
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek


# PROCEEDINGS

## OF SCIENTIFIC CONFERENCE

## "ACTUAL PROBLEMS OF STOCHASTIC ANALYSIS"

**dedicated to the 80th anniversary of the birth of academician Sh.K.FORMANOV**

**February 20-21, 2021**
**Tashkent**

ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети

АКАДЕМИК Ш.Қ.ФАРМОНОВ ТАВАЛЛУДИНИНГ
80 ЙИЛЛИГИГА БАҒИШЛАНГАН

# «СТОХАСТИК ТАҲЛИЛНИНГ ДОЛЗАРБ МУАММОЛАРИ»

МАВЗУСИДАГИ ИЛМИЙ КОНФЕРЕНЦИЯ

# МАТЕРИАЛЛАРИ

20-21 февраль 2021 йил, Тошкент.

**(I ҚИСМ)**

Тошкент - 2021

# АКАДЕМИК Ш.Қ.ФАРМОНОВ ТАВАЛЛУДИНИНГ 80 ЙИЛЛИГИГА БАҒИШЛАНГАН **«СТОХАСТИК ТАҲЛИЛНИНГ ДОЛЗАРБ МУАММОЛАРИ»** МАВЗУСИДАГИ ИЛМИЙ КОНФЕРЕНЦИЯ

**Ташкилий қўмита:**
Академик Аюпов Ш.А. *раис*
Проф. Маджидов И.У. *ҳамраис*
Проф. Хусанбоев Я.М. *раис ўринбосари*
Проф. Шарипов О.Ш. *раис ўринбосари*
Проф. Раимова Г.М. *масъул котиб*
Академик Аъзамов А.
Академик Алимов Ш.А.
Академик Садуллаев А.С.
Академик Хожиев Дж.
Проф. Арипов М.
Проф. Марахимов А.Р.
Мухамедханова Р.И.
Проф.Розиқов Ў.
Проф.Ботиров Ғ.
Проф.Зикиров О.
Проф.Бакоев М.Т.
Проф.Джалилов А.А.
Проф.Имомов А.
Проф.Мирахмедов Ш.А.
Проф.Хаджибаев В.Р.
Проф.Шарахметов Ш.

**Дастурий қўмита:**
Раимова Г.М. (раис)
Шарипов О.Ш.
Азимов Ж.Б.
Бегматов А.
Мухамедов А.
Шарахметов Ш.
Исматуллаев Ш.А.
Хамдамов И.

**Секретариат:**

Азимов Ж.

Мухамедов А.

Алиев А. Жураев Ш.

Кушмурадов А.

Кобилов У.

Кудратов Х.

Сирожитдинов А.

Тошкулов Х.

Хусаинова Б.

Шарипов С.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

# PROCEEDINGS

## OF SCIENTIFIC CONFERENCE

### «ACTUAL PROBLEMS OF STOCHASTIC ANALYSIS»

dedicated to the 80th anniversary of the birth of academician Sh.K.FORMANOV.

February 20-21, 2021, Tashkent.

**(PATH I)**

Tashkent - 2021

Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз
Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

# МАТЕРИАЛЫ

## НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

## **«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»,**

## ПОСВЯЩЕННОЙ 80 ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА Ш.К.ФОРМАНОВА.

20-21 февраля 2021 г., Ташкент.

**(ЧАСТЬ I)**

Ташкент - 2021

# Content/Мундарижа/Содержание

# Академик Ш.Қ.Фармонов илмий ва педагогик фаолиятининг қисқача очерки

Шокир Қосимович Фармонов - атоқли математик олим, физика-математика фанлари доктори, профессор, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси академиги, Абу Райхон Беруний номидаги Ўзбекистон Давлат Мукофоти лауреати.

Ш.Қ.Фармонов - Ўзбекистонда математиканинг асосий йўналишларидан бири бўлган эҳтимолликлар назарияси ва математик статистика соҳасида дунё миқёсида тан олинган мутахассис. Академиклар В.И.Романовский (1879-1954), Т.А.Саримсақов (1915-1995), С.Ҳ.Сирожиддинов (1920-1988) ларнинг сайи ҳаракатлари билан Ўзбекистонда математика соҳасида етакчи илмий мактаб барпо этилди. Бу мактаб бағрида математиканинг турли илмий йўналишлари, шу жумладан, замонавий эҳтимолликлар назарияси ва математик статистика ривожига бебаҳо ҳисса қўшган олимларнинг бутун бир гуруҳи тарбия топди. Айниқса, академик С.Ҳ.Сирожиддиновнинг замонавий математиканинг янги йўналишларини ривожлантиришда, ёш талантли математикларни танлаш ва тарбиялаш, Ўзбекистонда математик таълимни такомиллаштириш ва ривожлантиришдаги катта хизматларини алоҳида таъкидлаш жоиз. Ш.Қ.Фармонов академик С.Ҳ.Сирожиддиновнинг шогирдларидан бири бўлиб, ҳозирда устози томонидан ташкил этилган эҳтимолликлар назарияси ва математик статистика (ЭН ва МС) илмий мактабининг раҳбаридир.

Ш.Қ.Фармонов 1941 йил 20 февралда Фарғона вилоятининг Данғара қишлоғида туғилди. 1958 йилда Фарғона Давлат Педагогика Институти (ҳозирги Фарғона Давлат Университети)нинг физика-математика факультетига ўқишга кирди. Иккинчи курс охирида Ш.Қ.Фармонов ўзининг дастлабки илмий ишини дифференциал тенгламалар бўйича профессор Ж.Х.Каримов (1909-1993) раҳбарлигида бажарди. 1961 йилнинг бошида Фарғона Давлат Педагогика Институтига академик С.Ҳ.Сирожиддинов ташриф буюрди ва физика-математика факультетининг фаол талабалари билан суҳбат ўтказди. Бу учрашувда академикка талаба Ш.Қ.Фармоновнинг математик анализнинг қўшимча боблари бўйича берилган саволларга жавоблари манзур бўлди. Бу суҳбатдан кейин у С.Ҳ.Сирожиддинов тавсияси ва кўмаги билан Тошкент Давлат Университети (ҳозирги Мирзо Улуғбек номли Ўзбекистон Миллий Университети) механика-математика факультетининг III курсига ўтказилди. 1963 йилнинг апрель ойида V-курс талабаси Ш.Қ.Фармонов Бишкек шаҳрида Бутуниттифоқ талабалар конференциясида қатнашди ва унинг "Локал лимит теоремада қолдиқ ҳадининг баҳолари"номли иши I даражали мукофотга сазовор бўлди.

Ш.Қ.Фармоновга, 1963 йилда ТошДУ ни битиргач, Ўзбекистон Фанлар Академиясининг ҳозирги Математика ва информацион технологиялар институтига (МИТИ) йўлланма берилди. Шу даврдан бошлаб унинг илмий ва педагогик фаолияти шу институт ва Мирзо Улуғбек номли ЎзМУ билан чамбарчас боғлиқ бўлиб келмоқда. Ҳозирги вақтда у ЎзМУ профессори ва ЎзР ФА Математика ва информацион технологиялар институти ЭН ва МС бўлими мудиридир.

Ш.Қ.Фармоновнинг асосий илмий изланишлари замонавий ЭН ва МС нинг қуйидаги йўналишларига бағишланган:

1) Боғлиқсиз ва кучсиз боғланган тасодифий миқдорлар ва векторларни йиғиндисини асимптотик тақсимоти назарияси;

2) Тармоқланувчи тасодифий жараёнлар назарияси;

3) Тайёр маҳсулотни статистик қабул назоратининг математик усуллари;

4) Тасодифий жойлашувлар назарияси (Дискрет математиканинг эҳтимоллик усуллари).

XX асрнинг 30-40 йилларида етук математиклар П.Леви, А.Н.Колмогоров, А.Я.Хинчин ва Б.В.Гнеденколар ҳаракатлари эвазига боғлиқсиз тасодифий миқдорлар (т.м.) йиғиндиси тақсимоти назарияси яратилди. Бу назарияни боғлиқ т.м. учун умумлаштириш қийин математик муаммо эди. Ш.Қ.Фармоновнинг илк изланишлари объекти ҳолатлар тўплами ихтиёрий (абстракт) бўлган бир жинсли Марков занжирига боғланган т.м. йиғиндиларининг лимит тақсимотларини ўрганишдан иборат бўлди. У марказий лимит теорема ўринли бўлишининг содда етарли шартларини топди. Унинг яна бир салмоқли натижаси текис эргодиклик (текис қоришмалилик) шартини қаноатлантирувчи Марков занжири учун Берри-Эссееннинг классик тенгсизлигининг аналогини исботлашдан иборат. Шуни таъкидлаш лозимки, бу натижаларнинг олиниши Сирожиддинов-Нагаев усулини такомиллаштириш билан боғлиқ. Бу такомиллаштириш Ш.Қ.Фармонов томонидан характеристик функцияларнинг аналитик усули ва чегараланган функцияларнинг Банах фазосида аниқланган чизиқли операторлар спектрал назариясини бирлаштириш натижасида ишлаб чиқилди. Кейинчалик у томонидан, биринчи бўлиб, ҳолатлари ихтиёрий тўпламдан иборат бир жинсли Марков занжирлари учун Донскер-Прохоровнинг инвариантлик принципи ва Штрассен формасидаги (функционал лимит теорема) такрорий логарифм қонуни ўринлилиги исботланди. Мазкур натижалар мутахассислар эътирофига сазовор бўлди ва уларни ўз ичига олган мақолалар А.Н.Колмагоров ва Ю.В.Прохоров каби академиклар томонидан нашрга тавсия этилди. Академик Ш.Қ.Фармонов 1973 йилда "Эҳтимолликлар назариясининг лимит теоремалари ва уларнинг тадбиқлари"туркумидаги ишлари учун Абу Райхон Беруний номли Ўзбекистон Давлат Мукофотига сазовор бўлди (С.Ҳ.Сирожиддинов, Т.А.Азларов, М.Маматовлар билан биргаликда).

Академик Ш.Қ.Фармоновнинг илмий изланишларида "Тармоқланувчи тасодифий жараёнлар"алоҳида ўрин тутади. Унинг ишларида бундай жараёнларнинг нисбатан мураккаб бўлган модели, яъни миграцион компоненталарга эга бўлган модели ўрганилган. Оддий тасодифий жараёнлардан, яъни эволюциясини ҳосил қилиш фунциясининг аналитик усули ёрдамида ўрганиш муаммо бўлмаган жараёнлардан фарқли ўлароқ, бундай модел "боғлиқсиз тармоқланиш"хоссасига эга бўлмайди. Шунинг учун ушбу жараёнлар ҳолатларининг тақсимотларини асимптотик таҳлил қилиш изланишларнинг янги усулларини қўллашни талаб этди. Ш.Қ.Фармонов ўзи томонидан классик "моментлар усули"нинг такомиллаштирилган вариантидан ва саноқли Марков занжирларининг умумий назариясидан фойдаланиб, ҳолатга боғлиқ миграцияли тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг етарли даражада кенг синфи учун лимит хоссаларини аниқлади.

Тайёр маҳсулотнинг статистик қабул назорати (СҚН) билан боғлиқ масалалар амалий математик статистиканинг долзарб йўналишларидан бири ҳисобланади. СҚНнинг математик усуллари А.Н.Колмогоров, С.Ҳ.Сирожиддинов ва голландиялик математиклар Ф.Вандер-варден, А.Хальдлар томонидан ишлаб чиқилган (ўз вақтида С.Ҳ.Сирожиддинов Халқаро статистика институти (Голландия) аъзоси бўлган ва биринчилар қаторида бу институт қошида ташкил этилган Бернулли Жамиятининг аъзоси бўлган). Ш.Қ.Фармонов ва унинг шогирдлари ишларида Risk функциясини минималлаштириш маъносида оптималлик хоссаларига эга бўлган СҚН режаларининг етарлича кенг синфининг тузилиши ўрганилди. Бунда, бошқа мутахассислардан фарқли ўлароқ, мос Risk функциялари уларга кирувчи иқтисодий параметрга нисбатан чизиқли бўлмаган ҳол ўрганилди. Бу изланишларда замонавий боғлиқсиз т.м. қўшиш назариясининг усуллари ва натижалари кенг қўлланилди (марказий лимит теоремада яқинлашиш тезлигининг баҳолари, боғлиқсиз т.м. йиғиндилари учун асимптотик ёйилмалар).

"Тасодифий жойлашувлар"(Дискрет математиканинг эҳтимоллик усуллари) XX асрнинг 60-70 йилларида замонавий ЭН ва МСнинг алоҳида йўналиши сифатида шаклланди.Бу йўналиш масалалари ва усуллари мумкин бўлган натижалари дискрет тўпламли турли стохастик моделларда пайдо бўладиган тасодифий жараёнларни талқин этишда муҳим аҳамиятга эга. Ш.Қ.Фармонов ва унинг шогирдлари ишларида мос "тасодифий жойлашувлар"чекли ёки саноқли полиномиал схемани ташкил этган ҳолда, "бўш қутилар"классик статистик критерийси қўлланилишини асослаш билан боғлиқ муаммолар ўрганилди. Бунда дискрет боғлиқ т.м. қўшиш назариясига қарашли "шартли локал лимит теоремалар"дан унумли фойдаланилди. Ушбу йўналиш бўйича олиб борилган изланишлар натижалари ва усуллари дискрет математиканинг эҳтимоллик усуллари бўйича Петрозаводскда ўтказиладиган анъанавий конференцияларда маъруза қилинди (1982, 1996, 2004, 2008 йиллар).

XX аср охири ва XXI аср бошларига келиб Ш.Қ.Фармоновнинг изланишлари "ноклассик лимит теоремалар"билан боғлиқдир. Бу теоремалар "классик"теоремалардан боғлиқсиз тасодифий миқдорларни қўшиш назариясида муҳим роль ўйнайдиган "йиғиндиларнинг текис чексиз кичиклик шарти"ни қатнашмаслиги билан фарқ қилади. Хусусан, Линдеберг-Феллер марказий лимит теоремасини умумлаштирувчи, ноклассик варианти исботланди. Ушбу натижани исботлаш жараёнида Ш.Қ.Фармонов яхши маълум бўлган Стейн усулининг янги такомиллашган вариантини таклиф этди, бу усул ёрдамида кучсиз боғланган т.м. йиғиндиларининг тақсимоти ўрганилди.

Ўз илмий изланишлари натижаларини Ш.Қ.Фармонов Россия, АҚШ, Япония, Украина, Литва, Венгрия, Польша, Малайзия, Монголия илмий марказларида ва Франция, Швеция, Сингапур ва бошқа давлатларда бўлиб ўтган халқаро конференцияларда маъруза қилди.

Ш.Қ.Фармонов унумли илмий фаолият билан биргаликда доимо илмий ва педагогик кадрлар тайёрлаш масаласи билан ҳам шуғулланиб келмоқда. Ҳозирги вақтга келиб у томонидан ўттиздан ортиқ фан номзодлари ва ўндан ортиқ фан докторлари тайёрланди. Миллий Университетдан ташқари у Республикамизнинг кўплаб олий ўқув юртларида, ўқитувчилар малакасини ошириш институтларида маърузалар ўқийди, шу билан бирга барча даражадаги мактаб математика олимпиадаларини ташкил этиш ва ўтказишда фаол иштирок этган. Академик Ш.Қ.Фармонов томонидан Республикамиз Олий таълим муассалари учун долзарб ва зарур бўлган, ўзбек тилидаги "Эҳтимолликлар назарияси"(2015), “Актуар математика” (2018), “Актуар математика” (тўлдирилган нашр, 2019) тайёрланган ва нашр этилган.

Сўнгги йилларда Ш.Қ.Фармонов Ўзбекистонда эҳтимолликлар назарияси ва математик статистика мактабини бошқариб келмоқда ва хориж давлатлари мутахассислари билан фаол ҳамкорлик олиб бормоқда. У кўплаб конференциялар ва форумларда иштирок этиб, янги ғоялар ва усулларни етказиб бермоқда, бу эса ўз навбатида Ўзбекистонда ушбу илмий йўналишнинг ривожланишини таъминлаб келмоқда.

Редакцион коллегия

# Краткий очерк научной и педагогической деятельности академика Ш.К.Форманова

Шакир Касимович Форманов - видный ученый математик, доктор- физико-математических наук, профессор, академик Академии Наук Республики Узбекистан, лауреат Государственной Премии Узбекистана имени Абу Райхана Беруни.

Ш.К.Форманов - известный, признанный специалист в области теории вероятностей и математической статистики, представляющей собой одно из главных направлений математики в Узбекистане. Благодаря усилиям незабвенных ученых-академиков В.И.Романовского (1879-1954), Т.А.Сарымсакова (1915-1995), С.Х.Сираждинова (1920-1988) в Узбекистане создана передовая математическая научная школа, в недрах которой воспитывалась целая плеяда ученых, внесших неоценимый вклад в развитие различных научных направлений математики и в том числе современной теории вероятностей и математической статистики. В особенности следует отметить большие заслуги академика С.Х.Сираждинова в развитии новых направлений современной математики, подборе и воспитании молодых математических дарований, а также в развитии и усовершенствовании математического образования в Узбекистане. Ш. К. Форманов является одним из учеников С.Х. Сираждинова, ставший в настоящее время руководителем научной школы по теории вероятностей и математической статистике (ТВ и МС), созданной его учителем.

Ш.К. Форманов родился 20 февраля 1941г. в селе Дангара одноименного тумана Ферганского вилоята. В 1958 году поступил на физико-математический факультет Ферганского Государственного педагогического Института (ныне Ферганский Государственный Университет). В конце второго курса Ш.К.Форманов выполнил первую научную работу по дифференциальным уравнениями под руководством профессора Ж.Х.Каримова (1909-1993).

В начале 1961г. Ферганский Государственный Педагогический Институт посетил акад. С.Х.Сираждинов и провел собеседование с активными студентами физико-математического факультета. В этой встрече академику больше всех понравился студент Ш.К.Форманов, чьи ответы на вопросы по дополнительным главам математического анализа были достаточно полными. В последствии он по рекомендации и поддержке С.Х.Сираждинова был переведен студентом III-курса механико-математического факультета Ташкентского Государственного Университета (ныне НУУз им. Мирзо Улугбека). В апреле 1963г. студент V-курса Ш.К.Форманов участвовал во всесоюзной студенческой научной конференции в г.Бишкеке и его работа

"Оценки остаточного члена в локальной предельной теореме"получила I-ю Премию. Научная и педагогическая деятельность академика Ш.К.Форманова тесно связана с Институтом математики и информационных технологий АН РУз, куда он был направлен в 1963 году после окончания ТашГУ, и Национальным Университетом Узбекистана имени Мирзо Улугбека. В настоящее время он является профессором НУУз, а также заведует отделом теории вероятностей и математической статистики института математики и информационных технологий АН РУз.

Основные исследования Ш.К.Форманова относятся к следующим разделам современней ТВ и МС:

1) Теория суммирования независимых и слабо зависимых случайных величин и векторов;

2) Ветвящиеся случайные процессы;

3) Математические методы статистического приемочного контроля готовой продукции;

4) Случайные размещения (Вероятностные методы дискретной математики).

Благодаря усилиям выдающихся математиков П.Леви, А.Н.Колмогорова, А.Я.Хинчина и Б.В.Гнеденко на рубеже 30-40-х годов XX-века была создана классическая теория суммирования независимых случайных величин (с.в). Распространение результатов этой теории на зависимые с.в. представляло собой трудную математическую проблему. Объектом ранних исследований Ш.К.Форманова явилось изучение предельных распределений сумм с.в., связанных в однородную цепь Маркова с произвольным (абстрактным) множеством состояний. При этом были установлены простые достаточные условия, при выполнении которых имеет место центральная предельная теорема (ЦПТ). Другим существенным результатом является доказательство аналогов классического неравенства Берри-Эссеена, когда соответствующая цепь Маркова удовлетворяет условию равномерной эргодичности (равномерного перемешивания). Следует также заметить, что получение приведенных результатов связано с усовершенствованием метода Сираждинова-Нагаева, осуществленного Ш.К.Формановым путем сочетания аналитического метода характеристических функций со спектральной теорией линейных операторов, определенных в банаховых пространствах ограниченных функций. В последующем, им впервые доказана справедливость принципа инвариантности Донскера-Прохорова и закона повторного логарифма в форме Штрассена (функциональные предельные теоремы) для однородных цепей Маркова, состояния которых составляют произвольное множество. Отмеченные результаты получили признание специалистов и содержащие их статьи рекомендованы к опубликованию академиками А.Н.Колмогоровым и Ю.В.Прохоровым.

В 1973 году Ш. К. Форманов за цикл работ "Предельные теоремы теории вероятностей и их применения"удостоен Государственной Премии Узбекистана им.Беруни (совместно С.Х. Сираждиновым, Т.А. Азларовым, М.Маматовым).

В математическом творчестве Ш.К.Форманова особое место занимают "Ветвящиеся случайные процессы". В его работах исследованы более сложные модели таких процессов, учитывающие наличие миграционных компонент. В отличие от обычных ветвящихся процессов, эволюцию которых можно изучать аналитическим методом производящих функций, последние не обладают свойством "независимых ветвлений". Поэтому асимптотический анализ распределений состояний таких процессов предполагает привлечение новых методов исследования. Воспользовавшись модифицированным им вариантом классического "метода моментов"и привлечением общей теории счетных цепей Маркова, Ш.К.Формановым установлены предельные свойства достаточно широкого класса ветвящихся случайных процессов с миграцией, зависящей от состояний.

Задачи, связанные с проведением статистического приемочного контроля (СПК) готовой продукции относятся к одному из актуальных направлений прикладной математической статистики. Математические методы СПК разработаны А.Н.Колмогоровым, С.Х.Сираждиновым и голландскими математиками Ф.Вандерварденом, А.Хальдом (в свое время С.Х.Сираждинов состоял членом Международного Статистического Института (Голландия) и был одним из первых членов созданного при этом институте Общество Бернулли). В работах Ш.К. Форманова и его учеников исследованы структуры довольно широкого класса планов СПК, обладающие свойствами оптимальности в смысле минимизации рисковых функций. При этом, в отличие от других исследователей рассмотрены случаи, когда соответствующие рисковые функций являются нелинейными относительно входящих в них экономических параметров. В этих исследованиях широко применяются методы и результаты современной теории суммирования независимых с.в. (оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме, асимптотические разложения для распределений сумм независимых с.в.).

"Случайные размещения"(Вероятностные методы дискретной математики), как самостоятельное научное направление в современной ТВ и МС, сформировалось на рубеже 60-70-х годов XX века. Задачи и методы этого направления имеют существенное значение для описания случайных процессов, возникающих в различных стохастических моделях с дискретным множеством возможных элементарных исходов. В работах Ш.К.Форманова и его учеников изучены конкретные проблемы, связанные с обоснованием применения классического статистического критерия "пустых ящиков когда соответствующие "случайные размещения"образуют конечную или счетную полиномиальную схему. При этом очень плодотворно используются "условные локальные предельные теоремы относящиеся к теории суммирования дискретных зависимых с.в. Методы и результаты исследований, проведенных в данном направлении докладывались в традиционных "Петрозаводских конференциях"по вероятностным методам дискретной математики (1982, 1996, 2004, 2008 гг.).

На рубеже конца XX и начала XXI веков в исследованиях Ш.К.Форманова стали интенсивно развиваться "неклассические предельные теоремы которые отличаются от "классических"отсутствием в них "условия равномерной бесконечной малости слагаемых играющие существенную роль в теории суммирования независимых с.в. В частности, установлен неклассический вариант центральной предельной теоремы, обобщающий теорему Линдеберга-Феллера. В ходе доказательства этого результата автором предложен новый модифицированный вариант известного метода Стейна, при помощи которого исследуются распределения сумм слабозависимых с.в.

С результатами своих научных исследований Ш.К. Форманов выступал с докладами в научных центрах России, США, Японии, Украины, Литвы, Венгрии, Польши, Малайзии, Монголии и на международных конференциях проведенных во Франции, Швеции, Сингапуре и других странах.

Академика Ш.К.Форманова, наряду с плодотворной научной деятельностью, всегда заботила подготовка научных и педагогических кадров. К настоящему времени под его руководством подготовили диссертации и защитились более тридцати кандидатов наук и десяти докторов наук, среди которых есть и представители зарубежных стран, таких как Египет, Вьетнам и др. Кроме Национального Университета, он читает лекции во многих высших учебных заведениях Узбекистана, институтах усовершенствования учителей и факультетах повышения квалификации преподавателей ВУЗов. Академиком Ш.К.Формановым подготовлены и опубликованы на узбекском языке учебники “Теория вероятностей” (2015), “Актуарная математика” (2018), “Актуарная математика” (дополненное издание, 2019), которые являются востребованными и актуальными для ВУЗов нашей Республики.

В настоящее время он возглавляет школу по теории вероятностей и математической статистике в Узбекистане, активно сотрудничает со специалистами зарубежья, принимает участие во многих конференциях и других форумах, является носителем новых методов и тенденций, активно способствует развитию данного научного направления в Узбекистане.

Свой юбилей Шакир Касимович встречает в полном расцвете творческих сил. Желаем Шакиру Касимовичу Форманову крепкого здоровья и больших творческих успехов в его многогранной деятельности.

Редакционная коллегия

# Path. Бўлим. Раздел. 1

- **Random processes and their applications**
- **Mathematical statistics and its applied problems**
- **Limit theorems for sums of random variables**
- **Stochastic dynamical systems**

- **Тасодифий жараенлар ва уларнинг татбиқлари**
- **Математик статистика ва унинг тадбиқий масалалари**
- **Тасодифий миқдорлар йиғиндиси учун лимит теоремалар**
- **Стохастик динамик системалар**

- **Случайные процессы и их применения**
- **Математическая статистика и ее прикладные задачи**
- **Предельные теоремы для сумм случайных величин**
- **Стохастические динамические системы**

# Ergodic properties of the solution to a fractional stochastic heat equation, with an application to diffusion parameter estimation

**Diana Avetisian, Kostiantyn Ralchenko**

*Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine*

diana.avetisian2017@gmail.com, k.ralchenko@gmail.com

We investigate the following stochastic heat equation with a fractional Brownian noise $B_x^H$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta u\right)(t,x) = \sigma \dot{B}_x^H, t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0,x) = 0, x \in \mathbb{R}.$$

We prove the stationarity and ergodicity of its solution $u(t,x)$ as a function of the spatial variable $x$ by analyzing the behavior of the covariance function. Then these properties are applied for construction of a strongly consistent estimator for the unknown diffusion parameter $\sigma$. We extend the results of [2], where a similar problem for SPDE with white noise was studied.

Concerning the sampling scheme, we assume that the solution $u(t,x)$ is observed at equidistant spatial points for a fixed time. On one hand, in many practical applications the solution indeed is observed only at some discrete space points; e. g. temperature of a heated body, velocity of a turbulent flow, instantaneous forward rates where the space variable corresponds to time until maturity. On the other hand, it turns out that in order to estimate the diffusion coefficient, it is enough to observe the solution at one time instant. Such situation is quite common for statistical inference for SPDEs. However, it is possible to incorporate the additional information of observing the solution discretely in time by taking the (weighted) average of the estimators.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ be a complete probability space. Let $B^H = \left\{B_x^H, x \in \mathbb{R}\right\}$ be a two-sided fractional Brownian motion with Hurst index $H \in (0,1)$, that is, a centered Gaussian process, starting at 0, with the covariance function

$$\mathsf{E}\left[B_x^H B_y^H\right] = \frac{1}{2}\left(|x|^{2H} + |y|^{2H} - |x-y|^{2H}\right), x, y \in \mathbb{R}.$$

Following [1], we define a solution to SPDE (1) by

$$u(t,x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y)\, dB_y^H\, ds, \quad t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

where $G$ is Green's function of the heat equation:

$$G(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}, & \text{if } t > 0, \\ \delta_0(x), & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

Due to Hölder properties of fractional Brownian motion and Green's function, the integral with respect to fractional Brownian motion in (2) exists as the pathwise Riemann–Stieltjes integral. For almost all $\omega \in \Omega$, the integral $\int_a^b G(t-s, x-y)\, dB_y^H$ exists in the Riemann–Stieltjes sense, and

$$\int_a^b G(t-s, x-y) dB_y^H = G(t-s, x-b) B_b^H - G(t-s, x-a) B_a^H + \int_a^b B_y^H G_2'(t-s, x-y)\, dy,$$

where $G_2'$ denotes the partial derivative of $G$ with respect to the spatial variable:

$$G_2'(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} G(t,x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

It is known that for all $\gamma > H$, $\frac{B_x^H}{|x|^\gamma} \to 0$ a. s., as $|x| \to \infty$. Therefore, $G(t-s, x-y)\, B_y^H \to 0$, a. s., as $y \to \pm\infty$. Hence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s, x-y) dB_y^H = \int_{-\infty}^{+\infty} B_y^H G_2'(t-s, x-y)\, dy,$$

and the solution (2) can be written in the following form

$$u(t,x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_2'(t-s, x-y)\, B_y^H\, dy\, ds, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

This form of the solution does not contain a stochastic integral with respect to fractional Brownian motion, hence, it is more convenient for further calculations. We start with deriving explicit expressions for the variance and covariance of $u(t, \cdot)$.

**Proposition 1.** For fixed $t \in [0, T]$, $u(t, \cdot)$ is a stationary Gaussian process with covariance function given by

$$R(t,x) := \operatorname{cov}\big(u(t,0), u(t,x)\big) =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G_2'(t-s, -y) G_2'(t-r, x-v) |y-v|^{2H}\, dr\, ds\, dv\, dy.$$

The next result gives a simpler expression for the covariance function of the solution. This expression contains a single integral over $\mathbb{R}$ instead of double integral over $\mathbb{R}^2$.

**Proposition 2.** The covariance function $R(t,x)$ can be represented in the following form:

$$R(t,x) = \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t-s-r)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} w^{\langle 2H-1 \rangle} (w-x) \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\} dw\, ds\, dr,$$

where $w^{\langle \alpha \rangle} = |w|^\alpha \operatorname{sign} w$.

*Remark 1.* In the case $H > \frac{1}{2}$, it is possible to integrate by parts once more and rewrite the formula for $R(t,x)$ in the following form:

$$R(t,x) = \frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t-s-r)^{-\frac{1}{2}} \times \int_{\mathbb{R}} |w|^{2H-2} \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\} dw\, ds\, dr.$$

**Proposition 3.** The variance of $u(t,x)$ equals

$$\mathsf{E}\big[u(t,x)^2\big] = \frac{\sigma^2 2^{H+1} (2^H - 1) \Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right) t^{H+1}}{\sqrt{\pi}(H+1)}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

where $\Gamma$ denotes the gamma function.

*Remark 2.* In the case of standard Brownian motion ($H = \frac{1}{2}$), (3) becomes

$$\mathsf{E}\big[u(t,x)^2\big] = \frac{\sigma^2 4(2-\sqrt{2})t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}.$$

This agrees with the result of [2, Thm. 2.1].

Since $u(t,\cdot)$ is a stationary Gaussian process (by Proposition 1), it suffices to show that $R(t,x) \to 0$, as $x \to \infty$. The following proposition plays a crucial role in the proof of ergodicity.

**Proposition 4.** For $t > 0$ and $x > 0$, the covariance function $R(t,x)$ admits the following upper bound:

$$|R(t,x)| \le C_H \sigma^2 t^2 x^{2H-2},$$

where $C_H$ is a positive constant depending only on $H$.

Proposition 4 implies that the covariance function $R(t,x)$ of the solution $u(t,x)$ vanishes as $x \to +\infty$. Since $u(t,\cdot)$ is a stationary Gaussian process, this yields the following result.
Corollary 1. For a fixed $t > 0$, the random process $\{u(t,x), x \in \mathbb{R}\}$ is ergodic.

We apply results to the following statistical problem. Assume that for a fixed time $t > 0$ and a fixed step $\delta > 0$, the random field $u$ given by (2) is observed at the points $x_k = k\delta$, $k = 1,\dots,N$. Our aim is to construct a strongly consistent estimator for $\sigma$ based on these observations. The field $u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$ is strictly stationary and ergodic. Therefore, for any Borel function $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $\mathsf{E}|g(u(t,0))| < \infty$, thanks to ergodic theorem, it holds that

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(u(t,x_k)) \to \mathsf{E}\big[g(u(t,0))\big], \quad \text{a.s., as } N \to \infty. \tag{4}$$

This gives the idea to consider the following estimator for $\sigma^2$:

$$\hat\sigma_N^2 = \frac{1}{Nv^2}\sum_{k=1}^{N} u(t,x_k)^2,$$

where

$$v^2 = \frac{t^{H+1}2^{H+1}(2^H-1)\Gamma(H+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(H+1)},$$

see Proposition 3. Taking into account (4), we have the following theorem.

**Theorem 1.** $\hat\sigma_N^2$ is a strongly consistent estimator for the parameter $\sigma^2$ as $N \to \infty$.

*Remark 3.* The Hurst parameter $H \in (0,1)$ is assumed to be known. It can be estimated independently of $\sigma$ with the help of quadratic variations.

**Acknowledgment.** The work of the second author is supported by the National Research Fund of Ukraine under Grant 2020.02/0026.

## References

1. *Walsh J.* An introduction to stochastic partial differential equations. Springer, Berlin, 1984.

2. *Avetisian D. A., Shevchenko G. M.* Estimation of diffusion parameter for stochastic heat equation with white noise, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics, 2018, no 3, 9-16.

3. *Avetisian D., Ralchenko K.* Ergodic properties of the solution to a fractional stochastic heat equation, with an application to diffusion parameter estimation, Modern Stoch. Theory Appl. 7 (2020), no. 3, 339–356.

# On the integral square deviation between two kernel type estimators of the Bernoulli regression functions for the group data

**Babailua P., Nadaraya E.**

*Department of Mathematics, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi 0186, Georgia*

petre.babilua@tsu.ge, elizbar.nadaraya@tsu.ge

In the paper is established the limit distribution of an integral square deviation between two kernel type of Nadaraya–Watson estimators of the Bernoulli regression function for the group data.

Let a random variables $Y^{(i)}$, $i = 1, 2$ takes two values: 1 and 0 with probabilities $p_i$ ("success") and $1 - p_i$ ("failure"). Assume that the probability probability of "success" $p_i$ is the function of an independent variable $x \in [0, 1]$, i.e. $p_i = p_i(x) = \mathbf{P}\{Y^{(i)} = 1 \mid x\}$ [1,2,5]. Let $x_j$, $j = 1, \dots, n$, are the points points of division of the interval $[0, 1]$:

$$x_j = \frac{2j - 1}{2n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Let, further, $Y_{ij}^{(k)}$, $j = 1, \dots, m_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2$, be mutually independent Bernoulli random variables with $\mathbf{P}\{Y_{ij}^{(k)} = 1 \mid x_i\} = p_k(x_i)$, $\mathbf{P}\{Y_{ij}^{(k)} = 0 \mid x_i\} = 1 - p_k(x_i)$, $j = 1, \dots, m_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2$.

Based on the group samplings $Y_{ij}^{(k)}$, $j = 1, \dots, m_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2$ let introduce estimates of Nadaraya–Watson type for $p_1(x)$ and $p_2(x)$ Bernoulli regression functions:

$$\widehat{p}_{kn}(x) = p_{kn}(x) \cdot p_n^{-1}(x),$$

$$p_{kn}(x) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^{n} K\Big(\frac{x - x_i}{b_n}\Big) \overline{Y}_i^{(k)}, \quad \overline{Y}_i^{(k)} = \frac{1}{m_i^{(k)}} \sum_{j=1}^{m_i^{(k)}} Y_{ij}^{(k)},$$

$$p_n(x) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^{n} K\Big(\frac{x - x_i}{b_n}\Big), \quad k = 1, 2,$$

where $K(x)$ is some distribution density that satisfies the requirements formulated below, and $b_n \to 0$ is a sequence of positive integers, and $\widehat{p}_{kn}(x)$ is kernel estimate of the regression function (see [3,4,6]).

Assume that the kernel $K(x) \geq 0$ is chosen such that it is a function with finite variation and satisfies the conditions: $K(x) = K(-x)$, $K(x) = 0$ for $|x| \geq \tau > 0$, $\int K(x)\,dx = 1$. We denote the class of such functions by $H(\tau)$.

For comparison estimates $\widehat{p}_{1n}(x)$ and $\widehat{p}_{2n}(x)$ let introduce the statistic

$$U_n = \frac{1}{2}\, nb_n \int\limits_{\Omega_n} \left[\widetilde{p}_{1n}(x) - \widetilde{p}_{2n}(x)\right]^2 dx,$$

$$\widetilde{p}_{in}(x) = p_{in}(x) - \mathbf{E}\, p_{in}(x), \quad i = 1, 2.$$

$$\Omega_n = [\tau b_n, 1 - \tau b_n], \quad \tau > 0.$$

Let us also introduce the following notations:

$$Q_{ij} = \psi_n(x_i, x_j), \quad \psi_n(u, v) = \int\limits_{\Omega_n} K\Big(\frac{x-u}{b_n}\Big) K\Big(\frac{x-v}{b_n}\Big)\, dx,$$

$$B_n^2(p_1, p_2) = (nb_n)^{-2} \sum_{k=2}^{n} \Big[\frac{p_1(x_k)(1 - p_1(x_k))}{m_k^{(1)}} + \frac{p_2(x_k)(1 - p_2(x_k))}{m_k^{(2)}}\Big]$$
$$\times \sum_{i=1}^{k-1} \Big[\frac{p_1(x_i)(1 - p_1(x_i))}{m_i^{(1)}} + \frac{p_2(x_i)(1 - p_2(x_i))}{m_i^{(2)}}\Big]\, Q_{ik}^2.$$

**Theorem 1**. Let $K(x) \in H(\tau)$ and $p(x) \in C^1[0, 1]$. If $\frac{N_n^4}{nb_n^2} \to \infty$ and $N_n^4 b_n \to 0$ as $n \to \infty$, then for hypothesis $H_0 :\ p_1(x) = p_2(x)$

$$\frac{U_n - \mathbf{E}\, U_n}{B_n} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad B_n = B_n(p_1, p_2), \quad N_n = max(N_n^{(1)},$$

$$N_n^{(2)}), \quad N_n^{(k)} = \max_{1 \le i \le n} m_i^{(k)}, \quad k = 1, 2.$$

where $\xrightarrow{d}$ denotes convergence in distribution, and $N(0, 1)$ is a random variable having a standard normal distribution $\Phi(x)$.

**Corollary**. Let $K(x) \in H(\tau)$, $p_k(x) \in C^1[0, 1]$, $k = 1, 2$. Further, let, $m_i^{(1)} = m_i^{(2)} = N_n$, $i = 1, \ldots, n$. If $\frac{N_n^4}{nb_n^2} \to 0$ and $N_n^4 b_n \to 0$, then

$$b_n^{-\frac{1}{2}}\, \frac{N_n U_n - \mathbf{E}\, U_n}{\sigma(p_1, p_2)} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

where

$$\sigma^2(p_1, p_2) = \frac{1}{2} \int_0^1 d^2(x) dx \int_{|t| \le 2\tau} K_0^2(t) dt,$$

$$K_0 = K * K, \quad d(x) = \sum_{r=1}^{2} p_r(x)(1 - p_r(x)).$$

**Theorem 2**. Let $K(x) \in H(\tau)$, $p_k(x) \in C^1[0, 1]$, $k = 1, 2$. Let, next, $m_i^{(1)} = m_i^{(2)} = N_n$, $i = 1, ..., n$. If $\frac{N_n^2}{nb_n^2} \to 0$ and $N_n^4 b_n \to 0$ as $n \to \infty$, then

$$b_n^{-1/2} \Big(\frac{N_n U_n - \Delta(p_1, p_2)}{\sigma(p_1, p_2)}\Big) \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

where

$$\Delta(p_1, p_2) = \frac{1}{2} \int_0^1 d(x) dx \int_{|t| \le \tau} K^2(t) dt.$$

**References**

1. *Copas J. B.* Plotting $p$ against $x$, J. Appl. Statist., Vol. 32 (2), 1983, 25-31.
2. *Efromovich S.* Nonparametric curve estimation. Methods, theory, and applications, Springer-Verlag, 1999.
3. *Nadaraya E. A.* On a regression estimate (in Russian), J. Teor. Verojatnost. i Primenen., Vol. 9, 1964, 157-159.
4. *Nadaraya E., Babilua P., Sokhadze G.* Estimation of a distribution function by an indirect sample, J. Ukr. Mat. Zh., Vol. 62 (12), 2010, 1642-1658 and J. Ukr. Math. J., 62 (12), 2010, 1906-1924.
5. *Okumura H., Naito K.* Weighted kernel estimators in nonparametric binomial regression (The International Conference on Recent Trends and Directions in Nonparametric Statistics), J. Nonparametr. Stat., Vol, 16 (1-2), 2004, 39-62.
6. *Watson G. S.* Smooth regression analysis, J. Sankhya Ser. A, Vol. (26), 1964, 359-372.


# Cable equation driven by a general stochastic measure


**Iryna Bodnarchuk**

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine*

ibodnarchuk@knu.ua


Let $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ be the set of all real-valued random variables defined on complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $\mathsf{X}$ be an arbitrary set and $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ be a $\sigma$-algebra of Borel subsets of $\mathsf{X}$. Let $\mu$ be a general stochastic measure on $\mathcal{B}(\mathsf{X})$, i.e. a $\sigma$-additive mapping $\mu : \mathcal{B}(\mathsf{X}) \to \mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

We consider the mild solution to the following equation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(t,x)}{\partial x^2} - u_\varepsilon(t,x) + \sigma(t/\varepsilon, x)\,\dot{\mu}(x), \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x), \quad \dfrac{\partial u_\varepsilon(t,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial u_\varepsilon(t,L)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $(t,x) \in [0,T] \times [0,L]$, $T > 0$, $L > 0$, $\varepsilon > 0$, and $\mu$ is a general stochastic measure defined on the Borel $\sigma$-algebra $\mathcal{B}([0,L])$.

Let $G$ be the fundamental solution of the homogeneous cable equation. Then the mild solution of problem (1) is given by the formula

$$u_\varepsilon(t,x) = \int_0^L G(t,x,y) u_0(y)\,dy + \int_{[0,L]} d\mu(y) \int_0^t G(t-s,x,y)\sigma(s/\varepsilon, y)\,ds\,. \tag{2}$$

We study the convergence

$$u_\varepsilon(t,x) \to \bar{u}(t,x)\,, \quad \varepsilon \to 0\,,$$

where $\bar{u}(t,x)$ is the mild solution of the averaged equation, that is,

$$\bar{u}(t,x) = \int_0^L G(t,x,y) u_0(y)\,dy + \int_{[0,L]} d\mu(y) \int_0^t G(t-s,x,y)\bar{\sigma}(y)\,ds\,,$$

and

$$\bar{\sigma}(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(s,x)\,ds\,.$$

The averaging principle for equation (2) is established. The rate of convergence is estimated. The regularity of the mild solution is also studied. The orders in time and space variables in the Hölder condition for the solution are improved in comparison with previous results obtained in [1].

The talk is based on the results presented in the paper [2].

### References


1. *Radchenko, V.M.* Cable equation with a general stochastic measure, Theory of Probability and Mathematical Statistics, Vol. 84, 2012, P. 131–138.

2. *Bodnarchuk I.* Averaging principle for a stochastic cable equation, Modern Stochastics: Theory and Applications, Vol. 7 (4), 2020, P. 449–467.


section*

# Feature Selection Involving Concepts of Information Theory


**A.V.Bulinski**

*Lomonosov Moscow State University*

bulinski@yandex.ru


Nowdays one manages with huge arrays of data arising in diverse fields such as microarray analysis, text categorisation, high-frequency financial data, phishing detection, etc. Such data have extremely high dimensionality (Big Data). The problem of finding the relevant (in a sense) features among the large collections is of great importance, e.g., to construct an interpretable model of the studied phenomenon. The damages (SNP) in the Human Genome structure lead to various complex diseases (hypertension, heart attack, strock, diabetes and other). The challenging problem in Genetics is to identify a collection of SNP which provoke the complex disease. In contrust to simple disease (such as sickle-cell anemia) the impact of each SNP can be small and only the interchange of certain damages of DNA structure can be dangerous. Here we have the so-called effect of epistasis. A simple XOR stochastic model illustrating this effect can be found in [1]. Thus we tackle a very important research domain in modern Biology and Medicine called Genome-wide association studies (GWAS). The progress in this domain is discussed, e.g., in [2], The recent survey [3] is devoted to the Feature Selection (FS) methods in medicine. Namely, the authors concentrate on the image analysis and pattern recognition, biomedical signal processing, and DNA microarray data analysis. FS methodology is used also in financial problems, see, e.g., [4]. In machine learning and statistics FS, also known as variable selection or attribute selection, is the process of selecting a subset of relevant features (variables, predictors) for use in model construction and for other purposes. The goal is dimension reduction of a data by removing irrelevant and redundant information. In fact the feature preferences can be represented as a ranking, a weighting or a subset. Clearly, ranking and weighting can be used to form a subset of features by means of a threshold.

FS techniques are used for three reasons: 1) simplification of models to make them easier to interpret by researchers (users), 2) shorter training times, 3) reducing overfitting. In terms of availability of label information, FS technique can be classified into three groups: supervised methods, semi-supervised methods, and unsupervised methods. Discussions on FS usually center on two aspects: search strategy and evaluation criteria. Algorithms designed with different strategies broadly fall into 3 categories: filters, wrappers, embedded and hybrid ones. There are well-known FS procedures. Here we mention only few of them: Boolean operation-based screening and testing (BOOST), least absolute shrinkage and selection method (LASSO), adaptive and group LASSO, nonnegative (NN) Garrote, penalized regression with smoothly clipped absolute deviation (SCAD) penalty, least angle regression (LAR) and generalized Dantzig selector (DS), MDR (multifactor dimensionality reduction) method and its modifications.

In many problems one studies the impact of the collection of factors (features) $X_1, \dots, X_n$ on a response variable $Y$ and the goal is to identify the relevant (in a sense) subcollection $(X_{i_1}, \dots, X_{i_r})$, where $r < n$ and $1 \le i_1 < \dots < i_r \le n$, determining the behavior of $Y$. In contrast to the correlation coefficient one applies the basic information theory concepts to identify nonliner links between random variables. In this regard we recall the entropy, mutual information, conditional mutual information and various divergences, e.g., the Kullbuck - Leibler one. We refer, for instance, to [5].

It is well-known that many algorithms (procedures) employ statistical estimates of various functionals in the framework of the stochastic model under consideration. We dwell on the estimate of the Kullback - Leibler divergence $D(\mathsf{P}_X||\mathsf{P}_Y)$ between the distributions of random vectors $X$ and $Y$ taking values in $\mathbf{R}^\mathbf{d}$. Consider i.i.d. random vectors $X_1, X_2, \dots,$ and i.i.d. random vectors $Y_1, Y_2, \dots,$ with $law(X_1) = law(X)$ and $law(Y_1) = law(Y)$. Assume that $\{X_i, i \in \mathbf{N}\}$ and $\{Y_i, i \in \mathbf{N}\}$ are independent. We are interested in statistical estimation of $D(\mathsf{P}_X||\mathsf{P}_Y)$ constructed by means of observations $\mathbf{X_n} := \{X_1, \dots, X_n\}$ and $\mathbf{Y_m} := \{Y_1, \dots, Y_m\}$, $n, m \in \mathbf{N}$. Suppose that $\mathsf{P}_X \ll \mathsf{P}_Y$ and $X$ and $Y$ have densities $p$ and $q$ w.r.t. the Lebesgue measure on $\mathbf{R}^\mathbf{d}$. Then with probability one all points in $\mathbf{X_n}$ are distinct as well as points of $\mathbf{Y_m}$. All random variables under consideration are defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. For a finite set $E = \{z_1, \dots, z_N\} \subset \mathbf{R}^\mathbf{d}$, where $z_i \ne z_j$ $(i \ne j)$, and a vector $v \in \mathbf{R}^\mathbf{d}$ renumerate points of $E$ as $z_{(1)}(v), \dots, z_{(N)}(v)$ in such a way that $\|v - z_{(1)}\| \le \dots \le \|v - z_{(N)}\|$, where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm in $\mathbf{R}^\mathbf{d}$. If there are points $z_{i_1}, \dots, z_{i_s}$ having the same distance from $v$ then we numerate them according the increasing indexes among $i_1, \dots, i_s$. In other words, for $k = 1, \dots, N$, $z_{(k)}(v)$ is the $k$-NN (Nearest Neighbour) for $v$ in a set $E$. To indicate that $z_{(k)}(v)$ is constructed by means of $E$ we write $z_{(k)}(v, E)$. Fix $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $l \in \{1, \dots, m\}$ and (for each $\omega \in \Omega$) set

$$R_{n,k}(i) := \|X_i - X_{(k)}(X_i, \mathbf{X_n} \setminus \{X_i\})\|, \quad V_{m,l}(i) := \|X_i - Y_{(l)}(X_i, \mathbf{Y_m})\|, \quad i = 1, \dots, n.$$

The authors of [6] introduced an estimate of $D(\mathsf{P}_X||\mathsf{P}_Y)$, for $n > 1$ and $m \ge 1$, letting

$$\widehat{D}_{n,m}(k,l) := \psi(k) - \psi(l) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left( \frac{m V_{m,l}^d(i)}{(n-1) R_{n,k}^d(i)} \right).$$

Here $\psi(t) = \frac{d}{dt} \log \Gamma(t) = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ is the digamma function, $t > 0$. Our goal is to provide the wide conditions to guarantee that, for any $k, l \in \mathbf{N}$, the estimates $\widehat{D}_{n,m}(k,l)$ are asymptotically unbiased and $L^2$-consistent, as $n, m \to \infty$. The proofs involve the technique of conditional expectations, weak convergence of probability measures, analysis of uniform integrability of specified families of functions, and probability inequalities, among others.

As a byproduct we get more general conditions than in [7] for asymptotical unbaisedness and $L^2$-consistency for estimates of the Shannon differential entropy.

We also discuss the employment of conditional entropy and conditional mutual information estimates and their applications to FS. In this regards we refer to [8], [9], [10] and references therein. In particular it is interesting to develop the stopping criterion for for backward and forward greedy methods of FS.

## References


1 *Bulinski A., Kozhevin A.* New version of the MDR method for stratified samples. Statistics, Optimization and Information Computing, 5, 2017, 1–18.

2 *Visscher P.M., Wray N.R., Zhang Q., Sklar P.,McCarthy M.I., Brown M.A.,Yang J.* 10 years of GWAS discovery: Biology, function, and translation. The American Journal of Human Genetics 101, 2017, 5–22.

3. *Remeseiro B., Bolon-Canedo V.* A review of feature selection methods in medical applications. Computers in Biology and Medicine, 2019, 112, doi.org/10.1016/j.compbiomed.2019.103375.

4. *Xiaomao X., Xudong Z., Yuanfang W.* A comparison of feature selection methodology for solving classification problems in finance. Journal of Physics: Conf. Series 1284, 2019, 012026; doi:10.1088/1742-6596/1284/1/012026

5. *Macedo F., Oliveira M.R., Pacheco A., Valadas R.* Theoretical foundations of forward feature selection methods based on mutual information. Neurocomputing, 2019, 325, 67–89.

6. *Wang Q., Kulkarni S.R., Verdú S.* Divergence estimation for multidimensional densities via $k$-nearest-neighbor distances. IEEE Transactions on Information Theory, 55, 2009, 2392–2405.

7. *Bulinski A., Dimitrov D.* Statistical estimation of the Shannon entropy. Acta Mathematica Sinica, English Series, 35, 2019, 17–46.

8. *Bulinski A., Kozhevin A.* Statistical estimation of conditional Shannon entropy. ESAIM: PS, 23, 2019 350–386.

9. *Bulinski A., Kozhevin A.* Statistical estimation of Mutual Information for mixed model. Methodology and Computing in Applied Probability, Published online 01 July 2020. https://doi.org/10.1007/s11009-020-09802-0.

10. *Beraha M., Metelli A.M., Papini M., Tirinzoni A., Restelli M.* Feature selection via Mutual Information: new theoretical insights, arXiv:1907.07384v1, 17 Jul 2019, 1–8.

# Central limit theorem for stochastic perturbations of critical circle maps

**Akhtam Dzhalilov and Abdurakhmon Aliyev**

*Turin Polytechnic University, Tashkent, Uzbekistan*
*Uzbekistan Academy of Sciences, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail adzhalilov21@gmail.com, e-mail aliyev95.uz@mail.ru

Dynamical systems theory is mostly interested in describing the typical behaviour of orbits as time goes to infinity, and understanding how this behaviour is modified under small perturbations of the system. In present work we study the stochastic perturbations of critical circle maps. The main tool is the thermodynamic formalism. Ya.G. Sinai in [1] introduced a thermodynamic formalism for Anosov's flows. Further, a thermodynamic formalism was developed in the works of D. Ruell [2], R. Bowen [3], and others. E.B. Vul, Ya.G. Sinai and K.M. Khanin in [4] build the thermodynamic formalism for Feigenbaum's map.

The papers of [5], [6] considered heuristically a renormalization theory for weak Gaussian noise perturbing one dimensional maps at the accumulation of period doubling. The main result in those papers was that after appropriately rescaling space and time, the effective noise of this renormalized system satisfies some scaling relations. The paper [4] developed a rigorous thermodynamic formalism for critical maps with period doubling. Among many other results, [4], study the effect of noise on the ergodic theory of these maps and showed that for systems at the accumulation of period doubling with weak noise, there is a stationary measure depending on the magnitude of noise that converges to the invariant measure in the attractor.

O. Diaz-Espinosa and R. de la Llave in [7] studied the stochastic perturbations of many maps with renormalization theory. It is proved the central limit theorem for critical circle maps with golden mean rotation number and some mild condition on stochastic noise. We extend their result for critical circle maps with quadratic irrational rotation number.

Now, we turn to the formulation of the main results of our work.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $T \in C^3(S^1)$ be circle homeomorphism. Let the stochastic sequence defined as

$$\overline{x}_{n+1} = T(\overline{x}_n) + \sigma\xi_{n+1},\, \overline{x}_0 := x, \tag{1}$$

where $(\xi_n)$ be a sequence of independent random variables with $p > 2$ finite moments satisfying following conditions:

$$E\xi_n = 0; \tag{2}$$

$$const \leq (E|\xi_n|^2)^{1/2} \leq (E|\xi_n|^p)^{1/p} \leq Const. \tag{3}$$

We define

$$x_n = T(x_{n-1}),\ x_0 = x.$$

The linearized effective noise is defined as

$$L_n(x) = \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \prod_{j=k}^{n-1} T'(x_j),\, x \in S^1. \tag{4}$$

Let $\omega_n(x, \sigma)$ be the stochastic process defined by

$$\omega_n(x, \sigma_n) = \frac{\bar{x}_n - x_n}{\sigma_n \sqrt{\mathrm{var}(L_n(x))}}. \tag{5}$$

We formulate the main result of our work.

**Theorem**. *Let $T \in C^3(S^1)$ circle homeomorphism with one critical point $x_{cr} = 0$ ($T'(0) = T''(0) = 0$, $T'''(x) \neq 0$, $\forall x \in S^1$ and $T'(x) > 0$, $x \neq 0$) and rotation number $\rho_T = [k_1, k_2, .., k_s, k_1, k_2, .., k_s, ...]$. Consider a sequence of independent random variables $(\xi_n)$ with $p > 2$ finite moments satisfying the conditions (2) and (3) and $x \in \mathcal{O}_T(x_{cr}) = \{T^i(x_{cr}),\ i = 0, 1, 2, ...\}$. Then*

1. *There is a constant $\gamma > 0$ such that if*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n n^{\gamma} = 0,$$

*the process $\omega_{q_n}(x, \sigma_{q_n})$ defined by (5)converge in distribution to the standard Gaussian.*

2. *Furthermore, there are constants $\tau > 0$ and $\kappa > 0$ depending on $p$ and $C_1 > 0$ such that if $\sigma_n \leq C_1 n^{-\tau}$, then*

$$\sup_{z\in R} |P(\omega_{q_n}(x, \sigma_{q_n}) \leq z) - \Phi(z)| \leq C q_n^{-\kappa},$$

*where $q_n$ is first return time of $T$, the constant $C > 0$ depends only on $x$ and $\Phi(z)$ is distribution function of standard Gaussian.*

## References


1. *Ya.G. Sinai*, Gibbs measures in ergodic theory, Russian Math. Surveys, 1972, vol. 27, no. 4, pp. 21-69.

2. *D.Ruelie*, Thermodynamic formalism, Addison - Wesley Publishing Company, 1978.

3. *R.Bowen*, Methods of Symbolic Dynamics, Mir, Moscow, 1979.

4. *E.B.Vul, Ya.G. Sinai, and K. M. Khanin.* Feigenbaum universality and the thermodynamic formalism. Russian Math. Surveys, 39(3):1-40, 1984. English Translation.

5. *B.Shraiman, C.E.Wayne, and P.C.Martin.* Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos. Physical Review Letters, 46(14):935-939, 1981.

6. *J.Crutchfield, M.Nauenberg, and J.Rudnick.* Scaling for external noise at the onset of chaos. Physical Review Letters, 46(14):933-935, 1981.

7. *O.Diaz-Espinosa and R.de la Llave.* Renormalization and central limit theorem for critical dynamical systems with weak external noise.JMD 1(3) 477-543 2007

# Clark representation for the random measures

**Dorogovtsev A. A.**

*Department of random processes Institute of mathematics Ukrainian Academy of Sciences*

andrey.dorogovtsev@gmail.com

In the talk we discuss the partial cases of he following general question. Let a random probability measure $\mu$ on $\mathbb{R}$ be a functional from the Wiener process $w(t), t \in [0;1]$. Then for any test function $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ the random variable $\langle \varphi, \mu \rangle$ has Clark representation

$$\langle \varphi, \mu \rangle = \langle \varphi, \bar{\mu} \rangle + \int_0^1 R_\varphi(t) dw(t).$$

It is useful to know when the adapted process $R_\varphi$ has a form

$$R_\varphi(t) = \langle \varphi, \varkappa_t \rangle,$$

where the signed measure $\varkappa_t$ is absolutely continuous. In the talk we present three cases when the Clark representation of the random measures and related objects such as local times has a good form.

First two cases are related to the Gaussian processes called by integrators. They were introduced by A. A. Dorogovtsev in [2].

**Definition**. Gaussian process $\xi(t), t \in [0;1]$ is called by integrator there exists $c > O$ such that for arbitrary $a_1, \ldots, a_n$ and partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$

$$E(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta \xi(t_k))^2 \leq c \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \Delta t_k.$$

It was proved in [2] that the Skorohod integral against the integrator can be properly defined and Itô formula was written. In the series of works [3-5] the local times and self-intersection local times for integrators were discussed. Here we present two statements about Clark representation for these variables.

**Theorem 1**. *A self-intersection local time of Wiener process has the representation*

$$T_k^{(w)} = \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(\frac{k+3}{2})} + \int_0^1 \beta(\tau) dw(\tau),$$

*where*

$$\beta(\tau) = \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq k-1} \int_{\Delta_k} \frac{1}{\prod_{j \neq i_1, \ldots, i_r} \sqrt{2\pi(t_{j+1} - t_j)}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 p'_{t_{i_\tau}+1-\tau}(w(\tau) - w(t_{i_r})) \cdot$$

$$\cdot \mathbf{1}_{[t_{i_r}; t_{i_r+1}]}(\tau) \prod_{i=1}^{r-1} (p'_{t_{i_1}+1-\eta}(w(\tau_l) - w(t_{i_2})) \mathbf{1}_{(t_{i_1}; t_{i_1}+1)}(\tau_1)) dw(\tau_1) \ldots dw(\tau_{r-1}) d\vec{t}.$$

*Here*

$$\prod_{i=1}^{r-1} (p'_{t_{i_l}+1-\eta}(u(\tau_l) - w(t_{i_2})) \mathbf{1}_{(t_{i_l}; t_{i_l}+1)}(\tau_l)) = 1$$

*for* $r = 1$.

Let us establish Clark formula for a self intersection local time of Gaussian integrator

$$x(t) = \int_0^1 (A\mathbf{1}_{[0;t]})(s)dw(s).$$

For $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \Delta_k, t \in [0;1]$ denote by $p_{\vec{t}}, p_{\vec{t},t}$ densities of distribution of vectors

$$X = (x(t_2) - x(t_1), \ldots, x(t_k) - x(t_{k-1}))$$

and

$$X(\vec{t}, t) = (x(t_1 + t(t_2 - t_1)) - x(t_1), \ldots, x(t_{k-1} + t(t_k - t_{k-1})) - x(t_{k-1}))$$

correspondingly. Put

$$B_{\vec{t},t} = B(A\mathbf{1}_{[t_1;t_1+t(t_2-t_1)]}, \ldots, A\mathbf{1}_{[t_{k-2};t_{k-3}+t(t_k-t_{k-1})]}),$$

$$R_{\vec{t},t} = B_{\vec{t},1} - B_{\vec{t},t},$$

where as before $B(e_1, \ldots, e_n)$ is Gramian matrix constructed from elements $e_1, \ldots, e_n$. Denote by $\Delta_k^0 = \{0 < t_1 < \ldots < t_k < 1\}$.

**Theorem 2**. *Suppose that for every* $0 < t < 1, \vec{t} \in \Delta_k^0$ *the matrix* $R_{\vec{t},t}$ *is positive definite. Let* $p_{R_{\vec{t},t}}$ *be a density of distribution* $N(0, R_{\vec{t},t})$*. Then*

$$T_k^z = \mathbb{E}T_k^z + \int_0^1 \beta(\tau)dx(\tau),$$

*where*

$$\beta(\tau) = \int_{\Delta_k} \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{[t_j;t_{j+1}]}(\tau)\partial_j PR_{\vec{t},\tau}(X(\vec{t}, \tau))d\vec{t}$$

*and* $\partial_j$ *denotes the* $j$*-th partial derivative.*

Consider the measure-valued process, which is the solution to the following one-dimensional equation with interaction

$$\begin{aligned} &dx(u,t) = \textstyle\int_{\mathbb{R}} \bar{a}(x(u,t), x(v,t))\mu_0(dv)dt + \bar{b}(x(u,t))dW(t) \\ &x(u,0) = u, \ u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Here $\mu_0$ is a probability measurers $\mathbb{R}$, which can be treated as an initial mass distribution on the infinite system of particeps whose trajectories are $x(u,t), t \geq 0, u \in \mathbb{R}$.

In such interpretation the measure

$$\mu_t = \mu_0 \circ x^{-1}(u,t), t \geq 0$$

is the distribution of the mass of particles at the moment $t, t \geq 0$.

This type of equation was introduced and studied by Dorogovtsev in [1]. Here we consider the measure valuated process $\mu_t$ as a functional of the noise $W(\cdot)$. It is natural question for one to ask, what world be the Clark representation for the random measure $\mu_t$.

**Theorem 3**. *Suppose that the coefficient* $a$ *of equation with iteraction*

$$\begin{aligned} &dx(u,t) = a(x(u,t), \mu_0)dt + dW(t) \\ &x(u,0) = u, \ u \in \mathbb{R} \\ &\mu_t = \mu_0 \circ x^{-1}(u,t), \ t \geq 0 \end{aligned}$$

*is bounded, together with two continuous partial derivatives by the constant $C$ such that*

$$e^{3C} < 1.$$

*Then, the measure-valuated solution $\mu_t$ has Clark-Ocone's representation which can be written for the test function $\varphi \in C_0^\infty$ as follows,*

$$(\varphi, \mu_1) = E(\varphi, \mu_1) + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) g_0(v) dv dW(t),$$

*for some random function $g$.*


### References

1. *Dorogovtsev A.A.* Meroznachnye protsessy i stokhasticheskie potoki (Russian) [Measure-valued processes and stochastic flows], Institut Matematiki, Kiev, 2007.
2. *Dorogovtsev A.A.* Stochastic integration and one class of Gaussian random processes, Ukr.Math.Journal, 50(4), 1998, 495-505.
3. *Dorogovtsev A.A., Izyumtseva O.L.* Self-intersection local times, Ukr.Math.Journal, 68(3), 2016, 291-341.
4. *Dorogovtsev A.A., Izyumtseva O.L.* Properties of Gaussian local time, Lithuanian Mathematical Journal, 55(4), 2015, 489-505.
5. *Dorogovtsev A.A., Izyumtseva O.L., Riabov G.V., Salhi N.* Clark formula for local time for one class of Gaussian processes, Communications on Stochastic Analysis, 10 (2), 2016, 239-255.


# Branching processes in random environment with immigration: survival of a single family


**E.E.Dyakonova, Ch.Smadi, V.A.Vatutin**

*Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, 8 Gubkin Street, 117 966 Moscow GSP-1, Russia*
*Univ. Grenoble Alpes, INRAE, LESSEM, and Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Institut Fourier, 2 rue de la papeterie, 38402 Saint-Martin d'Heres, France*
*Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, 8 Gubkin Street, 117 966 Moscow GSP-1, Russia*

e-mail elena@mi-ras.ru, e-mail charline.smadi@inrae.fr, e-mail vatutin@mi-ras.ru


We consider a branching process with immigration evolving in a random environment. Individuals in such a process reproduce independently of each other according to random offspring distributions which vary from one generation to the other. In addition, an immigrant enters the population at each generation. To give a formal definition let $\Delta$ be the space of all probability generating functions $F = F(s), s \in [0, 1]$ on $\mathbf{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$. Equipped with a metric $\Delta$ becomes a Polish space. Let $F$ be a random variable taking values in $\Delta$, and let $F_n, n \in \mathbf{N} := \mathbf{N}_0 \setminus \{0\}$ be a sequence of independent copies of $F$. The infinite sequence $\mathcal{E} = \{F_n, n \in \mathbf{N}\}$ is called a random environment.

A sequence of $\mathbf{N}_0$-valued random variables $\mathbf{Y} = \{Y_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ specified on the respective probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ is called a branching process with one immigrant in random environment (BPIRE), if , given $\mathcal{E}$ the process $\mathbf{Y}$ satisfies the recurrent equations

$$Y_0 = 1, \qquad Y_n = \sum_{j=1}^{Y_{n-1}} \xi_{nj} + 1, \quad n = 1, 2, ...,$$

where $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots$ are i.i.d. random variables with distribution $F_n$.

It will be convenient to assume that if $Y_{n-1} = y_{n-1} > 0$ is the population size of the $(n-1)$th generation of $\mathbf{Y}$ then first $\xi_{n1} + \ldots + \xi_{ny_{n-1}}$ individuals of the $n$th generation are born and afterwards one immigrant enters the population.

We will call an $(i, n)$-clan the set of individuals alive at generation $n$ and being children of the immigrant which entered the population at generation $i$.

We say that only the $(i, n)$-clan survives in $\mathbf{Y}$ at moment $n$ if

$$Y_n^- := \xi_{n1} + \ldots + \xi_{ny_{n-1}} > 0$$

and all $Y_n^-$ particles belong to the $(i, n)$-clan.

Let $\mathcal{A}_i(n)$ be the event that only the $(i, n)$-clan survives in $\mathbf{Y}$ at moment $n$. The aim of this paper is to study the asymptotic behavior of the probability $\mathbf{P}(\mathcal{A}_i(n))$ as $n \to \infty$ and $i$ varies with $n$ in an appropriate way.

We consider, along with the process $\mathbf{Y}$, a standard branching process $\mathbf{Z} = \{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ in a random environment (BPRE) which, given $\mathcal{E}$ is specified by the recurrent equations

$$Z_0 = 1, \qquad Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \xi_{nj}, \quad n = 1, 2, ....$$

Let $X = \log F'(1)$. A BPRE is called critical if $\mathbf{E}X = \mathbf{E}\log F'(1) = 0$, supercritical if $\mathbf{E}X > 0$, and subcritical if $\mathbf{E}X > 0$.

The class of subcritical BPRE admits an additional classification. A subcritical BPRE is called *strongly subcritical* $-\infty < \mathbf{E}\left[Xe^X\right] < 0$, *intermediate subcritical* if $\mathbf{E}\left[Xe^X\right] = 0$, and *weakly subcritical* if there exists a number $0 < \beta < 1$ such that

$$\mathbf{E}[Xe^{\beta X}] = 0.$$

We assume that the probability generating functions meet the following restrictions.

**Hypothesis A**. The probability generating function $F(s)$ is geometric with probability 1, that is

$$F(s) = \frac{q}{1 - ps} = \frac{1}{1 + e^X(1 - s)}, \quad \text{with } \ X = \log F'(1) = \log \frac{p}{q},\ p + q = 1.$$

We now formulate our main results.

**Theorem 1**. *If a branching process in random environment is critical, Hypothesis A is valid and the conditions*

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] \in (0, \infty), \qquad \mathbf{E}\left[e^X + e^{-X}\right] < \infty$$

*hold, then*

1) *for any fixed* $i$

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\mathbf{P}\left(\mathcal{A}_i(n)\right) = w_i \in (0,\infty)\,;$$

2) *for any fixed* $N$

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2}\mathbf{P}\left(\mathcal{A}_{n-N}(n)\right) = r_N \in (0,\infty)\,;$$

3) *if, in addition, the distribution of* $X$ *is absolutely continuous, then*

$$\lim_{\min(i,n-i)\to\infty} i^{1/2}\left(n-i\right)^{3/2}\mathbf{P}\left(\mathcal{A}_i(n)\right) = K \in (0,\infty)\,.$$

We now describe the asymptotic behavior of $\mathbf{P}\left(\mathcal{A}_i(n)\right)$ for strongly subcritical BPRE.

**Theorem 2**. *Let* $\mathbf{Y}$ *be a strongly subcritical BPIRE satisfying Hypotheses A. Then*
1) *for any fixed* $N$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\mathcal{A}_{n-N}(n)\right) =: r_N \in (0,\infty)\,;$$

2) *there exists a constant* $R\in(0,\infty)$ *such that, as* $n-i\to\infty$

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{A}_i(n)\right) \sim R(\mathbf{E}e^X)^{n-i}.$$

The next theorem deals with the intermediate subcritical case.

**Theorem 3**. *Let* $\mathbf{Y}$ *be an intermediate subcritical BPIRE meeting Hypothesis A and*

$$\mathbf{E}\left[X^2e^X\right] \in (0,\infty)\,.$$

*Then*
1) *for any fixed* $N$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\mathcal{A}_{n-N}(n)\right) =: r_N \in (0,\infty)\,;$$

2) *there exists a constant* $R\in(0,\infty)$ *such that, as* $n-i\to\infty$

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{A}_i(n)\right) \sim R(n-i)^{-1/2}(\mathbf{E}e^X)^{n-i}.$$

Our last theorem concerns the weakly subcritical case.

**Theorem 4**. *Let* $\mathbf{Y}$ *be a weakly subcritical BPIRE meeting Hypothesis A and*

$$\mathbf{E}\left[X^2e^{\beta X}\right] \in (0,\infty)\,.$$

*Then*
1) *for any fixed* $N$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\mathcal{A}_{n-N}(n)\right) = r_N \in (0,\infty)\,;$$

2) *for any fixed* $i$ *there exists a constant* $R_i\in(0,\infty)$ *such that, as* $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{A}_i(n)\right) \sim R_i\left(n-i\right)^{-3/2}(\mathbf{E}e^{\beta X})^{n-i};$$

3) *there exists a constant* $R\in(0,\infty)$ *such that, as* $\min(i,n-i)\to\infty$

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{A}_i(n)\right) \sim R\left(n-i\right)^{-3/2}(\mathbf{E}e^{\beta X})^{n-i}.$$

**Acknowledgement**. This work is supported by the Russian Science Foundation under the grant 19-11-00111

## References

1. *Dyakonova E.E., Vatutin V.A.* Subcritical branching processes in random environment with immigration: survival of a single family. Theory Probab. Appl., 65:4 (2020), 671–692 (In Russian).
2. *Smadi Ch., Vatutin V.A.* Critical branching processes in random environment with immigration: survival of a single family. 2019, 21 pp., arXiv: 1911.00316.


# Adaptive efficient analysis for big data ergodic diffusion models


**L. I. Galtchouk, S. M. Pergamenshchikov**

*Strasbourg University, Rouan University*

leonid.galtchouk0667@orange.fr, Serge.Pergamenchtchikov@univ-rouen.fr


**STATEMENT of PROBLEM**

MODEL: We consider the high dimensional diffusion model introduced in [1],

$$dy_t = \left(\psi_0(y_t) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \psi_j(y_t)\right) dt + b(y_t)\, dW_t\,, \quad 0 \le t \le T\,, \tag{1.1}$$

where $(\psi_j)_{0\le j\le q}$ are known linearly independent functions, $(W_t)_{t\ge 0}$ is a standard Wiener process, $(\beta_j)_{1\le j\le q}$ are unknown parameters and $b(\cdot)$ is unknown diffusion coefficient. It is assumed that observations are accessible only at the discrete time moments

$$(y_{t_j})_{1\le j\le N}\,, \quad t_j = j\delta\,, \tag{1.2}$$

where the frequency $\delta = \delta_T \in (0,1)$ and the sample size $N = N(T)$ are some functions of $T$.

We study the model (1) in big data setting i.e. in the case when the dimension parameter is greater than the sample size, i.e. $q > N$. We remind, that for such model usually one uses the LASSO algorithm or DANTZIG selector (see, for example, [1]-[2]). But these methods can not be used if the dimension parameter $q$ is unknown or equals to $+\infty$. By this reason in this paper, similarly to [4], we study the model (1) in nonparametric setting, i.e.

$$dy_t = S(y_t)\, dt + b(y_t)\, dW_t\,, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{1.3}$$

The PROBLEM is to estimate the function $S(x), x_0 \le x \le x_1$, on the basis of the observations (2). Such problems are important in various applications such as signal processing, financial mathematics, stochastic optimal control etc.

We consider the quadratic risk defined, for any estimator $\widehat{S}$, as

$$\mathcal{R}_\vartheta(\widehat{S}) = E_\vartheta \|\widehat{S} - S\|^2 \quad \text{and} \quad \|S\|^2 = \int_{x_0}^{x_1} |S(x)|^2 dx\,, \tag{1.4}$$

where $E_\vartheta$ is the expectation with respect to the distribution of the process (3) for the functions $\vartheta = \vartheta(\cdot) = (S(\cdot)\,, b(\cdot))$ and $x_0 < x_1$ are some fixed points.

By making use of sequential analysis methods we develop model selection procedures, for which we prove non asymptotic sharp oracle inequalities. Through the obtained inequalities we show that the constructed model selection procedures are asymptotically efficient in adaptive setting, i.e. in the case when the model regularity is unknown. For the first time for such problem, we found in the explicit form the celebrated Pinsker constant which provides the sharp lower bound for the minimax squared accuracy normalized with the optimal convergence rate. Then we show that the asymptotic quadratic risk for the model selection procedure asymptotically coincides with the obtained lower bound. This means that the constructed procedure is efficient. Finally, on the basis of the constructed model selection procedures in the framework of the Big Data models we provide the efficient estimation without using the parameter dimension or any sparse conditions.

### References


1.*Fujimori, K.*, The Danzing selector for a linear model of diffusion processes. - *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **22** . (2019), p. 475 – 498.

2. *De Gregorio, A., Iacus, S.M.*, Adaptive LASSO-type estimation for multivariate diffusion processes. *Econom. Theory*, **28** (4) (2012), p. 838 – 860.

3. *Galtchouk, L. and Pergamenshchikov, S.* Uniform concentration inequality for ergodic diffusion processes observed at discrete times. *Stochastic Processes and Applications*, **123**(1) (2013), 91-109.

4. *Galtchouk, L. and Pergamenshchikov, S.*, Adaptive efficient analysis for big data ergodic diffusion models. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, accepted (2021), 1-36.


# On expectation of the simultaneous renewal time for two time-inhomogeneous Markov chains


**Golomoziy V.V.**

*Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics*
*Mechanics and Mathematics faculty*
*Taras Shevchenko National University of Kyiv,*
*01033, Kyiv, 64 Volod ymyrska st.*
vitaliy.golomoziy@univ.kiev.ua


We consider two time-inhomogeneous Markov chains $(X_t^1, t \geq 0)$ and $(X_t^2, t \geq 0)$ defined on a phase space $E = \{0, 1, \ldots\}$. The chains are defined by their transition probabilities on the $s$-th step $P_s(x, A, 1)$, $P_s(x, A, 2)$ for chains $X_t^1$, $X_t^2$ respectively. Let's define transition probabilities for $n > 0$ steps:

$$P^{t,n}(x, A, l) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} P_{t+k}\right)(x, A, l).$$

Having this set of transition probabilities and the initial conditions $\mu^l(\cdot)$ we can build a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ where both chains $(X_t^l)$, $l \in \{1, 2\}$ are defined and

$$\mathbb{P}\{X_s^l \in A\} = \int_E \mu^l(dx) P^{0,s}(x, A, l), \quad \mathbb{P}\{X_{s+1}^l \in A | X_s^l = x\} = P_s(x, A, l).$$

Let's define renewal intervals $\theta^l_k$, $l \in \{1,2\}$:

$$\theta^l_0 = \inf\{t \geq 0 : \; X_t = 0\}, \quad \theta^l_m = \inf\{t > \theta_{m-1} : \; X_t = 0\}, \; m > 1,$$

which are defined on the same probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. The classes of variables $\{\theta^1_k\}_{k\geq 0}$ and $\{\theta^2_k\}_{k\geq 0}$ are independent. $\theta^l_k$ for each $l \in \{1,2\}$ and $k > 0$ have only positive integer values while $\theta^l_0$ take non-negative integers. Let's define renewal sequences in the following way:

$$\tau^l_n = \sum_{k=0}^{n} \theta^l_k, \; l \in \{1,2\}.$$

We will note that neighboring variables inside each class are conditionally independent giving $\tau$. In other words, for each $k, t, l$ the following equality holds true:

$$E[f(\theta^l_k) g(\theta^l_{k+1}) | \tau^l_k] = E[f(\theta^l_k) | \tau^l_k] E[g(\theta^l_{k+1}) | \tau^l_k],$$

for any bounded Borel functions $f$ and $g$.

Let's introduce a definition for the conditional distribution of the $\theta^l_k$ variable (please, note that this distribution does not depend on $k$):

$$g^{t,l}_n = P\{\theta^l_k = n | \tau_{k-1} = t\}, \; l =\in \{1,2\}, \; n \geq 0,$$

and we assume that $g^{t,l}_0 = P\{\theta^l_k = 0 | \tau_{k-1} = t\} = 0$. The variables $\theta^l_k$, $k \geq 1$ will be interpreted as renewal steps and $\theta^l_0$ as a delay.

We'll say that $T > 0$ is a coupling (or simultaneously hitting) time if:

$$T = \min\{t > 0 : \exists\, m, n : \; t = \tau^1_m = \tau^2_n\}.$$

Our goal is to find conditions which guarantee $T < \infty$ a.s. and $E[T] < \infty$.

By $u^{(t,l)}_n$ we define a renewal sequence for the process $\tau^l$. In other words, $u^{(t,l)}_n$ is a probability of a renewal at the moment $t+n$ having renewal at the moment $t$. Formally $u^{(t,l)}_n$ can defined in a following way:

$$u^{(t,l)}_0 = 1, u^{(t,l)}_n = \sum_{k=0}^{n} u^{(t,l)}_k g^{t+k,l}_{n-k}$$

**Theorem 1.**
Assume that:
1) The family of distributions $g^{t,l}_n$ is uniformly integrable.
2) There exists a constat $\gamma > 0$ and a positive integer $n_0 > 0$ such that for all $t, l$ and $n \geq n_0$: $u^{(t,l)}_n \geq \gamma$.

Then the coupling moment is integrable: $E[T] < \infty$.

Theorem 1 (from paper [1]) gives conditions for existence of the coupling moment, but gives no estimates. It is possible to establish such an estimate under more restrictive conditions on the distribution $g^{(t.l)}_n$. Next theorem from [3] provides such estimate.

**Theorem 2.**
Assume that the following conditions hold.

1. There is a constant $\gamma > 0$ and number $n_0 \geq 0$, such that for all $t, l$ and $n \geq n_0$

$$u_n^{(t,l)} \geq \gamma.$$

2. Distributions $(g_n^{(t,l)})$ are stochastically dominated by the some sequence $(\hat{g}_n)$, $\hat{g}_n \geq 0$, that means

$$G_n^{(t,l)} = \sum_{k>n} g_k^{(t,l)} \leq \hat{G}_n = \sum_{k>n} \hat{g}_k,$$

and the stochastic dominant $(\hat{g}_n)$ has finite first and second moments

$$\hat{\mu}_1 = \sum_{k\geq 1} k\hat{g}_k = \sum_{k\geq 0} \hat{G}_k < \infty,$$
$$\hat{\mu}_2 = \sum_{k\geq 1} k^2\hat{g}_k < \infty.$$

Then:

$$\mathbb{E}[T] \leq \mathbb{E}[\theta_0^{(1)}] + \mathbb{E}[\theta_0^{(2)}] + \frac{\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1(\gamma^{-1} + n_0)}{\gamma}.$$

It could be difficult to check that $u_n^{(t,l)} \geq \gamma$ in practical applications. In the homogeneous case this fact immediately follows from the Renewal Theorem, assuming that renewal sequence is integrable. In the non-homogeneous case we may intuitively expect, that under the condition of uniform integrability of $g_n^{(t,l)}$ or existence of integrable stochastic dominant $u_n^{(t,l)}$ should be bounded away from there. However, this statement needs a formal proof. The following theorem addresses this issue.

**Theorem 3.**

In the notation introduced above, assume that:

1. There exists a set of $m$ positive integers $\{l_1, \ldots, l_m\}$ with greatest common divisor equals to 1, such that:

$$\inf_{t,i,l} g_{l_i}^{(t,l)} > 0.$$

2. Distributions $(g_n^{(t,l)})$ are stochastically dominated by the some sequence $(\hat{g}_n)$, $\hat{g}_n \geq 0$, such that

$$G_n^{(t,l)} = \sum_{k>n} g_k^{(t,l)} \leq \hat{G}_n = \sum_{k>n} \hat{g}_k,$$

and the stochastic dominant $(\hat{g}_n)$ has finite first moment

$$\hat{\mu}_1 = \sum_{k\geq 1} k\hat{g}_k = \sum_{k\geq 0} \hat{G}_k < \infty,$$

Then there exists a number $n_0 > 0$ and $\gamma > 0$ such that, for all $n \geq n_0$, $t > 0$, $l \in \{1, 2\}$: $u_n^{(t,l)} \geq \gamma$.

In order to obtain an expression for $\gamma$ we refer the reader to Theorems 4.1 and 4.2 from [2] which give such expressions in special cases. For example, if $\gamma_0 = \inf_{t,l} g_1^{(t,l)} > 0$, then

$$\gamma = \gamma_0(1 - \hat{G}_1)^{\frac{\hat{\mu}_1 - \hat{G}_1}{\hat{G}_1}},$$

see [2], pp. 53-54.

## References

1. *Golomoziy V.V., Kartashov N.V.* On coupling moment integrability for time-inhomogeneous Markov chains, Theory of probability and mathematical statistics, в-89, 2013, pp. 1-12.
2. *Golomoziy V.V.* An inequality for the coupling moment in the case of two inhomogeneous Markov chains, Theory of probability and mathematical statistics, в-90, 2014, pp. 43-56.
1. *Golomoziy V.V.* An estimate for an expectation of the simultaneous renewal for time-inhomogeneous Markov chains, Modern Stochastics: Theory and Applications, Vol. 3, Issue 4, 2016, pp. 315-323.


