}=f_2(x,y).\end{gathered}\tag{2}$$

Согласно общей теории таких систем справедливо утверждение.

Теорема 1. *Соответствующая однородная система, состоящая из двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*

$$\begin{gathered}x^2(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x)p_{2,0}+xy(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x)p_{1,1}+x(r_{1,0}-\alpha_{1,0}x)p_{1,0}+y(r_{0,1}-\alpha_{0,1}x)p_{0,1}+\\+(r_{0,0}-\alpha_{0,0}x)p_{0,0}=0,\\y^2(t_{0,2}-\beta_{0,2}y)p_{0,2}+xy(t_{1,1}-\beta_{1,1}y)p_{1,1}+y(t_{1,0}-\beta_{1,0}y)p_{1,0}+y(t_{0,1}-\beta_{0,1}y)p_{0,1}+\\+(t_{0,0}-\beta_{0,0}y)p_{0,0}=0.\end{gathered}\tag{3}$$

при выполнении условии совместимости и условия интегрируемости

$$1-\frac{xy(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x^h)xy(t_{1,1}-\beta_{1,1}y^h)}{x^2(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x^h)y^{2(t_{0,2}-\beta_{0,2}y^h)}}\neq 0 \tag{4}$$

имеет до четырёх линейно-независимых частных решений $Z_j(x,y)(j=1,2)$.

Теорема 2. *Преобразование*

$$x^h=u, y^h=\upsilon \tag{5}$$

однородную систему (3) приводить к системе гипергеометрического типа относительно новых переменных u и υ вида (3), из которой при $h=2$ выводятся все биортогональные многочлены Аппеля:$J_{m,n}(\alpha;\gamma,\gamma';x,y), F_{m,n}(\gamma,\gamma';x,y))$ и $E_{m,n}(\gamma,\gamma';x,y))$ Эрмита.

Полученная система гипергеометрического типа с помощью элементарных преобразовании (2) приводится одному из систем Горна $(F_1)-(F_4)$, поэтому решения их выражаются через функции Аппеля F_1-F_4 в зависимости от вида преобразования системы Горна.

Вид решения неоднородной системы (1) зависит от формы правой части $f_i(x,y)$ $(i=1,2)$. Как и в обыкновенном случае справедливо утверждение [2].

Ключевые слова: аналитическая функция, неоднородная система, однородная система, частных производных, второго порядка.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Раджабов Н., Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Особенности решения систем типа Клаузена, *Вестник национальной инженерной Академии РК, серия физико-математический*, **3**:85 (2022), 137–147.

[2] Талипова М.Ж., Тасмамбетов Ж.Н. О нахождении частных решений одной неоднородной системы в частных производных второго порядка, *Вестник АГУ им. К.Жубанова*, **2** (2000), 27–30.

О близости низкочастотных частей спектров колебаний мембран и сеток из струн.

Р.Н. ЗИМИН

Satbayev university, Алматы, Казахстан
E-mail: r.zimin@satbayev.university

Доклад посвящен новому подходу к исследованию низкочастотных частей спектров непрерывных механических сред (мембран) и аналогичной части спектра полунепрерывных сред (сеток из струн).

Пусть сетка из струн заполняет некоторую кусочно - гладкую область Ω.

Задача о спектре собственных колебаний сетки из струн имеет вид:

$$T_k u'' + \lambda \rho_k u = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{\gamma \in \Re(A)} T_k u_k' + \lambda m_k u_k = 0, \tag{2}$$

$$u|_{\partial \Gamma_k} = 0, \tag{3}$$

где коэффициент T_k - натяжение струны, ρ_k - плотность струны, m_k - наличие сосредоточенной массы в вершинах. Все эти величины предполагаются постоянными. Индекс k - означает порядок "сгущения"сеток.

Отметим, что мы ограничимся рассмотрением низкочастной части спектра. Как было показано М.Г. Завгородним (см. [1]), высокочастотная асимптотика спектра задачи (1) - (3) такая же как и у струны.

В той же области Ω рассмотрим задачу о собственных колебаниях мембраны

$$\sigma \Delta u + \lambda \rho u = 0,$$

$$u|_{\partial \Omega} = 0,$$

где σ - напряжение в мембране, а ρ - ее плотность.

Считая, что размер ячейки сетки равен h_k, выберем физические параметры сетки из струн так, чтобы масса и натяжения выделенного участка на сети и мембране были равны (см. например [2]).

Совместно с Ж. Турар получена оценка первого собственного значаения задачи (1) - (3) для нерегулярной сетки из струн, при условии близости, в том смысле как описано выше, массы и натяжений.

Так же были проведены численные эксперименты для подсчета собственных значений и собственных функций для такой нерегулярной сети.

Funding: Автор был поддержан грантом AP14871251 МОН РК.

Ключевые слова: стратифицированное множество, собственные значения мембраны и сеток из струн, нерегулярные сетки.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B09, 35J15, 35P15, 35P20, 65N25

Литература

[1] Zavgorodnii M.G., Pokornyui Yu. V. On the spectrum of second–order boundary–value problems on spatial networks, *Usp. Mat. Nauk*, **44** (1989), 220–221/

[2] Komarov A.V., Penkin O.M. On spectra of nonperiodic woven membrane, *Jornal of Math. Sc.*, **133**:1, (2006), 883–902.

Задача Геллерстедта для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в трехмерном пронстрнстве

Х. К. ИБРОХИМОВ

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
E-mail: xusniddin571@mail.ru

Теория уравнений смешанного типа, основоположником которой является Ф. Трикоми, в настоящее время превратилась в один из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Число работ, посвященных исследованиям различных краевых задач для уравнений смешанного типа достаточно велико, один из таких задач является задача Трикоми для эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве, которое с помощью метода интегрального преобразования Фурье впервые исследована А.В.Бицадзе [1]. Затем появились ряд работ А.М.Нахушева, А.М.Ежова, С.П.Пулькина, С.М.Пономарева, где рассматривались краевые задачи для уравнений эллиптико-гиперболического типа в бесконечной цилиндрической области. Краевые задачи для смешанных уравнений параболо - гиперболического типа в трехмерном пространстве, используя интегральные преобразования рассматривались в работах Т.Д.Джураева, А.Сопуева [2].

В бесконечной призмаобразной области Ω трехмерного евклидового пространстве переменных (x,y,z), ограниченной поверхностью $S=\sum\limits_{n=1}^{7}S_n$, где

$$S_1: x=0,\ 0\le y\le h,\ z\in R,\quad S_2: x=1,\ 0\le y\le h,\ z\in R,\quad S_3: x+y=0,\ z\in R,$$

$$S_4: x+y=\varepsilon_1,\ 0\le\varepsilon_1\le 1,\ z\in R,\quad S_5: x-y=\varepsilon_1,\ z\in R,$$

$$S_6: x-y=1,\ z\in R,\quad S_7: y=h,\ h>0,\ 0\le x\le 1,\ z\in R,$$

рассмотрим уравнения

$$0=\begin{cases} U_y-U_{xx}-U_{zz}+\mu_1^2U, & y>0,\\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}+\mu_2^2U, & y<0,\end{cases}\qquad \mu_i^2=const,\quad i=1,2. \tag{22}$$

Пусть

$$\Omega_1=\Omega^1\cap(y>0),\quad \Omega_2^1=\Omega^1\cap\{(x,y,z),\quad 0<x<\varepsilon_1,\quad y<0,\quad z\in R\},$$

$$\Omega_3^1=\Omega^1\cap\{(x,y,z),\quad \varepsilon_1<x<1, y<0,\quad z\in R\},\quad D^1=\Omega^1\cap(z=0),$$

$$D_1=\Omega_1\cap(z=0),\quad D_n^1=\Omega_n^1\cap(z=0),\ n=\overline{2,3},\quad \sigma_n=S_n\cap(z=0),\ n=\overline{1,7},$$

$$\overline{I_0}=\overline{\Omega}_1\cap\overline{\Omega}_2^1,\quad \overline{J_1}=\overline{\Omega_1}\cap\overline{\Omega}_3^1,\quad j_n=J_n\cap(z=0),\ n=0,1,\ j_n=\overline{j_0}\cap\overline{j_1}.$$

Задача G_α. Найти регулярное в области $\Omega^1\backslash(y=0)$ решение уравнения (1) обладающее следующими свойствами:

1) $U(x,y,z)\in C\left(\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2^1\cup\overline{\Omega}_3^1\right)\cap C^1\left[(\Omega_1\cup J_0\cup J_1)\cup\left(\Omega_2^1\cup J_0\right)\cup\left(\Omega_3^1\cup J_1\right)\right]\cap$
$\cap C^2\left(\Omega_1\cup\Omega_2^1\cup\Omega_3^1\right)$;

2) $U(x,y,z)$ удовлетворяет краевым условиям

$$U|_{S_1}=\Phi_1(y,z),\quad U|_{S_2}=\Phi_2(y,z),\quad U|_{S_5}=\Psi_1(x,z),\quad z\in R, \tag{23}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty}U(x,y,z)=\lim_{z\to\pm\infty}U_z(x,y,z)=0. \tag{24}$$

3) функции $U(x,y,z)$ и $U_y(x,y,z)$ удовлетворяют условиям склеивания

$$U(x,-0,z)=\alpha U(x,+0,z),$$

$$U_y(x,-0,z)=\beta_k(x)U_y(x,+0,z)+\gamma_k(x)U(x,+0,z)+P_k(x,z),$$

$$\alpha=const>0,\ \lim_{z\to\pm\infty}P_k(x,z)=0,\ (x,z)\in J_k,\ k=0,1.$$

Решение задачи G_α следуя идеи А.В.Бицадзе [1], будем искать в классе интегралов Фурье.

Единственность решения задачи G_α доказывается, используя принцип максимума для параболических и гиперболических уравнений получением априорных оценок искомых решений. Существование решения задачи G_α эквивалентным образом сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи G_α.

Ключевые слова: Смешанная параболо-гиперболическая уравнения, краевая задача, единственность, существование, принцип максимума, априорная оценка, условия склеивания.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C10, 35G15

Список литературы

[1] Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми, *Сибир. мат. журн.*, **№ 3**: (1962), -С. 642–644.

[2] Джураев Т.Д., Сопуев А. Об одной пространственной задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа, *Дифф. уравн. Минск*, **№ 1**: (1981), -С. 50–57.

Многомерный ортогональный многочлен Лагерра как решения вырожденных гипергеометрических систем

Ж.Н.ТАСМАМБЕТОВ[1,a], А.А. ИСЕНОВА[2,b]

[1] *Актюбинский региональный университет им.К.Жубанова, Актобе, Казахстан*
[2] *Актюбинский региональный университет им.К.Жубанова, Актобе, Казахстан*
E-mail: [a]tasmam45@gmail.com, [b]akkenje_ia@mail.ru

При исследовании многочленов Лагерра двух переменных следует рассматривать их связь с 20-тью вырожденными гипергеометрическими рядами двух переменных, [1]. Пока не установлены, сколько существует систем типа Лагерра и они каким из 20-ти вырожденных систем связаны. В ряде работ Ж.Н.Тасмамбетова [2] в качестве свяывающей системы была подобрана система Горна (Ψ_2) и изучена связь между вырожденной гипергеометрической функцией Гумберта и многочленом Лагерра двух переменных . Однако, неизученными остаются связь этих многочленов с нормально-регулярными решениями.

Наиболее изученной системой Горна является система

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1Z_{x_1x_1}+(\gamma_1-x_1)Z_{x_1}-x_2Z_{(x_2)}-\lambda Z &=& 0\\ x_2Z_{x_2x_2}+(\gamma_2-x_2)Z_{x_2}-x_1Z_{(x_1)}-\lambda Z &=& 0 \end{array}\right\} \tag{25}$$

где $\gamma_i,(i=1,2)$ некоторые постоянные, а $Z(x_1,x_2)$ общая неизвестная.

Теорема 1. *Система Горна (1) имеет четыре линейно-независимые частные решения,одним из которой является функция Гумберта*

$$\Psi_2^{(2)}(\lambda;\gamma_1,\gamma_2;x_1,x_2)=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{m_1+m_2}}{(\gamma_1)_{m_1}\cdot(\gamma_2)_{m_2}}\cdot\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}. \tag{2}$$

Определение 1. *Решение вида*

$$W(x_1,x_2)=exp(\alpha_{1,0}x_1+\alpha_{0,1}x_2)x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}A_{m_1,m_2}x_1^{m_1}x_2^{m_2},\ (A_{0,0}\neq 0), \tag{3}$$

где $\rho_j\ (j=1,2)$, $A_{m_1,m_2}(m_1,m_2=0,1,...)$, $\alpha_{1,0},\alpha_{0,1}$-неизвестные постоянные,а ряд в правой части сходится вблизи особенности $(x_1=0,x_2=0)$ называется нормально-регулярным решением двух переменных. Следующая теорема устанавливает нормально-регулярные решения системы Горна (1).

Теорема 2. *Вспомогательная система*

$$x_1U_{x_1x_1}+(2\alpha_{1,0}x_1+\gamma_1-x_1)U_{x_1}-x_2U_{(x_2)}+[(\alpha_{1,0}^2-\alpha_{1,0})x_1+\gamma_1\alpha_{1,0}-\alpha_{1,0}x_2-\lambda]U=0$$

$$x_2U_{x_2x_2}+(2\alpha_{0,1}x_1+\gamma_2-x_2)U_{x_2}-x_1U_{(x_1)}+[(\alpha_{0,1}^2-\alpha_{0,1})x_2+\gamma_2\alpha_{0,1}-\alpha_{0,1}x_1-\lambda]U=0$$

полученная из системы Горна (1) с помощью преобразования

$$W(x_1,x_2)=exp(\alpha_{1,0}x_1+\alpha_{0,1}x_2)U(x_1,x_2) \tag{4}$$

где $\alpha_{1,0},\alpha_{0,1}$ -неизвестные постоянные, при выполнении двух необходимых условий

$$\alpha_{1,0}^2-\alpha_{1,0}=0,\alpha_{0,1}^2-\alpha_{0,1}=0,$$

$$f_{0,0}^{(j)}(\rho_1,\rho_2,)=\rho_j(\rho_j-1+\gamma_j)=0 \tag{5}$$

имеют два решения в виде нормально-регулярных рядов:

$$W_3(x_1,x_2)=exp(x_1)(1+\frac{\lambda}{\gamma_1}x_1-\frac{\gamma_2-\lambda}{\gamma_2}x_2+\frac{\lambda(\lambda+1-\gamma_2)}{\gamma_1\gamma_2}x_1x_2+$$

$$+\frac{\lambda(\lambda+1)}{\gamma_1(\gamma_1+1)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{(\gamma_2-\lambda)\cdot(\gamma_2+1-\lambda)}{\gamma_2(\gamma_2+1)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\cdots) \tag{6}$$

$$W_4(x_1,x_2)=exp(x_2)(1-\frac{\gamma_1-\lambda}{\gamma_1}x_1+\frac{\lambda}{\gamma_2}x_2+\frac{\lambda(\lambda+1-\gamma_1)}{\gamma_1\gamma_2}x_1x_2$$

$$+\frac{(\gamma_1-\lambda)\cdot(\gamma_1+1-\lambda)}{\gamma_1(\gamma_1+1)}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{\gamma_2(\gamma_2+1)}\cdot\frac{x_2^2}{2!}+\cdots). \tag{7}$$

Доказательство теоремы проводится методом Фробениуса-Латышевой. Вспомогательная система полученная из системы Горна (1) с помощью преобразования (4) имеют решения (6) и (7) в виде:

$$W_3(x_1,x_2)=exp(x_1)U_1(x_1,x_2),W_4(x_1,x_2)=exp(x_2)U_2(x_1,x_2).$$

Ключевые слова: многочлены Лагерра, система Горна, гипергеометрическая система, нормально-регулярное решение, вспомогательная система.

2010 Mathematics Subject Classification: 33C05, 33C15, 33C20, 33C65

Литература

[1] Bateman H. *Higher Transcendental Functions. Part I. Hypergeometric functions. The Legendre functions*, Science, Moscow (1965).

[2] Tasmambetov Zh.N. Confluent hypergeometric functions and two variables Laguerre polynomials as a solution of Wilczynski type system, *AIP Conference Proceeding 1779, **020137** (2016), doi.org /10.1063/1/4959751*

Транспортные решения уравнений Максвелла при досветовых скоростях

И.А. КАНЫМГАЗИЕВА

Евразийский национальный университет им. Л.Гумилева, Астана, Казахстан, E-mail: ilmira 69@mail.ru

Уравнения Максвелла являются основополагающими в современной электродинамике и являются определяющими при изучении электромагнитных полей, порождаемых разнообразными излучателями ЭМ волн. Построением и исследованием решений этих уравнений и краевых задач для них в областях разной геометрии занимаются многие ученые, начиная со второй половины XIX века. Библиография в этом направлении весьма обширная, начиная с многообразной учебной литературы по электромагнетизму.

Здесь нас будут интересовать прежде всего обобщенные решения этой системы уравнений, когда действие излучателей описывается сингулярными обобщенными функциями, сосредоточенными импульсными, описываемые дельта-функциями и их производными, либо сингулярными простыми и двойными слоями на линиях и поверхностях различной формы.

Тензор Грина и обобщенные решения нестационарных уравнений Максвелла и их гамильтоновой формы в изотропных и анизотропных средах построен в работах [1-3]. На его основе, с использованием Метода Обобщенных Функций, разработан Метод Граничных Интегральных Уравнений для решения нестационарных и стационарных краевых задач электродинамики в областях с произвольной геометрией границ в [4,5].

Среди действующих источников излучения ЭМ волн наиболее распространенными являются подвижные, расположенные на платформах различных транспортных средств. Очевидно, что скорость движения существенно влияет на процессы распространения ЭМ волн в средах с различной электрической проводимостью и магнитной проницаемостью, как и форма самого источника и характер его работы. Исследования в этом направлении не столь многочисленны и связаны с определенным видом источника излучения .

Здесь рассматриваются транспортные решения системы уравнений Максвелла при действии подвижных источников ЭМ волн, движущихся с постоянной скоростью в фиксированном направлении. Построены фундаментальные и обобщенные решения при скоростях движения, меньше скорости света, даны их регулярные представления в аналитической форме. Приведены примеры для подвижных излучателей разного вида, полезные для радиотехнических приложений.

Ключевые слова: Транспортные уравнения Максвелла, скорость света, скорость движения, число Маха, тензор Грина, обобщенные решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L05, 83D05

References

[1] Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Фундаментальные решения уравнений Максвелла. *Дифференциальные уравнения*, 35, **1**:(1999), 125–127.

[2] Алексеева Л.А. Гамильтонова форма уравнений Максвелла и ее обобщенные решения. *Дифференциальные уравнения*, 39, **6**:(2003), 769–776 .

[3] Alexeyeva L.A. , Kanymgaziyeva I. A., Sautbekov S.S. Generalized solutions of Maxwell equations for crystals with electric and magnetic anisotropy. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 2014, 1-14. http://dx.doi.org/10.1080/09205071.2014.951077

[4] Alexeyeva L.A., Sautbekov S.S. Boundary integral equations of stationary boundary value problems for Maxwell's equations, *Computational mathematics and mathematical physics*, 40, **4**:(2000), 619–630.

[5] Alexeyeva L.A. Generalized solutions of nonstationary boundary value problems for Maxwell equations. *Computational mathematics and mathematical physics*, 42, **1**:(2002), 75–87.

Компьютерное решение двухфазной задачи со свободной границей в электрическом контакте цилиндрической формы

А.А. КАВОКИН[1,2,a], А.Т. КУЛАХМЕТОВА[2,b]

[1]*Сулейман Демиреля Университет(СДУ), Каскелен, РК*
[2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, РК*
E-mail: [a]*kavokin_alex@yahoo.com*, [b]*kulakhmetova@mail.ru*

Рассмотрен метод численного решения осесимметричной задачи об определении температуры в контакте цилиндрической формы с учетом фазовых превращений (Solid= Liquid). Математическая постановка задачи возникла при моделировании тепловых процессов, происходящих в контактах при зажигании между ними электрической дуги, [2]. Математическая модель состоит из неоднородного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами:

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_0-L_{S\_L}\frac{dX}{dt}$$

с соответствующими начальными и граничными условиями и дифференциального уравнения кинетики изменения жидкой фазы металла:

$$\frac{dX}{dt} = K \cdot \operatorname{sign}(X - X_{eq}) \cdot |X - X_{eq}|^{\nu}\,; \quad (t > 0, 0 < r < r_k, 0 < z < z_0)\,,$$

где $T = T(t, r, z)$ — температура, $^\circ C$; $X = X(t, r, z)$ — относительное количество жидкой фазы в единице объема, $\lambda = \lambda(T, X)$ — коэффициент теплопроводности $[W/m \cdot K]$, L_{S_L} — скрытая теплота плавления, $[J/m^3]$, q_0 — плотность джоулева источника тепла, $[J/m^3]$, K — коэффициент кинетики фазового перехода, $[1/sec]$.

X_{eq} — равновесное содержание фазы, в соответствии с диаграммой состояния:

$$X(0, r, z) = 0; \qquad X_{eq} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & T > T_{melting} \\ 0, & T < T_{melting} \end{array} \right\}$$

Такой подход позволяет избежать проблем, появляющихся при использовании классической задачи Стефана в моделях таких процессов, [1], в частности:

— вычисление нормальных производных для неизвестной (2-х, 3-х мерной) границы фазового перехода;

— появление новой или исчезновение существующей области фазы, . . . и т.д.

Для определения коэффициента кинетики фазовых превращений используется сравнение решения автомодельной задачи Стефана с решением данной задачи при соответствующих граничных условиях. При этом граница раздела фаз в этой модели определяется как линия изотермы соответствующей температуре фазового перехода, но также существует и переходная область, содержащая смесь жидкой и твердой фаз ($\sim 3\%$ размера области жидкой фазы), что вполне соответствует реальным процессам, [1]. На рисунке 1 приведен пример расчета межфазной границы:

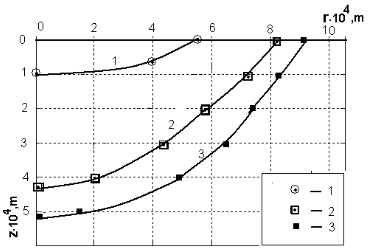


Рисунок 1. Рассчитанные координаты свободной границы $\alpha(t, r, z)$ для значений времени: $1 \sim 5s$, $2 \sim 10s$, $3 \sim 25s$ и коэффициента $K = 0.3[1/s]$

Подобный метод был использован ранее, [3], для решения одномерной задачи и получено удовлетворительное совпадение с решением соответствующей задачи Стефана.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09258948 КН МНВО РК

Ключевые слова: компьютерные модели тепловых процессов, задачи со свободными границами, численные методы.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 80A22

Литература

[1] Gupta S.C. *The classical Stefan problem*, Elsevier, 2003, p.p.385.

[2] Kharin S.N. et al. Dynamic of thermophysical processes in the cathode at the electric arc influence, *Proc. of 6th Int.Conf on Switching Arc Phenomena, Lodz, Poland*, (1985).

[3] Kavokin A.A, Kharin S.N., Yasir Munir Comparison Stefan's and kinetic models of phases transformation processes, *Herald of Kazakh-British University, №(10)*, (2009). — pp 47-53.

Моделирование образования гроз умеренных широт с учетом фрактальных свойств облачной среды

Т. С. Кумыков

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,г. Нальчик, РФ
E-mail: macist20@mail.ru

Обзор современного состояния теории грозового электричества, показывает, что работа по ее усовершенствованию все более усиливается [1, 2]. С одной стороны главной составляющей глобальной электрической цепи, объединяющей атмосферу и Землю является гроза, а с другой электростатические силы существенно влияют на эволюцию динамических и микрофизических характеристик облаков и осадков, и, как следствие, на перенос тепла и влаги в атмосфере. Поэтому исследования гроз, направленные на раскрытие полной картины целого ряда процессов, протекающих в атмосфере, является актуальной.

В последние десятилетия значительно расширились исследования явлений и процессов, протекающих в конвективных облаках, в которых облако рассматривается как фрактальный объект. Считая грозовое облако фрактальным объектом с фрактальной структурой или просто фрактальной средой, в работе рассматривается грозовая модель кучево-дождевых облаков смешанной структуры, в которой учитывается влияние параметра фрактальности среды на механизм генерации зарядов.

Если среда фрактальная, то это означает, что она с нецелой массовой размерностью D, которая является количественной характеристикой одной из особенностей самоорганизующейся грозовой системы. Процессы, протекающие в такой среде, хорошо описываются дифференциальными уравнениями, содержащими производные дробного порядка [3].

В рассматриваемой модели большие скорости образования зарядов на гидрометеорах объясняются с позиции существования механизмов «мгновенного» действия, к которым можно отнести механизм электризации при соударении и разрушении крупных гидрометеоров в электрическом поле.

Учет фрактальных свойств в модели грозового облака осуществляется с помощью применения понятия эффективной скорости изменения некоторой физической величины f, определяемого в следующем виде [4]

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \int_0^t g(t-t')\frac{df(t')}{dt'}dt' = \frac{1}{\tau}D_{0t}^{\alpha-1}\frac{df}{dt} = \frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}f, \qquad 0<\alpha<1,$$

где $g(t)$– функция памяти, t– безразмерное время, отнесенное к характерному времени процесса τ, $\partial_{0t}^{\alpha}f$– дробная производная в смысле Герасимова-Капуто порядка $n-1<\alpha<n$ от функции f с началом и концом в точках 0 и t [5], $\partial_{at}^{\alpha}f = sign^n\,(a-t)\,D_{at}^{\alpha-n}\frac{\partial^n f}{\partial t^n}$, $n-1<\alpha\le n$, $n\in N$, $D_{at}^{\alpha}f$- оператор дробного интегро–дифференцирования Римана-Лиувилля.