# Paradoxical Phenomena in the Theory of Probability.


**A.H. Hajiyev**

*Institute of Control Systems, Azerbaijan National Academy of Sciences*

asaf.hajiyev@gmail.com


**Introduction.** The mathematical models of moving particles are widely used in various applications. The prototype of such models are the traffic, airport and shipping facilities, the communication systems and others. Today, there are a lot of papers and books [1-5] and even special journals are published (J. Transportation Science, J. Advance Transportation) in this field. The structure of the systems, which are described by the behavior of moving particles, is complicated, hence for real applications, it is necessary to construct mathematical models, taking into consideration the specificity of these systems.

In [6], it is suggested the mathematical model of two moving particles on a straight line, where one particle (leader) makes a random binomial walk with given parameters, and the motion of another particle depends on the distance. It was derived the unexpected fact (Belyaev's effect) that in the stationary regime of motion, the leader particle forces another particle to make a random walk with the same parameters. This fact was used for predicting of the traffic jam in the transportation systems. Later [7], this result was generalized for models with many numbers of moving particles on a straight line. The motion of buses, trains and others can be considered as a motion on a closed trajectory (curves). The mathematical models of the moving particles on a closed trajectory, have a complicated structure because each particle can affect the motion of the other. In [4,8,9], the mathematical models of the moving particles are constructed and for some of them, the class of distribution between the moving particles, is found.

Another important problem is the control by these systems, which allows to optimize an efficiency index. An interesting and unusual control is introducing the delays of the beginning services. Such a control is easy to realize in practice and gives a gain in the expectation of a customer's waiting time, before service [8,9]. Another application of the model with moving particles is the vertical transportation (lifts' systems), which has a complicated structure, some research can be found in [10-12]. In this paper, the following results are presented:

–for models of moving particles on a closed curve, the conditions when "Belyaev's effect" is true, have been found;

–for queues with a complicated structure, the control function will be introduced, as a delay of the beginning service. It is found the class of queues for which it is advisable to introduce delays and the form of the optimal function, minimizing the expectation of a customer's waiting time.

**A. Mathematical models.** Consider a circle with $N$ equidistant points on it. There are $S$ particles which are moving with the same speed in one direction (counterclockwise direction) and the particles cannot overtake each other. Numerate particles in the direction of moving. At instant $t,$ each particle can make a jump to the next point of the circle (if there is not a particle), $t \in T = \{1, 2, ...\}$.

Denote: $\xi_{i,t}$ is the coordinate (position on a circle) of $i - th$ particle at the instant $t;$ $\rho_{i,t} = \xi_{i+1,t} - \xi_{i,t}$ is the distance between neighboring particles in the direction of the movement; $\varepsilon_{i,t} = \rho_{i,t+1} - \xi_{i,t}$ is the defined motion of $i-th$ particle (i.e. it made may jump or stayed stay at in the same place). The particles are moving according to the following rules:

$$P\{\varepsilon_{i,t} = 1/\rho_{i,t} = k\} = r_k,\ P\{\varepsilon_{i,t} = 0/\rho_{i,t} = k\} = l_k,\ \ r_k + l_k = 1,\ \ \ k = 2, 3, ..., N - 1;$$

$$P\{\varepsilon_{i,t} = 1/\rho_{i,t} = 1,\ \ \varepsilon_{i+1,t} = 1\} = r_1,\ P\{\varepsilon_{i,t} = 0/\rho_{i,t} = k,\ \varepsilon_{i,t} = 1\} = l_1,\ k = 2, ..., N - 1;$$

$$P\{\varepsilon_{i,t} = 1/\rho_{i,t} = 1,\ \ \varepsilon_{i+1,t} = 0\} = 0,\ P\{\varepsilon_{i,t} = 0/\rho_{i,t} = 1,\ \ \varepsilon_{i,t} = 0\} = 1.$$

**Definition 1.** The particle with number $i$ is called the leader of the order $m \le S-1,$ if this particle pushes the group of a neighbouring particle of the size $m$, which can obstruct its motion, i.e.

$$P\{\varepsilon_{i+1,t} = 1,\ \ \varepsilon_{i+2,t} = 1, ...,\ \ \varepsilon_{i+m,t} = 1/\rho_{i,t} = 1,\ \ \rho_{i+1,t} = 1,\ \ \rho_{i+2,t} = 1, ..., \rho_{i+m,t} = 1\} = 1$$

It means that if $\rho_{i,t} = 1$, and the distances between all the next neighboring $m$ particles equal 1, then $i - th$ particle forces all the next $m$ particles, to make a jump.

**Definition 2.** If the particle with number $i$, is the leader of the order $m$ and moreover, there is not any particle which can push it, then this particle is called an *absolute leader* of the order $m$.

**Remark 1.** Consider a motion of two particles on a straight line, in one direction (from left to right). Denote $\rho_t$, the distance between particles, at the instant $t$. One particle makes a jump to the right, with probability $r$ and stays at in the same place with probability $l$, i.e. makes a random walk with parameters $r$ and $l$ $(r + l = 1)$. The motion of another particle depends on the distance to the next particle, i.e.

$$P\{\varepsilon_{1,t} = 1\} = r,\ P\{\varepsilon_{i,t} = 0\} = l,\ \ r + l = 1,$$

$$P\{\varepsilon_{2,t} = 1/\rho_t = k\} = r^*,\ P\{\varepsilon_{i,t} = 0/\rho_t = k\} = l^*, r^* + l^* = 1,\ k = 2, 3, ..., N - 1;$$

$$P\{\varepsilon_{2,t} = 1/\rho_t = 1,\ \ \varepsilon_{1,t} = 1\} = r^*,\ P\{\varepsilon_{i,t} = 0/\rho_t = 1,\ \ \varepsilon_{2,t} = 1\} = l^*,$$

$$P\{\varepsilon_{2,t} = 1/\rho_t = 1,\ \ \varepsilon_{1,t} = 0\} = 0,\ P\{\varepsilon_{i,t} = 0/\rho_t = 1,\ \ \varepsilon_{2,t} = 0\} = 1.$$

Introduce $\varepsilon_t = 1$, if $\varepsilon_{2,t} =$ 1and $\varepsilon_t = 0$, if $\varepsilon_{2,t} = 1$, $\varepsilon^+ = \sum_{i=l}^{m} \varepsilon_I$, $\varepsilon^{--} = m - \varepsilon^+$. "Belyaev's effect" means that in a stationary regime, the first particle forces the second particle to make a random walk with the same parameters $r$ and $l$, i.e.

$$P\{\varepsilon_{2,t} = \varepsilon_t,\ \ \varepsilon_{2,t+l} = \varepsilon_{t+l}, ...,\ \ \varepsilon_{2,t+m} = \varepsilon_{t+m}\} = r^{\varepsilon+} l^{\varepsilon-}$$

**Theorem 1.** "Belyaev's effect" is valid for the moving particles on a circle, if and only if there exist an absolute leader of the order $S - 1$.

**B. Control problem.** Consider a queueing system, where $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ is the sequence when the service starts. The stationary flow of customers with intensity $\lambda < \infty$ arrives for service and at instant $t_i$ and all the customers, (delete comma) who arrived at the time interval $[t_{i-1}, t_i]$, immediately get service. Such a model describes the behavior of the transportation systems (buses, trains). As an efficiency index, we take a customer's average waiting time before service ($CWT$). Perhaps, it seems paradoxically, but for reducing the $CWT$, we introduce the delays of the beginning service, i.e. from the sequence $t_1, t_2, ..., t_n, ...$, we pass to the new sequence $t_1^*, t_2^*, ..., t_n^*, ...$ for which $\eta_i^* = t_i^* - t_{i-1}^* = \eta_i + g(\eta_i)$, where $\eta_i = t_i - t_{i-1}$ and $g \in G-$ is the class of non-negative and measurable functions. In fact, function $g(.)$ is the delay of the beginning of service. Denote $F(x)$ the distribution function of the random variables $\eta_i$.In principle, $\eta_I$ can have a different distribution and moreover, it can be dependent.

**Definition 3.** The service can be improved, if there exist the function $g \in G$, for which the $CWT(g) < CWT(0) = CWT$.

**Theorem 2.** The service can be improved if and only if there exists $x_0 < C$, for which $F(x_0) > 0$, where $c \in G,\ c = E\eta_i^2/2E\eta_i$.

**Definition 3.** $g^* \in G$ is called an optimal function, if $\min\limits_{g\in G} CWT(g) = CWT(g^*)$.

**Theorem 3.** Under the conditions of Theorem 1, the optimal function has the form

$$g^*(x) = \min(0, c_1 - x) = (c_1 - x)^+$$

where $c_1$ is a unique solution of the simple integral equation.

**Remark 2.** Theorem 3 and 4 can be generalized for any (dependent) distribution of and for the case when at instant $t_i$, only a $fix\,(k)$number of customers can be served.

**Example.** If $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$ then the $CWT = 1$, $g^*(x) = (0,9 - x)^+$, $CWT^* = 0,9$, i.e. the gain in the $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$ equals 10

## Литература


1. *Абдурахимов А.* Работа реактора с псевдоожиженном слое. Труды VII международная конференция по математическому моделированию,Якутск: - 2014г. С. 114-116.

1. *Kerner B.S.* Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control. Berlin: Springer, 2009. 255p.

2. *Wang H, Rudy K, Li J, Ni D.* Calculation of traffic flow breakdown probability to optimize link throughput. Applied Mathematical Modelling. 2010, v. 34, N.11, p.p. 3376-3389.

3. *Gazis D. C.* Traffic Theory. Berlin: Springer, 2002. 192 p.

4. *Hajiyev A.H., Mammadov T.Sh.* Mathematical models of moving particles and their application for queues. Theory Probab. its Appl. 2012, v. 56, № 4, p. 579-589.

5. *Wojciech Bozejko, Grzegorz Bocewicz.* Modelling and Performance Analysis of Cyclic Systems. Springer, v. 241, Studies in Systems, Decision and Control. 2020.

6. *Беляев Ю.К.* Об упрощенной модели движения без обгона. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, (English transl.: Soviet J.Comp. Syst. Sci.,) №3, 1969, с.17-21.

7. *Целе У.* Обобщение модели движения без обгона. Изв. АН СССР, Техн. kиберн., №5, 1972, p.100-103. (English transl.: Soviet J.Comp. Syst.Sci.).

8. *Hajiyev A.H.* Shuttle systems with finite volumes. Russian Acad. Sci., Doklady, Mathem., 2000, v.3, No.369, p.p.303-305.

9. it Hajiyev A.H. Stochastic shuttle systems. Russian Acad. Sci., Mathem., Doklady, 2001, т. 380, № 5, p.p.583-585.

10. *Belyaev Y.K., Hajiyev A.H.* Mathematical Models of Lift Systems and their Simulation. Proc. XIII ICMSEM, Canada, 2019, Springer-Verlag, Ser. Advance in Intelligent Systems and Computing. p.p.507-519.

11. *Belyaev Yu.K., Hajiyev A.H.* Mathematical Models of Systems with Several Lifts and Various Control Rules. Gnedenko Forum. RT&A, No. 2(**??**), Vol.15, June, 2020.

12. *Belyaev Y.K., Hajiyev A.H.* Estimation efficiency indices of operating vertical transportation systems. Book: Smart Cities, ISBN 978-1-83962-295-3, 2020.

# Further results on the theory of discrete-time branching processes allowing immigration and without finite variances

**Azam A.Imomov, Erkin E.Tukhtaev**

*Karshi State University, Karshi city, Uzbekistan*
*e-mail*: imomov_ azam@mail.ru, erkin.tuxtayev@mail.ru

Let $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ and $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. We consider the Galton-Watson Branching Process allowing Immigration (GWPI). An evolution of the process will occur by following scheme. An initial state is empty and the process starts owing to possible stream of immigrants. Each individual at any time $n \in \mathbb{N}$ produces $j$ progeny with probability $p_j$, $j \in \mathbb{N}_0$ independently of each other so that $p_0 > 0$. Simultaneously into the population $i$ immigrants possibly arrive with probability $h_i$, $i \in \mathbb{N}_0$ in each moment $n \in \mathbb{N}$. These individuals undergo further transformation obeying the offspring probability $\{p_j\}$. So denoting $X_n$ the population size of GWPI in time $n$, we can write the following sum:

$$X_0 = 0, \quad X_{n+1} = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{X_n} + \eta_{n+1}$$

for any $n \in \mathbb{N}$, where $\xi_k$ and $\eta_k$ are i.i.d. random variables with $\mathbb{P}\{\xi_k = j\} = p_j$ and $\mathbb{P}\{\eta_k = j\} = h_j$ for all $k \in \mathbb{N}$. Throughout the paper be assumed that $\sum_{j\in\mathbb{N}_0} h_j = 1$. The process $\{X_n\}$ is an homogeneous Markov chain with state space $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}_0$ and its $n$-step transition probabilities

$$p_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}\left\{X_{n+k} = j \middle| X_k = i\right\} \qquad \text{for any} \qquad k \in \mathbb{N}$$

are given by

$$\mathcal{P}_n^{(i)}(s) := \sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}^{(n)} s^j = \big(f_n(s)\big)^i \prod_{k=0}^{n-1} h\big(f_k(s)\big) \qquad \text{for any} \qquad i \in \mathcal{S} \tag{1}$$

where $f_n(s)$ is $n$-fold iteration of GF $f(s)$ for $s \in [0, 1)$; see [1]. Thus the transition probabilities $\left\{p_{ij}^{(n)}\right\}$ are completely defined by the probabilities $\{p_j\}$ and $\{h_j\}$.

The population process $\{X_n\}$ described above was first considered by Heathcote [2] in 1965. Further long-term properties of $\mathcal{S}$ and a problem of existence and uniqueness of invariant measures of GWPI were investigated in papers of Seneta [3], [4], Pakes [5], [6] and by many other authors. Therein high order moment conditions for GF $f(s)$ and $h(s)$ was required to be satisfied.

Zolotarev [7] was one of the first who demonstrated the encouraging prospect of application the SV conception in the theory of Markov branching processes with continuous-time. Afterwards due to the SV theory principally new results were proved, for the simple Galton-Watson Process without immigration by Slack [8] and Seneta [9], for GWPI by Pakes [10], [11]; see, also [12], [13] and [14].

In the paper we keep on the critical case, i.e. mean per-capita offspring number $\sum_{j\in\mathbb{N}} jp_j = f'(1-) = 1$. Discussing this case, we assume that the offspring GF $f(s)$ for $s \in [0,1)$ has the following form:

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\nu}\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-s}\right), \qquad [f_\nu]$$

where $0 < \nu < 1$ and $\mathcal{L}(x)$ is SV at infinity.

And also we everywhere will consider the case that immigration GF $h(s)$ for $s \in [0,1)$ has the following form:

$$1 - h(s) = (1-s)^{\delta}\ell\left(\frac{1}{1-s}\right), \qquad [h_\delta]$$

where $0 < \delta < 1$ and $\ell(x)$ is SV at infinity.

Main results of the paper appear provided that conditions $[f_\nu]$ and $[h_\delta]$ hold. We make also some extra assumptions for $\mathcal{L}(x)$ and $\ell(x)$. Namely, we assume that

$$\frac{\mathcal{L}(\lambda x)}{\mathcal{L}(x)} = 1 + o\left(\frac{\mathcal{L}(x)}{x^\nu}\right) \qquad \text{as} \qquad x \to \infty \qquad [\mathcal{L}_\alpha]$$

and

$$\frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1 + o\left(\frac{\ell(x)}{x^\delta}\right) \qquad \text{as} \qquad x \to \infty \qquad [\ell_\beta]$$

for each $\lambda > 0$; see [15, p. 185, condition SR3].

In our previous work [16] we considered the case $\gamma := \delta - \nu > 0$, in which $\mathcal{S}$ is ergodic. In particular, we established the following theorem.

**Theorem A.** *Let conditions $[f_\nu]$, $[h_\delta]$ hold and $\delta > \nu$. Then $\mathcal{P}_n(s)$ converges to a limit function $\pi(s)$ which generates the invariant measures $\{\pi_j\}$ for GWPI. The convergence is uniform over compact subsets of the open unit disc. If in addition, the conditions $[\mathcal{L}_\alpha]$ and $[\ell_\beta]$ are fulfilled then*

$$\mathcal{P}_n^{(0)}(s) = \pi(s)\left(1 + \Delta_n(s)\mathcal{N}_\delta\left(\frac{(\nu n)^{1/\nu}}{\mathcal{N}(n)}\right)\right),$$

*where $\mathcal{N}_\delta(x) = \mathcal{N}^\delta(x)\ell(x)$ and $\mathcal{N}(x)$ is known SV at infinity, herein*

$$\Delta_n(s) = \frac{1}{\delta - \nu}\,\frac{1}{\left(\nu_n(s)\right)^{\delta/\nu - 1}} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^{\delta/\nu}}\right)$$

*as $n \to \infty$ and $\nu_n(s) = \nu n + \Lambda^{-1}(1-s)$.*

If $\delta = \nu$ then $\ell(u) \equiv (1+\nu)\mathcal{L}(u)\,(1+o(1))$, so that $L(u) \to 1+\nu$ as $u \to \infty$. Thus it lends us another Markov process called *Q-process* instead of GWPI; see [17, pp. 56–58] and [18].

The aim of this note is to obtain some information for a case not covered above, i.e. for the cases $\gamma < 0$. We will establish a result similar to Theorem A.

## References


1. *Pakes A. G.* Limit theorems for the simple branching process allowing immigration, I. The case of finite offspring mean. Adv. Appl. Prob. 11, 1979, pp. 31–62.
2. *Heatcote C. R.* A branching process allowing immigration. J Royal Stat. Soc. B-27, 1965, pp. 138–143.
3. *Seneta E.* Functional equations and the Galton-Watson process. Adv. Appl. Prob. 1, 1969, pp. 1–42.
4. *Seneta E.* The stationary distribution of a branching process allowing immigration: A remark on the critical case. J Royal Stat. Soc. B-30(1), 1968, pp. 176–179.
5. *Pakes A. G.* On the critical Galton-Watson process with immigration. Jour. Austral. Math. Soc. 12, 1971, pp. 476–482.
6. *Pakes A. G.* Branching processes with immigration. Jour. Appl. Prob. 8(1), 1971 pp. 32–42.
7. *Zolotarev V. M.* More exact statements of several theorems in the theory of branching processes, Theory Prob. and Appl. 2, 1957, pp. 256–266.
8. *Slack R. S.* A branching process with mean one and possible infinite variance. Wahrscheinlichkeitstheor. und Verv. Geb. 9, 1968, pp. 139–145.
9. *Seneta E.* Regularly varying functions in the theory of simple branching process, Adv. Appl. Prob. 6, 1974 pp. 408–420.
10. *Pakes A. G.* Revisiting conditional limit theorems for the mortal simple branching process. Bernoulli. 5(6), 1999 pp. 969–998.
11. *Pakes A. G.* Some results for non-supercritical Galton-Watson process with immigration. Math. Biosci. 24, 1975, pp. 71–92.
12. *Imomov A. A.* On a limit structure of the Galton-Watson branching processes with regularly varying generating functions. Prob. and Math. Stat. 39(1), 2019, pp. 61–73.
13. *Imomov A. A., Tukhtaev E. E.* On application of Slowly Varying Functions with Remainder in the theory of Galton-Watson Branching Process. Jour. Siber. Fed. Univ.: Math. Phys. 12(1), 2019) pp. 51–57.
14. *Imomov A. A.* On long-time behaviors of states of Galton-Watson Branching Processes allowing Immigration. J Siber. Fed. Univ.: Math. Phys. 8(4), 2015 pp. 394–405.
15. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. Cambridge. 1987.
16. *Imomov A. A., Tukhtaev E. E.* On asymptotic structure of the critical Galton-Watson Branching Processes with infinite variance and Immigration. Proc. of 18-Intern. Conf. Applied Stochastic Models and Data Analysis: ASMDA'2019, Florence, Italy, June, 2019, pp. 507–514.
17. *Athreya K. B. and Ney P. E.* Branching processes. Springer, New York. 1972.
18. *Imomov A. A.* Limit Theorem for the Joint Distribution in the Q-processes. Jour. Siber. Fed. Univ.: Math. Phys. 7(3), 2014 pp. 289–296.

# Stochastic integral representation of nonsmooth Wiener functionals

**Jaoshvili Vakhtang, Namgalauri Ekaterine, Purtukhia Omar**

*Vladimir Komarov Tbilisi School of Physics and Mathematics N199 and Department of Mathematics, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Department of Mathematics, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Department of Mathematics and A. Razmadze Mathematical Institute, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Georgia*

vakhtangi.jaoshvili@gmail.com, ekanamgalauri96@gmail.com, o.purtukhia@gmail.com

After Clark [1][1] obtained the formula for the stochastic integral representation for Wiener functionals, which asserted only the existence of this representation, many authors tried to find the integrand explicitly, and the corresponding results were obtained when the functionals were smooth in some sense. When the functional $F$ belongs to the Hilbert space $D_{2,1}$ (where $D_{2,1}$ denotes the space of square integrable functionals having the first order stochastic derivative[2]) Ocone [3] proved that the integrand in the Clark representation is $E[D_tF|\Im_t^W]$ (the optional projection of the stochastic (Malliavin) derivative of $F$). Shiryaev, Yor and Graversen [4,5] proposed a method to find representation of the running maximum of Wiener process. Later on, using the Clark-Ocone formula, Renaud and Remillard [6] have established explicit martingale representations for path-dependent Wiener functionals.

[1]If $F$ is a square integrable $\Im_T^W := \sigma\{W_s : 0 \le s \le T\}$-measurable random variable, then (due to the Clark formula) there exist a square integrable $\Im_t^W := \sigma\{W_s : 0 \le s \le t\}$-adapted random process $\varphi(t,\omega)$ such that

$$F = E[F] + \int_0^T \varphi(t,\omega)dW_t(\omega).$$

In fact, this is the inverse statement of one important property of the Ito stochastic integral: if $f$ is square-integrable $\Im_t^W$-adapted random process, then the process

$$M_t = \int_0^t f(s,\omega)dW_s(\omega)$$

is a martingale with respect to the filtration $\{\Im_t^W\}_{t\ge 0}$.

To be convinced of this, it is sufficient to take the conditional mathematical expectation on both sides of the Clark representation. Indeed, in this way, we obtain that for the associated to $F$ Levy's martingale $M_t = E[F|\Im_t^W]$ the following stochastic integral representation is true

$$M_t = M_0 + \int_0^t \varphi(s,\omega)dW_s(\omega).$$

[2]Let us recall some definitions from [2].

The class of smooth Wiener functionals $S$ is the class of a random variables which has the form

$$F = f(W_{t_1},...,W_{t_n}),\ f \in C_p^\infty(R^n),\ t_i \in [0,T],\ n \ge 1,$$

where $C_p^\infty(R^n)$ is the set of all infinitely continuously differentiable functions $f : R^n \to R$ such that $f$ and all of its partial derivatives have polynomial growth.

The stochastic (Malliavin) derivative of a smooth random variable $F \in S$ is the stochastic process $D_tF$ given by

$$D_tF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_{t_1},...,W_{t_n})I_{[0,t_i]}(t).$$

Denote by $D_{2,1}$ the Hilbert space that is the closure of the class of smooth Wiener functionals with the following Sobolev type norm:

$$||F||_{2,1} = ||F||_{L_2(\Omega)} + |||D.F|||_{L_2(\Omega;L_2([0,T]))}.$$

In fact, we have defined the Malliavin derivative as an "inverse"of the Ito stochastic integral (with deterministic integrand) in the sense that $D^W W(h) = h$ (where $W(h) := \int_0^T h(s)dW_s$ and $D_t^W \int_0^T h(s)dW_s = h(t)$, as well as it's clear that $W_\theta = W(I_{[0,\theta]}(\cdot))$ and $D_t^W W_\theta = I_{[0,\theta]}(t)$).

In all cases described above investigated functionals, were stochasticaly (in Malliavin sense) smooth. Our approach with prof. Jaoshvili (2005-2009) in the framework of the classical Ito calculus, on the basis of the standard $L_2$ theory and the theory of weighted Sobolev spaces, made it possible to construct an explicit formula for the itegrand when the functional does not have the mentioned smoothness (see, for example [7]). Here we will explore the stochastically nonsmooth Wiener functionnals that can be considered in the future as a payoff function of a certain exotic European Option and study the issues of their stochastic integral representation, which it is known to play a significant role in the hedging problem of European Options. It has turned out that the requirement of smoothness of functional can be weakened by the requirement of smoothness only of its conditional mathematical expectation. We (with prof. O. Glonti, 2014) considered Wiener functionals which are not stochastically differentiable. In particular, we (see [8]) generalized the Clark-Ocone formula in case, when functional is not stochastically smooth, but its conditional mathematical expectation is stochastically differentiable and established the method of finding of integrand. Next, we have considered functionals which didn't satisfy even these weakened conditions. To such functionals belong, for example, Lebesgue integral (with respect to time variable) from stochastically non smooth square integrable processes.

In the 80th of the past century, it turned out (see, [9]) that the stochastic integral representation theorems (along with the Girsanov's measure change theorem) play an important role in the modern financial mathematics. In particular, using the integrand of the stochastic integral appearing in the integral representation, one can construct hedging strategies in the European options of different type. In contrast to the standard European Option payoff function (i. e. $(S_T - K)^+$), which is stochastically (in Malliavin sense) differentiable, we will discuss European type options with nonsmooth payoff functions. The payoff functions of derivative securities with more complicated forms than standard European or American call and put options are known as exotic options.

One of such kind exotic option is so-called Binary Option. It is an option with discontinuous payoff function. The simplest examples of the Binary Options are call and put options "cash or nothing". The payoff function of the call option has the form $BC_T = QI_{\{S_T>K\}}$, and for the put option – $BC_T = QI_{\{S_T<K\}}$, where $K$ is the strike price at the time of execution $T$ (it should be noted that indicator of event $A$ is Malliavin differentiable if and only if probability $P(A)$ is equal to zero or one [2,3]). Moreover, so-called Asian Options also are type of Exotic Option.

Despite that application of the Clark-Ocone formula needs as a rule essential efforts it is possible in many cases to determine the form of the representation using Malliavin calculus, if a functional is Malliavin differentiable. We consider nonsmooth (in Malliavin sense) functionals and have developed some methods of obtaining of constructive martingale representation theorems. The obtained results can be used to establish the existence of a hedging strategy in various European Options with corresponding payoff functions.

**Theorem (Ocone [3])**. If $F$ is differentiable in Malliavin sense, $F \in D_{2,1}$, then the stochastic integral representation is fulfilled

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F|\Im_t^W]\mathrm{d}W_t \quad (P - a.s.).$$

A different method for finding the integrand of stochastic integral was proposed by Shiryaev, Yor and Graversen [4,5], which was based on the Ito (generalized) formula and the Levy theorem for the Levy martingale $M_t = E[F|\Im_t]$ associated with $F$.

**Theorem (Shiryaev, Yor [4])**. Let $M_T = \sup_{0\le t\le T} W_t$. Then the following stochastic integral representation holds

$$M_T = EM_T + 2\int_0^T [1-\Phi(\frac{M_t - W_t}{\sqrt{T-t}})]dW_t,$$

where $\Phi$ is standard normal distribution function.

**Theorem (Graversen, Shiryaev and Yor [5])**. Let

$$g_T = sup\{0 < t \le T : W_t = 0\}, \quad M_u = \max_{t\le u} W_t \quad and \quad M_{g_T} = \max_{t\le g_T} W_t.$$

Then we have

$$M_{g_T} = \frac{1}{2}EM_T + \int_0^T [\frac{1}{2}\Psi(\frac{2M_u - W_u}{\sqrt{T-u}}) - (M_u - M_{g_u})\varphi_{T-u}(W_u)]dW_u,$$

where

$$EM_T = \sqrt{2T/\pi}, \quad \Psi(x) = 2[1-\Phi(x)]$$

and

$$\varphi_{T-u}(x) = \frac{1}{\sqrt{T-u}}\varphi(\frac{x}{\sqrt{T-u}}),$$

where $\varphi$ is standard normal distribution density function.

Let $\mathcal{B}(R)$ be a Borel $\sigma-$ algebra on $R$, $\lambda$ be a Lebesgue measure, and $\rho(x,T) := \exp\{-\frac{x^2}{2T}\}$.

**Theorem (Jaoshvili, Purtukhia [7])**. Let the function $f \in L_{2,T/\alpha}, 0 < \alpha < 1$, and it has the generalized derivative of the first order $\partial f/\partial x$, such that $\partial f/\partial x \in L_{2,T/\beta}$, $0 < \beta < 1/2$, then the following integral representation holds

$$f(W_T) = E[f(W_T)] + \int_0^T E\left[\frac{\partial f}{\partial x}(W_T)|\Im_t^W\right] \mathrm{d}W_t \quad (P-a.s.),$$

where $L_{2,T}$ denotes the set of measurable functions $u : R \to R$, such that $u(\cdot)\rho(\cdot,T) \in L_2 := L_2(R,\mathcal{B}(R),\lambda)$.

**Theorem (Glonti, Purtukhia [8])**. Suppose that $g_t := E[F|\Im_t^W]$ is Malliavin differentiable ($g_t \in D_{2,1}^W$)[3] for almost all $t \in [0,T)$. Then we have the stochastic integral representation

$$g_T = F = E[F] + \int_0^T \nu_s dW_s \quad (P-a.s.),$$

where

$$\nu_s = \lim_{t\uparrow T} E[D_s^W g_t|\Im_s^W] \ \ in\ the \ \ L_2([0,T]\times\Omega).$$

Let us now fix the constants $C_2 \le 0$ and $C_1 \ge C_2$ and consider the following nonsmooth path-dependent Wiener functional

$$F = (W_T - C_1)^- I_{\{\inf\limits_{0\le t\le T} W_t \le C_2\}}. \qquad (1)$$

[3]It is well-known, that if random variable is stochastically differentiable in Malliavin sense, then its conditional mathematical expectation is differentiable too ([2]). On the other hand, it is possible that conditional expectation can be smooth even if random variable is not stochastically smooth. For example, it is well-known that $I_{\{W_T\le x\}} \notin D_{2,1}$, but for all $t \in [0,T)$ :

$$E[I_{\{W_T\le x\}}|\Im_t^W] = \Phi\left(\frac{x - W_t}{\sqrt{T-t}}\right) \in D_{2,1}.$$

Then we have.

**Theorem 1**. For the Wiener functional (1) the following stochastic integral representation holds

$$F = EF + \int_0^T \Phi\big(\frac{2C_2 - C_1 - W_t}{\sqrt{T-t}}\big)dW_t \quad (P - a.s.).$$

Next, we have considered functionals which didn't satisfy even the weakened conditions from Glonti, Purtukhia [8]. To such functionals belong, for example, Lebesgue integral (with respect to time variable) from stochastically nonsmooth square integrable processes[4].

**Theorem 2**. If the deterministic function

$$V(t,x) := E\big[\int_t^T f(s,W_s)ds\big|W_t = x\big]$$

satisfies the requirements of the generalized Ito theorem, then the following stochastic integral representation is fulfilled

$$f(t,W_t) = E\big[f(t,W_t)\big] + \int_0^T \frac{\partial}{\partial x}V(t,W_t)dW_t \quad (P - a.s.).$$

Let us now fix the deterministic functions $h_1(t) \leq h_2(t)$ and consider the following integral type, nonsmooth Wiener functional

$$\int_0^T I_{\{h_1(t)\leq W_t\leq h_2(t)\}}dt.$$

Then we have.

**Theorem 3**. The following stochastic integral representation is fulfilled

$$\int_0^T I_{\{h_1(t)\leq W_t\leq h_2(t)\}}dt = \int_0^T \Phi\big(\frac{x}{\sqrt{t}}\big)\big|_{x=h_1(t)}^{h_2(t)} +$$

$$+ \int_0^T \int_t^T \varphi\big(\frac{x-W_t}{\sqrt{s-t}}\big)\big|_{x=h_1(t)}^{h_2(t)} ds dW_t \quad (P - a.s.).$$

## References


1. *Clark M. C.* The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals, J. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 41, 1970, 1282-1295.

2. *Nualart D.* Malliavin calculus and related topics (second edition), Springer-Verlag, 2006.


[4] In particular, to such functional belongs the integral type functional $\int_0^T u_s(\omega)ds$ with nonsmooth integrand $u_s(\omega)$. It is well-known that if $u_s(\omega) \in D_{2,1}$ for all $s$, then $\int_0^T u_s(\omega)ds \in D_{2,1}$ and $D_t\{\int_0^T u_s(\omega)ds\} = \int_0^T D_t u_s(\omega)ds$. But if $u_s(\omega)$ is not differentiable in Malliavin sense, then the Lebesgue average (with respect to $ds$) also is not differentiable in Malliavin sense (see, for example, [10]). Indeed, in this case the conditional mathematical expectation is not stochastically smooth, because we have:

$$E[\int_0^T u_s(\omega)ds|\Im_t^W] = \int_0^t u_s(\omega)ds + \int_t^T E[u_s(\omega)|\Im_t^W]ds,$$

where the first summand (integral) is analogous that the initial integral and therefore it is not Malliavin differentiable, but the second summand is differentiable in Malliavin sense when $u_s$ satisfied our weakened condition. It should be noted that such type integral functionals have been considered in our previous works (Glonti, Purtukhia [10]) and (Glonti, Jaoshvili and Purtukhia [11]).

3. *Ocone D.* Malliavin calculus and stochastic integral representation formulas of diffusion processes, J. Stochastics, Vol. 12, 1984, 161вЂ“185.
4. *Shiryaev A. N., Yor M.* On the problem of stochastic integral representations of functionals of the Brownian motion. I, J. Teor. Veroyatnost. i Primenen., Vol. 48 (2), 2003, 375-385.
5. *Graversen S., Shiryaev A. N., Yor M.* On the problem of stochastic integral representations of functionals of the Browning motion. II, J. Teor. Veroyatnost. i Primenen., Vol. 51 (1), 2006, 64-77.
6. *Renaud J-F., Remillard B.* Explicit martingale representations for Brownian functionals and applications to option hedging, J. Stochastic Analysis and Applications, Vol. 25 (4), 2007, 801-820.
7. *Jaoshvili V., Purtukhia O.* Stochastic Integral Representation of Functionals of Wiener Processes, J. Bull. Georg. Acad. Sci., Vol. 171 (1), 2005, 17-20.
8. *Glonti O., Purtukhia O.* On One Integral Representation of Functionals of Brownian Motion, SIAM J. Theory of Probability and Its Applications, 2017, Vol. 61, 133вЂ“139.
9. *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, J. Stochastic Processes and Applications, Vol 11, 1981, 215-260.
10. *Glonti O., Purtukhia O.* Hedging of European Option of Integral Type, J. Bull. Georg. Acad. Sci., Vol. 8(3), 2014, 4-13.
11. *Glonti O., Jaoshvili V., Purtukhia O.* Hedging of European Option of Exotic Type, J. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol 168, 2015, 25-40.

# Sequential statistical testing of several simple hypotheses under distortion of the observations probability distribution

**Kharin A., Ton That Tu, Ivankovich I., Song Peidong**

*Dept. of Probability Theory & Mathematical Statistics, Belarusian State University, Minsk, Belarus*
*University of Science & Education – University of Danang, Vietnam*
KharinAY@bsu.by, tthattu@gmail.com, ivill1104@gmail.com, linyuyix@gmail.com

**Introduction**

In applied problems of modern data analysis we often face with a problem of statistical testing of several simple hypotheses on the parameter value that controls the probability distribution of an observed random sequence. Those simple hypotheses, as usual, correspond to some typical modes of the process observed: for example, one value corresponds to the growth of the incidence level, another one - to the recession, and the third one - to the “no-changes” mode.

Especially in the situations, where data come one after another, and are not available all together simultaneously, it is natural to use sequential tests [1] to discriminate between those hypotheses. Sequential tests are known to hold some optimal properties [2], e.g. the sequential probability ratio test minimizes the expected sample size provided the upper bounds for error type I and II probabilities are satisfied. Exact calculation of the performance characteristics for sequential tests is a complicated problem even for rather basic models of data [3]. In situations where the random number of observations required to make a decision is large enough, approximations of the test statistic probability distribution [4] can be used. But sequential tests are usually applied to minimize the expected sample size, and as a result, a more detailed analysis is required.

Even more, in practice, data often do not follow the hypothetical model exactly, some distortions of the probability distribution of observations are present [5]. In this situation, optimal properties of sequential tests may be violated essentially [6]. Here appears the problem of robustness analysis for sequential statistical tests under distortions [7]. Also, the problem of the robust sequential test construction is topical for the cases, where the performance characteristics of the test deviate essentially from the optimal values calculated under the hypothetical model [8].

In this paper we use the results of [9] (the methodology of robustness analysis and robust sequential test construction for case of two hypotheses), and [10] (performance analysis of multi-hypotheses sequential tests) to solve the mentioned problems of robustness for two models of data in case of several simple hypotheses: 1) independent identically distributed random variables under "outliers"; 2) time series with a trend.

**Case of i.i.d. observations under distortion**

Let on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a sequence $x_1, x_2, \ldots$ of independent identically distributed random variables be defined, with a probability density function $p(x;\theta)$, $x \in \mathbf{R}$, where $\theta \in \Theta \subseteq \mathbf{R}$ is a true value of the parameter. This value is unknown for the observed random sequence, and there are $M$ simple alternative hypotheses on it ($\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_M\}$):

$$\mathcal{H}_m: \quad \theta = \theta_m, \; m = 1, \ldots, M. \tag{1}$$

Suppose the prior probabilities $P\{\mathcal{H}_m\}$, $m = 1, \ldots, M$, of hypotheses (1) are known. The Bayesian sequential test based on calculation of the posterior probabilities $P\{\mathcal{H}_m \mid x_1, \ldots, x_t\}$ of (1), $t = 1, 2, \ldots$, after each observation obtained, and comparison of the maximum with a threshold $C \in (0,1)$, is constructed.

Suppose the model described above is distorted: instead of the hypothetical $p(\cdot)$, the factual probability density function of observations is

$$\tilde{p}(x;\theta) = (1-\epsilon)p(x;\theta) + \epsilon\bar{p}(x;\theta),$$

where $\bar{p}(x;\theta)$ is the "contaminating" probability density function, and $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ is the "contamination" level characterizing the frequency of "outlier" appearance.

To illustrate the influence of distortions to the performance characteristics of the test, the following basic numerical example was considered:

$$M = 4; \; p(x;\theta) = n_1(x;\theta,1); \; \theta_1 = 0, \; \theta_m = \theta_{m-1} + \Delta, \; m = 2,3,4;$$

$$P\{\mathcal{H}_m\} = \frac{1}{4}, \; m = 1, \ldots, 4; \; \bar{p}(x;\theta) = n_1(x;\theta,k).$$

The Monte-Carlo estimates of the decision probabilities are shown in Figure 1 as 3D-dependencies on the "contamination" level $\epsilon \in [0, \frac{1}{2}]$ and the "contamination" scale $k \in [1,5]$. The orange (the highest at $\epsilon = 0$) surface is for the probability of the correct decision in favor of true $\mathcal{H}_2$. The situation changes already at $\epsilon = 0.05$ and $=1.5$. This example shows that the robust version of the test should be constructed and used instead of the one traditionally used, in the situation where "outliers" in data are possible.

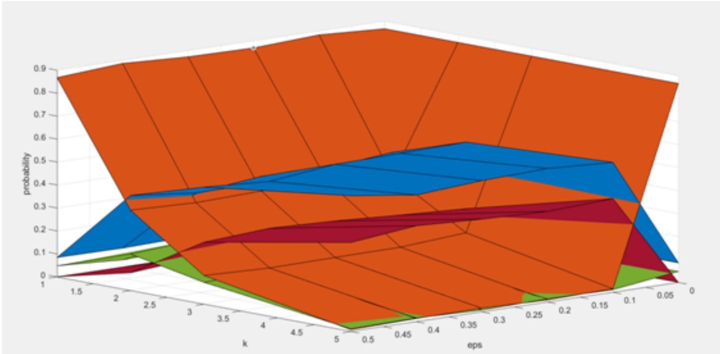


Figure 1. Probabilities of decisions under distortion, $\Delta = 0.3$;
orange color – in favor of $\mathcal{H}_2$ (true); blue – $\mathcal{H}_1$; red – $\mathcal{H}_3$; green – $\mathcal{H}_4$

**Case of time series with a trend**

Let $x_1, x_2, \ldots$ be now observations of a time series with a trend:

$$x_t = \theta^T \psi(t) + \xi_t, \ t \geq 1, \tag{2}$$

where $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_l(t))$, $t \geq 1$, are the vectors of basic functions of trend, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_l)^T \in \mathbf{R}^l$ is an unknown vector of coefficients, and $\{\xi_t, \ t \geq 1\}$ is a sequence of independent identically distributed random variables from $\mathcal{N}_1(0, \sigma^2)$.

The case of $M$ simple hypotheses (1) is considered w.r.t. the vector $\theta$. The following two sequential test were analyzed.

1. $M$-ary sequential probability ratio test. The stopping time $N_a$ and the final decision $d_a$ for this test are defined as follows:

$$N_a = \inf\left\{ n \geq 1 : \ \exists m \in \{1, \ldots, M\}, \ P\{\mathcal{H}_m \mid x_1, \ldots, x_n\} > \frac{1}{1 + A_m} \right\},$$

$$d_a = \arg \max_{1 \leq m \leq M} P\{\mathcal{H}_m \mid x_1, \ldots, x_{N_a}\},$$

where $A_m \in (0, 1]$ are some specified constants, $m \in \{1, \ldots, M\}$.

2. Matrix sequential probability ratio test. Denote

$$\Lambda_n(i,j) = \ln \left( \prod_{t=1}^{n} \frac{n_1(x_t; (\theta_i)^T \psi(t), \sigma^2)}{n_1(x_t; (\theta_j)^T \psi(t), \sigma^2)} \right); \tag{3}$$

$$\tau_i = \inf\{n \in \mathbf{N} : \ \Lambda_n(i,j) > b_{ij}, \ \forall j \in \{1, \ldots, M\} \setminus \{j\}\}, \ i \in 1, \ldots, M,$$

where $B = (b_{ij})$, $i, j \in \{1, \ldots, M\}$, is the predefined matrix of the test thresholds (using them, the error probabilities of the test are controlled). For this test the stopping time $N_b$ and the final decision $d_b$ are defined in the following way:

$$N_b = \min\{\tau_i : \ i \in \{1, \ldots, M\}\}, \ d_b = \arg \min_{i \in \{1, \ldots, M\}} \tau_i.$$

For the two sequential tests defined above, the termination with probability 1 property and the finiteness of all moments of the random stopping time are proved under a mild condition. For the M-ary sequential probability ratio test, upper bounds for the error probabilities are derived.

A robustified version of the matrix sequential probability ratio test based on change limitation for statistics (3) is constructed and its properties are analyzed via numerical experiments.

## References


1. *Sobel M., Wald A.* A sequential design procedure for choosing one of three hypotheses concerning the unknown mean of normal distribution, Annals of Mathematical Statistics, vol. 20, 1949, p. 502-522.
2. *Širjaev A.N.* Statistical sequential analysis: Optimal stopping rules, American Mathematical Society, 1973.
3. *Lai T.L.* Sequential analysis: some classical problems and new challenges, Statistica Sinica, 11, 2001, p. 308-408.
4. *Siraždinov S.H., Formanov Š.K.* On the estimates of the rate of convergence in the central limit theorem for homogeneous Markov chains, Theory Probab. Appl., vol. 28 (2), 1984, p. 229-239.
5. *Kharin, A.Y.* Robust Bayesian prediction under distortions of prior and conditional distributions, Journal of Mathematical Sciences, vol. 126 (1), 2005, p. 992-997.
6. *Huber P.J.* Robust statistics, Wiley, 1981.
7. *Kharin A., Tu T.T.* Performance and robustness analysis of sequential hypotheses testing for time series with trend, Austrian Journal of Statistics, vol. 46 (3-4), 2017, p. 23-36.
8. *Kharin A.* Robustness of Bayesian and sequential statistical decision rules, Belarusian State University, 2013. (in Russian)
9. *Kharin A.* Performance and robustness evaluation in sequential hypotheses testing, Communications in Statistics – Theory and Methods, vol. 45 (6), 2016, p. 1693-1709.
10. *Tu T.T., Kharin A.Y.* Sequential probability ratio test for many simple hypotheses on parameters of time series with trend, Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics, vol. 1, 2019, p. 35-45.


# Characterization of minimax identity for robust non-concave utility functions


**Kharytonova O**

*Taras Schevchenko Kyiv National University*

e-mail olenakharytonova06@gmail.com


### Introduction

We study the robust utility maximization problem, i.e. $\sup\limits_{X\in\mathcal{X}(x)} \inf\limits_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)]$, of the terminal wealth in complete market models, when the investor is uncertain about the underlying probabilistic model and averse against both risk and model uncertainty. The solution to problem is well known in the case where the utility function $U$ is concave. We extended these results to the case of non-concave $U$ by considering its concave envelope.

A lot of different aspects can be considered in this problem: market completeness, properties of utility function, payoff modelling, probability measures etc. Our main interest is in the very general setup: incomplete market, general set of prior models, and utility functions, which are not necessarily complete.

**Model setup**

We consider the model as in [5] with the additional assumption that the discounted price process is locally bounded.

By $U(x)$ we denote investor's utility function, conditions on $U(x)$ will be stated later.

We consider a stochastic discounted price process $S = (S_t)_{0\le t\le T}$ with $d$ assets, assuming that $S$ is a $d$-dimensional locally bounded semimartingale on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with respect to a filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$. The pair $(x, \xi)$ is a self-financing trading strategy, where $x \in \mathbb{R}$ is the initial wealth and $\xi = (\xi_t)_{0\le t\le T}$ is a $d$-dimensional predictable and $S$ is an integrable process. The corresponding value process $X$ satisfies

$$X_t = X_0 + \int_0^t \xi_r dS_r, \quad 0 \le t \le T.$$

Consider set $\mathcal{X}(x)$, $x > 0$ of all such processes $X$, with $X_0 \le x$ which are admissible in the sense that $X_t \ge 0,$ for $0 \le t \le T$.

We impose assumptions below on the set of probability measures $\mathcal{Q}$ on $(\Omega, \mathcal{F})$, as in [5].

**Assumption 1.**

*(i)* $\mathcal{Q}$ *is convex;*

*(ii)* $\mathbb{P}[A] = 0$ *if and only if* $Q[A] = 0$ *for all* $Q \in \mathcal{Q}$;

*(iii) The set* $\mathcal{Z} := \{dQ/dP | Q \in \mathcal{Q}\}$ *is closed in* $L^0(\mathbb{P})$.

Additionally to the Assumption 1 we suppose that

*(iv) The set* $\mathcal{Z}_e := \{dQ/dP | Q \in \mathcal{Q}_e\}$ *is closed in* $L^0(\mathbb{P})$, where $\mathcal{Q}_e$ denotes the set of measures in $\mathcal{Q}$ that are equivalent to $\mathbb{P}$.

**Assumption 2.**

*There is a unique equivalent local martingale measure, which we denote as* $Q^e$.

Denote the next value functions of the robust utility and the optimal investment problems

$$u(x) := \sup_{X\in\mathcal{X}(x)} \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)],$$

$$u_Q(x) := \sup_{X\in\mathcal{X}(x)} E_Q[U(X_T)].$$

As in [6, 7], consider the set

$$C(x) := \{g \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) | 0 \le g \le X_T \text{ for some } X \in \mathcal{X}(x)\}.$$

It is easy to see that

$$u(x) = \sup_{X\in\mathcal{X}(x)} \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)] = \sup_{g\in C(x)} \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[U(g)];$$

$$u_Q(x) = \sup_{X\in\mathcal{X}(x)} E_Q[U(X_T)] = \sup_{g\in C(x)} E_Q[U(g)].$$

**Remark 1.** *It is known from Delbaen and Schachermayer (see [2] for the case of a locally bounded semimartingale* $S$*, [3] for the general case and [4] for more detailed version) that for* $g \ge 0$*, it holds that*

$$g \in C(x) \iff \sup_{Q \in \mathcal{M}_e} E_Q(g) \le x \iff \sup_{Q \in \mathcal{M}_a} E_Q(g) \le x,$$

*where $\mathcal{M}_e$ is the set of equivalent local martingale measures and $\mathcal{M}_a$ is the set of absolutely continuous local martingale measures.*

In our model setup $\mathcal{M}_e = \{Q^e\}$, and hence

$$g \in C(x) \iff E_{Q^e}(g) \le x.$$

**Remark 2.** Note that actually we do not need to consider the process $\{X_t\}_{0 \le t \le T}$ as well as sets $\mathcal{X}(x), C(x)$, since our problem is equivalent to considering $\sup\limits_{g: E_{Q^e}(g) \le x} \inf\limits_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(g)]$, where $g \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ and $x > 0$. We stated the general model setup in the beginning of the paper to gain more understanding about the problem and show that problem has economic sense and useful for practical use.

**Main result**

We study the minimax identity for the robust non-concave utility functional in complete market model, i.e.

$$\sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E_Q[U(X_T)].$$

Assume that the utility function $U : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ is such that $U(\infty) > 0$, and $U(x) = -\infty$ for $x < 0$, is non-constant, non-decreasing, upper semi-continuous and satisfies the mild growth condition:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{U(x)}{x} = 0.$$

It is known from [8, Proposition 3.1] that $U(x)$ has a non-decreasing and continuous concave envelope $U_c(x)$, i.e. the smallest concave function such that $U_c(x) \ge U(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Denote by

$$u^c(x) := \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(X_T)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)];$$

$$u^c_Q(x) := \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E_Q[U_c(X_T)] = \sup_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)].$$

We impose two additional assumptions in order to ensure that the value function of the optimal investment problem is finite:

**Assumption 5.** *For all $x > 0$ there exists a measure $Q_0 \in \mathcal{Q}_e$ such that $u_{Q_0}(x) < \infty$.*

**Assumption 6.** *$u^c_{Q_0}(x) < \infty$ for some, and hence for all $x > 0$ and some $Q_0 \in \mathcal{Q}_e$.*

**Theorem 1.** *Let Assumption 1–4 hold. Moreover let the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be atomless. Then the following holds*

$$\begin{array}{ccc}
\sup\limits_{g \in C(x)} \inf\limits_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] = & \sup\limits_{g \in C(x)} \inf\limits_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)] = & \inf\limits_{Q \in \mathcal{Q}} \sup\limits_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)] \\
\sup\limits_{g \in C(x)} \inf\limits_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] & & \inf\limits_{Q \in \mathcal{Q}_e} \sup\limits_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)] \\
\sup\limits_{g \in C(x)} \inf\limits_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(g)] \le & \inf\limits_{Q \in \mathcal{Q}} \sup\limits_{g \in C(x)} E_Q[U(g)] \le & \inf\limits_{Q \in \mathcal{Q}_e} \sup\limits_{g \in C(x)} E_Q[U(g)]
\end{array}$$

**Remark 3.** *Additionally to the Assumption 1 suppose that for all $Q \in Q_e : u^c_Q(x) < \infty$ for some $x > 0$ and that $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{u^c_Q(x)}{x} = 0$, for each $Q \in \mathcal{Q}_e$. Then it follows from the first part of the proof of [5, Theorem 2.6 and Lemma 4.1 (a)] that for any $x > 0$, there exist some $\widehat{g} \in C(x)$ and $\widehat{Q}_0 \in \mathcal{Q}_e$ such that*

$$u^c(x) = \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[U_c(\widehat{g})] = E_{\widehat{Q}_0}[U_c(\widehat{g})] = u^c_{\widehat{Q}_0}(x)$$

By $\widehat{Q}_0 \in \mathcal{Q}_e$ we denote such a measure which satisfies

$$u^c(x) = u^c_{\widehat{Q}_0}(x).$$

Now we present the conditions under which the minimax identity for a non-concave utility function $U$ holds.

**Theorem 2.** *Suppose that all assumptions of Theorem 1 hold. Then, the next two equalities are equivalent*

*(i)* $\sup\limits_{g\in C(x)} \inf\limits_{Q\in\mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] = \sup\limits_{g\in C(x)} E_{\widehat{Q}}[U(g)]$, *for* $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}_e$.

*(ii)* $\sup\limits_{g\in C(x)} \inf\limits_{Q\in\mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] = \sup\limits_{g\in C(x)} \inf\limits_{Q\in\mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)]$

**Theorem 3.** *Suppose that all assumptions from Remark 6 and from Theorem 1 hold. Assume that at least one of the items below holds*

*(i) There exists such a measure $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}_e$ that for all $g \in C(x)$ : $\inf\limits_{Q\in\mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] = E_{\widehat{Q}}[U_c(g)]$;*

*(ii) For any sequence $g_n \in C(x)$ such that $\lim\limits_{n\to\infty} E_{\widehat{Q}_0}[U_c(g_n)] = \sup\limits_{g\in C(x)} \inf\limits_{Q\in\mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)]$ it holds that $\lim\limits_{n\to\infty} E_{\widehat{Q}_0}[U_c(g_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{Q\in\mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g_n)]$*

*Then, we have*

$$\sup_{g\in C(x)} \inf_{Q\in\mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] = \sup_{g\in C(x)} \inf_{Q\in\mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)].$$

*Hence, all inequalities in Theorem 1 turn to equalities.*

Before presenting next theorem let us introduce a notation. By $V(y)$ we denote the conjugate of $U$ as

$$V(y) := \sup_{x>0}\{U(x) - xy\}.$$

Note that $\partial V$ denotes the subdifferential of $V$; see more in [1, 9 (Chapter II)].

**Theorem 4.** *Suppose that all assumptions of Theorem 1 hold. Additionally, assume that $\frac{dQ^e}{dP}$ has a continuous distribution. Suppose also that for some $\lambda(\geq 0)$ the maximizer for $u^c(x)$ satisfies $g^\star \in -\partial V(\lambda \cdot \frac{dQ^e}{dP})$.*

*Then $g^\star$ is also a maximizer for $u(x)$. Moreover, we have*

$$\sup_{g\in C(x)} \inf_{Q\in\mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] = \sup_{g\in C(x)} \inf_{Q\in\mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)].$$

*Hence, all inequalities in Theorem 1 turn to equalities.*

**Conclusions**

We have studied the minimax identity for non-concave utility functions in the complete market models. We have shown the relations between robust functionals of non-concave utility function and it's concavification. Using these relations it was shown that under some assumptions the minimax identity for non-concave functions holds.

This problem can be studied further in the complete as well as incomplete market models. The proof of minimax identity for non-concave utility functions leads to construction of the unique optimal investment strategy of the problem of maximization the robust non-concave utility functional under natural assumptions.

### References


1. *Reichlin, Christian Rochus August* "Utility Maximization with a Given Pricing Measure When the Utility Is Not Necessarily Concave"; Mathematics and Financial Economics, Volume 7, Issue 4, 2013, pp 531-556,

2. *Delbaen, F., Schachermayer, W.* A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Math. Ann. 300 (1994), no. 3, pp. 463-520.

3. *Delbaen, F., Schachermayer, W.* The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. Math. Ann. 312, (1998), pp. 215-250

4. *Delbaen, F.; Schachermayer, W.* The mathematics of arbitrage.(2006).ISBN 978-3-540-21992-7.

5. *Schied, Alexander; Wu, Ching-Tang* Duality theory for optimal investments under model uncertainty. SFB 649 Discussion Paper 2005-025, Economic Risk, 2005

6. *Kramkov, D., Schachermayer, W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. Ann. Appl. Probab. 9, no. 3, (1999), pp. 904-950.

7. *Kramkov, D., Schachermayer, W* Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. Ann. Appl. Probab., Vol. 13, no. 4 (2003).

8. *Aumann, R. and M. Perles* A variational problem arising in economics, Journal of Mathematical Analysis and Applications 11, 1965, pp. 488-503

9. *Reichlin, Christian Rochus August* "Non-concave utility maximization: optimal investment, stability and applications Doctoral Thesis, 2012.


# Deterministic approximation for nearly critical branching processes with dependent immigration


**Khusanbaev Y.M., Sharipov S.O.**

*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Academy Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

yakubjank@mail.ru, sadi.sharipov@yahoo.com


Let for each $n \in N$ $\left\{\xi_{k,j}^{(n)},\, k, j \in N\right\}$ and $\left\{\varepsilon_k^{(n)},\, k \in N\right\}$ be the two independent families of independent identically distributed random variables with nonnegative integer values. The sequence of branching processes with immigration $\left\{X_k^{(n)},\, k \geq 0\right\}$, $n \in N$ is defined by the following recursion relation

$$X_0^{(n)} = 0, \quad X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k, n \in N. \tag{1}$$

For a fixed $n \in N$ we can interpret $X_k^{(n)}$ as the size of $k-$th generation of a population and $\xi_{k,j}^{(n)}$ is the number of offspring of the $j-$th individual in the $(k-1)-$st generation and $\varepsilon_k^{(n)}$ is the number of immigrants contributing to the $k-$th generation.

Assume that $a_n = \mathrm{E}\xi_{1,1}^{(n)} < \infty$. The cases when the offspring mean is less, equal or larger than one are referred to subcritical, critical or supercritical, respectively.

Branching processes models are important field of stochastic processes and extensively used in various parts of natural sciences, among others in biology, epidemiology, physics, computer sciences and so forth. We refer to Athreya and Jagers [1] and Haccou et al. [2] for recent investigations and applications.

There have been many research works on limit theorems for branching processes with immigration. We refer to the survey of Vatutin and Zubkov [3] where one can find various results concerning asymptotic behavior of such processes. We do not give historical overview of asymptotic results for (1). In [4]-[5], Rahimov obtained functional limit theorems for fluctuations of critical and nearly critical branching processes with immigration when immigration mean tends to infinity. The same author [5] proved deterministic approximation for (1). We study weak convergence in Skorokhod space $D[0,\infty)$ of properly normalized process (1) under condition that immigration process $\left\{\varepsilon_k^{(n)},\, k \in N\right\}$ are non-identically distributed and dependent for each $k, n \geq 1$.

First, let us recall the notation of regularly varying function.

**Definition.** A measurable function $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ is called regularly varying at infinity if it can be represented in the form

$$f(x) = x^{\rho} l(x)$$

where $\rho \in R$ is called index of regular variation and $l(x)$ is a slowly varying function.

If a sequence $\{f(n), n \geq 1\}$ is regularly varying with exponent $\rho$, we write $\{f(n), n \geq 1\} \in R_\rho$. Assume that for each $n \in N$ the variables $a_n = \mathrm{E}\xi_{1,1}^{(n)}$, $b_n = Var\left(\xi_{1,1}^{(n)}\right)$ exist and finite. We also assume that $\alpha(n,k) = \mathrm{E}\varepsilon_k^{(n)} < \infty$ and $\beta(n,k) = Var\left(\varepsilon_k^{(n)}\right) < \infty$ for each $n, k \in N$.

The following assumptions are needed in the sequel.

C1. There are sequence $\{\alpha(k), k \geq 1\} \in R_\alpha$ and $\{\beta(k), k \geq 1\} \in R_\beta$ with $\alpha, \beta \geq 0$, such that, as $n \to \infty$ for each $s \in R_+$,

$$\max_{1 \leq k \leq ns} |\alpha(n,k) - \alpha(k)| = o(\alpha(n)), \max_{1 \leq k \leq ns} |\beta(n,k) - \beta(k)| = o(\beta(n)).$$

C2. $a_n = 1 + c_0 n^{-1} + o(n^{-1})$ as $n \to \infty$ for some $c_0 \in R$;

C3. $b_n = o(\alpha(n))$ as $n \to \infty$;

C4. $\alpha(n) \to \infty$, $\beta(n) = o(\alpha^2(n))$ as $n \to \infty$.

Denote $A^{(n)}(k) = \mathrm{E}X_k^{(n)}$ and $B_n^2(k) = Var\left(X_k^{(n)}\right)$. By (1) and Lemma 1 from [6], we get

$$A^{(n)}(k) = \sum_{j=1}^{k} \alpha(n,j)\, a_n^{k-j}, \quad B_n^2(k) = \Delta_n^2(k) + \sigma_n^2(k) + 2\omega_n(k)$$

where

$$\Delta_n^2(k) = \frac{b_n}{1 - a(n)} \sum_{j=1}^{k} \alpha(n,j)\, a_n^{k-j-1}\left(1 - a_n^{k-j}\right),$$

$$\sigma_n^2(k)=\sum_{j=1}^{k}\beta(n,j)\,a_n^{2(k-j)},\quad \omega_n(k)=\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}cov\left(\varepsilon_j^{(n)},\varepsilon_i^{(n)}\right)a_n^{2k-j-i}.$$

Throughout the paper, we use the following notations $A(n)=A^{(n)}(n)$, $B^2(n)=B_n^2(n)$, $\Delta^2(n)=\Delta_n^2(n)$, $\sigma^2(n)=\sigma_n^2(n)$, $\omega(n)=\omega_n(n)$ in the case when $k=n$.

Introduce the functions

$$\mu_\alpha(t)=\int_0^t u^\alpha e^{a(t-u)}du,\quad t\in R_+.$$

Note that $\mu(t)=t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ when $c_0=0$.

For $t\geq 0$, define the random step function

$$X_n(t)=\frac{X_{[nt]}^{(n)}}{A(n)},\quad n\geq 1,$$

where $[x]$ denotes the integer part of nonnegative real number $x$.

The following is our main theorem of this paper.

**Theorem.** Let for each $n\in N$ $\left\{\varepsilon_k^{(n)},\,k\in N\right\}$ be a sequence of dependent random variables. If conditions (C1)-(C4) hold then $X_n(t)\xrightarrow{D}\pi_\alpha(t)$, $n\to\infty$ in Skorokhod space $D(R_+,R)$, where $\pi_\alpha(t)=\mu_\alpha(t)/\mu_\alpha(1)$, $t\in R_+$.

## Reaference


1. *Athreya K.B., Jagers P.* Classical and Modern Branching Processes, Springer-Verlag New York, 1997.

2. *Haccou P., Jagers P., Vatutin V.* Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations, Cambridge University Press, 2005.

3. *Vatutin, V.A., Zubkov, A.M.* Branching processes. I. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Teor. Veroyatn. Mat. Stat. Teor. Kibern. Vol. 23, 1985. 3-67.

4. *Rahimov I.* Functional limit theorems for critical processes with immigration. Adv. Appl. Probab. 39, 2007, 1054–1069.

5. *Rahimov I.* Approximation of fluctuations in a sequence of nearly critical branching processes. Stochastic Models, V. 25. 2009, 348–373.

6. *Golomoziy V.V., Sharipov S.O.,* On central limit theorems for branching processes with dependent immigration. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics and Mathematics, V. 1-2. 2020, 7–15.

# Two approaches to consistent estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion with trend

**Kukush A., Lohvinenko S., Mishura Yu., Ralchenko K.**

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13, Volodymyrs'ka St., 01601 Kyiv, Ukraine,*

alexander_kukush@univ.kiev.ua, stanislav.lohvinenko@gmail.com, myus@univ.kiev.ua, kostiantynralchenko@knu.ua

**Introduction**

We consider the following mixed fractional Brownian motion with trend

$$X_t = \theta t + \sigma W_t + \kappa B_t^H, \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

where $W$ is a Wiener process, $B^H$ is a fractional Brownian motion with Hurst index $H \in (0, 1)$, $B^H$ is independent of $W$.

We start with estimation of the drift parameter $\theta$. First, we construct the estimator of $\theta$ assuming that the Hurst index $H$ is known. To this end, we discretize an estimator, which was introduced in [2] for a pure fractional model with $\sigma = 0$ (similar discretization was proposed in [5] for a drift parameter estimator in a fractional diffusion model). We establish the strong consistency of the estimator for all $H \in (0, 1)$ and obtain its rate of convergence. Then we prove that the estimator remains strongly consistent if we use the consistent estimator of $H$ rather than its true value. In particular, we establish the rate of convergence of such plug-in estimator for the case when $H$ is estimated via quadratic variations. Taking into account that $\kappa$ and $\sigma$ can also be estimated via quadratic variations by the methods of [2], we obtain the estimators of all four parameters. However, this approach has several limitations. In particular, the estimation of $H$ via quadratic variations is possible only for $H < \frac{3}{4}$. Furthermore, too low rate of convergence does not allow us to estimate $\kappa$ for $H > \frac{1}{2}$ and $\sigma$ for $H < \frac{1}{2}$ with sufficient reliability. In view of this, we propose an alternative method based on the ergodic theory. Namely, we notice that for any $h > 0$, $\{X_{(k+1)h} - X_{kh} - \theta h, k \geq 1\}$ is a stationary and ergodic Gaussian sequence. Using this fact we obtain strongly consistent estimators of all parameters by the generalized method of moments.

**Consistent estimation of the drift parameter $\theta$**

We construct an estimator for $\theta$ in two steps. First, we construct it assuming that the parameter $H$ is known, and prove its strong consistency. We apply the scheme where the horizon of observations tends to infinity, while the step between observations tends to zero. Specifically we consider the observations of $X$ on the partition of the interval $[0, 2^n]$ with the step $2^{-n}$. If $H$ is unknown, we propose to estimate $H$ with the help of quadratic variations using the observations of $X$ on the interval $[0, 1]$, and then to insert this estimator to the estimator for $\theta$.

To avoid cumbersome expressions, we use symbols $O_\omega$ and $o_\omega$. Let $\{\xi_n\}$ be a sequence of random variables, $\varsigma$ be a non-negative random variable and $\{a_n\} \subset (0, \infty)$. Then $\xi_n = O_\omega(a_n)$ means that for some $\varsigma$ $|\xi_n| \leq \varsigma a_n$; and $\xi_n = o_\omega(a_n)$ means that $|\xi_n| \leq \varsigma b_n$ with some $\varsigma$ and some $b_n = o(a_n)$. Symbol $C$ denotes a generic positive constant whose precise value is not important.

**2.1 Estimation of $\theta$ when $H$ is known**

Let $H \in (0,1)$ be known. Assume that a trajectory of $X$ is observed at the points $t_k^n = \frac{k}{2^n}$, $k = 0, 1, \dots, 2^{2n}$. Consider the estimator

$$\hat{\theta}_n := \frac{\sum_{k=1}^{2^{2n}-1} (t_k^n)^{\frac{1}{2}-H} (2^n - t_k^n)^{\frac{1}{2}-H} \left( X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right)}{B(\frac{3}{2}-H, \frac{3}{2}-H) 2^{n(2-2H)}}, \tag{2}$$

It is a discretized version of the continuous-time estimator (1.8) from [1] (it was first proposed in [4] in the pure fractional setting). A similar discrete-time estimator was introduced in [5] for the drift parameter of stochastic differential equation driven by a fractional Brownian motion.

**Theorem 1.** Let $H \in (0,1)$. The estimator $\hat{\theta}_n$ is a strongly consistent estimator of $\theta$ as $n \to \infty$. Moreover,

$$\hat{\theta}_n - \theta = O_\omega \left( n^\alpha 2^{-n[H \wedge (1-H)]} \right),$$

where $\alpha$ can be taken arbitrarily small.

**2.2 Estimation of $H$, $\kappa$ and $\sigma$ via quadratic variations**

Our next goal is to construct the estimator of the drift parameter in the case where the Hurst index is unknown. To this end, we start with estimation of the parameter $H$. In particular, in this subsection we consider an estimator for the parameter $H$ by the observations of the process $X$ at a discrete partition of the interval $[0,1]$. We adapt the method based on the quadratic variations, which was developed in [4, 3] for the case $\theta = 0$.

Similarly to [2], we construct estimators using the quadratic variation of the form

$$V_n(X) := \sum_{i=0}^{n-1} \left( \Delta_i^n X \right)^2, \quad \text{with} \quad \Delta_i^n X := X_{\frac{i+1}{n}} - X_{\frac{i}{n}}.$$

Let $n \geq 1$. Assume that a trajectory of the process $X$ is observed at points $t_k^n = \frac{k}{2^n}$, $k = 0, \dots, 2^n$. We introduce the next statistic

$$\widehat{H}(k) = \frac{1}{2} \left( \log_{2+} \frac{V_{2^{k-2}}(X) - V_{2^{k-1}}(X)}{V_{2^{k-1}}(X) - V_{2^k}(X)} + 1 \right), \tag{3}$$

with

$$\log_{2+} x := \begin{cases} \log_2 x & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$

**Proposition 1.** 1. For $H \in (0, 1/2)$, the statistic (3) is a strongly consistent estimator of $H$, moreover, for any $\varepsilon > 0$,

$$\widehat{H}(k) = H + o_\omega \left( 2^{(-1/2+\varepsilon)k} \right) \text{ as } k \to \infty. \tag{4}$$

2. For $H \in (1/2, 3/4)$ the statistic (3) is a strongly consistent estimator of $H$, moreover, for any $\varepsilon > 0$,

$$\widehat{H}(k) = H + o_\omega \left( 2^{(2H-3/2+\varepsilon)k} \right) \text{ as } k \to \infty. \tag{5}$$

The quadratic variations also may be used for estimation of both $\kappa$ and $\sigma$. The strong consistency of the following estimators can be established similarly to the corresponding results from [2].

**Proposition 2. (Estimation of $\sigma^2$)** 1. For $H \in (1/4, 1/2)$, the statistic

$$\widetilde{\sigma}_k^2 := \frac{2^{1-2\widehat{H}(k)} V_{2^{k-1}}(X) - V_{2^k}(X)}{2^{1-2\widehat{H}(k)} - 1}$$

is a strongly consistent estimator of $\sigma^2$.

2. For $H \in (1/2, 1)$, the statistic

$$\widehat{\sigma}_k^2 := V_{2^k}(X)$$

is a strongly consistent estimator of $\sigma^2$.

**Proposition 3. (Estimation of $\kappa^2$)** For $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 3/4)$, the statistic

$$\widetilde{\kappa}_k^2 := \frac{2^{k\left(2\widehat{H}(k)-1\right)} \left(V_{2^{k-1}}(X) - V_{2^k}(X)\right)}{2^{2\widehat{H}(k)-1} - 1}$$

is a strongly consistent estimator of $\kappa^2$.

**2.3 Estimation of $\theta$ when $H$ is unknown**

If $H$ is unknown, we start with an auxiliary result, which gives an upper bound for the difference between the estimator $\hat{\theta}_n$ and the same estimator with some number $h \in (0,1)$ in place of the true value of $H$.

**Lemma 1.** Let $X$ be a mixed fractional Brownian motion with trend, defined by (1) with Hurst index $H \in (0,1)$. Define

$$\tilde{\theta}_n(h) = \frac{\sum_{k=1}^{2^{2n}-1} (t_k^n)^{\frac{1}{2}-h} (2^n - t_k^n)^{\frac{1}{2}-h} \left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}\right)}{B(\frac{3}{2}-h, \frac{3}{2}-h) 2^{n(2-2h)}}, \quad h \in [0,1].$$

Then

$$\tilde{\theta}_n(h) - \hat{\theta}_n = O_\omega(|h - H|), \tag{6}$$

for all $h \in (0, H^*)$, where $H^* \in (H, 1)$ is any number, and for all $n \geq 1$.

Now, we want to replace $H$ in the expression for $\hat{\theta}_n$ in Subsection 2.1 by the estimator (3).

**Theorem 2.** For $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $\tilde{\theta}_n\left(\widehat{H}(n)\right)$ is a strongly consistent estimator of $\theta$ as $n \to \infty$.

If $H \in (0, 1/2)$, then

$$\tilde{\theta}_n\left(\widehat{H}(n)\right) - \theta = o_\omega\left(2^{-(H-\varepsilon)n}\right) \quad \text{a.s. as } n \to \infty,$$

for any $\varepsilon > 0$.

If $H \in (1/2, 3/4)$, then

$$\tilde{\theta}_n\left(\widehat{H}(n)\right) - \theta = o_\omega\left(2^{-(\frac{3}{2}-2H-\varepsilon)n}\right) \quad \text{a.s. as } n \to \infty,$$

for any $\varepsilon > 0$.

**Alternative approach to parameter estimation based on ergodic theorem**

In this section, we propose a new approach for simultaneous estimation of all four parameters $H$, $\sigma$, $\kappa$ and $\theta$. Unlike the previous works, this method is applicable for all $H \in (0,1)$.

Let $h > 0$ be fixed. Assume that the process $X$ is observed at points $t_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$ The estimation procedure will be based on the following ergodic result.

**Lemma 2.** The process

$$Y_k = X_{(k+1)h} - X_{kh} - \theta h, \quad k = 0, 1, \dots,$$

is ergodic.

The previous lemma allows us to apply the ergodic theorem for construction of estimators. Namely, if $g : R^{l+1} \to R$ is a Borel function such that $E|g\left(Y_0, Y_h, \dots, Y_{lh}\right)| < \infty$, then

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(Y_{kh}, \dots, Y_{(k+l)h}\right) \to Eg\left(Y_0, \dots, Y_{lh}\right) \text{ a.s. as } N \to \infty. \tag{7}$$

The main idea is to obtain four different convergences by choosing different functions $g$, and then to construct the estimators by solving the corresponding system of four equations. This idea is implemented in this section. To this end, let us introduce the notation:

$$\xi_N =: \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X_{(k+1)h} - X_{kh}\right)^2,$$

$$\eta_N =: \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X_{(k+1)h} - X_{kh}\right)\left(X_{(k+2)h} - X_{(k+1)h}\right),$$

$$\zeta_N =: \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X_{(k+2)h} - X_{kh}\right)\left(X_{(k+4)h} - X_{(k+2)h}\right).$$

**Theorem 3.** Let $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$. The statistics

$$\check{\theta}_N = \frac{X_{Nh}}{Nh},$$

$$\check{H}_N = \frac{1}{2} \log_{2+} \frac{\zeta_N - 4\check{\theta}_N^2 h^2}{\eta_N - \check{\theta}_N^2 h^2},$$

$$\check{\kappa}_N^2 = \frac{\eta_N - \check{\theta}_N^2 h^2}{h^{2\check{H}_N}\left(2^{2\check{H}_N - 1} - 1\right)},$$

$$\check{\sigma}_N^2 = \frac{\xi_N - \check{\theta}_N^2 h^2 - \check{\kappa}_N^2 h^{2\check{H}_N}}{h}$$

are strongly consistent estimators of parameters $\theta, H, \kappa^2, \sigma^2$ respectively.

**Acknowledgments** This work was supported by the National Research Fund of Ukraine grant 2020.02/0026.

## References

1. *Cai C., Chigansky P., Kleptsyna M.* The maximum likelihood drift estimator for mixed fractional Brownian motion, arXiv:1208.6253v2 [math.PR], 2012.

2. *Dozzi M., Mishura Yu., Shevchenko G.* Asymptotic behavior of mixed power variations and statistical estimation in mixed models, Stat. Inference Stoch. Process, 18(2), 2015, 151–175.

3. *Kubilius K., Mishura Yu., Ralchenko K.* Parameter estimation in fractional diffusion models, Springer, 2017.

4. *Le Breton A.* Filtering and parameter estimation in a simple linear system driven by a fractional Brownian motion, Statist. Probab. Lett., 38(3), 1998, 263–274.

5. *Mishura Yu., Ralchenko K.* On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion by discrete observations, Austrian Journal of Statistics, 43(3), 2014, 218–228.

# Goodness-Of-Fit Test for Nonidentifiable Linear Measurement Error Model

**Kukush A., Navara H.**

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13, Volodymyrs'ka St., 01601 Kyiv, Ukraine,*

alexander_kukush@univ.kiev.ua, mrswade111017@gmail.com

**1 Setting**

Consider a linear functional regression model of the form

$$y = \langle c, x\rangle + \varepsilon, \tag{1}$$

where $x \in R^m$ is a nonrandom vector of covariates; $y$ is an observable response variable; $c \in R^m$ is an unknown vector of regression parameters; $\varepsilon$ is a random variable that represents both the measurement error of the dependent variable and an effect of the model misspecification. Hereafter $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes standard Euclidean inner product, and all vectors are column ones.

We will consider the errors-in-variables setting: instead of $x$, $w := x + \delta$ is observed, where $\delta$ is an $m$-dimensional random vector of measurement errors. In what follows, we use the following assumptions.

**Assumption 1.** Random variable $\varepsilon$ and random vector $\delta$ are independent and centered with $E\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2$ and $Cov(\delta) = \sigma_\delta^2 I_m$, where $\sigma_\varepsilon^2$ and $\sigma_\delta^2$ are positive constants and $I_m$ stands for the $m \times m$ identity matrix.

The observed data are independent copies of the basic model

$$y_i = \langle c, x_i\rangle + \varepsilon_i, \quad w_i = x_i + \delta_i, \tag{2}$$

$i = 1, ..., n$, were $x_1, ..., x_n$ are nonrandom (and unknown) $m$-dimensional vectors; $\{\varepsilon_i,\ i = 1, ..., n\}$ are i.i.d. random variables with the same distribution as $\varepsilon$ in the basic model (1), $\{\delta_i,\ i = 1, ..., n\}$ are i.i.d. random vectors distributed as $\delta$, and the two sequences are assumed mutually independent. Our goal is to estimate the measurement error variance $\sigma_\varepsilon^2$, based on observations $(y_1, w_1), ..., (y_n, w_n)$, and check a hypothesis that its value does not exceed a fixed level. The variances $\sigma_\varepsilon^2$ and $\sigma_\delta^2$ are assumed unknown and related as follows.

**Assumption 2.** The ratio $\lambda := \frac{\sigma_\delta}{\sigma_\varepsilon}$ is in the interval $[a, A]$, where $a$ and $A$ are known positive numbers.

Note that a similar model was studied in [1]: at first, authors considered the covariance matrix of measurement errors to be known and then it was assumed that the latter was diagonal with known bounds for variance.

Notice that the heteroscedastic model (2) can be easily reduced to the homoscedastic one. Indeed, denote $y_i^{(\lambda)} := \lambda y_i$, $c^{(\lambda)} := \lambda c$, $\varepsilon_i^{(\lambda)} = \lambda \varepsilon_i$ and observe that, by (2),

$$y_i^{(\lambda)} = \left\langle c^{(\lambda)}, x_i \right\rangle + \varepsilon_i^{(\lambda)}, \quad w_i = x_i + \delta_i, \tag{3}$$

$i = 1, ..., n$, with $Var\left(\varepsilon_i^{(\lambda)}\right) = \lambda^2 \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\delta^2 =: \sigma^2$.

We now finally pose additional assumptions on the model to ensure the convergence in distribution of the regression coefficients estimators and variance estimators. Hereafter bar means averaging over the index varying from 1 to $n$, e.g., $\overline{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$.

**Assumption 3.**

(i) For some fixed $\tau > 4$, $E|\varepsilon|^\tau < \infty$ and $E\|\delta\|^\tau < \infty$.

(ii) There exists $\lim_{n\to\infty} \overline{xx^T} =: \mu_2$ and the matrix $\mu_2$ is nonsingular.

(iii) There exists $\lim_{n\to\infty} \overline{x} = \mu_1$ and, for each $1 \le i \le j \le k \le l \le m$, there exist

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x(i)x(j)x(k)} =: \mu_3(i,j,k), \quad \lim_{n\to\infty} \overline{x(i)x(j)x(k)x(l)} =: \mu_4(i,j,k,l),$$

where $x(i)$ denotes the $i$th coordinate of $x$.

(iv) There exists $C > 0$ such that for all $n \ge 1$ it holds that $\overline{\|x\|^\tau} \le C$, where $\tau > 4$ is from (i).

(v) At the true point of parameter $\theta = (c^T, \sigma^2) \in R^{m+1}$, the following matrix is nonsingular:

$$B^{(\lambda)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left[s_\theta(y_i^{(\lambda)}, w_i) s_\theta^T(y_i^{(\lambda)}, w_i)\right].$$

Here $s_\theta = (s_c^T; s_{\sigma^2})^T$, where $s_c : R \times R^m \times R^m \to R^m$ and $s_{\sigma^2}$: $R \times R^m \times R^{m+1} \to R$ are estimating functions

$$s_c(y, w; c) = (y - \langle w, c\rangle)(1 + \|c\|^2)w + (y - \langle c, w\rangle)^2 c,$$
$$s_{\sigma^2}(y, w; \theta) = (y - \langle c, w\rangle)^2 - \sigma^2(1 + \|c\|^2).$$

**2 The case of known $\lambda$**

Assume that $\lambda$ from Assumption 2 is known, i.e. $a = A$. We test a one-sided compound null hypothesis

$$H_0: \quad \sigma_\varepsilon \le \sigma_0 \tag{4}$$

vs. a one-sided compound alternative

$$H_1: \quad \sigma_\varepsilon > \sigma_0, \tag{5}$$

where $\sigma_0 > 0$ is a given value. Denote $z_i := \left(y_i^{(\lambda)}; w_i^T\right)^T$, and define an $(m+1) \times (m+1)$ matrix $Z := \sum_{i=1}^n z_i z_i^T$. Let $v = (v_0, ..., v_m)^T$ be the eigenvector of $Z$ that corresponds to the least eigenvalue. It can be shown [2] that $P(v_0 \ne 0) \to 1$ as $n \to \infty$, so, if $n$ is sufficiently large, one can define

$$\hat{c}^{(\lambda)} = \left(-\frac{v_1}{v_0}, ..., -\frac{v_m}{v_0}\right)^T, \tag{6}$$

which is a consistent estimator of $c^{(\lambda)}$ in the homoscedastic model (3) (see also [3] and [4]). Thus, we can put $\hat{c} := \frac{\hat{c}^{(\lambda)}}{\lambda}$ and $\hat{c}$ will be a consistent estimator of $c$. At the same time, a consistent estimator of $\sigma_\varepsilon^2$ can be expressed through the residual sum of squares:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \langle \hat{c}, w_i\rangle)^2}{1+\lambda^2\|\hat{c}\|^2}. \tag{7}$$

**Theorem 2.1** Let Assumptions 1–3 hold with $a = A$ in Assumption 2 (which corresponds to the case of $\lambda$ known). Denote $\theta^{(\lambda)} := (\lambda c^T; \lambda^2\sigma_\varepsilon^2)^T = \left((c^{(\lambda)})^T; \sigma^2\right)$ and let $s_c$, $s_{\sigma^2}$ and $s_\theta$ be defined as in Assumption 3. Then

1. The estimating equation $\sum_{i=1}^n s_\theta(y_i^{(\lambda)}, w_i^{(\lambda)}; \theta^{(\lambda)}) = 0$, $\theta^{(\lambda)} \in R^m \times R_+$, has a solution with probability tending to 1 as $n \to \infty$ and this solution $\hat{\theta}^{(\lambda)}$ converges to the true value $\theta^{(\lambda)}$ in probability.
2. The solution $\hat{\theta}^{(\lambda)}$ is an asymptotically normal estimator of $\theta^{(\lambda)}$, i.e. $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}^{(\lambda)} - \theta^{(\lambda)}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_{\theta^{(\lambda)}})$, where
$$\Sigma_{\theta^{(\lambda)}} = (A^{(\lambda)})^{-1}B^{(\lambda)}(A^{(\lambda)})^{-1}, \tag{8}$$
$$A^{(\lambda)} = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\left[\frac{\partial s_\theta(y_i^{(\lambda)}, w_i^{(\lambda)})}{\partial \theta^T}\right],$$
$$B^{(\lambda)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\left[s_\theta(y_i^{(\lambda)}, w_i^{(\lambda)})s_\theta^T(y_i^{(\lambda)}, w_i^{(\lambda)})\right]. \tag{9}$$
3. Matrices $A^{(\lambda)}$ and $B^{(\lambda)}$ can be consistently estimated as follows:
$$\hat{A}^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n w_i w_i^T - \hat{\sigma}^2 I_m & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & 1+\|\hat{c}^{(\lambda)}\|^2 \end{pmatrix},$$
$$\hat{B}^{(\lambda)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n s_\theta(y_i^{(\lambda)}, w_i^{(\lambda)}; \hat{\theta}^{(\lambda)})s_\theta^T(y_i^{(\lambda)}, w_i^{(\lambda)}; \hat{\theta}^{(\lambda)}),$$
where $\hat{\sigma}^2$ and $\hat{c}^{(\lambda)}$ are defined by (7) and (6), and $\hat{\Sigma}_{\theta^{(\lambda)}} = (\hat{A}^{(\lambda)})^{-1}\hat{B}^{(\lambda)}(\hat{A}^{(\lambda)})^{-1} \xrightarrow{P} \Sigma_{\theta^{(\lambda)}}$ as $n \to \infty$.
4. The asymptotic variance of $v_{\sigma^2}^2$ of $\hat{\sigma}^2$ is equal to the lower right entry of $\Sigma_{\theta^{(\lambda)}}$ and can be estimated by
$$\hat{v}_{\sigma^2}^2 := \frac{1}{(1+\|\hat{c}^{(\lambda)}\|)^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n s_{\sigma^2}^2(y_i^{(\lambda)}, w_i; \hat{c}^{(\lambda)}, \hat{\sigma}^2).$$

Finally, using results presented above, we can formulate the decision rule for the hypothesis testing problem (4)–(5). It is easy to see that it is equivalent to the following one:

$$H_0': \quad \sigma \le \lambda\sigma_0, \quad H_1': \quad \sigma > \lambda\sigma_0, \tag{10}$$

and, given $\alpha \in (0,1)$, we can formulate the decision rule, using Theorem 2.1: reject $H_0$, if $\hat{\sigma}^2 > \lambda^2\sigma_0^2 + z_\alpha\widehat{se}$, and otherwise, do not reject $H_0$, where $z_\alpha$ is upper quantile of normal law and $\widehat{se} := \frac{\hat{v}_{\sigma^2}}{\sqrt{n}}$.

The asymptotic significance level of the test equals $\alpha$, or more precisely, Type I error satisfies relations:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\text{reject } H_0 \mid \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_0^2\right) = \alpha; \quad \forall \sigma_1^2 \in (0, \sigma_0^2): \lim_{n\to\infty} P(\text{reject } H_0 | \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_1^2) = 0. \quad (11)$$

The test is consistent, i.e., for each $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$: $\lim\limits_{n\to\infty} P(\text{do not reject } H_0 | \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_1^2) = 0$.

## 3 The case of unknown $\lambda$ and simulations

In order to perform testing in the case of $a < A$ in Assumption 2, we will use the following method. Let $a = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_K = A$ be a uniform partition of $[a, A]$. For each $\lambda_j$, $j = 0, ..., K$, we perform the procedure described in subsection 2 and, if at least for one $\lambda_j$ hypothesis $H_0$ is not rejected, then we do not reject $H_0$. We perform simulations as follows.

1. Set $\lambda$, $n$, $\sigma_\varepsilon$, $c = (c_1, c_2)$ (that are assumed to be unknown), the segment $[a, A]$ that contains $\lambda$ and is assumed to be known, number of points $K$ of the partition on $[a, A]$ and an upper bound $\sigma_0$ for the hypothesis.
2. Generate a sample of size $n$ of unobservable regressors $x_1 \sim \mathcal{U}[0, 1]$, $x_2 \sim \mathcal{U}[0, 2.5]$.
3. Generate regression errors $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\delta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\delta^2)$, $i = 1, ..., n$, where $\sigma_\delta = \lambda\sigma_\varepsilon$.
4. Generate observarble sample $y_i = \langle c, x_i \rangle + \varepsilon_i$, $w_i = x_i + \delta_i$, $i = 1, ..., n$.
5. Take uniform partition $a = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_K = A$ of $[a, A]$ and for each $\lambda_j$, $j = 1, ..., K$:
   (a) Make transformation $y_i^{(\lambda_j)} := \lambda_j y_i$, $i = 1, ..., N$, and compute $\hat{c}^{(\lambda_j)}$ as in (6) and put $\hat{c}_j := \frac{\hat{c}^{(\lambda_j)}}{\lambda_j}$.
   (b) For the given $\lambda_j$, compute
$$\hat{\sigma}_j^2 := \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(y_i^{(\lambda_j)} - \langle \hat{c}^{(\lambda_j)}, w_i \rangle\right)^2}{1 + \|\hat{c}^{(\lambda_j)}\|^2},$$
$$\widehat{se}_j := \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{(1 + \|\hat{c}^{(\lambda_j)}\|)^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_{\sigma^2}^2 (y_i^{(\lambda_j)}, w_i; \hat{c}^{(\lambda_j)}, \hat{\sigma}_j^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$
   (c) Put $\nu_j := I_{\{\hat{\sigma}_j^2 > \lambda_j^2 \sigma_0^2 + z_\alpha \widehat{se}_j\}}$.
6. Reject $H_0$ if $\nu_j = 1$ for all $j = 1, ..., K$; otherwise, do not reject $H_0$.

In each simulation, for the given $\lambda$, $n$, $\sigma_\varepsilon$, $c = (c_1, c_2)$, $[a, A]$, $K$, $\sigma_0$ (see tables below) steps 1–5 were repeated 500 times and the percentage of rejections was computed. The results are presented below.

### 3.1 Simulations in case of hidden variable

Suppose now that the real model is $y_i = \langle c, x_i \rangle + x_i^h + \varepsilon_i$, $w_i = x_i + \delta_i$, $i = 1, ..., n$. But due to misspecification of the model we use only $x_1$ and $x_2$ as explanatory variables. We add noise to the variables $x_1$ and $x_2$ as it is described in item 3 above and perform hypothesis check. The results are given in Tables 1 to 4.

**Acknowledgement.** The research is supported by the National Research Fund of Ukraine grant 2020.02/0026.

| n | 100 | 500 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| reject $H_0, \sigma_0 = \sigma$ | 0 | 3.4 | 6 | 6.4 |
| reject $H_0, \sigma_0 = 1.25\sigma$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| reject $H_0, \sigma_0 = 0.75\sigma$ | 96.6 | 100 | 100 | 100 |

Таблица 1.1: Percentage of $H_0$ rejections; $\sigma = 0.2$; $\lambda = 3.5$, $a = A = 3.5$

| n | 100 | 500 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| reject $H_0, \sigma_0 = \sigma$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| reject $H_0, \sigma_0 = 1.25\sigma$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| reject $H_0, \sigma_0 = 0.75\sigma$ | 47 | 99.8 | 100 | 100 |

Таблица 1.2: Percentage of $H_0$ rejections; $\sigma = 0.2$; $\lambda = 3.5$, $a = 3, A = 4$

| n | 100 | 500 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| reject $H_0, \sigma_0 = \sigma$ | 93.6 | 100 | 100 | 100 |
| reject $H_0, \sigma_0 = 1.25\sigma$ | 4.6 | 24.4 | 50.6 | 100 |
| reject $H_0, \sigma_0 = 0.75\sigma$ | 100 | 100 | 100 | 100 |

Таблица 1.3: Percentage of $H_0$ rejections; $\sigma = 0.2$; $\lambda = 3.5$, $a = A$, $x^h \sim \mathcal{U}[0, 12]$

| n | 100 | 500 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| reject $H_0, \sigma_0 = \sigma$ | 0.2 | 0.2 | 0 | 0 |
| reject $H_0, \sigma_0 = 1.25\sigma$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| reject $H_0, \sigma_0 = 0.75\sigma$ | 89 | 100 | 100 | 100 |

Таблица 1.4: Percentage of $H_0$ rejections; $\sigma = 0.2$; $\lambda = 3.5$, $a = 3, A = 4$, $x^h \sim \mathcal{U}[0, 12]$

## References


1. *Kukush A., Mandel I.*, Does Regression Approximate the Influence of the Covariates or Just Measurement Errors? A Model Validity Test. ArXiv:1911.07556, 2019.

2. *Masiuk S. V., Kukush A. G., Shklyar S. V., Chepurny M. I. and Likhtarov I. A. (ed.)*, Radiation Risk Estimation: Based on Measurement Error Models. 2nd ed., de Gruyter, 2017.

3. *Van Huffel S. and Vandewalle J.*, The Total Least Squares Problem. Frontiers in Applied Mathematics, vol. 9. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1991.

4. *Kukush A. and Tsaregorodtsev Ya.*, Asymptotic normality of total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model $AX = B$. Mod. Stoch. Theory Appl. 3, N1, 2016, 47-57.

# Asymptotic normality of modified LS estimator for mixture of nonlinear regression

**Miroshnychenko V., Maiboroda R**

*Taras Shevchenko National University of Kyiv* vitaliy.miroshnychenko@gmail.com, mre@univ.kiev.ua

We consider the estimation of nonlinear regression coefficients by observations from a mixture with a finite number of components. The generalized least squares technique is used to construct the estimators.

We consider subjects $O_j, j = 1, ..., n$ taken from a mixture of $M$ components. The number $\kappa_j$ of the component which $O_j$ belongs to is unknown, but we know the mixing probabilities $p_j^m = P\{\kappa_j = m\}$. Denote the matrix of these probabilities by $\boldsymbol{p}_{;n} = \left(p_j^m\right)_{j=1,...,n}^{m=1,...,M}$.

For each subject we observe two variables $(\boldsymbol{X}_j, Y_j)$ for which the following non-linear regression model holds $Y_j = g(\boldsymbol{X}_j, \nu^{(\kappa_j)}) + \varepsilon_j^{(\kappa_j)}$, where $g$ is a known regression function, $\nu^{(m)}$ is a vector of unknown regression coefficients for the $m$-th component, $\varepsilon_j^{(m)}$ is an error term with $E\varepsilon_j^{(m)} = 0$, $D\varepsilon_j^{(m)} < \infty$. Let us denote

$$\boldsymbol{h}(\xi_j, \boldsymbol{t}) = \big(Y_j - g(\boldsymbol{X}_j, \boldsymbol{t})\big)\dot{g}(\boldsymbol{X}_j, \boldsymbol{t}).$$

The estimators $\hat{\nu}_n^{(k)}$ of the regression parameters are solutions by $\mathbf{t}$ to the estimating equation:

$$J_n^k(\boldsymbol{t}) = \sum_{j=1}^{n} a_{j:n}^k \boldsymbol{h}(\xi_j, \boldsymbol{t}) = \bar{0},$$

where $a_{j:n}^k$ are the minimax weights from [1]. This equation is obtained by differentiation of the weighted least squares functional.

Let us define the following matrices

$$V^{(m)} = E\dot{\boldsymbol{h}}(\xi^{(m)}, \nu^{(m)});$$

$$\boldsymbol{Z}^{(m,l)} = \sum_{i=1}^{M} \langle \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{a}^l \boldsymbol{p}^i \rangle E\boldsymbol{h}(\xi_i, \nu^{(m)})\boldsymbol{h}^T(\xi^{(i)}, \nu^{(l)}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} \langle \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{a}^l \boldsymbol{p}^i \boldsymbol{p}^k \rangle E\boldsymbol{h}(\xi^{(k)}, \nu^{(m)})E\boldsymbol{h}^T(\xi^{(i)}, \nu^{(l)});$$

$$S = \left((V^{(m)})^{-1}\boldsymbol{Z}^{(m,l)}({V^{(l)}}^T)^{-1}\right)_{k=1,...,M}^{l=1,...,M},$$

where $\xi^{(m)}$ is a r.v. which have conditional distribution of $\xi_j$ given $\kappa_j = m$, i.e., the distribution of the $m$-th component.

**Theorem [2]** Let the following assumptions hold.

1 $\nu$ is an inner point of $\Theta = \Theta^{(1)} \times ... \times \Theta^{(M)}$.

2 $\boldsymbol{h(x,t)}$ is continuously differentiable by $\mathbf{t}$, for almost all $\mathbf{x}$ for all $m = 1, ..., M$.

3 For some $\delta > 0$ and some open ball $B$, such that $\nu \in B \subseteq \Theta$

$$E \sup_{\boldsymbol{t} \in B} ||\dot{\boldsymbol{h}}(\xi^{(m)}, \boldsymbol{t})||^{1+\delta} < \infty,$$

for all $m = 1, ..., M$.

4 $E||\boldsymbol{h}(\xi^{(m)}, \boldsymbol{t})||^2 < \infty$, for all $m = 1, ..., M$.

5 The matrices $V^{(m)}$ are finite and nonsingular, for all $m = 1, ..., M$.

6 The limits $\lim_{n\to\infty} \langle a^k_{j;n} a^m_{j;n} p^l_j p^i_j \rangle = \langle \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{a}^l \boldsymbol{p}^i \boldsymbol{p}^k \rangle$ exist, for all $k, m, l, i = 1, ..., M$.

7 The matrix $\Gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Gamma_{;n}$, $\Gamma_{;n} = \boldsymbol{p}^T_{;n}\boldsymbol{p}_{;n}$ exists and non-singular.

8 $\hat{\nu}_{;n}$ is consistent estimator of $\nu$.

Then $\sqrt{n}(\hat{\nu}_{;n} - \nu) \to^W N(0, S),\ n \to \infty$
Applications of this result to the confidence sets construction will be presented.

### References


1. *Maiboroda R., Sugakova O.* , Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis. Nonparametric statistics. v.24, iss.1, pp. 201 - 215, - 2012.

2. *Miroshnychenko V., Maiboroda R.*, Asymptotic normality of modified LS estimator for mixture of nonlinear regressions, Modern Stochastics: Theory and Applications, Vol.7, Iss.7 pp. 435 - 448, - 2020.


# Parameter estimation in the Cox–Ingersoll–Ross model


**Mishura Y., Ralchenko K., Dehtiar O**

*Taras Shevchenko National University of Kyiv*

myus@univ.kiev.ua, k.ralchenko@gmail.com, alenka.degtyar@gmail.com


1. INTRODUCTION

The Cox–Ingersoll–Ross (CIR) process is a very famous object and is a unique solution of the following stochastic differential equation

$$dr_t = (a - br_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t, \quad r_t\big|_{t=0} = r_0 > 0 \tag{1}$$

where $W = \{W_t, t \ge 0\}$ is a Wiener process and $a, b, \sigma$ are positive constants.

We investigate two estimators of the parameter $(a, b)$ by continuous observations of a sample path of CIR process $r = \{r_t, t \in [0,T]\}$ and prove their strong consistency as $T \to \infty$. The first one is the standard maximum likelihood estimator, which was constructed and studied in [1, 2]. Compared to the known results, we establish the strong consistency instead of weak one. Note that the maximum likelihood estimator is well-defined only if $2a \ge \sigma^2$, because, in particular, it contains the integral $\int_0^T \frac{1}{r_t}dt$, which exists with probability one if and only if $2a \ge \sigma^2$, see [1, Prop. 4] For this reason, we decided to create some statistics that converge regardless of whether $2a \geq \sigma^2$ or not. On this way we created a different estimator of the vector parameter $(a, b)$, which is strongly consistent for all positive $a$, $\sigma$ and $b$. Another advantage of the new alternative estimator is that it has simpler form, therefore, it is computationally faster. It includes only two statistics of the process $r$, namely the Lebesgue integrals $\int_0^T r_t\,dt$ and $\int_0^T r_t^2\,dt$, see Theorem 3 below. At the same time the maximum likelihood estimator depends on two Lebesgue integrals, $\int_0^T r_t\,dt$ and $\int_0^T \frac{dt}{r_t}$, on the stochastic integral $\int_0^T \frac{dr_t}{r_t}$ and on the process itself. Particular attention is paid to the a. s. asymptotic behavior of the integral $\int_0^T r_t^2 dt$, which is crucial for the construction of the alternative estimator. We would like to emphasize that paper we restrict ourselves to the case $b > 0$. The boundary case $b = 0$ was investigated in [2], where the consistency and asymptotic distribution on the maximum likelihood estimator was derived, assuming that $2a \geq \sigma^2$. It worth mentioning that there is no consistent estimator for $a$ in the case $b < 0$, see [5, Thm. 2 (v)].

## 2. PRELIMINARIES

Let us consider the properties of the CIR process. Most of them will be useful for statistical parameter estimation, but some facts are of independent interest. These facts are well-known, but we combined them into one statement for the reader's convenience.

**Proposition.** *Assume that $2a \geq \sigma^2$. Then*

1. *The unique solution $r = \{r_t, t \geq 0\}$ of equation (1) is positive with probability 1:*

$$\inf\{t \geq 0 : r_t = 0\} = +\infty \quad a.\,s.$$

*(with convention $\inf \emptyset = +\infty$). Moreover,*

$$\mathbf{P}\{\limsup_{t\to\infty} r_t = +\infty\} = \mathbf{P}\{\liminf_{t\to\infty} r_t = 0\} = 1.$$

2. *The process $r$ is ergodic and it has continuous stationary density that corresponds to gamma distribution and has the following form:*

$$p_\infty(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{1}_{x>0}, \quad \alpha = \frac{2a}{\sigma^2},\ \beta = \frac{2b}{\sigma^2}.$$

3. *For any function $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ such that $\int_{\mathbb{R}^+} |f(x)| p_\infty(x) dx < \infty$ we have that*

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(r_t)dt \to \int_{\mathbb{R}} f(x) p_\infty(x) dx, \quad a.\,s.,\ as\ T \to \infty. \tag{2}$$

**Corollary.** *It follows immediately from (2) that in the case $2a > \sigma^2$ we have the following asymptotic relations:*

$$\frac{1}{T}\int_0^T r_t\,dt \to \int_{\mathbb{R}} x p_\infty(x)\,dx = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}, \quad a.\,s.,\ as\ T \to \infty, \tag{3}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{r_t}\,dt \to \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} p_\infty(x)\,dx = \frac{\beta}{\alpha - 1} = \frac{b}{a - \sigma^2/2}, \quad a.\,s.,\ as\ T \to \infty,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T r_t^2\,dt \to \int_{\mathbb{R}} x^2 p_\infty(x) dx = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a\sigma^2}{2b^2}, \quad a.\,s.,\ as\ T \to \infty. \tag{4}$$

*Remark.* It was proved in [3, Thm. 1] that the convergence (3) holds also in the case $0 < 2a \le \sigma^2$. The convergence (4) is valid for all positive $a$ and $\sigma$, this will be justified in Theorem 2 below.

## 3. MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION

Let us recall the construction of the maximum likelihood estimator of the couple of unknown parameters $(a, b)$ by the continuous observations of $r$ over the interval $[0, T]$. We assume that $2a \ge \sigma^2$ throughout this section.

Dividing (1) by $\sqrt{r_t}$ and integrating (1) over the time interval $[0, s]$ we get the equality:

$$\int_0^s \frac{dr_t}{\sqrt{r_t}} = \int_0^s \left( \frac{a}{\sqrt{r_t}} - b\sqrt{r_t} \right) dt + \sigma W_s.$$

In order to construct likelihood function for the estimation of couple $(a, b)$ of parameters, we use the Girsanov theorem for the Wiener process with the drift that equals

$$\frac{1}{\sigma} \int_0^s \left( \frac{a}{\sqrt{r_t}} - b\sqrt{r_t} \right) dt.$$

The arguments given below have a somewhat formal character, since during the construction of the likelihood function we are not interested in whether we are really dealing with probability measures, we are only interested in the form of the likelihood function. So, according to Girsanov theorem, under some additional technical assumptions which we do not take into account now, the process $\int_0^s \left( \frac{a}{\sqrt{r_t}} - b\sqrt{r_t} \right) dt + \sigma W_s$ will be a Wiener process on the interval $[0, T]$ w.r.t. to the new measure $Q_{(0,0)}$ such that

$$\begin{aligned} dQ_{(0,0)}/dQ_{(a,b)} &= \exp\left\{ -\int_0^T \frac{a - br_t}{\sigma\sqrt{r_t}} dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(a - br_t)^2}{\sigma^2 r_t} dt \right\} \\ &= \exp\left\{ -\int_0^T \frac{a - br_t}{\sigma^2 r_t} dr_t + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(a - br_t)^2}{\sigma^2 r_t} dt \right\}. \end{aligned}$$

Since we are interested in maximization of the function that corresponds to the value of $dQ_{(a,b)}/dQ_{(0,0)}$, and taking into account that $r$ is an observable process, our likelihood function gets the form

$$\tilde{\mathcal{L}} = \exp\left\{ \int_0^T \frac{a - br_t}{\sigma^2 r_t} dr_t - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(a - br_t)^2}{\sigma^2 r_t} dt \right\}.$$

The maximum likelihood estimator for the couple $(a, b)$ is constructed by maximizing of $\tilde{\mathcal{L}}$ with respect to $(a, b)$. It has the following form:

$$\hat{a}_T = \frac{\int_0^T r_t dt \int_0^T \frac{dr_t}{r_t} - T \cdot (r_T - r_0)}{\int_0^T r_t dt \cdot \int_0^T \frac{dt}{r_t} - T^2};$$

$$\hat{b}_T = \frac{(r_0 - r_T)\int_0^T \frac{dt}{r_t} + T\int_0^T \frac{dr_t}{r_t}}{\int_0^T r_t dt \cdot \int_0^T \frac{dt}{r_t} - T^2}.$$

**Theorem 1.** *Assume that $2a \ge \sigma^2$. Then the estimator $(\hat{a}_T, \hat{b}_T)$ is strongly consistent.*

## 4. AN ALTERNATIVE APPROACH TO DRIFT PARAMETERS ESTIMATION

The disadvantage of the maximum likelihood estimator is that it works only if $a \geq \sigma^2/2$, however, a priori we do not know if this relation holds for the observed process. To avoid this circumstance, in this section we will introduce a new estimator for the parameter $(a, b)$ based on the statistics $\int_0^T r_t\,dt$ and $\int_0^T r_t^2\,dt$.

**Theorem 2.** *The following convergence holds:*

$$\frac{1}{T}\int_0^T r_t^2\,dt \to \frac{a^2}{b^2} + \frac{a\sigma^2}{2b^2} \quad a.\,s.,\ as\ T \to \infty.$$

Theorem 2 enables to construct a strongly consistent estimator for the parameter $(a, b)$.

**Theorem 3.** *Define*

$$\tilde{a}_T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2}{T\int_0^T r_t^2\,dt - \left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2},$$

$$\tilde{b}_T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{T\int_0^T r_t\,dt}{T\int_0^T r_t^2\,dt - \left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2}.$$

*Then vector $(\tilde{a}_T, \tilde{b}_T)$ is a strongly consistent estimator of $(a, b)$.*

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the National Research Fund of Ukraine under Grant 2020.02/0026.

## References

1. *Ben Alaya M., Kebaier A.* Parameter estimation for the square-root diffusions: ergodic and nonergodic cases, Stoch. Models, vol. 28(4), 2012, 609–634.

2. *Ben Alaya M., Kebaier A.* Asymptotic behavior of the maximum likelihood estimator for ergodic and nonergodic square-root diffusions, Stoch. Anal. Appl., vol. 31(4), 2013, 552–573.

3. *Deelstra G., Delbaen F.* Long-term returns in stochastic interest rate models, Insurance Math. Econom., vol. 17(2), 1995, 163–169.

4. *Dehtiar O., Mishura Yu., Ralchenko K.* Two methods of estimation of the drift parameters of the Cox–Ingersoll–Ross process: continuous observations, Comm. Statist. Theory Methods, 2021, 16 pages, DOI: 10.1080/03610926.2020.1866611.

5. *Overbeck L.* Estimation for continuous branching processes, Scand. J. Statist., vol. 25(1), 1998, 111–126.

# Gaussian processes with Volterra kernels

**Mishura Yu. S., Shevchenko G. M., Shklyar S. V.**

*Taras Shevchenko National University of Kyiv*
myus@univ.kiev.ua, zhora@univ.kiev.ua, shklyar@univ.kiev.ua

What we study are the path properties of a stochastic process of the form

$$X_t = \int_0^t K(t,s)\,dW_s = \int_0^t a(s)\int_s^t b(u)c(u-s)\,du\,dW_s, \tag{1}$$

and existence of reverse representation $W_s = \int_0^s L(s,t)\,dX_t$, where $W$ is a standard Wiener process.

Molchan–Golosov representation of the fractional Brownian motion $B^H$ with Hurst index $H$, $\frac{1}{2} < H < 1$, is

$$B_t^H = \left(H - \tfrac{1}{2}\right) c_H \int_0^t s^{1/2-H} \int_s^t u^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2}\,du\,dW_s, \tag{2}$$
$$c_H^2 = \frac{2H\,\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2H)}.$$

The fractional Brownian motion has a modification that satisfies Hölder condition with exponent up to $H$. The transformation reciprocal to (2) is constructed in [1]:

$$W_s = \mathrm{C}\int_0^s \left(\frac{s^{H-1/2}}{(s-t)^{H-1/2}} - \left(H-\tfrac{1}{2}\right)\int_t^s \frac{u^{H-3/2}\,du}{(u-t)^{H-1/2}}\right)\frac{dB_t^H}{t^{H-1/2}},$$
$$\mathrm{C} = \left(c_H\,\Gamma\!\left(H+\frac{1}{2}\right)\Gamma\!\left(\frac{3}{2}-H\right)\right)^{-1}.$$

We generalize the properties and reverse representation for processes defined by (1).

**Theorem 1.** Let $a \in L^p[0,T]$, $b \in L^q[0,T]$ and $r \in L^r[0,T]$, where $p \in [2,+\infty]$, $q \in [1,+\infty]$ and $r \in [1,+\infty]$, and the inequality $1/p + 1/q + 1/r \le \frac{3}{2}$ holds true. Denote

$$K(t,s)\,dW_s = \int_0^t a(s)\int_s^t b(u)c(u-s)\,du.$$

Then

- $\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t K(t,s)^2\,ds < +\infty$, which means that the process $X = \{X_t,\ t\in[0,T]\}$ defined in (1) is well-defined with finite second moments.
- If, in addition, $1/p + 1/r < \frac{3}{2}$, then the process $X$ has a continuous modification.
- If $q > 1$ and $1/p + 1/q + 1/r < \frac{3}{2}$, then the process $X$ has a modification that satisfies Hölder condition with exponents up to $\frac{3}{2} - 1/q - \max\left(\frac{1}{2}, 1/p + 1/r\right)$.

Theorem 1 understates the exponent of the Hölder condition for fractional Brownian motion. We can obtain proper Hölder condition on a time interval separated from 0.

[1]The research is partially supported by by the National Research Fund of Ukraine grant 2020.02/0026

**Theorem 2.** Let $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_1 + t_2 < T$. Let the functions $a$, $b$, $c$ and exponents $p$, $p_1$, $q$, $q_1$, $r$ and $r_1$ satisfy conditions:

$$\begin{aligned} &a \in L^p[0,T] \cap L^{p_1}[t_1,T] && \text{with } 2 \leq p \leq p_1, \\ &b \in L^q[0,T] \cap L^{q_1}[t_1+t_2,\ T] && \text{with } 1 < q \leq q_1, \\ &c \in L^r[0,T] \cap L^{r_1}[t_2,T] && \text{with } 1 \leq r \leq r_1, \end{aligned}$$

with $1/p + 1/q + 1/r \leq \frac{3}{2}$ and $1/q_1 + \max(1/p + 1/r_1, 1/p_1 + 1/r) < \frac{3}{2}$. Then the stochastic process $\{X_t,\ t \in [t_1+t_2,\ T]\}$ defined in (1) has a modification that satisfies the Hölder condition with exponents up to $\frac{3}{2} - 1/q_1 - \max\left(\frac{1}{2},\ 1/p_1 + 1/r,\ 1/p + 1/r_1\right)$.

We can also verify the $\alpha$-Lipschitz condition for the process $X$ at time-point 0.

**Theorem 3.** Let $a \in L^p[0,T]$, $b \in L^p[0,T]$ and $c \in L^r[0,T]$ with $p \in [2,+\infty]$, $q \in [1,+\infty)$ and $r \in [1,+\infty]$, and let the inequality $1/p + 1/q + 1/r \leq \frac{3}{2}$ hold true. For some fixed $\alpha > 0$, let

$$\exists C\ \forall t \in [0,T]\ :\ \|b\mathbf{1}_{[0,t]}\|_q \leq Ct^\alpha.$$

Then the stochastic process $\{X_t,\ t \in [0,T]\}$ defined in (1) has a modification which satisfies the Lipschitz condition at 0 for all exponents up to $\alpha$:

$$\forall \beta \in (0,\alpha)\ \exists \delta > 0\ \exists C > 0\ \forall t \in [0,\delta)\ :\ |X_t - X_0| < Ct^\beta.$$

Under the second condition of Theorem 1, and under additional condition $fb \in L^{\max(1,\,1/(3/2-1/p-1/r))}[0,T]$, the Paley–Wiener integral of the function $f$ w.r.t. Gaussian process $X$ is equal to

$$\int_0^T f(t)\,dX_t = \int_0^T a(s) \int_s^T f(t)\,b(t)\,c(t-s)\,dt\,dW_s.$$

Now we find $L(s,t)$ in the representation $W_s = \int_0^s L(s,t)\,dX_t$. The kernel $L(s,t)$ must satisfy the integral equation

$$\int_s^u L(u,t) \frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\,dt = 1, \qquad 0 < s < u \leq T. \tag{3}$$

**Proposition 4.** Let the functions $a$, $b$ be $c$ measurable on $[0,T]$, $b(t) \neq 0$ and $a(t) > 0$ for all $0 < t \leq T$, let the function $\frac{1}{a}$ be absolutely continuous on $[0,T]$ ($a(0) \in (0,+\infty]$), and let some function $h(t)$ satisfy the integral equation

$$\int_s^t h(t-u)\,c(u-s)\,du = 1, \qquad 0 < s < t \leq T, \tag{4}$$

$$\sup_{0<t<T} \int_0^t |h(t-u)\,c(u)|\,du < \infty.$$

Then the function

$$L(s,t) = \frac{1}{b(t)} \left( \frac{h(s-t)}{a(s)} + \int_t^s \frac{h(u-t)\,a'(u)\,du}{(a(u))^2} \right)$$

satisfies the integral equation

$$\int_s^u L(u,s)\,a(s)\,b(t)\,c(t-s)\,dt = 1.$$

**Theorem 5.** Let the conditions of Theorem 1 and Proposition 4 hold true. Let $h \in L^{\max(1,\,1/(3/2-1/p-1/r))}[0,T]$. Then $W_s = \int_0^s L(s,t)\,dX_t$.

Finding the integration kernel $L(s,t)$ involves solving integral equation (4).

**Definition.** If the functions $c$ and $h$ satisfy the equation (4), $(c,h)$ is called a *Sonine pair*.

For instance, the functions $c(x) = x^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ and $h(x) = x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ make a Sonine pair. Other examples of Sonine pairs are in [5]. Next theorem establishes the existence of the solution to equation (4), and thus the existence of a Sonine pair with given function $c$ under some conditions.

**Theorem 6.** Let $0 < \alpha < 1$, let $y$ and $h$ be continuously differentiable on $[0,T]$, and

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{1}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{h(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right).$$

Then the integral equation

$$\int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt = y(t), \qquad 0 < x \le T,$$

has a unique solution $f \in L^1(0,T] \cap C(0,T]$.

Theorem 6 allows to prove the existence of a Sonine pair $(f,g)$ with $g(x) = \exp(\beta x)\,x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$. If $\beta \le 0$, then the correspondent function $f$ attains only positive values.

## References


1. *Mishura Yu.S.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes, Springer, 2008.

2. *Mishura Yu., Shevchenko G., Shklyar S.* Gaussian processes with Volterra kernels, `arXiv:2001.03405`

3. *Molčan G.M., Golosov Ju.I.* Gaussian stationary processes with asymptotic power spectrum, Soviet Mathematics Doklady, Vol. 10, No. 1, 1969, 134–137.

4.*Norros I., Valkeila E., Virtamo J.* An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motion, Bernoulli, Vol. 5, No. 4, 1999, 571–587.

5. *Samko S.G., Rogério P.C.* Sonine integral equations of the first kind in $L_p(0,b)$, Fractional Calculus and Applied Analysis, Vol. 6, No. 3, 2004, 235–258.

# Duality for coalescing stochastic flows

**Georgii Riabov**

*Institute of Mathematics, NAS of Ukraine*
*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"*
ryabov.george@gmail.com, ryabov.george@imath.kiev.ua

Let $\psi = \{\psi_{s,t} : -\infty < s \leq t < \infty\}$ be a stochastic flow on the real line, i.e. a family of random mappings of the real line such that $\psi_{s,s}(x) = x$, for any sequence $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ mappings $\psi_{t_1,t_2}, \ldots, \psi_{t_{n-1},t_n}$ are independent and for any $s < t$ mappings $\psi_{s,t}$ and $\psi_{0,t-s}$ are equally distributed. We consider only stochastic flows with continuous trajectories: for all $s, x$ functions $t \to \psi_{s,t}(x)$ are continuous. By a dual flow we understand a backward stochastic flow $\tilde{\psi} = \{\tilde{\psi}_{t,s} : -\infty < s \leq t < \infty\}$ whose trajectories never cross trajectories of $\psi$, i.e. for all $s < t$ and $x, y \in R \quad (\psi_{s,t}(x) - y)(x - \tilde{\psi}_{t,s}(y)) \geq 0$.

If $\psi$ is a flow of homeomorphisms the dual flow coincides with the flow of inverse mappings, $\tilde{\psi}_{t,s} = \psi^{-1}_{s,t}$, its properties are well studied [1]. Assume that $\psi$ is a coalescing stochastic flow, that is for some $x < y$ $P(\exists t > 0 \ \ \psi_{0,t}(x) = \psi_{0,t}(y)) > 0$. Then the existence of a dual flow is an open question. We give sufficient conditions for the existence of a dual flow in terms of finite-point motions of a coalescing stochastic flow $\psi$. Denote

$$w(\epsilon, \delta) = \inf\{t > 0 : \sup_x P(|\psi_{0,t}(x) - x| \geq \epsilon) \geq \delta t\},$$

$$f(\epsilon, t) = \sup_{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_1 + \epsilon} P(\psi_{0,t}(x_1) < \psi_{0,t}(x_2) < \psi_{0,t}(x_3)).$$

Our main result is the following theorem.

**Theorem.** *Assume that for every $n \geq 1$ distributions of finite-point motions $(\psi_{0,\cdot}(x_1), \ldots, \psi_{0,\cdot}(x_n))_{x \in R^n}$ constitute a Feller process on $R^n$, for each $x, y \in R$ and $t > 0$ $P(\psi_{0,t}(x) = y) = 0$, and for each $t \geq 0$ there exists an increasing continuous function $m_t$ such that*

$$P(\psi_{0,t}(x) \neq \psi_{0,t}(y)) \leq |m_t(x) - m_t(y)|, \ x, y \in R.$$

*If for any $t > 0$*

$$\liminf_{\epsilon, \delta \to 0} \frac{f(8\epsilon, t)}{w(\epsilon, \delta)} = 0,$$

*then the dual flow $\tilde{\psi}$ to a flow $\psi$ exists.*

Further, we characterize the distribution of the dual flow and apply it to describe the distribution of boundaries of clusters in Arratia flows [2].

## References

1. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations, Cambridge University Press, 1997.

2. *Dorogovtsev A.A., Riabov G., Schmalfuß B.* Stationary points in coalescing stochastic flows on R, Stochastic Processes and their Applications, V. 130, no. 8, 2020, 4910-4926.

# Some Retrospective Remarks on Pathwise Asymptotic Optimality

**Vladimir I. Rotar**

*Department of Mathematics in the University of California at San Diego*

vrotar@ucsd.edu

This talk is retrospective, and discusses some general setups and approaches concerning pathwise optimality in the infinite horizon control of stochastic processes. More attention will be paid to some general approaches and ideas rather than to concrete results, though we do not aim to present a complete coverage of all ideas in this area.

To present the essence of the matter, there is no need to consider the most general models. We restrict ourselves to the discrete time case and even non-randomized policies.

For the same reason, as a rule, we skip details concerning measurability issues. All spaces below may be viewed as separable metric spaces, and all mappings are measurable with respect to the Borel $\sigma$-algebras in these spaces.

The talk contains also an example that concerns non-normalized additive functionals of random process trajectories.

A detailed review and bibliography may be found in the paper

V.Rotar, *Some Retrospective Remarks on Pathwise Asymptotic Optimality*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms 19 (2012) 207-224.

# Central limit theorem for Hilbert space-valued weakly dependent random fields

**Ruzieva D.S., Sharipov O.Sh.**

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek*

dilnura.saidovna@gmail.com, osharipov@yahoo.com

A central limit theorem for real-valued random fields were studied by many authors (for example, see [1] - [7] and the references therein). The authors mainly considered random fields satisfying mixing conditions. In contrast, in the papers [2], [6], [7] the authors considered random fields satisfying the conditions of weak dependence, which differ from the mixing conditions. Central limit theorems for random fields with values in infinite dimensional spaces were studied in [8]-[12]. We introduce the following notation and definitions.

$N$ and $Z$ denote the set of natural numbers and integers, respectively.

For $n = (n_1, n_2, ..., n_d) \in N^d,\ n \to \infty$ means $n_q \to \infty$ for all $q = 1, ..., d$, $|n| = n_1, ..., n_d$.

For vectors from $R^d$, the relations $\leq,\ <,\ \pm,\ \wedge,\ \vee$ are fulfilled coordinatewise and $\Rightarrow$ means weak convergence.

**Definition.** A family of $\sigma$ -algebras $\left\{\mathcal{F}_i, i \in Z^d\right\}$ is called filtration if $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ for all $i, j \in Z^d$ with $i \leq j$. This family is called commuting if, in addition, for all $k, l \in Z^d$ and all bounded $\mathcal{F}_l$ - measurable random variables $Y$, the equality $E\left(Y|F_k\right) = E\left(Y|F_{k\wedge l}\right)$ a.s. takes place.

For commuting filtration $\left\{\mathcal{F}_i, i \in Z^d\right\}$ the corresponding filtration $\mathcal{F}^{(q)} = \left\{\mathcal{F}_l^{(q)}, l \in Z\right\}$ defined by

$$\mathcal{F}_l^{(q)} = \bigvee_{i \in Z^d,\ i_q \leq l} \mathcal{F}_i,\ \ l \in Z,\ q = 1, ..., d$$

are commuting (see [6]). The projection operator corresponding to the commuting filtration $\left\{\mathcal{F}_i, i \in Z^d\right\}$ is defined by

$$P_j = \prod_{q=1}^{d} P_{j_q}^{(q)},\ j \in Z^d \tag{1}$$

where $P_l^{(q)} : L^1(\mathcal{F}) \to L^1(\mathcal{F})$ and $P_l^{(q)} f = E_l^{(q)} f - E_{l-1}^{(q)} f,\quad f \in L^1(\mathcal{F}),\ l \in Z,\ q = 1, ..., d,$ $E_l^{(q)}(\cdot) = E\left(\cdot|\mathcal{F}_l^{(q)}\right)$ $L^1(\mathcal{F})$-is the $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ space.

By $H$ we denote a separable Hilbert space with inner product $(\cdot, \cdot)$ and a norm $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$.

Consider a random field $\left\{Y_i, i \in Z^d\right\}$ such that

$$Y_i = g \circ G_i\left(\left\{\varepsilon_j,\ i \in Z^d\right\}\right) \tag{2}$$

where $\left\{\varepsilon_j, j \in Z^d\right\}$ is a family of independent identically distributed random variables, $G_i$ is the shift operator on $R^{Z^d}$ defined as in (1) and $g : R^{Z^d} \to H$ is a measurable function.

Introduce the notation:

$\{e_j\}-$ orthonormal basis in $H$.

$$Y_i = \sum_{j=1}^{\infty} Y_i^{(j)} e_j,$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{|n|}} \sum_{\mathbf{1} \leq i \leq n} Y_i,\quad n \in Z^d,$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} S_n^{(i)} e_i,$$

$$t_{ij} = \lim_{n \to \infty} E S_n^{(i)} S_n^{(j)}, i, j = 1, 2, ...$$

$$\|P_0 Y_i^{(j)}\|_2 = \left(E(P_0 Y_i^{(j)})^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$K = (t_{i,j})_{i,j \geq 1}$ is an infinite matrix.

The main result is the following theorem.

**Theorem.** Let a $\{Y_i, i \in Z^2\}$, be a strictly stationary random field (2) with values in $H$ satisfying the following conditions

$$EY_{\mathbf{1}} = 0,\ E||Y_{\mathbf{1}}||^2 < \infty,$$

for the projection operator defined in (1)

$$\sum_{i\in Z^d} \left|\left|P_0 Y_i^{(j)}\right|\right|_2 < \infty, \ j = 1, 2, ...$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_{ii} < \infty, \quad t_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, ...$$

Then the following weak convergence holds

$$S_n \Rightarrow N(0, K) \ \text{ as } \ n \to \infty$$

where $N(0, K)$ is a Gaussian random variable with values in $H$, with mean zero and covariance matrix $K = (t_{ij})$.

**References**

1.*R. C. Bradley*, Introduction to Strong Mixing Conditions,Kendrick Press.,2007.

2.*A. Bulinski, A. Shashkin*, Limit Theorems for Associated Random Fields and Related Systems, Adv. Ser. Stat. Sci. Appl. vol.10, Probab.2007.

3.*C. M. Deo*, A functional central limit theorem for stationary random fields, Ann.Probab. vol.3.1975. pp.708-715.

4.*C. M. Deo*, On $\phi-$ mixing random fields, Proc. Theory Probab.,vol.21.,1976, pp.866-870.

5.*P. Doukhan*, Mixing, Springer., New York, 1994.

6.*M. E. Machkouri, D. Volnȳ, W. B. Wu*, A central limit theorem for stationary random fields, Stochastic Process, vol.123, 2013, 1-14.

7. *D. Volnȳ, Y. Wang*, An invariance principle for stationary random fields under Hannan's condition, Stochastic Processes and their Applications, vol.124,2014, pp.4012–4029.

8. *O. Sh. Sharipov*, Central limit theorem for $l_p$-valued random fields with mixing,Uzbek Mathematical Journal,vol.6,1998.,pp.70-76.

9. *B. Bucchia, M. Wendler*, Change-point detection and bootsrap for Hilbert space valued random fields, Journal of Multivariate Analysis, vol.1559,2017, pp.344-368.

10. *A. Bulinski*, Statistical version of the central limit theorem for vector-valued random fields, Math. Notes.,vol.76,2004,pp 455-464.

11. *N. T. Parpieva, O. Sh. Sharipov*, The central limit theorem for stationary random fields with values in some Banach spaces, Uzbek Mathematical Journal, 1999., pp.68-73.

12. *O. Sh. Sharipov, D. S. Ruzieva*, Central limit theorem for random fields with values in Hilbert spaces, Bulletin of the Institute of Mathematics, vol.6,2019, pp.69-72

# On decomposable semi-regenerative processes and their applications [5]

**Vladimir Rykov**

*Gubkin Oil & Gas Rusian State University (Gubkin University), 65 Leninsky prospect, Moscow, 119991, Russian Federation and*
*Institute for transmission information problems (named after A.A. Kharkevich) RAS, Bolshoy Karetny, 19, GSP-4, Moscow, Russia*
vladimir_rykov@mail.ru

### A little bit history

In the first part the history of the regeneration idea is considered. Here we remind (see [1]–[7]) the main results of regenerative and semi-regenerative processes:

- representation of the process distribution in terms of its distribution in separate regeneration periods, and
- SmithвЂ™s limit theorem and its generalizations.

If the process behavior into separate regeneration or semi-regeneration period is enough complicated the so-called decomposable semi-regenerative processes can be used for their investigations. For this kind of processes representation of time dependent process states probabilities in terms of appropriate distributions into the separate embedded regeneration periods, analogous to those that hold for regenerative process in sense of Smith and semi-regenerative processes are also hold [8], [9] (see also [10]).

### Some applivcations

In the second part it was shown how these results can be applied for studying of some stochastic systems such as

- Priority queueing systems investigation in [8]. Another approach for this kind of the system investigation one can find also in [5], [11].
- Single-server queueing system with recurrent input and generally distributed service time investigation [12], [13]. For more detailed study of this system see book [14].
- Complex hierarchical system investigation [15], [16], [17].
- Polling system investigation [18].
- The review of another approaches to investigation of different systems reliability one can find in [19].

### Conclusion

In the presentation the history of development and generalisation of SmithвЂ™s regenerative idea will be done. Decomposable semi-regenerative processes in focus of our consideration. Some previous applications of these kind of processes will be remind.

### Литература

1. *W. Smith (1955).* Regenerative stochastic processes. *Proc. of Royal Soc.*, Ser. A, v. 232, 1955.

2. *E. Cinlar (1969).* On semi-Markov processes on arbitrary space. Proc. Cambridge Philos Soc., 1969.

[5] The publication has been prepared with the support of the RFFI grant No. 20-01-00575A

3.*J. Jacod (1971).* Theoreme de renouvellement et classification pour les chaines semi-Markoviennes. Ann. inst. Henri Poincare,sect. B, 1971, **7**, 85–129

4.*V.S.Korolyuk, A.F.Turbin (1976). Semi-Markov processes and their applications*. Kiev: Naukova Dumka, 1976, 184p. (in Russian).

5.*G.P. Klimov (1966). Stochastic service systems*. M.:"Nauka", 1966. (In Russian)

6.*V.V. Rykov, M.A. Yastrebenetsky (1971).* On regenerative processes with several types of regeeration points *Cybernetics*, No. 3 (1971), pp. 82-86. Kiev, 1971. (In Russian)

7.*E. Nummelin (1978)* Uniform and ratio-limit theorems for Markov-renewal and semi-regenerative processes on a general state space. Ann. inst. Henri Poincare, sect. B, 1978, **14**,119–143.

8.*V.V. Rykov (1975).* Regenerative processes with embedded regeneration periods and their application for priority queueing systems investigation. *Cybernetics*, No. 6 (1975), pp.105-111. Kiev, 1975. (In Russian)

9.*V.V. Rykov, S.Yu. Jolkoff.* Generalized regeneranive processes with embedded regeneranion periods and their applications. *MOS.Ser. Optimization.* V.12. (1981). N.4. P.575-591.

10.*V.V. Rykov (2011).* Decomposable Semir-regeneranive Processes and their Applications. LAMPERT Academic Publishing, 2011, 75pp.

11.*N.K. Jaiswell (1968). Priority queues.* N-Y, Lnd.: Academic Press, 1968

12.*V.V. Rykov (1983).* Investigation of a general type single-server queueing system with the regenerative processes method. I. *Iznv. AN SSSR, Techn. cibern.* M.: No 6 (1983), pp. 13-20. (In Russian)

13.*V. Rykov (1984).* Investigation of a general type single-server queueing system with the regenerative processes method. II. Study of the main processes at the regenerative period. *Izv. AN SSSR, Techn. cibern.* M.: No 1 (1984), pp. 126-132. (In Russian)

14.*J.W. Cohen (1969). The single server queue.* North Holland Publ. Co. Amsterdam, 1969

15.*V.V. Rykov (1996).* On decomposition of hierarchical computer communication networks. *Proceedings of The International Conference on Distributed Computer Communication Networks.* Pp. 77-85. M.: Inst. for Information Transmission Problems RAS, 1996

16.*V.V. Rykov (1997a).* Two approaches to complex hierarchical systems decomposition. Continuously interrupted systems. *Autom and Remote Control*, No. 10 (1997), pp. 91-104.

17.*V. Rykov (1997b).* Two approaches to complex hierarchical systems decomposition. Aggregative systems. *Autom and Remote Control*, No 12 (1997), pp. 140-149.

18.*V. Rykov (2009).* To Polling Systems analysis. Autom. and Remote Control No.6 (2009), pp. 90-118.

19.*Rykov V.(2018)* On Reliability of Renewable Systems. In: Vonta I., Ram M. (eds.) Reliability Engineering. Theory and Applications, pp. 173-196. CRC Press. (2018

# Probability measure of $P-$ homeomorphisms of circle with several critical points

**Safarov U.A.**

*Turin polytechnic university in Tashkent*
*Tashkent state university of economics*
safarovua@mail.ru, safarovua83@gmail.com

We consider orientation preserving circle homeomorphisms $f$ with lift $F : R^1 \to R^1$, which is continuous, strictly increasing and $F(x+1) = F(x) + 1$, for any $x \in R^1$. The most important arithmetic characteristic of the homeomorphism $f$ of the unit circle $S^1$ is the rotation number

$$\rho_f = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n} (mod 1),\ x \in R^1.$$

Here and below, $F^n$ denotes the $n$th iterate of the function $F$. The rotation number is rational if and only if $f$ has periodic points. Denjoy proved, that if $f$ is a circle diffeomorphism with irrational rotation number $\rho = \rho(f)$ and $\log Df$ is of bounded variation, then $f$ is topologically conjugate to the pure rotation $f_\rho : x \to x + \rho(mod1)$; that is, there exists an essentially unique homeomorphism $\varphi$ of the circle with $\varphi(f(x)) = f_\rho(\varphi(x)),\ x \in S^1$ (see.[1]).

Since the conjugating map $\varphi$ and the unique $f$-invariant measure $\mu_f$ are related by $\varphi(x) = \mu_f([0, x])$ (see.[1]), regularity properties of the conjugating map $\varphi$ imply corresponding properties of the density of the absolutely continuous invariant measure $\mu_f$. The problem of relating the smoothness of $\varphi$ was studied extensively by M.Herman, Y. Katznelson and D. Ornstein, K. Khanin and Ya. Sinai.

A natural extension of circle diffeomorphisms are piecewise smooth homeomorphisms with break points or shortly, the class of P-homeomorphisms or critical circle homeomorphisms.

This class of **P-homeomorphisms** consists of orientation preserving circle homeomorphisms $f$ which are differentiable except at a finite number of break points, at which the one-sided positive derivatives $Df_-$ and $Df_+$ exist, which do not coincide and for which there exist constants $0 < c_1 < c_2 < \infty$, such that

- $c_1 < Df_-(x_b) < c_2$ and $c_1 < Df_+(x_b) < c_2$ for all $x_b \in B(f)$, the set of break points of $f$ in $S^1$;
- $c_1 < Df(x) < c_2$ for all $x \in S^1 \backslash B(f)$;
- $\log Df$ has bounded variation in $S^1$ i.e. $v := var_{S^1} \log Df < \infty$.

The ratio $\sigma_f(x_b) = \frac{Df_-(x_b)}{Df_+(x_b)}$ is called the **jump ratio** of $f$ at $x_b$.

**Definition 1.** *The point $x_{cr} \in S^1$ is called non-flat critical point of a homeomorphism $f$ with order $d \in R$, $d > 2$, if for a some $\delta-$ neighborhood $U_\delta(x_{cr})$, the homeomorphism $f$ can be written as $f(x) = \phi(x)|\phi(x)|^{d-1} + f(x_{cr})$, where $\phi$ is a $C^3$ local diffeomorphism with $\phi(x_{cr}) = 0$.*

Yoccoz in [2] generalized Denjoy's classical result, a critical circle homeomorphism with irrational rotation number is topologically conjugate to an irrational rotation.

The singularity of invariant probability measure for the class critical circle homeomorphisms was shown by J. Graczyk and G. Swiatek in [3]. They proved that if $f$ is $C^3$ smooth circle homeomorphisms with finitely many critical points of integer orders and an irrational rotation number of bounded type, then the conjugating map $\varphi$ is a singular function.

Now we formulate our main result.

**Theorem 1.** *Let $f$ be a $P-$homeomorphism with irrational rotation number $\rho$. Suppose that the homeomorphism has critical points $x_{cr}^{(k)}$, $k=\overline{1,m}$ with orders $d_k>2$. Then the $f$-invariant probability measure $\mu_f$ is singular w.r.t. Lebesgue measure $\ell$ on the circle $S^1$.*

**Reference**


1. *I.P. Cornfeld , S.V. Fomin and Ya.G. Sinai* : Ergodic Theory, Springer Verlag, Berlin (1982).

2. *J.C. Yoccoz*: Il n'a a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser.I,Math. 298 (7),1984, P.141-144.

3. *J. Graczyk ,G. Swiatek*: Singular measures in circle dynamics. Commun. Math. Phys., 157, P.213-230, 1993.


# Investigation of sample paths of stochastic processes from Orlicz spaces


**Lyudmyla Sakhno, Olha Hopkalo**

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine*

lms@univ.kiev.ua, Olia_Gopkalo@ukr.net


This talk presents results on sample paths properties of some classes of stochastic processes from Orlicz spaces. Applications to solutions of partial differential equations with random initial conditions are discussed. The estimates are obtained for the distributions of suprema for stochastic processes considered over bounded and unbounded domains.

The classical monograph by V.V. Buldygin and Yu.V. Kozachenko [1] contains the detailed account of sample path properties for stochastic processes taking values in Orlicz spaces of random variables. More specific attention is paid to $\varphi$-sub-Gaussian processes, which constitute an impotannt subclass of processes from Orlicz spaces of exponential type and generalize Gaussian and sub-Gaussian processes. Investigation of sample path properties for stochastic processes $X(t)$, $t\in T$, is done by means entropy approach which requires to evaluate entropy characteristics of the set $T$ with respect to particular metrics generated by the underlying process $X$. Then one can express assumptions on $X$ to be sample bounded, or to be sample continuous, or to have other properties, in terms of the so-called entropy integrals.

The random variable $\zeta$ is $\varphi$-sub-Gaussian, or belongs to the space $Sub_\varphi(\Omega)$, if $\mathsf{E}\zeta=0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\zeta\}$ exists for all $\lambda\in R$ and there exists a constant $a>0$ such that the following inequality holds for all $\lambda\in R$: $\mathsf{E}\exp\{\lambda\zeta\}\le\exp\{\varphi(\lambda a)\}$. Here $\varphi$ is a particular Orlicz N-function. The random process $\zeta(t)$, $t\in T$, is called $\varphi$-sub-Gaussian if the random variables $\{\zeta(t), t\in T\}$ are $\varphi$-sub-Gaussian. The property of $\varphi$-sub-Gaussianity for stochastic processes allows to evaluate the behavior of their suprema, to derive estimates for various functionals of such processes, to treat their sample paths properties.

We present results on the sample path properties of $\varphi$-sub-Gaussian processes related to the random heat equation. We consider the Cauchy problem for the heat equation with the random initial condition:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \; t > 0, \; x \in R, \; \mu > 0, \quad u(0, x) = \eta(x), \; x \in R,$$

where $\eta(x), x \in R$, is a $\varphi$-sub-Gaussian process. We state the results on the distribution of supremum for the processes representing the solutions to the heat equations with stationary $\varphi$-sub-Gaussian initial conditions. These results generalize the corresponding results from the paper [4] where sub-Gaussian initial conditions were considered. We also present the results on the rate of growth of solutions under this setting.

The talk is based on the papers [2, 3].

**References**

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, 257 p.

2. *Hopkalo O., Kozachenko Yu., Orsingher E., Sakhno L.* Sample paths properties of stochastic processes from Orlicz spaces, with applications to partial differential equations. Statistics Optim. Inform. Comput., Vol.8 (2020), 722–739.

3. *Hopkalo O., Sakhno L.* Investigation of sample paths properties for some classes of $\varphi$-sub-Gaussian stochastic processes. 23 p. (2020). To appear in Modern Stochastics: Theory and Applications.

4. *Kozachenko Yu.V., Leonenko G.M.* Extremal behavior of the heat random field, Extremes, Vol. 8 (2006), 191–205.

# Strong law of large numbers for dependent random variables with values in Banach space type $p$

**Sharipov O.Sh.,Kushmurodov A.A.**

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*
*Uzbekistan Academy of Sciences V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,Tashkent, Uzbekistan*

e-mail :osharipov@yahoo.com, kushmurodov85@mail.ru.

The strong law of large numbers for sequences of random variables with values in infinite-dimensional spaces has been studied by many authors (see (1)-(3), (5) and the literature therein). In (4), the case was considered $m$- dependent random variables with values in a separable Banach space of the type $p$. We will consider $m-$ dependent random variables $\{X_n, \, n \in N\}$ , with values in a separable Banach space (with a norm$\|\cdot\|$ ). The main goal is to establish a strong law of large numbers in the case of $m-$dependent random variables with values in a separable Banach space of the type $p$, provided that $m-$ depends on $n$. In (1), a strong law of large numbers was proved for random fields of independent random variables with values in a separable Banach space $B$.

Let us give the definition of a Banach space type $p$.

**Definition 1.** A separable Banach space $B$ (with a norm $\|\cdot\|$) is said to be of type $p$ $(1 \leq p \leq 2)$, if for all finite collections of independent random variables $X_1, X_2, ..., X_n$

with values in $B$ with $EX_k = 0 \quad E\left\|X_k\right\|^p < \infty \quad k = 1, 2, ..., n$ the following inequality holds:

$$E\left\|X_1 + X_2 + ... + X_n\right\|^p \leq C\sum_{i=1}^{n} E\left\|X_i\right\|^p$$

where the constant $C$ depends only on space $B$.

Let us give the definition of $m$-dependent random variables.

**Definition 2.** A sequence of random variables $..., X_{-1}, X_0, X_1, X_2, ...$ is called a sequence of $m-$ dependent random variables, if $(..., X_{a-k}, X_{a-k+1}, ..., X_a)$, $(X_b, X_{b+1}, ..., X_{b+a}, ...)$ independent, as soon as $b - a > m$ .

**Theorem 1.**Let $\{X_n, \, n \in N\}$ be a sequence of $m$-dependent random variables with values in separable Banach space $B$ of type $p$ $(1 < p \leq 2)$. Suppose that the following conditions hold:

$EX_n = 0$ for all $n \in N$,

$E\left\|X_n\right\|^p < C < \infty$, for some $C > 0$ and for all $n \in N$.

Then almost surely

$$\frac{(n)^\gamma}{(\log n)^\beta}\frac{S_n}{n} \to 0, \text{ as } n \to \infty$$

,

where $\gamma = 1 - \frac{1}{p}$, $\beta > \frac{1}{p}$.

Now we consider a triangular array $\left\{X_{ni}, i = \overline{1, n}\,, n \in N\right\}$ and set $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni}, \;\; n \geq 1$ .

**Theorem 2.**Let$\left\{X_{ni}, i = \overline{1, n}\,, n \in N\right\}$ be a a triangular array of $m-$ dependent random variables with values in separable Banach space $B$ of type $p$. Assume that the following conditions take place:

$EX_{ni} = 0$ for all $i = \overline{1, n}$ , $n \in N$,

$$\sup_i E\left\|X_{ni}\right\|^p < C, m_n = O\left(\sqrt{n}\right)$$

for some positive constant $C$.

Then almost surely as $n \to \infty$

$$\frac{(n)^\gamma}{(\log n)^\beta}\frac{S_n}{n} \to 0,$$

where $\gamma = 1 - \frac{1}{p}$ and $\beta > \frac{1}{p}$.

## REFERENCES


1.*Sharipov O. Sh., Kushmurodov A. A.* Strong laws of large numbers for random fields with values in Banach spaces. Uzbek mathematical journal, 2017.No 1, pp.165-171.

2.*Rosalsky A. , Thanh L. V.* Strong and week laws of large numbers for double sums of independent random elements in Rademacher type $p$ Banach spaces. //Stochastic Analysis and Applications, No 24. 2006, pp.1097-1117.

3.*Zuparov T. M., Mamadaliev K. B.* Strong law of large numbers for quasi-stationary sequences in Hilbert space. //Izvestiya Akademiya Nauk UzSSR, Ser. Fiz-Mat., 1982, No. 1,15-19. (in Russian)

4.*Kushmurodov A. A.* Strong law of large numbers for m-dependent random variables with values in Banach spaces //Bulletin of the Institute of Mathematics 2019, No. 6, pp. 31-34. (in Russian)

5. *Bosq D.* Linear Processes in Function Spaces. //Theory and applications. Lecture notes in Statistics, 149,2000, Springer.

# On the rate of convergence in the Rényi theorem with alternating random summands

**Shevtsova I.G., Tselishchev M.A.**

*Lomonosov Moscow State University,*
*Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*
ishevtsova@cs.msu.ru, mihail.tselishchev@gmail.com

We present estimates for the rate of convergence in the Rényi theorem for the distributions of geometric sums of independent random variables with identical nonzero means and finite second moments without any constraints on their supports. We derive an upper bound for the Kantorovich distance between the normalized geometric random sum and the exponential distribution which has exact order of smallness as the expectation of the geometric number of summands tends to infinity generalizing results of [2]. We also investigate the accuracy of the obtained estimate by introducing the so-called asymptotically best constant similar to [1] and construct its lower bound yielding the one for the Kantorovich distance under consideration.

The presented results are published in [3].

### References

1. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. Skand. Aktuarietidskr., 1956, Vol. 39, p. 160–170.

2. Peköz E. A., Röllin A. New rates for exponential approximation and the theorems of Rényi and Yaglom. Ann. Probab., Vol. 39, No. 2, 2011, p. 587–608.

3. Shevtsova I., Tselishchev M. A generalized equilibrium transform with application to error bounds in the Rényi theorem with no support. Mathematics, Vol. 8, No. 4, 2020, p. 577.

# Asymptotically normal estimators in linear regression model under a mixture of classical and Berkson measurement errors

**Yakovliev Mykyta**

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine*
mykyta.yakovliev@gmail.com

In addition to classical regression models, the so-called errors-in-variables models are studied as well [1]. Those are regression models where covariates are being observed with classical measurement error. But along with the classical error, there is also a Berkson error that occurs when data are obtained by averaging some observed variable. Models with a mixture of classical and Berkson measurement errors arise in the problems of radiation risk estimation [2] taking into account the uncertainty in the radiation doses of the population; in indirect doses of irradiation with radioactive iodine there are errors of both types: both classical and Berkson.

We investigate such linear regression model in the presence of a mixture of classical and Berkson errors in the covariate:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon,\ w = x + \delta,\ \xi = x + u, \tag{1}$$

where the response $y$ and the surrogate variable $w$ are observed, $\xi$ and $x$ - unobservable latent variables, $\varepsilon$ - error in response, $\delta$ - classical measurement error, $u$ - Berkson error, $x$, $\delta$ and $u$ - independent random variables.

$n$ independent copies of the model (1) are considered:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_i + \varepsilon_i,\ w_i = x_i + \delta_i,\ \xi_i = x_i + u_i,\ i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

and pairs $(y_i, w_i), i = 1, \dots, n$, are observed.

Assuming the normality of $x_i$ and $u_i$ by using the conditional distribution $[x_i|\xi_i]$ the model (1) is reduced to a model with the classical error [2], from which we obtain consistent estimators of unknown regression parameters. It turns out that estimators of the parameters $\beta_0$ and $\beta_1$ coincide with the corrected least squares estimators [2] constructed in the absence of Berkson error $u$.

The asymptotic normality of the constructed estimators is proved and their asymptotic independence is analyzed analogously to the case of the linear regression model in the presence of only the classical error [3].

We impose the following restrictions on the model:

1. random variables $x_i$, $\varepsilon_i$, $\delta_i$ and $u_i$ are mutually independent;
2. $\varepsilon_i$, $\delta_i$ and $u_i$ have zero expectations and finite variances, $x_i$ has a finite positive variance;
3. variances of $\delta_i$ and $u_i$ are known, while other parameters of the model ($\mathbf{E}x_i$ and variances of $\varepsilon_i$ and $x_i$) are unknown;
4. random variables $x_i$, $\varepsilon_i$, $\delta_i$ and $u_i$ have finite fourth moments;
5. random variables $\delta_i$ and $\varepsilon_i$ have positive variances;
6. the distribution of error $\varepsilon_i$ is not concentrated at two points.

Consider the estimators of the model parameters:

$$\widehat{\beta_1} := \tfrac{S_{wy}}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}; \tag{3}$$

$$\widehat{\beta_0} := \overline{y} - \widehat{\beta_1}\overline{w}; \tag{4}$$

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 := S_{yy} - \tfrac{S_{wy}^2 (S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2)}{(S_{ww} - \sigma_\delta^2)^2}. \tag{5}$$

When constructing estimators (3), (4), we consider the variance $\sigma_\delta^2$ to be known, and when constructing estimator (5), both variances $\sigma_\delta^2$ and $\sigma_u^2$ are known. If no parameter of the model is known, then such a model is non-identified even with a Gaussian distribution of all available random variables, and then consistent estimation of model parameters is impossible.

Note also that estimators (3), (4) are adjusted least squares estimators [2]; these estimators neglect the presence of Berkson error $u_i$ in model (1).

**Theorem 1.** *Suppose that the conditions (i) - (iii) are satisfied for the (2) system. Then the expressions (3), (4) and (5) exist eventually and they are strongly consistent estimators of the corresponding parameters.*

We obtained an interesting result: estimators of the parameters $\beta_1$ and $\beta_0$ are built independently of the Berkson error. However, it still needs to be taken into consideration to assess the quality of our estimation.

Now, for convenience we will change the way we define our model (1), similarly to [3], where it was done in the presence of the classical error only. Let's replace $\beta_0 = \mu_y - \beta_1\mu$. Then our model will be defined as:

$$y = \mu_y + \beta_1(\xi - \mu) + \varepsilon,\ w = x + \delta,\ \xi = x + u. \tag{6}$$

Accordingly, suppose we have $n \geq 2$, independent realizations of the model (6) with pairs $(y_i, w_i), i = 1, \ldots, n$ observed:

$$y_i = \mu_y + \beta_1(\xi_i - \mu) + \varepsilon_i,\ w_i = x_i + \delta_i,\ \xi_i = x_i + u_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

It follows from this formulation that (1) and (6) models are equivalent, as well as (2) and (7). It's actually the same system written in two different ways. Let us denote the vector of unknown parameters as $\theta = (\mu, \mu_y, \sigma_w^2, \beta_1, \sigma_\varepsilon^2)^T$.

We define an estimating function corresponding to the system (7):

$$s(\theta; w, y) = (s^{\mu}(\theta; w, y), s^{\mu_y}(\theta; w, y), s^{\sigma_w^2}(\theta; w, y), s^{\beta_1}(\theta; w, y), s^{\sigma_\varepsilon^2}(\theta; w, y))^\top, \tag{8}$$

where $s^{\mu}$, $s^{\mu_y}$, $s^{\sigma_w^2}$, $s^{\beta_1}$, $s^{\sigma_\varepsilon^2}$ are defined as:

$$s^{\mu} = w - \mu;\ s^{\mu_y} = y - \mu_y;\ s^{\sigma_w^2} = (w - \mu)^2 - \sigma_w^2;$$
$$s^{\beta_1} = \beta_1(w - \mu)^2 - \beta_1\sigma_\delta^2 - (w - \mu)(y - \mu_y);$$
$$s^{\sigma_\varepsilon^2} = (y - \mu_y)^2 - \sigma_\varepsilon^2 - \beta_1^2(w - \mu)^2 + \beta_1^2(\sigma_\delta^2 - \sigma_u^2).$$

Then estimator $\widehat{\theta}$ is a solution to the equation:

$$\textstyle\sum_{i=1}^n s(\widehat{\theta}; w_i, y_i) = 0. \tag{9}$$

Moreover, we can write the formula for estimator $\widehat{\theta} = (\widehat{\mu}, \widehat{\mu_y}, \widehat{\sigma}_w^2, \widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2)^\top$ explicitly:

$$\widehat{\theta} = (\overline{w}, \overline{y}, S_{ww}, \tfrac{S_{wy}}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}, S_{yy} - \tfrac{S_{wy}^2(S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2)}{(S_{ww} - \sigma_\delta^2)^2})^\top. \tag{10}$$

Therefore, we can prove the following result.

**Theorem 2.** *Suppose that the conditions (i) - (vi) are satisfied for the system (7). Then the following holds:*

*a) estimator $\widehat{\theta}$ is asymptotically normal;*

*b) asymptotic covariance matrix $\Sigma^\theta$ is nonsingular.*

All result are obtained in collaboration with Professor Alexander Kukush (Kyiv, Ukraine).

## References

1. *Carroll, R.J., Ruppert, D., Stefanski, L.A., Crainiceanu, C.M.: Measurement Error in Nonlinear Models: A Modern Perspective, 2nd edn. Monogr. Stat. Appl. Probab., vol. 105, p. 455. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL (2006).*

2. *S.V. Masiuk, A.G. Kukush, S.V. Shklyar, M.I. Chepurny, I.A. Likhtarov (ed.), Radiation Risk Estimation: Based on Measurement Error Models. 2nd ed. (de Gruyter series in Mathematics and Life Sciences, vol. 5). de Gruyter, 2017. P. 240.*

3. *Ya.V. Tsaregorodtsev, A.G. Kukush, and S.V. Shklyar, Asymptotically independent estimates in a structural linear model with measurement errors. Ukrainian Mathematical Journal, 2017, 68, N11, 1741-1755.*


# $M|G|1$ va $M|G1|N$ xizmat ko'rsatish sistemalari statsionar navbat uzunliklari taqsimotlari o'rtasidagi munosabat haqida


**H. Qurbonov, N. Nasimov**

*Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston*

qurbonovh1950@gmail.com


Quyidagicha xarakterlangan $F - M|G|1$ va $F_N - M\,|G|\,1|N$ xizmat ko'rsatish sistemalarini qaraymiz: sistemaga $\lambda$ parametrli Puasson talablar oqimi kelib tushayotgan bo'lsin, ya'ni talablarning kelib tushish momentlari o'rtasidagi vaqt uzunliklari bir xil $\lambda$ parametrli ko'rsatkichli taqsimotga ega. Talablarga ularning kelish tartibida (oldin kelgan talabga oldin) xizmat ko'rsatiladi va xizmat kursatish vaqti uzunliklari o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib bir xil $B\,(x)$ taqsimot funksiyasi va $\mu^{-1}$ o'rtacha qiymatga ega. $F_N$ sistemada talablarning kutish joylari soni $N (N \geq 1)$ o'zgarmas miqdor bilan chegaralangan, ya'ni sistemaga ko'pi bilan (xizmatdagi talab bilan birga) $N + 1$ ta talab bo'lishi mumkin. Xizmat jarayoni $t = 0$ momentda sistemada birinchi talab kelib tushushi bilan boshlasin.

Ushbu belgilashlarni kiritaylik:

$\xi(t)$ va $\xi_N\ (t)$ - mos holda $F$ va $F_N$ sistemalarning statsionar navbat uzunliklari, ya'ni sistemada ixtiyoriy momentda mavjud bo'lgan talablar soni;

$\zeta_k\ -\ F_k (1 \leq k \leq N)$ sistemaning bandlik davri;

$\rho = \lambda\mu^{-1}$ - qaralayotgan sistemalarning yuklanishi.

[2] ishda $\rho < 1$ bo'lganda quyidagi limitlar mavjud bo'lishi isbotlangan edi.

$$P\,(k) = P\,(\xi = k) = \lim_{t\to\infty} P\,(\xi\,(t) = k)\ ; \quad k \geq 0$$

$$P_N\,(k) = P\,(\xi_N\ = k) = \lim_{t\to\infty} P\,(\xi_N\ \ (t) = k)\,; \quad 0 \leq k \leq N + 1\ .$$

Qaralayotgan ishda $P_N\,(k)$ va $M\zeta_k$ shuningdek, $P\,(k)$ va $P_N\,(k)$ lar o'rtasidagi bog'lanishlar ko'rsatiladi. Ushbu bog'lanishlar $F$ va $F_N$ sistemalarning birida olingan natijalarni ikkinchisidagi tegishli miqdorlarga bevosita o'tkazish yoki nisbatan oson yo'llar bilan olish imkonini beradi.

**1-teorema.** *Ixtiyoriy chekli $\rho$ uchun quyidagi munosabarlar o'rinli:*

$$P_N(0) = (1 + \lambda M\zeta_N)^{-1}$$

$$P_N(k) = \frac{\mu(M\zeta_K - M\zeta_{K-1})}{1 + \lambda M\zeta_N}, \quad 0 \le k \le N, \quad M\zeta_0 = 0, \tag{1}$$

$$P_N(N+1) = \frac{1 - (\mu - \lambda)M\zeta_N}{1 + \lambda M\zeta_N}.$$

**2-teorema.** $\rho < 1$ *da quyidagi munosabatlar o'rinli:*

$$P_N(k) = \frac{P(k)}{1 - \rho P(\xi > N)}, \qquad 0 \le k \le N,$$

$$P_N(N+1) = \frac{(1-\rho) \quad P(\xi > N)}{1 - \rho P(\xi > N)} \tag{2}$$

**1-teoremaning isboti.** [1] ishda $P_N(k)$ ehtimollar uchun quyidagi munosabatlar o'rnatilgan:

$$P_N(0) = [1 + \rho(1 + \lambda f_N]^{-1}, \tag{3}$$

$$P_N(1) = \lambda f_1 P_N(0),$$

$$P_N(k) = \lambda(f_k - f_{k-1}) P_N(0), \quad k = 2\ldots, N.$$

bu yerda $f_k$ miqdorlar ushbu munosabat bilan aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k f_k = \frac{v}{\lambda - \lambda v} \frac{1 - b(\lambda - \lambda v)}{b(\lambda - \lambda v) - v}, \tag{4}$$

$$b(s) = \int_0^{\infty} e^{sx} dB(x), \quad Res \ge 0.$$

Shuningdek, [4] ishda Xarris tomonidan

$$\overline{g_N}(s) = \int_0^{\infty} e^{sx} dP(\zeta_N < x)$$

funksiya uchun

$$\overline{g_N}(s) = \frac{\Delta_{N-1}(s)}{\Delta_N} \tag{5}$$

tenglik o'rinli ekanligi ko'rsatilgan edi. Bu yerda $\Delta_k(s)$ funksiya quyidagi munosabat orqali aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \Delta_k(s) = \frac{v\overline{b}(s) - \overline{b}(s + \lambda - \lambda v)}{(1-v)(v - \overline{b}(s + \lambda - \lambda v)}.$$

$\overline{g}'_N(0) = -M\zeta_N$ tenglikni e'tiborga olib, (5) dan

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \zeta_K = \frac{v\mu^{-1}}{v - \overline{b}(\lambda - \lambda v)} \tag{6}$$

munosabatga ega bo'lamiz. (5) va (6) tengliklarga muvofiq darajali qatorlarning tenglik shartiga ko'ra hosil qilamiz:

$$f_k = \frac{1}{\rho} M\zeta_N - \frac{1}{\lambda} \tag{7}$$

(7) ga asosan (3) dan (1) tengliklar kelib chiqadi.

**2- teoremaning isboti**. Ma'lumki, ([3], 62- bet) $\rho < 1$ da

$$\lim_{N\to\infty} M\zeta_N = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

va $\rho > 1$ da

$$\lim_{N\to\infty} M\zeta_N = \infty.$$

Ushbu munosabatlarni e'tiborga olsak, (1) dan $\rho < 1$ da $P(k)$ ehtimollar uchun quyidagi tengsizliklarga ega bo'lamiz:

$$P(0) = 1-\rho,$$

$$P(k) = \mu(1-\rho)(M\zeta_k - -M\zeta_{k-1}), \quad k \geq 1 \tag{8}$$

(1) va (8) munosabatlarga ko'ra,

$$P_N(k) = P(k)(1+\lambda M\zeta_N)^{-1}(1-\rho)^{-1}, \quad 1 \leq k \leq N. \tag{9}$$

Quyidagicha belgilash kiritaylik:

$$f_N = P(\xi > N) = \sum_{k=N+1}^{\infty} P(k).$$

Shunday qilib, (8) ga ko'ra,

$$\sum_{k=1}^{N} P(k) = \mu(1-\rho) M\zeta_N$$

va (9) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$M\zeta_N = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \quad P(\xi \leq N)$$

$$P_N(k) = P(k)(1-\rho f_N), \quad 1 \leq k \leq N. \tag{10}$$

Shuningdek, (1) va (10) ga ko'ra, ushbu tenglikga ega bo'lamiz:

$$P_N(N+1) = 1 - \sum_{k=1}^{N} P_N(k) = \frac{(1-\rho)f_N}{1-\rho f_N}. \tag{11}$$

(10) va (11) tengliklardan (2) munosabat kelib chiqadi.

## Adabiyotlar ro'yxati:


1.*Азларов Т. А. Курбанов Х.* Взаимотношения между распределениями длин очередей систем M|G|1 и M|G1|N. Узб. АН УзССР, серия физ. мат. наук, 1980, N1, 3-8.

2.*Висков О. В. Исмаилов А. И.* Система массового обслуживания с ограниченной очередью. Исследования по мат. стат. и смежные вопросы. Науч. труды ТашГУ, вып. 402, 1972, 17-29.

3.*Климов Г. Б.* Стохастические системы обслуживания , М.: Наука, 1966, с.62-67

4.*Harris T.J.* The remaining busy period of finite queue. Oper. Res.,v.19, 1971, 79-82.


Мухамедов,Кобилов Мухамедов,Кобилов

# Чирчиқ - Оҳангарон ҳавзаси дарёлари тўйиниш манбалари миқдорини аниқлаш ва сув хавфсизлиги бўйича баҳолаш

**Охунов Р.З.**

*Ўзбекистон Миллий Университети*

*r.oxunov@mail.ru*

Мамлакатимизда аҳоли ва иқтисодиётнинг барча соҳаларини сув билан барқарор ва кафолатли таъминлаш мақсадида ирригацияни ривожлантириш, сув хўжалиги инфратузилмасини ва суғориладиган ерларнинг мелиоратив ҳолатини яхшилаш ҳамда ер ва сув ресурсларидан самарали ва оқилона фойдаланиш бўйича кенг кўламли ишлар амалга оширилмоқда.

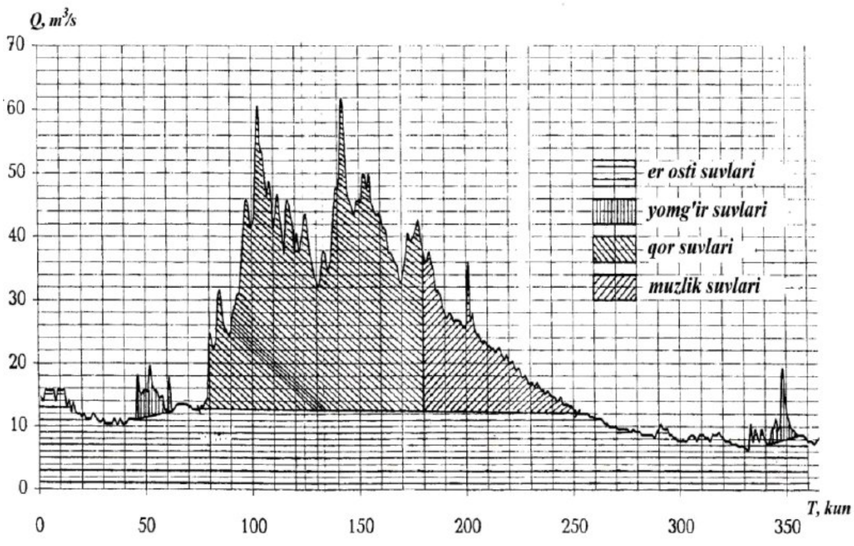
Шу билан бирга, глобал иқлим ўзгариши, аҳоли сони ва сувга бўлган талабнинг йил сайин ошиб бориши туфайли йилдан-йилга сув ресурслари тақчиллигини кучайиши мамлакатни истиқболдаги ривожланишининг асосий чекловчи омиллардан бири бўлиши мумкин.

Дарёлар оқими миқдори турли ҳудудларда турлича қийматларга эга бўлади. Унинг миқдори эса, асосан, дарё ҳавзасининг иқлим шароитига боғлиқ ҳолда йил фасллари бўйича ўзгариб туради. Дарёлар тўйиниш манбалари миқдорининг ўзгаришлари дарёларда кузатилган экстремал сувли йилларда янада яққол кўринади.

Бу соҳада дастлабки тадқиқотлар А.И.Воейков, Э.М.Ольдекоп, Л.К.Давидов, В.Л.Шульц,
О.П.Шеглова, И.А.Шикломанов ва бошқалар томонидан амалга оширилган. Кейинчалик бу муаммо билан Ю.Н.Иванов, Ф.Э.Рубинова, М.И.Геткер, С.И.Харченко, А.М.Никитин, В.Е.Чуб, Р.Машрапов, Ф.Ҳикматов, Ю.С.Ковалёв, А.А.Мавлонов, Ғ.Х.Юнусовлар шуғулланганлар. Лекин, бундай тадқиқот ишларининг аксариятида дарёлар оқимини шакллантирувчи тўйиниш манбалари миқдорларининг ўзгаришлари ўртача сувли йиллар мисолида кўрилган. Шу сабабли, дарёларда кузатиладиган экстремал сувли йилларда тўйиниш манбаларини миқдорий ўзгаришларини ўрганиш ва бу муаммоларни сўнгги йилларда тўпланган гидрологик маълумотлар асосида аниқлаштириш муҳим илмий ва амалий масалалардан бири ҳисобланади. Шу мақсадда Чирчиқ-Оҳангарон ҳавзаси дарёларида кузатилган экстремал сувли йилларни аниқлаш ва уларни шаклланишида иштирок этадиган тўйиниш манбаларини миқдорий баҳолашга ҳаракат қиламиз.

Дарёларнинг тўйинишида манбаларнинг қўшган ҳиссалари миқдорини аниқлаш анча мураккаб вазифа ҳисобланади. Бу бир томондан дарё ҳавзасига ёққан ёмғир ва унда қиш давомида тўпланган қор қопламининг миқдорини аниқлаш масалалари билан боғлиқ. Иккинчидан эса ёмғир ва қор сувларининг маълум қисми дарё тармоғига ер усти сувлари оқими кўринишида эмас, балки шу сувларнинг ер ости қатламларига шимилиши натижасида ҳосил бўлган грунт сувлари сифатида қўшилади. Бундай ҳоллар ўрмонли ҳудудлар ва айниқса, тоғли районлар учун хосдир.

Одатда дарёнинг тўйиниш манбалари миқдорини аниқлашда оқимнинг йиллик гидрографидан фойдаланилади. Маълумки, оқим гидрографи деб, ўртача кунлик сув сарфларининг йил ичида ўзгаришини ифодалайдиган даврий чизмага айтилади. Уни ўртача кундалик, ўн кунлик ёки ойлик сув сарфлари бўйича ҳам чизиш мумкин. У миллиметрли қоғозга чизилиб, вертикалордината ўқи бўйича сув сарфи, горизонталабцисса ўқи бўйлаб эса вақт (ой, кунлар) қўйилади (1-расм). Чизмадаги гидрограф чизиғи ва координата ўқлари билан чегараланган майдон юзаси маълум кузатиш жойи учун бир йил ичида оқиб ўтган сув ҳажмини ифодалайди. Оқим гидрографини айрим тўйиниш манбалари бўйича вертикал ташкил этувчиларга ажратиб, таҳлил қилиш асосида дарё сувининг тўйиниш манбалари миқдори баҳоланади. Тўйиниш манбалари миқдорини баҳолашнинг бундай усули биринчи марта таниқли гидролог олим В.Г.Глушков томонидан ишлаб чиқилган.