При этом допуская, что основным механизмом генерации зарядов во фрактальной грозовой среде является электризация при соударении градин с каплями в электрическом поле получено выражение для заряда градины в следующем виде

$$\partial_{0t}^{\alpha}q_г\,(t) = \left(Ar_г^2Ev_г - fq_c\,(t)\right)\tau^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1, \tag{26}$$

где $q_г\,(t)$- заряд градины; $A = \pi\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} n\,(r_k)\ a\,(r_k,r_г)\left(1-\frac{v_k}{v_г}\right)dr_k = const$; $a\,(r_k,r_г)$-размер градины после соударения с каплей; $q_c\,(t)$ - заряд уносимое каплями; v_k и $v_г$ - конечная скорость падения градины и капли; E-напряженность электрического поля.

Для (28) справедливо начальное локальное условие

$$q\,(0) = q_0. \tag{27}$$

Уравнение (28) и начальное условие (29) образуют задачу Коши для дробного уравнения генерации зарядов градин в рассматриваемой модели, а ее решение описывает процесс электризации градин в кучево-дождевых облаках умеренных широт, в котором учитывается фрактальность облачной среды.

На основе предлагаемой модели можно сказать, что электрофизические процессы, протекающие в грозовых облаках тесно связаны с фрактальностью самой среды и, что предложенная полуэмпирическая модель вполне удовлетворительно описывает основные черты рассматриваемого процесса заряжения градин.

Ключевые слова: Гроза, математическая модель, фрактальная среда, дифференциальное уравнение с дробными производными.

2020 Mathematics Subject Classification: 86A10, 86A25

Литература

[1] Шишкин Н. С. Облака, осадки и грозовое электричество, *Л: Гидрометеоиздат*, (1964), -402 с.

[2] Iudin D.I., Trakhtengerts V.Y., Hayakawa M. Fractal dynamics of electric discharges in a thundercloud, *Phys. Rev. E.*, **№ 68**: (2003), -P 016601.

[3] Псху А. В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка, *Нальчик: Издательство КБНЦ РАН*, (2005), -185 с.

[4] Рехвиашвили С.Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики, *Письма ЖТФ*, **№ 2 (30)**: (2004), -С 33–37.

[5] Паровик Р.И. Хаотические и регулярные режимы дробных осцилляторов, *Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга*, 2019, -132 с.

Алгоритм получения изображения самоподобного объекта на комплексной плоскости

Е.Ж. КУРЫШБАЕВ[1,a]

[1] *Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Казахстан*
E-mail: yerke1984@gmail.com

В данной работе построен алгоритм получения изображения самоподобного объекта, который является результатом вычисления относительной погрешно- сти различных конечно-разностных схем решения задачи Коши второго порядка на комплексной плоскости. С помощью программы можно наблюдать при каких условиях и на каких точках значение погрешности может стремиться к бесконеч- ности или оставаться в области определенных значений. Приводится компьютер- ный графический анализ указанных явлений. Компьютер можно превратить в своеобразный микроскоп и наблюдать с его помощью за поведением границ обла- сти. Моделирование показывает, что параметры, такие как шаг дискретизации, точность оценки, области на комплексной плоскости влияют на устойчивость.

Если рассматривать множество, полученное из формулы относительной по- грешности на комплексной плоскости, то, после итерационного процесса, значе- ния, лежащие вне этих множеств, стремятся к бесконечности. Внутренние гра- ницы множеств имеют волнообразную форму. Область, где появляется неустой- чивость, смещается к границе множества, и его траектория вырисовывается осо- бым образом, и именно здесь появляются удивительно красивые формы. При- чем фракталы и самоподобные объекты из дифференциальных уравнений имеют между собой и схожие свойства, и различия.

Полученное множество имеет кольцеобразный вид, внутри кольца и за его пределами находятся сравнительно большие области неустойчивости. По изобра- жению множества заметно, что центр кольца смещен налево по действительной оси. В данном множестве находятся несколько устойчивых зон, и можно постро- ить график, используя координаты центров этих зон. Кривая графика проходит через центры устойчивых зон и образует линию, которая проходит через аттрак- торы. Кстати, поиск данной функции можно рассмотреть, как отдельную задачу.

При увеличении точности оценки, можно заметить, что множество концен- трируется около устойчивых зон. А при поэтапном уменьшении точности оценки устойчивые зоны приближаются к друг другу, и в результате образуют единую область в виде кольца. Варьируя количеством делений в интервале, то есть зна- чением шага дискретизации, также можно получить разнообразные изображения множества. Здесь явно прослеживается определенная закономерность – количе- ство устойчивых зон зависит от количества делений. Также при увеличении ко- личества делений радиус множества увеличивается. Данный процесс очень напо- минает деление клеток в биологии, то есть у множества имеется свойство самопо- добия, и данное свойство приближает рассматриваемое множество к фракталам. Но, как показал эксперимент, нельзя бесконечно уменьшать шаг дискретизации, при определенных шагах, в центре множества, где значение относительной по- грешности раньше стремилось к бесконечности, начинает образовываться новая устойчивая зона. А при очень малых значениях шага множество явно демон- стрирует стохастическое поведение, но при этом множество не теряет свойства самоподобия.

Аналогичные изображения были получены в работах [1, 2, 3] и других авторов.

Ключевые слова: самоподобие, дифференциальные уравнения, относительная погрешность, математическое моделирование.

2020 Mathematics Subject Classification: 28A80, 34M03

Литература

[1] Мандельброт Б. *Фрактальная геометрия природы. Институт компьютерных исследований*, Москва (2002).

[2] Бектемесов М.А. *Фракталдар. Оорны?тылы? ж?не жина?тылы?*. КазНПУ им. Абая, Алматы (2010).

[3] Tassaddiq A, Tanveer M, Azhar M, Arshad M, Lakhani F. *Escape Criteria for Generating Fractals of Complex Functions Using DK-Iterative Scheme.* Fractal and Fractional. 7:1 (2023), 76–77.

О постановке краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с несимметричными условиями по времени

С.М. МАМАЖОНОВ

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: sanjarbekmamajonov@gmail.com

В данной работе в области $\Omega = \{(x, y): \ 0 < x < p, \ 0 < y < q\}$ рассматривается уравнение четвертого порядка в виде

$$L[u] = u_{xxxx} + a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x + a_3(x)u - u_{yy} = f(x, y), \qquad (1)$$

где $p, q \in R$, $a_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, $f(x, y)$ заданные достаточно гладкие функции.

Уравнение (1), обычно называется уравнением четвертого порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени.

Для уравнения (1) в области Ω изучим следующую задачу.

Задача *A***.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{4,2}_{x,y}(\Omega)\cap C^{3,1}_{x,y}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и следующим краевым условиям:

$$u_y(x,0)=u(x,q)=0,\ 0\leq x\leq p,$$

$$\begin{array}{ll} u(0,y)=\psi_1(y), & u(p,y)=\psi_2(y), \\ u_{xx}(0,y)=\psi_3(y), & u_{xx}(p,y)=\psi_4(y), \quad 0\leq y\leq q, \end{array}$$

где $\psi_i(y)$, $i=\overline{1,4}$ заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в статье [1] рассмотрен случай $a_1=a_2=0$, $a_3\neq 0$, а в работах [2-3] исследованы краевые задачи для модельных уравнений четвертого порядка спектральном методом. В работах [4-5], исследованы краевые задачи для уравнение (1) когда все коэффициенты постоянные. В статье [6] исследовано первая краевая задача для уравнение (1).

Теорема 1. *Если задача A имеет решение, то при выполнении условий* $2a_3(x)+a_1''(x)-a_2'(x)\geq 0$, $a_1(x)\leq 0$, *оно единственно.*

Теорема 2. *Если выполняются следующие условия:*

1) $\psi_i(q)=\psi_i'(0)=\psi_i''(q)=0$, $\psi_i(t)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$;

2) $f(x,q)=f_y(x,0)=0$, $f_{xyy}(x,y)\in C[0,q]$, $\int\limits_0^q|f_{yy}(x,y)|dy<\infty$, $\int\limits_0^q|f_{xyy}(x,y)|dy<\infty$, $0\leq x\leq p$;

3) $C<\dfrac{\mu_1^3(1-\exp(-2\mu_1 p))^2}{p\left(2\mu_1^2+3\mu_1\left(1+\exp(-4\mu_1 p)\right)+3\right)}$,

то решение задачи A существует. Здесь,

$$C=\max_{\xi\in[0,p]}\left\{\left|a_i^{(j)}(\xi)\right|,\left|a_1''(\xi)\right|,\ i=\overline{1,3},\ j=0,1\right\},\quad \mu_1=\sqrt{\frac{\pi}{4q}}.$$

Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Решение выписано через построенную функцию Грина.

Ключевые слова: уравнение четвертого порядка, кратные характеристики, младшие члены, краевая задача, единственность, существование, функция Грина.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C10, 35G15

Литература

[1] Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **1** (2013), 3–10.

[2] Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **25**:1 (2021), 51–66.

[3] Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary Value Problems for a Fourth Order partial Equation with an Unknown Right – hand Part, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:3 (2021), 632–640.

[4] Y. P. Apakov and S. M. Mamajonov: A boundary-value problem for the fourth-order equation with multiple characteristics in a rectangular domain. *Nonlinear Oscillations.* Published in vol. **24** (2021), No. 3, pp. 291-305.

[5] Mamajonov S.M. The third boundary problem for a fourth-order non-homogeneous equation with constant coefficients. *Bull. Inst. Math.*, 2022, Vol. **5**, No. 6, pp. 100-109.

[6] Ю.П.Апаков, С.М.Мамажонов. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами. *Доклады Академии наук Республики Узбекистан (ДАН)*, №4, 2022 г.

Обратная коэффициентная задача для модели динамики популяции с возрастным структурированием и миграционными потоками

А. Ю. ЩЕГЛОВ[1,a], С. В. НЕТЕСОВ[2,b]

[1] *Университет МГУ-ППИ, Шэньчжэнь, Китай*
[2] *МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
E-mail: [a]*shcheg@cs.msu.ru*, [b]*sv954@yandex.ru*

Рассматривается обратная задача восстановления коэффициента $m(x)$ в модели развития популяции (стр. 73 в [1]) с возрастным структурированием индивидуумов (особей) и учётом миграционных потоков. При этом прямая задача имеет вид:

$$u_t(x,t)+u_x(x,t)+\mu(x)u(x,t)=m(x)-e(x)u(x,t),\quad x\in[0,l],\quad t\in[0,T],\tag{1}$$

$$u(0,t)=\int_0^l\beta(\xi)u(\xi,t)\,d\xi,\qquad t\in[0,T],\tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in[0,l]. \tag{3}$$

Функция $u(x,t)$ определяет число индивидуумов (их плотность) возраста x в популяции в момент времени t; функции $\mu(x)$ и $m(x)$, $e(x)$ характеризуют естественную смертность особей и миграционные потоки (входной иммиграционный и выходной эмиграционный) особей возраста x, соответственно; $\beta(x)$ – плотность репродуктивности (рождаемости) особей возраста x, функция $\varphi(x)$ задаёт распределение особей по возрастам в фиксированный (начальный) момент времени.

В рамках обратной задачи требуется восстановить коэффициент $m(x)$ и затем функцию $u(x,t)$ по заданным значениям функций $\beta(x)$, $\varphi(x)$, $\mu(x)$, $e(x)$, и по дополнительно известным значению $x_1\in(0,l]$, и функции $g(t)$, где

$$g(t)=u(x_1,t), \qquad t\in[0,T]. \tag{4}$$

В работе сформулированы условия однозначной разрешимости прямой задачи (1)–(3). Представлены достаточные условия единственности решения обратной задачи (1)–(4). Предложен алгоритм численного решения обратной задачи.

В схожих постановках без учёта миграционных потоков задача исследовалась в работах [2]–[6].

Funding: Работа выполнена при частичной поддержке National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) и Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

Ключевые слова: популяционная динамика, возрастное структурирование, миграционное структурирование, миграционные потоки, обратная задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 35F15, 35Q80, 45Q05

Литература

[1] Iannelli M., Milner F. *The basic approach to age-structured population dynamics.*, Springer Science + Bus. Media, Dordrecht (2017).

[2] Denisov A. M., Makeev A. S. Iterative methods for solving an inverse problem for a population model, *J. Comp. Math. Math. Phys.*, **44**:4 (2004), 1404–1413.