1-расм. Гидрографдан дарёнинг тўйиниш манбаларини аниқлаш

Маълумки, дарё ўзанидаги сувлар ер ости сувлари билан гидравлик боғланган ёки боғланмаган бўлиши мумкин. Тоғ дарёлари учун оқим гидрографини тўйиниш манбалари бўйича бўлакларга бўлиш бирмунча қийин, чунки бунда қор, ёмғир, музлик ва ер ости сувларининг ўзаро боғлиқлиги текислик дарёларига нисбатан анча мураккаб бўлади.

Чирчиқ - Оҳангарон ҳавзаси дарёлари учун экстремал сувли йиллардаги тўйиниш манбалари миқдори ҳар бир йил учун чизилган гидрографлардан аниқланди (1-4-жадваллар).

Юқоридаги жадвал ва графикларнинг таҳлили шуни кўрсатадики, ўрганилаётган дарёларда кузатилган кам сувли йилларда уларнинг тўйинишида ер ости сувларининг миқдори ортади. Масалан, Чотқол дарёси қор-музлик сувларидан тўйинадиган дарёлар қаторига кирса-да, унинг тўйинишида абадий қор ва музликлар кам рол ўйнайди. Чотқол дарёсида тўлинсув даври мартдан бошланади, максимал сув сарфлари эса кўп сувли йилларда июнда кузатилса, кам сувли йилларда эртароқ, май ойида кузатилади [3,4,5]. Шу боис, жуда кам сувли 1982 йилда дарёнинг тўйинишида ер ости сувларининг хиссаси кўп сувли 1969 йилга нисбатан 27 фоизга ортган. Бу кўрсаткич Писком, Угом ва Оҳангарон дарёларида ҳам сезиларли ўсган. Уларнинг қийматлари мос равишда 28, 21,4 ва 8,9 фоизларга тенг бўлди. Сўнги рақамлардан кўриниб турибдики, Оҳангарон дарёсида ўта (ҳалокатли) кам сувли 1974 йилда дарё тўйинишидаги ер ости сувларининг кўп сувли 1994 йилга нисбатан ортиши ўрганилаётган бошқа дарёларникига нисбатан кам миқдорда. Бунга асосий сабаб, дарё қор-ёмғир сувлари ҳисобига тўйинишидадир.

Чирчиқ - Оҳангарон ҳавзаси дарёларининг барчасида кузатилган кўп сувли йил-

1-жадвал

**Чотқол дарёсининг тўйиниш манбалари миқдорини аниқлаш**

*Бу ерда: Q-сув сарфи; T-вақт; W-оқим ҳажми*

| Сув миқдори | Ер ости, м$^3$ | Қор. сувлари, м$^3$ | Ёмғир сувлари, м$^3$ | Муз. м$^3$ | Йил. м$^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Кўп сувли 1969 йил | | | | | |
| Q, $10^6$ м$^3$/с | 43,2 | 43,2 | 43,2 | 43,2 | |
| T | 51,4 | 50,2 | 15,3 | 20,8 | 137,7 |
| W, $10^6$ м$^3$ | 2220,5 | 2168,6 | 661,0 | 898,6 | 5948,6 |
| W, % | 37,33 | 36,46 | 11,11 | 15,11 | 100 |
| Кам сувли 1982 йил | | | | | |
| Q, $10^6$ м$^3$/с | 8,64 | 8,64 | 8,64 | 8,64 | - |
| T | 131 | 39 | 27 | 6,58 | |
| W, $10^6$ м$^3$ | 1131,8 | 337,0 | 233,3 | 56,9 | 1758,9 |
| W, % | 64,35 | 19,16 | 13,26 | 3,23 | 100 |

2-жадвал

**Пском дарёсининг тўйиниш манбалари миқдорини аниқлаш**

| Сув миқдори | Ер ости, м$^3$ | Қор. сувлари, м$^3$ | Ёмғир сувлари, м$^3$ | Муз. м$^3$ | Йил. м$^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Кўп сувли 1969 йил | | | | | |
| Q, $10^6$ м$^3$/с | 17,28 | 17,28 | 17,28 | 17,28 | - |
| T | 62,2 | 55,7 | 24,9 | 39,6 | 182,4 |
| W, $10^6$ м$^3$ | 1074,8 | 962,5 | 430,3 | 684,3 | 3151,9 |
| W, % | 34,10 | 30,54 | 13,65 | 21,71 | 100 |
| Кам сувли 1982 йил | | | | | |
| Q, $10^6$ м$^3$/с | 8,64 | 8,64 | 8,64 | 8,64 | - |
| T | 103 | 33 | 13 | 17 | 166 |
| W, $10^6$ м$^3$ | 889,9 | 285,1 | 112,3 | 146,9 | 1434,2 |
| W, % | 62,05 | 19,88 | 7,83 | 10,24 | 100 |

ларда уларнинг тўйинишидаги музлик ва қор сувларининг хиссаси ортган. Бу ҳолат дарёлар ҳавзаларининг метеорологик шароити билан изоҳланади. Чунки, кўп сувли йиллларда дарёлар ҳавзаларига меъёрга нисбатан кўп ёғин ёққан бўлса, кам сувли йилларда эса буни аксини кўриш мумкин.

Дарёлардаги сув миқдори доимо бир хил бўлавермайди. Дарёлар тўлинсув ва тошқин даврларида тўлиб тошиб оқиб катта талофатлар ҳам етказиши мумкин. Энг ачинарлиси шу даврларда йиллик оқимнинг 60-70сув кескин камайиб қуриб қолиши ҳам мумкин. Шундай шароитларда дарё ва сойлар сувидан самарали фойдаланиш ва тошқинларни олдини олиш мақсадида уларнинг оқим режимини бошқариш талаб этилади. Бу муаммони дарёларда сунъий кўллар, яъни сув омборлари барпо этиш йўли билан ҳал этиш мумкин.

Сув хавфсизлиги нуқтаи назардан қараганда юқорида келтирилган ўта (ҳалокатли) экстремал сувли йилларни алоҳида ўрганиш гидрологияни муҳим масалаларидан бири ҳисобланади. Чотқол ва Оҳангарон дарёларида 1969 йил ўта (ҳалокатли) кўп сувли йил кузатилган бўлиб, шу йили бу дарёлардан мос равишда 229 - 55,6 м3/с миқдордаги сув оқиб ўтган. Ўрганилаётган дарёлар орасида фақатгина Оҳангарон дарёсида ўта (ҳалокатли) кам сувли йил кузатилган бўлиб (1974 йил), шу йил дарёда кўп йиллик оқим меъёрини атиги 43 фоизи оқиб ўтган.

БМТ таснифига кўра, Ўзбекистон сув тақчиллигини бошидан кечираётган мамлакатлар қаторига киради, республика сув ресурсларининг келгуси балансига минтақанинг асосий дарёлари шаклланадиган музликларнинг жадал эриши, иқлим ўзгаришининг бошқа жиҳатлари, шунингдек аҳолининг сувга ортиб бораётган эҳтиёжлари ва саноатнинг ривожланиши таъсир кўрсатади. Тахмин қилинишича, сув таъминотининг 10-20 фоизга қисқариши суғориладиган ер майдонлари ўлчами ва аҳоли бандлиги учун жиддий оқибатларга олиб келиши ва натижада ялпи миллий даромаднинг камайишига сабаб бўлиши мумкин. Деҳқончилик, коммунал ва саноат соҳалари, атроф-муҳит ва бошқа соҳаларнинг эҳтиёжларини қондириш учун сув хўжалигини самарали бошқариш мамлакатнинг барқарор иқтисодий ривожланишини кафолатлаш учун ҳал қилувчи аҳамиятга эга.

3-жадвал

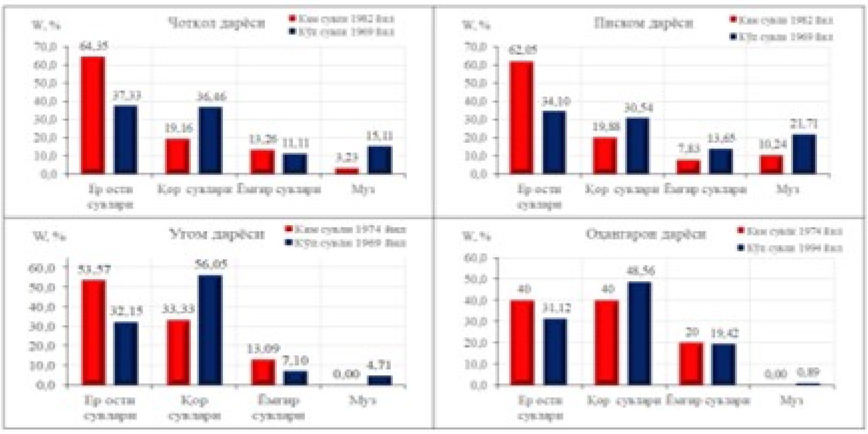
Угом дарёсининг тўйиниш манбалари миқдорини аниқлаш

| Сув миқдори | Ер ости, м³ | Қор сувлари, м³ | Ёмғир сувлари, м³ | Муз, м³ | Йил, м³ |
|---|---|---|---|---|---|
| Кўп сувли 1969 йил | | | | | |
| Q, 10⁶ м³/с | 8,64 | 8,64 | 8,64 | 8,64 | |
| T | 44,4 | 77,4 | 9,8 | 6,5 | 138,1 |
| W, 10⁶ м³ | 383,6 | 668,7 | 84,7 | 56,2 | 1193,2 |
| W, % | 32,15 | 56,05 | 7,10 | 4,71 | 100 |
| Кам сувли 1974 йил | | | | | |
| Q, 10⁶ м³/с | 4,32 | 4,32 | 4,32 | 4,32 | - |
| T | 45 | 28 | 11 | - | 84 |
| W, 10⁶ м³ | 194,4 | 121,0 | 47,5 | - | 362,9 |
| W, % | 53,57 | 33,33 | 13,09 | - | 100 |

4-жадвал

Оҳангарон дарёсининг тўйиниш манбалари миқдорини аниқлаш

| Сув миқдори | Ер ости м³ | Қор. сувлари, м³ | Ёмғир сувлари, м³ | Муз, м³ | Йил, м³ |
|---|---|---|---|---|---|
| Кўп сувли 1994 йил | | | | | |
| Q, 10⁶ м³/с | 17,28 | 17,28 | 17,28 | 17,28 | - |
| T | 15,7 | 24,5 | 9,8 | 0,45 | 50,45 |
| W, 10⁶ м³ | 271,3 | 423,4 | 169,3 | 7,8 | 871,8 |
| W, % | 31,12 | 48,56 | 19,42 | 0,89 | 100 |
| Кам сувли 1974 йил | | | | | |
| Q, 10⁶ м³/с | 4,32 | 4,32 | 4,32 | 4,32 | - |
| T | 16 | 16 | 8 | - | 40 |
| W, 10⁶ м³ | 69,1 | 69,1 | 34,6 | - | 172,8 |
| W, % | 40 | 40 | 20 | - | 100 |




2-расм.Чирчиқ - Оҳангарон ҳавзаси дарёлари тўйиниш манбалари миқдорининг экстремал сувли йилларда ўзгариши

Шу сабабли Ўзбекистон Республикаси сув хўжалигини ривожлантиришнинг асосий мақсади - аҳоли, иқтисодиёт тармоқлари ва атроф-муҳитнинг сувга бўлган муттасил ошиб бораётган эҳтиёжларини қондириш учун зарурий шарт-шароитларни яратиш, сув ресурсларини самарали бошқариш ва ундан оқилона фойдаланишни таъминлаш, сув ресурслари тақчиллиги кучайиб бораётган, шунингдек глобал иқлим ўзгаришлари шароитида сув ва озиқ-овқат хавфсизлигига эришишдан иборатдир.

## Адабиётлар

1. *Расулов А.Р., Ҳикматов Ф.Ҳ., Айтбаев Д.П.* Гидрология асослари. Тошкент: Университет, 2003. 327 б.

2. *Шульц В.Л.* Реки Средней Азии. - Л:. Гидрометеоиздат, 1965.- 691 с

3. *Давыдов Л.К.* Колебания водоносности рек Средней Азии //Тр. Средазмета. -Ташкент, 1927. -Т. 1. - Вып. 2. -С.5-48.

4. *Исмоилова Н.Б., Тешабоева И.А., Тургунов Д.М.* Кам сувли йилларда дарёлар оқимининг йил давомида тақсимланишига метеорологик омилларнинг таъсири// За-

монавий география ва Ўзбекистон табиий-ресурс потенциалини баҳолаш: Иқтидорли талабалар ва ёш олимларнинг илмий-амалий конференцияси материаллари. - Тошкент, 2015. - Б. 237-241.

5.*Каримова Н.Х., Абдул Раҳим Г.М., Исмоилова Н.Б., Тургунов Д.М.* Тўлинсув даври элементларининг метеорологик омилларга боғлиқлиги (Чириқ-Оҳангарон ҳавзаси мисолида)// География ва Ўзбекистон табиий-ресурс салоҳиятини баҳолаш: Иқтидорли талабалар ва ёш олимларнинг илмий-амалий конференцияси материаллари. - Тошкент, 2016. - Б. 208-211.

# Bir zarrachali sistema energiyasining trigonometrik holatlardagi o‘rta qiymati va dispersiyasi

**Toshturdiyev A.M., Niyazov S.E.**

*Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston*
*Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston*
atoshturdiyev@mail.ru, salohiddinniyazov@mail.ru

Ma’lumki, moddiy nuqta trayektoriyasini ifodalovchi funksiyalarni aniqlab berish masalasi klassik mexanikaning asosiy masalasini tashkil etadi va bu nazariyada fizik kattaliklar koordinata va vaqtning funksiyasi sifatida tavsiflanadi. Kvant mexanikasida esa vaziyat batamom boshqacha, chunki zarrachaning koordinata va impulsi, bir vaqtning o‘zida aniq qiymatlar qabul qila olmaydigan fizik kattaliklar turiga kiradi. Ikkinchi tomondan kvant nazariyasi klassik mexanikadan farqli ravishda bo‘lajak voqealarni aniq aytib bera olmaydi, balki ularni amalga oshish ehtimolligini ko‘rsatadi. Shu sababli boshlang‘ich holati ma’lum bo‘lgan zarracha ustida o‘tkazilgan keyingi o‘lchashlar har xil natijalarga olib kelishi mumkin. Kvant mexanikasining vazifasi ana shu o‘lchashlarda u yoki bu natijaning qanday ehtimol bilan olinishini aniqlashdan iboratdir [1],[2].

Kvant mexanikasidagi sistemaning holatlari $\Omega$ kompleks separabel Hilbert fazosining (birlik) vektorlari bilan ifodalanadi. Bunda ikkita vektor ayni bitta holatni faqat va faqat nolmas kompleks ko‘paytuvchiga farq qilgandagina ($\psi$ va $\varphi$ vektorlar uchun $\psi = c\varphi, |c| = 1$) ifodalaydi. Har bir kuzatiluvchan miqdorga $\Omega$ da chiziqli o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorni bir qiymatli mos qo‘yish mumkin [3].

$\Omega$ - holatlar fazosi, uning elementlari esa holat vektorlari deyiladi. Biz har doim (agar aksi aytilmagan bo‘lsa) fizik sistemaning holatini ifodalovchi $\psi \in \Omega$ vektorning normasi birga teng deb hisoblaymiz. Ba’zan sistemaning holati $\psi \in \Omega$ vektor bilan ifodalanishini nazarda tutib, sistema $\psi$ holatda deb ataymiz. Kuzatiluvchan $a$ miqdorga mos o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorni $A$ bilan belgilaymiz. Har bir $\psi$ holatda kuzatiluvchan $a$ miqdor yagona tasodifiy miqdorni aniqlaydi, uni biz $a_\psi$ orqali belgilaymiz. Agar kuzatiluvchan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ miqdorlarning qiymatlarini bitta tajribada (bitta tajriba qurilmasida) istalgan aniqlikda o‘lchash mumkin bo‘lsa, ular bir vaqtda (yoki birgalikda) o‘lchanadigan miqdorlar deyiladi [3].

Har qanday kvantomexanik sistemada eng muhim fizik miqdorlardan biri bu energiya hisoblanadi. Bizga bir o‘lchamli panjara $Z = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ da erkin harakatlanayotgan kvant tipidagi zarracha berilgan bo‘lsin. Zarracha energiyasining qiymati tasodifiy miqdor bo‘lib, bu tasodifiy miqdorni $h$ orqali, unga mos o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorni $H$ bilan belgilaymiz. $H$ operator separabel kompleks Hilbert fazosi $\ell_2(Z)$ (holatlar fazosi) da [4],[5],[6] quyidagicha aniqlanadi:

$$(Hf)(n) = -\frac{1}{2}(f(n+1) + f(n-1) - 2f(n)). \tag{1}$$

Energiya operatori $H$ ning (1) tasviriga koordinat tasvir deyiladi. Energiya operatorining koordinat tasviridan impuls tasviriga o‘tish Furye almashtirishi orqali amalga oshiriladi:

$$F : \ell_2(Z) \to L_2[-\pi, \pi], \ \ (F\hat{f})(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in Z} \hat{f}(n) e^{inp}.$$

Energiya operatorining impuls tasviri separabel kompleks Hilbert fazosi $L_2[-\pi, \pi]$ da quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$(Hf)(p) = (1 - \cos p) f(p), \ \ f \in L_2[-\pi, \pi].$$

Ma’lumki [7], $\psi_0^+(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\{\psi_n^+(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos np$, $\psi_n^-(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin np\}$, $n \in N$ trigonometrik sistema $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda ortonormal bazis tashkil qiladi.

Toq trigonometrik funksiya $\psi_n^-$ larning dastlabki $n$ tasining yig‘indisidan tashkil topgan quyidagi holatlar ketma-ketligini qaraymiz:

$$S_n^-(p) = \frac{\psi_1^-(p) + \psi_2^-(p) + \cdots + \psi_n^-(p)}{\sqrt{n}}, \ \ n \in N. \tag{2}$$

Istalgan $n \in N$ natural son uchun $\|S_n^-\| = 1$ tenglikni oson tekshirish mumkin.

$a$ kuzatiluvchan miqdorning $\psi$ holatdagi o‘rta qiymati $\bar{a}_\psi$ va dispersiyasi $D(a_\psi)$ uchun quyidagi tengliklar o‘rinli ([3] ga qarang)

$$\bar{a}_\psi = (A\psi, \psi), \qquad D(a_\psi) = \|A\psi - \bar{a}_\psi \psi\|^2. \tag{3}$$

(3) tengliklardan foydalanib zarracha energiyasining $S_n^-$ holatdagi o‘rta qiymati $\overline{h}_{S_n^-}$ va dispersiyasi $D(h_{S_n^-})$ larni hisoblash mumkin.

**1-teorema.** *Zarracha energiyasining* $S_n^-$, $n \in N$ *holatdagi ((2) ga qarang) o‘rta qiymati*

$$\overline{h}_{S_n^-} = \frac{1}{n}$$

*ga teng.*

**Isbot.** Teoremani isbotlash uchun (3) formuladan foydalanamiz. Demak, zarracha energiyasining $S_n^-$ holatdagi o‘rta qiymati $(HS_n^-, S_n^-)$ skalyar ko‘paytmaning qiymatiga teng. Bu skalyar ko‘paytmani hisoblash

$$(HS_n^-, S_n^-) = \int_{-\pi}^{\pi} (HS_n^-)(p) \overline{S_n^-(p)} dp = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos p) \Big[ \sin p + \sin 2p + \cdots + \sin np \Big]^2 dp$$

integralni hisoblashga teng kuchli. Bu integralni hisoblashda trigonometrik sistema $\{\psi_0^+, \psi_n^+, \psi_n^-\}_{n=1}^\infty$, ortogonalligidan hamda

$$2 \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

ayniyatdan foydalanib, $(HS_n^-,\, S_n^-)$ skalyar ko'paytma uchun quyidagini olamiz:

$$(HS_n^-,\, S_n^-) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos p)\Big[\frac{n}{2}+(n-1)\cos p\Big]dp = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\frac{n}{2}-(n-1)\cos^2 p\Big]dp. \quad (4)$$

(4) ni hisoblashda integrallash jadvalidan foydalansak teorema isbotiga kelamiz.

**2-teorema.** *Zarracha energiyasining $S_n^-$, $n \geq 2$ holatdagi dispersiyasi*

$$D(h_{S_n^-}) = \frac{1}{n}\Big(\frac{3}{4} - \frac{1}{n}\Big)$$

*ga teng.*

### Adabiyotlar


1. *M.M. Musaxanov, A.S. Rahmatov.* Kvant mexanikasi. "TAFAKKUR BO'STONI" Toshkent 2011. 352.
2. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Квант механикаси. Тошкент. Укитувчи. 2-китоб. 1977. 288.
3. *Ф.А. Березин, М.А. Шубин* Уравнение Шреденгера. Изд. Московского университета. 1983. 394.
4. *Minlos R.A., Mogilner A.I.* Some problems conserning spectra of lattice models. In Schrödinger operators: Standard and Nonstandard (eds. P.Exner, P.Seba). World. Scientific. Singapoor. 1989. p 243-257.
5. *J.I. Abdullayev, A.M. Toshturdiyev.* Panjaradagi bir zarrachali sistema energiyasi taqsimotining ba'zi xossalari. SamDU ilmiy Axborotnoma. Samarqand, 2020. 3-son, (121) 23-29.
6. *Абдуллаев Ж.И* Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. Теоретическая и математическая физика. Россия, Москва. Т.147, N 1, 2006, 36-47.
7. *Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I.* Funksional analiz va integral tenglamalar. Darslik. Toshkent. LIGHT-GROUP. 2015. 460.


# Асимптотические свойства эмпирических характеристических процессов независимости


**Абдушукуров А.А[1], Какаджанова Л.Р.[2]**

*Филиал Московского Государственного Университета имени М.В.Ломоносова в городе Ташкенте[1], Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз1 Филиал Московского Государственного Университета имени М.В.Ломоносова в городе Ташкенте[2]*

a_abdushukurov@rambler.ru1, leyla_tvms@rambler.ru2


При анализе статистических данных в медико-биологических исследованиях, в инженерии, в страхо-вом деле, демографии, а также в других областях исследований практического характера, представляю-щие интерес случайные величины принимают свои значения в зависимости от осуществления некоторых событий. Так в испытаниях физических систем (индивидуумов) на продолжительность безотказной работы величины наработок систем зависят от отказов подсистем, в страховом деле величины выплат страховых компаний своим клиентам зависят от страховых случаев. В таких экспериментальных ситуа-циях естественно возникают задачи исследования зависимости случайных величин от соответсвующих событий.

В работах [1-5] были исследованы предельные свойства эмпирических процессов независимости случайных величин и событий, индексированных классом измеримых функций. В данной работе иссле-дованы асимптотические свойства эмпирических характеристических процессов независимости.

Рассматривается последовательность независимых экспериментов, в которых наблюдаются пары $\{(X_k, A_k),\ k \geq 1\}$, где случайные величины $X_k$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и принимают значения в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}$ и $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{X})$-сигма алгебра борелевских подмножеств $\mathfrak{X}$. События $A_k$ имеют общую вероятность $p = \mathbb{P}(A_k) \in (0,1), k \geq 1$. Индикаторы событий обозначим через $\delta_k = I(A_k)$. Пусть наблюдается повторная выборка объема $n$: $\mathbb{S}^{(n)} = \{(X_k, \delta_k), 1 \leq k \leq n\}$. Каждый элемент $(X_k, \delta_k)$ выборки индуцирует статистическую модель $(\mathfrak{X} \otimes \{0,1\}, \mathfrak{B} \otimes \{0,1\}, \mathcal{P})$, где распределение $\{\mathcal{P}(B \otimes D) = \mathbb{P}(X_k \in B, \delta_k \in D), B \in \mathfrak{B}, D \subset \{0,1\}\}$ для каждого борелевского множества $B$ представляется через субраспределения: $\mathcal{P}(B \otimes \{0,1\}) = \mathbb{Q}(B) = \mathbb{Q}_0(B) + \mathbb{Q}_1(B)$ и $\mathbb{Q}_m(B) = \mathcal{P}(B \otimes \{m\}), m = 0,1$. Интерес представляет гипотеза $\mathcal{H}$ о независимости $X_k$ и $A_k$ в каждом эксперименте. Легко видеть, что при справедливости $\mathcal{H}$: $\mathbb{Q}_0(B) = (1-p)\mathbb{Q}(B)$ и $\mathbb{Q}_1(B) = p\mathbb{Q}(B)$ для любого $B \in \mathfrak{B}$. Введем знакопеременную меру $\{\Lambda(B) = \mathbb{Q}_1(B) - p\mathbb{Q}(B), B \in \mathfrak{B}\}$, которая равна нулю при гипотезе $\mathcal{H}$. При помощи этой меры построим эмпирический процесс для проверки гипотезы $\mathcal{H}$. В этой связи введем эмпирические аналоги вышеопределенных мер по выборке $\mathbb{S}^{(n)}$ для $B \in \mathfrak{B}$:

$$\mathbb{Q}_{mn}(B) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(X_k \in B, \delta_k = m), m = 0,1,$$

$$\mathbb{Q}_n(B) = \mathbb{Q}_{0n}(B) + \mathbb{Q}_{1n}(B) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(X_k \in B),$$

$$\Lambda_n(B) = \mathbb{Q}_{1n}(B) - p_n\mathbb{Q}_n(B),\ p_n = \mathbb{Q}_{1n}(\mathfrak{X}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k.$$

Заметим, что $\Lambda_n(B)$ при любом $B \in \mathfrak{B}$ является несмещенной оценкой $\Lambda(B)$. Более того, согласно усиленному закону больших чисел, при каждом $B \in \mathfrak{B}$ и $n \to \infty$: $\Lambda_n(B) \to \Lambda(B)$, с вероятностью 1. Пусть $B = (-\infty, t],\ t \in \mathbb{R}$ и $H_m(t) = \mathbb{Q}_m((-\infty, t]),\ m = 0,1,\ H(t) = \mathbb{Q}((-\infty, t]) = H_0(t) + H_1(t),\ \Lambda(t) = \Lambda((-\infty, t]) = H_1(t) - pH(t)$. Тогда при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$, $\Lambda(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим следующий эмпирический процесс независимости:

$$\left\{\Delta_n(t) = \left(\frac{n}{p_n(1-p_n)}\right)^{1/2}(\Lambda_n(t) - \Lambda(t)),\ t \in \mathbb{R}\right\}. \tag{1}$$

Процесс (1) был исследован в [5] и было установлено, что

$$\Delta_n(t) \Rightarrow \Delta^0(t) \ \text{ в } \mathbb{D}(\mathbb{R}),$$

где " $\Rightarrow$ " означает слабую сходимость процессов в пространстве Скорохода $\mathbb{D}(\mathbb{R})$. Здесь $\{\Delta^0(t), \ t \in \mathbb{R}\}$ гауссовский процесс с нулевым средним и при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$,

$$\Delta^0(t) \overset{D}{=} \mathbb{B}(H(t)), \ t \in \mathbb{R},$$

где "$\overset{D}{=}$" означает равенство по распределению и $\{\mathbb{B}(y), \ 0 \le y \le 1\}$-процесс броуновского моста с нулевым средним и ковариацией

$$E\mathbb{B}(y_1)\mathbb{B}(y_2) = \min(y_1, y_2) - y_1 \cdot y_2, \ 0 \le y_1, y_2 \le 1.$$

Определим характеристические функции (х.ф.), соответствующие распределениям $H(t)$ и $H_m(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $m = 0,1$ : $c(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dH(t) = c_0(s) + c_1(s)$, $c_m(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dH_m(t)$, $m = 0,1$, $s \in \mathbb{R}$. Введем их эмпирические аналоги:

$$c_n(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dH_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{isz_j} = c_{0n}(s) + c_{1n}(s), \ s \in \mathbb{R},$$

где $c_{mn}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dH_{mn}(t)$, $m = 0,1$, $c_{0n}(s) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(1-\delta_j)e^{isz_j}$, $c_{1n}(s) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\delta_j e^{isz_j}$. Пусть $\Phi_s(\Lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\Lambda(t)$. Тогда при справедливости гипотезы $\mathcal{H}$, $\Phi_s(\Lambda) \equiv 0$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Следовательно, этот функционал может быть использован для построения статистики для проверки $\mathcal{H}$. Естественной оценкой преобразования Фурье $\Phi_s(\Lambda)$ меры $\Lambda$ является

$$\Phi_s(\Lambda_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\Lambda_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d(H_{1n}(t) - p_n H_n(t)).$$

Известно (см. [6-8]), что эмпирическая х.ф. $c_n(s)$ является равномерно сильносостоятельной оценкой х.ф. $c(s)$ на каждом конечном интервале. Исходя из этого на банаховом пространстве $\mathbb{C}[-{}^1/_2; {}^1/_2]$ непрерывных комплекснозначных функций на $[-{}^1/_2; {}^1/_2]$ с супремум-нормой $\|\cdot\| = \sup\limits_{|s| \le {}^1/_2} |\cdot|$ рассмот-рим следующее преобразование эмпирического процесса независимости (1):

$$\left\{\mathcal{D}_n(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, d\Delta_n(t), \ \ s \in \mathbb{R}, \ \ n \ge 1\right\}. \tag{2}$$

Определим класс $\mathcal{F}$ функций индексации $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ как $\mathcal{F} = \{t \mapsto e^{ist} : |s| \le {}^1/_2\} = \{\mathrm{Re}(f) : \ f \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathrm{Im}(f) : \ f \in \mathcal{F}\}$. Легко видеть, что для нормы пространства $\mathcal{L}_q(\mathbb{Q}_m)$, $m = 0,1$ для элементов $\mathcal{F}$:

$$\left\|e^{ist}\right\|_{\mathbb{Q}_{m,q}} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|e^{ist}\right|^q dH_m(t)\right)^{{}^1/_q} \le 1, \ \ m = 0,1, \ \ s \in \mathbb{R},$$

т.е. $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_q(\mathbb{Q})$ для любого числа $q > 0$. Пусть $N_{[\,]}(\varepsilon, \mathcal{F}, \mathcal{L}_1(\mathbb{Q}_m))$- число $\varepsilon-$скобок (сети) для покрытия $\mathcal{F}$ относительно меры $\mathbb{Q}_m$ и $\mathbb{H}_{m1}(\varepsilon) = \log N_{[\,]}(\varepsilon, \mathcal{F}, \mathcal{L}_1(\mathbb{Q}_m))\,,\ m = 0, 1$, соответствующая метрическая энтропия. Для процесса (2) справедливо следующее представление:

$$\mathcal{D}_n(s) = [p_n(1-p_n)]^{-1/2} \cdot \{\gamma_{1n}(s) - p\gamma_n(s) - c(s)\,a_{1n}(+\infty) + \mathbb{R}_n^*(s)\}\,,$$

где $\mathbb{R}_n^*(s) = -(p_n - p)\,\gamma_n(s)$ остаточный член и $\gamma_n(s) = \gamma_{0n}(s) + \gamma_{1n}(s) = \sqrt{n}\,(c_n(s) - c(s))\,,\ \gamma_{mn}(s) = \sqrt{n}\,(c_{mn}(s) - c_m(s))\,,\ m = 0,1;\ s \in \mathbb{R}-$ эмпирические характеристические процессы.

Таким образом, процесс (2) и $\tilde{\mathcal{D}}_n(s) = [p(1-p)]^{-1/2} \cdot \{\gamma_{1n}(s) - p\gamma_n(s) - c(s)\,a_{1n}(+\infty)\}$ в пределе при $n \to \infty$ имеют одно и тоже распределение. Введем условия:

**(A)** Распределения $H_m(t)$ имеют плотности $h_m(t)$ такие, что существует число $t_0 > 0$ и для всех $|t| \geq t_0$ функции $\{h_m(t) + h_m(-t)\,,\ m = 0, 1\}$ убывают;

**(B)** $\int_0^1 [\mathbb{H}_{m1}(\varepsilon^2)]^{1/2}\, d\varepsilon < \infty,\ \ m = 0, 1;$

**Теорема 1.** Пусть справедливы условия **(A)** и **(B)**. Тогда последовательность процессов

$$\left\{\tilde{\mathcal{D}}_n(s)\,,\ |s| \leq 1/2,\ n \geq 1\right\}$$

слабо сходится в $\mathbb{C}\,[-1/2; 1/2]$ к комплекснозначному гауссовскому процессу

$$\mathcal{D}_0(s) = [p(1-p)]^{-1/2} \cdot \{\gamma_1(s) - p\gamma(s) - c(s)\,a_1(+\infty)\}\,,\ \ |s| \leq 1/2$$

с нулевым средним, где гауссовские процессы $\gamma_1(s)$ и $\gamma(s)$ определяются формулами

$$\gamma_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, dB(H_1(t))\,,\ \ \gamma(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, dB(H(t))$$

и $a(+\infty) \stackrel{D}{=} N(0,\, p(1-p))$. При справедливости гипотезы $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}_0(s) \stackrel{D}{=} \gamma(s)$.

Для процесса $\tilde{\mathcal{D}}_n(s)$ можно доказать и более сильный результат об ее аппроксимации последователь-ностью гауссовских процессов $\mathcal{D}_n^*(s) = [p(1-p)]^{-1/2} \cdot \{\gamma_{1n}^*(s) - p\gamma_n^*(s) - c(s)\,B_{1n}(+\infty)\}\,,$ где при каждом $n \geq 1$: $\gamma_{1n}^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dB_n(H(t)) \stackrel{D}{=} \gamma_1(s)\,,\ \gamma_n^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dB_n(H_1(t)) \stackrel{D}{=} \gamma(s)\,,\ B_{1n}(+\infty) = B_n(H_1(+\infty)) = B_n(p) \stackrel{D}{=} N(0, p(1-p))$ и $B_n(y) \stackrel{D}{=} \mathbb{B}(y)$.

**Теорема 2.** Пусть субраспределения таковы, что при некотором $\alpha > 0$ и $t \to \infty$:

$$t^\alpha H_m(-t) + t^\alpha(p_m - H_m(t)) = \mathbb{O}(1)\,,\ \ m = 0, 1.$$

Тогда существует последовательность гауссовских процессов $\mathcal{D}_n^*(s)$ такая, что для $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{|s| \leq 1/2} \left|\tilde{\mathcal{D}}_n(s) - \mathcal{D}_n^*(s)\right| > \mathbb{C}^* r^*(n)\right) \leq L n^{-(1+\varepsilon)},$$

где $r^*(n) = \max\left\{\frac{\log n}{\sqrt{n}}, r_\alpha(n)\right\}$, $r_\alpha(n) = \frac{(\log n)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}}{n^{\alpha/(2\alpha+4)}}$, $0 < \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^*(\varepsilon, H_0, H_1)$ и $L$ (абсолютная) постоянные.

Заметим, что при каждом $n \geq 1$: $\mathcal{D}_n^*(s) \overset{D}{=} \mathcal{D}_0(s)$. Следовательно, процесс $\widetilde{\mathcal{D}}_n(s)$ может быть использован для построения статистик для проверки гипотезы $\mathcal{H}$. Следует отметить, что при достаточно большом $\alpha$, $r_\alpha(n) \sim \frac{\log n}{\sqrt{n}}$. В этом случае $r^*(n) = \mathbb{O}\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$.

### Литература


1. *Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R.* A class of special empirical process of independence, J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., 8(2), 2015, pp.125-133.

2. *Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R.* Sequential empirical process of independence, J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., 5(11), 2018, pp.634-643.

3. *Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R.* The uniform variants of the Glivenko-Cantelli and Donsker type theorems for a sequential integral processes of independence, American J. Theor. & Appl. Stat., 9(4), 2020, pp.121-126.

4. *Какаджанова Л.Р.* Равномерные теоремы типа Гливенко-Кантелли и Донскера для последовательного интеграл процесса независимости, Бюллетень Инст. Матем., 2, 2020, с.83-91.

5. *Kakadjanova L.R.* Test statistics based on independence process, Bulletin of National Univer. Uzbekistan: Math & Natural Sci., 3(2), 2020, pp.178-187.

6. *Csörgő S.* Limit behaviour of the empirical characteristic function, Ann. Probab., 9(1), 1981, pp.130-144.

7. *Ushakov N.G.* Selected topics in characteristic functions, Utrecht, The Netherlands, 1999.

8. *Yukich J.E.* Weak convergence of the empirical characteristic function, Proc. American Math. Soc., 95(3), 1985, pp.470-473.


# Об оценке неизвестного параметра некоторого класса распределений


**Адиров Т.Х.**

ТУИТ

e-mail t.adirov@mail.ru


Пусть $X_1, X_2, ...., X_n$, - независимые одинаково распределенные случайные величины (с.в) с общей функцией распределения (ф.р) $F(+0) = 0, X_n^{(i)}(i = \overline{1,n})-$ соответствующие порядковые статистики, расположенные в порядке убывания, т.е. $X_n^{(1)} \geq X_n^{(2)} \geq ...X_n^{(n)}$.

В работе введено семейство ф.р., которое назовем классом обобщенных распределений Вейбулла

$$R_\alpha = \left\{F(x) : 1 - F(x) = \exp\{-x^{\frac{1}{\alpha}} L(x)\right\} \quad x \geq x_0 > 0$$

(где $\alpha \in (0, \infty) L(x)-$ медленно меняющаяся функция(м.м.ф) на бесконечности), а также для неизвестного параметра $\alpha$ предложена статистика

$$\alpha_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i \log \frac{n}{i} \left(\log X_n^{(i)} - \log X_n^{(i+1)}\right) \quad (1)$$

где $k = k(n) \longrightarrow \infty, k = o(n)$ при $n \longrightarrow \infty$ , и исследованы ее некоторые асимптотические свойства.

В настоящей работе, которая в идейном отношении близка к [2] , в качестве оценки $\alpha$ вводится новая статистика

$$\alpha_n = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n\lambda} k\left(\frac{i}{n\lambda}\right) \log\frac{n}{i} \log\frac{X_n^{(i)}+1}{X_n^{(i+1)}+1}\right] \Bigg/ \left(\int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\log\frac{1}{v\lambda}}{1+\log\frac{1}{v\lambda}} k(v)dv\right)^{-1} \tag{2}$$

где положено $X_n^{(n+1)} = 0$ а определенная на $(0, \infty)$ неотрицательная функция k(u) удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} k(u)du = 1$$

Отметим, что статистика [1] является частным случаем статистики [2].

Обозначим

$$\gamma_n = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\log\frac{1}{v\lambda}}{1+\log\frac{1}{v\lambda}} b\left(1+\log\frac{1}{v\lambda}\right) k(v)dv \Bigg/ \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\log\frac{1}{v\lambda}}{1+\log\frac{1}{v\lambda}} k(v)dv$$

$b(x)-$ где некоторая функция, зависящая от $L(x)$ и такая, что $b(x) \to 0$ при $x \to \infty$

Пусть выполнены следующие условия:

$(Y1)$ Функция $k(x)$ не возрастает и справа непрерывна на $(0, \infty)$.

$(Y2)$ $$\int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} k(u)du < \infty$$

$(Y3)$ $$\int_0^{\infty} k^2(u)du < \infty$$

$(Y4)$ Последовательность чисел $\lambda = \lambda_n$ такова, что $\lambda \to 0$ и $n\lambda \to \infty$ при $n \to \infty$ .

Основные результаты работы сводятся к следующим предложениям.

**Теорема 1.** Пусть условия $(Y1) - (Y4)$ выполнены. Тогда

$$\frac{\sqrt{n\lambda}}{2} \left\{\int_0^{\infty} k^2(u)du\right\}^{-\frac{1}{2}} (\alpha_n - (\alpha + \gamma_n)) \stackrel{d}{\Longrightarrow} N(0,1)$$

где $\stackrel{d}{\Longrightarrow}$ означает сходимость по распределению, $N(0,1)$ – стандартна нормальна распределенная с.в.

**Теорема 2.** Пусть условия $(Y1) - (Y4)$ выполнены. Тогда для существования неслучайной последовательности чисел $\{c_n\}$ такой, что $c_n(\alpha_n \to \alpha)$ сходится по распределению к $N(0,1)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n\lambda}\gamma_n = 0 \tag{3}$$

## Литература


1. *Адиров Т.Х.,Хамдамов И.М.* Асимптотические задачи теории вероятностей и математической статистики, название журнала, Сб. ст. Ташкент: Фан.1990.с.12-18.

2. *Csorgo S., Deheuvels P., Mason D.* Ann.Stat. 1985. V.13. N3. P.1050-1077.

# Предельные теоремы для ветвящихся процессов с неоднородной иммиграцией

**Ж.Б.Азимов, М.Тошматов**

*Ташкентский государственный транспортный университет,*
*Национальный университет Узбекистана*
azimovjb@mail.ru, munisibjon.toshmatov@mail.ru

Рассматривается популяция частиц, формирующих процесс Гальтона-Ватсона, модифицированный таким образом, что если в некотором поколении число частиц равняется нулю, то в следующем поколении иммигрируют случайное число частиц того же типа, с которыми процесс снова начинается. Вместе с тем, предполагается, что интенсивность иммиграции убывает, стремясь к нулю, когда номер поколения неограниченно возрастает.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$ заданы:

а) множество $X = \{X_{in};\ i = 1, 2, ...,\ \ n = 0, 1, ...\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) с вероятностной производящей функцией (в.п.ф.)

$$F(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j, \quad |s| \le 1, \ \ p_j \ge 0, \ \ \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1;$$

б) независимое от $X$ множество $Y = \{Y_n;\ n = 0, 1, ...\}$ независимых с.в. с в.п.ф.

$$G_n(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(n) s^j, \quad |s| \le 1, \quad q_j(n) \ge 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} q_j(n) = 1, \quad n = 0, 1, 2, ... \, .$$

Определим процесс $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$Z_0 = 0, \qquad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{in} + Y_n I_{\{Z_n = 0\}}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{0} \cdot = 0$, а $I_{\{Z_n=0\}}$, как обычно индикатор события $\{Z_n = 0\}$.

Предположим, что п.ф. $F(s)$ допускает следующее представление

$$F(s) = s + (1-s)^{1+\nu} L(1-s), \tag{1}$$

где $0 < \nu \le 1$ и $L(s)$- медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) при $s \to 0$.

В представлении (1) учтено то, что данный процесс является критическим ($F'(1) = 1$) и, кроме того, из (1) следует, что $F''(1-) = +\infty$, т.е. число частиц, порождаемых одной частицы, имеет бесконечную дисперсию.

Известно [1], что если $0 < F(0) < 1$, то для процесса Гальтона-Ватсона существует стационарная мера, п.ф. $U(s)$ которой аналитична в круге $|s| < q$ ($q$-вероятность вырождения) и при $U(F(0)) = 1$ удовлетворяет функциональному уравнению Абеля:

$$U(F(s)) = 1 + U(s), \qquad |s| < q, \quad U(1) = \infty.$$

Как показал Slack [2], когда имеет место представление (1), тогда

$$U(s) = \frac{1 + o(1)}{\nu(1-s)^{\nu} L(1-s)}, \quad s \to 1- . \tag{2}$$

Из асимптотического представления (2) следует, что обратная к $U(1-s)$ функция $g(x), \ \ x > 0$ имеет вид

$$g(x) = \frac{N(x)}{x^{1/\nu}},$$

где $N(x)-$ м.м.ф. на бесконечности и при $x \to \infty$ удовлетворяет условию

$$\nu N^{\nu}(x) L(x^{-1/\nu} N(x)) \to 1.$$

Обозначим

$$\alpha_n = EY_n = G_n'(1), \qquad \beta_n = DY_n + \alpha_n^2 - \alpha_n,$$

$$Q_1(n) = \alpha_n \sum_{k=0}^{n} (1 - F_k(0)), \qquad Q_2(n) = (1 - F_n(0)) \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.$$

где $F_0(s) = s, \quad F_{n+1}(s) = F\left(F_n(s)\right).$

В дальнейшем предположим, что выполнены условия

$$\underset{n}{Sup}\, \alpha_n < \infty\,, \qquad \underset{n}{Sup}\, \beta_n < \infty, \qquad 0 < \alpha_n \to 0\,, \qquad \beta_n \to 0\,, \qquad n \to \infty.$$

Введем функцию

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{N(k)}{k^{1/\nu}}$$

Рассмотрим случай, когда $M(n) \to M < \infty, \quad n \to \infty$. Отметим, что $M < \infty$ может быть как в случае $0 < \nu < 1$, так в случае $\nu = 1$.

**Теорема 1.** Пусть $\alpha_n \sim \frac{l(n)}{n^r}, \ \beta_n = o\left(Q_1(n)\right), \ \ n \to \infty$, где $r \geq 0$ и $l(n)-$ м.м.ф. на бесконечности, причем $l(n) = o(1), \ n \to \infty$, когда $r = 0$. Кроме того $\theta_n = \frac{Q_1(n)}{Q_2(n)} \to \infty \ \ n \to \infty$. Тогда существует пределы

$$\lim_{n\to\infty} P\{Z_n = k |\ Z_n > 0\} = P_k^*, \quad \sum_{k=1}^{\infty} P_k^* = 1,$$

причем п.ф. $\varphi(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k^* s^k$ равна $\varphi(s) = 1 - \frac{1}{M} \sum\limits_{k=1}^{\infty} g(k + U(s))$.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\theta_n \to \theta, \quad 0 < \theta < \infty$ при $n \to \infty$. Тогда существует пределы

$$\lim_{n\to\infty} P\{Z_n = k |\ Z_n > 0\} = \hat{P}_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \hat{P}_k = \frac{\theta}{1+\theta} < 1.$$

## Литература


1. *Харрис Т.Е.* Теория ветвящихся процессов. М.: Мир, 1966, 355 с.

2. *Slack R.S.* A branching process with mean one and possibly infinite variance. Z.Wahrsch.Geb. 1968, Vol. 9, N2, p.139-145.

3. *Бадалбаев И.С., Рахимов И.У.* Неоднородные потоки ветвящихся процессов. Ташкент: ФАН, 1993, 156 с.

# Об осреднении уравнения температурного поля в дельта - коррелированном по времени случайном течении

**Аканбай Н., Сулейменова З.И., Тапеева С.К.**

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби,*
*г. Алматы, Республика Казахстан*

e-mail noureke1953@gmail.com, e-mail suleymenova2474@gmail.com, e-mail tapeevasamal77@gmail.com

Хорошо известно, что уравнения с частными производными со случайными коэффициентами наиболее адекватно и точнее описывают природу физических явлений и присущие им неопределенности. При этом одной из основных проблем является вопросы существования, единственности и измеримости решений полученных уравнений. Эти проблемы являются существенными прежде всего с теоретической точки зрения. Для прикладных же вопросов на первый план выдвигаются проблемы нахождения вероятностно-статистических характеристик решений рассматриваемых уравнений (например, вопросы нахождения математического ожидания решений или, по другому говоря, вопросы осреднения уравнений). Вместе с тем известно также, что только в редких случаях удается найти эти характеристики [1] - [4].

Предлагаемая работа посвящена выводу уравнения для среднего температурного поля в так называемом дельта - коррелированном по времени случайном течении.

Далее нам понадобится следующий, известный из курса теории случайных процессов результат [5] - [6]:

**Теорема.** Пусть, $\xi_t$ - заданный на метрическом фазовом пространстве $X$ равномерно стохастически непрерывный марковский процесс, $A$- его инфинитезимальный оператор, $c$ -ограниченная непрерывная функция. Пусть знак $M_x$ означает взятие условного математического ожидания по всем, выходящим в начальный момент из точки $x$ траекториям процесса $\xi_t$.

Тогда определенная формулой

$$u(t,x) = M_x\left[exp\left\{\int_0^t c(\xi_s)ds\right\} f(\xi_t) + \int_0^t exp\left\{\int_0^s c(\xi_u)du\right\} g(\xi_s)ds\right] \tag{1}$$

функции $u(t,x)$ является единственным, растущим не быстрее чем экспонента, решением задачи

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) + c(x)u(t,x) + g(x), \qquad u(0,x) = g(x). \tag{2}$$

Далее, рассмотрим известное из гидродинамики уравнение температурного поля [7] - [8]:

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = \chi\Delta T(t,x) - \left(\overrightarrow{V}(t,x), \nabla\right) T(t,x), \qquad T(0,x) = T_0(x), \tag{3}$$

где $t \geq 0$, $x \in R^n$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i{}^2}$ - оператор Лапласа, $\chi$ - постоянный коэффициент молекулярной температуропроводности, $\overrightarrow{V}(t,x) = (V_1(t,x), V_2(t,x), ..., V_n(t,x))$- заданное несжимаемое ($div_x\overrightarrow{V}(t,x) = 0$) случайное поле скоростей с нулевым средним,

$T(t,x)$- температурное поле, $T_0(x)$- начальное (вообще говоря, случайное и независящее от поля скоростей $\overrightarrow{V}(t,x)$) температурное поле,

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},...\frac{\partial}{\partial x_n}\right),\quad \left(\overrightarrow{V},\nabla\right)=V_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}V_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

(выше и в последующем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Так как $V(t,x)$ - случайное поле скоростей, дополнительно будем считать, что он зависит от элементарных событий ($\overrightarrow{V}(t,x)=\overrightarrow{V}(t,x,\omega)$), $\omega\in\Omega$, $(\Omega,F,P)$ - какое-то вероятностное пространство), и в свою очередь эти элементарные события индексируют реализации поля скоростей. Под предложением "$\overrightarrow{V}$- заданное поле скоростей" будем подразумевать, что нам известны все вероятностно-статистические характеристики поля $\overrightarrow{V}$. Дополнительно будем считать также, что поле скоростей $\overrightarrow{V}$ обладает всеми нужными нам свойствами гладкостей по пространственной координате, а также является дельта-коррелированной по времени [7]. Такое течение удобно представить как предел полей скоростей $\overrightarrow{V}^{\Delta}(t,x)$ принимающих постоянные значения по $t$ на интервалах длины $\Delta t:(0,\Delta t),(\Delta t,2\Delta t),....$ Поэтому для таких $\Delta t$ порядок $\overrightarrow{V}^{\Delta}(t,x)$ порядка $\sqrt{\tau/\Delta t}:\overrightarrow{V}^{\Delta}(t,x)\approx\sqrt{\tau/\Delta t}$ , $\Delta t\to 0$ , где $\tau=l/v$, $l$ - характерный масштаб длины, $v$- характерный масштаб скорости.

В силу сделанных предположений, при $\Delta t=t_1-t_2\to 0$ корреляционный тензор

$$cov\left(V_i(t_1,x),V_j(t_2,y)\right)=2\tau\delta(t_1-t_2)b_{ij}(x,y),\tag{4}$$

где $\delta$- дельта-функция. Для простоты в дальнейшем не будем писать множителя $2\tau$.

Нетрудно показать, что стоящий в правой части уравнения (3) оператор

$$A=\chi\Delta-(\overrightarrow{V},\Delta),\tag{5}$$

связан со стохастическим (по многомерному винеровскому процессу $\overrightarrow{W}(s)$) дифференциальным уравнением

$$d\overrightarrow{\xi}_{t,x}(s)=\sqrt{2\chi}d\overrightarrow{W}(s)-\overrightarrow{V}(t-s,\overrightarrow{\xi}_{t,x}(s))ds,\quad \overrightarrow{\xi}_{t,x}(0)=x,\tag{6}$$

в том смысле, что этот оператор является инфинитезимальным оператором марковского процесса $\overrightarrow{\xi}_{t,x}(s)$ являющегося при $0\le s\le t$ решением уравнения (6).

Заметим, что существование и единственность решения уравнения (6) вытекают из известных результатов теории стохастических дифференциальных уравнений и наложенных на поле скоростей $\overrightarrow{V}(t,x)$ условий.

**Вывод уравнения среднего температурного поля.** Согласно формуле (1), решение уравнения (3) можем записывать в виде

$$T(t,x)=M_xT_0\left(\overrightarrow{\xi}_{t,x}(t)\right),\tag{7}$$

где знак $M_x$ относится к процессу $\overrightarrow{\xi}_{t,x}(s)$.

Обозначим взятое по полю скоростей математическое ожидание через угловые скобки $<...>$. Пусть, $\overline{T}(t,x)=<T(t,x)>$. Для нахождения, уравнения осредненного температурного поля запишем температурное поле $\overline{T}(t,x)$ в момент времени $t+\Delta t$ :

$$\overline{T}(t+\Delta t,x)=\langle M_xT_0(\overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(s))\rangle.$$

Обозначим через $F_{\leq \Delta t}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную событиями $\left\{ \overrightarrow{\xi}_{t,x}(s) \in B, s \leq \Delta t \right\}$, где $B \in \beta(R^n)$- борелевская сигма-алгебра на $R^n$. Учитывая марковость процесса $\overrightarrow{\xi}_{t,x}(s)$ и используя свойства условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр, можем написать

$$T(t+\Delta t, x) = M_x T_0 \left( \overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(t+\Delta t) \right) = M_x \left( M_x T_0 \left( \overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(t+\Delta t)/F_{\leq \Delta t} \right) \right) =$$

$$= M_x T \left( t, \overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(\Delta t) \right). \tag{8}$$

В выражении (9) функцию $T \left( t, \overrightarrow{\xi}_{t,s}(\Delta t) \right)$ разложим по пространственной координате в окрестности точки $\overrightarrow{\xi}_{t,x}(0) = x$. После учитывая наложенные на поле скоростей условия (условие (4), отсутствие среднего и т.д.), получим

$$\langle T(t+\Delta t, x) \rangle = \langle T(t,x) \rangle + \left\langle \frac{\partial T(t,x)}{\partial x_i} M_x \left( \overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(\Delta t) - x \right)_i \right\rangle +$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} M_x \left( \overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(\Delta t) - x \right)_i \left( \overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(\Delta t) - x \right)_j \right\rangle + o(\Delta t). \tag{9}$$

В (9) осреднение $< \ldots >$ будем проводить в два этапа: сначала от 0 до $t$ (при этом осредняются только величины, связанные с температурным полем), после от $\Delta t$ до $t+\Delta t$ (при этом осредняются только связанные с процессом величины). После, используя свойства винеровского процесса, независимости $\overrightarrow{W}(t)$, $\overrightarrow{V}(t,x)$ и переходя надлежащим образом к пределу при $\Delta t \to 0$, для осредненного температурного поля $\overline{T}(t,x)$ получим следующее уравнение

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \left( \chi \delta_{ij} + \frac{1}{2} b_{ij}(x,x) \right) \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_i x_j} - \alpha_i(x,x) \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}, \quad \overline{T}(0,x) = \langle T_0(x) \rangle, \tag{10}$$

где $\delta_{ij}$ -символ Кронекера. В уравнении (10) коэффициенты $b_{ij}(x,x)$ определяются соотношением (4), а в свою очередь

$$\alpha_i(x,x) = \frac{\partial b_{ij}(x,x)}{\partial x_j}.$$

Для некоторых частных случаев уравнение (10) можно решить в явной форме. Например, если поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ является однородным по пространственной координате, то уравнение (10) превращается в уравнение с постоянными коэффициентами и решается известными методами.

### Литература


1. *L. V. Bogachev, S. A. Molchanov* Mean-field models in the theory of random media.I, Theoret. and Math. Phys., 81:2 (1989), 1207-1214.

2. *L. V. Bogachev, S. A. Molchanov* Mean-field models in the theory of random media. II, Theoret. and Math. Phys., 82:1 (1990), 99-107.

3. *L. V. Bogachev, S. A. Molchanov* Mean-field models in the theory of random media. III, Theoret. and Math. Phys., 87:2 (1991), 512-526.

4. *A. D. Venttsel', S. A. Molchanov, V. N. Tutubalin,* Asymptotic problems in probability theory and the theory of random media, Theory Probab. Appl., 35:1 (1990), 87-93.

5. *А.Д. Вентцель* Курс теории случайных процессов, М.: Наука, 1975, 320 с.

6. *И.И.Гихман., А.В.Скороход.* Введение в теорию случайных процессов, М.: Наука, 1985, 568 с.

7. *С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов,* Короткокоррелированный случайный поток как быстрое динамо, Докл. АН СССР, 295:3 (1987), 576-579.

8. *А.С.Монин., А.М.Яглом.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 1, М.: Наука, 1965, 640 с.

9. *А.С.Монин., А.М. Яглом.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 2, М.: Наука, 1967, 720 с.

# О контрольных картах проверяющие однородности двух выборок

**Ахмедов С.А., Юлдашев Х.Д.**

*Андижанский государственный университет им. З.М. Бобура.*

akhmedov.sohibjon@gmail.com, yuldashevx266@gmail.com

Пусть из генеральных совокупностей $X$ и $Y$ с функциями распределениями $F(x)$ и $G(x)$ взяты выборки с объемами $m$ и $n$ и упорядочены, соответственно, по возрастанию:$x_1 < x_2 < ... < x_m$, $y_1 < y_2 < ... < y_n$. Обозначим эмпирические распределения $X$ и $Y$ соответственно через $F_m(x)$ и $G_n(x)$.

Положим $d = \max\limits_x |F_m(x) - G_n(x)|$.

Статистика критерия Смирнова $\lambda = d \cdot \sqrt{\frac{m \cdot n}{m = n}}$ измеряет различие между эмпирическими функциями распределения построенными по выборкам и в пределе подчиняется распределению Колмогорова (см. [1]; [2])

При ограниченном $m$ и $n$ случайная величина $d$ является дискретной, при этом при помощи $\lambda$ можно проверить следующие гипотезы относящиеся к педагогико-психологическим процессам:

$H_0$: Различия между двумя распределениями недостоверны;

$H_1$: Различия между двумя распределениями достоверны.

В частности, критерий $\lambda$ Смирнова при $n; m \geq 50$ позволяет найти точку, в которой сумма накопленных расхождений между двумя распределениями является наибольшей и оценить достоверность этого расхождения.

Здесь рассмотрим следующую типичную задачу в педагогических исследованиях.

Пусть сравнивается распределение объектов двух совокупностей (экспериментальные и контрольные классы) по состоянию некоторого свойства (например, выполнение определенного задания). При этом учащихся разделяют на четыре категории в соответствии отметками (в баллах 2; 3; 4; 5), полученными за выполнение некоторой контрольной работы, Требуется проверить гипотезы $H_0$ и $H_1$.

Для решения этой задачи можно использовать критерии: $\lambda$ - Смирнова; хи квадрат - Пирсона; Сравнения двух средних и т.п. При этом статистические выводы делаются в конце эксперимента (Of line - контроль).

Мы здесь предлагаем решения этой задачи при помощи статистического инструмента - КК (контрольные карты) [3].

Этот метод хорошо тем, что ход эксперимента можно показать на диаграммах, например, за год (On line контроль).

По смыслу задачи нам нужно строить КК с нижней контрольной границей ($LCL_\lambda$). За контрольную величину связанной с качеством эксперимента берем следующую величину:

$$d_t = \max_x |F_{mt}(x) - G_{nt}(x)|,$$

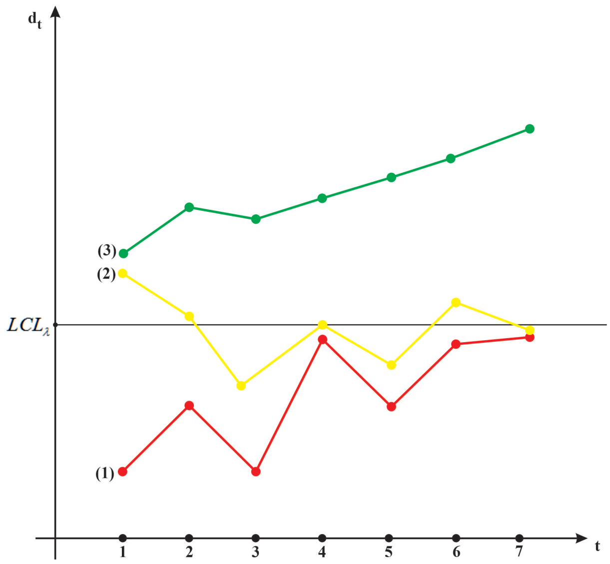
$t = 1, 2, 3..., k$ - время проведения эксперимента.

Относительно $LCL_\lambda$ имеет место следующее

**Утверждение.** При фиксированных $n; m \geq 50$, при заданном уровне значимости $\alpha$ имеет место следующее соотношение: $LCL_\lambda = k_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{m+n}{m \cdot n}}$, где $k_{1-\alpha}$ - квантиль распределения Колмогорова.

Для реализации КК (мы назовем ее $\lambda$ - карта Смирнова) нужно проводить эксперимент. Здесь мы покажем результаты трех экспериментов для объяснения смысла решения задачи.

На горизонтальной оси отметим время проведанного эксперимента, на вертикальной оси отложим значения $d_t$, точки $(t; d_t)$ находим на плоскости и присоединяем отрезками. Проведем прямую параллельную к горизонтальной оси через точку $LCL_\lambda$. Итого мы получаем диаграмму $\lambda$ - карты.




(1) - ход 1 ого эксперимента (красная линия).

(2) - ход 2 ого эксперимента (желтая линия).

(3) - ход 3 ого эксперимента (зеленная линия).

Из рисунка видно, что в (1) и (2) случаях эксперимент показал неудовлетворительный результат. А в случае (3) различия между двумя распределениями достоверны.

## Литература

1. *Смирнов Н.В.* Оценка расхождения между эмпирическими крывыми распределения в двух независимых выборках. - Бюлл. Московского ун-та, серия А, 1939, 2, с. 3-14.

2. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука. 1983. - 416 с.

3. *Х.-Й.Миттаг, Х.Ринне.* Статистические методы обеспечения качества. М.: Машиностроение, 1995. - 616 с.

# Статистическое моделирование решения задачи Коши для ультрапараболических уравнений

**Бакоев М.Т.**

*Университет мировой экономики и дипломатии, Ташкент, Узбекистан*

mbakoev@uwed.uz

Данная статья посвяшена построению диффузионного процесса, конструированию системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), численному моделированию решений СДУ, согласованному с процессом, вероятностному представлению решений, построению несмещенных оценок для решения задачи Коши, связанных с ультрапараболическими уравнениями. Основная трудность при численном моделировании решений задач методом Монте-Карло состоит в получении вероятностного представления и конструировании СДУ, эквивалентного данной задаче, и численное моделирование диффузионных процессов, на траекториях которых строятся несмещенные оценки решения поставленных задач.

Как известно, уравнения Колмогорова для диффузионных процессов устанавливают связь между Марковскими процессами и дифференциальными операторами второго порядка с соответствующими диффузионными коэффициентами процесса ([1],[2],[3]).

Рассмотрим дифференциальный оператор типа

$$L := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{p_0} \bar{a}_i(t,x)\partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i\partial_{x_j}, \qquad (1)$$

где $(t,x) \in R \times R^n$,$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$,$1 \le p_0 \le n$.

Предположим, выполняются следующие условия:

1. Матрица $A_0(x,t) = (a_{ij}(t,x))_{i,j=1,...,p_0}$ симметрично и равномерно положительно определённая в $R^{p_0}$, коэффициенты $a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x)$ непрерывные ограниченные функции , а также существует положительная константа $\mu$ такая, что

$$\frac{|\eta|^2}{\mu} \le \sum_{i,j}^{p_0} a_{ij}(t,x)\eta_i\eta_j \le \mu|\eta|^2, \eta \in R^{p_0}.$$

2. Матрица $B = (b_{ij})$ с постоянными константами имеет следующий блочный вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

где $B_j$ матрица размера $(p_{j-1} \times p_j)$ с рангом $p_j$ , здесь $p_0 \geq p_1 \geq \ldots \geq p_r \geq 1, p_0 + p_1 + \ldots + p_r = n$.

Если нам удастся построить диффузионный процесс, т. е. семейство мер $P_{s,x}$ с диффузионными коэффициентами, входящими в правую часть(1), то решения многих задач, содержащих дифференциальный оператор $L$, можно записать в виде $E_{(t,x)} G(t, \xi_t(.))$, где $G(t, x(.))$ при фиксированном $t$ - некоторая функция, определенная на пространстве непрерывных функций $x(.)$ и принимающих значения из $R^n$. Это и есть вероятностное представление решения. С помощью такого представления, используя свойства случайного процесса, можно получать результаты о некоторых свойствах решений. Введем матрицу размера $(n \times n)$ в блочном виде

$$A(t,x) = \begin{pmatrix} A_0(t,x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и вектор

$$\bar{B}(t,x) = \begin{pmatrix} \bar{a}_1(t,x) \\ \bar{a}_2(t,x) \\ \vdots \\ \bar{a}_{p_0}(t,x) \\ x_1 \left( \sum\limits_{j=p_0+1}^{p_0+p_1} b_{1j} \right) \\ x_2 \left( \sum\limits_{j=p_0+1}^{p_0+p_1} b_{2j} \right) \\ \vdots \\ x_{p_0} \left( \sum\limits_{j=p_0+1}^{p_0+p_1} b_{p_0 j} \right) \\ x_{p_0+1} \left( \sum\limits_{j=p_0+p_1+1}^{p_0+p_1+p_2} b_{(p_0+1)j} \right) \\ x_{p_0+2} \left( \sum\limits_{j=p_0+p_1+1}^{p_0+p_1+p_2} b_{(p_0+2)j} \right) \\ \vdots \\ x_{p_0+p_1} \left( \sum\limits_{j=p_0+p_1+1}^{p_0+p_1+p_2} b_{(p_0+p_1)j} \right) \\ \vdots \\ x_{n-p_0} \left( \sum\limits_{j=p_0+p_1+\ldots+p_{r-1}1}^{n} b_{(n-p_0)j} \right) \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор $L$ можно переписать

$$L := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i(t,x) \partial_{x_i} \tag{2}$$

где $\bar{b}_i(t,x)$ элементы вектора $\overline{B}(t,x)$

Далее $L$ дифференциальный оператор, определяемый равенством (2). Относительно функций $a_{ik}(t,x)$ , $\bar{b}_i(t,x)$ будем предполагать, что они ограничены и достаточно гладки, так что решение рассматриваемых задач существует и единственно.

Пусть $T>0$. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)+Lu(t,x)=f(t,x),\ t<T,\ ,x\in R^n, u(T,x)=\varphi(x) \tag{3}$$

Краевое условие задается на гиперплоскости $t=T$, функции $f(t,x)$ и $\varphi(x)$ ограниченны и непрерывны. Сущестует теорема для решения задачи с обычним параболическим уравнением (см.[1],[2],[3]). Можно сформулировать аналогичную теорему для решений задачи (3).

**Теорема 1.** Пусть $\xi_t(.)-$ диффузионный Марковский процесс с диффузионными коэффициентами $A(t,x)$ и $\bar{B}(t,x)$, которые в естественном базисе $R^n$ имеют координаты $\bar{b}_k$ и матрицу $a_{ik}$. Если $P_{s,x}$ обозначает соответствующие процессу вероятности, то

$$u(t,x)=E_{t,x}\varphi(\xi_t(T))-E_{t,x}\int_t^T f(s,\xi_t(s))ds \tag{4}$$

**Доказательство** Покажем, что для всех $0\le s<t<T$ и $x\in X$ случайный процесс

$$\zeta(t)=u(t,\xi_s(t))-\int_s^T f(\tau,\xi_s(\tau))d\tau$$

является мартингалом относительно меры $P_{s,x}$, $\mathfrak{F}_t^s$-сигма алгебра порожденый траектории процессом. Имеем при $t+h\le T$

$$E_{s,x}(\zeta(t+h)-\zeta(t)/\mathfrak{F}_t^s)=$$

$$=E_{s,x}(u(t+h,\xi_s(t+h))-u(t,\xi_s(t))/\mathfrak{F}_t^s)-E_{s,x}(\int_t^{t+h} f(\tau,\xi_s(\tau))d\tau/\mathfrak{F}_t^s)=$$

$$=E_{s,x}(u'_t(t,\xi_s(t))h+(u'_x(t,\xi_s(t)),\bar{B}(t,\xi_s(t)))h+$$

$$+\frac{1}{2}Spu''_{xx}(t,\xi_s(t))A(t,\xi_s(t))h-hf(t,\xi_s(t))/\mathfrak{F}_t^s)+o(h)=o(h)$$

Если $0\le s<t<u\le T$ , $h=\frac{u-t}{n}$ , то, суммируя равенства

$$E_{s,x}(\zeta(t+kh)-\zeta(t+(k-1)h)/\mathfrak{F}^s_{t+(k-1)h})=o(h), k=1,...,n,$$

и затем беря условное математическое ожидание относительно $\mathfrak{F}_t^s$ , получим

$$E_{s,x}(\zeta(u)-\zeta(t)/\mathfrak{F}_t^s)=n*o(h)=\frac{u-t}{h}*o(h).$$

После перехода к пределу при $h\to 0$ убеждаемся, что $\zeta(t)$ – мартингал. Так как $\zeta(T)=\varphi(\xi_s(T))$, то

$$E_{s,x}(\varphi(\xi_s(T)))=E_{s,x}\zeta(T)=E_{s,x}\zeta(s)=E_{s,x}u(s,\xi_s(s))-E_{s,x}\int_s^T f(\tau,\xi_s(\tau))d\tau$$

Из этой формулы получаем при $s=t$ (4), так как $E_{s,x}u(s,\xi_s(s))=u(s,x)$.

Решение задачи (3) может быть представлено в виде

$$u(t,x)=E_{t,x}\{\varphi(\xi_t(T))-z_t(T)\},$$

где $\xi_t(s), z_t(s), s \in [t, T]$ – решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{cases} d\xi_i(t) = \bar{a}_i(t,\xi)dt + \sum\limits_{j=1}^{p_0} \sigma_{ij}(t,\xi)dw_i(t), & \xi_i(0) = \xi_{i0}, i = 1,\dots,p_0, \\ d\xi_{(p_0+i)}(t) = \bar{b}_{p_0+i}(t,\xi)dt, & \xi_i(0) = x_{i0}, i = 1,\dots,n-p_0 \\ dz_s = f(s,\xi_s)ds, & z_0 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

здесь $\sigma(t,\xi) = (\sigma_{ij}(t,\xi))_{ij=1,2,\dots p0}$ матрица размера $p_0 \times p_0$, $\bar{a}(t,\xi) = (\bar{a}_i(t,x))_{i=1,2,\dots p0}$ вектор, $\bar{b}(t,\xi) = (\bar{b}_i(t,\xi))_{i=p_0+1,p_0+2,\dots,n-p0}$ -вектор. Решение системы (5) является диффузионный Марковский процесс с коэффициентами

$$A(t,\xi) = \sigma(t,\xi)\sigma^T(t,\xi), \bar{B}(t,\xi).$$

**Численный результат:** Как известно, цена азиатского плавающего опциона купли с арифметическим средним $u(t,x_1,x_2)$ является решением следующего ультрапараболического уравнения [4]:

$$\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial t} + rx_1\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\sigma^2 {x_1}^2 \frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} +$$

$$+x_1\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial x_2} = ru(t,x_1,x_2) \tag{6}$$

удовлетворяюшие граничное условие

$$V(T,x_1,x_2) = max(x_1(T) - \frac{x_2(T)}{T}, 0) = \varphi(T,x_1,x_2) \tag{7}$$

Для рассматриваемого случая соответствующая система стохастических дифференциальных уравнений, которая имеет следующий вид.

$$\begin{cases} d\xi_1(t) = r\xi_1 dt + \sigma\xi_1 dw_1(t), & \xi_1(0) = \xi_{10}, \\ d\xi_2(t) = \xi_1 dt, & \xi_2(0) = \xi_{20}, \\ dz_t = ru(t,\xi_1,\xi_2)dt, & z_0 = 0. \end{cases}$$

Результаты численного эксперимента со следующими параметрами: $\xi_1(0) = 1000, \sigma = 0.1, r = 0.1, \xi_2(0) = 1000, T = 1$ приводятся в таблице 1.5

Таблица 1.5: Численный результат для решения задачи (6)–(7).

| Число траектории | Оценка $u(x_1,x_2,t)$ | Стандартная ошибка |
|---|---|---|
| 10000 | 52.36062451 | 0.4688541398 |
| 70000 | 51.93567003 | 0.1780196841 |
| 80000 | 52.06719722 | 0.1663433298 |
| 90000 | 52.22530660 | 0.1567718761 |
| 94000 | 52.30460908 | 0.1538079204 |
| 96000 | 51.93476265 | 0.1524725040 |
| 98000 | 51.84185444 | 0.1512007131 |
| 100000 | 52.00735506 | 0.1484322390 |

## Литература

1. *Glasserman P.* Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer-verlag. edition, 2003. P. 596.

2. *Bergomi L.* Stochastic Volatility Modeling. Chapman and hall/crc. edition, 2016. P.512.

3. *Bakoev M.* A monte carlo methods for pricing asian options. Proceedings of the Eighth International Conference Computer data analysis and modeling. Complex stochastic data and systems. Minsk, September 11-15, 2007. 2007. T. 2. №7. C.48-51.

4. *Бакоев М.* Численное моделирование решений диффузионных уравнений в финансовых и управленческих задачах. Монография ISBN-978-9943-340-62-6, 324стр. Университет мировой экономики и дипломатии, Ташкент 2020


# Система стохастических дифференциальных уравнений для многомерных моделей ценообразования опционов


**Бакоев М.Т.**

*Университет мировой экономики и дипломатии, Ташкент, Узбекистан*

mbakoev@uwed.uz


Рассматриваются возможности применения дифференциальных уравнений в частных производных, которые описывают модели поведения различных финансовых деривативов, нахождению стоимости активов, а также приложений к решению финансовых задач ([1],[2]).

Рассмотрим многомерный $(B, S)$-рынок, с которым предстоит работать в дальнейшем. B означает безрисковый актив, $S$ является вектором $S = (x_1, x_2, ...., x_n)$, где процесс $x_i = (x_i(t)), t \geq 0, i = 0, 1, 2, ..., n$ описывает поведение цены $i$-ой акции. $\mu_i$ и $\sigma_i$ – это скорость роста акций и волатильность (непостоянство) акции номером $i$ соответственно.

Изменение цен безрискового актива описывается следуюшим дифференциальным уравнением и зависит только от постоянной процентной ставки $r$:

$$dB_t = B_t r dt$$

Цена акций подчиняется следующей системе стохастических дифференциальных уравнений:

$$dx_i = \mu_i x_i dt + \sigma_i x_i dW_i,$$

где $W_i = (W_i(t)), t \geq 0, i = 0, 1, 2, ..., n$ стандартные Винеровские процессы. В общем случае все акции коррелируют друг с другом. Коэффициент корреляции $W_i$ и $W_j$ есть $\rho_{ij}$ .

$$E(dW_i) = 0, \quad E(dW_i^2) = 0, \quad E(dW_i dW_j) = \rho_{ij} dt$$

Корреляционная матрица $D = (\rho_{ij})_{ij=1}^n$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где $\rho_{ii} = 1$ и $\rho_{ij} = \rho_{ji}$. Корреляционная матрица $D = (\rho_{ij})_{ij=1}^{n}$, симметрично и положительно определенная в $R^n$. Пусть $V = V(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ цена опциона с конечной функцией выплаты $V = \Omega(x_1, x_2, ..., x_n, T)$. Тогда цену опциона можно получить как решение следующей задачи ([4]):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}x_ix_j\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} rx_i\frac{\partial V}{\partial x_i} - rV = 0$$

с граничным условием

$$V(x_1, x_2, ..., x_n, T) = \Omega(x_1, x_2, ..., x_n, T)$$

На рынке ценных бумаг интерес к определению стоимости портфеля акций огромен. Пусть $SP(t)$ портфель в момент времени $t$,

$$SP(t) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(t),$$

где $\alpha_i$ весь $i$ - того актива в портфеле. Тогда цену Европейского опциона можно получить путем решения уравнения (**??**) с граничным условием:

$$V(x_1, x_2, ..., x_n, T) = \max\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(T) - K, 0\}$$

Функция выплаты Азиатского опциона для портфеля зависит от средней стоимости портфеля, т.е.

$$\frac{1}{T}\int_0^T SP(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(t)dt$$

Тогда цену опциона можно получить путем решения уравнения (**??**) с граничным условием ([3]):

$$V(x_1, x_2, ..., x_n, T) = \max\{\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(t)dt - K, 0\}$$

Например, рассмотрим случай с двумя акциями:

$$dx_1 = \mu_1 x_1 dt + \sigma_1 x_1 dW_1$$
$$dx_2 = \mu_2 x_2 dt + \sigma_2 x_2 dW_2,$$

где $W_i = (W_i(t)), t \geq 0, i = 1, 2$ стандартные Винеровские процессы. В общем случае все акции коррелируют друг с другом.Коэффициент корреляции $W_1$ и $W_2$ есть $\rho$ .

$$E(dW_i) = 0, \quad E(dW_i^2) = 0, \quad E(dW_1 dW_2) = \rho dt$$

Приведем численное моделирование цены акции $x_1(t), x_2(t)$ со следующими параметрами: $x_1(0) = 1000, \sigma_1 = 0.5, \mu_1 = 0.1, x_2(0) = 950, \sigma_2 = 0.4, \mu_2 = 0.2, T = 1, \alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.6$. (см.Рис (1.1)).

Тогда цену опциона можно получить как решение следующей задачи

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rx_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + rx_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + \sigma_1\sigma_2\rho x_1x_2\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_2} + \sigma_1^2x_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \sigma_2^2x_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - rV = 0$$

с граничным условиям

$$V(x_1, x_2, T) = \Omega(x_1, x_2, T)$$

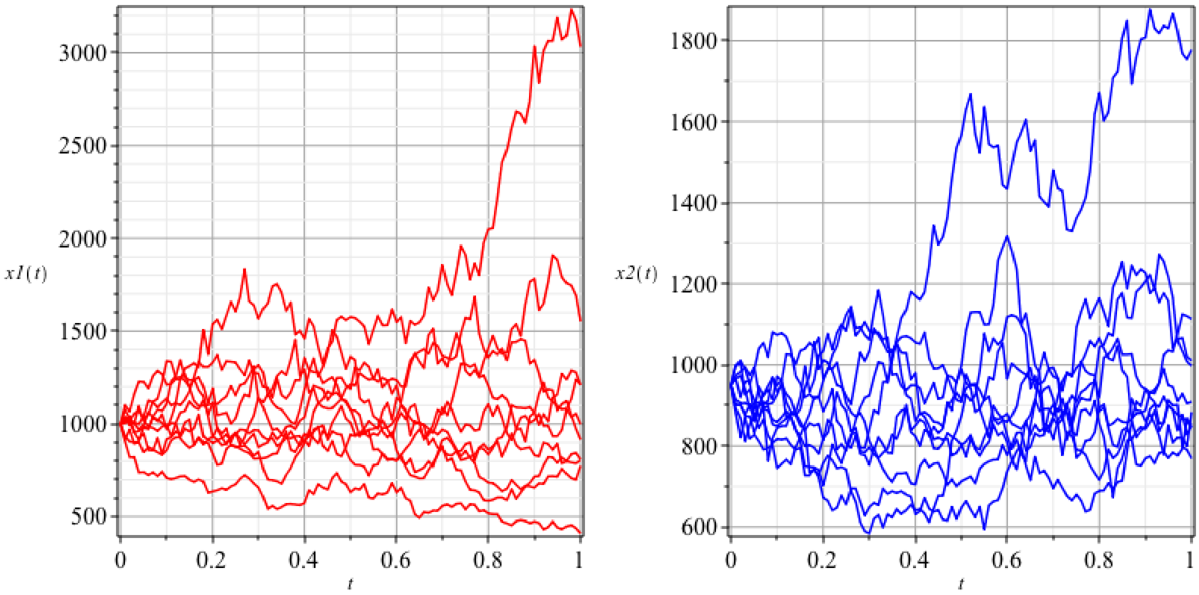



Рис. 1.1: Численное моделирование цены акции в двухмерном случае $x_1(t)$ и $x_2(t)$

Приведем результаты численного эксперимента оценки стоимости портфеля для Европейских и Азиатских опционов (см.Таб.(1.6),Рис.(1.2),Таб.(1.7),Рис.(1.3)).

Полученные результаты можно обобщить для других типов опционов ([4]).

Таблица 1.6: Численный результат оценка стоимости европейских опционов для портфеля

| $NT$ | $EU_c$ | $DU_c$ | $EU_p$ | $DU_p$ |
|---|---|---|---|---|
| 10000 | 205.080433 | 2.832900 | 1191.931457 | 3.546959 |
| 50000 | 204.304546 | 1.273575 | 1192.738763 | 1.574328 |
| 100000 | 205.599594 | 0.909339 | 1194.698014 | 1.113995 |
| 150000 | 204.667775 | 0.739479 | 1192.777391 | 0.907472 |
| 200000 | 204.582216 | 0.637737 | 1194.086191 | 0.786141 |
| 250000 | 204.092552 | 0.567498 | 1193.261029 | 0.705422 |

Где $NT$ – количество траектории,
$EU_c$ – оценка стоимости Европейского опциона купли для портфеля,
$DU_c$ – ошибка оценки стоимости Европейского опциона купли для портфеля,
$EU_p$ – оценка стоимости Европейского опциона продажи для портфеля,
$DU_p$ – ошибка оценки Европейского опциона продажи для портфеля.

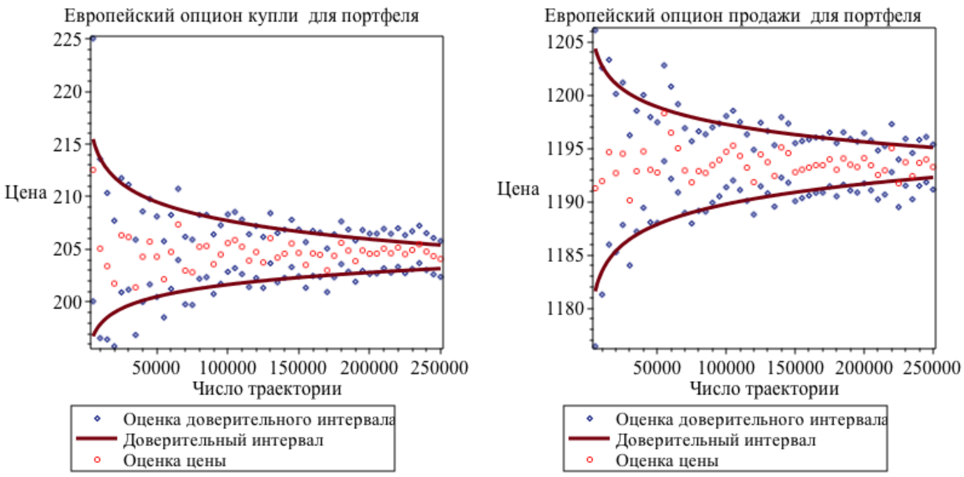



Рис. 1.2: Численное моделирование стоимости Европейских опционов для портфеля.

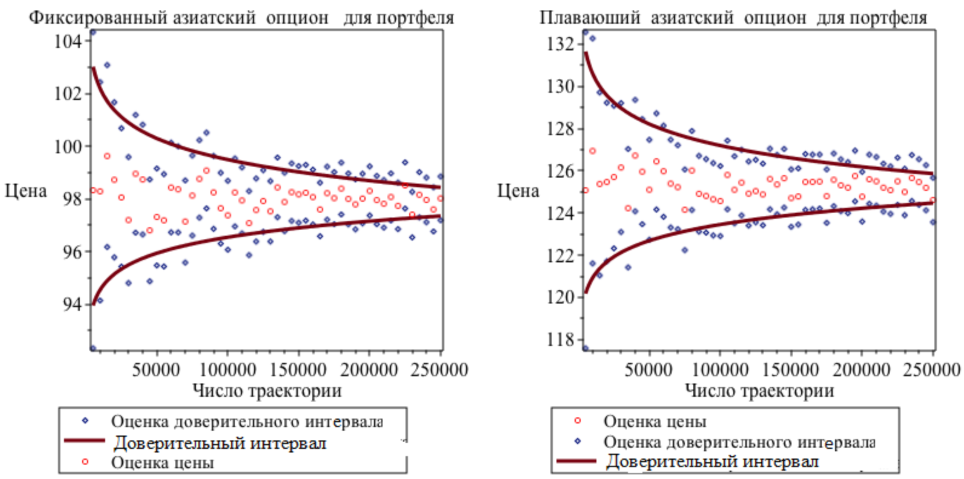



Рис. 1.3: Численное моделирование стоимости Азиатских опционов для портфеля.

Таблица 1.7: Численный результат оценка стоимости Азиатских опционов для портфеля

| $NT$ | $EU_c$ | $DU_c$ | $EU_p$ | $DU_p$ |
|---|---|---|---|---|
| 10000 | 205.080433 | 2.832900 | 1191.931457 | 3.546959 |
| 30000 | 206.168519 | 1.661045 | 1190.132975 | 2.034559 |
| 50000 | 204.304546 | 1.273575 | 1192.738763 | 1.574328 |
| 100000 | 205.599594 | 0.909339 | 1194.698014 | 1.113995 |
| 150000 | 204.667775 | 0.739479 | 1192.777391 | 0.907472 |
| 200000 | 204.582216 | 0.637737 | 1194.086191 | 0.786141 |
| 250000 | 204.092552 | 0.567498 | 1193.261029 | 0.705422 |

Где $NT$ – количество траектории,
$EU_c$ – оценка стоимости фиксированного Азиатского опциона для портфеля,
$DU_c$ – ошибка оценки фиксированного Азиатского опциона для портфеля,
$EU_p$ – оценка стоимости плавающего Азиатского опциона для портфеля,
$DU_p$ – ошибка оценки плавающего Азиатского опциона для портфеля.

**Литература**

1. *Glasserman P.* Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer-verlag. edition, 2003. P. 596.

2. *Bergomi L.* Stochastic Volatility Modeling. Chapman and hall/crc. edition, 2016. P.512.

3. *Bakoev M.* A monte carlo methods for pricing asian options. Proceedings of the Eighth International Conference Computer data analysis and modeling. Complex stochastic data and systems. Minsk, September 11-15, 2007. 2007. T. 2. №7. C.48-51.

4. *Бакоев М.* Численное моделирование решений диффузионных уравнений в финансовых и управленческих задачах. Монография ISBN-978-9943-340-62-6, 324стр, Университет мировой экономики и дипломатии, Ташкент 2020


# Нижние и верхние оценки для максимума плотности взвешенных сумм Хи-квадрат случайных величин


**Бобков С.Г., Наумов А.А., Ульянов В.В.**

*Миннесотский университет, США*
*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», РФ*
*МГУ имени М.В.Ломоносова, РФ.*
vulyanov@cs.msu.ru


Недавно в [1] и [2] были получены достаточно точные верхние оценки для расстояния Колмогорова между вероятностями того, что гауссовские случайные элементы в гильбертовом пространстве попадают в шары произвольного радиуса. Ключевым свойством этих оценок является их независимость от размерности, они даны в терминах ядерной нормы разности ковариационных операторов гауссовских элементов и нормы разности средних. Полученные результаты существенно улучшают оценки, которые строятся с использованием неравенства Пинскера и дивергенции Кульбака–Лейблера. Также было построено анти-концентрационное неравенство для квадрата нормы $||Y||^2$, где $Y$ – нецентрированный гауссовский случайный элемент со средним $a$ в гильбертовом пространстве. Решающую роль при получении всех этих результатов играла верхняя оценка для максимума плотности $p(x,a)$ величины $||Y||^2$, см. теорему 2 в [2]. В [2] также отмечалось, что вопрос о нижних оценках для $\sup_x p(x,a)$ остается открытой проблемой. Частично эта проблема была решена в работе Ю.В. Прохорова, Г. Кристофа и В.В. Ульянова в теореме 1 в [3]. В докладе представлены верхние и нижние оценки для $\sup_x p(x,a)$, при этом при построении верхних оценок использован новый подход. Полученные нижние оценки показывают оптимальность верхних оценок в [2], так как верхние и нижние оценки отличаются только абсолютными постоянными.

Для независимых стандартных нормальных случайных величин $Z_k \sim N(0,1)$ рассмотрим взвешенную сумму

$$W_0 = \lambda_1 Z_1^2 + \cdots + \lambda_n Z_n^2, \qquad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0.$$

Она имеет непрерывную плотность $p(x)$ на положительной полуоси. Определим функционал

$$M(W_0) = \sup_{x>0} p(x).$$

**Теорема 1.** *Для абсолютных постоянных* $c_0$ *и* $c_1$*:*

$$c_0 = \frac{1}{2e^2\sqrt{2\pi}} > 0.026, \qquad c_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} < 1.129,$$

*справедливы неравенства*

$$c_0(A_1A_2)^{-1/4} \leq M(W_0) \leq c_1(A_1A_2)^{-1/4},$$

*где*

$$A_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2, \qquad A_2 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k^2.$$

Теорема 1 допускает обобщение на более общие взвешенные суммы

$$W_a = \lambda_1(Z_1 - a_1)^2 + \cdots + \lambda_n(Z_n - a_n)^2$$

с параметрами $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ и $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$.

Сумма $W_a$ имеет непрерывную плотность $p(x.a)$ на положительной полуоси. Определим функционал

$$M(W_a) = \sup_{x>0} p(x, a).$$

**Замечание 1.** Известно, что для нецентрированного гассувского случайного элемента $Y$ в гильбертовом пространстве случайная величина $||Y||^2$ распределена так же, как $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(Z_i - a_i)^2$ с некоторыми действительными $a_i$ и $\lambda_i$ такими, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$. Следовательно, из верхней оценки для $M(W_a)$ немедленно вытекает оценка сверху для плотности величины $||Y||^2$.

Здесь мы рассмотрим лишь наиболее типичную ситуацию, когда самые большие коэффициенты $\lambda_k$ не являются доминирующими.

**Теорема 2.** *Если* $\lambda_1^2 \leq \frac{1}{3}A_1$*, то справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{A_1 + B_1}} \leq M(W_a) \leq \frac{2}{\sqrt{A_1 + B_1}},$$

*где*

$$A_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2, \qquad B_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 a_k^2.$$

*Более того, оценка снизу справедлива без дополнительных условий на* $\lambda_1^2$.

Доказательства теорем 1 и 2 см. в [4].

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и Московского центра фундаментальной и прикладной математики, МГУ имени М.В.Ломоносова. Теорема 1 получена при поддержке гранта РНФ № 18-11-00132. Исследование С.Г. Бобкова поддержано NSF, грант DMS-1855575.

## Литература

1. *Naumov A.A., Spokoiny V.G., Tavyrikov Yu. E., Ulyanov V.V.* Nonasymptotic Estimates for the Closeness of Gaussian Measures on Balls. Doklady Mathematics, 98 (2018), no. 2, 490–493.

2. *Götze F., Naumov A.A., Spokoiny V.G., Ulyanov V.V.* Large ball probabilities, Gaussian comparison and anti-concentration. Bernoulli, 25 (2019), no. 4A, 2538–2563.

3. *Christoph G., Prokhorov Y.V., Ulyanov V.V.* On distribution of quadratic forms in Gaussian random variables. Theory Probab. Appl. 40 (1996), no. 2, 250–260.

4. *Bobkov S.G., Naumov A.A., Ulyanov V.V.* Two-sided inequalities for the density function's maximum of weighted sum of chi-square variables. arXiv:2012.10747v1.

# Фронт распространения каталитического ветвящегося блуждания с семи-экспоненциальным распределением скачков

**Екатерина Владимировна Булинская**

*МГУ имени М.В.Ломоносова*

bulinskaya@yandex.ru

В последние годы возрос интерес к описанию пространственной эволюции популяции частиц (или генов, видов, особей и т.п.) с помощью вероятностных моделей, сочетающих перемещение частиц в пространстве, их деление на дочерние частицы и гибель. Если пространство представляет собой $R^d$, где размерность $d$ – натуральное число, то часто предполагается, что перемещение частиц задается броуновским движением. Если же пространство дискретно, то частицы совершают случайное блуждание, например, по целочисленной решетке $Z^d$. Как правило, деление и гибель частиц определяются ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона.

Остается конкретизировать, как совмещаются механизмы перемещения частиц и их ветвления. Классический путь состоит в том, что в каждый момент времени существующая частица заменяется на случайное число потомков (их число может быть нулевым), расположенных в пространстве случайно в соответствии с заданным механизмом перемещения частиц (см., например, [14]). Альтернативный способ совмещения механизмов движения и ветвления частиц будет рассмотрен нами подробнее. Предполагается, что в пространстве существуют выделенные точки, в которых находятся катализаторы. Если частица попадает в такую точку, то она может произвести там случайное число потомков. Вне катализаторов частицы только движутся до очередного попадания в катализатор – центр регенерации частиц. Описывемые процессы называются каталитическими. Стоит отметить ветвящееся броуновское движение с одним катализатором (см., например, [5]), ветвящееся случайное блуждание с одним катализатором (см., например, [3]), ветвящееся случайное блуждание с любым конечным числом катализаторов (см., например, [10]), ветвящееся случайное блуждание с бесконечным числом периодически расположенных катализаторов (см., например, [4]).

В данной работе нас интересует каталитическое ветвящееся случайное блуждание (КВСБ) с произвольным конечным числом катализаторов, в котором частицы перемещаются по целочисленной решетке $Z^d$ любой размерности $d$. В статье [9] при $d = 1$ было установлено, что максимум КВСБ, т.е. положение на целочисленной прямой самой правой частицы в КВСБ, распространяется почти наверное асимптотически линейно по времени, когда время стремится к бесконечности. В постановке задачи предполагалось, что хвост распределения скачка случайного блуждания легкий, т.е. для него выполнено условие Крамера. В [6] аналоги этого результата были установлены уже для фронта распространения популяции КВСБ по целочисленной решетке любой размерности. В [7] при изучении такого рода обобщенной задачи предполагалось, что хвосты распределения скачка тяжелые, а именно, правильно меняются. Теперь мы рассмотрим промежуточную ситуацию, когда скачок блуждания имеет семи-экспоненциальное распределение, и в этом случае изучим распространение фронта в КВСБ по $Z^d$. Аналогичная задача для классического ветвящегося случайного блуждания была решена в [12], отметим также новую работу [11]. Основные результаты, рассматриваемые далее, установлены в нашей недавней статье [8]. При этом в докладе мы обратимся и к совсем новым теоремам.

Напомним, как определяется КВСБ по $Z^d$. В начальный момент времени $t = 0$ имеется одна частица, совершающая случайное блуждание по $Z^d$, описываемое марковской цепью $\{S(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем и генератором $Q = (q(x,y))_{x,y \in Z^d}$. Предполагается, что марковская цепь $\{S(t), t \geq 0\}$ неприводима и пространственно-однородна, а $Q$ – консервативная инфинитезимальная матрица, т.е. матрица $Q$ имеет конечные элементы,

$$q(x,y) = q(x-y,0) \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_{y \in Z^d} q(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $q(x,y) \geq 0$ при $x \neq y$ и $q := -q(x,x) \in (0,\infty)$ для всех $x, y \in Z^d$. В отличие от [4] и [13] мы не ограничиваемся рассмотрением только симметричного генератора $Q$.

Каждый раз, когда родительская частица попадает в конечное множество $W = \{w_1, \ldots, w_N\} \subset Z^d$ катализаторов, скажем, в точку $w_k$, эта частица остается там случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром $\beta_k > 0$. Затем частица либо делится с вероятностью $\alpha_k$, либо покидает точку $w_k$ с вероятностью $1 - \alpha_k$ $(0 \leq \alpha_k < 1)$. Если частица делится, она производит случайное неотрицательное целое число $\xi_k$ потомков, расположенных в той же точке $w_k$, и при этом мгновенно погибает. Когда частица покидает $w_k$, она совершает скачок в точку $y \neq w_k$ с вероятностью $-(1-\alpha_k)q(w_k,y)q(w_k,w_k)^{-1}$ и продолжает движение в соответствии с марковской цепью $\{S(t), t \geq 0\}$, когда $y \notin W$, или, возможно, дает потомков, когда $y \in W$. Все дочерние частицы ведут себя как независимые вероятностные копии родительской частицы.

В статье [2] показано, что асимптотическое поведение численностей частиц в КВСБ различается в зависимости от соотношения между характеристиками блуждания и величинами $\alpha_k$, $\beta_k$, $\mathsf{E}\xi_k$, $k = 1, \ldots, N$. Так, популяция частиц выживает локально и глобально только в так называемом надкритическом КВСБ (см., например, определение 1 в [2]). Поскольку нас интересует распространение популяции частиц в пространстве с течением времени, то далее имеет смысл рассматривать только надкритический случай. Отметим, что определение надкритического, критического и докритического КВСБ дается в [2] в терминах собственного значения некоторой матрицы размера $N \times N$, построенной на основе характеристик блуждания и ветвления. В [2] также установлено, что в надкритическом КВСБ средние численности частиц растут экспоненциально быстро с течением времени. Показатель скорости экспоненциального роста обозначается $\nu > 0$ и традиционно называется мальтусовским параметром.

Пусть $N(t)$ – это случайное облако частиц, существующих в КВСБ в момент времени $t \geq 0$. Для частицы $v \in N(t)$ обозначим $X^v(t) = (X_1^v(t), \ldots, X_d^v(t))$ ее положение в момент $t$. Пусть

$$\mathcal{I} := \left\{\omega : \limsup_{t \to \infty} \{v \in N(t) : X^v(t) \in W\} \neq \emptyset\right\}$$

– событие, означающее бесконечное число посещений катализаторов. Поведение КВСБ на дополнении $\overline{\mathcal{I}}$ почти наверное тривиально: для достаточно больших $t \geq t_0(\omega)$ либо не останется больше частиц на $Z^d$ в КВСБ, либо КВСБ будет представлять собой несколько случайных блужданий (без ветвления), индексированных $v \in N(t_0)$ и стартующих соответственно в точках $X^v(\omega, t_0)$ в момент $t_0$. Надкритический режим КВСБ влечет, что $\mathsf{P}(\mathcal{I}) > 0$.

Условие (1) такого же типа, как в статьях [9] (с дискретным временем и одномерной решеткой), [6] и [7], в которых изучалось распространение популяции в КВСБ. Мы дополнительно предполагаем, что компоненты вектора $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$, задающего распределение скачков случайного блуждания, имеют семи-экспоненциальное распределение (см., например, [1], гл. 1, §2), т.е. для всех $y \in Z_+$

$$\mathsf{P}(Y_i > y) = L_i^{(1,+)}(y) \exp\Big(-y^{\gamma_i^+} L_i^{(2,+)}(y)\Big) =: R_i^+(y),$$

$$\mathsf{P}(Y_i < -y) = x L_i^{(1,-)}(y) \exp\Big(-y^{\gamma_i^-} L_i^{(2,-)}(y)\Big) =: R_i^-(y), \tag{2}$$

где $i = 1, \ldots, d$. В записи функции $R_i$ символ "+" указывает на правый хвост распределения, символ "−" – на левый хвост. Здесь $\mathsf{P}\left(Y_i > y\right) = q^{-1} \sum_{x:\, x_i > y} q(0, x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_d) \in Z^d$. Для каждых $i = 1, \ldots, d$ и $\kappa \in \{+, -\}$ функции $L_i^{(1,\kappa)}(y)$ и $L_i^{(2,\kappa)}(y)$, $y \in Z_+$, медленно меняющиеся, а параметры $\gamma_i^\kappa$ лежат в интервале $(0, 1)$.

В силу соотношения (2), функция $-\ln\left(R_i^\kappa(y)\right)$, $y \in Z_+$, правильно меняющаяся порядка $\gamma_i^\kappa$. Следовательно, существует асимптотически единственная обратная функция $R_i^{-1,\kappa}$ на $R_+$ в том смысле, что $-\ln\left(R_i^\kappa\left(R_i^{-1,\kappa}(y)\right)\right) \sim y$, $R_i^{-1,\kappa}\left(-\ln R_i^\kappa(y)\right) \sim y$ при $y \to \infty$, $y \in Z_+$, и

$$R_i^{-1,\kappa}(s) = s^{\frac{1}{\gamma_i^\kappa}} L_i^{(3,\kappa)}(s), \tag{3}$$

где функция $L_i^{(3,\kappa)}(s)$, $s \geq 0$, медленно меняется на бесконечности. Функции $R_i^{-1,\kappa}(\cdot)$, $i = 1, \ldots, d$, используются нами для нормировки координат частиц из $N(t)$. Индекс $\kappa$ означает, что нормировка зависит от ортанта $\kappa$ (одного из $2^d$) в $R^d$, в котором эта частица расположена в момент $t$.

В отличие от случайных блужданий с легкими или правильно меняющимися хвостами, блуждания с семи-экспоненциальными скачками имеют области, в которых вероятности больших уклонений могут значительно различаться. Эти области есть зона *уклонений Крамера*, *промежуточная* зона и зона *аппроксимации максимальным скачком* (см. [1], гл. 5, §2). Мы имеем дело с двумя последними зонами. Поэтому предположим, что для каждого фиксированного $x = (x_1, \ldots, x_d) \in R^d$, $x \neq 0$,

$$\mathsf{P}_0\Big(\frac{sgn(x)S(u)}{R^{-1,\kappa(x)}(t)} \in [|x|\,, +\infty)\Big) =$$

$$= h(u)\left(1 + \delta(u,t)\right) \prod_{i=1}^d \left(\mathsf{P}\left(sgn(x_i) Y_i \geq |x_i| R_i^{-1,\kappa(x_i)}(t)\right)\right)^{(1-\varepsilon_i(u,t))}, \tag{4}$$

где положительная неубывающая функция $h(u) = h(u, x)$, $u \geq 0$, такова, что $h(u) \sim c(x) u^{d - n_0(x)}$, $u \to \infty$, для постоянной $c(x) > 0$ и функции $n_0(x)$, которая представляет собой общее число координат вектора $x$, равных нулю. Кроме того, для каждого $i = 1, \ldots, d$, неотрицательная функция $\varepsilon_i(u,t) = \varepsilon_i(u,t,x) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $\vartheta = \frac{u}{t} \in [0,1]$, и для всех достаточно больших $t$ справедливо неравенство $\varepsilon_i(u_1,t) \leq \varepsilon_i(u_2,t)$ при $u_1 \leq u_2$, $u_1, u_2 \in [0,t]$. Наконец, функция $\delta(u,t) = \delta(u,t,x) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $\vartheta = \frac{u}{t} \in [0,1]$. Мы пишем $\delta(u,t)$ вместо $\delta(u,t,x)$ для краткости, поскольку переменная $x$ зафиксирована. В соотношении (4) вектор $\frac{sgn(x)S(u)}{R^{-1,\kappa(x)}(t)}$ в $R^d$, имеет компоненты $\frac{sgn(x_i)S_i(u)}{R_i^{-1,\kappa(x_i)}(t)}$, $i = 1, \ldots, d$, и $[|x|, +\infty) := [|x_1|, +\infty) \times \ldots \times [|x_d|, +\infty)$. Здесь $\kappa(x_i) =$"+", если $x_i \geq 0$, и $\kappa(x_i) =$"−", если $x_i < 0$. Полагаем $\frac{sgn(x_i)S_i(u)}{R_i^{-1,\kappa(x_i)}(t)} := 0$, если $R_i^{-1,\kappa(x_i)}(t) = 0$. Напомним, что $sgn(y) = 1$ при $y > 0$, $sgn(y) = -1$ при $y < 0$ и $sgn(0) = 0$.

Если векторные компоненты скачка случайного блуждания независимы, важное условие (4) может вытекать из дальнейших предположений о хвостах скачка. В случае, когда координаты скачка случайного блуждания независимы, в книге [1] (теорема 5.4.1) установлены достаточные условия для справедливости соотношения (4). В этом случае и когда в стандартных разложениях $Y_i = Y_i^+ - Y_i^-$ величины $Y_i^+$ и $Y_i^-$, $i = 1, \ldots, d$, имеют распределения Вейбулла, соотношение (4) справедливо (см. [1], теорема 5.4.1). Поэтому, чтобы избежать перечисления известных достаточных условий справедливости соотношения (4), мы потребуем, чтобы (4) было выполнено.

Определим следующие множества в $R^d$:

$$\mathcal{O}_\varepsilon := \left\{ x \in R^d : \sum_{i=1}^{d} |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} > \nu + \varepsilon \right\}, \mathcal{Q}_\varepsilon := \left\{ x \in R^d : \sum_{i=1}^{d} |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} < \nu - \varepsilon \right\}, \ \varepsilon \in [0, \nu),$$

$$\mathcal{O} := \mathcal{O}_0, \quad \mathcal{Q} := \mathcal{Q}_0, \quad \mathcal{P} := \partial\mathcal{O} = \partial\mathcal{Q} = \left\{ x \in R^d : \sum_{i=1}^{d} |x_i|^{\gamma_i^{\kappa(x_i)}} = \nu \right\}, \tag{5}$$

где $\partial\mathcal{U}$ обозначает границу множества $\mathcal{U}$. Для $u, t \geq 0$ вектор $\frac{X^v(u)}{R^{-1,\kappa}(t)}$ имеет координаты $\frac{X_i^v(u)}{R_i^{-1,\kappa(X_i^v(u))}(t)}$, $i = 1, \ldots, d$.

**Теорема 1.** Пусть условия (1), (2) и (4) удовлетворены для надкритического КВСБ по $Z^d$ с мальтусовским параметром $\nu$. Тогда для каждой стартовой точки $z \in Z^d$ верны соотношения:

$$\mathsf{P}_z\left(\omega : \forall\varepsilon > 0,\ \exists t_1 = t_1(\omega, \varepsilon) \text{ такое, что } \forall t \geq t_1 \text{ и } \forall v \in N(t),\ \frac{X^v(t)}{R^{-1,\kappa}(t)} \notin \mathcal{O}_\varepsilon\right) = 1, \tag{6}$$

$$\mathsf{P}_z\left(\omega : \forall\varepsilon \in (0, \nu),\ \exists t_2 = t_2(\omega, \varepsilon) \text{ такое, что } \forall t \geq t_2,\ \exists v \in N(t),\ \frac{X^v(t)}{R^{-1,\kappa}(t)} \notin \mathcal{Q}_\varepsilon \middle| \mathcal{I}\right) = 1. \tag{7}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ и почти всех $\omega$ при достаточно больших временах не существует частиц с нормированными координатами вне поверхности $\partial\mathcal{O}_\varepsilon$ и для почти всех $\omega \in \mathcal{I}$ всегда найдутся такие частицы вне поверхности $\partial\mathcal{Q}_\varepsilon$. Следовательно, для $\omega \in \mathcal{I}$ наиболее удаленные частицы (образующие “фронт” распространения популяции) после нормировки расположены для всех достаточно больших времен между $\partial\mathcal{O}_\varepsilon$ и $\partial\mathcal{Q}_\varepsilon$. Для почти всех $\omega \notin \mathcal{I}$ предельные нормированные координаты частиц равны нулю. Назовем поверхность $\mathcal{P} = \partial\mathcal{O} = \partial\mathcal{Q}$ в (5) “предельной формой фронта”.

Следующий результат показывает, что каждая точка поверхности $\mathcal{P}$ является предельной точкой для нормированных положений частиц в КВСБ, т.е. $\mathcal{P}$ минимальна в определенном смысле.

**Теорема 2.** При выполнении условий теоремы 1, для каждых $z \in Z^d$ и $y \in \mathcal{P}$ имеем

$$\mathsf{P}_z\left(\omega : \forall t \geq 0,\ \exists v_y = v_y(t, \omega) \in N(t) \text{ такое, что } \lim_{t\to\infty} \frac{X^{v_y}(t)}{R^{-1,\kappa}(t)} = y \middle| \mathcal{I}\right) = 1. \tag{8}$$

Выше мы рассмотрели предельную форму фронта популяции, возникающую почти наверное. Кроме того, нами обнаружен новый эффект (см. [7]) существования *предела* в смысле сходимости *по распределению* соответствующим образом нормированных положений самых удаленных от начала координат частиц. В заключение отметим, что в наших работах [6], [7], [8] построена полная картина распространения фронта популяции в КВСБ, когда распределение скачков блуждания имеет легкие, тяжелые и семи-экспоненциальные (умеренно тяжелые) хвосты.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (грант 17-11-01173-П) в Новосибирском государственном университете.

## Литература

1. *Боровков А.А., Боровков К.А.* Асимптотический анализ случайных блужданий, т. 1: Медленно убывающие распределения скачков, Физматлит, Москва, 2008.

2. *Булинская Е.Вл.* Полная классификация каталитических ветвящихся процессов, Теория вероятн. и ее примен., 59(4), 2014, 639–666.

3. *Ватутин В.А., Топчий В.А.* Каталитические ветвящиеся случайные блуждания на $Z^d$ с ветвлением в нуле, Матем. тр., 14(2), 2011, 28–72.

4. *Платонова М.В., Рядовкин К.С.* Ветвящиеся случайные блуждания на $Z^d$ с периодически расположенными источниками ветвления, Теория вероятн. и ее примен., 64(2), 2019, 283–307.

5. *Bocharov S., Wang L.* Branching Brownian motion with spatially homogeneous and point-catalytic branching, J. Appl. Probab., 56(3), 2019, 891–917.

6. *Bulinskaya E.Vl.* Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice, Stochastic Process. Appl., 128(7), 2018, 2325–2340.

7. *Bulinskaya E.Vl.*. Maximum of catalytic branching random walk with regularly varying tails, J. Theoret. Probab., 1–23, DOI 10.1007/s10959-020-01009-w

8. *Bulinskaya E.Vl.*. Catalytic branching random walk with semi-exponential increments, Math. Popul. Stud., 1–31, DOI 10.1080/08898480.2020.1767424

9. *Carmona Ph., Hu Y.* The spread of a catalytic branching random walk, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat., 50, 2014, 327–351.

10. *Döring L., Roberts M.* Catalytic branching processes via spine techniques and renewal theory, In: Séminaire de Probabilités XLV, Lecture Notes in Math. 2078, Springer, Berlin, 2013, 305–322.

11. *Dyszewski P., Gantert N., Hofelsauer T.* Large deviations for the maximum of a branching random walk with stretched exponential tails, Electron. Commun. Probab., 25(72), 2020, 1–13.

12. *Gantert N.* The maximum of a branching random walk with semiexponential increments, Ann. Probab., 28(3), 2000, 1219–1229.

13. *Rytova A., Yarovaya E.* Heavy-tailed branching random walks on multidimensional lattices. A moment approach, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1–22, DOI: 10.1017/prm.2020.46

14. *Shiozawa Y.* Maximal displacement and population growth for branching Brownian motions, Illinois J. Math., 63(3), 2019, 353–402.

# Об асимптотике оптимальных параметров статистического приемочного контроля

**Вахобов В.**

*ТИИИМСХ*

Оценка качества готовой промышленной или сельскохозяйственной продукции, например, длина или диаметр изготовленной детали, длина волокна хлопка и другие факторы исследования проводятся методами статистического приемочного контроля (СПК). СПК дает возможность, с одной стороны, осуществить текущий контроль производственного процесса, своевременно предотвращая выпуск некачественных изделий, с другой стороны, позволяет с наименьшими затратами проводить приемку выпускаемой готовой продукции. Последнее достигается с помощью выбора планов СПК. В данной работе рассматривается вопрос о выборе параметров контроля минимизирующегося максимальную потерю.

Пусть на контроль представлена совокупность объема N изделий, которые характеризуются качественным или количественным признаком X. Будем считать, что X представляет собой случайную величину с функцией распределения $F(x,\theta)(-\infty < x < \infty)$, зависящей от неизвестного параметра $\theta$, $M(x) = \theta$, $D(x) = \sigma^2(\theta)$.

Положим

$$g(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x,\theta) dF(x,\theta), \tag{1}$$

где $k(x,\theta)-$ функция такая, что интеграл (1) существует.

Если $k(x,\theta) = x$, то $g(\theta)$ представляет собой долю дефектных изделий в контроле по качественному признаку. В случае, когда дефектность определяется некоторым количественным признаком $X$, положив

$$k(x,\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le T, \\ 1 & \text{при} \quad x > T, \end{cases}$$

получим $g(\theta) = \int_T^\infty dF(x,\theta) = 1 - F(x,\theta)$.

Здесь T- заданное число (допустимый предел рассматриваемого признака). В этом случае $g(\theta)$ означал долю дефектных изделий в контроле по количественному признаку. Пусть $(x_1, x_2, ...x_n)-$ оценка максимального правдоподобия параметра $\theta$ (существование этой оценки предполагается).

Выше приведенные расхождения показывают, что процесс проведения статистического приемочного контроля (СПК) может быть основан на изучении статистики $g(\theta_n)$, и в такой постановке эти задачи приобретают наибольшую общность Рассматривается следующее решающее правило: если $g(\theta_n) \le t^0$, то совокупность принимается, а в противном случае - отвергается. Здесь $t^0-$ параметр контроля (приемочное число). Выбор плана контроля, т.е. определение параметров $(n, t^0)$ может быть осуществлен различными способами в зависимости от соответствующих требований В зависимости от наличия или отсутствия априорной информации о неизвестном параметре $\theta$ распределения наблюдаемой совокупности существует два подхода к решению задачи о выборе оптимального плана, а именно минимаксный и байесовский.

В минимаксном подходе параметры $(n, t^0)$ выбираются из условия минимальности максимальной средней потери от принятых или отверженных совокупностей изделий.

Как замечено во многих работах по СПК (см. [1], [2], [4], [5]), существует значение параметра $\theta = \theta_0$, при котором ущербы от принятия и отвержения совокупности совпадают. В нашем случае гак им значением безразличия являются $g(\theta_0)$. По аналогии с работами [5], [6] введем следующую функцию потери

$$\Pi(g(\theta), g(\theta_0)) = \begin{cases} \Pi_1(g(\theta_0) - g(\theta))^{v_1}\{1 + \Pi_{11}(g(\theta_0) - g(\theta)) + ...\}, & \text{если } g(\theta) \leq g(\theta_0), \\ \Pi_2(g(\theta) - g(\theta_0))^{v_2}\{1 + \Pi_{21}(g(\theta) - g(\theta_0)) + ...\}, & \text{если } g(\theta) > g(\theta_0), \end{cases}$$

где $v_1, v_2, \Pi_1, \Pi_2-$ положительные параметры, $\Pi_{ij}(i, j = 1, 2, ...)-$ стоимостные постоянны, Параметры $\Pi_1, \Pi_2$ зависят от объема совокупности $N$ и $\Pi_1 = \alpha \cdot \Pi_2$ при некотором $\alpha > 0$. Кроме того, предположим, что стоимость выборочного наблюдения как функция от $n$, при больших $n$ имеет вид (см. [5]): $r_s(n) = c \cdot n^s(1 + O(n^{-1}))$, где $c > 0$ и не зависит от $n$, $s \geq 1$.

Средняя потеря

Тогда остаточная функция потери $R(n, t^0, g(\theta)) = r_s(n) + R_{cp}(n, t^0, g(\theta))$.

В минимаксном подходе план контроля считается оптимальным, если его параметры $(n, t^0)$ удовлетворяют равенству

$$\sup_{\theta} R(n_0, t_0, g(\theta)) = \inf_{n,t^0} \sup_{\theta} R(n, t^0, g(\theta)).$$

При байесовском подходе считается, что о неизвестном параметре $\theta$ распределения генеральной совокупности имеется частичная информация, позволяющая считать, что $\theta-$ случайная величина, имеющая некоторую априорную функцию распределения $W(\theta)$. В этом случае оптимальной план определяется из условия

$$R(n_0, t_0) = \min_{n,t^0} R(n, t^0), R(n, t^0) = r_s(n) + \int\limits_{\theta\in\Theta_1} \Pi(g(\theta), g(\theta_0)) \cdot P(g(\theta_n) > t^0(\theta))W(\theta)d\theta +$$

$$+ \int\limits_{\theta\in\Theta_2} \Pi(g(\theta), g(\theta_0)) \cdot P(g(\theta_n) < t^0(\theta))W(\theta)d\theta,$$

где $\Theta_1 = \{\theta : g(\theta) \leq g(\theta_0)\}, \Theta_2 = \{\theta : g(\theta) > g(\theta_0)\}$.

В работе установлены асимптотические решение для параметров оптимального плана, в частности, получены следующие результаты:

**Теорема 1.** Если $\Pi_1 = \Pi_2 = O(N)$, то для минимаксного плана имеют место соотношения ,

$$n_0 \approx \begin{cases} c_0 N^{\tau_2}(\ln N)^{\frac{v_2}{2}\tau_2}, & \text{при } v_2 > v_1, \\ c_1 N^{\tau_0} \quad \text{при } v_2 = v_1 = v_0,, \end{cases}$$

$t_0 = g(\theta_0) + O(n_0^{-\frac{1}{2}})$, где $\tau_1 = \frac{2}{2S+v_i}, i = 0, 1, 2$, а $c_0$ и $c_1-$ постоянные.

**Теорема 2.** Если $\Pi_1 = \Pi_2 = O(N)$, то для параметров байесовского плана имеют место соотношения ,

$$n_0 \approx \begin{cases} c_2 N^{\tau_2}(\ln N)^{\frac{v_2+1}{2}\tau_2}, & \text{при } v_2 > v_1, \\ c_3 N^{\tau_0} \quad \text{при } v_2 = v_1 = v_0,, \end{cases}$$

$t_0 = g(\theta) + O(n_0^{-\frac{1}{2}})$, где $\tau_1 = \frac{2}{2S+v_i+1}, i = 0, 1, 2$, а $c_2$ и $c_3$- постоянные.

**Литература**

1. *S. Moziguti.* Notes on Sampling Inspection Plans. Reports of Statistical Appl. Research, USE. vol.3, No.4, 1955.

2. *Van der Warden B.L.* Sampling inspection as a minimum lose problem. The Annals of Mathematical Statistics, vol.31, No.2, 1960.

3. *K. Stange.* Die Berechnung witch craft licher plane fur messeueole Priifune M"vol.8, Fase I, 1964.

4. *С.Х. Сираждинов, Х. Фазилов.* об оптимальных планах статистического приемочного контроля по количественному признаку. Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, №4, 1970.

5. *A.Hald.* Asymptotic properties of Bayesian Single Sampling Plans. J.R.S.S.-1967-V. B-29. pp.162-173.

6. *P.Thyregod.* Asymptotic Properties of Minimax Regret Sugle Sampling Plans.- Copenhagen, 1970, 21 p. Inst. Of Math. Sfot. University of Copenhagen. Preprint 5097.

7. *В.Вахобов.* Асимптотическое разложение для распределения функции от оценки минимального контраста. Известия АН УзССР, серия физ-мат. наук,1985. № 5. с.8-13.


# Равномерный аналог теоремы Хсу - Роббинса - Эрдеша


**М.У.Гафуров, Р.Х.Кенджаев**

*Ташкентский государственный транспортный университет*


В данном сообщении приводится доказательство равномерного аналога известной теоремы Хсу - Роббинса - Эрдеша (ХРЭ) о комплетной сходимости последовательности независимых, одинаково распределенных случайных величин (с.в.).

Пусть $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$- последовательность с.в., определенных в одном и том же вероятностном пространстве, $\forall \varepsilon > 0$, и пусть $\nu(\varepsilon) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} I\left(|\xi_n| > \varepsilon\right)$, $I(A)$- индикатор события А. Следуя [1], дадим следующее

**Определение.** Последовательность $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ при $n \to \infty$ сходится к нулю комплетно ($\xi_n \xrightarrow{c} 0$), если $E\nu(\varepsilon) < \infty, \forall \varepsilon > 0$.

В частном случае, когда $\xi_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, где $X_1,\ \ldots\ , X_n$ - независимые одинаково распределенные с.в., в [1] установлено, что

$$EX_1 = 0, EX_1^2 < \infty \Rightarrow E\nu(\varepsilon) < \infty, \forall \varepsilon > 0.$$

Обратная импликация доказана в работе Эрдеша [2].

Объединяя результаты [1] и [2], можно сформулировать знаменитую теорему ХРЭ:

**Теорема 1 (ХРЭ).** При $n \to \infty$

$$\xi_n \xrightarrow{c} 0 \Leftrightarrow EX_1 = 0, EX_1^2 < \infty.$$

Обобщение приведенной теоремы оказалось в то время очень сложной задачей. Метод асимптотического анализа, использовавшийся при доказательстве этой теоремы (особенно, достаточности условия $EX_1 = 0, EX_1^2 < \infty$), для обобщений был малопригоден (даже знаменитое в то время неравенство Чебышева), а новых подходов к проблеме специалисты долгое время не находили.

В 1979 году в [3] был предложен новый подход в доказательстве теоремы ХРЭ, основанный на универсальных неравенствах для вероятностей больших уклонений, предложенных С.В.Нагаевым [4].

Этот прием оказался весьма перспективным в смысле различных обобщений теоремы ХРЭ и широкого применения в исследованиях распределений специальных функционалов, порожденных случайным блужданием.

Исходя из этих соображений, можно прийти к выводу о том, что если в свое время появление неравенства Чебышева считалось самым знаменитым результатом всей теории вероятностей, то получение С.В.Нагаевым универсальных неравенств, несомненно, можно отнести к числу знаменитых результатов последнего столетия.

Ниже продемонстрируем мощь универсального неравенства С.В.Нагаева в доказательстве основной теоремы данного сообщения.

Обозначим через $P_F$ и $E_F X_1$ соответственно вероятностную меру и математическое ожидание, при котором с.в. $X_1$ имеет функцию распределения (ф.р.) $F(x)$.

Пусть $\mathbb{F}$ - семейство ф.р. $F(x)$, удовлетворяющих условию равномерной интегрируемости:
$\sup\limits_{F\in\mathbb{F}} E_F X_1^2 I\left(|X_1| > N\right) \to 0$ при $N \to \infty$.

**Теорема 2.** Следующие утверждения равносильны:
A) $\xi_n \xrightarrow{c} 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $\mathbb{F}$;
B) $\sup\limits_{F\in\mathbb{F}} E_F \nu(\varepsilon) I\left(\nu(\varepsilon) > N\right) \to 0 \quad \forall\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$.

*Доказательство.* Достаточно установить B), т.к. оттуда следует $\sup\limits_{F\in\mathbb{F}} E_F \nu(\varepsilon) < \infty$ $\forall\varepsilon > 0$, а это, в свою очередь, влечет A). Если же верно A), то по определению комплетной сходимости
$\sup\limits_{F\in\mathbb{F}} E_F \nu(\varepsilon) < \infty \quad \forall\varepsilon > 0$, и, следовательно имеет место B).

Теперь для доказательства B) воспользуемся вероятностным неравенством [4, стр. 758, формула (1.56)].

Имеем
$$P_F\left(|\xi_n| > \varepsilon\right) \le nP_F\left(|X_1| > \gamma n\varepsilon\right) + 4e^2 \big(E_F X_1^2\big)^2 \frac{1}{n\varepsilon^2}, \forall\varepsilon > 0$$
где $\gamma$ - некоторое положительное число.

Тогда
$$\sup_{F\in\mathbb{F}} E_F \nu(\varepsilon) I\left(\nu(\varepsilon) > N\right) \le \sup_{F\in\mathbb{F}} \sum_{k>N} kP_F\left(|X_1| > \gamma k\varepsilon\right) + \frac{4e^2}{\varepsilon^4} \sup_{F\in\mathbb{F}} (E_F X_1^2)^2 \sum_{k>N} \frac{1}{k^2}$$
Очевидно, второе слагаемое в правой части последнего неравенства при $N \to \infty$ стремится к нулю равномерно по $\mathbb{F}$.

Далее легко видеть, что при $N \to \infty$ равномерно по $\mathbb{F}$
$$\sup_{F\in\mathbb{F}} \sum_{k>N} kP_F\left(|X_1| > \gamma k\varepsilon\right) \le C_0 \sup_{F\in\mathbb{F}} E_F X_1^2 I\left(|X_1| > C_1 N\right) \to 0,$$
здесь $C_0, C_1$ - некоторые положительные числа, не зависяие от $F$. Теорема 2 доказана.

## Литература

1. *Hsu P.L., Robbins H.* Complete convergence and the law of large numbers. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1947, v 33, № 2, p 25-31.

2. *Erdös P.* On a theorem of Hsu and Robbins Ann. Math. Statist., 1949, v 20, No 2, p 286-291.

3. *Гафуров М.У.* Применения аналога неравенств С.В.Нагаева и Д.Х.Фука для взвешенных сумм независимых случайных величин к закону больших чисел. Prob. theory. Banach center publications, vol.5. PWN - Polish Scientific publishers, Warsaw, 1979, p 260-271.

4. *Nagaev S.V.* Large deviations of sums of independent random variables. The Annals of probability, 1979, v 7, № 5, p 745-789.

# О последовательности случайных величин со случайными индексами

**А.А. Джамирзаев[1], И.Н. Мамуров[2]**

[1]*Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека*
[2]*Ташкентский финансовый институт*
imamurov58@gmail.com

Как известно, первоначальные работы посвященные предельным теоремам для последовательности случайных величин (с.в.) со случайными индексами, в частности, для сумм случайного числа сл.вел. появились в середине прошлого столетия. Приведем несколько примеров, в которых естественным образом появляется случайный индекс.

**Пример 1. Выплаты страховой компании.**

Годовая сумма страховых выплат страховой компании при наступлении страхового случая определяется суммой

$$S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu, \tag{1}$$

где $X_i$ – страховая сумма выплачиваемая по $i$–тому страховому случаю.

Ясно, что $\nu$–число страховых случаев в году является с.в.

Здесь можно считать, что с.в. $\{X_i\}$ и $\nu$ являются независимыми.

**Пример 2. Изучение длительности безотказной работы дублированной системы.**

Пусть требуется оценить надежность технической системы, состоящей из основного и резервного элементов с восстановлением. Резервный элемент находится в ненагруженном резерве, оба элемента обладают одинаковыми техническими характеристиками, которые полностью восстанавливаются в результате ремонта.

В момент 0 начинает работать основной элемент системы, а резервный включается в момент отказа основного. Переключение осуществляется мгновенно. В момент отказа элемент начинает восстанавливаться. Длительность ремонта случайна с распределением вероятностей $G(x)$. Длительность безотказной работы элемента также случайна и имеет $F(x)$ своей функцией распределения. После окончания ремонта элемент поступает в резерв. Отказ системы наступает в момент, когда оба элемента окажутся в состоянии отказа.

Обозначим через $\xi_1, \xi_2, ...$ последовательные длительности безотказной работы элементов и через $\eta_1, \eta_2, ...,$ длительности их восстановления. Очевидно, что отказ наступит в момент $\tau = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_\nu$, где $\nu = \min\{k \geq 2 : \xi_k < \eta_{k-1}\}$. Легко понять, что величина $\nu$ распределена по геометрическому закону

$$P(\nu = k) = (1-\alpha)\alpha^{k-1},\ k = 2, 3, ...,\ \text{где } \alpha = P(\xi_k > \eta_{k-1}) = \int_0^\infty G(x)dF(x).$$

В теоретическом и прикладном отношениях особенно интересен случай, когда $\alpha$ мало. Мы предположим, что $\alpha$ зависит от целочисленного параметра $n$ и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ Это предположение можно трактовать как последовательное совершенствование системы ремонта. На $n$–ой стадии совершенствования ремонта $\alpha = \alpha_n$, $\nu = \nu_n$ и, значит, длительность безотказной работы системы равна $\tau = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\nu_n}$.

Естественный интерес при этом представляет также изучение с.в.

$$\delta_{\nu_n} = \max\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{\nu_n}\}.$$

В этом примере с.в. $\xi_1, \xi_2, ...$ и $\nu_n$ являются зависимыми. Можно привести и другие примеры, в которых приходится иметь дело не с классической постановкой задачи, а с необходимостью исследовать последовательности случайных величин со случайными индексами

В большинстве работ рассматривалось распределение суммы случайного числа с.в. в условиях независимости числа слагаемых от самих слагаемых с.в. Такую схему случайного суммирования назовем "независимой схемой". В настоящее время имеется большое количество работ (см. [1]), относящихся к "независимой схеме". В немногочисленных работах были исследованы последовательности с.в. со случайными индексами, при этом не предполагается условие независимости случайного индекса от самих исходных с.в. Такую схему условно будем называть "зависимой схемой". Теоремы, в которых предполагается существование предельного распределения для детерминированной последовательности и при соответствующих дополнительных условиях утверждается существование предельного распределения для последовательностей со случайным индексом, будем называть теоремами переноса.

В предисловии к монографии [2] указывается важность и необходимость исследований по теоремам переноса, в частности, для сумм случайного числа слагаемых. Во введении монографии [2] авторы отмечают: К настоящему моменту накопилось большое число результатов по случайному суммированию, и с полной определенностью можно говорить о существовании соответствующей теории. Имеющиеся результаты можно условно разделить на две группы. К одной из них мы относим результаты исследований, в которых непременным условием выступает независимость слагаемых от числа слагаемых в сумме. Другую группу составляют результаты, в которых такое предположение не делается. При анализе утверждений из второй группы прослеживается четкая взаимосвязь метода исследования и вида зависимости между числом слагаемых в сумме и самими слагаемыми в каждой отдельной задаче. В этой связи классификация результатов из второй группы представляется весьма затруднительной, в то время как в отношении результатов из первой группы она легко осуществима.

В монографии [2] систематически изложены сведения об асимптотических свойствах сумм случайного числа независимых с.в., и при этом основное внимание уделено ситуации, когда случайный суммирующий индекс и слагаемые независимы ("независимая схема"). В этой монографии приведены также, результаты об оценках скорости сходимости в предельных теоремах для случайных сумм.

В недавно изданной монографии [3] авторов настоящего тезиса приведены основные результаты проф. Азларова Т.А. и его учеников Джамирзаева А.А., Мамурова И.Н., Абдуллаева А.Г., посвященные теоремам переноса в случае "зависимой схемы"и оценкам скорости сходимости в некоторых этих теорем.

**Литература**


1. *Silvestrov D.S.* Limit theorems randomly stopped stochastics prosesses. Springer, 2004.

2. *Круглов В.М., Королев В.Ю.* Предельные теоремы для случайных сумм. М.: МГУ, 1990.

3. *Джамирзаев А.А., Мамуров И.Н.* Теоремы переноса. Т. , 2019.


# Скорость роста почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией


**Жумакулов Х.К., Музаффаров А.**

*Кокандский государственный педагогический институт*

e-mail xurshid81@gmail.com


В данной работе мы рассмотрим последовательности ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией $\left\{X_k^{(n)},\ \ k \geq 0\right\}$, $n \in N$, определенные следующими рекуррентными соотношениями

$$X_0^{(n)} \equiv 0, X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)},$$

где при каждом $n \in N$ $\left\{\xi_{k,j}^{(n)}, k, j \in N\right\}$ и $\varepsilon_k^{(n)}, k \in N$ являются совокупностями независимых, неотрицательных, целозначных и одинаково распределенных случайных величин, причем они независимы между собой. Если интерпретировать величину $\xi_{k,j}^{(n)}$ как число потомков $j$ - той частицы в $k-1$-м поколении, а величину $\varepsilon_k^{(n)}$ - как число иммигрирующих частиц в популяции в $k$ - том поколении, то величина $X_k^{(n)}$ является числом частиц в популяции в $k$ - том поколении.

Предположим, что величины

$$m_n = E\xi_{1,1}^{(n)}\,,\ \lambda_n = E\varepsilon_1^{(n)}\,,\ \sigma_n^2 = D\xi_{1,1}^{(n)}\,,\, b_n^2 = D\varepsilon_1^{(n)}$$

конечны для всех $n \in \mathbf{N}$.

Пусть величина $m_n$ имеет асимптотическое представление

$$m_n = 1 + \alpha d_n^{-1} + o\left(d_n^{-1}\right),$$

при $n \to \infty$, где $\alpha > 0$, $d_n$ - некоторая последовательность положительных чисел такая, что $d_n \to \infty$ при $n \to \infty$. В работах [1] - [4] исследовано асимптотическое поведение процесса $\left\{X_k^{(n)},\ k \in \mathbf{N}_0\right\}$ в случае, когда последовательность $nd_n^{-1}$ при $n \to \infty$ имеет конечный предел. В отличии от этих работ мы изучаем скорость роста почти критических ветвящихся процессов Гальтона - Ватсона с иммиграцией в случае, когда $m_n = 1 + \alpha d_n^{-1} + o\left(d_n^{-1}\right)$ при $n \to \infty$. Здесь $d_n$ такое, что $d_n \to \infty$ и $nd_n^{-1} \to \infty$ при $n \to \infty$.

**Теорема 1.** Пусть выполнены следующие условия:

1) $m_n = 1 + \alpha d_n^{-1} + o(d_n^{-1})$ при $n \to \infty$, $\alpha > 0$, $d_n$ - последовательность положительных чисел такая, что $d_n \to \infty$ и $nd_n^{-1} \to \infty$ при $n \to \infty$,

2) $\lambda_n \to \lambda$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$ $d_n^{-1} b_n^2 \to b^2$ при $n \to \infty$,

3) $m_n^{-2n} d_n^{-2} \operatorname{cov}\left(X_{n+m}^{(n)},\ X_n^{(n)}\right) \to (2\alpha)^{-1}\left(b^2 + \alpha^{-1}\lambda\sigma^2\right)$ при $n \to \infty$ для всех $m > 0$.

Тогда при $n \to \infty$ случайная величина $W_n = \left(m_n^n d_n\right)^{-1} X_n^{(n)}$ сходится в среднем квадратично к некоторой случайной величине $W$, причем $EW = \alpha^{-1}\lambda$, $DW = (2\alpha)^{-1}\left(b^2 + \alpha^{-1}\lambda\sigma^2\right)$.

### Литература


1. *Хусанбаев Я.М.* О поведении процесса Гальтона-Ватсона с иммиграцией. // ДАН РУз. 2007. No. 2. -С. 3-5.

2. *Хусанбаев Я.М.* О флуктуации ветвящихся процессов с иммиграцией. // УзМЖ. 2008. No. 1. -С. 112-126.

3. *Ispany M., Pap G., Van Zuijlen M.C.A.* Fluctuation limits of branching processes with immigration and estimation of the means// Adv.Appl. Probab. 2005. -V.37. -P.523-538.

4. *Sriram T.N.* Invalidititity of bootstrap for critical branching processes with immigration. //Ann. Statist. 1994. -V. 22. -P. 1013-1023.


# Оценка скорости сходимости в предельных теоремах о переходных явлениях для ветвящихся случайных процессов


**Жураев Ш.Ю.**

*Институт математики имена В.И. Романовского АНРУз, Ташкент, Узбекистан.*

e-mail: shukurjon4756@gmail.com


Рассматривается ветвящийся случайный процесс Гальтона – Ватсона, определенный рекуррентными формулами

$$Z_0 = 1,\ Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_j,\ \ n \geq 1 \tag{1}$$

где $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ последовательность независимых случайных величин (с. в.) с неотрицательными и целочисленными значениями с общим распределением

$$P\left(X_1 = k\right) = P\left(Z_1 = k\right) = p_k,\ k = 0, 1, ...$$

(см. [1], 2., 2.1-2.3, стр. 7-19).

Пусть $F(x)$ производящая функция с. в. $X_1$ т. е.

$$F(x) = Ex^{X_1} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 = k)\, x^k, F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k)\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_n(k)\, x^k,\ |x| \leq 1$$

Как известно, что имеет место равенства

$$F_n(x) = F_{n-1}(F(x)) = F(F_{n-1}(x)),\ \ n \geq 1. \tag{2}$$

Будем предполагать, что первые факториальные моменты

$$A = F^{'}(1),\ \ B = F^{''}(1),\ \ C = F^{'''}(1)$$

конечны.

В ветвящихся случайных процессах с дискретным временем критическим значением среднего является $A = 1$.Предельные теоремы для число частиц $Z_n$ в случаях $A \neq 1$ и $A = 1$ имеют совершенно разные. В критическом случае $A = 1$ предельным распределением для $Z_n$ является показательное распределение, а в некритических случаях $A \neq 1$ эти предельные распределения определяются сложными функциональными уравнениями, не имеющими явные решениям.

В силу изложенных рассуждений представляя особый интерес исследования асимптотического поведения ветвящихся случайных процессов близким к критическим. Впервые на эти задачи обратил внимания Б. А. Севастьянов ([2], гл. III, §1 - §4, стр. 87 - 103) и он указал на постановку этих задач в следующем виде: рассматривается семейства ветвящихся случайных процессов

$$\{Z_n = Z_n(A),\ 0 < A < \infty\}$$

где параметр семейства $A = F^{'}(1)$, $F(x)$ −производящая функция число частиц первого поколения, задающей процесс $Z_n(A)$. Общая задача состоит в том, что изучать предельное поведение величины $Z_n(A)$ при $n \to \infty,\ A \to 1$.

Понятно, что при $n \to \infty,\ A \to 1$ предельные теоремы вида $(a_n \to \infty)$

$$\lim_{n\to\infty, A\to 1} P(Z_n(A) < a_n x / Z_n > 0) \tag{$*$}$$

должны быть равномерными по определенному классу производящих функций $\{F(x) = F(x, A)\}$.

Предельные теоремы вида (*) называются переходными явлениями в теории ветвящихся случайных процессов и доказательство этих теорем требуют применения дополнительных математических приемов.

Б. А. Севастьяновым впервые доказаны предельные теоремы о переходных явлениях в ветвящихся случайных процессах непрерывного времени ([2], гл. III, §2, теорема 2, стр. 89).

В работе [3] исследованы переходные явления в ветвящихся случайных процессах дискретного времени (процессы Гальтона – Ватсона). В этой работе доказано следующие

**Теорема А.** Пусть класс производящих функций

$$K(B_0, C_0) = \left\{F; F^{''}(1) = B \geq B_0,\ F^{'''}(1) = C \leq C_0\right\}$$

где $B_0 > 0,\ 0 \leq C_0 < \infty$. Имеет место представление

$$1 - F_n(x) = r_n(x)(1 + \eta_n(x))$$

где

$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{A^n(1-x)}{1+\frac{B}{2}\cdot\frac{A^n-1}{A-1}(1-x)}, & A \neq 1, \\ \frac{1-x}{1+\frac{Bn}{2}(1-x)}, & A = 1, \end{cases}$$

а величина $\eta_n(x) \to 0$ при $n \to \infty,\ A \to 1$, равномерно по производящим функциям $F(x) \in K(B_0, C_0)$ и $|x| \leq 1$.

Ниже приводится теоремы об оценке скорости сходимости в теореме A.

Введем функцию

$$g(n, A) = \sum_{j=1}^{n} A^j = \frac{A^n - 1}{A - 1}$$

определенную для целых $n \geq 2$ и положительных $A$.

**Теорема 1.** Пусть $\min\left(n, \frac{1}{|A-1|}\right) = n$. Тогда при $n \to \infty,\ A \to 1$ и $|x-1| \geq \delta > 0$ равномерно по классу производящих функций $F(x) \in K(B_0, C_0)$

$$1 - F_n(x) = r_n(x)(1 + \eta_n(x))$$

где

$$\sup_{|x-1|\geq\delta>0} |\eta_n(x)| = O\left(\max\left(\frac{1}{n}, \frac{\ln g(n, A)}{g(n, A)}\right)\right).$$

**Теорема 2.** Пусть $\min\left(n, \frac{1}{|A-1|}\right) = \frac{1}{|A-1|}$. Тогда при $n \to \infty,\ A \to 1$ и $|x-1| \geq \delta > 0$ равномерно по классу производящих функций $F(x) \in K(B_0, C_0)$

$$\sup_{|x-1|\geq\delta>0} |\eta_n(x)| = O\left(\max\left(|A-1|, \frac{\ln g(n, A)}{g(n, A)}\right)\right).$$

## Литература

1. *В. А. Ватутин,* Ветвящиеся процессы и их приложения. Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. Лекционные курсы НОЦ. Вып. 8. 2008. 103 стр.

2. *Б. А. Севастьянов,* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.

3. *С. В. Нагаев, Р. Мухамедханова,* Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся случайных процессов. Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1966, С. 90-112.

# Абстрактные вероятности в классических моделях случайных явлений

**Максимов В.М.**

*РГГУ*

e-mail адрес vm_maximov@mail.ru

**1.** Абстрактные вероятности - это некоторое множество $P$ с операцией сложения и коммутативным умножением и другими дополнительными свойствами, которые будут определены ниже, и призваны заменить обычные числа $p$, $(0 \leq p \leq 1)$, для определения вероятности случайного события. Потребность такого рассмотрения возникает из некоторых задач квантовой теории (Дирак, Фейман), построения модели мирового пространства, в частности, статистически неясных явлений, например, космических. При описании этих явлений используются отрицательные вероятности, комплексные числа и даже поле $p$-адических чисел (А.Ю.Хренников).

**2.** Оказалось, что основные модели случайных явлений удачно подходят под обобщение на абстрактные вероятности. Первая и основная модель теории вероятности, данная А.Н.Колмогоровым, основанная на понятии случайной величины, особенно удобна для обобщения. В этой теории случайная величина задаётся вероятностями событий (функцией распределения). То есть эти вероятности как бы "назначаются" числами из отрезка $[0, 1]$.

Но ничто не мешает назначить их из множества $P$. Свойства $P$ определены так, что должны быть определены все вероятностные вычисления (исчисление вероятностей). То есть в колмогоровской теории вероятности вначале назначаются, а потом из них вычисляются другие возможные вероятности. Важнейшее прикладное значение теории Колмогорова состоит в том, что по выборкам одинаково распределённых величин можно (при определённых условиях) приближённо определить числовые характеристики этих величин. В частности, для бернуллиевских случайных величин значению 1 назначается вероятность $p$, а значению 0 – вероятность $q = 1 - p$. Таким образом определяется сама вероятность $p$.

Если в теории Колмогорова назначить $p$-адические вероятности, то, как показал Хренников (1994), в случае схемы Бернулли $p$-адические вероятности не определяются стандартным образом. Однако это не умаляет значение $p$-адических вероятностей, но ставит задачу построения $p$-адической схемы Бернулли.

**3.** Теория вероятностей Р.Мизеса основана на понятии "коллектива". Здесь "коллектив" соответствует модели последовательных извлечений из урны. Можно сказать, что в этой модели предлагается рассматривать последовательность независимых одинаково распределённых бернуллиевых величин и дано правило определения вероятности $p$, как предела $\dfrac{n_1}{n}$ при $n \to \infty$. Тут как раз содержится двойственное понимание: с одной стороны, вероятность $p$ определяется как предел частоты и порождает закон Больших чисел, но с другой стороны $p$ есть предел частоты в поле действительных чисел.

Поэтому ничто не мешает рассматривать предел $\dfrac{n_1}{n}$ при $n \to \infty$ в других метриках поля рациональных чисел, например в любой $p$-адической метрике. Таким образом, модель Р.Мизеса легко обобщаема до модели последовательных независимых бернуллиевых величин с $p$-адическими вероятностями.

**4**. Расширение теорий А.Н.Колмогорова и Р.Мизеса до абстрактных вероятностей требует сопоставления достоверному событию некоторого элемента из $P$, играющего роль единицы, а недостоверному - элемента, играющего роль нуля. Итак, абстрактное вероятностное множество $P$ должно содержать элемент $\mathbf{0}$ относительно операции сложения и элемент $\mathbf{1}$ относительно операции умножения.

Если в $P$ определена топология, то достоверность или недостоверность с вероятностями $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ должны определяться экспериментально или по определению как у Р.Мизеса. При этом сопоставление "редкому" событию малой вероятности, а "частому" событию большой вероятности зависит от алгебраических свойств множества $P$.

**5**. Определение абстрактных вероятностей.

Множество $P$ (абстрактных вероятностей) мы будем называть вероятностным множеством, если в нём определены бинарные операции $\otimes$, $\oplus$, удовлетворяющие следующим свойствам:

1) $\otimes$ - есть, коммутативная, ассоциативная операция с единицей (единичным элементом) $\mathbf{1}$;

2) $\oplus$ - коммутативна, но определена не для каждой пары $\alpha$, $\beta \in P$. Если $\oplus$ определена для пары $\alpha$, $\beta$ и для пары $\alpha+\beta$, $\gamma$ (для простоты соответствующий элемент будем записывать в привычной форме $(\alpha+\beta)+\gamma$, то определены $\beta+\gamma$ и $\alpha+(\beta+\gamma)$, и тогда $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$. Имеется единственный элемент $\mathbf{0}$, такой что $\mathbf{0}+\alpha=\alpha$ для любого $\alpha \in P$;

3) Дистрибутивность суммы: если $\alpha+\beta$ определено, то для любого $\gamma \in P$ определено $\alpha\gamma+\beta\gamma=(\alpha+\beta)\gamma$. Заметим, что, с другой стороны, сумма $\alpha\delta+\beta\gamma$ может быть определена, но $\alpha+\beta$ может быть не определена. Это может быть даже в случае обычных вероятностей, например при $\gamma=\dfrac{1}{4}, \alpha+\beta>1$;

4) Свойство дополнительности до $\mathbf{1}$ (единичного элемента): для любого $\alpha \in P$ существует такой элемент $\bar{a}$, что $\alpha+\bar{a}=\mathbf{1}$;

5) Вероятностная версия аксиомы Архимеда: для любого $\alpha \in P$, $\alpha \neq \mathbf{0}$, существует такое натуральное $k(\alpha)$, что сумма $\underbrace{\alpha+\cdots+\alpha}_{m \text{ раз}}$ определена в $P$ при $m<k(\alpha)$, но не определена при $m \geq k(\alpha)$.

В вероятностном множестве $P$ существуют идемпотентные элементы, т.е. такие элементы, для которых $e^2=e$, например $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$. Будем говорить, что вероятностное множество $P$ удовлетворяет условию Колмогорова, если в нём существуют только два идемпотентных элемента. Это свойство необходимо и достаточно для выполнения закона нуля или единицы. Если имеется конечное число ($>2$) идемпотентных элементов, то будем говорить, что выполняется расширенное условие Колмогорова.

**6**. Декартово произведение вероятностных множеств $P_1, P_2, \cdots, P_i, \cdots$.

Как обычно, декартово произведение $P=P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_i \times \cdots$ состоит из строк $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots)$, $\alpha_i \in P_i$. В $P$ определены операции покомпонентного умножения, и сложения, которая определяется также покомпонентно, если соответствующие операции определены для каждого $i$. Нулём в $P$ является строка $(\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2, \cdots, \mathbf{0}_i, \cdots)$, где $\mathbf{0}_i \in P_i$, единицей - строка $(\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \cdots, \mathbf{1}_i, \cdots)$, где $\mathbf{1}_i \in P_i$. Все свойства вероятностного множества для такого $P$ легко проверяются. Если для каждого $P_i$ выполнено условие Колмогорова, то для их конечного декартова произведения оно не выполняется, т.к. содержит $2^s$ идемпотентов, где $s$ число сомножителей.

**7**. Понятие изоморфизма двух вероятностных множеств очевидно. Отображение $\psi : P_1 \to P_2$ будет называться гомоморфизмом, если, как обычно, $\psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta)$, и из существования суммы $\psi(\alpha)+\psi(\beta)$ следует существование суммы $\alpha+\beta$ и равенство $\psi(\alpha+\beta) = \psi(\alpha)+\psi(\beta)$.

Легко показать, что гомоморфный образ $\psi : P_1 \to P_2$ является вероятностным множеством - подмножеством в $P_2$. Его единичный элемент не обязательно является единичным в $P_2$, но всегда является его идемпотентом. Так что идемпотенты выполняют важную роль в вероятностном множестве.

Можно показать, что множество идемпотентных элементов в вероятностном множестве $P$ само является вероятностным множеством. Для каждого идемпотента $e$ из $P$, множество элементов $\{\alpha e,\, \alpha \in P\}$ является вероятностным подмножеством в $P$, которое обозначается $P_e$.

Отображение $\alpha \to \alpha e$ есть гомоморфизм $P$ в $P_e$.

Применение гомоморфизмов на вероятностном множестве основано на простом утверждении: если вероятность события $A$ в теории с абстрактными вероятностями из $P_1$, есть алгебраическое выражение $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in P_1$ и $P_2 = \psi(P_1)$, где $\psi$ некоторый гомоморфизм. Тогда вероятность события $A$ в той же теории, но с абстрактными вероятностями из $P_2$ равна $R(\psi(\alpha_1), \ldots, \psi(\alpha_n))$.

**8**. Структурная теорема и гипотеза для компактных вероятностных множеств.

Всякое вероятностное множество $P$ с расширенным условием Колмогорова имеет $2^s$ идемпотентов, и найдутся такие $s$ идемпотентов $e_1, \ldots, e_s$, что $e_i e_j = \mathbf{0}$, $i \neq j$ и $e_1, \ldots, e_s = \mathbf{1}$. При этом $P$ изоморфно декартовому произведению своих вероятностных подмножеств $P_{e_1}, \ldots, P_{e_s}$.

С точки зрения приложений наиболее интересно вероятностное множество с топологий. При этом операции $\otimes$, $\oplus$ и дополнения до единицы непрерывны относительно этой топологии. В случае, если вероятностное множество $P$ компактно и удовлетворяет расширенному условию Колмогорова, то оно, согласно структурной теореме, есть декартово произведение компактных вероятностных множеств $P_{e_1}$, удовлетворяющих условию Колмогорова.

Весьма правдоподобна следующая гипотеза, имеющая мировоззренческое значение: всякое компактное вероятностное множество $P$ с условием Колмогорова изоморфно множеству действительных чисел отрезка $[0,1]$ с обычными операциями. Из её положительного решения будет следовать, что всякое компактное вероятностное множество с конечным числом идемпотентов, есть декартово произведение отрезков $[0,1]$, т.е. изоморфно многомерным вероятностям.

**9**. Примеры вероятностных множеств.

1. Множество действительных чисел $[0,1]$ с обычными операциями.

2. Многомерные вероятности - это декартово произведение $[0,1]^{\times s \text{ раз}}$.

3. Если $F$ подполе действительных чисел, то $F \bigcap [0,1]$ является вероятностным подмножеством из $[0,1]$. Для $F = Q$, вероятности $Q \bigcap [0,1]$ употребляются в комбинаторной теории вероятностей.

4. Пусть $M$ конечное множество и $B(M)$ его булеан, т.е. множество всех подмножеств множества $M$ и $\emptyset$. Известно, что число подмножеств равно $2^{|M|}$. Покажем, что его элементы образуют конечное множество абстрактных вероятностей. Для этого положим $M_1 \otimes M_2 = M_1 \bigcap M_2$, где $M_1$, $M_2 \in B(M)$ и $M_1 \oplus M_2 = M_1 \bigcup M_2$, если

$M_1 \bigcap M_2 = \emptyset$. В противном случае сумма не определена. Наконец, $\overline{M_1} = M \setminus M_2$; единичным элементом является все множество, а нулевым - $\emptyset$. Вероятностное множество $B(M)$ с такими операциями будет называться вероятностным булеаном множества $M$. Если $M$ состоит из одного элемента, то его вероятностный булеан состоит из **0** и **1**. Обозначим его через $B_1$. Тогда вероятностный булеан изоморфен $B_1^{\otimes s}$. Каждое конечное вероятностное множество изоморфно некоторому вероятностному булеану.

5. Гиперболические вероятности. Они состоят из пар $(p, m)$, где $0 < p < 1$, $0 \leq m \leq \dfrac{1}{p}$, к ним добавляются пары $(0,0) = \mathbf{0}$, $(1,1) = \mathbf{1}$. Умножение в этом множестве определено покомпонентно, а сложение по формуле $(p_1, m_1) + (p_2, m_2) = \left(p_1 + p_2, \dfrac{p_1 m_1 + p_2 m_2}{p_1 + p_2}\right)$. Дополнительный элемент определяется по формуле $\overline{(p, m)} = \left(1 - p, \dfrac{1 - pm}{1 - p}\right)$. Легко проверить, что эти операции превращают множество пар $(p, m)$, $(0,0) = \mathbf{0}$, $(1,1) = \mathbf{1}$, в вероятностное множество.

**10**. Важнейшей задачей теории абстрактных вероятностей является построение источника (или урны) для получения независимой реализации бернуллиевских величин с абстрактными вероятностями, и на этом основании получить некоторый аналог закона больших чисел.

В [1] было показано, что в схеме Бернулли с абстрактными вероятностями вероятность множества траекторий с бесконечным числом положительных исходов равна **1**. Достаточно подробное изложение общей концепции абстрактных вероятностей и её применение в колмогоровской модели случайных величин дано в [2]. С $p$-адическими вероятностями можно ознакомиться в [3] и [4].

Автор выражает глубокую благодарность Э.Л.Пресмну и В.К.Жарову за внимание к тематике, плодотворное обсуждение и советы при подготовке и оформлении этой работы.

### Литература

1. Максимов В.М. Схема Бернулли с абстрактными вероятностями, ДАН РАН, т. 458, в. 5, 2014, 514-517;

2. Максимов В.М. "Многомерные и абстрактные вероятности Стохастическое исчисление, мартингалы и их применения, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Альберта Николаевича Ширяева, Тр. МИАН, 287, МАИК "Наука/Интерпериодика М., 2014, 182-210; Proc. Steklov Inst. Math., 287:1 (2014), 174-201

3. Хренников А.Ю. $p$-Адическая теория вероятностей и ее приложения. Принцип статистической стабилизации частот ТМФ, 97:3 (1993), 348-363; Theoret. and Math. Phys., 97:3 (1993), 1340-1348

4. Хренников А.Ю. "Теорема Бернулли для вероятностей, принимающих $p$-адические значения Докл. РАН, 354:4 (1997) 461-464

# Тауберова теорема для степенных рядов и ее применение в теории ветвящихся случайных процессов

**Аброр Мейлиев[1], Мислиддин Муртазаев[2]**

[1] *Каршинский государственный университет, г. Карши*
[2] *Институт Математики АН РУз, г. Ташкент*
e-mail: misliddin1991@mail.ru, abror_meyliyev@mail.ru

В этом сообщении мы изучаем свойства инвариантных мер для ветвящихся случайных процессов, используя следующую известную тауберова теорему.

**Теорема Т [3]** Пусть $q_n \in [0, \infty)$, и $Q(s) := \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$ сходится при $s \in [0, 1)$. Если $L(x)$ медленно меняется на бесконечности и $\rho \in [0, \infty)$, то каждое из соотношений

$$Q(s) \sim \frac{1}{(1-s)^{\rho}} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad \textit{при} \qquad s \uparrow 1$$

и

$$q_0 + q_1 + \cdots + q_{n-1} \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^{\rho} L(n) \quad \textit{при} \quad n \to \infty$$

влечет другое, где $\Gamma(\cdot)$ – Гамма функция Эйлера.

Обозначим $\{Z(n), n \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, численность популяции частиц в обычном ветвящемся процессе Гальтона-Ватсона (Г-В) порожденный вероятностной производящей функцией (ПФ) $f(s) := \sum_{j \in \mathbb{N}_0} p_j s^j$, где $p_j := \mathbb{P}\{Z(1) = j | Z(0) = 1\}$ – распределение числа прямых потомков одной частицы. Рассматриваемый процесс образует однородную цепь Маркова с пространством состояний $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}_0$. Эволюция процесса управляется регулирующим параметром $m := f'(1-)$ – средним числом непосредственных потомков одной частицы за одно поколение; см.[4].

Рассмотрим критический процесс, т.е. $m = 1$ и случае, когда дисперсия распределения числа прямых потомков одной частицы неизвестна. Вместе с этим ПФ $f(s)$ допускает для $s \in [0, 1)$ представление

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\nu} \mathcal{L}\left(\frac{1}{1-s}\right), \tag{1}$$

где $\nu \in (0, 1]$ и функция $\mathcal{L}(\cdot)$ медленно меняется на бесконечности; см. [2]. Пусть

$$\mathsf{p}_{ij}(n) := \mathbb{P}_i\{Z(n) = j\},$$

где $\mathbb{P}_i\{\cdot\} := \{\cdot | Z(0) = i\}$. Для нашей цели мы используем следующую лемму о монотонной сходимости отношений.

**Лемма [1]** Для всех $m < \infty$ и $j \in \mathcal{E}$

$$\frac{\mathsf{p}_{1j}(n)}{\mathsf{p}_{11}(n)} \uparrow \pi_j \leq \infty \quad \textit{при} \quad n \to \infty$$

и, выполняется инвариантное соотношение

$$\beta^n \cdot \pi_j = \sum_{k \in \mathcal{E}} \pi_k \mathsf{p}_{kj}(n),$$

где $\beta := f'(q)$ и $q-$ вероятность вырождения процесса.

Следующая теорема доказываются с помощью Теоремы Т.

**Теорема 1** Пусть выполнено условие (1). Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\pi_j = \frac{p_0}{\nu^2\cdot\Gamma(\nu)}n^{\nu}\mathcal{L}_{\pi}(n),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – Гамма функция Эйлера и $\mathcal{L}_{\pi}(n)\cdot\mathcal{L}(n)\to 1$ при $n\to\infty$.

**Благодарность**. Авторы выражают глубокую благодарность профессору А.А.Имомову за поддержку и внимание к научным интересам авторов.

### Литература

1. *Athreya K. B. and Ney P. E.* Branching processes. Springer, New York, 1972.

2. *Bingham N. H., Goldie C. M. and Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge, 1987.

3. *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and Its Applications. vol. **2**, 2-ed. John Wiley & Sons, New York, 1971.

4. *Imomov A. A.*. Renewed Limit Theorems for the discrete-time Branching Process and its Conditioned Limiting Law interpretation. *ArXiv:2004.09307*, (2020) 32 pages.

# Почти наверное сходимость для ядерной оценки плотности от стационарных последовательностей строго положительно зависимых в квадранте случайных величин

**Мухамедов А.К., Кобилов У.Х.**

*Национальный университет Узбекистана*
*Национальный университет Узбекистана*
muhamedov1955@mail.ru, kobilov.utkir25@gmail.com

В данной работе мы будем изучать п.н. сходимость эмпирической плотности и скорости выживания к теоретическому для стационарных последовательностей строго положительно зависимых в квадранте с.в..

Обозначим через $\rho_j$ и $\overline{\rho}_j = 1-\rho_j$ индикаторные функции событий $\{X_j > x_j\}$ и $\{X_j \le x_j\}$ соответственно, где $x_j\in R$. Пусть $\rho_A = \prod\limits_{j\in A}\rho_j,\ A\subset\{1,...,n\}$.

Семейство $\{X_1,..,X_n\}$ с.в. называется строго положительно зависимым в квадранте (СПЗК) (см. например, Newman (1984), Joag-Dev (1983)), если для любых $A,B\subset\{1,...,n\}$ и $x_j\in R$ выполняются неравенства

$$cov\,(\rho_A,\rho_B)\ge 0,\quad cov\,(\overline{\rho}_A,\overline{\rho}_B)\ge 0,\quad cov\,(\rho_A,\overline{\rho}_B)\le 0.$$

Бесконечное семейство с.в. $\{X_n,\ n\ge 1\}$ называется СПЗК, если каждое ограниченное подсемейство будет СПЗК.

Для СПЗК с.в. мы используем следующий коэффициент зависимости

$$r(k) = \sup_{\substack{x, y \in R \\ i \in N}} \left[ P(X_i > x, X_{i+k} > y) - P(X_i > x) P(X_{i+k} > y) \right], \qquad k \in N.$$

Пусть $\{X_n,\ n \geq 1\}$ стационарная последовательность с.в. с функцией плотности $f(x)$. Пусть $K$ фиксированная вероятностная плотность и $h_n$ стремящихся к нулю последовательность положительных действительных чисел. Ядерная оценка для функции плотности $f(x)$, обычно определяется следующим образом:

$$\widehat{f}_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x - X_j}{h_n}\right). \tag{1}$$

Введем следующие предположения:

(A1) $K(.)$ ограниченная функция имеющая ограниченную вариацию на $R$ и удовлетворяющая условиям (i) $\lim\limits_{|u| \to \infty} |u| K(u) = 0$, (ii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 K(u)\, du < \infty$.

(A2) $K(u)$ дифференцируема и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K'(u)\, du < \infty$.

(A3) $r = \sum\limits_{k=1}^{\infty} r(k) < \infty$.

**Теорема 1.** Пусть $\{X_n,\ n \geq 1\}$ стационарная последовательность СПЗК с.в.. Предположим, что выполнены условия (A1)-(A3).

Тогда для всех $x$

$$f_n(x) - Ef_n(x) \to 0 \text{ п.н. при } n \to \infty$$

.

**Следствие 1.** При условии теоремы 1 в точках непрерывности $x$ плотности $f(.)$ имеет место

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{п.н. при} \quad n \to \infty$$

.

Скорость выживания определяется следующим образом:

$$r(x) = f(x) / \overline{F}(x), \quad \overline{F} > 0, \text{ где } \overline{F}(x) = \exp\left\{ -\int\limits_{-\infty}^{x} r(t)\, dt \right\}$$

Оценка для $r(x)$ берется следующим образом:

$$r_n(x) = f_n(x) / \overline{F}_n(x),$$

где $f_n(x)$ - ядерная оценка для $f(x)$, $\quad \overline{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} I(X_j > x)$.

Ясно, что

$$r_n(x) - r(x) = \frac{\overline{F}(x) \left[ f_n(x) - f(x) \right] - f(x) \left[ \overline{F}_n(x) - \overline{F}(x) \right]}{D_n(x)}, \tag{2}$$

где $D_n(x) = \overline{F}(x)\overline{F}_n(x)$.

**Теорема 2.** Пусть $\{X_n,\ n \geq 1\}$ стационарная последовательность СПЗК с.в. с непрерывной ограниченной плотностью $f(x)$. Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Тогда для каждого $x$ точки непрерывности $f(x)$ такой, что $D_n(x) > 0$, имеет место

$$r_n(x) \to r(x) \text{ п.н. при } n \to \infty.$$

Методы доказательства теорем для последовательностей строго положительно зависимых в квадранте с.в. по существу такие же как у Bagai, I. и Prakasa Rao, B.L.S. (1995) и Roussas G.G. (1991) как в случае ассоциированности, с соответствующими изменениями. Отличия будут в условиях на зависимость и ядро, которые ослаблены и не требуется существования никаких моментов от исходных с.в..

### Литература


1. *Bagai, I. and Prakasa Rao, B.L.S.* Kernel- type density and failure rate estimation for associated sequences, Ann. Inst. Statist. Math. Vol. 47, No. 2, 1995, pp. 256-266.
2. *Joag-Dev, K.* Independence via uncorrelatedness under certain dependence structures, Ann. Probab., 11, 1983, pp. 1037-1041.
3. *Newman, C.M.* Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables. In :Inequalities in Statistics and Probability, Tong, Y.L. (ed.), IMS, Hayward, 1984, pp. 127-140.
4. *Roussas G.G.* Kernel estimates under association: strong uniform consistency. Statist. Probab. Lett., 12, 1991, pp. 393-403.


# Центральная предельная теорема для слабо зависимых случайных величин со значениями в $D[0,1]$


**А.Ф.Норжигитов**

*Институт математики, Ташкент, Узбекистан,*

anvar2383@mail.ru


Пусть $\{X_n(t), t \in [0,1], n \geq 1\}$ - последовательность случайных величин со значениями в пространстве $D[0,1]$ (пространство всех вещественных, непрерывных справа и имеющих левые пределы функций, определенных на $[0,1]$) с топологией Скорохода. Мы будем говорить, что $\{X_n(t), t \in [0,1], n \geq 1\}$ удовлетворяет центральной предельной теореме, если распределения $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1(t) + \ldots + X_n(t))$ слабо сходятся к гауссовскому распределению в $D[0,1]$. Центральная предельная теорема для последовательности независимых одинаково распределенных (н.о.р) случайных величин со значениями в $D[0,1]$ изучалась многими авторами (см [1]-[5]).

Первая центральная предельная теорема была доказана Hahn [4]. Позднее центральная предельная теорема в $D[0,1]$ была доказана Juknevičienė (1985), Paulauskas и Stive (1990), Bezandry и Fernique( 1992), Bloznelis и Paulauskas (1993), Fernique (1994). Результат Hahn [4] можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 1.**[4]. Пусть $\{X_n(t), t \in [0,1], n \geq 1\}$ последовательность н.о.р. случайных величин со значениями в $D[0,1]$ таких, что

$$EX_1(t) = 0, \ \ EX_1^2(t) < \infty \text{ для всех } \ t \in [0,1] \tag{1}$$

Предположим, что существуют неубывающие непрерывные функции G и F на $[0,1]$ и числа

$\alpha > \frac{1}{2}, \ \beta > 1$, такие, что для всех $0 \leq s \leq t \leq u \leq 1$ выполняются следующие два условия:

$$E\left(X_1(u) - X_1(t)\right)^2 \leq \left(G(u) - G(t)\right)^{\alpha},$$

$$E\left(X_1(u) - X_1(t)\right)^2 \left(X_1(t) - X_1(s)\right)^2 \leq \left(F(u) - F(s)\right)^{\beta} \tag{2}$$

Тогда $\{X_n(t), t \in [0,1], n \geq 1\}$ удовлетворяет центральной предельной теореме в $D[0,1]$, и предельный гауссовский процесс непрерывен.

Основной на цель является для установление центральной предельной теоремы для последовательностей с перемешиванием.

Ниже мы даем определения коэффициентов перемешивания для последовательности случайных величин со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $B$. В определении (2) предполагается, что $B$ бесконечномерное пространство.

**Определение 1.** Для последовательности $\{X_n(t), t \in [0,1], n \geq 1\}$ коэффициенты $\alpha$-перемешивания определяются следующим образом.

$$\alpha(n) = \sup\left\{\left| \ P(AB) - \ P(A) \ P(B)\right| : A \in F_1^k, \ B \in F_{k+n}^{\infty}, \ k \in N\right\}.$$

где $F_a^b - \sigma$ -алгебра, порожденная случайными процессами $X_a(t), ..., X_b(t)$ и $L_2(F_a^b)$ - пространство всех квадратично интегрируемых случайных величин, измеримых по $F_a^b$.

**Определение 2.**Для последовательности $\{X_n(t), t \in [0,1], n \geq 1\}$ коэффициенты $\alpha_m(n)$ -перемешивания определяются следующим образом.

$$\alpha_m(n) = \sup_{R^m} \sup\left\{\left| \ P(AB) - \ P(A) \ P(B)\right| : A \in F_1^k(R^m), \ B \in F_{k+n}^{\infty}(R^m), \ k \in N\right\}.$$

где $F_a^b(R^m) - \sigma$ -алгебра, порожденная случайными величинами $\prod_m X_a(t), ..., \prod_m X_b(t)$ и
$\prod_m$ - оператор проектирования из B в m-мерное подпространство $R^m$ т.е. $\prod_m : \text{B} \to R^m$.