[3] Denisov A. M., Makeev A. S. Numerical method for solving an inverse problem for a population model, *J. Comp. Math. Math. Phys.*, **46**:3 (2006), 470–480.

[4] Churbanov D. V., Shcheglov A. Yu. An iterative method for solving an inverse problem for a first-order nonlinear partial differential equation with estimates of guaranteed accuracy and the number of steps, *J. Comp. Math. Math. Phys.*, **53**:2 (2013), 215–220.

[5] Shcheglov A. Yu., Netessov S. V. The reconstruction of functional coefficients for a quasi-stable population dynamics' model, *J. Mathem. Models and Comp. Simulations*, **14**:5 (2022), 808–818.

[6] Shcheglov A. Yu. Uniqueness of the solution of the inverse problem for a model of the dynamics of an age-structured population, *Mathematical Notes*, **111**:1 (2022), 139–146.

О задаче для вырождающегося уравнения смешанного типа с дифференциальным оператором Капуто

Наргиза ОЧИЛОВА[1]

[1] *Ташкентский международный униыверситет Кимё,Ташкент, Узбекистан*
E-mail: nargiz.ochilova@gmail.com.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_CD^{\alpha}_{oy}u_y & x>0,\quad y>0,\quad 0<\alpha<1,\\ u_{xx}-(-x)^m u_{yy} & x<0,\quad y>0,\quad m>0,\\ (-y)^n u_{xx}-u_{yy} & x>0,\quad y<0,\quad n>0,\end{cases} \tag{28}$$

В области D ограниченной при $x>0$, $y>0$ отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y=0$, $x=1$, $y=1\,;x=0$ и при $x>0$, $y<0\,(x<0,\ y>0)$ ограниченной отрезком прямой $AC_2=\{(x,y):\ x=0,\ -1\le y\le 0\}$, $(AC_1=\{(x,y):\ -1\le x\le 0,\ y=0\})$ и характеристикой $BC_2:\ x+\frac{1}{q}(-y)^q=1$, $(A_0C_1:\ y+\frac{1}{p}(-x)^p=1)$ уравнения (28), где $2p=m+2$, $2q=n+2$, а ${}_AD^{\alpha}_{oy}[\cdot]$ –оператор Капуто[1].

Введем обозначения:

$$D_0=D\cap\{x>0,\ y>0\}\,,D_1=D\cap\{x<0,\ y>0\}\,,D_2=D\cap\{x>0,\ y<0\}\,,$$

$$I_1=\{\ (x,y):\ \ x=0,\ 0<y<1\,\}\ \ I_2=\{\ (x,y):\ \ 0<x<1\ ,\ \ y=0\,\}\,,$$

$$\Delta_1=D_0\cup D_{11}\cup I_1,\ D_{11}=D_1\cap\left\{y-\frac{1}{p}(-x)^p>0\right\},\ D_{12}=D_1\cap\left\{y-\frac{1}{p}(-x)^p<0\right\}$$

$$\Delta_2=D_0\cup D_{21}\cup I_2,\ D_{21}=D_2\cap\left\{x-\frac{1}{q}(-y)^q>0\right\},D_{22}=D_2\cap\left\{x-\frac{1}{q}(-y)^q<0\right\},$$

$$C_{21}\left(\frac{1}{2},-(q/2)^{1/q}\right),C_{11}\left(-(p/2)^{1/p},\frac{1}{2}\right),2\alpha_1=\frac{n}{n+2},\ 2\beta_1=\frac{m}{m+2},$$

причем

$$0 < \beta_1 < \alpha_1 < \frac{1}{2} \tag{29}$$

Задача *A***.** Требуется определить функцию $u(x,y)$из класса функций

$$W = \{u(x,y): \quad u \in C(\bar{D}_0) \cap C(\bar{D}_1) \cap C(\bar{D}_2),\ u \in C^2(D_{11} \cup D_{12} \cup D_{21} \cup D_{22})\ ,$$

$$u_{xx} \in C(D_0),\ \ {}_cD^{\alpha}_{0y}\, u \in C(D_0)\}$$

обладающую следующими свойствами: 1) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (28) в областях D_0, D_{1j}и D_{2j} $(j = 1, 2)$; 2) $y^{1-\alpha}u_y(x,y) \in C(D_0 \cup I_2)$, $\quad u_y(x,y) \in C(D_2 \cup I_2)$ и на линии I_2 выполняется условие склеивания:

$$u(x,+0) = \delta_1(x)u(x,-0) + \delta_2(x),$$

$$\lim_{y \to +0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} u_y(x,y), (x,0) \in I_2;$$

3) $u_x(x,y) \in C(D_0 \cup I_1) \cap C(D_1 \cup I_1)$ и на линии I_1 выполняется условие склеивания:

$$u(+0,y) = \delta_3(y)u(-0,y) + \delta_4(y),$$

$$\lim_{x \to +0} u_x(x,y) = \lim_{x \to -0} u_x(x,y), (x,0) \in I_1;$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{BB_0} = \varphi_0(y),\ 0 \le y \le 1,\ \ u(x,y)|_{AC_2} = \varphi_2(y),\ -1 \le y \le 0,$$

$$u(x,y)|_{AC_1} = \psi_2(y),\ -1 \le x \le 0,\ u(x,y)|_{A_0C_{11}} = \psi_1(y),\ \ \frac{1}{2} \le y \le 1,$$

$$u(x,y)|_{BC_{21}} = \varphi_1(x), \quad \frac{1}{2} \le x \le 1,$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_i(x)$, $\psi_i(y)$, $\delta_i(x), \delta_{i+2}(y)$ $(i = 1, 2)$-заданные функции, причем

$$\varphi_0(0) = \varphi_1(28), \varphi_2(0) = \psi_2(0),$$

$$\varphi_0(y) \in C\,[0,1] \cap C^1(0,1), \tag{30}$$

$$\varphi_1(x) \in C^3\left[\frac{1}{2},1\right], \quad \psi_1(y) \in C^3\left[\frac{1}{2},1\right], \tag{31}$$

$$\psi_2(x) \in C\,[-1,0] \cap C^2(-1,0), \varphi_2(y) \in C\,[-1,0] \cap C^2(-1,0). \tag{32}$$

Заметим, что задача A для уравнения (28) с характеристикой линией изменения типа изучена в работе [1]

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия* (29)*, (5)-(7), то в области D существует единственное регулярное решение задачи A.*

Ключевые слова: вырождающегося уравнение смешанного типа, регулярное решение, оператор Капуто, принцип экстремума, локальное условие.

Литература

[1] Исломов Б.И., Очилова Н.К. *Об одной задаче для дробной производной вырождающегося уравнения смешанного типа.* Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. Науки. 2017. №1. С. 22–32.

Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной

М.Х. РУЗИЕВ[1,a],
Н.Т. ЮЛДАШЕВА[1,b]

[1] *Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [a]mruziev@mail.ru,
[b]nyuldasheva87@gmail.com.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\gamma}_{0,y}u = 0,\ \gamma \in (0,1),\ \ y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\alpha_0}{(-y)^{1-\frac{m}{2}}}u_x + \dfrac{\beta_0}{y}u_y = 0,\ \ y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\gamma}_{0,y}$ – частная дробная производная Римана–Лиувилля от функции $u(x,y)$ порядка $\gamma\,(0 < \gamma < 1)$

$$(D^{\gamma}_{0,y}u)(x,y) = (\frac{\partial}{\partial y})\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_0^y \frac{u(x,t)dt}{(y-t)^{\gamma}},\ \ 0<\gamma<1,\ \ y>0,$$

в конечной области D, ограниченной отрезками OO_0, BB_0, O_0B_0 прямых $x=0,\ \ x=1,\ \ y=1$ соответственно, лежащих в полуплоскости $y>0$ и характеристиками

$$OC: x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,\ \ BC: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$$

уравнения (1) в полуплоскости $y<0$. Пусть $D^+=D\cap(y>0),\ \ D^-=D\cap(y<0),\ \ I$ – интервал $0<x<1$ прямой $y=0$. В (1) $m,\ \ \alpha_0,\ \ \beta_0$ - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m>0,\ \ |\alpha_0|<\frac{m+2}{2}$, $-\frac{m}{2}<\beta_0<1$.

Задача. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u(1,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$A_1(I^{-\alpha,0,\alpha+\beta-1}_{0+}u[\theta(t)])(x)+A_2u(x,0)=g(x), \tag{3}$$

а также условиям сопражения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\gamma}u(x,y)=\lim_{y\to 0-}u(x,y),\ \ \forall x\in\overline{I}, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\gamma}(y^{1-\gamma}u(x,y))_y=\lim_{y\to 0-}(-y)^{\beta_0}u_y(x,y),\ \ \forall x\in I, \tag{5}$$

где A_1, A_2 – действительные константы такие, что

$$-\frac{\Gamma(\beta)A_2}{\Gamma(\alpha+\beta)}<A_1<0\ \ \left(0<A_1<-\frac{\Gamma(\beta)A_2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right), \tag{6}$$

$\varphi_1(y),\ \ \varphi_2(y),\ \ g(x)$ – заданные функции такие, что

$$g(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^3(I),\ \ \varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0,\ \ y^{1-\gamma}\varphi_1(y),\ \ y^{1-\gamma}\varphi_2(y)\in C([0,1]). \tag{7}$$

$\theta_0(x)$ – точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)\in I$, с характеристикой OC;

$$\alpha=\frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)},\ \ \beta=\frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)},$$

$(I^{\alpha,\beta,\eta}_{0+}f)(x)$ – оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b,c;z)$, введенной М.Сайго [1].

Отметим, что нелокальные краевые задачи для уравнения (1) в неограниченных и ограниченных областях изучены в работах [2], [3]. Краевая задача для уравнения (1) в случае, когда $\alpha_0=0,\beta_0=0$ изучена в работе [4].

Доказана однозначная разрешимость изучаемой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальное уравнение дробного порядка, гипергеометрическая функция Гаусса, принцип экстремума, единственность решения, существование решения, сингулярный коэффициент.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12, 35Q05, 35R11

Литература

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* , Наука и техника, Минск (1987).

[2] Ruziev M. Kh . A boundary value problem for a partial differential equation with fractional derivative, *Fractional calculus and Applied Analysis.*, **24**:2 (2021), 797–814

[3] Ruziev M. Kh, Zunnunov R. T . On a nonlocal problem for mixed type equation with partial Riemann-Liouville fractional derivative, *Fractal and Fractional*, **6**:2 (2022), 110.

[4] А.В.Тарасенка, И.П.Егорова О нелокальной задаче с дробной производной Римана–Лиуввилля для уравнения смешанного типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, **21**:1 (2017), 112–121.

Приближенное положение равновесия в задаче распространения эпидемии с ограниченным сроком действия вакцинации и возможностью повторного заражения

С.Я. Серовайский[1,a],

[1] Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]serovajskys@mail.ru

Одной из важнейших характеристик динамической системы является положение равновесия, на которое система может выходить, хотя и не обязательно выходит. Однако возможная ситуация, когда решение задачи для системы, допускающей положение равновесия, со временем стремится к некоторому состоянию, которое никак не может быть положением равновесия. Интересно, что подобная поведение системы было обнаружено при анализе математической модели реального процесса.

Рассматривается развитие эпидемии в условиях вакцинации населения, когда время действия вакцины, а также период, в течение которого сохраняется иммунитет у переболевших людей считаются ограниченными. Данный процесс описывается нелинейной системой, состоящей из девяти обыкновенных дифференциальных уравнений. Они характеризуют изменение со временем численности следующих групп населения: здоровых, вакцинированных, бывших в контакте с больными, т.е. контактных, вакцинированных контактных, трех групп больных (невыявленных, изолированных и госпитализированных), иммунизированных и умерших.

Легко убедиться, что система обладает первым интегралом, являющимся численностью всей популяции (сумме численностей всех рассматриваемых групп населения), и положением равновесия, для которого численность всех групп контактных и больных равны нулю. Первое свойство говорит о том, что общая численность популяции со временем не меняется, а второе соответствует завершению эпидемии.

Расчеты системы, проводимые при разумном наборе ее параметров (они выбираются частично на основе экспертных оценок, частично с помощью решения соответствующих обратных задач), показывают, что после значительных изменений функций состояния системы, соответствующих сначала бурному росту эпидемии, затем медленному росту, достижению ее пика и постепенному затуханию, восемь из девяти решений со временем (примерно через три года после начала эпидемии) стабилизируются и выходят на некоторое состояние. На графиках мы видим затухающие колебания, с определенного момента времени выглядящие как прямые, параллельные координатной оси. Однако это никак не может быть положением равновесия, поскольку все рассматриваемые функции здесь принимают положительные значения, хотя, как было установлено ранее, пять из них в равновесии должны равняться нулю. Дополнительную странность вносит поведение девятого решения (число умерших), которое монотонно растет, что, казалось бы, вступает в противоречие со свойствами первого интеграла: сумма всех решений должна быть постоянной.