Последовательность называется удовлетворяющим условию $\alpha$ -перемешивания (или $\alpha_m$-перемешивания ) если соответственно

$$\alpha(k) \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty \tag{3}$$

$$\alpha_m(k) \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty \text{ и } \ m = 1, 2, ... \tag{4}$$

соответственно.

Как показывает пример приведенный Журбенко [6] в общем случае, из (4) не вытекает (3), хотя (3) всегда влечет (4).
Фактически требуется, чтобы все конечномерные проекции последовательности $\{X_n(t), t \in [0,1], n \geq 1\}$ удовлетворяли условию перемешивания.

Обозначим $S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(X_1(t) + ... + X_n(t)\right)$ и в дальнейшем $\Rightarrow$ означает слабую сходимость.

Сформулируем наш результат.

**Теорема 5.** Пусть $\{X_n(t), t \in [0,1], n \geq 1\}$ стационарная в узком смысле последовательность $D[0,1]$-значных случайных величин с $\alpha_m$- перемешиванием и

$$EX_1(t) = 0, E|X_1(t)|^{2+\delta} < \infty \text{ для всех t} \in [0,1] \text{ и некоторого } \delta > 0.$$

Предположим, что существует неубывающая, непрерывная функция $F(t)$ на $[0,1]$ такая, что для всех $0 \leq s \leq t \leq 1$ и некоторого $\varepsilon > 0, \delta > \varepsilon$ выполнены следующие условия:

$$\left(E|X_1(t) - X_1(s)|^{2+\delta}\right)^{\frac{2+\varepsilon}{2+\delta}} \leq (F(t) - F(s)) \log^{-(3+2\varepsilon)}\left(1 + (F(t) - F(s))^{-1}\right), \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_m^{\frac{\delta}{2+\delta}}(k) < \infty, \quad m = 1, 2, ...$$

Тогда $\{X_n(t), t \in [0,1], n \geq 1\}$ удовлетворяет центральной предельной теореме т.е.

$$S_n(t) \Rightarrow N(t) \text{ при } n \to \infty$$

и предельный непрерывный гауссовский процесс имеет нулевую средную и ковариационную функцию:

$$F(t_1, t_2) = \lim_{n\to\infty} ES_n(t_1)S_n(t_2), \quad t_1, t_2 \in [0,1].$$

## Литература


1.*P.H.Bezandry and X.Fernique.* Sur la propriete de la limite centrale dans $D[0,1]$. Ann.Inst. H. Poincare . 28(1992),31-46.

2.*M.Bloznelis and V.Paulauskas.* On the central limit theorem in $D[0,1]$. Statist.Probab.Lett.17(1993),105-111.

3.*M.Bloznelis and V.Paulauskas.* A note on the central limit theorem for stochastically continuous processes. Stochastic Processes and their Applications.53(1994),351-361.

4.*M.G.Hahn.* Central limit theorems in $D[0,1]$. Z.Wahrsch. Verw. Gebiete.44(1978),89-101.

5.*V.Paulauskas and Ch.Stieve.* On the central limit theorem in $D[0,1]$ and $D([0,1], H)$. Lithuanian Math. J.30(1990),267-276.

6.*I.G.Zhurbenko.* On the conditions for mixing random processes with values in Hilbert spaces. Dokl. AN USSR. 1984,v.278,No.4,792-796.

# Модель управления запасами, когда цены на сырьё зависят от цепи Маркова с непрерывным временем

**Пресман Э.Л., Сонин И.М.**

*ЦЭМИ РАН, МШЭ МГУ*
*UNCC, Charlotte, ЦЭМИ РАН*
e-mail адрес presman@cemi.rssi.ru

Существуют различные модели управления запасами (см., например, Arrow и др., 1951 [1]; Bather, 1966 [2]; Bayer и др., 2010 [3]; Rubalskiy, 1972 [11] , но любая модель управления запасами в конечном счете должна дать ответ на два вопроса:

1. Какое количество продукции заказывать? 2. Когда заказывать?

Математические модели управления запасами позволяют найти оптимальный уровень запасов некоторого товара, минимизирующий суммарные затраты на покупку, оформление и доставку заказа, хранение товара, а также убытки от его дефицита.

В данной работе будет рассмотрена следующая задача управления запасами. Имеется производитель, которому для производства нужно с постоянной интенсивностью потреблять промежуточный продукт (товар). Если цена товара постоянна, то нужно с той же интенсивностью закупать товар и тем самым будет обеспечено производство. Если цена меняется со временем, то при маленькой цене целесообразно закупить разово какое-то количество, чтобы не переплачивать при большой цене. Но если сделать разовую закупку, то закупленный продукт нужно хранить, а за это надо платить.

Сонин предложил рассмотреть ситуацию, когда цена зависит от значения марковского процесса с непрерывным временем, конечным числом $N$ состояний и известными интенсивностями переходов. В этом случае целесообразно создать склад и по возможности закупки делать в моменты, когда цена самая маленькая. Считается, что закупки по текущей цене можно производить как крупными партиями, так и непрерывно увеличивая (не уменьшая) количество купленного товара, но за хранение товара на складе нужно платить.

Предполагается, что плата за хранение пропорциональна количеству товара, имеющегося на складе, затраты на осуществление заказа не зависят от размера заказа, заказ осуществляется мгновенно.

Вопрос состоит в том, как организовать работу склада, чтобы минимизировать издержки на хранение и на закупки товара, при этом издержки можно рассматривать как дисконтированные, так и предельные средние за единицу времени. Эта задача изучалась сначала в Hill, 2004 [6], а потом в Hill и Sonin, 2006 [7] и Katehakis и Sonin, 2013 [8].

В этих работах рассматривались предельные средние за единицу времени издержки и предполагалось, что стратегия оптимальной организации работы склада носит пороговый характер, т. е.:

Для каждого состояния $i$ марковской цепи существует такой порог $a_i$, что если количество товара на складе $x$ меньше $a_i$, то надо разово произвести закупку до уровня этого порога, т. е. купить товар в количестве $a_i - x$; если $x = a_i$, то вплоть до следующего скачка марковского процесса надо закупать товар с единичной интенсивностью, чтобы запас на складе был равен пороговому значению $a_i$; если $x > a_i$ то проводить закупки не следует вплоть до следующего скачка марковского процесса или момента, когда значение запаса станет равным $a_i$.

Было сделано предположение, что для состояния с максимальной ценой порог равен нулю. В классе таких стратегий было найдено сначала значение оптимального порога для случая цепи с двумя состояниями, а потом оптимальные пороги для случая трёх состояний, когда из состояния с максимальным и минимальным значением цены возможны переходы только к состоянию со средним значением цены.

Идея нахождения оптимальных порогов состояла в следующем. Без ограничения общности предполагалось, что $P_1 > P_2 > P_3$, где $P_i$ – цена товара в состоянии $i$. Для порогов $a_1 = 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0$ рассматривалось стационарное распределение размера запаса на складе. После этого подсчитывалось значение функционала, соответствующее этим порогам и брался минимум по возможным значениям порогов $a_2 \geq 0$ и $a_3 \geq 0$. Получалось оптимальное значение по выбранному классу.

При таком подходе не понятно, как доказывать оптимальность по классу всех возможных управлений. Как доказать, что $a_1 = 0$? Что делать для общего случая при числе состояний $N = 3$? Как решать задачу при $N > 3$?

В данной работе используются методы, разработанные в работах Presman, Sethi, 2006 [9] и Presman и др., 1995 [10]. Оказывается, что в такого рода задачах удобно от изучения цены игры перейти к изучению её производной, а вместо условия гладкого склеивания, фигурирующего в задачах с диффузией, возникает условие дважды гладкого склеивания.

В работе сначала рассматриваются представляющие независимый интерес дисконтированные издержки, а результаты для предельных средних за единицу времени издержек получаются в результате предельного перехода при стремлении к нулю интенсивности дисконтирования.

Сначала приводится постановка задачи, при этом рассматривается общий случай с произвольным числом состояний, с неупреждающими управлениями и с функционалом как для ожидаемых предельных средних по времени издержек, так и для ожидаемых дисконтированных издержек.

После этого формулируется результат для дисконтированных издержек. Оказывается, что, как правило, оптимальное управление единственно и носит пороговый характер, при этом минимальный порог всегда равен нулю, и в множество состояний с нулевым порогом всегда входит состояние с максимальной ценой.

Тем не менее, если среди переходных интенсивностей цепи есть нулевые, то при некоторых соотношениях между параметрами может оказаться, что наряду с состояниями, для которых оптимальное управление единственно, могут существовать такие, для которых оптимальное управление неединственно и носит квазипороговый характер. Это означает, что если $i$ - такое состояние, то для него найдется $a_i > 0$, что если уровень запаса на складе больше $a_i$, то, так же, как для порогового управления, проводить закупки не следует вплоть до следующего скачка марковского процесса или момента достижения уровня запаса равного $a_i$, а при уровне запаса на складе меньшем или равном $a_i$ можно вплоть до следующего скачка марковского процесса использовать любое управление, не выводящее уровень запаса за пределы интервала $[0, a_i]$.

Приведём точную формулировку.

Задан непрерывный справа марковский процесс $\{m(t)\}_{0 \leq t < \infty}$, $m(0) = i$, с конечным числом состояний $N$ и матрицей интенсивностей $\Lambda$. Пусть $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t < \infty}$ – фильтрация им порожденная. Управление $u$ – это $\mathcal{F}_t$-согласованная, **непрерывная слева** неубывающая функция $u(t), u(0) = 0$, значение которой в момент $t$ соответствует суммарным закупкам товара до момента $t$.

Моменты скачков и размеры скачков в эти моменты соответствуют моментам и размерам разовых закупок. Величина $x^u(t) = x - t + u(t)$ определяет количество товара на складе в момент времени $t$ при начальном запасе $x \geq 0$.

Управления, для которых $x^u(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$ и значение функционалов конечно, будем называть допустимыми. Обозначим через $\mathcal{U}(x)$ класс допустимых управлений для начальной точки $x$.

Для $u \in \mathcal{U}(x)$ рассматриваются функционалы

$$V_i^{\rho,\,u}(x) = E_{x,\,i}\left\{\int\limits_0^\infty e^{-\rho t} c x^u(t)dt + \int\limits_0^\infty e^{-\rho t} P_{m(t)} du(t)\right\} \text{ при } \rho > 0, \tag{1}$$

$$V_i^{0,\,u}(x) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} E_{x,\,i}\left\{\int\limits_0^T c x^u(t)dt + \int\limits_0^T P_{m(t)} du(t)\right\}, \tag{2}$$

где $c$ – стоимость хранения единицы товара за единицу времени, $P_i$ – цена товара при условии, что марковский процесс находится в состоянии $i \in J$, $E_{x,i}\{\cdot\}$ – математическое ожидание при начальном состоянии марковского процесса равном $i$ и начальном состоянии запаса $x$. Без ограничения общности считается, что $P_i > P_{i+1}$ при $1 \leq i \leq N-1$.

Требуется найти при $\rho \geq 0$ значение $V_i^\rho(x) = \inf_{u\in\mathcal{U}(x)} V_i^{\rho,\,u}(x)$, $i \in J$, и определить оптимальное управление. Функция $V_i^\rho(x)$ называется функцией выигрыша.

Рассмотрим вектор $a$ с координатами $a_1, \dots, a_N$. Назовём $a$-пороговой стратегией управление, которое при каждом $i \in J$ является $a_i$-пороговым.

Пусть $P$ это $N$-мерный вектор-столбец с координатами $P_i$, $i \in J$; $I$ это $N$-мерный вектор-столбец с координатами равными 1; $E$ это $N \times N$ диагональная матрица с единицами на диагонали; $V^\rho(x)$ это вектор столбец с координатами $V_i^\rho(x)$, $i \in J$.

Пусть $\rho \geq 0$, $b^\rho = (\Lambda - \rho E)(-P) + cI$, так что

$$b_i^\rho = c + (\lambda_i + \rho)P_i - \sum_{j\neq i} \lambda_{i,j} P_j = c + \rho P_i + \sum_{j\neq i} \lambda_{i,j}(P_i - P_j), \quad i \in J. \tag{3}$$

Оказывается, что для состояния $i$ равенство оптимального порога нулю или его положительность зависит от знака $b_i^\rho$. Положим

$$J_+^\rho = \{i: \ b_i^\rho > 0\}, \quad J_0^\rho = \{i: \ b_i^\rho = 0\}, \quad J_-^\rho = \{i: \ b_i^\rho < 0\}. \tag{4}$$

Ниже, когда понятно о каком $\rho$ идёт речь, мы будем у всех рассматриваемых величин опускать верхний индекс $\rho$.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1**. *Пусть $\rho > 0$.* (1) *Существует такой набор $\bar{a}$, что $\bar{a}$–пороговая стратегия является оптимальной по классу всех допустимых управлений в задаче минимизации функционала* 1. *При этом $\bar{a}_i > 0$ если $i \in J_-$ и $\bar{a}_i = a^{(1)} = 0$ в остальных случаях.*

(2) *Функция* $V(x)$ *определяется из соотношения*

$$V(x)=\begin{cases} c\dfrac{\rho x-1}{\rho^2}I-\int\limits_x^{\infty}\left(U(y)-\dfrac{c}{\rho}I\right)dy \text{ при } x\geq \hat{a}=\max\limits_i\{\bar{a}]_i\} \\ -\int\limits_x^{\hat{a}}U(y)dy+V(\hat{a}) \text{ при } 0\leq x<\hat{a} \end{cases} \tag{6}$$

*где* $U(x)=\dfrac{dV(x)}{dx}$ *является единственным непрерывно дифференцируемым решением уравнения*

$$\frac{dU(x)}{dx}=\max\left((\Lambda-\rho E)\,U(x)+cI,0I\right)=\max\left((\Lambda-\rho E)\left(U(x)-\frac{c}{\rho}I\right),0I\right),\ \ U(0)=-P, \tag{7}$$

*при этом* max *берётся покоординатно.*

(3) *Если* $\hat{a}>0$, *то функции* $U(x)$ *и пороги* $\bar{a}_i$ *можно построить последовательно на последовательных интервалах между порогами, начиная с интервала* $[a^{(1)},a^{(2)}]$, *где* $a^{(1)}=0$, *а* $a^{(2)}$ *минимальный положительный порог. На этом интервале сначала строится* $U(x)$, *а потом из условия непрерывной дифференцируемости* $U(x)$ *находится* $a^{(2)}$. *Затем, если* $\hat{a}>a^{(2)}$, *то то же делается для интервала* $[a^{(2)},a^{(3)}]$, *где* $a^{(3)}$ *минимальный порог из тех порогов, которые больше, чем* $a^{(2)}$, *и т. д. При этом всегда*

$$U(x)=e^{(\Lambda-\rho E)(x-\hat{a})}U(\hat{a}) \ \text{ при } x\geq\hat{a}\,. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь случай $\rho=0$. Этот случай можно изучить с помощью предельного перехода при интенсивности дисконтирования стремящейся к нулю. При этом возникает аналог предложенной Ховардом канонической тройки (см, например, Dynkin и Yushkevich, 1978 [5]).

**Теорема 2**. *Пусть цепь регулярна.*

a) *Существуют такие вектор* $\bar{a}^0$, *число* $V^*$ *и ограниченная вектор-функция* $W(x)$, *что*

$$W(x)=\lim_{\rho\to0}W^{\rho}(x), \text{ где } W^{\rho}(x)=V^{\rho}(x)-\frac{V^*}{\rho}I, \tag{9}$$

*и* $\big(\bar{a}^0;\ V^*;\ W(x)\big)$ *образуют каноническую тройку для задачи минимизации функционала* (2), *т. е. при любом* $T>0$

$$W_i(x)=\inf_{u\in\mathcal{U}(x)}E_{x,i}\left\{\int\limits_0^T\big((cx^u(t)-V^*)dt+P_{m(t)}du(t)\big)+W_{m(T)}(x^u(T))\right\}, \tag{9}$$

*при этом на* $\bar{a}^0$-*пороговой стратегии достигается инфимум и* $\bar{a}_i^0>0$ *если* $i\in J_-^0$ *и* $\bar{a}_i^0=0$ *в остальных случаях.*

b) *В задаче минимизации функционала* (2) $\bar{a}^0$-*пороговая стратегия является оптимальной, оптимальное значение функционала в этой задаче не зависит от* $i$ *и* $x$ *и равно* $V^*$,

c) *Функция* $U^0(x)=\dfrac{dW(x)}{dx}$ *при* $0\leq x\leq\hat{a}^0=\max_i\{\bar{a}_i^0\}$ *является единственным непрерывно дифференцируемым решением уравнения*

$$\frac{dU^0(x)}{dx}=\max\left(\Lambda U^0(x)+cI,0I\right),\quad U^0(0)=-P, \text{ при } 0\leq x\leq\hat{a}^0, \tag{10}$$

*при этом* $V^* = c\hat{a}^0 - YU^0(\hat{a}^0)$, *где вектор-строка* $Y$ *обозначает инвариантное распределение марковской цепи. Решение уравнения* (10) *и числа* $\bar{a}_i^0$ *находятся точно также, как решение уравнения* (6) *в утверждении* (3) *Теоремы* 1.

В задачах оптимизации (1) (для $\rho > 0$) и (9) (для $\rho = 0$) возможность неединственности оптимального управления связана с тем, что существуют такие $a_i^* \geq \bar{a}_i$, что решения систем дифференциальных уравнений (6) (соответственно (10)) таковы, что $U_i(x) > U_i(a_i^*)$ при $x > a_i^*$ и для тех $i$, для которых $a_i^* > \bar{a}_i$, функции $U_i(x)$ постоянны на интервалах $[\bar{a}_i, a_i^*]$.

Теорема 3 утверждает, что неединственность возможна только для $i \in J_0$ (а значит, в силу Теоремы 1, для $\bar{a}_i = 0$), и что для соответствующих $i$ уравнение является оптимальным тогда и только тогда, когда оно является $a_i^*$-квазипороговым. Формулируется также алгоритм последовательного (в порядке их возрастания) нахождения значений $a_i^*$.

Работа первого автора частично поддержана грантом РНФ N 20-68-47030

## Литература

1. *Arrow, K.J., Harris, T.E., Marschak, J.* Optimal inventory policy. Econometrica, XIX, 1951, 250-272.

2. *Bather, J.* A continuous time inventory model, Journal of Applied Probability, 3, 1966, 538-549.

3. *Beyer, D., Feng Cheng, Sethi, S.P.* Markovian Demand Inventory Models, Springer, 2010.

4. *Browne, S., Zipkin. P.* Inventory models with continuous stochastic demands.// The Annals of Applied Probability, 1(3), 1991, 419-435.

5. *Dynkin, E.B., Yushkevich, A.A.* Controlled Markov Processes and their Applications, Springer-Verlag, Berlin ,1978.

6. *Hill, J.* A Markov-Modulated Acquisition Strategy, PhD thesis ,2004.

7. *Hill, J., Sonin, I.* An Inventory Optimization Model with Markov Modulated Commodity Prices, abstract, Intern. Conf. on Management Sciences, Univ.of Texas at Dallas, 2006.

8. *Katehakis, M., Sonin, I.* A Markov Chain Modulated Inventory Model, abstract, IN-FORMS, 2013.

9. *Presman, E.L., Sethi, S.P.* Stochastic Inventory Models with Continuous and Poisson Demands and Discounted and Average Costs, Production and Operations Management, v.15, i.2, 2006, p. 279-293.

10. *Presman, E.,. Sethi, S, and Zhang, Q.* Optimal Feedback Production Planning in a Stochastic $N$-machine Flowshop, Automatica, 31(9), 1995, 1325-1332.

11. *Rubalskiy, G.* Calculation of optimum parameters in an inventory control problem, Eng. Cybern., 10, 1972, 182-187.

# О регуляризации малым шумом обыкновенных дифференциальных уравнений с нелипшицевыми коэффициентами

**Пилипенко А.Ю.**

*Институт математики НАН Украины*

pilipenko.ay@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(X(s))ds, t \geq 0, \tag{1}$$

где функция $b : R^d \longrightarrow R^d$ является непрерывной и ограниченной, $x_0 \in R^d$.

Хорошо известно, что если $b$ удовлетворяет условию Липшица, то существует единственное решение уравнения (1). В противном случае теорема Пеано обеспечивает лишь существование решения, единственность может нарушаться.

Рассмотрим возмущения уравнения (1) малым шумом

$$X^\varepsilon(t) = x + \int_0^t b(X^\varepsilon(s))ds + \varepsilon w(t),\ t \geq 0, \tag{2}$$

где $w(t), t \geq 0$ – броуновское движение.

Из теоремы Звонкина-Веретенникова [1] следует, что уравнение (2) имеет единственное решение в отличии от уравнения (1), даже, если перенос $b$ является лишь измеримой и ограниченной функцией.

Заметим, что семейство случайных процессов $\{X^\varepsilon(t), t \in [0,T]\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ слабо относительно компактно в $C([0,T])$. Пусть случайный процесс $X^0$ является предельной точкой некоторой последовательности $\{X^{\varepsilon_n}(t), t \in [0,T]\}_{n\geq 1}$, где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Несложно проверить, что $X^0$ удовлетворяет уравнению (1). Если же этот предел не зависит от выбора $\{\varepsilon_n\}$, т.е. $X^\varepsilon \Rightarrow X^0, \varepsilon \to 0$, то процесс $X^0$ можно интерпретировать как естественное решение (1).

Данная задача впервые появилась в работах R.Bafico, P.Baldi [2,3], где рассматривался одномерный случай. Ими был получен следующий результат. Предположим, что $x_0 = 0$, а функция $b$ является локально липшицевой на $R \setminus \{0\}$ и $b(x) \sim \pm c_\pm |x|^\beta$ при $x \to 0\pm$, где $c_\pm > 0$. Тогда предельный процесс $X^0$ с вероятностями $p_+ = \frac{c_+^{\frac{1}{1+\beta}}}{c_-^{\frac{1}{1+\beta}} + c_+^{\frac{1}{1+\beta}}}$ и $p_- = \frac{c_-^{\frac{1}{1+\beta}}}{c_-^{\frac{1}{1+\beta}} + c_+^{\frac{1}{1+\beta}}}$ выбирает траекторию максимального или минимального решения (1), соответственно.

Нами решена задача об описании предельного процесса в случае, когда векторное поле $b$ имеет гельдеровскую асимптотику в окрестности нуля, а возмущение (1) малым шумом описывается стохастическим дифференциальным уравнением в многомерном пространстве, где шумом может быть $\alpha$-устойчивый процесс Леви и, в частности, броуновское движение [4,5,6].

Отметим, что задача о регуляризации малым шумом в многомерном пространстве существенно сложнее одномерного случая ввиду отсутствия линейного порядка и аргументов типа теоремы сравнения для интегральных уравнений.

### Литература

1. *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений //Математический сборник, 1980, Т. 111, N 3, 434-452.

2. *Bafico R.* On the convergence of the weak solutions of stochastic differential equations when the noise intensity goes to zero // Boll. Un. Mat. Ital., vol. XVII B, 1980, c.308.

3. *Bafico R., Baldi P.* Small random perturbations of Peano phenomena // Stochastics, 1982, vol. 6. , N 3-4, 279-292.

4. *Pilipenko A., Proske F. N.* On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise // Statistics & Probability Letters, 2018, vol. 132, 62-73.

5. *Pilipenko A., Proske F. N.* On a selection problem for small noise perturbation in the multidimensional case // Stochastics and Dynamics, 2018, vol. 18, N 06, 1850045.

6. *Pavlyukevich I., Pilipenko A.* Generalized Peano problem with Levy noise // Electronic Communications in Probability, 2020, vol. 25.


# О семействе моментов первого пересечения нелинейной границы случайным блужданием, описываемом процессом авторегрессии


**Ф. Г. Рагимов, Т. Э. Гашимова, Л. В. Кулиева**

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*

khamdamov.isakjan@gmail.com


Пусть $\xi_n$, $n \geq 1$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{F}, P)$.

Хорошо известно ([1], [3]), что авто регрессионный процесс первого порядка $(AR(1))$ определяется как решение уровненных вида

$$X_n = \beta X_{n-1} + \xi_n,\ n \geq 1,$$

где $\beta$-некоторое фиксированное числом начальное значение $X_0$ процесса не зависит от инновации $\{\xi_n\}$..

Как показано в работе [3] (см. также [4]) статистическая оценка по методу наименьших квадратов для параметра $\beta$ по результатам наблюдения $X_0, X_1, ..., X_n$ имеет вид $\beta_n = \frac{T_n}{S_n}$,где

$T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k X_{k-1}$и $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} X_{k-1}^2$.

Нетрудно показать, процессы $T_n, S_n, n \geq 1$,где образуют марковские случайные блуждания ([2]).

Отметим, что статистика вида

$$\Delta_n = n\Delta\left(\frac{T_n}{n}, \frac{S_n}{n}\right)$$

где $\Delta(x,y)-$некоторая борелевская функция, играет большую роль в теории нелинейных Марковского восстановления, а также в статистическом последовательном анализе ([1]).

С помощью этой статистики можно построить последовательные статистические тесты для различения статистических гипотез относительно неизвестного параметра $\beta$.

В работах [5], [6], [7] при частных предположениях относительно функции $\Delta(x,y)$ изучены линейные граничные задачи, связанные со семейством моментов первого пересечения уровня $a>0$ вида

$$\theta_a = \inf\{n\geq 1 : \Delta_n > a\} .$$

Для функции $\Delta(x,y)=x$ это семейство имеет вид

$$\theta_a = \inf\{n\geq 1 : T_n > a\}$$

изучению которого посвящены работы [8], [9].

В настоящей работе рассматривается семейство моментов первого пересечения нелинейной границы процессом $T_n$ :

$$\tau_a = \inf\{n\geq 1 : T_n > f_a(n)\} \tag{1}$$

где $f_a(t)$, $a>0$, $t>0-$некоторое семейство положительных нелинейных неслучайных границ.

Отметим, что случай нелинейной границы $(f_a(t)\neq a)$ изучен существенно меньше. Некоторые результаты в этом направление получены в работе [10].

В настоящей заметке для достаточно широкого класса нелинейных границ доказываются теорема об усиленном законе больших чисел типа Колмогорова и теорема равномерной интегрируемости семейства моментов остановки (1).

Будем предполагать, что $EX_0^2<\infty$, $0<\beta<1$, $E\xi_1=0$ и $E\xi_1^2=1$.

Относительно нелинейной границы $f_a(t)$ будем предполагать, что выполняются следующие условия регулярности:

1) Для каждого$a$ функция $f_a(t)$ монотонно возрастает, непрерывно-дифференцируема при$t>0$, причем $f_a(t)\uparrow\infty$ при $a\to\infty$.

2) Для каждого$a$ функция $\frac{f_a(t)}{t}$ убывает к нулю при $t\to\infty$.

3) Для любой функции $n=n(a)\to\infty$, такая, что $\frac{1}{n}f_a(n)\to\lambda=\frac{\beta}{1-\beta^2}>0$ при $n\to\infty$ любой $f_a(n)\to 0$для некоторой $a\to\infty$.

Обозначим через $N_a=N_a(\lambda)$ решение правления$f_a(n)=n\lambda$,которое существует в силу сделанных допущении относительно функции$f_a(t)$.

**Теорема 1.** Пусть выполняются вышеперечисленные условия. Тогда

1) $P(\tau_a<\infty)=1$ для всех $a>0$

2) $\tau_a \xrightarrow{?.=.} \infty$ при $a\to\infty$

3) $\frac{\tau_a}{N_a} \xrightarrow{?.=.} 1$ при $a\to\infty$.

В следующей теореме дается достаточное условие для равномерно интегрируемости семейства $\frac{\tau_a}{N_a}$, $a>0$.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть ряд сходиться

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X_k X_{k-1} < \lambda n) < \infty\,. \tag{2}$$

Тогда семейство $\frac{\tau_a}{N_a}$, $a > 0$ равномерно интегрируемо, то есть выполняется соотношение

$$\lim_{c\to\infty} \sup_a \int_{\left\{\omega: \frac{\tau_a}{N_a} > c\right\}} \frac{\tau_a}{N_a} dP = 0. \qquad (3)$$

**Следствие.** В условиях теоремы 2 имеет место
$\frac{E\tau_a}{N_a} \to 1$при $a \to \infty$.

Утверждение следствия теоремы 2 вытекает из утверждения 3) теоремы 1 и хорошо известной теоремы о сходимости семейства равномерно интегрируемых случайных величин ([4]).

## Литература


1. *V.F. Melfi,* Nonlinear Markov renewal theory with statistical applications, The Annals of Probability, 20, no 2 (1992), 753-771.

2. *V.F. Melfi*, Nonlinear renewal theory for Markov random walks, *Stochastic Processes and their Applications,***54** (1994), 71-93.

3. *D. Pollard.* Convergence of Stochastic processes. Springer, 1984.

4. *А.Н. Ширяев.* Вероятность. М. 1986.

5. *S.A. Aliev, F.H. Rahimov, A.D. Farhadova, V.S. Khalilov.* Limit theorems for the family of first passage time of the level by random walk described by a nonlinear function of the autoregressive process of order one ($AR(1)$). Uzbek Mathematical Journal, no 1 (2019), pp. 4-14.

6. *F.N. Rahimov, I.A. Ibadova, A.D. Farkhadova, T.E. Hashimova.* Limit theorems for the random walk the autoregression process of order one, Proceedings of IAM, 5, no 1 (2016), pp. 25-33.

7. *F.H. Rahimov, I.A. Ibadova, A.D. Farhadova.* Limit theorems for a family of the first passage times of a parabola by the sums of the squares autoregression process of order one ($AR(1)$). Uzbek Mathematical Journal, no 2 (2019), pp. 81-88.

8. *S.A. Aliev, F.H. Rahimov, A.D. Farhadova, V.S. Khalilov.* Limit theorems for the family of first passage time of the level by random walk described by a nonlinear function of the autoregression process one. Uzbek Mathematical Journal, no 1 (2019), pp. 4-14.

9. *F.H. Rahimov, T.E. Hashimova. A.D. Farkhadova.* Integral limit theorems for the first passage time of the level by a random walk, described by autoregression process of order one ($AR(1)$). Transaction of NAS of Azerbaijan. XXXV (1), 81-86 (2015).

10. *A.A. Novikov.* Some remarks on distribution of the first passage time and optimal stop of sequences. Theoriyaveroyatn. ieeprimen. (2008), vol. 53, issue 3, pp. 458-471.

# Последовательное непараметрическое оценивание интервалами фиксированной ширины функции регрессии

**Рахимова Г.Г.**

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*
rakhimova.gulnoza92@gmail.com

Рассмотрим случайный вектор $(\xi, \eta), \xi \in [0,1], \eta \in R_1$ . Обозначим через $f(x)$ плотность вероятности случайной величины $\xi$ и $r(x) = M(\eta/\xi = x), x \in [0,1]$ функцию регрессии.

Пусть $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), ..., (\xi_n, \eta_n)$,... независимые одинаково распределенные с $(\xi, \eta)$ случайные векторы. Непараметрические оценки функции регрессии $r(x)$ и её свойства изучены многими авторами (см. например [1-3]).

В работе [1] П.Ревеша используя метод стохастической аппроксимации, построена следующая реккурентная оценка для $r(x)$:

$$r_{n+1}(x) = r_n(x) + \frac{1}{(n+1)a_{n+1}} K\left(\frac{x-\xi_{n+1}}{a_{n+1}}\right) \cdot (\eta_{n+1} - r_n(x)), \tag{1}$$

где $r_0(x) = 0, 0 \le x \le 1, a_n = n^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ и $K(x) = 1$, если $|x| \le \frac{1}{2}$ и $K(x) = 0$ в противном случае. Он получил условия асимптотической сильной состоятельности и асимптотической нормальности оценки (1). В работе [5] для многомерной линейной регрессионной модели построена доверительная область фиксированного объёма. Обозначим $\sigma^2(x) = \frac{2f(x)-1+\alpha}{b(x)f(x)}$, $b(x) = M((\eta - r(x))^2/\xi = \sigma)$.

Введем условия

**(A):** $\frac{1-\alpha}{2} \le f(x) \le c$ для всех $x \in [0,1]$, $f(x)$ дифференцируема и $\left|\frac{df(x)}{dx}\right| \le c$, $r(x)$ дифференцируема и $\left|\frac{dr(x)}{dx}\right| \le c$.

**(B):** $M\left(e^{|\eta - r(x)|}/\xi = x\right) \le c$.

Здесь и в дальнейшем $c$ означает конечную постоянную, не всегда одну и ту же. Символ $\Rightarrow$ означает слабую сходимость функций распределений случайных величин и векторов, а также всех конечномерных распределений случайных процессов и полей.

**Теорема 1 [1].** Если выполнены условия **(A), (B)** и $1/2 < \alpha < 1$, то для всех $x \in [0,1]$ при $n \to \infty$

$$\sigma(x)\sqrt{na_n}(r_n(x) - r(x)) \Rightarrow N(0,1),$$

здесь $N(0,1)$ стандартная нормальная случайная величина со средним 0 и дисперсией 1.

Пусть $N(\varepsilon)$ целочисленная, неотрицательная случайная величина, определенная на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$, где были заданы случайные вектора $(\xi_k, \eta_k)$, $k \ge 1$, такая, что

**(C):** $\frac{N(\varepsilon)}{n(\varepsilon)} \xrightarrow{P} \nu$ при $\varepsilon \to 0$,

здесь $\nu$ с вероятностью 1 положительная случайная величина и $n(\varepsilon)$ неслучайная, неотрицательная функция такая, что $n(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

**Теорема 2.** Если выполнены условия **(A), (B), (C)** и $1/2 < \alpha < 1$, то для всех $x \in [0,1]$ при $\varepsilon \to 0$

$$\sigma(x)N(\varepsilon)^{\frac{1-\alpha}{2}}(r_{N(\varepsilon)}(x) - r(x)) \Rightarrow N(0,1).$$

Используя эту предельную теорему построим доверительный интервал фиксированной ширины для $r_n(x)$. По доверительному уровню $0 < \gamma < 1$ найдём квантиль

$$a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right),\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy.$$

Если для некоторого $\varepsilon > 0$ такого, что $\frac{\varepsilon\sigma(x)}{a}\cdot n^{\frac{1-\alpha}{2}} \geq 1$, то

$$P\{r(x) \in (r_n(x) - \varepsilon, r_n(x) + \varepsilon)\} \geq P\{\sigma(x)n^{\frac{1-\alpha}{2}}|r_n(x) - r(x)| \leq a\}.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P\{r(x) \in (r_{n(\varepsilon)} - \varepsilon, r_{n(\varepsilon)} + \varepsilon)\} \geq 2\Phi(a) - 1 = \gamma$, где

$n(\varepsilon) = \min(n \geq 1 : n \geq n_0(\varepsilon)),\ n_0(\varepsilon) = \left(\frac{a^2}{\varepsilon^2\sigma^2(x)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Момент остановки $n(\varepsilon)$ обладает тем недостатком, что в его определении через $\sigma(x)$ участвуют неизвестные $f(x)$ и $b(x)$. Поэтому вместо $n(\varepsilon)$ рассмотрим случайный момент остановки

$$N(\varepsilon) = \min(n \geq 1 : n \geq \left(\frac{a^2}{\varepsilon^2\sigma_n^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}), \tag{2}$$

здесь $\sigma_n^2(x) = \frac{2f_n(x)+\alpha-1}{b_n(x)f_n(x)}$, $f_n(x) = \frac{1}{na_n}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{x-\xi_i}{a_n})$, $b_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} - r_n^2(x)$,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{na_n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 K(\frac{x-\xi_i}{a_n}).$$

Обозначим через $\Re$ множество функций регрессий, удовлетворяющих определенным условиям. Следуя [4], введём следующие определения.

**Определение 1.** Доверительный интервал

$$I_\varepsilon(r_{N(\varepsilon)}(x)) = (r_{N(\varepsilon)}(x) - \varepsilon, r_{N(\varepsilon)}(x) + \varepsilon)$$

фиксированной ширины $2\varepsilon$ называется асимптотически состоятельным, если $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P\{r(x) \in I_\varepsilon(N(\varepsilon))\} \geq \gamma$ для всех $r(x) \in \Re$ и некоторой $0 < \gamma < 1$.

**Определение 2.** Момент остановки $N(\varepsilon)$, определенный в (2) называется асимптотически эффективным если доверительный интервал $I_\varepsilon(N(\varepsilon))$ асимптотически состоятелен и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{M(N(\varepsilon))}{n(\varepsilon)} = 1$.

Заметим, что $n(\varepsilon)$ равен минимальному количеству наблюдений необходимому для того, чтобы асимптотическая при $\varepsilon \to 0$ вероятность накрытия интервалом $I_\varepsilon(n(\varepsilon))$ "известной" функции регрессии была не меньше чем $\gamma$.

**Теорема 3.** Если выполнены условия **(A), (B), (C)** и $1/2 < \alpha < 1$, то доверительный интервал $I_\varepsilon(N(\varepsilon))$ фиксированной ширины с моментом остановки (2) асимптотически состоятелен.

**Теорема 4.** Если выполнены условия **(A), (B), (C),** $1/2 < \alpha < 2/3$ и $c_1 \leq \eta \leq c_2$, то момент остановки (2) является асимптотически эффективным.

**Литература**

1. *Revesz P.* How to apply the method of stochastic approximation in the nonparametric estimation of a regression function. Math. Oper.Statist.ser.Statistics, 1977, vol 8, Iss.1,119-126.
2. *Надарая Э.А.* Об оценке регрессии. Теория вер.и ее прим.,1964, No9,157-159.
3. *Samanta M.,Mugisha R.* Nonparametric estimation of a multivariate multiple regression function. Statistische Hefte,1984,25,297-317.
4. *Chow J.S.,Robbins H.* On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean. Ann. Math.Statist, 1965, vol 36, Iss.2, 457-462.
5. *Ching-Kang I., Tze Leung L.* Fixed-Size Confidence Regions in High-Dimensional Sparse Linear Regression Models, Sequential Analysis, 2015, vol 34, Iss.3, 324-335.


# Существование локальных времен самопересечения с весом для проекций процессов Маркова


**Руденко Алексей Владимирович**

*Институт математики НАН Украины*

arooden@gmail.com


Локальным временем самопересечения с весом $\psi$ для проекции случайного процесса $\{X(t), t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^d$ называется предел при $\varepsilon \to 0+$ следующего семейства случайных величин

$$\gamma_\varepsilon(\psi, A) = \int\limits_A \psi(X(t_1), \ldots, X(t_n)) q_{m,\varepsilon}(F(X(t_1), \ldots, X(t_n))) dt_1 \ldots dt_n$$

где $n \geqslant 2$, $A \subset [0,1]^n$ – борелевское множество, $\psi : \mathbb{R}^{nd} \to \mathbb{R}$ – неотрицательная непрерывная ограниченная функция, функция $F : \mathbb{R}^{nd} \to \mathbb{R}^m$ задана равенством

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1) - f(x_2), \ldots, f(x_{n-1}) - f(x_n)),$$

причем $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, $k \leqslant d$ – непрерывно дифференциируемая функция, матрица производных которой имеет всюду максимальный ранг, $m = kd$, и кроме того

$$q_{m,\varepsilon}(u) = \varepsilon^{-m} \phi_m\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)$$

где $\phi_m$ – неотрицательная борелевская финитная функция на $\mathbb{R}^m$, которая удовлетворяет условию $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \phi_m(u) du = 1$.

Если положить вес $\psi$ равным единице, а функцию $f$ – тождественной, то получится известное определение локального времени самопересечения (см. [1]).

В докладе будут представлены достаточные условия существования указанного предела в пространстве $L_2$ интегрируемых в квадрате случайных величин для некоторых классов процессов Маркова, в частности для броуновского движения на группе Карно (соответствующие результаты опубликованы в [2]).

**Литература**

1. *J. Rosen.* A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space, Communications in Mathematical Physics, 88 no. 3, 1983, 327–338.

2. *A. Rudenko.* Intersection local times in L2 for Markov processes, Theory of Stoch. Proc., 24(40) no. 1, 2019, 64–9


# О числовых характеристиках, использующихся в центральной предельной теореме.


**Сирожитдинов А.А., Фармонов.А.Ш., Обидов Ш.М.**

*Институт математики им. В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан*
A.SIROJITDINOV@MATHINST.UZ


Пусть в некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$ определена последовательность серий независимых случайных величин (с.в)

$$X_{n1},\, ...,\, X_{nn}, \;\; n = 1, 2, ... \tag{1}$$

и $S_n = X_{n1} + ... + X_{nn}$
Положим

$$F_{nj} = P\left(X_{nj} < x\right), \quad j = 1 \ldots n \quad F_n\left(x\right) = P\left(S_n < x\right)$$

Далее положим $(\alpha > 0\,,\; \varepsilon > 0)$

$$D_n\left(\alpha, \varepsilon\right) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| \le \varepsilon} |x|^{2+\alpha}\, dF_{nj}\left(x\right) + \sum_{j=1}^{n} \int_{x > \varepsilon} x^2 dF_{nj}\left(x\right) = M_n\left(\alpha, \varepsilon\right) + L_n\left(\varepsilon\right)$$

Будем говорить, что выполнено условия $(D)$, если

$$D_n \to 0, \quad n \to \infty \;\; (D)$$

Пусть по прежнему набор с.в. $\{X_{nj} : 1 \le j \le n\}$ $(n = 1, 2, ...)$ представляет собой последовательность серий независимых с.в.
**Определение 1.** ([2] гл. 4, §20, стр 101) Будем говорить, что последовательность серий независимых с.в. $\{X_{nj} : 1 \le j \le n\}$ удовлетворяет условию равномерной бесконечной малости, если при любом $\varepsilon > 0$

$$\max_{1 \le j \le n} P\left(|X_{nj}| > \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty \quad (U)$$

**Определение 2.**([1] гл. 8, §20, стр 158) Будем говорить, что последовательность серий независимых с.в. $\{X_{nj} : 1 \le j \le n\}$ удовлетворяет условию бесконечной малости в усиленном варианте, если при любом $\varepsilon > 0$

$$P\left(\max_{1 \le j \le n} X_{nj} > \varepsilon\right) \to 0\,, \quad n \to \infty \quad (S)$$

В теории суммирования независимых с.в. очень часто используется следующее условие бесконечной малости дисперсий $\sigma_{nj}^2 = EX_{nj}^2$, введенное Феллером [3] (гл.8, §4, .302),

$$\max_{1\leq j\leq n}\sigma_{nj}^2\to 0,\qquad n\to\infty\quad (F)$$

Приведенные ниже теоремы 1 и 2 представляют собой аналог широко известной теоремы Линдеберга-Феллера о справедливости (CLT) для последовательности серий независимых с.в. и они основаны на числовую характеристику $D_n$ (Ибрагимова-Осипова).

**Теорема 1**. (CLT). Если последовательности независимых случайных величин

$$\{X_{n1},\,...,X_{nn}\}\,,\quad n=1,2,...$$

удовлетворяют условию $(D)$, то

$$\sup_x|P\left(S_n<x\right)-\Phi\left(x\right)|\to 0,\qquad n\to\infty$$

**Теорема 2**. Пусть последовательности независимых случайных величин

$$\{X_{n1},\,...,X_{nn}\}\,,\quad n=1,2,...$$

удовлетворяют условию $(F)$ бесконечной малости дисперсий $\sigma_{nj}^2$. Тогда условие $(D)$ необходимо и достаточно для справедливости CLT.

### Adabiyotlar


1. *Боровков А.А.* Теория вероятностой. Издательство Эдиториал УРСС Москва1999 471 стр.

2. *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Издательство технико-теоритической литература. Москва 1949. 264 стр.

3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения том 2. Москва МИР 1984. 751стр.


# Однородное случайное поле на плоскости


**С.И. Халикулов**

*Самаркандский Государственний Университет*[1]

sxoliqulov1970@gmail.com


Применим полученые результаты для аппроксимации однородних случайных полей случайными полями с ограниченным спектром на множествах вида $D$.

Пусть $\{\tilde{C}_r\}$ и $\{C_r\}$– произвольные последовательности такие, что $\tilde{C}_r\to+\infty$ и $C_r>\tilde{C}_r$, а $\{m_r\}$– некоторая последовательность натуралных случайное поле

$$\xi_r,m_r(t,s)=$$

$$\sum_{k=-m_r}^{m_r}\sum_{k=-m_r}^{m_r}\xi\Big(\frac{\pi}{\omega}(k+n),\frac{\pi}{\omega}(k-n)\Big)\cdot\frac{\sin\Big[\omega\Big(\dfrac{t+s}{2}-\dfrac{k}{\omega}\pi\Big)\Big]}{\omega\Big(\dfrac{t+s}{2}-\dfrac{k}{\omega}\pi\Big)}\cdot\frac{\sin\Big[\omega\Big(\dfrac{k-s}{2}-\dfrac{n}{\omega}\pi\Big)\Big]}{\omega\Big(\dfrac{k-s}{2}-\dfrac{n}{\omega}\pi\Big)}.$$

**Теорема.** *Пусть* $\xi(t,s),(t,s)\in R^2-$ *однородное случайное поле на плоскости и выполняется условия*

*a)* $\dfrac{C_r}{m_r}\to 0$ *при* $r\to\infty$,

*b)* $\dfrac{\tilde{C}_r}{C_r}<\alpha<1$ *начиная с некоторого* $r_0$.

*Тогда* $M\Big|\xi(t,s)-\xi_r,m_r(t,s)\Big|^2\to 0$ *при* $r\to\infty$.

**Доказателство.** Пуст $\eta_r(t,s),(t,s)\in R^2-$ однородное поле спектральной мерой, сосредоточенной на $\tilde{D}_r=(x,y)\in R^2:|x|+|y|<\tilde{C}_r$. Тогда из предедущых теоремы следует:

$$M\Big|\xi(t,s)-\xi_r,m_r(t,s)\Big|^2\le M\Big|\xi(t,s)-\eta_r(t,s)\Big|^2+M\Big|\eta_r(t,s)-\xi_r,m_r(t,s)\Big|^2=$$

$$F(\overline{\tilde{D}_r})+M\Big|\eta_r(t,s)-\xi_r,m_r(t,s)\Big|^2\le F(\overline{\tilde{D}_r})+F(\tilde{D}_r)\Big\{\frac{16}{m_r^2\pi^2}\Big(\frac{C_r\|t+s\|}{2\pi}+1\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(\frac{C_r\|t-s\|}{2\pi}+1\Big)\frac{1}{1-\frac{\tilde{C}_r^2}{C_r}}++\Big[1+\frac{4}{m_r\pi}\Big(\frac{C_r\|t-s\|}{2\pi}+1\Big)\frac{1}{1-\frac{\tilde{C}_r}{C_r}}\Big]\cdot$$

$$\frac{4}{m_r\pi}\Big(\frac{C_r\|t-s\|}{2\pi}+1\Big)\frac{1}{1-\frac{\tilde{C}_r}{C_r}}+$$

$$+\Big[1+\frac{4}{m_r\pi}\Big(\frac{C_r\|t+s\|}{2\pi}+1\Big)\frac{1}{1-\frac{\tilde{C}_r}{C_r}}\Big]\cdot\frac{4}{m_r\pi}\Big(\frac{C_r\|t-s\|}{2\pi}+1\Big)\frac{1}{1-\frac{\tilde{C}_r}{C_r}}\Big\}.$$

Из условий теоремы вытекает, что пробая часть стремится к нулю при $r\to\infty$. Теорема доказана.

## Литература


1. *Оленко А.Я, Халикулов С.И* Теорема котельникова Шеннона для одного класса случайных полей Деп. в ГНТБ Украина 01.03.1994. № 424. Ук-94. 13 стр.

2. *Халикулов С.И.* Об аппроксимации однородных случайных полей случайными полями с ограниченным спектром Деп в Укр НИИНТИ 27.10.92. № 1758-Ук 92 10 стр.

3. *Ядренко М.И.* Спектралная теория случайных полей. -Киев: Виша школа, 1980. -208 с.

4. *Ядренко М.Й.* Про деякі задачі лінійного прогнозу для однорідних випадкових полів Вісник київского університету, сер. астроном., матем. та механ. -1958. -1, вип. 2. - С. 113-123.

5. *Pogany T.,* Perunicic P. On the spectral representation of the sampling cardinal series. Stochastica. -1952. -XIII, N 1. -P. 89-100.

# Центральная предельная теорема для функционалов выпуклых оболочек, порожденных пуассоновским точечным процессом в конусе

**Хамдамов И.М.**

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*
khamdamov.isakjan@gmail.com

Данная работа посвящена изучению свойств выпуклых оболочек, порожденных независимыми наблюдениями над случайным вектором, имеющим Пуассоновское распределение в конусе $K$ на плоскости. Работы подобного рода принято относить к области вероятностей геометрии.

Выпуклые оболочки представляют собой очень сложный с аналитической точки зрения объект. Поэтому изучение свойств даже простейших функционалов от выпуклых оболочек таких, как скажем, число вершин или площадь, является совсем не простой задачей. Этим объясняется тот факт, что до появления работы P.Groeneboom [3], основной результат был достигнут в изучении свойств средних значений подобных функционалов. По-видимому, наиболее полная библиография по данной проблематике приведена в работе [1]. Следует отметить, что в этом списке имеются работы, в которых рассмотрен существенно более широкий класс носителей исходного равномерного распределения. Заметим также, что переход к произвольной размерности наблюдаемого случайного вектора расширяет класс функционалов, используемых для описания выпуклых оболочек. Понятно, что это приводит к дальнейшему усложнению задач.

Впервые, P.Groeneboom в [3] удалось получить предельное распределение для числа вершин выпуклой оболочки в случае, когда носитель исходного равномерного распределения представляет собой либо выпуклый многоугольник, либо эллипс. Основное достижение P.Groeneboom состоит в том, что он использовал известное свойство однородных биномиальных точечных процессов, состоящее в том, что вблизи границы носителя он почти неотличим от однородного Пуассоновского точечного процесса.

Используемый нами подход при изучении выпуклых оболочек, порождаемых в в конуса $K$, Пуассоновским точечным процессом, сочетает техники [2] и [3] и основан на элементарных свойствах Пуассоновкого точечного процесса.

Пусть $K$ – конус, образованный двумя лучами $l_i = (z : z = te_i, t > 0),\ i = 1, 2$, где $e_1$ и $e_2$ единичные вектор. Обозначим $\alpha$ угол между $e_1$ и $e_2$. И положим

$$e_0 = \frac{e_1 + e_2}{2}. \tag{1}$$

Ясно, что $(z, e_0) > 0$ для всех $z \in K$.

Пусть далее $\Pi(\cdot)$ – о.п.т.п. с интенсивностью $\lambda(\cdot)$. Обозначим $\Pi(K)$ сужение на $K$. Рассмотрим выпуклую оболочку $C$, порожденную $\Pi(K)$, и множество ее вершин $Z$.

Обозначим $z_0 \in Z$ ту из вершин, для которой $(e_0, z - z_0) \geq 0$ для всех $z \in Z$.

Очевидно, что $z_0$ определена однозначно почти наверное. При этом прямая

$$(e_0, z - z_0) = 0 \tag{2}$$

является опорной для $C$.

Пронумеруем теперь вершины $C$, обходя границу против часовой стрелки. Поскольку $z_0$ уже определена, то каждая из вершин, тем самым, получает свой номер $j,\ -\infty < j < +\infty$. Выберем на луче $l_1$ последовательность точек $x_j,\ j \geq 1$, лежащих на пересечении $l_1$ и прямых, проходящих соответственно через вершины $z_{j-1}$ и $z_j$. Аналогичным образом точки $y_j,\ j \leq -1$, получаются в результате пересечения $l_2$ и прямых, проходящих соответственно через $z_j,\ z_{j+1}$.

Пусть $\delta_j,\ j \neq 0$, множество внутренних точек треугольника с вершинами $z_{j-1}, (x_{j-1}, 0), (x_j, 0)$, если $j \geq 1$, и - вершинами $z_{j+1}, (0, y_{j+1}), (0, y_j)$, если $j \leq -1$. Обозначим $(x_0, 0),\ 0, y_0$ вершины треугольника, множество внутренних точек которого мы обозначили $\delta_0$. Напомним, что третьей вершиной этого треугольника служит точка $(0, 0)$.

Легко видеть, что $\bigcup_j \delta_j$ содержится в полосе $K - C$ и отличается от нее на множество меры нуль. Положим

$$\xi_j = \lambda(\delta_j) \tag{3}$$

Определим граничные функционалы

$$\theta_T = \inf\left\{j : x_j \geq T\right\}, \tag{4}$$

где $T > 0$.

Положим

$$\alpha(T) = \frac{2\log T}{3},\ \beta^2(T) = \frac{10\log T}{27}/$$

Тогда справедлива следующая

**Теорема 1.** В наших условиях при $T \to \infty$

$$E\theta_T = \alpha(T) + o\left(\beta(T)\right),\ \text{а}\ \mathrm{Var}\theta_T = \beta^2(T)(1 + o(1)).$$

**Теорема 2.** Если $\min(T_1, T_2) \to \infty$, причем $c_1 T_1 \leq T_2 \leq c_2 T_2$ для некоторых $c_1 > 0, c_2 > 0$, то

$$\theta_{T_2} - \theta_{T_1} = o_p\left(\beta(T)\right).$$

Далее, если положим

$$S_T = \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\theta_T}, & \text{если } \theta_T \geq 1, \\ 0, & \text{если } \ \theta_T = 0, \end{cases}, \tag{5}$$

то справедлива

**Теорема 3.** Пусть $\min(T_1, T_2) \to \infty$, причем $c_1 T_1 \leq T_2 \leq c_2 T_2$ для некоторых $c_1 > 0, c_2 > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_{T_2} - S_{T_1}}{\beta(T_1)}\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

Доказательство теоремы 1-3 основывается на известной теореме 2.2.3 Круглова и Королева [5]. Приведем этот результат

**Теорема 4. (Круглов, Королев).** Пусть $S^n_{m_n} = \sum_{j=1}^{m_n} \xi_{nj}$, где $\nu_n, \xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nm_n}$ серия независимых случайных величин с условиям, что $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nm_n}$ – одинаково распределенные, а $\nu_n$ – целочисленная случайная величина такие, что $\lim_{n\to\infty} P(\nu_n > N) = 1$ для любого $N > 0$. Для того, чтобы

$$P\left(S^n_{\nu_n} < x\right) \Rightarrow \Phi_{(a,\sigma)}(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность натуральных чисел такая, что

$$P\left(S_{k_n}^n < x\right) \Rightarrow \Phi_{(a,\sigma)}(x),\ P\left(\nu_n < k_n x\right) \Rightarrow H(x),$$

где $H(x)$ – функция Хэвисайда.

### Литература


1. *Buchta C.* Exact formulae for variances of functionals of convex hulls. Advances in Applied Probability. V.45, Iss.4,2013, 917–924.

2. *FormanovSh.K., Khamdamov I.M.* On joint probability distribution of the number of vertices and area of the convex hulls generated by a Poisson point process, Statistics and Probability Letters, 169, (2021), 1-7, 108966.

3. *Groeneboom P.* Limit theorems for convex hulls. Probab. Theory Related Fields. 79,1988, 327–368.

4. *Khamdamov I.M.* On Limit Theorem for the Number of Vertices of the Convex Hulls in a Unit Disk. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 2020, 13(3),2020, 275–284.

5. *Круглов В.М., Королев В.Ю.* Предельные теоремы для случайных сумм. Издательство Московского Университета, 1990, 269С.


# Мониторинг потоков стохастических данных с использованием последовательных статистических тестов на примере эпидемиологического процесса COVID-19 в Республике Беларусь


**Харин А.Ю., Капустин М.Д., Прохорчик Н.А., Ковалева М.А., Мержва Н.О.**

*Кафедра теории вероятностей и математической статистики, Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

KharinAY@bsu.by, maxkapustin999@gmail.com, prohorchik-37@tut.by, mariannah47@gmail.com, mikita.miarzhva@gmail.com


## Введение

В настоящее время объемы регистрируемых статистических записей растут большими темпами, и в результате человек сталкивается с необходимостью мониторинга значительного количества потоков стохастических данных, что подразумевает использование для этого компьютеров и построение статистических процедур, позволяющих выбирать правильные решения с малой долей ошибок при этом. Один из подходов математической статистики, который при этом может эффективно применяться – последовательный анализ Вальда [1]. Одной из первых задач, которая была решена с использованием этого подхода для некоторых моделей потоков данных, являлась задача о “разладке” [2].

Поскольку статистический последовательный анализ позволяет в среднем минимизировать случайное число необходимых наблюдений для принятия решений с заданной точностью (обеспечиваются заданные малые уровни вероятностей ошибочных решений), он активно используется для мониторинга потоков данных в медицине, финансах, контроле качества выпускаемой продукции и для других приложений [3]. Проблемы анализа эпидемиологических процессов [4], актуализировавшиеся в 2020 году в связи с глобальным распространением коронавирусной инфекции COVID-19, послужили причиной разработки в Белорусском государственном университете компьютерных процедур на языке R, позволивших строить последовательные статитсические прогнозы достижимости некоторого множества значений стохастическим потоком на основе трендовой модели к заданному моменту времени. Кроме того, с использованием простейшей модели независимых одинаково распределенных наблюдений для коротких временных промежутков соответствующая процедура позволила отслеживать изменения параметров наблюдаемого потока стохастических данных. Поскольку реальные статистические данные часто не в полной мере следуют гипотетической модели [5], в процедурах реализованы робастные последовательные статистические тесты [6,7].

**Последовательное прогнозирование достижимости потоком множества значений**

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ наблюдается поток стохастических данных $x_1, x_2, \ldots$, принимающих значения из $\mathbf{R}$, в соответствии с линейной трендовой моделью следующего вида:

$$x_t = a + \theta \cdot t + \xi_t, \ t \in \mathbf{N},$$

где $a \in \mathbf{R}$ – заданное стартовое значение; $\theta \in \mathbf{R}$ – параметр, истинное значение которого не известно; $\xi_t$, $t \in \mathbf{N}$, — независимые в совокупности, одинаково распределенные случайные величины,

$$\xi_t \sim \mathcal{N}_1(0, \sigma^2), \ t \in \mathbf{N},$$

$\sigma^2$ – заданное значение дисперсии случайных ошибок наблюдения.

В $\mathbf{R}$ задано некоторое представляющее интерес множество значений $D = [d_-, d_+]$, $d_-, d_+ \in \mathbf{R}$, $d_- \leq d_+$ (в случае равенства границ множество – одноэлементное). При заданных допустимых значениях вероятностей ошибок $\alpha$ и $\beta$ I и II рода соответственно требуется наискорейшим в среднем образом по мере поступления наблюдений спрогнозировать, будет ли множество $D$ достигнуто наблюдаемым потоком к моменту $T \in \mathbf{N}$.

Для использования последовательных статистических тестов переформулируем задачу в виде задачи проверки двух простых гипотез: $\mathcal{H}_0$: $\theta = \theta_0$ против $\mathcal{H}_1$: $\theta = \theta_1$; $\theta_{0,1} = \frac{\tilde{\theta}_{0,1} - a}{T}$. При построении статистики отношения правдоподобия в простейшем случае можно считать, что $p(x_t; \theta_i) = n_1(x_t; a + \theta_i \cdot t, \sigma^2)$.

Разработанная компьютерная процедура применялась для решения задачи прогнозирования развития эпидемиологического процесса COVID-19 в Республике Беларусь. На рисунке 1 представлена ситуация мониторинга данных с 1 июля 2020 г., когда наблюдалось “плато” с низким уровнем ежедневных заражений, а вопрос состоял в том, будет ли достигнут уровень заболеваемости [575,625] человек в сутки к концу октября, $\alpha = \beta = 0.05$. По результатам анализа решение в пользу положительного ответа на поставленный вопрос сделано после 83 наблюдения, то есть в середине сентября.

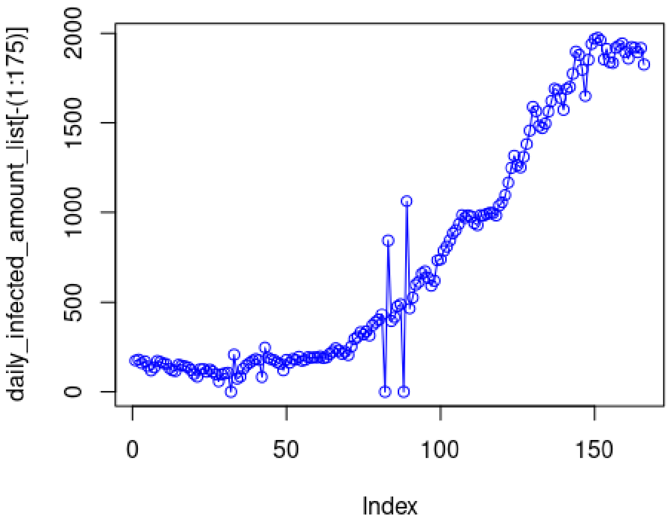



Рисунок 1 – Принятие решения в пользу истинной $\mathcal{H}_1$
(достижимость уровня прироста в 600 ежедневных случаев) после 83-го наблюдения

**Мониторинг изменений параметров потока на коротких промежутках**

Для мониторинга изменений параметров наблюдаемого потока в простейшем случае будем считать, что поток стохастических данных на коротких временных промежутках представляет собой заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ независимые случайные величины $x_1, x_2, \ldots$, принимающие значения из $\mathbf{R}$, распределение вероятностей которых зависит от параметра $\theta$:

$$P\{x_t\} = P\{x_t; \theta\},$$

значение параметра $\theta$ не известно и может меняться. В типовом, “нормальном” режиме развития наблюдаемой ситуации оно равно заданной величине $\theta_0$.

В силу определенных причин на некоторых интервалах значение $\theta$ может становиться равным $\theta_1 \geq \theta_0 + \Delta$, где $\Delta$ — некоторая заданная величина: повышается уровень заболеваемости (число заразившихся за сутки COVID-19 в стране), изменяется доля бракованных изделий и т.д.

Определим гипотезы:

$$\mathcal{H}_0: \ \theta = \theta_0, \quad \mathcal{H}_1: \ \theta = \theta_1.$$

Для мониторинга ситуации зададим последовательность последовательных тестов: по $x_1, \ldots, x_{T_1}$ (где $T_1$ — случайный момент остановки 1-го теста) принимается решение $\mathcal{H}^1 \in \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\}$, по $x_{T_1+1}, \ldots, x_{T_1+T_2}$ — решение $\mathcal{H}^2 \in \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\}$, и т.д. В результате формируются “зеленые” (при $\mathcal{H}_0$) и “красные” (при $\mathcal{H}_1$) участки траектории потока данных.

Результаты мониторинга потока заболеваемости COVID-19 в Беларуси с 1 июня по 1 ноября 2020 г. представлены на рисунке 2 (ежесуточный прирост) для случая нормального распределения вероятностей, $\theta$ — математическое ожидание; $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.05$, $\theta_0 = 200$, $\Delta = 200$, $\sigma^2 = 50$; $\theta_1 = 420$.

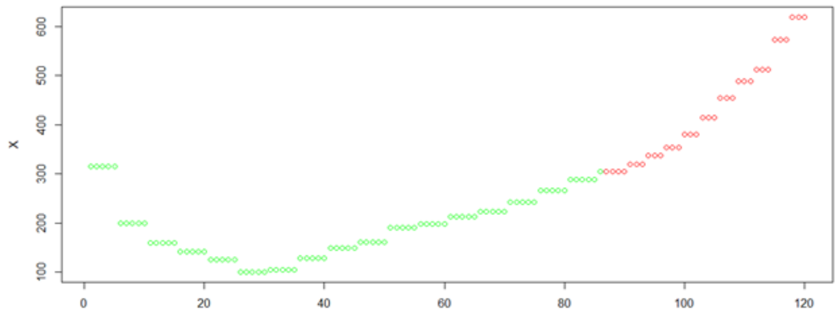



Рисунок 2 – Принятие решений по ежедневной заболеваемости

По рисунку 1 видно, что наблюдения содержат “выбросы”, поэтому применение робастных последовательных тестов [8,9] являлось необходимым для построения адекватных процедур статистического принятия решений в указанных задачах.

## Литература


1. *Вальд А.* Последовательный анализ, пер. с англ., Физматлит, 1960.
2. *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки, Наука, 1969.
3. *Mukhopadhyay N., Datta S., Chattopadhyay S.* Applied sequential methodologies: Real-world examples with data analysis, CRC Press, 2019.
4. *Форманов Ш.К., Старцев А.Н., Седов С.С.* Предельные теоремы для обобщенного размера эпидемии в одной марковской модели с иммунизацией, Дискрет. матем., т. 25 (4), 2013, с. 103-115.
5. *Galinskij V., Kharin A.* On minimax robustness of Bayesian statistical prediction, Probability Theory and Mathematical Statistics, TEV, 1999, p. 259-266.
6. *Kharin A., Kishylau D.* Robust sequential test for hypotheses about discrete distributions in the presence of “outliers”, Journal of Mathematical Sciences, vol. 205 (1), 2015, p. 68-73.
7. *Kharin A., Tu T.T.* Performance and robustness analysis of sequential hypotheses testing for time series with trend, Austrian Journal of Statistics, vol. 46 (3-4), 2017, p. 23-36.
8. *Харин А.Ю.* Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез, Вестник БГУ. Сер. 1. Физ., мат., инф., т. 1, 2002, с. 92-96.
9. *Kharin A.* Robustness evaluation in sequential testing of composite hypotheses, Austrian Journal of Statistics, vol. 37 (1), 2008, p. 51-60.

# Марковская модель надежности восстанавливаемой технической системы

**Хайдаров Ш.А., Элибоев Н.Р.**

*Кафедры «Высшая математика» Ташкентского химико-технологического института*

375-atmmk@mail.ru, nurali_e@mail.ru

### Марковская модель надежности

Пусть стохастическая система S контролируется через случайный период времени $\xi = min(\xi, \tau)$, где $\xi$ - случайное время до отказа, зависящее от наблюденного состояния в последний момент контроля; $\tau$ - плановый случайный период контроля, имеющий распределение Эрланга $k$-го порядка. В каждый момент контроля система может находиться в одном из состояний конечного множества $E = \{x_1, ..., x_N, \}$ Будем считать, что наилучшим состоянием, в котором вероятность отказа минимальна, является $x_1$ а наихудшим -состояние $x_N$. Состоянию $x_1$ соответствует новая система, а состоянию $x_n$ - максимально изношенная. Все остальные состояния - промежуточные, вероятность отказа в которых упорядочена по его возрастанию от минимального к максимальному. Нам будет удобно расширить множество состояний, снабдив каждый элемент $x_1 \in E$ вторым индексом $s$, $s = 1, ..., k+1$. При этом $s = 1, ..., k$ указывает на фазу эрланговского распределения [2] периода т, а $s = k+1$ указывает на состояние планового контроля. Обозначим $E'' = \{x_{is}\}, i = 1, ..., N, s = 1, ..., k+1$. Таким образом, полное множество состояний $E = E'' \bigcup \{x_{ij}\}$.

Пусть в плановый момент контроля система находится в состоянии $x_{jk+1}, j = 1, ..., N$, в котором применяется одно из возможных профилактических ремонтов. Положим, что множество допустимых профилактических ремонтов, которое назовем множеством управлений и обозначим $Y = \{y_1, ... y_m\}$, конечно. Элемент этого множества, управление $y_i$, определяет глубину обновления системы. Оно определяет интенсивности$\mu_{js}$ перехода системы из состояния $x_{jk+1}$ в состояние $x_{s1}$, $s = 1, \ldots, j$ Будем считать, что чем глубже управление обеспечивает обновление системы, тем больше интенсивность перехода в состояние с меньшим номером $s$. Однако будем учитывать, что чем глубже обновление системы, тем больше стоит это управление.

Естественно считать, что отказ системы возможен в любом состоянии $x_{js}$, $j = 1, ..., N, s = 1, ..., k$, причем интенсивность отказа $v_j$ не зависит от фазы $s$. Считаем формально, что отказ системы приводит к переходу ее в состояние $x_0$. В состоянии $x_0$ система восстанавливается в одно из состояний $x_{j1}$, с интенсивностью $\Phi_j, j = 1, ..., N$.

Обозначим интенсивность перехода между фазами через $\gamma$.

*Основная задача моделирования будет состоять в выборе оптимальной стратегии управления, т. е. в выборе вида профилактического ремонта для каждого состояния в каждый момент контроля.*

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний предложенной модели имеет следующий вид [4]:

$$\frac{d}{dt} P_{11}(t) = -(v_1 + \lambda_1 + \gamma) P_{11}(t) + \Phi P_0(t) + \sum_{i=1}^{N} \mu_{11} P_{ik}(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_{s1}(t) = -(v_s + \lambda_s + \gamma)P_{s1}(t) + \Phi_s P_0(t) +$$

$$+\sum_{i=s}^{N} \mu_{is} P_{ik+1}(t) + \lambda_{s-1} P_{s-11}(t), \ s = 2, ..., N-1,$$

$$\frac{d}{dt}P_{N1}(t) = -(v_N + \gamma)P_{N1}(t) + \Phi_N P_0(t) +$$

$$+\mu_{NN} P_{NK+1}(t) + \lambda_{N+1} P_{N-11}(t),$$

$$\frac{d}{dt}P_{1s}(t) = -(v_1 + \lambda_1 + \gamma)P_{1s}(t) + \gamma\Phi_{1s-t}, s = 2, ..., k,$$

$$\frac{d}{dt}P_{qs}(t) = -(v_q + \lambda_q + \gamma)P_{qs}(t) + \gamma\Phi_{qs-1} + v_{q-1}P_{q-1s}(t), \quad q = 2, ..., N-1, \quad s = 2, ..., k,$$

$$\frac{d}{dt}P_{Ns}(t) = -(v_q + \gamma)P_{Ns}(t) + \gamma\Phi_{Ns-1} + v_{N-1}P_{N-1s}(t), \ s = 2, ..., k,$$

$$\frac{d}{dt}P_{qk+1}(t) = \sum_{i=1}^{N} \mu_{qi} P_{qk+1}(t) + \gamma P_{qk}(t), \ q = 1, ..., N,$$

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\sum_{i=1}^{N} \Phi_i P_0(t) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} v_i \gamma P_{ij}(t),$$

$$\frac{d}{dt}P_0(t) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k+1} P_{ij}(t) = 0$$

Заметим, что одно из уравнений системы, кроме условия нормировки, может быть опущено при ее решении.

Пусть в начальный момент времени система находится в состоянии $x_{11}$. Тогда начальное распределение вероятностей имеет следующий вид:

$P_{11}(0) = 1, P_0(0) = 0, P_j(0) = 0$ для всех $i, j$, кроме $i = j = 1$.

Рассмотрим случай, когда существует стационарный режим функционирования системы [4]. При этом существуют пределы вероятностей состояний $P_{1j}(t), P_0(t)$ при $t \to \infty$ и, следовательно, в этом режиме все производные этих вероятностей равны 0. Тогда приведенная система дифференциальных уравнений перейдет в неоднородную систему линейных алгебраических уравнений. Такая система может быть решена, например, с помощью компьютерной программы MAPLE.

**Выводы**

Предложен новый подход к моделированию стареющих технических систем, вероятность возможного отказа которых возрастает со временем. Он состоит в том, что для описания эволюции процесса старения технической системы вводится последовательность состояний, которые она проходит по очереди. При этом такой показатель системы как интенсивность отказа монотонно возрастает. Показано, что при определенных условиях эволюция системы может быть описана марковским процессом и, следовательно, модель может быть основана на системе уравнений Колмогорова. Целью моделирования явилось нахождение такой стратегии профилактических обновлений системы, которая бы оптимизировала ее работоспособность и надежность.

Практическое значение полученных результатов состоит в том, что решение этой актуальной задачи легко может быть получено с помощью математических вычислительных программ, например MAPLE. Следует учесть, что в модели принят случайный период контроля. Последнее расширяет круг систем, которые адекватно могут быть описаны предложенной моделью.

### Литература


1. Вопросы математической теории надежности / Под ред. Радио и связь, 1983. 376 с.

2. *Бекмуратов Т.Ф. Расулова С.С. Икрамов С.А. Хайдаров Ш.А.* Анализ и оценка надежности восстанавливаемых вычислительных комплексов на базе мини-ЭВМ // Известия АН УзССР.-СТР. Вып.3. 1990, С.3-9.

3. *Боровков А.А* Теория вероятностей. М.: Наука, 1976. 352 с.

4. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1971. 288 с.

5. *Горелик А.Л., Скрипкин В.А.* Методы распознавания. М.: Высшая школа, 1984. 208 с.

6. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

6. *Дьяконов В. П.* Математическая система MAPLE V R3/R4/R5, М.: СОЛОН, 1998. 400 с.


# Неравенства в задаче с двумя границами для случайных процессов


**В.Р. Ходжибаев[1], В.И. Лотов[2]**

[1] *Namangan Engineering-construction Institute, Namangan, Uzbekistan, Institute of Mathematics, Namangan Regional Department, Uzbekistan Academy of Sciences,*

[2] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

vkhodjibayev@mail.ru, lotov@math.nsc.ru


1. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — однородный случайный процесс с независимыми приращениями, выборочные функции которого непрерывны справа. В этом случае

$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi(t)\} = \exp\{t\psi(\lambda)\}, \qquad \operatorname{Re}\lambda = 0,$$

$$\psi(\lambda) = \gamma\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1 - \frac{\lambda x}{1+x^2}\right) dS(x), \tag{1}$$

где $\gamma$ и $\sigma > 0$ — вещественные числа, функция $S(x)$ не убывает на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$,

$$\int\limits_{|x|\leq 1} x^2 dS(x) < \infty, \qquad S(-\infty) = S(\infty) = 0.$$

Для произвольных $a > 0$, $b > 0$ определим случайную величину

$$T = T(a,b) = \inf\{t \geq 0 : \ \xi(t) \notin (-a,b)\}.$$

Случайная величина $T$ есть момент первого выхода случайного процесса $\xi(t)$ из интервала $(-a,b)$. Пусть

$$\beta(a,b) = \mathbf{P}(\xi(T) \geq b).$$

Эту величину будем называть вероятностью разорения по аналогии с вероятностной моделью игры двух игроков с дискретным временем. К изучению вероятности разорения для процессов с дискретным временем приводят задачи последовательных методов статистики, теории систем обслуживания и ряд других. Несомненный интерес представляют также задачи, связанные с достижением границы полосы траекториями случайных процессов с непрерывным временем.

В работе получены двухсторонние оценки для $\beta(a,b)$ при различных ограничениях на распределение случайного процесса $\xi(t)$. Тем самым она является распространением некоторых результатов [1-2] на процессы с непрерывным временем.

Вычисление вероятности разорения в точном виде доступно только в некоторых частных ситуациях как в дискретном, так и непрерывном времени. Поэтому основное внимание в изучении этих величин стало уделяться асимптотическим подходам. Ясно, что любые асимптотические результаты неизбежно содержат остаточные члены. Обычно указывается порядок убывания этих остаточных членов, однако оценка их реальной величины требует дополнительных рассмотрений. Поэтому нахождение двухсторонних неравенств для вероятности разорения является естественным дополнением к имеющимся асимптотическим результатам.

2. Обозначим $\varphi(\lambda) \equiv \exp\{\psi(\lambda)\} = \mathbf{E}e^{\lambda\xi(1)}$. Предположим, что для $\xi(1)$ выполняется правостороннее условие Краме́ра:

$$\varphi(\lambda_+) < \infty \qquad \text{для некоторого} \quad \lambda_+ > 0, \qquad \varphi(\lambda_+) > 1. \tag{2}$$

Введем величину $r$ соотношением

$$r^{-1} = \sup_{0<x<M} \mathbf{E}\big(e^{\mu(\xi(1)-x)} | \xi(1) > x\big), \tag{3}$$

где $\mu$ — единственное положительное решение уравнения $\varphi(\lambda) = 1$,

$$M = \inf\{x : \ \mathbf{P}(\xi(1) \leq x) = 1\}.$$

Полагаем $M = \infty$, если $\mathbf{P}(\xi(1) < x) < 1$ при всех $x$. Заметим, что если у процесса $\xi(t)$ имеется диффузионная компонента ($\sigma^2 > 0$) или скачки процесса неограничены, то $M = \infty$.

Нетрудно видеть из определения, что $r \leq 1$.

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathbf{E}\xi(1) < 0$ *и выполнено условие* (2). *Тогда*

$$\beta(a,b) \geq \frac{re^{-\mu b} - e^{-\mu(a+b)}}{1 - re^{-\mu(a+b)}}.$$

*Если дополнительно* $\mathbf{E}|\xi(1)|^3 < \infty$, *то*

$$\beta(a,b) \leq \frac{e^{-\mu b} - re^{-\mu(a+b+d)}}{1 - re^{-\mu(a+b+d)}},$$

*где обозначено*

$$d = \frac{3\,a_3}{a_2}, \qquad a_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^k dS(x),$$

*число* $\mu > 0$ *определяется равенством* $\varphi(\mu) = 1$.

В частном случае, когда $\xi(t)$ — винеровский процесс с отрицательным сносом, имеем

$$\psi(\lambda) = \gamma\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}, \quad \gamma < 0, \qquad \mu = -\frac{2\gamma}{\sigma^2},$$

и

$$\beta(a,b) = \frac{e^{-\mu b} - e^{-\mu(a+b)}}{1 - e^{-\mu(a+b)}}.$$

3. Пусть $\mathbf{E}\xi(1) < 0$ и распределение случайной величины $\xi(1)$ имеет тяжелый правый хвост, то есть

$$\mathbf{E}e^{\lambda\xi(1)} = \infty \qquad \text{при всех} \ \ \lambda > 0, \tag{4}$$

и, следовательно, не выполнено правостороннее условие Кра́мера (2).

Обозначим $s = a + b$ и рассмотрим случайный процесс $\xi_1(t)$, который получается простой заменой скачков процесса $\xi(t)$, превышающих по величине $s$, на скачки размера $s$. Спектральная функция процесса $\xi_1(t)$ в представлении (1) будет равна

$$S_1(x) = \begin{cases} S(x), & \text{если} \quad x \le s, \\ S(s), & \text{если} \quad x > s. \end{cases}$$

Ясно, что для $\xi_1(t)$ выполнено правостороннее условие Кра́мера (2), так как $\varphi_1(\lambda) \equiv \mathbf{E}e^{\lambda\xi_1(1)} < \infty$ при любом $\lambda > 0$, и $\varphi_1(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Кроме того отметим, что $\mathbf{E}\xi_1(1) \le \mathbf{E}\xi(1) < 0$.

Обозначим через $\beta_1(a,b)$ вероятность разорения, вычисленную по случайному процессу $\xi_1(t)$.

**Лемма.** *Имеет место равенство* $\beta(a,b) = \beta_1(a,b)$.

В связи с тем, что для $\xi_1(t)$ выполняется правостороннее условие Кра́мера, для получения оценок вероятностей $\beta_1(a,b)$ мы вновь можем пользоваться предыдущими рассмотрениями. Участвующие в них величины $\mu$ и $r$ определяются теперь по распределению случайной величины $\xi_1(1)$ и зависят от $s$, их будем обозначать через $\mu(s)$ и $r(s)$.

Получаем следующие результаты.

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathbf{E}\xi(1) < 0$, $\mathbf{P}(\xi(1) > 0) > 0$, *и пусть* $\xi(1)$ *удовлетворяет условию* (4). *Положим* $s = a + b$, *пусть* $\mu(s)$ — *положительный корень уравнения* $\mathbf{E}e^{\mu\xi_1(1)} = 1$, *и пусть величина* $r(s)$ *определяется по распределению случайной величины* $\xi_1(1)$ *в соответствии с* (3). *Тогда*

$$\beta(a,b) = \beta_1(a,b) \ge \frac{r(s)e^{-\mu(s)b} - e^{-\mu(s)s}}{1 - r(s)e^{-\mu(s)s}}.$$

Оценка сверху обеспечивается следующей теоремой.

**Теорема 3.** *Пусть дополнительно к условиям теоремы 2 выполнено* $\mathbf{E}|\xi^3(1)| < \infty$. *Обозначим*

$$a_k(s) = \int\limits_{-\infty}^{s} |x|^k dS_1(x), \qquad k = 2, 3, \qquad d(s) = \frac{3\,a_3(s)}{a_2(s)}.$$

*Тогда*

$$\beta(a,b) = \beta_1(a,b) \le \frac{e^{-\mu(s)b} - r(s)e^{-\mu(s)(s+d(s))}}{1 - r(s)e^{-\mu(s)(s+d(s))}}.$$

Для получения оценок в теоремах 1–3 на первом этапе использовались двусторонние оценки для $\beta(a,b)$ в терминах функции

$$Q(x) = \mathbf{P}(\sup_{t\ge 0} \xi(t) \ge x)$$

с последующим применением известных неравенств для $Q(x)$ для процессов с дискретным временем [1-2] и их аналогов для непрерывного времени.


Литература

1. *Lotov V.I.* On some inequalities in boundary crossing problems for random walks. Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 661–671.

2. *Lotov V.I.* Bounds for the probability to leave the interval. Statistics and Probability Letters, **145** (2019), 141–146.


# Асимптотические соотношения для критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона


**Хусанбаев Я.М. [1], Кудратов Х.Э. [2]**

*Институт Математики имени В.И.Романовского*[1]
*Национальный Университет Узбекистана*[2]
e-mail yakubank@mail.ru [1], e-mail qudratovh_83@mail.ru [2]


Пусть $\{\xi(k,j), k,j \in N\}$ -последовательность независимых одинаково распределенных с.в. с $p_i = P(\xi(k,j) = i), i = 0,1,...$ и производящей функцией $f(s) := Es^{\xi(k,j)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i,\ 0 \le s \le 1$. Рассмотрим следующий процесс $Z(k), k \ge 0$:

$$Z(0) = \eta,\ Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi(n,j),\ n \in N \tag{1}$$

где $\eta-$ с.в., принимающая неотрицательные целочисленные значения и независящая от $\{\xi(k,j), k,j \in N\}$ .

Процесс $\{Z(k), k \ge 0\}$ называют процессом Гальтона- Ватсона, начинающиеся со случайного число частиц $\eta$. Предположим, что $A = E\xi(1,1) < \infty$ и $a = E\eta < \infty$.

Процесс (1) называется докритическим, критическим и надкритическим, если $A < 1$ , $A = 1$ и $A > 1$ соответственно. Обозначим через $P(n)-$ вероятность того, что процесс $\{Z(k), k \ge 0\}$ вырождается к моменту времени $n$. В дальнейшем нам понадобится следующие обозначения:

$$Q(n) = 1 - P(n),\ h(s) := Es^{\eta},\ H_n(s) := Es^{Z(n)},$$

$$B = f''(1),\ C = f'''(1),\ D = f^{IV}(1),\ \sigma^2 = Var\xi(1,1),$$

$$b = h''(1),\ c = h'''(1),\ d = h^{IV}(1),\ \tau^2 = Var\eta.$$

Через $R(n)$ обозначим вероятность продолжение процесса начинающегося с одной частицы.