Полученные результаты имеют, тем не менее, естественное объяснение. Девятая функция действительно возрастает, поскольку в правой части соответствующего уравнения находится положительная величина. Однако величина эта (скорость роста рассматриваемой функции) является достаточно малой, да и начальное значение этой функции также. Таким образом, на достаточно большом интервале времени она практически не оказывает влияние на поведение системы в целом (число умерших в результате эпидемии много меньше численности всей популяции). Если ею вообще пренебречь, то полученная система из восьми уравнений обладает своим положением равновесия, существенно отличающейся от положения равновесия полной системы. Именно в его малую окрестность выходит решение исходной системы еще до того, как начнет сказываться влияние девятой функции. Однако девятая функция, хоть и медленно, но продолжает расти. Тогда, исходя из определения первого интеграла (сумма всех решений постоянна), совокупность всех остальных функций в сумме будет убывать. А поскольку убывание это медленное и распределяется на все восемь функций, то визуально это очень долго остается незаметным. Естественно, при неограниченном возрастании времени пять функций будут стремится к нулю, а система выйдет на своё собственное положение равновесия.

Интересно, что найденное «приближенное положение равновесия» имеет глубокий практический смысл. Полученные результаты говорят о том, что после бурного течения эпидемии (в нашем случае – примерно через три года после ее начала), ситуация стабилизируется на относительно невысоком уровне по сравнению с пиком эпидемии. Это означает, что кто-то всё равно будет заболевать (возможно даже неоднократно), а кто-то – даже и умирать. Тем самым эпидемия останется достаточно долго, но уже не будет представлять серьезной опасности для популяции в целом. Именно таким свойством и обладают обычные эпидемии.

Funding: Автор был поддержан грантом AP09260317 МОН РК.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, положение равновесия, эпидемиология

2010 Mathematics Subject Classification: 92B99, 39A99, 34A99, 60G99

Аналитические выражения в теории обратных задач уравнений мульти-физических процессов в многослойных средах

А. В. СИНИЦА

Казахстанско-Британский Технический Университет, г. Алматы, Казахстан
E-mail: a.sinitsa@kbtu.kz

В докладе предлагается к рассмотрению решение обратной задачи конвективного переноса потоков тепла и массы посредством вывода аналитических уравнений. Ставится прямая задача посредством записи нестационарного уравнения диффузии для многослойной области и граничных условий III рода. Прямая задача решается аналитически посредством гомогенизации граничных условий и доказательством построенных Лемм и Теоремы о подобранных оценках, позволяющих решать трансцендентные уравнения для собственных значений аналитических выражений гомогенизированной задачи. Рассматриваются минимизирующие функционалы, позволяющие определять 9 параметров области определения одновременно, включая геометрический параметр системы.

Предлагается к рассмотрению также методика аналитического решения обратной задачи для модели термального расширения плоскопараллельной пластины. Для данной задачи предлагается рассмотреть аналитический метод редуцирования размерности.

Работа выполнена в рамках научно-исследовательской работы докторанта на базе Школы прикладной математики АО «КБТУ».

Ключевые слова: уравнение диффузии, краевая задача, многослойная среда, пластина,тепловой поток .

2020 Mathematics Subject Classification: 8J35

Литература

[1] Sinitsa F.V. Design of novel inverse analysis methodology for exact estimation of elasticity parameters in thermoelastic stress model. Pergamon-Elsevier Science Ltd, International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 135, art. no. 106096, 2022. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106096.

[2] Sinitsa A.V. Analytical inverse analysis methodological approach for thermo-physical parameters estimation of multilayered medium terrain with homogenized sampled measurements. MDPI, Symmetry, 14 (11), art. no. 2248, 2022. DOI: 10.3390/sym14112248.

Изучение особенности построения решений вырожденной системы в виде функции Бесселя многих переменных

Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ

Западно–Казахстанский университет имени М.Утемисова , Уральск, Казахстан
E-mail:tasmam45@gmail.com

Изучены особенности построения решений неоднородной вырожденной системы

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{\partial^2 W}{\partial Z_j \partial Z_i} + \gamma \frac{\partial W}{\partial Z_i} - W = f_i(Z_1, Z_2)(i = \overline{1,n}) \tag{1}$$

полученной из системы Лаурачелла

$$Z_i(1 - Z_i)\frac{\partial^2 W}{\partial Z_i^2} + \sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{\partial^2 W}{\partial Z_j \partial Z_i} +$$

$$+(\gamma - (\alpha_i + \beta_i + 1)Z_i)\frac{\partial W}{\partial Z_i} - \alpha_i \beta_i W = 0(i = \overline{1,n})$$

путём двойного предельного перехода по параметрам α_i и β_i, где $f_j(Z_1, Z_2)$ –аналитические функции от двух переменных Z_1 и Z_2.

Если $f_j(Z_1, Z_2) \equiv 0$, то получим вырожденную однородную систему, изучением которой занимался Художников В.И.[1]

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{\partial^2 W}{\partial Z_j \partial Z_i} + \gamma \frac{\partial W}{\partial Z_i} - W = 0.(i = \overline{1,n})$$

В общем случае, изученная В.И.Художниковым система состоит из 3-х систем, полученные из системы Лауричелла F_B путем предельного перехода. Построенное решение Художникова, в общем случае, представляется в виде

$$\Phi_{B,n}^{k,l}\left((\alpha_k), \binom{\alpha_l'}{(\gamma)}, (\beta_k) |(z_n) \right) =$$

$$= \sum_{i_1,...,i_n} \frac{\prod(\alpha_k)_{i_k}(\beta_k)_{i_k}}{(\gamma)_{\sum i_n}} \cdot \prod(\alpha_l^{'})_{i_{l+k}} \cdot \prod \frac{(Z_n)^{i_n}}{i_n!}, \tag{2}$$

где использованы сокращения и обозначения:

$$(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n), \prod(\alpha_n)_{i_n} = \prod_{k=1}^{n}(\alpha_k)_{i_k},$$

$$\lim_{\beta_i \longrightarrow \infty} \frac{(\beta_i)_n}{\beta_l^n} = 1, \lim_{\alpha_i \longrightarrow \infty} \frac{(\alpha_i)_n}{\alpha_l^n} = 1.$$

Вышеуказанные три системы В.И.Художникова можно изучать вместе как в работе [1] или отдельно, как в работе [2], выявляя отдельные свойства решения вида (2).

В данной работе мы больше будем обращать внимание на ранее не изученные неоднородные системы вида (1) и их связь с функциями Бесселя многих переменных.

В работе рассматривается различные частные случаи.

1. Пусть $j = 1, i = 1$ и $f_1(Z_1, Z_2) = Z_1^{\rho_1}$. Тогда для полученного из (1) вырожденного неоднородного уравнение

$$Z_1 W_{Z_1 Z_1} + \gamma W_{Z_1} - W = k Z_1^{\rho_1 + 1} \tag{3}$$

(k и ρ_1 -постоянные) справедливо утверждение.

Теорема 1. *Вырожденное неоднородное уравнение (3) имеет решение в виде функции Ломмеля:*

$$W = k Z_1^{\rho_1 - 1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{1}{2}Z_1)^{2m+2} \Gamma(\frac{1}{2}\rho_1 - \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}\rho_1 + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}\rho_1 - \frac{1}{2}\gamma + m + \frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}\rho_1 + \frac{1}{2}\gamma + m + \frac{3}{2})} =$$

$$= k S_{\rho_1, \nu}(Z_1).$$

Доказательство приводится заменой $W = Z_1^{-\nu} J(x)$, с помощью которой уравнение (3) приводится к неоднородному уравнению Бесселя [3].

Ключевые слова: вырожденная система, неоднородная система, функции Бесселя, аналитическая функция , системы Лауричелла.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Художников В.И. Две новые вырожденные гипергеометрические функции многих переменных и интегральные уравнения с сними, *Дифференциальные уравнения*, **6**:39 (2003), 835–843.

[2] Tasmambetov Zh.N., Ubayeva Zh.K. Exceptions of formulating the normal-regular solutions jf confluent, *Lobachevskii journal of mathematics*, **8**:43 (2022), 2309–2331.

[3] Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функции*, ИЛ, (1919), 972.

Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области

А. А. ХАМИТОВ

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
E-mail: azizbek.khamitov.93@mail.ru

В области $D^- = \{(x, y, z) : -\infty < x < 0, \ 0 < y < q, \ 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнения

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

где $q > 0, \ r > 0$ - постоянные вещественные числа, и для него исследуем следующую задачу.

Задача B. Найти решение уравнения (1) в области D^- из класса $C^{3,2,2}_{x,y,z}(D^-) \cap C^{2,1,1}_{x,y,z}(D^- \cup \Gamma)$, имеющие ограничение первые производные по x, y и z, второй производной по x при $x \to -\infty$, и $u_y, u_z \in L_2(D^-)$, и удовлетворяющие краевыми условиями

$$u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \ u(x, y, 0) = u(x, y, r) = 0, -\infty < x < 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u(0, y, z) = \psi_2(y, z), \ u_x(0, y, z) = \psi_3(y, z), \\ \lim_{x \to -\infty} u(x, y, z) = 0, \ 0 \le y \le q, \ 0 \le z \le r, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\Gamma = \partial D^-$ - граница области D^-, $\psi_i(y, z)$, $i = 1, 2$ - заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_i(o, z) = \psi_i(q, z) = 0, \ \dfrac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^3 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3} = \dfrac{\partial^3 \psi_i(y, r)}{\partial y^3} = 0, \ \dfrac{\partial^5 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^2} = \dfrac{\partial^5 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z^2} = 0, \end{array} \right. \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Отметим, что аналогичная задача в плоскости полуограниченных областях, в работах [1-3] исследованы, некоторые корректные краевые задачи, а также в работах [4-5] в конечные области изучены краевые задачи в трехмерном пространстве.

Теорема 1. *Если задача B имеет решение, то оно единственно.*

Теорема 2. *Если функции* $\dfrac{\partial^{i+j}\psi_1(y,z)}{\partial y^i \partial z^j} \in L_2\left[0<y<q, 0<z<r\right],\ i,j=\overline{0,3}$ *и выполняются условия согласования (4), то решение задачи B существует и представляется в виде*

$$u(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\sum_{n,m=1}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}x}\left[\psi_{1n,m}\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}x+\frac{\pi}{6}\right)+\right.$$
$$\left.+\psi_{2n,m}\frac{2}{\sqrt{3}k_{n,m}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}x\right)\right]\times\sin\left(\frac{n\pi}{q}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{r}z\right),$$

где $\psi_{1n,m}$ и $\psi_{2n,m}$ - коэффициенты Фурье, причем

$$\begin{cases} \psi_{1n,m}=\dfrac{2}{\sqrt{qr}}\int\limits_0^q\int\limits_0^r\psi_1(y,z)\sin\left(\dfrac{n\pi}{q}y\right)\sin\left(\dfrac{m\pi}{r}z\right)dydz,\\ \psi_{2n,m}=\dfrac{2}{\sqrt{qr}}\int\limits_0^q\int\limits_0^r\psi_2(y,z)\sin\left(\dfrac{n\pi}{q}y\right)\sin\left(\dfrac{m\pi}{r}z\right)dydz. \end{cases}$$

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение с частными производными, уравнение третьего порядка, кратные характеристики, краевая задача, единственность, существование, ряд, полуограниченная область, абсолютная и равномерная сходимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C10, 35G15

Литература

[1] Апаков Ю.П. К решению краевых задач для уравнения $U_{xxx}-U_{yy}=0$ в неограниченных областях. *Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. –Ташкент,* **3**: (2006), 17–20.

[2] Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях. *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. –Нальчик,* **2(22)**: (2008), 147–151.

[3] Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье в областях с некомпактными границами. *Узбекский математический журнал. –Ташкент,* **1**:(2008), -С 14–22.

[4] Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины. *Известия вузов. Математика,* **10**:(2021), 60–70.

[5] Юлдашев Т. К. Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром. *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз,* том 145 (2018), 95–109.

Сферическая модель тепломассопереноса в электрических контактах при короткой дуге

С.Н. ХАРИН[1,a],

[1]*Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*staskharin@yahoo.com*

Разработана математическая модель, описывающая динамику температурного поля в электрических контактах при их нагреве тепловым потоком короткой дуги, который считается многокомпонентным и зависящим от температуры дуги и пятна контакта. Для катода эти составляющие учитывают ионную бомбардировку катода, лучистый нагрев столбом дуги, нагрев за счет эмиссии обратных электронов, термоэмиссионное охлаждение, потери мощности за счет фазовых переходов. Мощность, подводимая к аноду, включает нагрев вследствие кинетической энергии бомбардирующих электронов и лучистого нагрева столбом дуги, а также охлаждение за счет фазовых превращений.

Модель базируется на сферической задаче Стефана с нелинейными граничными условиями и специальным коэффициентом, учитывающим выброс части жидкого расплава. Для ее решения разработан итерационный метод мажорантных функций, позволяющий получать последовательности завышенных и заниженных температур в жидкой и твердой зонах контактной площадки, а также соответствующие значения величин эрозии.

Результаты численных расчетов сравниваются с экспериментальными данными.

Funding: Автор был поддержан грантом проекта AP09258948 КН МНВО РК.

Ключевые слова: температурные и электромагнитные поля, короткая электрическкая дуга, нелинейное неоднородное уравнение теплопроводности, задача Стефана, метод мажорантных функций.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 80A22

Квазистационарная модель динамики нагрева размыкающихся электрических контактов

Ю.Р. ШПАДИ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: yu-shpadi@yandex.ru

При размыкании электрической цепи между контактами выключателя вспыхивает электрическая дуга, вызывающая плавление контакта (анода). Изучение процесса плавления контакта приводит к задаче Стефана для уравнения теплопроводности, в которой необходимо учитывать зависимости распределения температуры в зоне расплава от плотности теплового потока из дуги в контакт и от плотности тепловых источников, возникающих за счет прохождения электрического тока через зону расплава контакта.

В анализе этой задачи плавления контакта часто высоким оказывается число Стефана, которое в физическом смысле отражает отношение плотности тепловой энергии, передаваемой в результате теплопроводности материала теплоносителя, к плотности тепловой энергии, затраченной на увеличение его внутренней энергии. Наличие такого фактора приводит к задаче для квазистационарного нагрева зоны расплава контакта.

Соответствующая математическая модель формулируется следующим образом. Необходимо найти закон $r = \alpha(t)$ изменения области расплава $\Omega = \{(r,t)|0 < b < r < \alpha(t) < \infty, 0 < t < t_a\}$ и температуру $\theta(r,t)$ в этой области, если температура $\theta(r,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda(r,t,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) + \frac{q(r,t,\theta)}{r^4} = 0, \tag{1}$$

краевым условиям

$$\alpha(0) = b, \quad -\left(\lambda(r,t,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_{r=b} = P(t), \quad \theta(\alpha(t),t) = \hat{\theta}(t) \tag{2}$$

и условию Стефана на подвижной границе

$$-\left(\lambda(r,t,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_{r=\alpha(t)} = L(t,\hat{\theta}(t))\frac{d\alpha(t)}{dt} \tag{3}$$

Задача имеет одну критическую точку. Это момент $t = 0$ начала расхождения контактов и вспышки электрической дуги в этот момент, приводящей к зарождению зоны расплава.

Исследование задачи проводится при следующих требованиях к параметрам процесса.

1) Функции $\lambda(r,t,\theta)$, $q(r,t,\theta)$ непрерывны по всем своим переменным в области $r \geq b$, $0 \leq t \leq t_a$, $\theta \geq 0$, функция $\lambda(r,t,\theta)$ дополнительно имеет непрерывные производные по переменным r, θ и имеют место ограничения значений этих функций

$$\lambda(r,t,\theta) \geq \lambda_{min} > 0, \quad q(r,t,\theta) \geq 0; \tag{4}$$

2) Функции $P(t)$, $\hat{\theta}(t)$, $L(t,\hat{\theta}(t))$ непрерывны на отрезке $0 \leq t \leq t_a$ и удовлетворяют на нем условиям

$$P(t) \geq 0, \quad P(t) \not\equiv 0, \quad \hat{\theta}(t) \geq 0, \quad L(t,\hat{\theta}) \geq L_{min} > 0. \tag{5}$$

При выполнении условий, указанных в пунктах 1) и 2), задача (1)–(3) сводится к эквивалентной системе двух уравнений, включающей:

а) обыкновенное дифференциальное уравнение для границы $\alpha(t)$,

б) нелинейное интегральное уравнение относительно температуры $\theta(r,t)$.

Рассматриваются свойства системы интегро-дифференциальных уравнений. Доказывается, что если функция $q(r,t,\theta)$ не зависит от температуры θ, то система интегро-дифференциальных уравнений разрешима и имеет единственное решение.

Funding: Автор был поддержан грантом научного проекта AP09258948 КН МНВО РК

Ключевые слова: задача Стефана, обыкновенные дифференциальные уравнения, нелинейные интегральные уравнения, интегральные уравнения типа Вольтерра 2-го рода.

2020 Mathematics Subject Classification: 34A34, 45D05, 45G10, 80A22

Inverse problem for third-order equation of parabolic-hyperbolic type with the Caputo operator

Obidjon ABDULLAYEV[1,a], Aygul MATCHANOVA[2,b]

[1] *Kimyo International University In Tashkent, Uzbekistan*
[2] *V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]obidjon.mth@gmail.com, [b]oygul87-87@mail.ru

Let Ω be one connected domain, restricted by segments BB_0, B_0A_0, A_0A (accordingly on the lines $x=1$, $y=h$, $x=0$) and by the characteristics $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ of the wave equation, with $A(0,0)$, $B(1,0)$ and $C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Introduce designations: $\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y<0\}$.

In the formulated domain Ω, we consider the equation

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\right)Lu=f(x)g(y) \tag{33}$$

where

$$Lu\equiv\begin{cases}L_1u=u_{xx}-{}_CD_{0y}^{\alpha}u; & (x,y)\in\Omega_1\\ L_2u=u_{xx}-u_{yy}; & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

$$g(y)\equiv\begin{cases}g_1(y); & y>0\\ g_2(y); & y<0\end{cases}$$

and ${}_CD_{ay}^{\alpha}$ is the partial Caputo fractional derivative of order $0<\alpha<1$ of a function $u(x,y)$ with respect to the second variable[1]:

$${}_CD_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y(y-t)^{-\alpha}u_t(x,t)dt,$$

a, b are given real constants and $a\neq 0$.

In the domain Ω for the Eq.(33) we will formulate and investigate this:

Problem A . To find para of functions $\{u(x,y),f(x)\}$ with the following properties:

$$1)f(x)\in C(0,1)\cap L_1(0,1);$$
$$2)u(x,y)\in C(\overline{\Omega_1})\cap C(\overline{\Omega_2}); u\in C^1(\overline{\Omega_2}\backslash\overline{BC}),$$
$$u_{xx}\in C(\Omega_1\cup AA_0); {}_CD_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega_1\cup AB);$$

$${}_cD_{0y}^{\alpha}u_x\in C(\Omega_1), u_{xxx}\in C(\Omega_1); u_{xxx}, u_{yyx}\in C(\Omega_2);$$

3) $u(x,y)$ satisfies boundary conditions:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\qquad 0\leqslant y\leqslant h;$$
$$u(1,y)=\varphi_2(y),\qquad 0\leqslant y\leqslant h;$$
$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\qquad 0<y<h;$$
$$u\,|_{BC}=\psi_2(x),\qquad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1;$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}\,|_{AC}=\psi_3(y),\qquad -\frac{1}{2}\leqslant y<0;$$
$$u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)=\delta_1(x)u(x,-0)+\delta_2(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1;$$

4) on the line of change AB, for the $u(x,y)$ takes place integral gluing conditions:

$$u(x,+0)=\gamma_1(x)u(x,-0)+\gamma_2(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1;$$

$$\lim_{y\to+0}{}_CD_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)\int_0^x r(t)u(t,0)dt+\lambda_3(x),\quad x\in(0,1),$$

where n is an internal normal and $\varphi_i(y)$, $\psi_j(x)$, $\psi_3(y)$, $g_j(y)$, $\lambda_i(x)$, $\delta_j(x)$, $\gamma_j(x)$ $(i=\overline{1,3}, j=\overline{1,2})$ are given functions, moreover $\sum\limits_{i=1}^{2}\lambda_i^2\neq 0$, $\delta_1(0)\neq 1$, $\gamma_1(x)\neq 0$ for all $x\in[0,1]$.

Under certain conditions on given functions, unique solvability of the formulated problem is proved.

Keywords: parabolic-hyperbolic type, Caputo derivatives, integral gluing condition, integral equations

2010 Mathematics Subject Classification: 517.956

References

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204,Elsevier Science B.V., Amsterdam. 2006

Solving a Boundary Value Problem for a Fractionally Loaded Heat Equation in a quarter-space

M.T. KOSMAKOVA[1,a], D.M. AKHMANOVA[2,b] A.N. KHAMZEYEVA[3,c]

[1,2,3] *Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan*
E-mail: [a]*svetlanamir578@gmail.com*, [b]*danna.67@mail.ru* [c]*aiymkhamzeyeva@gmail.com*

In a domain $Q = \{(x, y; t)|0 \leq x < +\infty; -\infty < y < +\infty; t > 0\}$ we consider a BVP for an equation

$$u_t = a^2\Delta u + \lambda\Big\{{}_{RL}D^{\beta}_{0t}u(x, y; t)\Big\}\Big|_{x-1=t,y-1=t,t>0} + \Phi(x, y; t) \tag{1}$$

with an initial condition:

$$u\Big|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

and with a boundary condition:

$$u\Big|_{x=0} = 0, \tag{3}$$

where

$${}_{RL}D^{\beta}_{0t}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)\beta}d\tau$$

is the Riemann-Liouville derivative of an order $\beta; 0 < \beta < 1$.

Here the load moves along a straight line:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{t}{1}; t > 0$$

.

It will also require a boundedness condition for solving problem (1)-(3) in a domain Q. We will assume that the function

$$\Phi(x, y; t) \in L_\infty(A) \cap C(B), \tag{4}$$

where

$$A = \{(x, y; t)|x > 0; y \in R; t \in [0, T]\},$$
$$B = \{(x, y; t)|x > 0; y \in R; t \geq 0\}, T = const > 0$$

Then the solution of problem (1)-(3) has the form [Polyanin, page 176, problem 2.2 1-2]:

$$u(x, y; t) = \lambda\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\tau)\ G(x, y; \xi, \eta; t-\tau)d\eta d\xi d\tau + F(x, y; t), \tag{5}$$

where

$$F(x, y; t) = \int_0^t\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi, \eta; \tau)\ G(x, y; \xi, \eta; t-\tau)d\eta d\xi d\tau, \tag{6}$$

$$G(x, y; \xi, \eta; t) = \frac{1}{4a^2t}\Big\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right)\Big\}.$$

Denote

$$\mu(\tau) = \Big\{{}_{RL}D^{\beta}_{0t}u(x, y; t)\Big\}\Big|_{x-1=t,y-1=t,t>0}.$$

Applying to (5) the operator of fractional differentiation in the sense of the Riemann-Liouville an order $\beta, 0 < \beta < 1$ and substituting $x-1 = t, y-1 = t$ we obtain the Volterra integral equation of the second kind with respect to the function $\mu(t)$:

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta}d\tau = f_1(t), \tag{7}$$

where

$$f_1(t) = \Big\{{}_{RL}D^{\beta}_{0t}u(x, y; t)\Big\}\Big|_{x-1=t,y-1=t,t>0} \tag{8}$$

Theorem 1. Equation (7) is uniquely solvable in the class $\mu(t) \in C([0;T])$, for any right side $f_1(t) \in AC([0;T])$, and the solution to equation (7) is determined by the formula

$$\mu(t) = f_1(t) + \lambda f_1(t) * t^{-\beta}E_{1-\beta,1-\beta}\left(\lambda t^{1-\beta}\right), \tag{9}$$

where $E_{a,b}(z)$ is the two-parameter Mittag-Leffler function and $*$ is the convolution.

Theorem 2. Let conditions (4) and $F(x, y; t) \in L_1(t \in [0;T])$ be satisfied, the function $F(x, y; t)$ is determined by formula (6), the function $\mu(t)$ is defined by formula (9). Then in the class $L_1(t \in [0;T])$ BVP (1)-(3) has a unique solution defined by formula

$$u(x, y; t) = \lambda f_1(t) * E_{1-\beta}\left(\lambda t^{1-\beta}\right) + F(x, y; t),$$

where the function $f_1(t)$ is determined by relation (8).

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09259780 (2021-2023) of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: heat equation, fractional derivative, load, integral equation, Mittag-Leffler function. **2010 Mathematics**

Subject Classification: 35K05, 45D05

References

[1] Polyanin A.D. (2002). *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Chapman and Hall/CRC, New York-London (2002).

[2] Kosmakova M.T., Izhanova K.A., Khamzeyeva A.N. On the non-uniqueness of the solution to a boundary value problem of heat conduction with a load in the form of a fractional derivative, *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics*, **108**:4 (2022), 98-106. DOI: 10.31489/2022M4/98-106.

[3] Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Kasymova L.Zh. To Solving the Heat Equation with Fractional Load, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:12 (2021), 2854-2866. DOI: 10.1134/ S1995080221120210.