В дальнейшем запись $a_n \sim b_n$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ .

Процесс $\{Z(k), k \geq 0\}$ хорошо изучен в случае, когда $\eta \equiv 1$ . В частности, изучению асимптотики величины $Q(n)$ посвящена много работ. В частности, в 1938 году А.Н. Колмогоров [1] установил, что

$$Q(n) \sim \begin{cases} KA^n, \text{ если } \ A < 1,\ B < \infty, \\ \frac{2}{Bn}, \quad \text{если } \ A = 1,\ B > 0,\ C < \infty \\ 1 - \lambda, \text{ если } \ A > 1, \end{cases} \tag{2}$$

где $K$ положительное число, которое завысить только от $f(s)$ , $\lambda-$ положительный и отличный от единицы корень уравнения $f(s) = s$.

Б.А. Севастьянов [2] доказал аналог соотношения (2) для непрерывных ветвящихся процессов. В.М. Золотарев [3] установил следующий результат для непрерывных ветвящихся процессов:

$$Q(t) = \begin{cases} Ke^{\overline{a}t} - \frac{\overline{b}}{2\overline{a}}K^2e^{2\overline{a}t} + o(e^{2\overline{a}t}), \text{ если } \ \overline{a} < 0,\ \overline{b} < \infty, \\ \frac{2}{\overline{b}t} + \frac{4\overline{c}\log t}{3\overline{b}^3t^2} + o(\frac{\log t}{t^2}), \text{ если } \ \overline{a} = 0,\ \overline{b} > 0,\ \overline{c} < \infty, \end{cases} \tag{3}$$

$$Q_\lambda(t) = K_\lambda e^{\overline{a}_\lambda t} - \frac{\overline{b}_\lambda}{2\overline{a}_\lambda}K_\lambda^2e^{2\overline{a}_\lambda t} + o(e^{2\overline{a}_\lambda t}),\ \text{если } \ \overline{a} > 0,$$

где

$$Q_\lambda(t) = \lambda - P(t),\ \overline{a} = g'(1),\ \overline{b} = g''(1),\ \overline{c} = g'''(1),$$

$$\overline{a}_\lambda = g'(\lambda),\ \overline{b}_\lambda = g''(\lambda),\ \overline{c}_\lambda = g'''(\lambda),$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k,\ \gamma_k = \frac{dP_k(t)}{dt}.$$

Здесь $P_k(t)-$ вероятность того, что одна частице за время $t$ превратится на $k$ частиц.

Следующий член разложение (3) при условиях $\overline{a} = 0$ и $\overline{d} = g^{IV}(1) < \infty$ получен В.П.Чистяковым [4]. $\overline{a} < 0$ а при конечности факториального момента $k$ асимптотическое разложение было получено Р. Мухамедхановой [6]. Аналог (3) для дискретного случая получена А.В. Нагаевым [5].

В 1966 году С.В. Нагаев и Р. Мухамедханова [7] доказали что, при $n \to \infty$.

$$Q(n) \sim \begin{cases} K_1A^n + K_2A^{2n} + ... + K_mA^{mn} + o(A^{mn}),\ \text{если } \ A < 1,\ \alpha_m < \infty,\ m > 1, \\ \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right)\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),\ \text{если } \ A = 1,\ B > 0,\ C < \infty, \\ \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right)\frac{\ln n}{n^2} + \frac{4K}{B^2n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right),\ \text{если } \ A = 1,\ B > 0,\ D < \infty, \end{cases} \tag{4}$$

и если $A > 1$, то для любого фиксированного $m \in N$

$$Q_\lambda(n) \sim K_{1\lambda}A_\lambda^n + K_{2\lambda}A_\lambda^{2n} + ... + K_{m\lambda}A_\lambda^{mn} + o(A_\lambda^{mn})$$

где $Q_\lambda(n) = \lambda - P(n),\ \alpha_k^\lambda = f^{(k)}(\lambda),\ \alpha_1^\lambda = A_\lambda, K_{j\lambda}$ , $K_j,\ j = 1, ..., m$ положительные числа, которые зависят только от $f(s)$ , $\lambda-$ положительный и отличный от единицы корень уравнения $f(s) = s$.

В 1947 году А.М. Яглом [8] доказал,что если $A = 1,\ C < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} P((1 - f_n(0))Z(n) \le y/Z(n) > 0) = 1 - e^{-y} \qquad (5)$$

Позднее, этот результат был установлен Spitzer, Kesten, Ney [9] в случае когда $A = 1,\ B < \infty$. Аналогичные результаты получены для непрерывных ветвящихся процессов В.М. Золотаревым [3].

В данной работе обобщаются (2), (4) и (5) соотношения для критических процессов виде (1).

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если $A = 1,\ 0 < B < \infty,\ b < \infty$ , то при $n \to \infty$

$$Q(n) \sim \frac{2a}{Bn} + o(1)$$

**Замечание.** Если $a = a(n) \to \infty,\ n \to \infty$ и $a(n) = o(n)$, то из Теорема 1 следует что при $n \to \infty$ , $Q(n) \to 0$,

**Теорема 2.** Если $A = 1,\ B > 0,\ C < \infty,\ c < \infty$ , то при $n \to \infty$

$$Q(n) = \frac{2a}{Bn} + \left(\frac{4Ca}{3B^3} - \frac{2a}{B}\right)\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

**Теорема 3.** Если $A = 1,\ B > 0,\ D < \infty,\ d < \infty$ , то при $n \to \infty$

$$Q(n) = \frac{2a}{Bn} + \left(\frac{4Ca}{3B^3} - \frac{2a}{B}\right)\frac{\ln n}{n^2} + \frac{2(2Ka - b)}{B^2n^2} + \left(\frac{4b}{B^2} - \frac{8Cb}{3B^4}\right)\frac{\ln n}{n^3} + o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

где $K-$ положительные числа, которые зависят только от $f(s)$ и $h(s)$.

**Теорема 4.** Если $A = 1,\ 0 < B < \infty,\ 0 < a < \infty$ , то

$$\lim_{n\to\infty} P((1 - H_n(0))Z(n) \le y/Z(n) > 0) = 1 - e^{-\frac{y}{a}}$$

## Литература


1. *Колмогоров А.Н.* К решению одной биологической задачи "Изв. НИИ мат. и мех. Томского Университета 1938, т. 2, вып. 1.

2. *Севастьянов Б.А.* Теория ветвящихся случайных процессов, УМН. 1951, т. VI, вып. 6.

3. *Золотарев В.М.* Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов, "Теория вероятностей и ее применения 1957, т. 2, вып. 2.

4. *Чистяков В.П.* Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов, "Теория вероятностей и ее применения 1957, т. 2, вып. 3.

5. *Нагаев А.В.* Уточнение некоторых теорем теории ветвящихся случайных процессов// Труды Ташкентского госуниверситета, вып. 189, Ташкент, 1961.

6. *Мухамедханова Р.* Уточнение предельной теоремы из теории ветвящихся случайных процессов// Труды Института математики им В.И. Романовского, Ташкент, вып. 22, 1961.

7. *Нагаев С.В, Мухамедханова Р.* Некоторые предельной теоремы из теории ветвящихся случайных процессов// Пред. теор. и стат. выводы, Фан, 1966, Ташкент, с. 90-112.

8. *Яглом А. М.* Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов// ДАН СССР, 1947, 56, № 8, 795-798.

9. *F. Spitzer., H. Kesten., P. Ney,* The Galton-Watson process with mean one and finite variance// Teor. Verojatn. Primen 11, 579-611 (1966).

# Об одном обобшении ассоцированности

**Шарахметов Ш.**

*Институт Математики имена В.И.Романовского АНРУз, Ташкент. Узбекистан.*
e-mail sh_sharakhmetov@mail.ru

Различные классы ассоциированных случайных величин (с.в.) были введены в работах Изери, Прошана, Улкана, Ньюмена, Харриса, Лемана, Joag-Dev, Алама, А.В. Булинского, Саксена, Бертена, Делинга, Домбровского (см. лит. [1],[2]) мы здесь приведем определения некоторых из них.

**Определение 1 [3].** Конечный набор с.в. $\{X_j, 1 \leq j \leq n)\}$ называется ассоциированя $(A)$, если для произвольных по компонентно не убывающих функции $f$ и $g$ выполняется неравенство

$$cov(f(X_1, X_2, ..., X_n)\ g(X_1, X_2, ..., X_n)) \geq 0$$

**Определение 2 [4,5].** Конечный набор с.в. $\{X_j, 1 \leq j \leq n)\}$ называется положительно ассоциированным (PA), если для каждой пары непересекающихся подмножеств $A_1, A_2$ из $\{1, 2, ..., n\}$ и для произвольных по компонентно неубывающих функций $f$ и $g$ выполняется неравенство

$$cov(f(X_i, i \in A_1)\ g(X_j, j \in A_2)) \geq 0$$

**Определение 3 [6,7].** Конечный набор с.в. $\{X_j, 1 \leq j \leq n)\}$ называется отрицательно ассоциированным (NA), если для каждой пары непересекающихся подмножеств $A_1, A_2$ из $\{1, 2, ..., n\}$ и для произвольных по компонентно неубывающих функций $f$ и $g$ выполняется неравенство

$$cov(f(X_i, i \in A_1)\ g(X_j, j \in A_2)) \leq 0$$

Бесконечный набор с.в. $\{X_n, n \geq 1\}$ называется соответственно $A$, $PA$, $NA$, если каждая его конечная подгруппа является $A$, $PA$, $NA$.

**Определение 4 (8).** Последовательность интегрируемых с.в. $\{S_n, n \geq 1)\}$ называется демимартингалом, если для произвольных по компонентно неубывающих функций $f$ выполняется неравенство

$$E((S_{n+1} - S_n) f(S_1, ..., S_n)) \geq 0.$$

Работа посвящена обобщениям этих понятий зависимости с.в. в выше приведенных определениях требуется выполнение ковариационных неравенстви для всех по координатно неубывающих борелевских функций $f, g$. Естественно ослабление условия на $f$ и $g$ позволяет расширить класс с.в. и область применении полученных результатов. В работе в качестве такого обобщения предполагается замена $f$ и $g$ на полиномамы. Обозначим через $P_k(x_1, x_2, ...x_n)$, $k \in N$ многочлен у которого наибольшая степенны в ходящих в него не известных равно $k$, $k \in N$.

**Определение 5.** Конечный набор с.в. $\{X_j, 1 \leq j \leq n)\}$ назовем ассоциированым $k-$ го порядка $(A(k))$, $k \in N$ если для всех полиномов $P_e$, $P_m$, $e, m \in \{0, 1, ..., k\}$ с неотрицательными коэффициентами выполняются неравенства

$$cov(P_e(X_1, X_2, ..., X_n)\ P_m(X_1, X_2, ..., X_n)) \geq 0$$

**Определение 6.** Конечный набор с.в. $\{X_j, 1 \le j \le n)\}$ называется отрицательно ассоциированим $k-$ го порядка $N(A\{k\})$ если для каждой пары непересекающихся подмножеств $A_1, A_2$ из $\{1, 2, ..., n\}$ и для всех полиномов $P_e,\ P_m,\ e, m \in \{0, 1, ..., k\}$ с положительными коэффициентами выполняются неравенство

$$cov(P_e(X_i, i \in A_1)\ P_m(X_j, j \in A_2)) \le 0$$

Аналогично, определяется положительная ассоцированность $k-$ го порядка.

**Определение 7.** Последовательность интегрируемых с.в. $\{S_n,\ n \ge 1)\}$ называется демимартингалом $k-$ го порядка, если для всех полиномов $P_l,\ l \in \{0, 1, ..., k\}$ с положительными коэффициентами выполняются неравенств

$$E((S_{n+1} - S_n)P_l(S_1, ..., S_n)) \ge 0.$$

Очевидно, что ассоциированные с.в. (A, PA, NA и демимартингал) являются A(k), PA(k), NA(k) и демимартингалом $k-$ го порядка; обратное неверно. Например лакунарные тригонометрические системы. $A-$ независимые с.в., мультипликативные системы, сильно мультипликативные системы не удовлетворяют условиям ассоциированности, но являются ассоциированными первого, второго порядка. Далее приводим некоторое результаты: вероятностные и моментные неравенства для с.в. негативно ассоциированных второго порядка $NA(2)$.

В традиционных доказательствах существенно используется, то, что из ассоциированности с.в. $\{X_j, 1 \le j \le n)\}$ следует ассоциированность с.в. $f(X_j)$, а в нашем случае такое свойств отсутствует, Поэтому приходится развивать новую технику доказательство.

Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2$$

**Теорема 1.** Пусть с.в. $X_1, X_2, ..., X_n$ являются $NA(2)$ и $ES_n = 0,\ X_i \le b$. Тогда справедливо неравенство $P(S_n > x) \le \exp(\frac{x}{b} - (\frac{x}{b} - \frac{B_n^2}{b^2})\log(\frac{xb}{B_n^2} + 1))$.

**Теорема 2.** Для $NA(2)$ с.в. $X_1, X_2, ..., X_n$ справедливо неравенство

$$P(S_n > x) \le \sum_{i=1}^{n} P(X_i > b) + \exp(\frac{x}{b} - (\frac{x}{b} - \frac{B_n^2}{b^2})\log(\frac{xb}{B_n^2} + 1))$$

**Теорема 3.** Пусть с.в. $X_1, X_2, ..., X_n$ являются $NA(2)$ и $EX_i = 0,\ E \mid X_i \mid^t < \infty,\ t \ge 2,\ i = 1, 2, ..., n$. Тогда имеет место неравенство

$$E \mid S_n \mid^t \le c \max(\sum_{i=1}^{n} E \mid X_i \mid^t,\ B_n^i),$$

где c постоянная зависящая от $t$.

Эты результаты обобщают соответствующие результаты из ((8)-(17)).

## Литература.

1. *Булинский А.В., Шашкин А.П.* Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. Москва. Физ-мат.лит, 2008 г.

2. *Prakasa Rao B.L.S., Associated Sequences,* Demimartingales and Nonparametric Inference. Springer Basel AG 2012.

3. *Esary J., Proschan F.,* Walkup D. Association of random variables, with applications Ann. Math. Statist., 1967, 38, 5, pp. 1466-1474.

4. *Burton R., Dabrowski A. R.,* Dehling H. An invariance principle for weakly associated random vectors Stoch. Proc. Appl., 1986, 23, 2, pp. 301-306.

5. *Newman C. M.* Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables. In: Tong Y. L. (ed.), Inequalities in Statist. and Probab. Hayward, 1984, pp. 127-140.

6. *Alam K., Saxena K. M. L.* Positive dependence in multivariate distributions // Commun.Stat., Theory Methods, 1981, A10, pp. 1183-1196.

7. *Joag-Dev K., Proschan F.* Negative association of random variables, with applications Ann. Statist., 1983, 11, 1, pp. 286-295.

8. *Benett V.B.* Probablity inequalitis for sums of independent random variables, J. Amer. Statitst. Assoc., 57, 297 (1962), 33-45.

9. *Hoeffding W.* Probablity inequalitis for sums of independent random variables, J. Amer. Statitst. Assoc., 58, 301 (1963), 18-30.

10. *Фук Д.Х., Нагаев С.В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. Теория вероятностей и ее применения, XVI, вып. 4 (1971), 660-675.

11. *Rosenthal H.P.* the sup spaces of Lp (p>2) Spaned by sequences of independent random variables, Math. 8 (1970), 273-303.

12. *Qi-manshao A.* comparison theorem on moment inqequalitities Between Negatively Associatel and independent random Vatiables Iournal theoretical Probability, vol. 13. No 2. 200.

13. *Герасимов, М.Ю.* Неравенства для сумм отрицательно ассоциированных случайных величин. Вестник ТвГУ 2010. Серия: Прикладная математика (17). pp. 5-12. ISSN 1995-0136

14. *Гопошкин В.Р.* К закону повторного логарифма для сильно мультипликативных систем т.в.и примен. 1969 т. 14, No 3, с 511-516.

15. *Moricz F,* Inequalities and theorems consenting stronqly multiplicative sistems Acta sci. math., 1968, 29. P. 115-136.

16. *Salem R. Zygmund A.* On lacunary trigolometric series Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1947, v.33. p 333-348; 1948, v. 34, p 54-62.

17. *Шарахметов Ш.* Вероятностные неравенства для сильно мультипликативних систем. Известия АН УзССР 1982, No 1, с 34-37.

# Об одном асимптотическом свойстве отрицательно-биномиального распределения

**Шерматов А., Юсупова А.К.**

*Ферганский государственный университет*
*Ферганский государственный университет*
e-mail Ladyuz@list.ru

Изучению асимптотического поведения тех или иных распределений в теории вероятностей постоянно уделялось большое внимание. Среди многочисленных аспектов этой проблематики мы сосредоточимся в одном -"минимаксном берущем свое начало, по-видимому с работы Ю.В.Прохорова [1] для биномиального распределения.

Н.К.Аренбаевым [2] была решена минимаксная задача для отрицательно-биномиального распределения. В [2] рассмотрена следующая задача. Пусть

$$G(k) = \frac{(n+k)!}{n!k!}p^{n+1}q^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad q = 1 - p$$

-отрицательное-биномиальное распределение.

Как известно, отрицательное -биномиальное распределение сходится по вариации пуассоновскому, нормальному и эрланговскому распределениям:

$$Q_1(k) = \frac{\left(\frac{n+1q}{p}\right)^k}{k!} \exp\left\{-\frac{(n+1)q}{p}\right\}, Q_2(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nq}} \exp\left\{-\frac{v_k^2}{2}\right\}, k = 0, 1, 2, ...,$$

$$v_k = \frac{kp - nq + \frac{p}{2}}{\sqrt{nq}}, \quad Q_3(k) = \frac{(kp)^n}{n!}p\ \exp\{-kp\}, \quad k = 0, 1, 2, ....$$

В [2] доказана следующая теорема: **Теорема 1.** Для любого $n$ и $0 \leq q \leq 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} |G(k) - Q_1(k)| \leq cq,$$

где абсолютная постоянная. В [3] решена минимаксная задача

$$\sup_{0\leq q\leq 1} \min_{i=1,2,3} \sum_{k=0}^{\infty} |G(k) - Q_i(k)| = \lambda_0 n^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-\frac{2}{3}})$$

Этот результат уточняем в следующем аспекте. Кроме $G(k)$, $Q_i(k)$, $i = 1, 2, 3$ определенных выше, введем

$$\bar{Q}_1(k) = Q_1(k)\left[1 + \frac{q}{2}(1 - v_k^2)\right], \bar{Q}_2 = Q_2(k)\left[1 - \frac{q-p}{6\sqrt{npq}}\left(\frac{v_k^3}{q^{\frac{3}{2}}} - \frac{3v_k}{q^{\frac{1}{2}}}\right)\right],$$

$$\bar{Q}_3(k) = Q_3(k)\left[1 + \frac{p}{2}(1 - v_k^2)\right].$$

**Теорема 2.** При $n \to \infty$

$$\sup_{0\leq q\leq 1} \min_{i=1,2,3,} \sum_{k=0}^{\infty} |G(k) - \bar{Q}_i(k)| = \lambda_0 n^{-\frac{1}{3}} + \mu_0 n^{-\frac{2}{3}} + O(n^{-1}),$$

где $\lambda_0 = 0,31292....$, $\mu_0 = 0,16975....$

### Литература


1. *Прохоров Ю.В.* Асимптотическое поведение биномиального распределения. Успехи математических наук, т.VIII, № 3 ( 1953) , с.135-142.

2. *Аренбаев Н.К.* Асимптотическое поведение отрицательно - биномиального распределения. Деп. В ВИНИТИ, № 2445-81.

3. *Юсупова А.К.* Минимаксные задачи асимптотического поведения некоторых дискретных распределений. Дисс. Тошкент 1994.

# Об аппроксимации распределения асимптотически нерешетчатых сумм независимых случайных величин

**И.И.Шералиев**

*Наманганский инженерно строительный институт*
sheraliyev_ 127@mail.ru

В монографиях [2-4] приведена теорема Эссеена, в которой получена не улучшаемая оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин.

В настоящем сообщении содержится обобщение этой теоремы для последовательности

$$X_1, X_2, ..., X_n, ...$$

независимых разнораспределенных случайных величин. Пусть $EX_j = 0$ для любых $j$.

Положим

$$\sigma_j^2 = EX_j^2, \quad \alpha_j = EX_j^3, \quad j = 1, 2, ...$$

$$S_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{B_n}, \quad B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2, \quad \Gamma_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

$$F_n(x) = P(S_n < x), \quad f_j(t) = Ee^{itS_j} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_j(x), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Пусть выполнено условие существования моментов $s$ - го порядка ($s \geq 3$) т.е.

$$\beta_{sj} = E|X_j|^s < \infty, \quad j = 1, 2, ..., n, ...$$

При заданных $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ считая $N > \varepsilon$ обозначим

$$\alpha_j(\varepsilon, N) = \max\{|f_j(t)|, \ \varepsilon \leq |t| \leq N\}$$

Введем следующие условия:

$$(I) \quad \lim_{n\to\infty} \inf \frac{B_n}{n} > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{sj} < \infty,$$

$$(II) \qquad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>n^{\tau}} |x|^s dF_j(x) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

для некоторого положительного $\tau < \frac{1}{2}$.

$(III) \quad B_n \prod_{j=1}^{n} \alpha_j(\varepsilon, N) \to 0$ для любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $N > 0$

Если условие (III) выполняется, то сумма $S_n$ называется асимптотически нерешетчатой. Это понятие введено А.А.Боровковым в [1].

Положим

$$Q_{\nu n}(x) = H_{2v-1}^{(n)}(x)\, e^{-\frac{x^3}{2}}, \qquad v = 1, ..., s-2. \tag{1}$$

где $H_{2v-1}^{(n)}(x)$ - полином степени $3v-1$ относительно $x$ с коэффициентами зависящими только от моментов случайных величин $X_1, ...X_n$ до порядка $v+2 \leq s$, вид которого приведен в [2].

**Теорема.** Пусть выполнены условия $(I)$, $(II)$, $(III)$. Тогда, при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое представление

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{v=1}^{s-2} \frac{Q_{vn}(x)}{n^{\frac{v}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{-\frac{(s-2)}{2}}}\right)$$

где функции $Q_{vn}(x)$ определяются формулой (1). В частности,

$$\frac{Q_{1n}(x)}{\sqrt{n}} = \frac{1-x^2}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} B_n^{-\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

## Литература


1. *Боровков А.А.* Интегро-локальные и локальные теоремы о нормальных и больших уклонениях сумм разнораспределенных случайных величин в схеме серий. Теория вероятностей и ее применения, Том 54. Выпуск 4, 2009 г. 325-344 стр.
2. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.Наука. 1965.
3. *Петров В.В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.Наука. 1987.
4. *Сенатов В.В.* Центральная предельная теорема (Точность аппроксимации и асимптотические разложения). М. URSS. 2009.

# Path. Бўлим. Раздел. 2

- **Actual problems of mathematical analysis**
- **Modern problems of differential equations**
- **Geometry and topology**

- **Математик анализнинг долзарб муаммолари**
- **Дифференциал тенгламаларнинг замонавий муаммолари**
- **Геометрия ва топология**

- **Актуальные задачи математического анализа**
- **Современные проблемы дифференциальных уравнений**
- **Геометрия и топология**

# Some invariant solutions of two dimensional heat equation

**Abduraxmanova Y. M., Narmanov O.A., Irgasheva D. L.**

*Department of Algorithms and mathematical modeling,Tashkent University of Information Technologies., Academic Lyceum of Westminster International University in Tashkent* otabek.narmanov@mail.ru

**Abstract.** It is discussed the invariant solutions of two dimensional heat equation under some symmetry group.
**Keywords:** Lie group, two dimensional heat equation; symmetry group.

In this paper we give solutions of two-dimensional heat-conductivity equation without a source and drain, which are invariant relative to one one-parameter symmetry group. In this paper it is used the Lie algebra of the infinitesimal generators of the symmetry group of the two-dimensional heat equation, found in [1].

Consider the two-dimensional heat equation

$$u_t = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(k_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i})$$

where $u = u(x_1, x_2, t)$-temperature function, $k_i(u) \geq 0$ function of the temperature.

We consider the case $k_1(u) = k_2(u) = u$. In this case, equation (1) has the following form:

$$u_t = u\Delta + (\nabla u)^2$$

where $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2}$ -Laplace operator $\nabla u = \{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\}$ gradient of function $u$.

Symmetry groups and the Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group for the two-dimensional and three-dimensional heat equation are found in [1]. The Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group for the one-dimensional heat-conduction equation is found in [2], [3].

One of the Lie infinitesimal generators of the symmetry group for equation (2) is the vector field

$$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + 2t\frac{\partial}{\partial t},$$

which generates the following group of symmetries of the space of variables $(x_1, x_2, t)$

$$(x_1, x_2, t) \to (x_1 e^S, x_2 e^S, te^{2S}),$$

with respect to which the solutions of equation (2) are invariant.It means if $u = u(x_1, x_2, t)$ - solution of equation (2), then for each $s$ function $u = u(x_1 e^{-S}, x_2 e^{-S}, te^{-2S})$ are also solutions of equation (2).

Let us find the invariants of this symmetry group. Function $\xi(x_1, x_2, t)$ is an invariant of the symmetry group if and only if $X(\xi) = 0$. From this condition we find

$$\xi(x_1, x_2, t) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2t}$$

We seek the solution of the equation in the form $u = v(\xi)$. Substituting the derivative functions $u$ into equation (2) we obtain a second-order differential equation with respect to the function $v(\xi)$

$$\xi v'' + \xi v'^2 + vv' + \xi v' = 0$$

The numerical integration of this equation shows that there is a point $\xi_0$, which depends on the initial values of the function $v(\xi)$ and its derivative $v'(\xi)$, such that the derivative of the function $v(\xi)$ is equal to zero: $v'(\xi) = 0$ When $\xi \to \xi_0$ function $v(\xi)$ gradually increases and tends to the value $v(\xi_0)$. Thus, when $\xi \to \xi_0$ the temperature is stabilized. Figure 1 shows a graph of the temperature function under the initial conditions $v(0.1) = 0.9$ $v'(0.1) = 10$

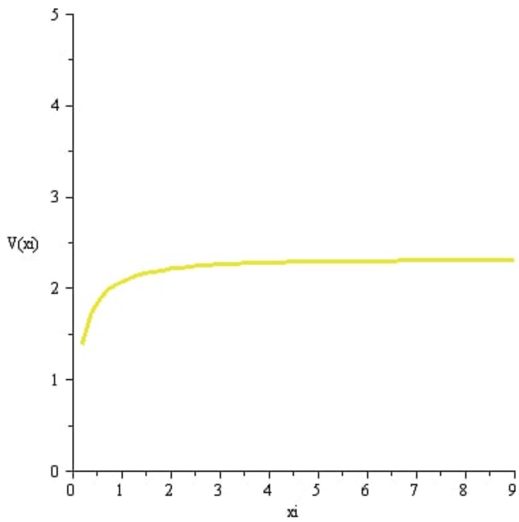



Fig-1

**References**


1. *Dorodnitsyn V.A.,Knyazeva I.V.,Svirshchevskii S. R.* Group properties of the heat equation with source in the two-dimensional and three-dimensional cases,Differential equations,1983,vol. 19,issue 7, 1215-1223.

2. Ovsyannikov L.V. Group analyze of differential equations, M.: Nauka,1978 (in Russian).

3. Narmanov Otabek Abdigapparovich. Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group of the heat equation // Journal of Applied Mathematics and Physics 2018,6,373-381.


# The escape rate for one chaotic map of the interval


**Abdusalomov H.**

*National university of Uzbekistan*

hasanboy155abs@gmail.com


Consider a discrete time dynamical system given by a measure-preserving map

$$T : M \to M$$

where M is a Borel probability space with the measure $\lambda$. Let $B$ be the Borel $\sigma$-algebra on M with respect to $\lambda$.

**Definition 1.** The Poincare recurrence time of a subset $A \in B$ of a positive measure is a positive integer $\tau(A) \leq +\infty$ given by

$$\tau_T(A) = \inf_{n \geq 1} \{n : \lambda(T^n(A) \bigcap A) > 0\}.$$

We will define some sets

$$\Omega_n(A) = \{x \in M : \exists j \in \mathcal{N}, 0 \leq j \leq n, T^j x \in A\} = \bigcup_{i=0}^{n} T^{-i}(A),$$

$$\Theta_n(A) = \{x \in M : T^n x \in A, T^j x \notin A, j = 0, \ldots, n-1\},$$

where $T^{-i}(A)$ is a complete preimage of A under $T^i$.

**Definition 2.** The (exponential) escape rate into the hole A is a nonnegative number $p(A)$ given by

$$p(A) = -\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda(M \diagdown \Omega_n(A)),$$

if this limit exists.

Consider first $T : [0,1] \to [0,1]$ given by

$$Tx = kx \ \ mod\, 1,$$

where k is an integer larger then two.

Fix $N \in \mathcal{N}$ and let $\mathcal{I} = \{I_{i,N}\}_{i=1}^{k^N}$ be partition given by

$$I_{i,N} = \Big[\frac{i-1}{k^N}, \frac{i}{k^N}\Big], \ \ i = 1 .... k^N.$$

Now we formulate our main result:

**Theorem 3.** Let $x \in [0,1]$ and $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequance of nested decreasing intervals with $x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(x)$ for all in.The following statements hold:

$a)$ if $x$ is a periodic point of point of period $m$ then

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p(A_n(x))}{\lambda(A_n(x))} = 1 - \frac{1}{k^m};$$

$b)$ if $x$ is a non-periodic point and $x \neq sk^{-t}$ , $s, t \in Z^+$ , then

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p(A_n(x))}{\lambda(A_n(x))} = 1.$$

## Reference


1. *V.Afraimovich: Pesin's dimension for Poincare recurrences*, Chaos, 7(1997), 12-20

2. *V.Afraimovich, E.Ugalde and J.Urias Fractal Dimensions for Poincare Recurrences*, Elsevier Science, 2006.

3. *E.G.Altmann* and T.Tel: *Poincare recurrences from the perspective of transient chaos*, Phys Rev Lett. 17(2008),174101.

4. *M.Demers and L.-S.Young Escape rates and conditionally invariant measures*, Nonlinearity, 19(2006), 377-397.

# On the Cauchy problem for Laplace equation

**Shavkat Alimov and Allambergen Qudaybergenov**

*National university of Uzbekistan, Tashkent*

e-mail: sh_alimov@mail.ru, khudaybergenovallambergen@mail.ru

**1.** Consider the process of heating the following cylindrical surface (thin-walled pipe)

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

At the lower base of the cylinder, the given temperature is maintained and there is no heat flow. We need to find the temperature at the top base of the cylinder.

We introduce the cylindrical coordinates

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Then

$$S \;=\; \{(r, \theta, z) \;:\; r = R,\; -\pi \leq \theta \leq \pi,\; 0 \leq z \leq h, \}$$

The process of heating is described by equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \Delta u.$$

Hence, we have for the temperature $u(\theta, z, t)$ equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \;+\; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1}$$

The boundary conditions are

$$u(-\pi, z, t) = u(\pi, z, t), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(-\pi, z, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(\pi, z, t), \quad 0 \leq z \leq h, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(\theta, 0, t)}{\partial z} \;=\; 0, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \tag{3}$$

and

$$u(\theta, 0, t) = \phi(\theta), \quad -\pi < \theta < \pi. \tag{4}$$

It is necessary to find the temperature $u(\theta, h, t)$ on the top base $z = h$. Note that the problems of this type usually are solved numerically (see [1]).

Suppose that the function $\phi(\theta)$ that determines the temperature on the lower base belongs to a certain Hilbert space $H_1$. Further, suppose that the function $\psi(\theta)$ that determines the temperature on the upper base belongs to a some Hilbert space $H_2$.

Consider operator $A : H_1 \to H_2$ that acts as follows:

$$A\phi \;=\; \psi. \tag{5}$$

It is well known that the problem (1)-(4) is ill-posed. This means that the operator $A$ acting in classical spaces like Sobolev space is unbounded. Moreover, the domain of the operator $A$, being part of Sobolev-type spaces, cannot coincide with any of them.

Another difficulty associated with the solution of problem (1)-(4) is caused by the fact that the function $\phi(\theta)$ is given approximately with some error $\delta$. Because of unboundedness of the operator $A$ arbitrarily small changes of $\phi$ lead to significant changes in $\psi$. Moreover, arbitrarily small changes in $\phi$ can get out of the domain of the operator $A$.

Just as it is done in most papers on ill-posed problems (see [2],[3]), we introduce a one-parameter family of continuous operators $A_\alpha$ approximating the operator $A$. For certain relations between parameters $\alpha$ and $\delta$, we prove that the approximate solution tends to the desired solution. Under additional smoothness assumptions, we obtain an error estimate.

**2.** Note that in general case it is necessary to add to boundary conditions (2)-(4) the initial condition. We are looking for a stationary solution, i. e. a time-independent solution $u = u(\theta, z)$. In what follows we assume that $R = 1$.

Hence, we consider equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (\theta, z) \in S, \tag{6}$$

with boundary conditions

$$u(\theta, 0) = \phi(\theta), \quad \frac{\partial u(\theta, 0)}{\partial z} = 0, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \tag{7}$$

Let us denote by the symbol $D(S)$ the class of functions infinitely differentiable on the cylindrical surface $S$ and vanishing near the upper base $z = h$.

**Definition.** *Let $\phi \in L_2[-\pi, \pi]$. We say that the function $u(\theta, z)$ from $L_2(S)$ is a solution to the problem (6)-(7) if for any function $v \in D(S)$ the following equation*

$$\int_S u(\theta, z) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) d\theta \, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \frac{\partial v}{\partial z}(\theta, 0) \tag{8}$$

*is valid.*

**Proposition 1.** *If the problem (6)-(7) has a solution, then this solution is unique.*

**3.** Consider the auxiliary equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} = 0, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < z < h, \tag{9}$$

with the same boundary values (7).

Assume that the boundary value is measured with some error $\delta > 0$. It means that instead of $\phi$ we have the function $\phi_\delta$ such that

$$\|\phi(\theta) - \phi_\delta(\theta)\|_{L_2(T)} \leq \delta. \tag{10}$$

Let $u_{\delta,\alpha}(\theta, z)$ be a solution to the equation (9) with boundary condition

$$u_{\delta,\alpha}(\theta, 0) = \phi_\delta(\theta). \tag{11}$$

**Theorem 1.** *Assume that the function* $\psi(\theta) = u(\theta, h)$ *exists and belongs to* $L_2(T)$. *Set*

$$\alpha \;=\; \alpha(\delta) \;=\; \frac{\lambda^2}{\ln^2\delta}, \quad 0 < \delta < 1, \tag{12}$$

*where* $\lambda > h$.

*Then*

$$\lim_{\delta\to 0^+} \|u_{\delta,\alpha}(\theta, h) - \psi(\theta)\|_{L_2(T)} \;=\; 0. \tag{13}$$

Note that the Theorem 1 only asserts the convergence of the auxiliary solution to exact one. In order to estimate the approximation error, it is necessary to require additional smoothness from the solution.

**Theorem 2.** *Assume that the function* $\psi(\theta) = u(\theta, h)$ *exists and belongs to Sobolev space* $W_2^\beta(T)$, *where* $0 < \beta \le 3$. *Let the following condition*

$$\|\psi\|_{W_2^\beta} \;\le\; 1 \tag{14}$$

*be fulfilled.*

*Let* $\alpha = \alpha(\delta)$ *be defined by equation (12). Then for any* $\delta$ *from the interval* $0 < \delta < 1$ *the estimate*

$$\|u_{\delta,\alpha}(\theta, h) - \psi(\theta)\|_{L_2(T)} \;\le\; C(h, \beta)\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-2\beta/3}, \quad 0 < \delta < 1, \tag{15}$$

*is valid.*

## References


1. *A. Gavrikov, G. Kostin.* Heat Transfer Processes in a Cylindrical Body Surrounded by Air, Proc. of 59th MIPT Scientific Conference, Moscow, Russia, 2016 (Russian).

2. *Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G.* Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems, Kluwer Academic Publishers.(1995)

3. *Kabanikhin, S. I.* Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston, Inverse Ill-posed Probl. Ser. 55. (2012)


# On some boundary value problems for partial differential equations with boundary operators of fractional order


**Ashurov R.R. , Fayziev Yu.E.**

*Institute of Mathematics, Academy of Science of Uzbekistan*
*National University of Uzbekistan*
ashurovr@gmail.com, fayziev.yusuf@mail.ru


The theory of differential equations involving fractional derivatives, both in the equation and in the boundary conditions, has developed rapidly over the past few decades, both in mathematics and applied sciences.

This paper is devoted to solvability conditions of boundary value problems with boundary operators given through fractional derivatives in Marchaud, Grünwald-Letnikov or Liouville-Weyl sense. Such problems have been studied by many authors (see, for example, [1] - [5]). Let us recall some of them.

The main result of the paper S. Umarov [1] can be formulated on the example of the following boundary value problem. Let $\Omega$ be an arbitrary $N$-dimensional domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. Let $\partial_\nu^\rho$ be the fractional Riemann-Liouville derivative of order $\rho$ with respect to outward normal vector $\nu$ of $\partial\Omega$. Consider the boundary value problem

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \\ \partial_\nu^\rho u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\varphi(x)$ is a given continuous function.

If $\rho = 0$, then we obtain the well-known Dirichlet problem and it is solvable for any continuous boundary functions $\varphi(x)$. If $\rho = 1$, then problem (1) coincides with the Neumann problem. For the solvability of this problem, it is necessary that the boundary function satisfies the known orthogonality condition. Naturally, the question arises, if $\rho$ varies from zero to one, then from what value of $\rho$ it is necessary to require the orthogonality condition? In Umarov [1], it was proved that this exponent is $\frac{1}{2}$. In other words, problem (1) is unconditionally solvable for $0 \le \rho < \frac{1}{2}$, and if $\frac{1}{2} \le \rho \le 1$, then the boundary function must satisfy the orthogonality condition.

Various versions of this problem are considered in [1] - [5]. The case of an integer $\rho \ge 2$ is considered in the work of Bitsadze [2]. The author proved that in order for problem (1) to be solvable, the boundary function $\varphi$ must be orthogonal to polynomials of order $m \le \rho - 1$.

Let us take a closer look at work Gorenflo et al. [3].

Let $B_y^\rho$ be the one-sided Marchaud, Grünwald-Letnikov or Liouville-Weyl fractional derivative of order $\rho$ and let $A(D)$ be a nonnegative elliptic pseudo-differential operator. Consider the boundary problem

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - A(D)\right) u(x,y) = 0, \quad y > 0, \ x \in R^N; \\ B_y^\rho u(x,+0) = \varphi(x), \ x \in R^N; \\ |u(x,y)| \longrightarrow 0, \ \text{as} \quad y \longrightarrow \infty, \quad \text{uniformly for } x \in R^N, \end{cases} \tag{2}$$

where $\varphi(x)$ is a given function.

The authors showed, that problem (2) is unconditionally solvable for all $\rho \in [0, 1/2)$; for $\rho \in [1/2, 1]$ it is solvable only under additional orthogonality conditions on $\varphi$. It is also shown that if $\rho$ increases then the number of orthogonality conditions required for solvability increases as well. The new orthogonality conditions appear exactly at the values $\rho = j + 1/2, j = 1, 2, ....$

Note that operator $A(D)$ in (2) has a continuous spectrum. The question naturally arises: what is the situation with the solvability of problem (2) if the elliptic operator $A(D)$, considered in a bounded domain, has a discrete spectrum? The purpose of this work is to study this very issue.

Let $\Omega$ be $N$-dimensional bounded domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$ and $A(x, D) = \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ be an arbitrary nonnegative formally selfadjoint (symmetric) elliptic differential operator of order $m = 2l$ with sufficiently smooth coefficients $a_\alpha(x)$ in

$\Omega$, where $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ - multi-index and $D = (D_1, D_2, ..., D_N)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Recall, an operator $A(x, D)$ is elliptic in $\Omega$, if for all $x \in \Omega$ and $\xi \in R^N$ one has

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha > 0 \quad \xi \neq 0.$$

Consider a boundary value problem

$$u_{yy}(x, y) = A(x, D)u(x, y), \quad x \in \Omega, \quad y > 0, \tag{3}$$

$$B_j u(x, y) = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{\alpha,j}(x) D^\alpha u(x, y) = 0, \quad 0 \le m_j \le m - 1, \\ j = 1, 2, ..., l; \quad x \in \partial\Omega, \tag{4}$$

$$B_y^\rho u(x, +0) = \varphi(x), \quad \rho > 0, \; x \in \Omega, \tag{5}$$

$$|u(x, y)| \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow \infty, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

where $\varphi(x)$ and coefficients $b_{\alpha,j}(x)$ are given functions.

**Definition.** A function $u(x, y)$ with the properties $u_{yy}(x, y)$, $A(x, D)u(x, y) \in C(\overline{\Omega} \times (0, \infty))$, $u(x, y)$, $B_y^\rho u(x, y) \in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ and satisfying all the conditions of problem (3) - (6) in the classical sense is called **the (classical) solution** of the boundary value problem (3) - (6).

We draw attention to the fact, that in the definition of the regular solution the requirement of continuity in the closed domain of all derivatives included in equation (3) is not caused by the merits. However, on the one hand, the uniqueness of just such a solution is proved quite simply, and on the other, the solution found by the Fourier method satisfies the above conditions.

Application of the Fourier method to problem (3) - (6) leads us to consider the following spectral problem

$$A(x, D)v(x) = \lambda v(x) \quad x \in \Omega; \tag{7}$$

$$B_j v(x) = 0, \quad j = 1, 2, ..., l; \quad x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

S. Agmon found the necessary conditions for boundary $\partial\Omega$ of the domain $\Omega$ and for coefficients of operators $A$ and $B_j$, which guarantee compactness of the inverse operator, i.e. the existence of a complete in $L_2(\Omega)$ system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k(x)\}$, $k \ge 1$, and a countable set of nonnegative eigenvalues $\lambda_k$ of spectral problem (7) - (8). Throughout what follows, we assume that this condition is satisfied.

To formulate the main result of this paper we need to introduce for any real number $\tau$ an operator $\hat{A}^\tau$, acting in $L_2(\Omega)$ in the following way

$$\hat{A}^\tau g(x) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\tau g_k v_k(x), \quad g_k = (g, v_k).$$

Obviously, operator $\hat{A}^\tau$ with the domain of definition

$$D(\hat{A}^\tau) = \{g \in L_2(\Omega) : \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{2\tau} |g_k|^2 < \infty\}$$

is selfadjoint. If we denote by $A$ the operator in $L_2(\Omega)$, acting as $Ag(x) = A(x, D)g(x)$ and with the domain of definition $D(A) = \{g \in C^m(\bar{\Omega}) : B_j g(x) = 0, \quad j = 1, ..., l, \quad x \in \partial\Omega\}$, then it is not hard to show, that operator $\hat{A} \equiv \hat{A}^1$ is a selfadjoint extension in $L_2(\Omega)$ of operator $A$. In the same way one can define the operator $(\hat{A}+I)^\tau$, where $I$ is the identity operator in $L_2(\Omega)$.

Let the multiplicity of the eigenvalue $\lambda = 0$ be equal to $k_0$, i.e. $\lambda_k = 0$, $k = 1, 2, ..., k_0$. Let the boundary function $\varphi(x)$ satisfy the following orthogonality conditions

$$\varphi_k = \int\limits_\Omega \varphi(x) v_k(x) dx = 0, \ \ k = 1, 2, ..., k_0. \tag{9}$$

The next theorem shows that this condition (together with the requirement for smoothness of the boundary function) ensures both the existence and uniqueness of the solution to the boundary value problem. We also note that the number of the orthogonality conditions (9) (in contrast to the case of problem (2)) does not change with increasing $\rho$.

**Theorem.** Let $\varphi(x) \in D(\hat{A}^\tau)$, $\tau > \frac{N}{2m}$ and conditions (9) be satisfied. Then there exists a unique solution of the forward problem (3) - (6) and it has the representation

$$u(x,y) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{\lambda_k})^\rho} \varphi_k \, v_k(x) \, e^{-\sqrt{\lambda_k} y},$$

which absolutely and uniformly converges on $x \in \overline{\Omega}$ for each $y \in [0, \infty)$.

### References


1. *Umarov S.*, On some boundary value problems for elliptic equations with a boundary operator of fractional order, Academy of Sciences of the SSSR, (in Russian), 333 (1993), No 6. pp. 708-710.

2. *Bitsadze A.V.*, On the Neumann problem for harmonic functions, Dokl. Academy of Sciences of the SSSR. 311, (1990), No 1. pp. 11-13.

3. *Gorenflo R., Luchko Yu.F., Umarov S.R.*, On some boundary value problems for pseudo-differensial equations with boundary operators of fractional order. Fract. Calc. Appl. Anal., 3 (4) (2000), 454 - 468.

4. *Turmetov B.X.*, A boundary value problem for a harmonic equation, Differential Equations,(in Russian), 32 (1996), No 8, pp. 1089-1092.

5. *Turmetov B.X.*, On the smoothness of the solution of a boundary value problem with a fractional order boundary operator. Mathematical works, 7 (2004), No 1, pp. 189-199.


# On the construction and integration of the Toda lattice hierarchy with an integral type source


**Babajanov B.[1], Ruzmetov M. [2], Rajabov H.[3]**

*Urgench State University, Uzbekistan;*[1,2,3]
ṁurod@mail.ru


The Toda lattice [1] is a simple model for a nonlinear one-dimensional crystal that describes the motion of a chain of particles with exponential interactions of the nearest neighbors. It is shown in the works [2-3] that Toda lattice equation can be integrated by

Inverse Scattering Method for the discrete Sturm-Liuville operator. Integration of Toda lattice equation with a source are presented in [4-8].

In this work, the Toda lattice hierarchy with an integral type source

$$\begin{cases} \frac{da_n}{dt} = a_n(G_{n+1,r+1} - G_{n,r+1}) + a_n \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_{n+1}(\mu,t)g_{n+1}(\mu,t) \\ -f_n(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu, \\ \frac{db_n}{dt} = H_{n+1,r+1} - H_{n,r+1} + a_n \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_n(\mu,t)g_{n+1}(\mu,t)+ \\ +f_{n+1}(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu - a_{n-1} \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_n(\mu,t)g_{n-1}(\mu,t) + f_{n-1}(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu, \\ a_{n-1}f_{n-1} + b_nf_n + a_nf_{n+1} = \frac{\mu+\mu^{-1}}{2}f_n, \\ a_{n-1}g_{n-1} + b_ng_n + a_ng_{n+1} = \frac{\mu+\mu^{-1}}{2}g_n, \ \ n \in Z., \end{cases} \quad (1)$$

$$a_n(0) = a_n^0, \ \ b_n(0) = b_n^0, \quad n \in Z, \quad (2)$$

is studied. Where $G_{n,j}(t) = \sum\limits_{s=0}^{j} c_{j-s} < \delta_n, \ L(t)^s\delta_n >, \quad 0 \le j \le r+1,$

$$H_{n,j}(t) = \sum_{s=0}^{j} 2a_n(t)c_{j-s} < \delta_{n+1}, \ L(t)^s\delta_n > +c_j + 1, \ \ 0 \le j \le r+1,$$

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_ny_n + a_ny_{n+1} = \lambda y_n, \quad (3)$$

$$< \delta_m, \delta_n >= \begin{cases} 0, \ m \ne n \\ 1, \ m = n \,, \end{cases}$$

1. $a_n^0 > 0, \ \ Im\, b_n^0 = 0, \quad n \in Z, \ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\,n\,| \left( \left|\, a_n^0 - \frac{1}{2} \,\right| + |\, b_n^0| \right) < \infty,$

2. The operator $L(0)$ has exactly $N$ eigenvalues $\lambda_1(0), \lambda_2(0), ..., \lambda_N(0)$ which are out of the interval $[-1; 1]$.

The main aim of this work is to obtain the expressions of the solutions $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n(\mu,t)\}_{-\infty}^{\infty}$ and $\{g_n(\mu,t)\}_{-\infty}^{\infty}$ of the problem (1)-(3) in the framework of inverse scattering method for the operator $L(t)$.

Under condition (ii) the equation (3) has the Jost solutions with the asymptotic properties:

$$\begin{array}{l} \varphi_n(z) = z^n + o(1) \ \ as \ \ n \to \infty, \ \ |z| = 1, \\ \psi_n(z) = z^{-n} + o(1) \ \ as \ \ n \to -\infty, \ \ |z| = 1. \end{array} \quad (4)$$

It is very well known that such solutions exist and, moreover, they are identified by the asymptotic expressions (4) unique and analytically expended into the circle $|z| < 1$.

For $|z| = 1$ the functions $\{\varphi_n(z), \ \varphi_n(z^{-1})\}$ and $\{\psi_n(z), \ \psi_n(z^{-1})\}$ are the pairs of the linearly independent solutions of (3), therefore

$$\begin{array}{l} \psi_n(z) = \alpha(z)\varphi_n(z^{-1}) + \beta(z)\varphi_n(z), \\ \varphi_n(z) = \alpha(z)\psi_n(z^{-1}) - \beta(z^{-1})\psi_n(z), \end{array} \quad (5)$$

with

$$\alpha(z) = \frac{2}{z - z^{-1}} W\{\psi_n(z),\, \varphi_n(z)\}, \tag{6}$$

and

$$W\{\psi_n(z),\, \varphi_n(z)\} \equiv a_n(\psi_n(z)\,\varphi_{n+1}(z) - \psi_{n+1}(z)\,\varphi_n(z)).$$

The reflection coefficient is given by the formula $R(z) = -\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z)}$.

The function $\alpha(z)$ is analytically expended into the circle $|z| < 1$ and inside it has a finitely many zeros $z_1, z_2, ..., z_N$. The points $\lambda_k = \frac{z_k + z_k^{-1}}{2}$, $k = 1, 2, ..., N$ correspond to eigenvalues of the operator$L$. From (6) we arrive at the following expression

$$\varphi_n^k = B_k \psi_n^k, \quad k = 1, 2, ..., N \tag{7}$$

where $\psi_n^k \equiv \psi_n(z_k)$.

The set of the quantities $\{R(z),\, z_1, z_2, ..., z_N, B_1, B_2, ..., B_N\}$ is called the scattering data for equation (3). The values of $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ and $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ can be found from the scattering data.

**Theorem.** If the functions $a_n(t)$, $b_n(t)$,$f_n(\mu, t)$,$g_n(\mu, t)$, $n \in Z$ are solutions of the problem (1)-(3), then the scattering data of the operator (3) are given by relations

$$\frac{dz_k}{dt} = 0, \quad k = 1, 2, ..., N, \tag{8}$$

$$\frac{\partial R(z,t)}{\partial t} = \left( (z - z^{-1})\tilde{g}_r(z, 0) + \frac{1}{z^2 - 1} v.p. \oint_{|\mu|=1} D(\mu, t) d\mu \right) R(z,t) +$$
$$+ 2\pi i \,(Q(z,t) + Q(z^{-1}, t)) R(z,t) + 4\pi i P(z^{-1}), \tag{9}$$

$$\frac{dB_k(t)}{dt} = \Big[ (z_k - z_k^{-1})\tilde{g}_r(z_k, 0) - \frac{1}{z_k^2 - 1} \oint_{|\mu|=1} \frac{(\mu + z_k)(\mu z_k - 1)}{\mu(\mu - z_k)} (b(\mu,t)c(\mu,t) + q(\mu,t)r(\mu,t)) d\mu$$
$$- \frac{1}{z_k^2 - 1} \oint_{|\mu|=1} \frac{(\mu - z_k)(\mu z_k + 1)}{\mu(\mu - z_k^{-1})} (a(\mu)d(\mu) + p(\mu)s(\mu)) d\mu \Big] B_k(t), \quad k = 1, 2, ..., N, \tag{10}$$

where

$$\tilde{G}_{n,r}(z,t) \to \tilde{g}_r(z,\, 0), \;\; n \to -\infty,$$

$$D(\mu, t) = (q(\mu,t)r(\mu,t) + p(\mu,t)s(\mu,t)) \left[ \frac{(\mu + z)(\mu z - 1)}{\mu(\mu - z)} + \frac{(\mu - z)(\mu z + 1)}{\mu(\mu - z^{-1})} \right],$$

$$\begin{aligned} a(\mu,t) &= p(\mu,t)\beta(\mu^{-1},t) + q(\mu,t)\alpha(\mu,t), \\ b(\mu,t) &= p(\mu,t)\alpha(\mu^{-1},t) + q(\mu,t)\beta(\mu,t), \\ c(\mu,t) &= r(\mu,t)\beta(\mu^{-1},t) + s(\mu,t)\alpha(\mu,t), \\ d(\mu,t) &= r(\mu,t)\alpha(\mu^{-1},t) + s(\mu,t)\beta(\mu,t) \end{aligned}$$

and

$$\alpha(\mu, t) = \prod_{j=1}^{N} \left| \frac{\mu - z_j}{\mu z_j - 1} \right| \exp\left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta|=1} \ln\left(1 - |R(\zeta, t)|^2\right) \frac{\mu + \zeta}{\mu - \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} \right\},$$

$$\beta(\mu^{-1}, t) = -R(\mu,t)\alpha(\mu,t).$$

The relations (8), (9) and (10) determine the evolution of scattering data for the operator $L(t)$, which allows to use the inverse scattering method to find the solutions of the Cauchy problem (1)-(3).

### Reference

1. *Toda M* Waves in nonlinear lattice. - Suppl., Progress Thoer. Physics, 1970, 45, p. 174-200.

2. *Flaschka H* On the Toda lattice. II.-Progress Theor. Physics, 1974, 51, N3, p. 703-716.

3. *Teschl G.* Jacobi Operators and Completely Integrable Lattices, Mathematical Surveys and Monographs, vol.72, AMS, 2000.

4. *Cabada A., Urazboev G.U.* Integration of the Toda lattice with an integral-type source. Inverse Problems, 2010; 26: 085004 (12pp).

5. *Babajanov B.A., Ruzmetov M.M, Babajonov A.B.* On the integration of a Toda-type chain with an integral type source, Bulletin of the Institute of Mathematics, Vol.1, 15-26, 2020.

6. *X. Liu, Y. Zeng* On the Toda lattice equation with self-consistent sources. J. Phys. A: Math. Gen. 38, 2005, 8951-8965.

7. *Babajanov B. A.* Integration of the Toda-type chain with a special self-consistent source. Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. - Switzerland, spring, 2018.-P. 45-56.

8. *Babajanov B.A., Feckan M., Urazbaev G.U.* On the periodic Toda Lattice hierarchy with an integral source, Commun. Sci. Numer. Simul. 52 (2017), 110-123.

# On time-optimal control problem associated with parabolic equation

**Dekhkonov F.N.**

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek*

E-mail: f.n.dehqonov@mail.ru

Consider the following mathematical model of the heat conduction process along the domain $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < a,\, 0 < y < b\}$:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y) \in \Omega \quad t > 0, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$u|_{x=0} \;=\; \varphi(y)\mu(t), \quad u|_{x=a} \;=\; \psi(y)\mu(t), \tag{2}$$

$$u|_{y=0} \;=\; 0, \quad u|_{y=b} \;=\; 0, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \tag{3}$$

and initial condition

$$u(x, y, 0) \;=\; 0, \quad 0 \le x \le a,\, 0 \le y \le b, \tag{4}$$

Let $B$ be the Banach space and $T > 0$. Denote by $C([0,T] \to B)$ the Banach space of all continuous maps $u : [0,T] \to B$ with the norm

$$\|u\|_T \;=\; \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_B .$$

**Definition.** *By the solution of problem (1) - (4) we mean the function $u(x,y,t) \in C([0,T] \to W_2^{1/2}(\Omega))$, which satisfies the equation (1) as a distribution, and fulfils the conditions (2)-(4).*

Note that according to this definition, the solution has the trace on any $(n-1)$-dimensional smooth surface $\Gamma \subset \overline{\Omega}$, and this trace belongs to $L_2(\Gamma)$ (see [3], Chapter V). In particular, the conditions (2) are correctly defined for any $\varphi$ and $\psi$ from $L_2[0,b]$.

Let $M > 0$ be some given constant. We say that the function $\mu(t)$ is an *admissible control* if this function is piecewise smooth on the half-line $t \ge 0$ and satisfies the following constraints

$$\mu(0) = 0, \quad |\mu(t)| \le M, \quad t > 0. \tag{5}$$

Assume that the functions $\varphi(y)$, $\psi(y) \in L_2[0,b]$ satisfy conditions

$$\varphi(y) \ge \psi(y) \ge 0, \qquad \varphi'(y) \le \psi'(y) \le 0, \quad 0 \le y \le b. \tag{6}$$

**Problem A.** *Given constants $\alpha$, $\beta \ge 1$ and $\theta > 0$ Problem A consists in looking for the minimal value of $T > 0$ so that for $t > 0$ the solution $u(x,y,t)$ of the initial-boundary value problem (1)-(4) with some admissible control $\mu(t)$ exists and for all $t \ge T$ satisfies the equation*

$$\int_0^{b/\alpha}\int_0^{a/\beta} u(x,y,t)\,dx\,dy \;=\; \theta, \quad t \ge T. \tag{7}$$

Set

$$\rho_{mn} \;=\; \frac{8\,b}{a\pi\,n}\Big(\varphi_n - (-1)^m\psi_n\Big)\sin^2\frac{m\pi}{2\beta}\sin^2\frac{n\pi}{2\alpha}, \quad n,\, m = 1,2,... \tag{8}$$

where

$$\varphi_n = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy, \quad \psi_n = \frac{2}{b}\int_0^b \psi(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy. \tag{9}$$

**Theorem 1.** *Let*

$$0 < \theta < \frac{\rho_{11}\,M\,a^2b^2}{\pi^2(a^2+b^2)}. \tag{10}$$

*Set*

$$T_0 = -\frac{a^2\,b^2}{\pi^2(a^2+b^2)}\ln\left(1 - \frac{\theta\,\pi^2(a^2+b^2)}{\rho_{11}\,M\,a^2b^2}\right). \tag{11}$$

*Then a solution $T_{min}$ of the Problem A exists and the estimate $T_{min} \le T_0$ is valid.*

**Proposition 1.** *Let $\mu(t)$ be a smooth function on the half-line $t \ge 0$ and $\varphi$, $\psi \in L_2(\Omega)$. Then the function*

$$u(x,y,t) \;=\; \int_0^t \mu(s)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}e^{-\lambda_{mn}(t-s)}\,\sin\frac{m\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi y}{b}\,ds, \tag{12}$$

*is the solution of the initial-boundary value problem (1)-(4), where*

$$c_{mn} = \frac{2m\pi}{a^2}\Big(\varphi_n - (-1)^m \psi_n\Big), \quad \lambda_{mn} = \Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2, \quad m, n = 1, 2, ...$$

Set

$$B(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{mn}\, e^{-\lambda_{mn} t}, \tag{13}$$

where $\rho_{mn}$ defined by (8).

Then we get main integral equation

$$\int_0^t B(t-s)\mu(s)ds = \theta(t), \quad t > 0. \tag{14}$$

We introduce a specific heating as

$$Q(t) = \int_0^t B(t-s)ds = \int_0^t B(s)ds = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_{mn}}{\lambda_{mn}}\Big(1 - e^{-\lambda_{mn} t}\Big). \tag{15}$$

It is clear that $Q(0) = 0$ and $Q'(t) = B(t) \geq 0$.

Set

$$Q^* = \lim_{t\to\infty} Q(t) = \int_0^{\infty} B(s)ds. \tag{16}$$

Obviously, the average temperature of $\Omega$ in the case where the heater is acting with unit load cannot exceed $Q^*$. (see, e.g. [1]-[2])

**Proposition 2.** *Let*

$$0 < \theta < MQ^*. \tag{17}$$

*Then there exist $T > 0$ and a real-valued measurable function $\mu(t)$ so that $|\mu(t)| \leq M$ and the following equality*

$$\int_0^T B(T-s)\mu(s)ds = \theta, \tag{18}$$

*is valid.*

**Remark.** It is clear that the value $T$, which was found in Proposition 2, gives a solution to the problem. Namely, $T$ is the root of the equation

$$Q(T) = \frac{\theta}{M}. \tag{19}$$

**Proposition 3.** *Let*

$$0 < \theta < \frac{\rho_{11}\, M\, a^2 b^2}{\pi^2(a^2+b^2)}. \tag{20}$$

*Then there exists $T > 0$ so that*

$$T < -\frac{a^2 b^2}{\pi^2(a^2+b^2)} \ln\bigg(1 - \frac{\theta\, \pi^2(a^2+b^2)}{\rho_{11}\, M\, a^2 b^2}\bigg) \tag{21}$$

*and the equality (19) is fulfilled.*

**Proposition 4.** *Let $T > 0$ satisfies the equality (19) and condition (20).*

*Then there exist $T_1 > T$ and a measurable real-valued function $\mu(t)$ so that $|\mu(t)| \leq M$ and the following equality*

$$\int_0^{b/\alpha}\int_0^{a/\beta} u(x,y,t)\,dx\,dy = \theta, \quad T \leq t \leq T_1,$$

*is valid.*

## References


1. *Albeverio S., Alimov Sh.A.* On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process. Applied Mathematics and Optimization, 47, no. 1 (2008), 58-68.
2. *Alimov Sh.A.* On a control problem associated with the heat transfer process. Eurasian Mathematical Journal, 1, no. (2010), 17-30.
3. *Besov O.V., Il'in V. P., Nikolskiy S. M.* Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems. Scripta Series in Mathematics. John Wiley Sons Inc, 1979. pp 354.
4. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N.* Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type (Russian). Nauka, Moscow, 1967.
5. *Tikhonov A.N., Samarsky A.A.* Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1966.
6. *Vladimirov V.S.* Equations of Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York, 1971.


# With a free boundary for the reaction - diffusion quasilinear equations with a nonlinear convection term


**Elmurodov A. H**

*Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail elmurodov@mathinst.uz


This article proposes a mathematical model with free boundaries of pollution of water basins by sewage and atmospheric impurities.

If the pollutant is oil, then huge oil spots form on the surface of the water [1,2]. Oil disrupts gas exchange and impairs light transmission. Microorganisms use oil hydrocarbons as a source of carbon and hydrogen, many microbionts contribute to the transit of oil to the soil.

We denote by $u\,(t,x)$ and $v\,(t,x)$ the concentration of oil products in water, the atmosphere, and bottom sediments. Then the task of determining the concentration of oil products in each of the two environments is reduced to the following boundary-value problem:

$$d_1(u)u_t = c_1 u_{xx} + uu_x + u(a_1 - b_1 u), \quad t > 0, \quad 0 < x < s(t), \tag{1}$$

$$d_2(v)v_t = c_2 v_{xx} + vv_x + v(a_2 - b_2 v), \quad t > 0, \quad s(t) < x < l, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq s_0 = s(0), \tag{3}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad s_0 \le x \le l, \tag{4}$$

$$u(t,0) = v(t,l) = 0, \quad u(t,s(t)) = v(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$s'(t) = \mu u_x(t,s(t)) - \mu v_x(t,s(t)), 0 \le t \le T. \tag{6}$$

where $x = s(t)$ - represent the front of oil propagation and are determined together with the concentrations $u(t,x)$ and $v(t,x)$; $s_0$, $l$, $\mu$, $a_i$, $b_i$, $c_i$ $(i = 1,2)$ are positive constants. The reaction - diffusion terms in the equations describe the processes of reducing the concentration of petroleum products due to chemical and biological oxidation. The conditions are found under which the influence of the pollutant decreases. This is achieved by establishing a priori estimates for $s(t)$. A priori estimates of the Schauder type are established. Based on the obtained a priori estimates, the unique solvability of the problem is proved [3].

### Литература


1. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term. J. Math. Anal. Appl. 467 (2018). P.1233-1257.
2. *Wang R.-H., Wang L., Wang Z.-Ch.* Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term. J. Math. Anal. Appl. 467 (2018). P.1233-1257.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А. и Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения Параболического типа. Москва, 1967. 740.


# The brownian motion and ideal hydrodynamic equations of a bubble liquid


**Imomnazarov Kh.**

*The Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS*

e-mail imom@omzg.sscc.ru


The dynamics of bubbles in a liquid caused interest after the equations of ideal hydrodynamics have been obtained. In the process of development of areas of knowledge related to hydrodynamics, approaches to the problem of description of bubble liquids also changed. The method of space averaging is considered to be one of the first methods in the description of bubble liquids. Here, one can mention the papers (1-3). The generality of the approach is in that Navier-Stokes equations for a liquid in the inter-bubble space are obtained, with boundary conditions at bubbles and with subsequent introduction of space averages. Note that this approach seems to be rather artificial, if we take into consideration the existing theory of Brownian motion of macroscopically isolated particles and a rather well-developed kinetic theory of liquids.

The paper (4) can be considered as a good representative of the variational approach in the theory of bubble liquid.

Another interesting approach is the general method of hydrodynamic description of condensed media with different types of ordering. This approach is close to the kinetic method. It is based on the well-known procedure of obtaining the hydrodynamic equations of ideal superfluid liquid (5). In a sense, this method follows from the kinetic equation for condensed media (6). The essence of the method is in postulating a local expression for the fist law of thermodynamics with allowance for relaxation degrees of freedom, the local form of conservation laws, and the principle of Galilean invariance of equations of motion. For classical systems, a description of this approach can be found in (7) and (8). This approach was used to construct the hydrodynamic theory of bubble liquid. An additional relaxation degree of freedom was introduced into the local expression for the first law of hydrodynamics (9), (10).

In this connection, only the kinetic approach combined with the general scheme of construction of hydrodynamic equations of transfer in condensed media can be considered consistent (6). Here, we can mention the paper (1), in which an attempt was made to obtain a kinetic description of a system of incompressible bubbles in the approximation of self-consistent field on the basis of the hierarchical chain of kinetic BBGKY equations (see also (1)). The description involves the construction of the kinetic Vlasov equation with the use of the Boltzmann integral of collisions. The Hamiltonian equations of macroscopic degrees of freedom serve as a basis for such description in (1), whereas the degrees of freedom in the Boltzmann equation are of microscopic character. Actually, in the process of kinetic relaxation the system has already produced local macroscopic degrees of freedom, and the particles of the liquid not only collide with each other, but also transfer the momentum to bubbles with gas. The variation in the momentum of the bubbles is sufficiently small, and typical variation times of the momenta of the bubbles are rather large. For a condensed liquid between the bubbles, the kinetic evolution stage is absent.

It was assumed in the derivation of the macroscopic equations that typical times of interaction in the system of bubbles are negligibly small. For this reason, the interaction of particles of a liquid with gas bubbles leads to immediate interaction of all particles with each other. It is clear that such interaction of particles with each other is not reduced to their pairwise interactions, and the Boltzmann integral of interactions cannot characterize the process of energy absorption in the system. For this reason, the development of the theory of Brownian motion in which the macroscopic degrees of freedom are already isolated will be more reasonable. In contrast to the classical theory of Brownian motion, however, the fluctuations in the thermodynamic ensemble that surrounds Brownian particles-bubbles are not equilibrium, but must be calculated with allowance for the character of Brownian motion of additional degrees of freedom. It is clear that in this case the integral of collisions will no longer have the form of the Boltzmann integral of collisions.

In (9), the kinetic theory of Brownian motion of gas bubbles is developed on the basis of equations of Voinov and Golovin (1), and a closed system of reversible equations of hydrodynamic evolution of bubble liquid in the general approach of kinetic description by the method of microscopic phase density is derived. Generally, in this paper the Hamiltonian form of equations of motion of bubbles moving in a hydrostatic gravitational field in the approximation of large Reynolds numbers and small Weber numbers for each bubble is obtained on the basis of (13). The Hamiltonian equations contain random Langevin forces, whose correlators are considered to be well-known, and therefore they are not derived here. A microscopic phase density is introduced, and an equation that determines it is derived. Averaging the equation for the microscopic phase density, we obtain an equation determining the one-particle distribution function. In this case, the integral of collisions is determined in terms of the simultaneous correlators of phase density and the self-consistent average field. Equations equivalent to those in the BBGKY chain for a sequence of non-equilibrium distribution functions are obtained for the above-mentioned correlators; they are, however, more convenient in the approximation of average field. A system of equations for the moments of the one-particle distribution function is obtained at the neglect of fluctuations in the phase density and average field. The expression for the system entropy is determined by introducing the concept of local thermodynamic equilibrium. A consistent system of obtained equations represents equations of reversible hydrodynamic theory of bubble liquid (9)

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \operatorname{div}(J\mathbf{w}) = 0, \qquad \frac{\partial (mJ)}{\partial t} + \operatorname{div}(mJ\mathbf{w}) = 4\pi\rho\, aJ\, v, \qquad \frac{\partial (aJ)}{\partial t} + \operatorname{div}(aJ\,\mathbf{w}) = \frac{Jv}{a},$$

$$\frac{\partial (mJw_\omega)}{\partial t} + \partial_\alpha\left(mJw_\alpha w_\omega + mP_{\alpha\omega} + \frac{\rho}{9}\partial_\alpha\theta\partial_\omega\theta - \frac{\rho}{18}|\nabla\theta|^2\delta_{\alpha\omega}\right) = -2\, mJ\, g_\omega,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{w}\nabla V = \frac{\mathbf{w}^2}{4} - \frac{v^2}{2a^2} + \frac{\theta^2}{72a^2} - \mathbf{gr} + \frac{P_{\nu\nu}}{4J} + \frac{3A}{2a^2J} + \frac{N/V_S}{4\pi\rho\, a^2 J}\int \frac{\partial\varphi}{\partial a} f_1(x,t),$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \partial_\beta\left[w_\alpha\left(E - \frac{\rho}{36}|\nabla\theta|^2\right)\delta_{\alpha\beta} + w_\alpha\frac{m}{2}P_{\alpha\beta} - \frac{\rho}{18}\dot\theta\partial_\beta\theta\right] = 0,$$

$$E = e + \frac{mJ}{4}\mathbf{w}^2 + 2\pi\rho\, aJ\, V^2 - \frac{2}{3}\Lambda\pi\rho\, aJ\, V\theta + \frac{\rho}{36}|\nabla\theta|^2 + mJ\mathbf{gr},$$

$$V = v + \frac{\theta}{6\Lambda} = -\frac{\Delta\theta}{12\Lambda\pi\, aJ}, \qquad e = \frac{m}{4}P_{\nu\nu} + 2\pi\rho a A - \frac{N}{V_S}\int \varphi f_1(x,t).$$

The main principles of bubble hydrodynamics are formulated and the nonlinear equations of one-velocity bubble hydrodynamics are obtained in (9, 14). The equations of motion are valid for an arbitrary density of bubbles and do not contain the description of the motion of an isolated bubble.

The problem of motion of bubbles in a liquid in a rigid vertical cylindrical container with a rigid base is considered in (15). The container makes vertical vibrations with a displacement amplitude $\Delta$ and an angular frequency $\omega$ in the gravitational field. The equations of ideal liquid in a linear approximation serve as a basis for the model (see (15) and its references).

In this paper, a similar problem of the movement of bubbles in a vibrationg container is considered. The mathematical model describing the movement of bubbles in a liquid is based on a linear variant of bubble hydrodynamics taking into account the characteristics of bubbles proposed in (14). In this case the equations of motion of the carrier liquid are not the Cauchy-Kovalevskaya equations of time due to the presence of bubbles.

**The movement of bubbles in a vibrating container**. Let us consider the following boundary value problem: it is necessary to determine the distribution of pressure and velocity of the carrier liquid from the conditions

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial^4 v}{\partial t^2\partial z^2}, \quad z \in (0,\ \mathrm{L}) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial^3 v}{\partial t\partial z^2} + g, \quad z \in (0,\ \mathrm{L}) \tag{2}$$

$$p\,|_{z=\mathrm{L}} = p_{00}\,, \quad v\,|_{z=0} = \Delta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\,, \quad \Delta << \mathrm{L}. \tag{3}$$

Here $v$ is the vertical component of the velocity vector of the carrier medium, $p_{00} = const$ is the pressure on the free surface, $c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$ is the sound speed, $\rho$ is the equilibrium density, $\gamma$ is the constant characterizing the bubbles (9), $z$ is measured upwards from the container base, L is the height of the liquid column.

Suppose that the height of the liquid column L is not the root of the trigonometrical equation

$$\mathrm{I}(\mathrm{L}) = 0,$$
$$\mathrm{I}(z) = \cos\frac{\omega}{c}\,\frac{z}{\sqrt{1-\frac{\gamma}{\rho}\frac{\omega^2}{c^2}}}\,.$$

The solution to the boundary value problem (1)–(3) in the form of steady sinusoidal vibrations (standing wave, $v(t,\,z) = \psi(z)\cdot\cos(\omega\cdot t)$ ) has the form

$$v = \frac{\mathrm{I}(\mathrm{L}-z)}{\mathrm{I}(\mathrm{L})}\cdot\Delta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\,,$$

$$p = p_{00} + \rho\cdot g\cdot(z-\mathrm{L}) +$$
$$+\frac{\rho\cdot\Delta\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)}{\mathrm{I}(\mathrm{L})}\,\frac{\sin\left((\omega/c)\,(\mathrm{L}-z)/\sqrt{1-\frac{\gamma}{\rho}\frac{\omega^2}{c^2}}\right)}{\omega/c}\left(1-\frac{\gamma}{\rho}\frac{\omega^2}{c^2}\Big/\sqrt{1-\frac{\gamma}{\rho}\frac{\omega^2}{c^2}}\right).$$

For an incompressible bubble liquid ($c=\infty$) this solution is simplified considerably and takes the following form:

$$v = \Delta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\,,$$
$$p = p_{00} + \rho\cdot g\cdot(z-\mathrm{L}) - \rho\cdot\Delta\cdot\omega^2\cdot(\mathrm{L}-z)\cdot\sin(\omega\cdot t)\,.$$

## References


1. *Yordansky S.V.* About the equations of movement of a liquid containing the bubbles of gas, Applied mathematics and technical physics (Russia), No. 3, 1960, pp. 102-110.

2. *Kogarko B.S.* About one model of a liquid with cavitation, The Reports Academies of Sciences USSR, v. 137, No. 6, 1961, pp. 1331-1333.

3. *Van Wijngaarden L.* One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles, Ann. Rev. Fluid Mech. No. 4, 1972, pp. 369-396.

4. *Bedford A., Drumheller C.D.* A theory of bubbly liquids, J.Acoust. Soc. Am. No. 66(1), 1979, pp. 197-208.

5. *Landau L.D.* Hydrodynamics, Moscow, Science, 1988.

6. *Akhiezer A.I., Peletminskii S.V.* Methods of Statistical Physics, Moscow, Science, 1977.

7. *Blokhin A.M., Dorovsky V.N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum, Nova Science Publishers,Inc., 1995.

8. *Dorovsky V.N.* Mathematical Models of Two-Velocity Media, Mathl. Comput. Modelling v. 21, No. 7, 1995, pp. 17-28.

9. *Dorovsky V.N.* A Hydrodynamic Nonlinear Model of Bubble Liquid, Computers Math. Applic. v. 33, No. 6, 1997, pp. 1-12.

10. *Gavriluk S.L., Shugrin S.M.* Mediums with the equations of state, depending from derivatives, Applied mathematics and technical physics (Russia), No. 2, 1996, pp. 35-49.

11. *Russo G., Smereka P.* Kinetik theory for bubbly flow I: collisionless case, SIAM J. Appl. Math. v. 56, No. 2, 1996, pp. 327-357.

12. *Kok JIM B.W.* The Fokker-Planck Equation for Bubbly Flows and the Motion of Gas Bubble Pairs, Applied Scientific Research v. 58, 1998, pp. 319-335.

13. *Voinov O.V., Golovin A.M.* Lagrange's equations for system of bubbles, varied radiuses in a liquid of small viscosity, The Mechanics of a Liquid and Gas (Russia), No. 3, 1970, pp. 117-123.

14. *Dorovsky V.N., Imomnazarov Kh.Kh., Romensky E.I.* A hydrodynamic nonlinear model of bubble liquid (Part II), Computers Math. Applic., v. 33, No. 6, 1997, pp. 13-15.

15. *Nigmatulin R.I.* The Dynamics of Multiphase Media. Part II, Nauka, Moscow, 1987.

# Boundary value problem of the Poincaré-Tricomi type for the mixed type equation of the second kind

**Islomov B.I.**[1], **Abdullayev A.A.**[2]

[1]*National University of Uzbekistan*

[2]*Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers*

e-mail: [1]islomovbozor@yandex.com, e-mail: [2]akmal09.07.85@mail.ru

Consider the equation

$$sgny|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -1 < m < 0 \tag{1}$$

in domain $D = D_1 \cup D_2$, where $D_1$— is the domain bounded by the curve $\sigma$ at $y > 0$ with the ends at the points $A(0,0), B(1,0)$ and the segment $AB$ $(y = 0)$, and $D_2$ is the domain bounded by the segment $AB$ and the characteristics

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

of equation (1).

Introduce the notations

$$J = \{(x,y): \quad 0 < x < 1, \; y = 0\}, \quad \partial D = \vec{\sigma} \cup \overline{AB}, \quad 2\beta = \frac{m}{m+2},$$

here

$$-\frac{1}{2} < \beta < 0. \tag{2}$$

Substituting the variables, equation (1) may be presented in the form

$$u_{xx} + y u_{yy} + \left(\beta + \frac{1}{2}\right) u_y = 0. \tag{3}$$

It should be noted that the class $R_2$ of generalized solutions for equation (1) at $y < 0$ for the first time has been introduced by I.L.Carol [1]; after that, many authors have investigated various boundary value problems for a mixed-type equation of the second kind (see, for example, [3 - 6]).

Classical solutions of the Tricomi problem for equation (3) in bounded and unbounded domains are obtained in [7], [8], [10].

Note that boundary value problems with the Poincaré – Tricomi condition for degenerate equations of elliptic and elliptic-hyperbolic types of the second kind have been insufficiently studied. We mention only [9], [11].

In this paper to study the boundary value problem with the Poincaré – Tricomi condition for equation (1) in the hyperbolic part of the mixed domain a generalized solution of a degenerate hyperbolic equation of the second kind is sought, and in the elliptic part - a classical one.

In the domain $D$ for equation (1) the following problem is studied.

**Poincaré – Tricomi problem (PT).** What is sought is to find a function $u(x,y)$with the following properties:

1) $u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right) \cup C^1\left(D \cup \sigma \cup J\right)$ and the derivatives $u_x$ and $u_y$ can become infinite of the order less than unity and $-2\beta$ at points $A\,(0,0)$ and $B\,(1,0)$, respectively;

2) the function $u(x,y) \in C^2\left(\bar{D}_1\right)$ is a regular solution of equation (1) in the domain $D_1\,(y>0)$, and a generalized solution from class $R_2$ in the domain $D_2\,(y<0)$ [1];

3) the condition of adhesion in the form of

$$u_y(x,-0) = -u_y(x,+0)$$

4) $u(x,y)$ satisfies the following boundary conditions

$$\left.\{\delta(s)A_s[u] + \rho(s)u\}\right|_{\sigma} = \phi(s), \qquad 0 < s < l, \tag{4}$$

$$\left.u(x,y)\right|_{AC} = \psi(x), \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \tag{5}$$

where $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$, $\psi(x)$ - are the given sufficiently smooth functions, and the $\psi(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0; \frac{1}{2}\right)$, condition of consistency is met $\varphi(l) = \psi(0) = 0$,
here

$$A_s[u] = y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$\frac{dx}{ds} = -\cos(n,y)$, $\quad \frac{dy}{ds} = \cos(n,x)$, $\quad n$ is the outward normal to the curve $\sigma$, $l$ is the length of the whole curve $\sigma$, $s$ is the arc length of the curve $\sigma$, measured from the point $B\,(1,0)$.

Assume that the curve $\sigma$ satisfies the following conditions:

1) functions $x(s),\ y(s)$, presenting the parametric equation of curve $\sigma$, have continuous derivatives $x'(s)$, $y'(s)$, that do not vanish simultaneously and have second derivatives that satisfy the Holder order of $\kappa\,(0 < \kappa < 1)$ in the interval $0 \leq s \leq l$;
2) in the vicinity of the end points of curve $\sigma$, the inequality holds:

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leq C\, y^{m+1}(s), \tag{6}$$

here $x(l) = y(0) = 0, \quad x(0) = 1, \quad y(l) = 0$, where $C$ is a constant.

Theorem. If conditions (2) are met and

$$\delta(s)\rho(s) \geq 0, \qquad 0 \leq s \leq l, \tag{7}$$

$$\lim_{y \to 0}(-y)^{\frac{m}{2}} u^2(1,y) = 0, \tag{8}$$

then the solution of the Poincaré – Tricomi problem in the domain $D$ is unique.

The theorem is proved using the method of energy integrals [12].

The existence of a solution to the problem in the domain $D$ is proved by the method of integrals.

## References


1. *I. L. Karol* On a Boundary Value Problem for an Equation of Mixed Elliptic-Hyperbolic Type, DAN SSSR. Vol. 88, No. 2, 197–200 (1958) (in Russian).

2. *M. M. Smirnov Uravneniya smeshannogo tipa [Equations of Mixed Type]* (Moscow, 1970) (in Russian)

3. *S. S. Isamukhamedov* On Boundary Value Problems for the Equation of a Mixed Parabolic-hyperbolic Type of the Second Kind, Degenerate differential equations and inverse problems. Tashkent: Fan. 98–113, (1986)(in Russian).

4. *N. K. Mamadaliev* "On the Representation of a Solution of the Modified Cauchy Problem" Siberian Mathematical Journal, **41** (5), 1087–1097 (2000)(in Russian)

5. *V. M. Dolgopolov, I. N. Rodionova* "Construction of a Special Class of Solutions for One Degenerate Hyperbolic Type Equation" Mat. Modeling and boundary value problems, **3**, 116–121 (2009) (in Russian).

5. *M. S. Salakhitdinov, T. G. Ergashev* "Integral Representation of the Generalized Solution of the Cauchy Problem in the Class for One Hyperbolic Type Equation of the Second Kind" Uzbek Mathematical Journal, textbf1, 67–75 (1995) (in Russian).

6. *M. S.Salakhitdinov , S. S.Isamukhamedov* "Boundary Value Problems for a Mixed-type Equation of the Second Kind" Sardika Bolgarsko math. **3**, 181–188 (1997) (in Russian).

7. *R. S. Khairullin Zadacha Trikomi dlya Uravneniye vtorogo roda s sil'nym vyrozhdeniyem [The Tricomi Problem for the Second Kind Equation with Strong Degeneration]* ( Kazan, 2015) (in Russian)

8. *B. I. Islomov, A. A. Abdullayev* "On a Problem for an Elliptic Type Equation of the Second Kind with a Conormal and Integral Condition" Journal Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2018, **9** (3), 307–318 (2018)

9. *M. S. Salokhitdinov, B. Islomov Uravneniye smeshannogo tipa s dvumya liniyami virojdeniya [Equations of the Mixed Type with Two Lines of Degeneracy]* ("MUMTOZ SO'Z Tashkent, 2009) (in Russian)

10. *M. M. Smirnov Uravneniye smeshannogo tipa [Equations of Mixed Type]* (High School, Moscow, 1985) (in Russian)

# Boundary-value problem for a mixed type equation with the Hilfer's double order derivative and hyper-Bessel fractional differential operator

**E. T. Karimov, M. Ruzhansky, B. H. Toshtemirov**

*V. I. Romanovskiy Intstitute of Mathematics,* e-mail : erkinjon.karimov@mathinst.uz,
*Ghent University*, e-mail : michael.ruzhansky@ugent.be,
*V. I. Romanovskiy Intstitute of Mathematics*, e-mail : b.toshtemirov@mathinst.uz.