Biquaternionic representation of photons and light emitters

L.A. ALEXEYEVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: alexeeva@math.kzz

In [1-7] the author developed a biquaternionic model of electro-gravimagnetic field (*EGM field*), EGM charges and EGM currents, and EGM interactions based on biquaternionic generalizations of Maxwell and Dirac equations. The biquaternionic wave (*biwave*) equation expresses EGM charges and currents through the bigradient of EGM field intensity like.

Here we present the ether equation as biquaternionic generalization of 8 Maxwell equations by use Hamilton form of quaternions [8]. Monochromatic solutions of this equation are constructed based on which the biquaternionic representations of photons are obtained. Free waves in the ether are considered. It is shown that they and photon biquaternions contain a gravitational component, which determines the light pressure.

Biquaternions of various light emitters (ball, spherical, ring, circular pulsars) are presented.

Funding: This work was supported by the Science Committee of Republic Kazakhstan (grant AP05132272)

Keywords: biquaternion, biquaternionic wave equation, Maxwell equations, photon, light emitter.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L05, 83D05

References

[1] Alexeyeva L.A. Newton's laws for a biquaternionic model of the electro-gravimagnetic fields, charges, currents, and their interactions,*Journal of Physical Mathematics*, 1(2009), Article ID S090604, 15 pages. doi:10.4303/jpm/S090604

[2] Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations, *Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications*, 2012, V. 7, No 1, 19-39.

[3] Alexeyeva L.A. Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solutions - In the book " Progress in analysis", Moscow,2013, Proccedings of the 8th Congress of ISAAC (Moscow,Aug 22-27, 2011), 153-161.

[4] Alexeyeva L.A. Biquaternionic model of electro-gravimagnetic field, charges and currents. Law of inertia, *Journal of modern physics*, 2016, V.7, No.5, 435–444, http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.750459

[5] Alexeyeva L. A. Biquaternionic Form of Laws of Electro-Gravimagnetic Charges and Currents Interactions, *Journal of Modern Physics*, 2016, V.7, No.11, 1351–1358,http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.711121

[6] Lyudmila Alexeyeva. Periodic System of Atoms in Biquaternionic Representation// *Journal of Modern Physics*, 2018, V.9., No.8, 1633-1644. DOI: 10.4236/jmp.2018.9810212

[7] Alexeyeva L.A. Periodic system of atoms as simple gamma in biquaternionic representation // Scientific federation. 2nd International conference on Quantum Mechanics and Nuclear Engineering. Keynote forum. Paris, 23-24 September 2019. P. 56.

[8] Hamilton W. R. On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions // Proceedings of the Royal Irish Academy (Nov 13, 1843), 424 - 434.

Application of stochastic global optimization methods for solving inverse problems

Sergey KABANIKHIN[1,a], Maktagali BEKTEMESOV[2,b], Zholaman BEKTEMESOV[3,c]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*
[2] *Kazakh National Agrarian Research University, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]ksi52@mail.ru, [b]maktagali@mail.ru, [c]jolaman252@gmail.com

The paper presents epidemiological calculations of mathematical modeling of cases of COVID-19 infection in Kazakhstan from December 12, 2021, to January 20, 2022 [1]. Using the developed model, based on the Covasim software package, and using incomplete statistical data on the incidence of the population, the inverse problem of restoring the model's parameters was solved. To solve the inverse problem, stochastic global optimization methods were used - the Parzen tree-like estimation method, the differential evolution algorithm, and the firefly algorithm. The analysis of incomplete data was carried out by regression analysis and machine learning methods. And also the epidemiological parameters of the model were refined, such as the rate of transmission of infection, testing, and the initial number of infected people in the country, and an algorithm was developed for the identifiability of unknown parameters.

As a result of the developed algorithm, it was shown that with an increase in the mobility of citizens during the New Year holidays in public places (shopping malls, markets, etc.), the number of detected cases of COVID-19 infection increased by 3.5 times. Comparison of simulation results with real data showed an error in tens of people (0.2%). Thus, mathematical modeling gave a qualitative coincidence of forecasts with reality.

The impact of the COVID-19 pandemic on the economy of Kazakhstan was studied in [2], based on the mathematical apparatus of the nonlinear input-output balance, which allows you to find the equilibrium point in the set of industry resources and prices. An analysis was also made of the macroeconomic response of the Kazakh economy to the pandemic.

Keywords: inverse problems, optimization methods, forecasting.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A55, 65K05

References

[1] Krivorotko O.I., Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Sosnovskaya M.I., Neverov A.V. Simulation of COVID-19 propagation scenarios in the Republic of Kazakhstan based on regularization of agent model, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **17**:1 (2023), 40–66.

[2] Boranbayev A., Obrosova N.,Shananin A. Nonlinear Input-Output Balance And Young Duality: Analysis Of Covid-19 Macroeconomic Impact On Kazakhstan, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **16** (2019), 144–160.

Time-optimal problem for parabolic equation

F.N. DEKHKONOV[1,a],

[1] *Namangan State University, Namangan, Uzbekistan*
E-mail: [a]f.n.dehqonov@mail.ru

Consider the following mathematical model of the heat conduction process along the domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\quad t > 0\}$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$u_x(0,t) \ = \ -\mu(t), \quad u_x(l,t) \ = \ 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

and initial condition

$$u(x,0) \ = \ 0, \quad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Let $M > 0$ be some given constant. We say that the function $\mu(t)$ is an *admissible control* if this function is differentiable on the half-line $t \ge 0$ and satisfies the following constraints

$$\mu(0) = 0, \quad |\mu(t)| \le M.$$

We consider the *weight function* $\rho(x) \in W_2^2[0,l]$ satisfying the conditions

$$\rho'(x) \le 0, \quad \rho''(x) \ge 0, \quad \frac{1}{l}\int\limits_0^l \rho(x)\,dx = 1.$$

Set

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \, \cos\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in (0,l),$$

where

$$\rho_k = \frac{2}{l}\int_0^l \rho(x)\,\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad k = 1, 2, ...$$

In the present work we consider the following problem.

Problem A. *For a given constant $\theta > 0$ problem A consists in looking for the minimal value of $T > 0$ so that for $t > 0$ the solution $u(x,t)$ of the initial-boundary value problem (1)-(3) with some admissible control $\mu(t)$ exists and for $t \geq T$ satisfies the equality*

$$\int_0^l \rho(x)\,u(x,t)\,dx \;=\; \theta, \quad t \geq T.$$

More recent results concerned with this problem were established in [1], [2], [3]. Detailed information on the problems of optimal control for distributed parameter systems is given in the monograph [4].

Theorem 1. *Let*

$$0 < \theta < \frac{\rho_1\, l^2\, M}{\pi^2}.$$

Set

$$T_0 = -\frac{l^2}{\pi^2}\ln\biggl(1 - \frac{\theta\,\pi^2}{\rho_1\, l^2\, M}\biggr).$$

Then a solution T_{min} of the Problem A exists and the estimate $T_{min} \leq T_0$ is valid.

Keywords: Heat conduction equation, admissible control, initial-boundary value problem, integral equation.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K15

References

[1] Albeverio S., Alimov Sh.A. On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process, *Applied Mathematics and Optimization*, **57**:1 (2008), 58–68.

[2] Alimov Sh.A., Dekhkonov F.N. On the time-optimal control of the heat exchange process, *Uzbek Mathematical Journal*, **2** (2019), 4–17.

[3] Altmüller A., Grüne L. Distributed and boundary model predictive control for the heat equation, *Technical report, University of Bayreuth, Department of Mathematics*,(2012).

[4] Fursikov A.V. Optimal Control of Distributed Systems, *Theory and Applications*, Translations of Math. Monographs, **187**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, (2000).

[5] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, (1966).

Inverse multiple particles problem and blurring

Vladimir MITYUSHEV[1,2,a], Zhanat ZHUNUSSOVA[2,3,b] Karlygash DOSMAGULOVA[2,3,c]

[1] *Faculty of Computer Science and Telecommunications, Cracow University of Technology, Kraków, Poland*

[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[3] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan E-mail:*

[a]*wladimir.mitiuszew@pk.edu.pl*, [b]*zhzhkh@mail.ru* [c]*karlygash.dosmagulova@gmail.com*

The Prony method of scattering data analysis is extended to an inverse problem for a fiber-reinforced composite. Unidirectional fibers of shear moduli $\mu_k (k = 1, 2, ..., n)$ are embedded in the host of shear modulus μ. We consider antiplane strain of the fibrous composite when a section perpendicular to the axis of fibers is the unit disk which contains n non-overlapping inclusions. The contact between the components is supposed to be perfect. The main attention is paid to rigid inclusions when $\mu_k \gg \mu$. Let the longitudinal displacement u be given on the unit circle. Other components of displacement vanish in the unit disk in the antiplane statement.

The considered problem is written in terms of complex potentials and solved by a method of functional equations. In particular, the out-of-plane traction proportional to the normal derivative $\frac{\partial u}{\partial n}$ is found on the unit circle. This yields a constructive method to symbolic
approximation of the Dirichlet-to-Neumann operator for an arbitrary multiply
connected circular domain. The method is applied to the inverse problem for non-overlapping equal disks whose centers $a_k (k = 1, 2, ..., n)$ have to be determined [1,2].

Let the displacement u and the traction $\mu\frac{\partial u}{\partial n}$ be given on the outer unit circle. We construct explicitly a polynomial $P_n(z)$ whose complex roots coincide with the centers of inclusions a_k. This result can be considered as solution to the special Prony problem. The considered examples demonstrate the effect of blurring for large n when a part of disks adjoin the boundary is properly determined. The location of the deeper disks is blurry and can be determined by the same equation $P_n(z) = 0$, but solved with higher accuracy.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP08856381 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: inverse problem, Dirichlet-to-Neumann operator, inclusion, Prony problem, blurring.

2010 Mathematics Subject Classification: 74Q15, 52C15

References

[1] Beck J.V., Blackwell B. and Charles J.R. *Inverse Heat Conduction*, 1st ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, (1985).

[2] Alifanov O.M., Artyukhin E.A. and Rumyantsev S.V. *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems*, Begell House Inc., New York, (1995).

On Fisher-KPP equation with the fractional p-Laplacian

K. JABBARKHANOV

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan
E-mail: khumoyun.jabbarkhanov@nu.edu.kz

In this conference, we show that if the initial date is between zero and one, then the global solution of a Dirichlet Fisher-KPP equation with the fractional p-Laplacian is also between zero and one. Moreover, a large time behavior of the global solution is provided. In addition, some blow-up results are given.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09057887). No new data was collected or generated during the course of research.

Keywords: fractional Fisher-KPP equation, fractional Poincaré inequality, fractional p-Laplacian, blow-up solution.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 35Q99; Secondary 35B44, 35A01, 35R11.

Diffraction problems on a triangular lattice

David KAPANADZE[1,a], Ekaterina PESETSKAYA[1,b]

[1] *A. Razmadze Mathematical Institute, TSU, Tbilisi, Georgia*
E-mail: [a]david.kapanadze@gmail.com, [b]kate.pesetskaya@gmail.com

Motivated by applications of recent interest related to analog circuits, crystalline materials, and metamaterials, we investigate thin-slit diffraction problems on the semi-infinite triangular lattice, cf. [1]. Analyzing regular processes when waves at the level of the microstructural scales are neglected, it is possible to consider the continuum limit of corresponding equations. However, industrial and scientific interest is growing in the study of nano- and microstructure of modern materials and composites. One of the effective ways to investigate microstructural processes in the materials is to consider their discrete structures. Thus, for the triangular lattice, we study Dirichlet problems for the two-dimensional discrete Helmholtz equation in a half-plane. Using the notion of the radiating solution, we prove the existence and uniqueness of a solution for the real wave number $k \in (0,3)\backslash\{2\sqrt{2}\}$ without passing to the complex wave number. Besides, an exact representation formula for the solution is derived. We also developed a numerical calculation method and demonstrate by example the effectiveness of our approach related to the propagation of wavefronts in metamaterials through two small openings.

Funding: This work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (SRNSFG) [FR-21-301].

Keywords: discrete Helmholtz equation, Dirichlet boundary value problem, half-plane diffraction, metamaterials, triangular lattice model.

2010 Mathematics Subject Classification: 78A45, 35J05, 39A14, 39A60, 74S20

References

[1] Kapanadze D., Pesetsksya E. Half-plane diffraction problems on a triangular lattice, *J Eng Math*, **138**:5 (2023).

Traveling wave speed and profile of a "go or growing" glioblastoma multiform model

Aisha TURSYNKOZHA[1,a], Ardak KASHKYNBAYEV[1,b], Bibinur SHUPEYEVA[1,c], Erica M. RUTTER[2,d], Yang KUANG[3,e]

[1] *Department of Mathematics, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*
[2] *Department of Applied Mathematics, University of California, Merced, CA, USA*
[3] *School of Mathematical and Statistical Sciences, Arizona State University, Tempe, AZ, USA*
E-mail: [a]*aisha.tursynkozha@nu.edu.kz*, [b]*ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz*,
[c]*bibinur.shupeyeva@nu.edu.kz* [d]*erutter2@ucmerced.edu* [e]*kuang@asu.edu*

Glioblastoma multiforme (GBM) is a fast-growing and deadly brain tumor due to its ability to aggressively invade the nearby brain tissue. A host of mathematical models in the form of reaction-diffusion equations have been formulated and studied in order to assist clinical assessment of GBM growth and its treatment prediction. To better understand the speed of GBM growth and form, we propose a two population reaction-diffusion GBM model based on the 'go or grow' hypothesis. Our model is validated by in vitro data and assumes that tumor cells are more likely to leave and search for better locations when resources are more limited at their current positions. Our findings indicate that the tumor progresses slower than the simpler Fisher model, which is known to overestimate GBM progression. Moreover, we obtain accurate estimations of the traveling wave solution profiles under several plausible GBM cell switching scenarios by applying the approximation method introduced by Canosa.

Funding: This research is partially supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan Grant No AP08052345 and Nazarbayev University under Collaborative Research Program Grant No 11022021CRP1509.

Keywords: reaction-diffusion equation, glioblastoma multiforme (GBM), traveling wave solutions, traveling wave speed.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C07, 35K57, 35Q92, 92B05

References

[1] Tursynkozha, A., Kashkynbayev, A., Shupeyeva, B., Rutter, E.M., Kuang, Y, Traveling wave speed and profile of a "go or grow" glioblastoma multiforme model, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **118** (2023), 107008

Collocation heat polynomials method for solving inverse Stefan type problems

Samat KASSABEK[1,a], Narbek ORAZBEK[2,b]

[1] *Nazarbayev University, Department of Mathematics, Astana, Kazakhstan*
[2] *Suleyman Demirel University, Department of Mathematics, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*samat.kassabek@nu.edu.kz* [b]*narbekov.o@gmail.com*

The heat polynomials method (HPM) or polynomial Trefftz method [1] was first described in 1892 by Appell in the paper [2]. Later an idea was developed by Rosenbloom and Widder in the following works [3-5]. Further development of their idea has been continued in papers Futakiewicz [6], Grysa [7] and Kassabek [8]. The essence of this method is to construct an approximate solution to the problem in a form of linear combinations or series of heat polynomials that a priori satisfy a differential equation.

Let us consider the one-dimensional heat conduction problem with a free-moving boundary

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

The approximate solution which satisfies exactly this equation is assumed in the form of a linear combination of heat polynomials in the form

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{M} c_n v_n(x,t),$$

where

$$v_n(x,t) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{a^{2m} x^{n-2m} t^m}{m!(n-2m)!}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

The unknown coefficients c_n are determined by simultaneous minimization of the residuals which can be applied by different methods, e.g. the collocation method, the least squares method, or other methods.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09258948 "A free boundary problems in mathematical models of electrical contact phenomena" of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: inverse Stefan problems, approximate solution, heat polynomials method, moving boundary.

2010 Mathematics Subject Classification: 80A22, 80A23, 80M30, 35C11.

References

[1] E. Trefftz Ein Gegensruek zum Ritz'schen Verfahren, *in: Proccedings 2nd International Congress of Apllied Mechanics (Zurich)*, (1926), 131–137.

[2] P. Appell Sur l'équation $\partial^2 z/\partial x^2 - \partial z/\partial y = 0$ et la théorie de la chaleur, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **8** (1892), 187–216.

[3] P. C. Rosenbloom and D.V. Widder Expansions in terms of heat polynomials and associated functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **92** (1959), 220–336.

[4] D.V. Widder Series expansions of solutions of the heat equation inn dimensions, *Ann Mat Pura Appl Ser*, **4**:55 (1961), 389–409.

[5] D.V. Widder Analytic Solutions of the Heat Equation, *Duke Math. J.*, **29** (1962), 497–503.

[6] S. Futakiewicz L. Hozejowski Heat polynomials method in solving the direct and inverse heat conduction problems in a cylindrical system of coordinate, *Transactions on Engineering Sciences vol.*, **20** (1998), 1743–3533.

[7] K. Grysa Heat polynomials and their applications, *A Archives of Thermodynamics*, **2**:24 (2003), 107–124.

[8] S. A. Kassabek, S. N. Kharin, D. Suragan A heat polynomials method for inverse cylindrical one-phase Stefan problems, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **29** (2021), 3423–3450.

Time dependent inverse source problem for an integro-differential pseudoparabolic equation

Kh. KHOMPYSH[1,a], M. MUKHAMBETKALIYEV[1,b]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]khompysh.khonatbek@gmail.com, [b]mukhambetkaliyevmurat@gmail.com

ABSTRACT
In this work we study the following time dependent inverse source problem for the following one dimensional pseudoparabolic equation:

$$u_t - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxt} - \int_0^t K(t-\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau = f(t)g(x,t) + h(x,t), \text{in } (0,l)\times(0,T), \tag{1}$$

supplemented by the initial condition

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in (0,l) \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \in [0,T] \tag{3}$$

and the integral overdetermination condition

$$\int_0^l (u(x,t)\omega(x) + \beta u_x(x,t)\omega_x(x))\,dx = \varphi(t),\ t \in [0,T], \tag{4}$$

where $0 < l, T < \infty$. The inverse problem consists of finding the the functions $u(x,t)$ and $f(t)$ from (1)-(4) by the given positive constants α, β, and the given functions $g(x,t), h(x,t), K(t), u_0(x), w(x), \varphi(t)$.

In this work, we investigate the global in time existence and uniqueness of strong solution of the inverse problem (1)-(4).

Funding: This work was supported by the Grant no.AP19676624.

Keywords: Inverse problem; Pseudo-parabolic equation with memory.

Travelling breaking waves

Nurbol KOSHKARBAYEV[1,2]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: nurbol-koshkarbaev@mail.ru

Abstract. We study a mathematical model (34) of coastal waves in the shallow water approximation. The model consists of the following equation which is considered in [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial hU}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial hU}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(hU^2 + \dfrac{gh^2}{2} + h^3\varphi + \dfrac{h^2\ddot{h}}{3}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{4}{Re}h^3\sqrt{\varphi}\dfrac{\partial U}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial h\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial hU\varphi}{\partial x} = \dfrac{8h\sqrt{\varphi}}{Re}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - C_r h\varphi^{\frac{3}{2}}. \end{cases} \tag{34}$$

The model contains two empirical parameters. The first one controls turbulent dissipation. The second one is responsible for the eddy viscosity and is determined by the turbulent Reynolds number. We study here travelling waves solutions to this model. The existence of an analytical and numerical solution of the problem in the form of a traveling wave is shown. The singular points of the system are described. It is shown that there exists a critical value of the Reylnols number corresponding to the transition from a monotonic profile to an oscillatory one. The paper is organized as follows: Firstly, we present the governing system of ordinary differential equations (ODE) for travelling waves. Secondly, the Lyapunov function for the corresponding ODE system is derived, and finally, the behavior of the solution of the ODE system is discussed.

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09259578).

Keywords: shallow-water equation, Lyapunov function, Reynolds number, travelling wave solution.

2010 Mathematics Subject Classification:35C07, 35L05

References

[1] Chesnokov, A. A.,Liapidevskii V. Yu. *Mixing and nonlinear internal waves in a shallow flow of a three-layer stratified fluid*, Physics of Fluids 34 (7), 075104.

[2] Cienfuegos R., Barthelemy E., Bonneton P. *Wave-breaking model for Boussinesq-type equations including roller effects in the mass conservation equation, J. Waterway PortCoast. Ocean Eng. 136, 10–26, 2010.*

[3] Kazakova M., Richard G. L., *A new model of shoaling and breaking waves: One-dimensional solitary wave on a mild sloping beach, Fluid Mechanics , Volume 862 , 10 March 2019 , pp. 552–591.*

A diffusive Leslie-Gower prey-predator system with a free boundary

Mehrojiddin RASULOV

[1] *Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*
[2] *TIIAME National Research University, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]*rasulovms@bk.ru,*

A variety of models are used to describe the predator-prey interactions. The dynamical relationship between a predator and a prey has long been among the dominant topics in mathematical ecology due to its universal existence and importance ([1]-[3]).

In this article, we study the following a Leslie-Gower prey-predator model via a free boundary:

$$k_1(u)u_t - u_{xx} - m_1 u_x = u\,(1-u) - auv, \quad (t,x)\in D, \tag{1}$$

$$k_2(v)v_t - dv_{xx} - m_2 v_x = b\left(1 - \frac{v}{u+c}\right), \quad (t,x)\in D, \tag{2}$$

$$u\,(0,x) = u_0\,(x)\,, \quad 0 \le x \le s\,(0) \equiv s_0, \tag{3}$$

$$v\,(0,x) = v_0\,(x)\,, \quad 0 \le x \le s_0, \tag{4}$$

$$u_x\,(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$u\,(t,s\,(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$v_x\,(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$v\,(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$s'\,(t) = -\mu\,(u_x\,(t,s\,(t)) + \rho v_x\,(t,s\,(t)))\,, \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

where $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$; $u\,(t,x)$, $v\,(t,x)$ are population densities at time t at point x; $s\,(t)$ is a free boundary, which represent propagation fronts.

Assume that the data of the problem satisfy the following conditions:

(i) k_{i0}, d, m_i, a, b, c, μ, ρ are positive constants, $i = 1,2$;

(ii) $u_0 \in C^2\,([0,s_0])$, $u_0' = u_0(s_0) = 0$, $u_0 > 0$ in $[0,s_0)$ and $\lim\limits_{x\to s_0} \frac{u_0(x)}{s_0 - x} = 0$,

$v_0 \in C^2\,([0,s_0])$, $v_0' = v_0(s_0) = 0$, $v_0 > 0$ in $[0,s_0)$ and $\lim\limits_{x\to s_0} \frac{v_0(x)}{s_0 - x} = 0$;

(iii) $k_i\,(\xi) \ge k_{i0}$ for any $\xi > 0$,

(iv) $ac + a < 1$,

Problem (1)-(9) was studied in [3] in the case $m_i = 0$ and $k_i = 1$, $i = 1, 2$.

In this article, first we establish two-sided bounds for $u(t, x)$, $v(t, x)$ and $s'(t)$, and then a Hölder norm bounds for $u(t, x)$, $v(t, x)$. On the basic of a priori estimates, the existence and uniqueness of the solution is proved. And we study the asymptotic behavior of two species evolving in a domain with a free boundary.

Theorem 1. *Let $(u, v, s(t))$ be a solution of (1)-(9). Then there hold estimates:*

$$0 < u\,(t, x) \le M_1, \quad (t, x) \in \overline{D},$$

$$0 < v\,(t, x) \le M_2, \quad (t, x) \in \overline{D},$$

$$0 < s'(t) \le M_3, \qquad 0 \le t \le T.$$

The following theorem shows that $\lim\limits_{t\to\infty} s(t) = s_\infty = +\infty$ is sufficient for a successful spreading:

Theorem 2. *Suppose that $(u, v, s(t))$ is the solution of (1)-(9). If $s_\infty = +\infty$, then we have*

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t, x)\|_{C([0,s(t)])} = M_1, \quad \lim_{t\to\infty} \|v(t, x)\|_{C([0,s(t)])} = M_2.$$

The following theorem shows that the finiteness of s_∞ leads both species, u and v, to vanish.

Theorem 3. *Suppose that $(u, v, s(t))$ is the solution of (1)-(9). If $s_\infty < +\infty$, then we have*

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t, x)\|_{C([0,s(t)])} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \|v(t, x)\|_{C([0,s(t)])} = 0.$$

Keywords: prey-predator system, reaction-diffusion equation, parabolic equation, aprior bounds, existence and uniqueness, asymptotic behavior.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35R35, 35K51.

References

[1] Cheng H., Fang Q., Xia Y. A Free Boundary Problem for Some Modified Predator-Prey Model in a Higher Dimensional Environment, *Appl Math.* **67**, (2022) 615–632.

[2] Shiwen N., Hongmei Ch., Rong Y. A free boundary problem of some modified Leslie-Gower predator-prey model with nonlocal diffusion term. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, **27 (4)**, (2022) 2189–2219.

[3] Liu Y., Guo Zh., El Smaily M., Wang L. A Leslie-Gower predator-prey model with a free boundary. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, **12 (7)**, (2019) 2062–2083.

Предметный указатель

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки

Алматы, 5–7 апреля 2023 года

Тезисы докладов

Подписано в печать 01.04.2023г.
Формат 60x84 1/16 Бумага офсетная
Тираж 150 экз.

Отпечатано в типографии ИМММ МОН РК
050010, г. Алматы, ул Пушкина, 125