Nowadays fractional differential equations have been becoming more interesting and useful tool for modelling real-life problems related to several fields [1-5]. Initial-value problems and boundary-value problems (BVPs) involoving fractional differential operators are more adequate than those of integer order. Especially, studying BVPs for the mixed type equations is also interesting target for many authors (see [6-8]).

In this work, we investigate the boundary problem for a mixed type equation involving the equation with Caputo-like counterpart of a hyper-Bessel fractional differential operator and anomalous diffusion equation with generalized Hilfer's double order derivative in a rectangular domain $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup Q$. Here $0 < a < b$,
$\Omega_1 = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ a < t < b\}$, $\Omega_2 = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < a\}$, $Q = \{(x,t) : 0 < x < 1, t = a\}$.

Let us consider the following boundary-value problem in $\Omega$, finding the solution of the equation

$$f(x,t) = \begin{cases} {}^{C}\left(t^{\theta}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} u\left(x,t\right) - u_{xx}\left(x,t\right), & (x,t) \in \Omega_1 \\ D_t^{(\gamma,\beta)\mu} u\left(x,t\right) - u_{xx}\left(x,t\right), & (x,t) \in \Omega_2 \end{cases} \tag{1}$$

satisfying the conditions

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le b, \tag{2}$$

$$u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le b, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0+} I_t^{(1-\mu)(2-\beta)} u(x,t) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{4}$$

and satisfying the gluing conditions

$$\lim_{t\to a-} I_t^{(1-\mu)(2-\beta)} u(x,t) = \lim_{t\to a+} u(x,t), \quad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to a-} \frac{d}{dt} I_t^{(1-\mu)(2-\beta)} u(x,t) = \lim_{t\to a+} (t-a)^{1-(1-\theta)\alpha} u_t(x,t), \quad 0 < x < 1. \tag{6}$$

Here $0 < \alpha < 1$, $\theta < 1$, $1 < \gamma, \beta < 2$, $0 \le \mu \le 1$,

$${}^{C}(t^{\theta}\frac{d}{dt}) f(t) = (1-\theta)^{\alpha} t^{-\alpha(1-\theta)} (1 - \alpha + \frac{t}{1-\theta}) I_{1-\theta}^{0,1-\alpha}(f(t) - f(a)) \tag{7}$$

is a Caputo-like counterpart of the hyper-Bessel fractional differential operator [9]. $I_{\beta}^{\gamma,\delta} f(t)$ is Erdelyi-Kober fractional integral of a function $f(t) \in C_{\mu}$ with arbitrary parameters

$\delta > 0, \gamma \in R$ and $\beta > 0$ defined as [10]

$$I_\beta^{\gamma,\delta} f(t) = \frac{t^{-\beta(\gamma-\delta)}}{\Gamma(\delta)} \int_a^t (t^\beta - \tau^\beta)^{\delta-1} \tau^{\beta\gamma} f(\tau) d(\tau^\beta)$$

which can be reduced to $I_{a+}^q f(t)$ Riemann-Liouville fractional integral [10]:

$$I_{a+}^q f(t) = \frac{1}{\Gamma q} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} f(\tau) d\tau, \quad f(t) \in C[a,b], \; x \in (a,b).$$

Hilfer's derivative of order $\alpha\,(0 < \alpha \leq 1)$ of type $\mu\,(0 \leq \mu \leq 1)$ is written in the following form [11]:

$$D_t^{\alpha,\mu} f(t) = I_{0+}^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)} f(t)$$

and generalized Hilfer's double orders $\gamma \in (0,1]$, and $\beta \in (0,1]$ type $\mu \in [0,1]$ can be presented as [12]

$$D_t^{(\gamma,\beta)\mu} f(t) = I_{0+}^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I_{0+}^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t).$$

Similarly, generalized Hilfer's double order fractional derivative of orders $\gamma \in (1,2]$, and $\beta \in (1,2]$ type $\mu \in [0,1]$ is defined in the form below:

$$D_t^{(\gamma,\beta)\mu} f(t) = I_{0+}^{\mu(2-\alpha)} (\frac{d}{dt})^2 I_{0+}^{(1-\mu)(2-\beta)} f(t). \tag{8}$$

Since $D_t^{(\gamma,\beta)1} f(t) = {}^C D^\gamma f(t)$ and $D_t^{(\gamma,\beta)0} f(t) = D^\beta f(t)$, double-order fractional derivative is a continuous interpolation, with respect to parameter $\mu \in [0,1]$, and it can be reduced to Riemann-Liouville $D^\beta f(t)$ fractional differential operator of order $\beta$ and ${}^C D^\gamma f(t)$ Caputo fractional differential operator of order $\gamma$. For that reason, using (8) can open a way generalizing the model of anomalous process than based on standart [11] Hilfer's definition.

In order to solve the problem we use Fourier method. Firstly, we write the solutions in both domains and then find functional relations on $Q$.

Recently, V.M. Bulavatsky has announced the solution of (1) in $\Omega_2$ by using Laplace transform for $\gamma \in (0,1)$ and $\beta \in (0,1)$ [12]. We repeat the steps applying the Laplace transform for finding the solution of (1) in $\Omega_2$ satisfying (4) and $\lim\limits_{t\to a-} \frac{d}{dt} I_t^{(1-\mu)(2-\beta)} u(x,t) = \tau_1(x)$ condition needed for existence of Laplace transform for $\gamma \in (1,2)$ and $\beta \in (1,2)$, $\mu \in (0,1)$. The solution is written with unknown function $\tau_1(x)$.

Then, the solution of (1) in $\Omega_1$ satisfying (2), (3) conditions and $u(x, a+) = \psi(x)$ is also written using the solution found in [9], $\psi(x)$ is unknown.

Afterwards, substituting the solutions in both domains into the gluing conditions (5) and (6) yields linear algebraic equations with respect to unknown functions $\tau_1(x)$ and $\psi(x)$.

The system of linear algebraic equations is equivalent to the considered problem in terms of existing the solution. Therefore, we prove that the system of linear algebraic equations has only one solution. In other words, this proves that the considered problem's unique solution exists.

**References**

1. *Friedrich C.* Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives, Rheologica Acta. 30(2), 1991, pp. 151-158.
2. *Kumar D, Singh J, Al Qurashi M* A new fractional SIRS-SI malaria disease model with application of vaccines, antimalarial drugs, and spraying, Adv Differ Equa., 1, 2019, pp. 278.
3. *Podlubny Igor.* Fractional Differential Equations. United States: Academic Press. 1999. 340 p. ISBN 0-12-558840-2.
4. *D. Baeleanu, Z. B. Guvenc and J. A. T. Machado.* New trends in nanotechnology and fractional calculus applications, Camputers and Mathematics with Applications, vol. 59, 2010, pp. 1835-1841.
5. *C. G. Koh and J. M. Kelly.* Application for a fractional derivative to seismic analysis of base-izolated models, Eathquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 19. 1990, pp. 229-241.
6. *Z. A. Nakhusheva.* Non-local boundary value problems for main and mixed type differential equations. Nalchik. 2011 [in Russian].
7. *E. T. Karimov.* Boundary value problems for parabolic-hyperbolic type equations with spectral parameters. PhD Thesis, Tashkent, 2006.
8. *S.Kh. Gekkieva.* A boundary value problem for the generalized transfer equation with a fractional derivative in a semi-infinit domain. Izv. Kabardino-Balkarsk. Nauchnogo Tsentra RAN, 8(1), 2002, pp. 3268-3273. [in Russian].
9. *Fatma Al-Musalhi, Nasser Al-Salti and Erkinjon Karimov.* Initial boundary value problems for fractional differential equation with hyper-Bessel operator. Fract. Calc. Appl. Anal., Vol. 21, No 1 2018, pp. 200-219, DOI: 10.1515/fca-2018-0013.
10. *A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo.* Theory and Applications of Fractional Differential Equation. Elsevier, Amsterdam. 2006.
11. *R. Hilfer.* Fractional time evolution, in: R. Hilfer (ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, Word SAci., Singapore . 2000, pp. 87-130.
12. *V. M. Bulavatsky.* Closed form of the solutions of some boundary-value problems for anomalous diffusion equation with Hilfer's generalized derivative, Cybernetics and Systems Analysis. 30(4), 2014, pp. 570-577.


# On the eigenvalues of the bilaplacian on a lattice with compact perturbation


**Ahmad Khalkhuzhaev, Mardon Pardabaev**

*Institute of Mathematics named after V. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*

e-mail: m.pardaboev@mathinst.uz



***Abstract:*** We consider the family $\widehat{\mathbf{h}}_\mu = \widehat{\Delta}\widehat{\Delta} - \mu\widehat{\mathbf{v}}$, $\mu \le 0$, of discrete Schrödinger-type operators in lattice $Z^d$, $d = 1, 2$ where $\widehat{\Delta}$ is the discrete Laplacian and $\widehat{\mathbf{v}}$ is of rank-one. We prove that for any $\mu < 0$ the discrete spectrum of $\widehat{\mathbf{h}}_\mu$ is a singleton $\{e(\mu)\}$ and $e(\mu) > 4d^2$, $d = 1, 2$ for all $\mu < 0$. Moreover, we find the expansion of $e(\mu)$ for small $\mu < 0$.

In this thesis we investigate the spectral properties of the discrete biharmonic operator $\widehat{\Delta}\widehat{\Delta}$ perturbed by a rank-one potential $\widehat{\mathbf{v}}$, i.e. $\widehat{\mathbf{h}}_\mu := \widehat{\Delta}\widehat{\Delta} - \mu\widehat{\mathbf{v}}$ in the one and two dimensional cubical lattice $Z^d$,$d = 1,2$ where $\mu \leq 0$ is a coupling constant. This model includes also a discrete Schrödinger operator on $Z$, associated to a system of one particle whose dispersion relation has a degenerate bottom. Moreover, in view of the momentum representation below, $\widehat{\mathbf{h}}_\mu$ can also be considered as a Friedrichs model in $L^2(T^d)$, $d = 1,2$ with degenerate bottom, where $T^d$, $d = 1,2$ is the one-dimensional torus. We recall that spectral theory of discrete Schrödinger operators and Friedrichs models with non-degenerate bottom in particular, with discrete Laplacian, have been extensively studied in recent years (see e.g. [1,2]) because of their applications in the theory of ultracold atoms in optical lattices [3,4].

Let $\ell^2(Z^d)$, $d = 1,2$ be the Hilbert space of square-summable functions in $Z^d$, $d = 1,2$ and consider the self-adjoint bounded discrete Schrödinger-type operator

$$\widehat{\mathbf{h}}_\mu := \widehat{\Delta}\widehat{\Delta} - \mu\widehat{\mathbf{v}}, \qquad \mu \leq 0,$$

in $\ell^2(Z^d)$, $d = 1,2$ where

$$\widehat{\Delta} f(x) = f(x) - \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}, \qquad f \in \ell^2(Z^d),$$

is the discrete Laplacian, and $\widehat{\mathbf{v}}$ is a rank-one operator

$$\widehat{\mathbf{v}}\widehat{f}(x) = \widehat{v}(x) \sum_{y \in Z} \widehat{v}(y)\widehat{f}(y)$$

where $\widehat{v} \in \ell^2(Z^d) \setminus \{0\}$ is a real-valued function such that

$$|\widehat{v}(x)| \leq Ce^{-a|x|}, \qquad x \in Z^d \qquad (1)$$

for some $C$, $a > 0$. Notice that under assumption (1), the function

$$v(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x \in Z^d} \widehat{v}(x) e^{ixp}$$

is analytic on $T^d$ , $d = 1,2$. Recalling

$$\sigma(\widehat{\Delta}) = \sigma_{ess}(\widehat{\Delta}) = [0, 2d],$$

from the spectral theory it follows that

$$\sigma(\widehat{\Delta}\widehat{\Delta}) = \sigma_{ess}(\widehat{\Delta}\widehat{\Delta}) = [0, 4d^2],$$

where $d = 1,2$ and hence, by the compactness of $\widehat{\mathbf{v}}$ and Weyl's Theorem,

$$\sigma_{ess}(\widehat{\mathbf{h}}_\mu) = [0, 4d^2]$$

for any $\mu \leq 0$. Now we state the main results of the thesis.

**Theorem.** *For any $\mu < 0$ there exists a unique eigenvalue $e(\mu)$ of $\widehat{\mathbf{h}}_\mu$. Moreover, $e(\mu) > 4d^2$, $d = 1,2$ and for sufficiently small and negative $\mu$, $e(\mu)$ has the following expansions:*
(*a*) *if $d = 1$*

$$(e(\mu) - 4)^{1/2} = -C_1\mu + \sum_{n \geq 1} C_{1,n}\mu^{n+1}$$

*where* $\{C_{1,n}\}$ *are some real coefficients and* $C_1 > 0$
(*b*) *if* $d = 2$

$$(e(\mu) - 16)^{1/2} = \kappa \cdot exp(\frac{1}{C_2\mu}) + \sum_{n+m\geq 1, n,m\geq 0} C_{2,nm}\mu^{n+1}(-\frac{1}{\mu}exp(\frac{1}{C_2\mu}))^{m+1}$$

*where* $\{C_{2,nm}\}$ *are some real coefficients and* $\kappa > 0$ *and* $C_1 > 0$

### References


1. *S. Albeverio, S. Lakaev, K. Makarov, Z. Muminov* The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. Commun. Math. Phys. **262** (2006), 91–115.
2. *G. Graf, D. Schenker:* 2-magnon scattering in the Heisenberg model. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **67**, 91–107 (1997).
3. *D. Jaksch et al:* Cold bosonic atoms in optical lattices. Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 3108–3111.
4. *M. Lewenstein, A. Sanpera, A. Ahufinger:* Ultracold Atoms in Optical Lattices. Simulating Quantum Many-Body Systems. Oxford University Press, Oxford, 2012.


# On the problem of maintaining the required temperature regime


**Komilov N.M.**

*Andijan State University*
E-mail: n.m.komilov@mail.ru


We consider the problem of maintaining the required temperature regime in a certain cylindrical domain. The temperature regime is changed by means of heaters located inside this domain. The control is carried out by changing the volume of the heaters immersed in this area.

Note that due to the important applications of the problem of controlling the heat transfer process, numerical methods for solving it continue to develop (see e.g. [1] and [2]).

In this paper, we analyze this problem from the point of view of solving a special initial-boundary value problem for the heat equation.

Let $\Omega \subset R^n$ has the form

$$\Omega = D \times (0, H),$$

where $D \subset R^{n-1}$. We use notation $x = (\widetilde{x}, x_n)$, where $\widetilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in D$ and $0 < x_n < H$.

Consider the problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x,t) + f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

with Robin boundary conditions

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} + \sigma u(x,t) = 0, \quad x \in \partial D \times [0,H], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(\widetilde{x},0,t)}{\partial x_n} \;=\; \frac{\partial u(\widetilde{x},H,t)}{\partial x_n} \;=\; 0, \quad \widetilde{x} \in D, \tag{3}$$

and initial condition

$$u(x,0) \;=\; 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Here

$$f(x,t) \;=\; g(\widetilde{x}) \cdot \omega(x_n, h(t)),$$

where the $h = h(t)$ is a continuous function which satisfies condition

$$0 \le \, h(t) \le H, \quad t \ge 0, \tag{5}$$

and the function $\omega$ has the form

$$\omega(x_n, h) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{for} \quad 0 \le x_n \le h, \\ 0 & \text{for} \quad x_n > h. \end{cases} \tag{6}$$

In this paper we assume that $g$ is a given non-negative function from Sobolev space $W_2^2(D)$ associated with distribution of heat source.

We suppose that $\sigma = \sigma(\widetilde{x})$ (thermal conductivity of the walls) is a given piecewise smooth non-negative function, which does not depend on $x_n$ and is not identically zero. The condition (2) means that on the surface $\partial D \times [0,H]$ a heat exchange takes place according to Newton's law (see, e.g. [3], Sect. III.1.4).

Let $B$ be the Banach space and $T > 0$. Denote by $C([0,T] \to B)$ the Banach space of all continuous maps $u : [0,T] \to B$ with the norm

$$\|u\| \;=\; \max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|.$$

Analogously, we denote by $C^1([0,T] \to B)$ the set of all maps $u : [0,T] \to B$ which are continuously differentiable on the interval $0 \le t \le T$.

In other words, $u \in C^1([0,T] \to B)$ if there exists $u' \in C([0,T] \to B)$ such that

$$u(t) \;=\; u(0) \;+\; \int_0^t u'(s)\, ds \tag{7}$$

(definition and properties of Bochner integral see [4], Chapter V, Section 5). In this case we say that $u'(t)$ is derivative of $u(t)$.

**Definition.** *We say that the function $u(x,t)$ is the solution of the problem (1)-(4) if*

$$u \in C([0,T] \to W_2^2(\Omega)) \cap C^1([0,T] \to L_2(\Omega)) \tag{8}$$

*and all equations (1)-(4) are satisfied.*

**Remark 1.** Note that according to definition (8), the gradient of the solution belongs to Sobolev space $W_2^1(\Omega)$ and because of that this gradient has the trace on $(n-1)$-dimensional smooth surfaces. In particular, the Robin boundary condition (2) and Neumann condition (3) are correctly defined.

Let $\rho \in L_2(\Omega)$ be the weight function, which does not depend on $x_n$, i. e. $\rho = \rho(\widetilde{x})$. It means that

$$\rho(\widetilde{x}) \;\geq\; 0, \quad \widetilde{x} \in D, \quad \int\limits_D \rho(\widetilde{x})\, d\widetilde{x} \;=\; \frac{1}{H}, \tag{9}$$

and

$$\int\limits_\Omega \rho(\widetilde{x})\, dx \;=\; \int\limits_0^H dx_n \int\limits_D \rho(\widetilde{x})\, d\widetilde{x} \;=\; 1.$$

The problem is for required average temperature $\theta(t)$ find control function $h(t)$ such that the equation

$$\theta(t) \;=\; \int\limits_\Omega u(x,t)\rho(x)\, dx \tag{10}$$

is fulfilled.

**Theorem 1.** *Assume that weight function $\rho \in L_2(D)$ is not orthogonal to $g$ and satisfies condition (9).*

*Let $\theta : \overline{R_+} \to \overline{R_+}$ be continuously differentiable function, $\theta'(t)$ has the right derivative at point $t = 0$ and the following conditions*:

$$\theta(0) \;=\; \theta'(0) \;=\; 0, \quad \theta''(0) \;>\; 0, \tag{11}$$

*are fulfilled.*

*Then there exists $T > 0$ and continuous function $h : [0,T] \to [0,H]$ such that the solution of the problem (1)-(4) exists and the following equation*

$$\int\limits_\Omega u(x,t)\rho(\widetilde{x})\, dx \;=\; \theta(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{12}$$

*is valid.*

**Remark 2**. Note that Theorem 1 asserts the existence of a local solution. For the global solution consider the problem

$$\begin{aligned} -\Delta V(\widetilde{x}) \;&=\; Hg(\widetilde{x}), \quad \widetilde{x} \in D,\\ V(\widetilde{s}) \;&=\; 0, \quad \widetilde{s} \in \partial D. \end{aligned}$$

The function $V$ has the meaning of a stationary temperature regime at maximum heating. We prove that a necessary condition for the existence of a global solution is the fulfillment of the inequality

$$\theta(t) \;\leq\; \int\limits_D V(\widetilde{x})\rho(\widetilde{x})\, d\widetilde{x}.$$

This means that the function $\theta(t)$ should not exceed the average weighted temperature at maximum heating.

**Remark 3.** Note that earlier a similar result was obtained in [5] in the case when the additional smoothness was required from the weight function $\rho(x)$.

In the present work, no smoothness is required from the weight function, except for belonging to class $L_2(D)$.

## References

1. *Altmüller N. and Grüne L.* Distributed and boundary model predictive control for the heat equation. Technical report, University of Bayreuth, Department of Mathematics, 2012.

2. *Gavrikov A., Kostin G.* "Heat Transfer Processes in a Cylindrical Body Surrounded by Air," in Proc. of 59th MIPT Scientific Conference, Moscow, Russia, 2016 (in Russian).

3. *Tikhonov A.N., Samarsky A.A.* Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1966.

4. *Yosida K.* Functional Analysis, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 123, Springer Verlag, Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1965.

5. *Alimov Sh. A., Komilov N. M.* On the control problem associated with the heat transfer, Abstracts of the International Online Conference "Frontier in Mathematics and Computer Science October 12-15, 2020, Tashkent, pp. 12-13.


# Minimal tightness of the hyperspace of convergent sequences


**Mamadaliev N. K., Ismoilov D. I.**

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*
*e-mail: nodir_88@bk.ru*


Let $X$ be a $T_1$-space. The set of all nonempty closed subsets of a space $X$ denote by $\exp X$. The family of all sets in the form

$$O\langle U_1, ..., U_n\rangle = \left\{ F : \ F \in \exp X, \ F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i, \ F \bigcap U_i \neq \emptyset, \ i = 1, 2, ..., n \right\},$$

where $U_1, ..., U_n$ is a sequence of open sets in $X$, generates a base of a topology on the set $\exp X$. This topology is called the Vietoris topology. The set $\exp X$ with the Vietoris topology is called the exponential space or the hyperspace of $X$ [1].
A convergent sequence [2] in a topological space $X$ is a function $f$ from $\omega$ into $X$ for which there is $x \in X$ in such a way that: for each $U \in \tau_x$ with $x \in U$ there exists $n \in \omega$ with $f[\omega \backslash n] \subseteq U$. In this case,we will say either that $f$ converges to $x$ or $x$ is the limit of $f$, and this fact will be denoted by either $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = x$ or $f(n) \to x$. We shall write $(f(n))_{n\in\omega}$ to refer to $f$. If $|ran(f)| = \omega$, we say that $f$ is nontrivial. In connection with this concept, in this paper, a subset $S$ of a space $X$ will be called a nontrivial convergent sequence in $X$ if : $S \in [X]^{\omega}$ and there is $x \in S$ in such a way that $(f(n))_{n\in\omega}$ for each $U \in \tau_x$ with $x \in U$ (see[3]). When this happens, the point $x$ is called the limit point of $S$ and we will say that $S$ converges to $x$ and write either $S \to x$ or $\lim S = x$.

For a space $X$, let [2]

$K(X)$=$\{A \in CL(X) : A$ is compact$\}$ and

$S_c(X)$=$\{S \in K(X) : S$ is a nontrivial convergent sequence in $X$ $\}$

It is clear that $S_c(X)$ is a subset of $\exp X$. On the set $S_c(X)$ we consider the Vietoris topology induced from $\exp X$.

**Definition.** [3] Let $\tau$ be an infinite cardinal, $X$ and $Y$ topological spaces. $A$ function $f\colon X \to Y$ is said to be strictly $\tau$-continuous if for every subspace $A$ of $X$ such that $|A| \leq \tau$, there exists a continuous function $g\colon X \to Y$ such that $g|_A = f|_A$.
The minimal tightness of a space $X$ is
$t_m(X)$=min$\{\tau$: $\tau$ is an infinite cardinal and every strictly $\tau$-continuous real-valued function on $X$ is continuous$\}$.

The main result of the thesis is following

**Theorem**. For every Tychonoff space $X$ and every uncountable regular cardinal $\tau$ the following conditions are equivalent:

1) $t_m(X) \leq \tau$;

2) $t_m(S_c(X)) \leq \tau$.

### References


1.*Fedorchuk V.V., Filippov V.V.*. General topology. The basic constructions. Moscow, 2014.

2.*D. Maya, P.P. Covarrubias, R.P. Mendoza*, Cardinal functions of the hyperspace of convergent sequences // Math. Slovaca 68 (2018), No. 2, 431–450.

3.*Oleg Okunev*, The minitightness of of products // Topology and its applications 208 (2016) 10-16.


# A connection between the superextension and the space of probablity measures


**Mamadaliyev N.K., Ma'rufxonova M.A.**

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
Tashkent, Uzbekistan

e-mail nodir_88@bk.ru, e-mail marufxonovamohinur@gmail.com


Let $X$ be a compact space. By $C(X)$ denote the set of all continuous maps $\varphi : X \to R$ with the usual sup-norm $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X\}$. A continuous functional $\mu : C(X) \to R$ is called a measure on the compact $X$. A measure is positive (notation $\mu \geq 0$), if $\mu(\varphi) \geq 0$ for any $\varphi \geq 0$. A measure is normed, if $\|\mu\| = 1$. A positive normed measure is called a probability measure. A space consisting of all probability measures, denote by $P(X)$. A neighborhood base at a point $\mu \in P(X)$ consists of all the sets in the form

$$O(\mu, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k, \varepsilon) = \{\nu \in P(X) : |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, ..., k\}$$

where $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \in C(X)$ and $\varepsilon > 0$.

Define $\xi_\mu = \{F \in \exp(X)\colon \mu(F) > \frac{1}{2}\}$ for $\mu \in P(X)$.

A system $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space $X$ is called linked if every two elements of $\xi$ have non-empty intersection. Each linked system can be filled up to a maximal linked system (MLS), but such a completion is not unique [1].

**Proposition 1.**[1] A linked system $\xi$ of a space $X$ is MLS iff it has following density property:

if a closed set $A \subset X$ intersects all the elements of $\xi$ then $A \in \xi$.

The set of all maximal linked systems of a space $X$ we denote by $\lambda X$.

For a closed set $A \subset X$ we suppose

$$A^+ = \{\xi \in \lambda X : A \in \xi\}.$$

The family of sets in the form $A^+$ becomes a closed subbase in the space $\lambda X$.

For an open set $U \subset X$ we get

$$O(U) = \{\xi \in \lambda X : \, there\, exists\, such\, F \in \xi\, that\, F \subset U\}.$$

The family of all the sets of the form $O(U)$ covers the set $\lambda X\,(O(X) = \lambda X)$, so it becomes a subbase of a topology on $X$. The set $\lambda X$ with this topology, is called the superextension of $X$. The family of all sets in the $O(U_1, U_2, ..., U_n) = \{\xi \in \lambda X : for\, each\, i = 1, 2, ..., n\, there\, exist\, F_i\, such\, that\, F_i \subset U\}$, where $U_1, U_2, ..., U_n$ are open sets of $X$, forms a base of topology on $\lambda X$.

For an arbitrary point $x \in X$ we denote by $\eta(X)$ the family of all closed sets of $X$ containing $x$. The system $\eta(X)$ is an ultrafilter, and – a fortiori –MLS. Thereby, the mapping $\eta : X \to \lambda X$, which is continuous by equality

$$U = \eta^{-1} O(U) \tag{1}$$

for any open set $U \subset X$. From the equality (1) we obtain that for any $T_1$-space $X$ the mapping $\eta$ becomes an embedding of the space $X$ into its superextension $\lambda X$.

**Lemma 1.** $\xi_\mu \in \lambda(X)$ if and only if $\mu(A) \neq \frac{1}{2}$ for every $A \in \exp(X)$. Consider the following subset of the space $P(X)$:

$P'(X) = \{\mu \in P(X) \colon \mu(F) \neq \frac{1}{2}$ for any $F \in \exp(X)\}$.

Define the map $\Phi \colon P'(X) \to \lambda(X)$ with the rule $\Phi(\mu) = \xi_\mu$ for $\mu \in P'(X)$. By lemma 1 one can easily see that this mapping is well defined.

Consider the following set:

$$\langle U; 1, \epsilon\rangle = \{\mu \in P(X) \colon \mu(U) > \epsilon\}.$$

where is $U$ an open set in X and $\varepsilon > 0$. By proposition 2.1[2] the set $\langle U; 1, \epsilon\rangle$ is open in $P(X)$, since $P(X)$ is a subspace of $O(X)$.

**Proposition 2.** The mapping $\Phi \colon P'(X) \to \lambda(X)$ is continuous.

## References


1. *В.В.Федорчук, В.В.Филиппов* Общая топология, Физматлит, Москва, 2006, 332 стр.

2. *А.А. Заитов* О фунторе слабо аддитивных $\tau$-гладких функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления.

# Approximate solution of the integral equations involving kernel with additional singularity

**Y. S. Mishura, H. S. Zhelezniak**

*Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics Taras Shevchenko National University of Kyiv*
*Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics Taras Shevchenko National University of Kyiv*
myus@univ.kiev.ua, hanna.zhelezniak@gmail.com

These theses will be devoted to the approximate solutions of the Fredholm integral equations of the second kind on the interval $[0, T]$, with the kernel of the form $K(t,s) = \frac{L(t,s)}{|t-s|^\alpha}, \alpha \in (0,1)$, where the numerator $L(t,s)$ is bounded and continuous a.e. with respect to the Lebesgue measure but can have the points of discontinuity on $[0,T]^2$, due to the need to approximately solve such equations when considering some optimization problems associated with mixed Brownian-fractional Brownian motion. We called such a kernel as having an additional singularity. Both cases, $H \in (0, \frac{1}{2})$ and $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ were considered and as the result, the problem was reduced to the couple of the same integral equations as in the case where the minimization of small deviations was studied. In the case $H \in (0, \frac{1}{2})$ the integral equation contains the kernel with additional singularity whereas in the case $H \in (\frac{1}{2}, 1))$ the kernel is simply weakly singular. In order to deal with the kernel with additional singularity applying well-known methods for weakly singular kernels [1-2], we prove the theorem on the approximation of solution of integral equation with the kernel containing additional singularity by the solutions of the integral equations whose kernels are weakly singular but the numerator is continuous.

Let us consider the integral operator $A$ defined by its kernel function $K(t,s)$ via formula

$$(Ax)(t) = \int_0^T K(t,s)x(s)ds, 0 \le t \le T, \quad (1)$$

where $x$ is taken from some space of functions defined on $[0,T]$, and consider the Fredholm integral equation of the second kind

$$x(t) + (Ax)(t) = g(t), t \in [0,T], \quad (2)$$

where $g(t) \in L([0,T])$ is a given function.

**Theorem 1.** Let $K(t,s)$ be the kernel defined above, where the numerator $L(t,s)$ has the following properties
(i) $L$ is bounded and symmetric.
(ii) $L$ is continuous, except finite number of points.
(iii) $L$ is a positively definite kernel.

Let $x \in L_2([0,T])$ be a unique solution of equation (2), $L_n(t,s)$ can be chosen in such a way that the respective integral operators are self-adjoint, for sufficiently large $n \ge 1$ the equation

$$x_n(t) + (A_n x)(t) = g(t), \quad (A_n x)(t) = \int_0^T K_n(t,s)x(s)ds, 0 \le t \le T,$$

$$K_n(t,s) = \frac{L_n(t,s)}{|t-s|^\nu}, \quad \nu \in (0,1),$$

has a unique solution $x_n \in L_2([0,T])$, and

$$\|x_n - x\|_{L_2([0,T])} \to 0, n \to \infty.$$


**References**

1. *Atkinson, K. E* A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976.

2. *Babolian, E., Arzhang Hajikandi, A.* The approximate solution of a class of Fredholm integral equations with a weakly singular kernel, Comput. Appl. Math. 235, 5 (2011), 1148вЂ“1159.


# Weighted harmonic measure


**Narzillaev N., Kuldashev K., Eshdavlatova S.**

*National University of Uzbekistan*

n.narzillaev@nuu.uz, qobil2407@mail.ru, sevaraeshdavlatova@gmail.com


The classical potential theory is based on harmonic and subharmonic functions. The main objects of potential theory are harmonic measure, transfinite diameter, Green's function and condenser capacity. Nowadays, in connection with integral estimates of polynomials in approximation questions, a harmonic measure and a Green's function with a certain weight function have been considered and applied. The aim of this thesis is to introduce a harmonic measure with a subharmonic weight function $\psi$.

A harmonic measure is defined as an extremal function in the class of subharmonic ($sh$) functions. Let $E \subset D$ be a set in the regular domain $D \subset R^n$. Regularity of $D$ means, that there exists a $\rho(x) \in sh(D) : \rho|_D < 0, \lim\limits_{x \to \partial D} \rho(x) = 0$. We denote by $\mathcal{U}(E,D)$ the class of all functions $u(x) \in sh(D)$, such that $u|_E < -1, \ u|_D < 0$ and let $\omega(x,E,D) = \sup\{u(x) : u(x) \in \mathcal{U}(E,D)\}$. The regularization $\omega^*(x,E,D) = \overline{\lim\limits_{\xi \to x}} \omega(\xi,E,D) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{x \in B(0,\varepsilon)} \omega(x,E,D)$ is called the harmonic measure of $E$ with respect to $D$ [1].

Let $\psi(x) \in sh(D)$ negative function in $D$. We denote by $\mathcal{U}(E,D,\psi)$ the class of all functions $u(x) \in sh(D)$, such that $u|_E \leq \psi(x)|_E, \ u|_D < 0$ and let

$$\omega(x,E,D,\psi) = \sup\{u(x) : u(x) \in \mathcal{U}(E,D,\psi)\}.$$

**Definition 1.** The function $\omega^*(x,E,D,\psi) = \overline{\lim\limits_{\xi \to x}} \omega(\xi,E,D,\psi)$ is called the $\psi$-harmonic measure of $E$ with respect to $D$.

Note that $\omega^*(x,E,D,-1)$ coincides with the harmonic measure of the classical potential theory, i.e. $\omega^*(x,E,D,-1) = \omega^*(x,E,D)$. The function $\omega^*(x,E,D,\psi)$ satisfies many of the properties of $\omega^*(x,E,D)$.

**Definition 2.** A point $x^0 \in K$ is said to be globally $\psi$-regular if $\omega^*(x^0,K,D,\psi) = \psi(x^0)$. It is said to be locally $\psi$-regular if for any neighborhood $B$, $x^0 \in B \subset \mathbf{R}^n$ the intersection $K \cap \bar{B}$ is globally $\psi$-regular at the point $x^0$, i.e. $\omega^*(x^0, K \cap \bar{B}, D, \psi) = \psi(x^0)$.

**Theorem.** Let $\psi \in C(K)$. A fixed point $x^0 \in K \subset \mathbf{R}^n$ is locally $\psi$-regular if and only if it is locally regular.

It should be noted here that the conditions for the continuity of the function $\psi(x)$ in the theorem are essential. In work [3] we give an example, which shows, that when the function $\psi(x)$ is discontinuous, then the theorem is false. I.e., if the function $\psi(x)$ has discontinuity points, then some point $x_0 \in K \subset R^2$ can be a $\psi$-regular point, but it is not a regular point.

### References


1. *Sadullaev A.* Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds. Uspekhi Mat. Nauk 36:4. pp. 53-105 (1981).

2. *Nevanlinna R.* Analytic Functions. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 376 p. (1970).

3. *Riesz F.* Uber die Randwerte einer analytischen Funktion. Math Z 18, pp. 87-95. (1923).

4. *Narzillaev N.X.* About $\psi$-regular points. Tashkent, Acta NUUz, N2. 2., pp. 173-175 (2017).

5. *Narzillaev N.X., Kuldashev K.K.* The $\psi$ harmonic measure and its properties. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Volume 3, Issues 4, 463 – 473 p. (2017).


## Some disconnected spaces and the functor of the permutation degree


**Narimbetova A.**

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
Tashkent, Uzbekistan
e-mail aygul.narimbetova@gmail.com


A space is called extremally disconnected (or ED for short) if it is regular and the closure of every open set is open. This term first appeared in print in E. Hewitt's doctoral dissertation [1, Definition 16] in 1943.

Closely related to ED space, basically disconnected (or BD for short) space is defined by: the closure of every cozero set (often called "functionally open set") is open.

A permutation group $X$ is the group of all permutations (i.s.one-one and onto mappings $X \to X$. A permutation group of a set $X$ is usually denoted by $S(X)$. If $X = \{1, 2, 3, ...n\}$, $S(X)$ is denoted by $S_n$ , as well.

Let $X^n$ be the $n$-th power of a compact $X$. The permutation group $S_n$ of all permutations, acts on the $n$-th power $X^n$ as permutation of coordinates. The set of all orbits of this action with quotient topology we denote by $SP^nX$ . Thus, points of the space $SP^nX$ are finite subsets (equivalence classes) of the product $X^n$. Thus two points $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in X^n$ are considered to be equivalent if there is a permutation $\sigma \in S_n$ such that $y_i = x_{\sigma(i)}$.The space $SP^nX$ is called the $n$ -permutation degree of a space $X$. Equivalent relation by which we obtained space $SP^nX$ is called the symmetric equivalence relation. The $n$-th permutation degree is always a quotient of $X^n$. Thus, the quotient map is denoted by as following: $\pi_n^s : X^n \to SP^nX$. Where for every $x = (x_1, ..., x_n) \in X^n$, $\pi_n^s((x_1, ..., x_n)) = [(x_1, ..., x_n)]$ is an orbit of the point $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$.

The concept of a permutation degree has generalizations. Let $G$ be any subgroup of the group $S_n$. Then it also acts on $X^n$ as group of permutations of coordinates. Consequently, it generates a $G$ -symmetric equivalence relation on $X^n$. This quotient space of the product of $X^n$ under the $G$-symmetric equivalence relation is called $G$-permutation degree of the space $X$ and it is denoted by $SP_G^n$. An operation $SP_G^n = SP^n$ is also the covariant functor in the category of compacts and it is said to be a functor of $G$ -permutation degree. If $G = S_n$ then $SP_G^n = SP^n$. If the group $G$ consists only of unique element then $SP_G^n = X^n$ [2].

**Theorem 1.** Let $X$ be an infinite $T_1-$space. The topological space $X$ is extremally disconnected if and only if $SP^2X$ is extremally disconnected.

**Theorem 2.** Let $X$ be an infinite $T_1-$space. The topological space $X$ is basically disconnected if and only if $SP^2X$ is basically disconnected.

**Theorem 3.** Let $X$ be an infinite $T_1-$space. The topological space $X$ is hereditarily disconnected if and only if $SP^2X$ is hereditarily disconnected.

**Corollary.** The functor $SP^2$ does not preserve the extremally disconnectedness, basically disconnectedness and hereditarily disconnectedness.

### References


1.*Hewitt E.* A problem of set-theoretic topology // Duke Math. J. 10 (1943), 309–333.

2.*Fedorchuk V. V., Filippov V. V.* Topology of hyperspaces and its applications // Mathematica, cybernetica. 4 (1989), 48 p.


# On the geometry of submersions


**Narmanov A.Ya.,Sharipov X.F.**

*Национальный университет Узбекистана, Ташкент, 100174, Узбекистан*

narmanov@yandex.ru,jahongirshamsiyev455@gmail.com


Differentiable mappings of maximal rank play an important role in all branches of mathematics, in particular in Riemannian geometry. One of the important classes of differentiable mappings of maximal rank consists of immersions. Immersions have been intensively studied since the inception of Riemannian geometry.The geometry of immersed manifolds is a generalization of the classical differential geometry of surfaces in Euclidean space. The differential geometry of isometric immersions and embeddings is well studied and well represented in many textbooks on differential geometry.

The dual concept of submersion was formed relatively recently, in the second half of the twentieth century [1]. The study of the geometry of submersions, in particular the geometry of Riemannian submersions, proved to be very fruitful due to the fact that Riemannian submersions have applications in all sections of modern Riemannian geometry. The study of the geometry of submersions is closely related to the study of the geometry of foliations, which is an important section of modern geometry. Submersion generates a foliation whose leaves are level surfaces of the submersion. Therefore, studying the geometry of submersions is important in the theory of foliations

Let $M$ be a smooth connected Riemannian manifold of dimension $n$ with Riemannian metric $g$.

Smoothness in this paper means smoothness of class $C^{\infty}$.

**Definition 1.** Differentiable mapping $\pi : M \to B$ of maximal rank, where $B$ is a smooth Riemannian manifold of dimension $m$, called submersion for $n > m$.

By the rank theorem of a differentiable function the full inverse image $L_p = \pi^{-1}(p)$ of of every point $p \in B$ is a submanifold of dimension $k = n - m$. So the submersion of $\pi : M \to B$ generates a foliation $F$ of dimension $k = n - m$ on the manifold $M$, whose leaves are connected components of the inverse images of the points of $p \in B$.

Suppose that $L$ is a leaf of the foliation $F$, $x \in L$, $T_xL$ is the tangent space of $L$ at the point $x$, and $H(x)$ is the orthogonal complement of $T_xL$. There arise two subbundles $TF : x \to T_xL$ and $H : x \to H(x)$ of the tangent bundle $TM$ of the manifold $M$. Each vector field $X \in V(M)$ can be represented in the form $X = X_v + X_h$, where $X_v$ and $X_h$ are the orthogonal projections of $X$ onto $TF$ and $H$, respectively. If $X_h = 0$, then $X$ is called a vertical field (tangent to $F$); if $X_v = 0$, then $X$ is called a horizontal field.

Geometry of submersions is investigated by many authors, in particularly in papers [1],[3-7].

**Definition 2.** A submersion of $\pi : M \to B$ is called Riemannian if its differential $d\pi$ preserves the length of horizontal vectors.

To the study of the geometry of Riemannian submersions is devoted many investigations, in particularly in [7] obtained fundamental equations of Riemannian submersion.

Let $M$ be a smooth connected Riemannian manifold of dimension $n$ with Riemannian metric $g$.

Let us consider submersion

$$\pi : M \to R$$

and denote by $F$ the foliation defined by submersion.

From a geometrical point of view, the important classes of foliations are totally geodesic foliation and Riemannian foliation.

Foliation on a Riemannian manifold is a totally geodesic if every geodesic tangent to the leaf of the foliation at one point lies in this leaf, i.e each leaf is a totally geodesic submanifold. The geometry of totally geodesic foliation studied in [6],[7].

Foliation $F$ is called a riemannian foliation if each geodesic orthogonal at some point to the leaf of the foliation $F$, remains orthogonal to all leaves $F$ in all their points [3]. Riemannian foliation without singularities were first introduced and studied by Reinhart. This class of foliations naturally arise in the study of bundles and geometry of orbits of vector fields[3-6].

The following theorem holds.

**Theorem 1.** Let $M$ be a smooth connected complete riemannian manifold. If $\pi : M \to R$ is a riemannain submersion then foliation $F$ is a total geodesic riemannian foliation with isometric leaves.

Now let us consider submersion

$$\pi : M \to B,$$

where is $B$ a one dimensional connected riemannian manifold. The following theorem holds.

**Theorem 2.** Let $M$ be a smooth connected complete riemannian manifold. If $\pi : M \to B$ is a riemannain submersion then it is a bundle.

Let us recall notion of $C^r-$ bundle. $C^r-$ submersion $\pi : M \to B$, where $M$ is a manifold of dimension $n$, $B$ is a manifold of dimension $m$, is called $C^r-$ bundle if there exist an $n - m$ dimensional manifold $N$ and open cover $\{U_\alpha\}$ of $B$ satisfying following conditions:

1. for every point $p \in B$ submanifold $\pi^{-1}(p)$ is diffeomeorphic to $N$;
2. for each $U_\alpha$ there there is a diffeomorphism

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times N,$$

such that

$$\varphi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times N, p \in U_\alpha.$$

## References


1. *Азамов А.А.,Нарманов А. Я.* О предельных множествах орбит систем векторных полей. Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, N 2, С. 257-260.
2. *R.Hermann.* A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle,Proc. Amer. Math. Soc., 11(4),1960,236-242.
3. *P. Molino.* Riemannian foliations,Burkhauser,Boston–Basel,1988.
4. *A. Narmanov and G. Kaipnazarova.* Topology of foliations generated by level surfaces,Uzbek. Math. Journal,2008, 2,53-60.
5. *A. Narmanov and E.O. Rajabov.* On the geometry of orbits of conformal vector fields, Journal of Geometry and Symmetry in Physics,51,2019,29-39.
6. *A. Narmanov.* On the Geometry of Totally Geodesic Riemannian Foliations, Siberian Adv. Math.,10(2),2000,104-111.
7. *B. O'Neill.* The Fundamental equations of submersions,Michigan Mathematical Journal,13,1966,459-469.


# Estimates and asymptotic of self-similar solutions to a nonlinear filtration system with multiple nonlinearities


**Rakhmonov Z. R., Lapasov U. L.**

*National University of Uzbekistan*

e-mail: zraxmonov@inbox.ru


Consider the following parabolic equation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u^\beta, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \upsilon^\beta, \ \ (x,t) \in R_+ \times (0, \ +\infty), \end{cases} \tag{1}$$

with nonlinear boundary flux

$$\begin{aligned} -\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u}{\partial x} \ (0,t) = \upsilon^{q_1}(0,t), \quad t > 0, \\ -\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial v}{\partial x} \ (0,t) = u^{q_2}(0,t), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

and initial value conditions

$$u\left(x,0\right)=u_{0}\left(x\right)\geq 0,\quad \upsilon\left(x,0\right)=\upsilon_{0}\left(x\right)\geq 0,\quad x\in R_{+},\tag{3}$$

where $p_i > 2$, $q_i > 0$, $(i = 1, 2)$, $\beta > 0$, $u_0(x)$ and $\upsilon_0(x)$ - is a bounded, continuous, nonnegative and nontrivial functions.

Nonlinear parabolic system of equations (1) appear in various applications as model of population dynamics, chemical reactions, heat transfer, and so on. For instance $u(x,t)$ and $\upsilon(x,t)$ represent the densities of two biological populations during a migration or the temperatures of two kinds of porous materials during a heat propagation [1-4]. The nonlinear boundary conditions (2) can be used to describe the influx of energy input at the boundary. For instance, in the heat transfer process (2) represents the heat flux, and hence the boundary conditions represent a nonlinear radiation law at the boundary. This kind of boundary conditions appears also in combustion problems when the reaction happens only at the boundary of the container, for example because of the presence of a solid catalyzer, see [1, 4] for a justification.

Under the conditions of $p_i > 2$ $(i = 1, 2)$ equations (1) correspond to the case of slow diffusion, and under $p_i < 2$ $(i = 1, 2)$ the case of fast diffusion. In the case of slow diffusion, equations (1) are degenerated, it is well known that degenerate equations need not possess classical solutions. However, the local in time existence of the weak solution to the problem (1)-(3), defined in the usual integral way [4,5].

In recent years have been intensively studied the problems on blow-up and global existence conditions, blow-up rates to nonlinear parabolic equations. In particular, critical exponents of the Fujita type, which plays an important role in studying the properties of mathematical models of various nonlinear processes, are described by nonlinear parabolic equations and a system of such equations of mathematical physics [5-7].

The purpose of this study is to find the conditions of existence and nonexistence of solutions to problem (1)-(3) over time based on self-similar analysis. Various self-similar solutions to the problem (1)-(3) are constructed, estimates of the solutions are obtained, the critical Fujita exponents and critical exponents for the global existence of the solution are established.

**Theorem 1.** If $0 < \beta \leq 1$ and $0 < q_i \leq \frac{2(p_i-1)}{p_i}$ $(i = 1, 2)$ then each solution of problem (1)-(3) is global in time.

## References


1. *A.S. Kalashnikov.* Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations, Russian. Math. Surveys 42(2), 1987, 169-222.

2. *V.A. Galaktionov.* On global nonexistence and localization of solutions to the Cauchy problem for some class of nonlinear parabolic equations, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 23 (1983) 1341–1354; English transl.: Comput. Math. Math. Phys. 23 (1983) 36-44.

3. *M.Aripov.* Standard Equation's Methods for Solutions to Nonlinear problems (Monograph), Tashkent, FAN, 1988.

4. *Zhongping Li, Chunlai Mu, Li Xie.* Critical curves for a degenerate parabolic equation with multiple nonlinearities. J. Math. Anal. Appl. 359, 2009, 39-47.

5. *Rakhmonov Z.* On the properties of solutions of multidimensional nonlinear filtration problem with variable density and nonlocal boundary condition in the case of fast diffusion. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2016, 9(2), pp. 236-245. doi: https://doi.org/10.17516/ 1997-1397-2016-9-2-225-234

6. *Quiros F., Rossi J.D.* Blow-up set and Fujita-type curves for a degenerate parabolic system with nonlinear conditions. Indiana Univ Math J, 2001, 50, pp. 629-654.

7. *Aripov M.M., Matyakubov A.S.* To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form of polytrophic filtration in variable density. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2017, 8(3), pp. 317-322. doi: https://doi.org/10.17586/2220-8054-2017-8-3-317-322

# On the estimation of the solution of a nonlinear filtration problem with a source and multiple nonlinearities

**Rakhmonov Z. R., Salimov J. I.**

*National University of Uzbekistan*

e-mail: zraxmonov@inbox.ru

Consider the following parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\right) + u^{\beta}, \qquad (x,t) \in R_+ \times (0,\ +\infty), \tag{1}$$

with nonlinear boundary flux

$$-\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\ (0,t) = u^q\,(0,t)\,, \quad t > 0, \tag{2}$$

and initial value condition

$$u\,(x,0) = u_0\,(x) \geq 0, \quad x \in R_+, \tag{3}$$

where $m > 1$, $p > 2$ ,$\beta$, $q > 0$, $u_0(x)$ - is a bounded, continuous, nonnegative and nontrivial initial data.

Equations (1) occur in various fields of natural science [1-3]. For example, equation (1) arises in the mathematical modeling of thermal conductivity of nanofluids, in the study of problems of fluid flow through porous media, in problems of the dynamics of biological populations, polytropic filtration, and the formation of structures in synergetics and in nanotechnologies, and in a number of other areas [1, 2].

Equation (1) is called as parabolic equation [1] and the case $p > 1 + 1/m$ corresponds to the slow diffusion equation. The problem (1)-(3) has been intensively studied by many authors (see [4-7] and references therein) in different values of numerical parameters.

The purpose of this study is to find the conditions of existence and nonexistence of solutions to problem (1)-(3) over time based on self-similar analysis. Various self-similar solutions to the problem (1)-(3) are constructed, estimates of the solutions are obtained, the critical Fujita exponents and critical exponents for the global existence of the solution are established.

**Theorem 1.** If $0 < \beta \leq 1$ and $0 < q \leq \frac{(m+1)(p-1)}{p}$ then each solution of problem (1)-(3) is global in time.

**Theorem 2.** If $\beta < 1$ and $q > \frac{(m+1)(p-1)}{p}$ then every solution of problem (1)-(3) blows up in time.

## References

1. *A.S. Kalashnikov.* Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations, Russian. Math. Surveys 42(2), 1987, 169-222.

2. *V.A. Galaktionov.* On global nonexistence and localization of solutions to the Cauchy problem for some class of nonlinear parabolic equations, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 23 (1983) 1341–1354; English transl.: Comput. Math. Math. Phys. 23 (1983) 36-44.

3. *M.Aripov.* Standard Equation's Methods for Solutions to Nonlinear problems (Monograph), Tashkent, FAN, 1988.

4. *Zhongping Li, Chunlai Mu, Li Xie.* Critical curves for a degenerate parabolic equation with multiple nonlinearities. J. Math. Anal. Appl. 359, 2009, 39-47.

5. *Wanjuan Du and Zhongping Li.* Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear Boundary condition. Int. Jour. of Math. Anal. vol. 7, 11, 2013, 517-524.

6. *Mersaid Aripov, Shakhlo A. Sadullaeva.* To properties of solutions to reaction-diffusion equation with double nonlinearity with distributed parameters. Jour. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2013. V. 6. no. 2. P. 157-167.

7. *Z.R. Rakhmonov, A.I. Tillaev.* On the behavior of the solution of a nonlinear polytropic filtration problem with a source and multiple nonlinearities. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2018, 9 (3), p. 323-329.

# On the solvability of the non-linear periodic problem of peridynamics

**Shukhrat Sheraliev**

*Lomonosov Moscow State University, Tashkent Branch, Tashkent, Uzbekistan*

shuhrat2500@mail.ru

We consider a non-linear periodic peridynamic continuum model which involves the integration over the differences of the displacement field (see [1] and [2]). A non-linear peridynamic model can be described by the following integro-differential equation:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\mathbb{T}^n} K(x-y, u(x,t)-u(y,t))dy = f(x,t), \tag{1}$$

for all $x \in \mathbb{T}^n, t \in [0,T]$, with initial data

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbb{T}^n, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Here $\mathbb{T}^n = [-\pi,\pi]^n$, $u : \mathbb{T}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ is unknown function, the kernel $K$ is $n$-dimensional vector-function with domain $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ and $\psi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ are initial data, and $f : \mathbb{T}^n \times \overline{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}^n$ is the external force.

We assume that the kernel $K(x,u)$ has the form

$$K(x,u) = \frac{a(x,u)}{|x|^\alpha}\chi(x), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad u \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

and $a \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$.

In what follows we suppose that for any $x \in \mathbb{T}^n$ and $r > 0$ the function $a(x, u)$ satisfies condition

$$\int\limits_{|y|=r} a(y, 0)\, d\sigma(y) \;=\; 0. \tag{4}$$

Here for any $x \in \mathbb{R}^n$ we set $|x|^2 \;=\; \sum_{j=1}^n |x_j|^2$.

The function $\chi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ for some $\rho$ from the interval $0 < \rho < \pi$ satisfies condition

$$\chi(x) \;=\; 0, \quad |x| \;\geq\; \rho. \tag{5}$$

Usually the parameter $\rho$ (known as horizon) is choused to be small enough.

The kernel $K(x, y)$ may have the singularity like $|x - y|^{-\alpha}$, where $0 < \alpha < n$. Note that the case $\alpha = n$ in detail has been considered in [3] and [4].

For any $T > 0$ we denote by $C^{0,2}(\mathbb{T}^n \times [0, T])$ the Banach space of the functions $u : \mathbb{T}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ such that $u$ and its derivatives $u_t$ and $u_{tt}$ belong to $C(\mathbb{T}^n \times [0, T])$.

Here $C(\mathbb{T}^n \times [0, T])$ is the Banach space of the functions $u : \mathbb{T}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ which are periodical with respect to $x$ and continuous on the set $\mathbb{T}^n \times [0, T]$.

We define the solution $u(x, t)$ of the Cauchy problem (1)-(2) on the interval $0 \leq t \leq T$ as the function $u \in C^{0,2}(\mathbb{T}^n \times [0, T])$, which satisfies the equations (1) and conditions (2).

**Theorem 1.** *Let the initial functions $\phi(x)$ and $\psi(x)$ belong to space $C(\mathbb{T}^n)$, and external force $f(x, t)$ belongs to $C(\mathbb{T}^n \times \overline{\mathbb{R}_+})$.*

*Then there exists $T > 0$ such that the solution of the Cauchy problem (1)-(2) on the interval $[0, T]$ exists and is unique.*

To prove Theorem 1 we convert the problem (1)-(2) into an operator valued Volterra integral equation of the second kind. Then we show that the corresponding non-linear operator is contracting mapping of some complete metric space of continuous functions.

**Remark**. The considered non-linear model cannot guarantee the solvability in general. We give an example of the problem (1)-(2) with the lack of global solution. This lack of global solutions can be explained by Uryson type non-linearity, and in this case the length of the interval where continuous solution exists depends on initial data.

However, for any initial data there is an interval where the solution exists and has no discontinuities. To describe the appearance of cracks, one should probably consider the model with more strong singularity of the kernel of the corresponding integral operator.

References

1. *S. A. Silling.* Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *J. Mech. Phys. Solids*, 48(1):175–209, 2000.

2. *E. Emmrich, R. Lehoucq, and D. Puhst.* Peridynamics: A Nonlocal Continuum Theory. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering,* 89:45–65, 2013.

3. *S. A. Alimov, Y. Cao and O. A. Ilhan.* On the problems of peridynamics with special convolution kernels. *J. of Integral Equations and Applications*, 26, (3): 301-321, 2014.

4. *S. A. Alimov and S. Sheraliev.* On the solvability of the singular equation of peridynamics, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 64, No. 5, 873-887. 2019.

# The integration of the matrix nonlinear Schrödinger equation with a source

**G. U. Urazboev, A. A. Reyimberganov, A. K. Babadjanova**

*Urgench State University*
*Urgench State University*
*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences*
gayrat71@mail.ru, anvar@urdu.uz, oygul@bk.ru

The inverse scattering transform method was first proposed by Gardner, Greene, Kruskal and Miura (GGKM) [1] in 1967 for solving the Caushy problem for the classical Korteweg-de Vries (KdV) equation. Their approach was based on the connection between the KdV equation and the spectral theory for the Sturm-Liouville operator on the line. Shortly thereafter, P. Lax [2] pointed out the general character of the inverse scattering method. A few years later, Zakharov Shabat [3] managed to solve another important nonlinear evolution equation, the so-called nonlinear Schrödinger equation, using a nontrivial extension of the methods used in [1,2].

The inverse scattering problem for the Dirac operator on the entire line was studied by V.E. Zakharov, A.B.Shabat [3], L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev [4], A. B. Khasanov [5] and others. In matrix case, the inverse scattering theory for the matrix Zakharov-Shabat system [6] was studied by F. Demontis and C. Van der Mee and applied for the integration of the matrix NLS equation [7].

The NLS equation with the self-consistent sources in various classes of functions were investigated by V.K. Melnikov [8], A.B. Khasanov, A.A. Reyimberganov [9], A.B. Yakhshimuratov [10]. We consider the integration of the following problem

$$iU_t + U_{xx} + 2UU^*U = 2\sum_{n=1}^{N}\left[F_1(\lambda_n,x,t)\,F_1^T(\lambda_n,x,t) + F_2^*(\lambda_n,x,t)\,F_2^{*T}(\lambda_n,x,t)\right] +$$

$$+2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi_1(\mu,x,t)\,\Psi_2(\mu,x,t) + \Phi_2^*(\mu,x,t)\,\Psi_1^*(\mu,x,t)\right]d\mu, \tag{1}$$

$$LF(\lambda_n,x,t) = -iJF'(\lambda_n,x,t) - V(x,t)F(\lambda_n,x,t) = \lambda_n F(\lambda_n,x,t)\,, \tag{2}$$

$$L\Phi(\mu,x,t) = -iJ\Phi'(\mu,x,t) - V(x,t)\Phi(\mu,x,t) = \mu\Phi(\mu,x,t)\,, \tag{3}$$

$$i\Psi'(\mu,x,t)J - \Psi(\mu,x,t)V(x,t) = \mu\Psi(\mu,x,t) \tag{4}$$

under the initial condition

$$U|_{t=0} = U_0(x) \tag{5}$$

with the normalizing condition

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[F_2^T(\lambda_n,x,t)\,F_1(\lambda_n,x,t) + F_1^T(\lambda_n,x,t)\,F_2(\lambda_n,x,t)\right]dx = a_n^2(t), \qquad n=\overline{1,2N}, \tag{6}$$

where asteriks means the complex conjugate and $T$ is transposition of the vector or matrix. Here $J = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix}$; $I_m$ is the unit matrix; the potential $V(x,t) = \begin{bmatrix} 0 & iU(x,t) \\ iU^*(x,t) & 0 \end{bmatrix}$ is $(2m \times 2m)$ matrix; $F(\lambda_n,x,t) = \begin{pmatrix} F_1(\lambda_n,x,t) \\ F_2(\lambda_n,x,t) \end{pmatrix}$ and

$F_1(\lambda_n, x, t), F_2(\lambda_n, x, t) \in R^m$ are column vector functions; $a_n^2(t)$ are nonzero continuous scalar functions; $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$ and $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \end{pmatrix}$ are $(m \times 2m)$ and $(2m \times m)$ matrices, respectively and defined with the following asymptotics for $x \to \infty$

$$\Phi \to \begin{pmatrix} A(\mu, t)e^{-i\mu x} \\ B(\mu, t)e^{i\mu x} \end{pmatrix}, \quad \Psi \to \begin{pmatrix} C(\mu, t)e^{-i\mu x} & D(\mu, t)e^{i\mu x} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

where $A(\mu, t), B(\mu, t), C(\mu, t)$ and $D(\mu, t)$ are given continuous matrix functions satisfying the following condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|A(\mu, t)\|^2 + \|B(\mu, t)\|^2 + \|C(\mu, t)\|^2 + \|D(\mu, t)\|^2 \, d\mu < \infty, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

The matrix function $U_0(x)$ satisfies the following properties:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) \, \|U_0(x)\| \, dx < \infty$, where $\|X\| = \max\limits_j \sum_{k=1}^m |x_{jk}|$, $X = (x_{jk})_{j,k=1}^m$;

2. Operator $L(0) = -iJ\dfrac{d}{dx} - V(x, 0)$ possess exactly $2N$ simple eigenvalues $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots,$
$\lambda_{2N}(0)$, where $V(x, 0) = \begin{bmatrix} 0 & iU_0(x) \\ iU_0^*(x) & 0 \end{bmatrix}$.

Let the matrix function $U(x, t)$ be enough smooth and rapidly tends to its limits, i.e.

$$\sum_{r=0}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) \left\| \frac{\partial^r}{\partial x^r} U(x, t) \right\| dx < \infty. \tag{9}$$

The main aim of this work is to deduce the evolutions of the scattering data with which it is available to find the collection of solution of the problem (1)-(9) in the framework of the inverse scattering method for the operator $L(t) = -iJ\dfrac{d}{dx} - V(x, t)$.

## References


1. *C.S. Gardner, I.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura*, Phys. Rev. Lett., 19, (1967), pp. 1095–1097.

2. *Peter D. Lax*, Commun. Pure Appl.Math., 21,(1968), pp. 467–490.

3. *V.E. Zakharov, A.B. Shabat*, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation on waves in nonlinear media, Sov. Phys. JETP, 34, (1972), pp. 62-69 .

4 *L.D. Faddeev , L.A. Takhtajan*, Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

6. *Francesco Demontis, Cornelis Van der Mee*, Characterization of Scattering Data for the AKNS System, Acta Appl. Math., 131, (2014), pp. 29-47.

7. *Francesco Demontis, Cornelis Van der Mee*, Novel formulation of inverse scattering and characterization of scattering data, Discrete and Continuous Dynamical Systems, (2011), pp. 343-350.

8. *V.K. Melnikov*, Integration of the nonlinear Schrodinger equation with a self-consistent source, Commun. Math. Phys., 137, (1991), pp. 359-381.

9. *A. B. Khasanov, A. A. Reyimberganov*, About the finite densitysolution of thehigher nonlinear Schrodinger equation with self-consistent source, Ufimsk. Mat. Zh., Volume 1, Issue 4, 2009, pp. 133-143
10. *A.B. Yakhshimuratov*, The Nonlinear Schrödinger equation with a Self-consistent Source in the class of periodic functions, Math. Phys. Anal. Geom., 14, (2011), pp. 153-169

# The soliton solutions for the nonlinear Schrödinger equation with self-consistent sources

**Urazboev G.U.[1], Reyimberganov A.A.[2], Rakhimov I.D.[3]**

[1,2,3] *Urgench state university*

e-mail: gayrat71@mail.ru[1], e-mail: anvar@urdu.uz[2], e-mail: ilxom@urdu.uz[3]

We consider the integration of the following system of equations

$$iu_t + 2\,|u|^2\, u + u_{xx} = 2i\sum_{j=1}^{N}(\varphi_{1j}^2 - \bar{\varphi}_{2j}^2), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_{1j,x} = -i\xi_j\varphi_{2j} + u\varphi_{1j}, \\ &\varphi_{2j,x} = i\xi_j\varphi_{2j} - \bar{u}\phi_{1j}, \qquad j = 1, 2, ...N, \end{aligned} \tag{2}$$

where the bar means complex conjugation and $\xi_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ are eigenvalues.

We assume that the solution $u(x,t)$ of the system (1)-(2) exists possessing the required smoothness and tends to its limits sufficiently rapidly as $|x| \to \infty$, i.e., for all $t \geq 0$ satisfies the condition

$$\int_{-\infty}^{0}(1 + |x|)\,|u(x,t)|\,dx + \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right| dx < \infty. \tag{3}$$

As shown in [2], under the condition shown below the system of equations (2) has a finite number of eigenvalues. In general, these eigenvalues can be multiples. Here, we assume that all the eigenvalues are simple and their numbers are equal to $N$. We also assume that the eigenfunctions $\Phi_j = (\varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$ corresponding to this eigenvalues satisfy the following conditions

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{1j}\varphi_{2j}dx = \beta_j^2(t), \ j = 1, 2, ..., N. \tag{4}$$

Here $\beta_j(t)$, $j = 1, 2, ..., N$ are given and the continuous functions of $t$.

The main aim of this work is integration of the nonlinear Schrödinger equation with self-consistent sources by using of Hirota's method. With the help of the dependent variable transformations

$$u = \frac{g}{f}, \ \varphi_{1j} = \frac{p_j}{f}, \ \varphi_{2j} = \frac{h_j}{f}, \ j = 1, 2, \dots, N \tag{5}$$

the system (1)-(2) can be transformed into the bilinear forms

$$(iD_t + D_x^2)g \cdot f = 2i\sum_{j=1}^{N}(p_j^2 - \bar{h}_j^2), \tag{6}$$

$$D_x^2 f \cdot f = 2g \cdot \bar{g}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} D_x p_j \cdot f = -i\xi_j p_j f + g h_j, \\ D_x h_j \cdot f = i\xi_j h_j f - \bar{g} p_j, \end{cases} \tag{8}$$

where $\bar{g}$ and $\bar{h}$ are the complex conjugation of the functions $g$ and $h$, respectively and Hirota's bilinear operators $D_t$ and $D_x$ are defined by

$$D_x^m D_t^n g(x,t) \cdot f(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^n g(x,t) f(x',t')|_{x=x',t=t'}. \tag{9}$$

Here, the subscripts of the functions $f$ and $g$ define the order of the partial derivatives with respect to $x$ and $t$. Indeed,

$$D_x^m f \cdot g = f_{mx} g - m f_{(m-1)x} g_x + \ldots + (-1)^m f g_{mx}.$$

Thus, $f$ acts on a product similarly to the Leibniz rule, except for a crucial change of sign. In particular, $D_x^m f \cdot g = (-1)^m D_x^m g \cdot f$. If $m$ is a positive even integer, interchanging the functions does not change the value of the Hirota bilinear equation.

Equations (6)-(8) can be solved by introducing the following power series expansions for $f$, $g$, $p_j$ and $h_j$:

$$f = 1 + \chi^2 f^{(1)} + \chi^4 f^{(2)} + \ldots, \tag{10}$$

$$g = \chi g^{(1)} + \chi^3 g^{(2)} + \ldots, \tag{11}$$

$$p_j = \chi p_j^{(1)} + \chi^3 p_j^{(2)} + \ldots, \tag{12}$$

$$h_j = h_j^{(1)}, \tag{13}$$

where $\chi$ is a formal expansion parameter.

## References


1. *Hirota R.* Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett., 1971 vol. 27, pp. 1192-1194.

2. *Khasanov A. B., Reyimberganov A. A.* About the finite density solution of the higher nonlinear Schrodinger equation with self-consistent source, Ufimsk. Mat. Zh., 2009, vol 1, pp. 133вЂ“143.

3. *Mel'nikov V. K.* Capture and confinement of solitons in nonlinear integrable systems, Commun. Math. Phys. 1989, vol. 120, pp. 451вЂ“468.

4. *Mel'nikov V. K.* Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source, Phys. Lett. A, 1988, vol. 133, pp. 493-496.

5. *Mel'nikov V. K.* Integration of the nonlinear Schroedinger equation with a self-consistent source, Commun. Math. Phys., 1991, vol. 137, pp. 359-381.

6. *Urazboev G. U., Khasanov A. B.* Integrating the Korteweg-de Vriese equation with a self-consistent source and "steplike"initial data, Theor. Math. Phys., 2001, vol. 129, pp. 1341-1356.

# The space of order-preserving functionals and gauges

**Zaitov A. A., Jiemuratov R. E.**

*Nukus State Pedagogical Institute, 104, P. Seyitov street, Nukus city, 230100, Republic of Karakalpakstan, Uzbekistan*

rzamurat_25@mail.ru

**Abstract.** We show that if the collection of pseudometrics generates a uniformity on the given completely regular space, then the collection of the pseudometrics constructed by given pseudometrics generates a uniformity on the space of order-preserving functionals with compact supports.

Uniform spaces can be defined in various equivalent ways.

Given a set $X$, a partial ordering $\subset$ can be defined on the powerset $\mathcal{P}(X)$ by subset inclusion, turning $(\mathcal{P}(X), \subset)$ into a lattice. Define a filter $\mathcal{F}$ on $X$ as a non-empty subset of $\mathcal{P}(X)$ with the following properties:

$F1$) if $A$ and $B$ are in $\mathcal{F}$, then so is their intersection ($\mathcal{F}$ is closed under finite intersection);

$F2$) If $A$ is in $\mathcal{F}$ and $A$ is a subset of $B$, then $B$ is in $\mathcal{F}$, for all subsets $B$ of $X$ ($\mathcal{F}$ is upward-closed).

A *filter base* is a subset $\mathcal{B}$ of $\mathcal{P}(X)$ with the properties that $\mathcal{B}$ is non-empty and the intersection of any two members of $\mathcal{B}$ includes (as a subset) a member of $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ is downward directed).

In the following, the notations $E^{-1}$ and $E \circ F$ are to be understood as relations on $X$. Recall that if $E = \{(x, y)\}$ is a relation on $X$, i. e., a subset of $X \times X$, then the *inverse relation* $E^{-1}$ is defined to be the subset $(y, x)$ of $X \times X$. If $E$ and $F$ are relations on $X$, then their *composition* $E \circ F$ is defined to be the set of all pairs $(x, z)$ such that, for some $y \in X$, $(x, y) \in E$ and $(y, z) \in F$.

The following definition was given in its present form by Bourbaki [**?**].

**Definition 1.** The *diagonal* of a set $X \times X$ is the subset $\Delta = \{(x, x) | \, x \in X\}$. A *diagonal uniformity* on a set $X$ is a filter $\mathcal{E}$ on $X \times X$ consisting of subsets of $X \times X$ called *entourages* or *surroundings* such that:

$E1$) If $E \in \mathcal{E}$ then $\Delta \subset E$.

$E2$) If $E \in \mathcal{E}$ then there exists an entourage $F \in \mathcal{E}$ such that $F \subset E^{-1}$.

$E3$) If $E \in \mathcal{E}$ then there exists an entourage $F \in \mathcal{E}$ such that $F \circ F \subset E$.

Note that properties $F2$) and $E2$) provide that $E \in \mathcal{E}$ implies that $E^{-1} \in \mathcal{E}$.

A *base* $\mathcal{B}$ for a diagonal uniformity $\mathcal{E}$ on $X$ is a filter base for $X \times X$ that satisfies conditions $E1$) – $E3$) of Definition 1.

For a metric space its metric uniformity is the filter generated by the sets $U_r = \{(x, y) \colon \, d(x, y) < r\}$.

**Pseudometrics (Gauges).** Yet another way of introducing uniform structures is via pseudometrics or gauges as they are often called in this context.

If above, instead of a metric space, we had used a pseudometric space nothing would have changed. In fact, one can start with any family $\mathcal{P}$ of pseudometrics and define $U_d(r) = \{(x, y) \colon \, d(x, y) < r\}$ for $d \in \mathcal{P}$ and $r > 0$. The resulting family $\{U_d(r) \colon \, d \in \mathcal{P}, \, r > 0\}$ of entourages is a subbase for a uniformity in that the family of finite intersections is a base for a uniformity, denoted $\mathfrak{U}_{\mathcal{P}}$.

It is a remarkable fact that every uniformity has a subbase, even a base, of this form. Given a sequence $\{V_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$ of entourages on a set $X$ such that $V_0 = X^2$ and $V_{n+1}^3 \subset V_n$ for all $n$ one can find a pseudometric $d$ on $X$ such that $U_d(2^{-n}) \subset V_n \subset \{(x,\, y) \colon\ d(y,\, x) \leq 2^{-n}\}$ for all $n$. Thus every uniform structure can be defined by a family of pseudometrics. The family of all pseudometrics $d$ that satisfy $(\forall\, r > 0)(U_d(r) \in \mathfrak{U})$ is denoted $\mathcal{P}_{\mathfrak{U}}$; it is the largest family of pseudometrics that generate $\mathfrak{U}$. The family $\mathcal{P}_{\mathfrak{U}}$ satisfies the following two properties.

$(PM1)$ if $d_1,\, d_2 \in \mathcal{P}_{\mathfrak{U}}$ then $\max\{d_1,\, d_2\} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{U}}$;

$(PM2)$ if $\rho$ is a pseudometric and for every $\varepsilon > 0$ there are $d \in \mathcal{P}_{\mathfrak{U}}$ and $\delta > 0$ such that always $d(x,\, y) < \delta$ implies $\rho(x,\, y) < \varepsilon$ then $\rho \in \mathcal{P}_{\mathfrak{U}}$.

A family $\mathcal{P}$ of pseudometrics with these properties is called a pseudometric uniformity; it satisfies the equality

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{U}_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}.$$

**The space of order-preserving functionals.** Let $X$ be a compact Hausdorff space, $C(X)$ be the algebra of continuous functions on $X$ with the usual algebraic operations.

**Definition 2.** A functional $\mu\colon\ C(X) \to \mathbb{R}$ is

(1) *order-preserving*, if for all $\varphi,\, \psi \in C(X)$ satisfying $\varphi \leq \psi$, it holds that $\mu(\varphi) \leq \mu(\psi)$.

(2) *weakly additive*, if for all $\varphi \in C(X)$ and any real number $\alpha$, it holds that

$$\mu(\varphi + \alpha) = \mu(\varphi) + \alpha.$$

(3) *normed* if $\mu(1_X) = 1$.

The set of all functionals, satisfying conditions $(1)-(3)$ is denoted by $O(X)$. For brevity order-preserving, weakly additive, normed functionals are called as *order-preserving functionals.* We consider $O(X)$ as a subspace of the Tychonoff product $\mathbb{R}^{C(X)}$. The base of the induced topology consists of the sets of the form

$$\langle \mu;\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n;\, \varepsilon\rangle = \{\nu \in O(X) :\, |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon,\, i = 1,\, \ldots,\, n\},$$

where $\mu \in O(X)$, $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1,\, \ldots,\, n$, and $\varepsilon > 0$. Note that the induced topology and point-wise convergence topology coincide. For every compact Hausdorff space $X$ the space $O(X)$ is also a compact Hausdorff space. $O(X)$ is a compact sublattice of $\mathbb{R}^{C(X)}$.

Let $X$, $Y$ be compact Hausdorff spaces, $f\colon X \to Y$ be a continuous map. Then a map $O(f)\colon O(X) \to O(Y)$, defined as $O(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$, $\varphi \in C(Y)$, is continuous.

Let $X$ be a Tychonoff space, $\beta\, X$ be the Stone-Čech compact extension of $X$. We define a subspace

$$O_\beta(X) = \{\mu \in O(\beta X) :\, \operatorname{supp}\mu \subset X\},$$

which elements we call as *order-preserving functionals with compact support.* Supply $O_\beta(X)$ with the induced topology from $O(\beta X)$. Then $O_\beta(X)$ is a Tychonoff space.

Let $(X,\, d)$ be a compact metric space.

By $n\text{-}LIP = n\text{-}LIP(X,\, d)$ we denote the set of Lipschitz functions with the Lipschitz constant $\leqslant n$ from $C(X)$.

Fix $n \in \mathbb{N}$. For every $\mu$, $\nu$, let

$$\widehat{d_n}(\mu,\, \nu) = \sup\{|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)| :\, \varphi \in n\text{-}LIP\}.$$

**Theorem 1.** The function $\widehat{d_n}$ is a continuous pseudometric on $O(X)$.

**Now, completely regular case.** We define a family of pseudometrics $\widehat{d}_n$, $n \in \mathbb{N}$, on $O_\beta(X)$ as follows. Given $\mu, \nu \in O(X)$, we let

$$\widehat{d}_n(\mu,\, \nu) = \widehat{d}_n|((\text{supp } \mu \cup \text{supp } \nu) \times (\text{supp } \mu \cup \text{supp } \nu))(\mu,\, \nu).$$

**Theorem 2.** For any uniform space $(X, \mathcal{U})$, if the uniformity $\mathcal{U}$ is generated by a family $\{d^\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ of pseudometrics, then the family $\{\widehat{d}^\alpha_n : \alpha \in \mathfrak{A},\, n \in \mathbb{N}\}$ of pseudometrics on $O_\beta(X)$ generates a uniformity on $O_\beta(X)$.

## References


1.*A. A. Borubaev, P. S. Pankov, A. A. Chekeev*, Spaces Uniformed by Coverings, Hungarian-Kyrgyz Friendship Society, Budpest, 2003.

2.*M. M Zarichnyi*, Spaces and maps of idempotent measures, Izv. Math., 74:3, 481–499(2010).


# Кэли дарахтида Изинг-SOS модели учун аниқланган трансляцион-инвариант ва даврий асосий холатлар


**Азамов Ш.Х.[1], Исақов.Б.М.[2]**

Наманган давлат университети[1]
Қўқон давлат педагогика институти [2]
azamovsherzodjon@gmail.com[1],


Хар бир Гиббс ўлчовига физик системанинг битта фазаси мос қўйилади. Агар Гиббс ўлчови ягона бўлмаса, у холда фаза алмашиши мавжуд, яъни физик система бир холатдан иккинчи холатга ўтади ([1-4] га қаранг).

Бизга $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ Кэли дарахти берилган бўлсин, бу ерда $V$ тўплам $\tau^k$ дарахтнинг учлари тўплами, $L$ эса қирралари тўплами. Агар $x$ ва $y$ лар $l$ қирранинг учлари бўлса, у холда улар энг яқин қўшнилар дейилади ва $l =< x, y >$ каби ёзилади. Кэли дарахтида $d(x, y)$, $(x, y \in V)$ масофа деб $x$ ва $y$ учларни туташтирувчи энг қисқа йўлдаги қирралар сонига айтилади:

$$d(x, y) = min\{d : x = x_0, x_1, ..., x_{d-1}, x_d = y \in V\},$$

бу ерда $< x_0, x_1 >, < x_1, x_2 >, ..., < x_d, x_{d-1} > -$ яқин қўшнилардир.

Фиксирланган $x^0 \in V$ учун қуйидагича белгилашлар киритамиз.

$$W_n = \{x \in V : d(x, x^0) = n\}, V_n = \{x \in V : d(x, x^0) \leq n\}, L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L : x, y \in V_n\},$$

$d(x, y) - x, y \in V$ учлар орасидаги масофа.

$x \in W_n$ учун $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$ тўплам $x$ нинг тўғри авлодлари тўплами дейилади.

Маълумки $\tau^k$ Кэли дарахтининг учлари тўплами ва $k + 1$ та иккинчи тартибли циклик группаларнинг озод кўпайтмаси бўлган, хосил қилувчилари $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ бўладиган $G_k$ группа элементлари ўртасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд ([1]

ишга қаранг). $S_1(x)$ орқали $x \in G_k$ га яқин кўшни нуқталар тўпламини белгилаймиз, яъни $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\}$.

Спин қийматлари $\Phi = \{-1; 0; 1\}$ бўлган моделни қараймиз. $\sigma$ конфигурация $V$ учлар тўпламида қуйидаги функция кўринишида аниқланади $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Барча конфигурациялар тўпламини $\Omega = \Phi^V$ каби белгилаймиз.

$G_k/G_k^* = \{H_1, H_2, ..., H_r\}-$ фактор-группа бўлсин. $G_k^*$ индекси $r \geq 1$ бўлган нормал бўлувчи.

**1-таъриф:** Агар $x \in H_i$ лар учун $\sigma(x) = \sigma_i$ тенглик ўринли бўлса, у холда $\sigma(x)$ конфигурация $G_k^*-$ даврий дейилади. $G_k-$ даврий конфигурация трансляцион-инвариант дейилади.

**2-таъриф:** Агар $x_\downarrow \in H_i$, $x \in H_j$ лар учун $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ бўлса, у холда $\sigma(x)$ конфигурация $G_k^*-$ кучсиз даврий дейилади.

Изинг-SOS модели Гамильтонияни қуйидаги кўринишда бўлади:

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{<x,y>\in L} \sigma(x)\sigma(y) \quad - J_2 \sum_{<x,y>\in L} |\sigma(x) - \sigma(y)|. \tag{2.1}$$

**3-таъриф:** $\varphi \in \Omega$ фиксирланган конфигурация учун $H(\varphi) \leq H(\sigma), \forall\sigma \in \Omega$ ўринли бўлса, у ҳолда $\varphi$ конфигурация асосий ҳолат дейилади.

М-барча бирлик шарлар тўплами бўлиб, $b \in M$ бирор бирлик шар бўлсин. $\varphi_b - \varphi$ конфигурацияни $b$ бирлик шардаги бирор қисми бўлсин.

$b \in M$ учун $\sigma_b$ конфигурация энергиясини қуйидагича ҳисоблаймиз:

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2}J_1 \sum_{<x,y>\in L} \sigma(x)\sigma(y) \quad - \frac{1}{2}J_2 \sum_{<x,y>\in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| \quad .$$

$k = 2$ бўлсин. Ихтиёрий $\sigma_b$ учун $U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, ..., U_{10}\}$ кўринишда бўлади, бу ерда

$$U_1 = -\tfrac{3}{2}J_1, U_2 = -J_1 - \tfrac{1}{2}J_2, U_3 = -\tfrac{1}{2}J_1 - J_2, U_4 = \tfrac{1}{2}J_1 - 2J_2, U_5 = -\tfrac{3}{2}J_2,$$

$$U_6 = -\tfrac{1}{2}J_2, U_7 = -J_2, U_8 = \tfrac{3}{2}J_1 - 3J_2, U_9 = J_1 - \tfrac{5}{2}J_2, U_{10} = 0.$$

**4-таъриф:** $\varphi$ конфигурация $H$ Гамильтонианнинг асосий ҳолати дейилади, агар $\forall b \in M$ учун $U(\varphi_b) = min\{U_1, U_2, ..., U_{10}\}$ ўринли бўлса.

Қуйидагича белгилаш қилайлик:

$$A_i = \{(J_1, J_2) \in R^2; U(\sigma_i) \leq U(\sigma_j), i \neq j, i, j = 1, 2, ..., 10\}.$$

$k = 2$ бўлганда (1) гамильтониан учун қуйидагини оламиз:

$$\begin{gathered}
A_1 = \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 \leq J_1\},\ A_2 = \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 = J_1\},\\
A_3 = \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 = J_1\},\ A_4 = \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 = J_1\},\\
A_5 = \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 = J_1\},\ A_6 = \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 = 0, J_2 = 0\},\\
A_7 = \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 = 0, J_2 = 0\},\\
A_8 = \{(J_1, J_2) \in R^2; J_2 \geq J_1, J_1 \geq 0; J_2 \geq \tfrac{1}{2}J_1, J_1 \leq 0\},\\
A_9 = \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 = J_1\},\ A_{10} = \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 \leq 0, J_2 \leq \tfrac{1}{2}J_1\}.
\end{gathered}$$

Равшанки $\bigcup_{i=1}^{10} A_i = R^2$ бўлади.

Трансляцион-инвариант конфигурация қуйидаги кўринишда бўлади:

$\varphi = i, \forall x \in G_k, i \in \Phi.$

**Theorem 1.** $k = 2$ бўлсин. Изинг-SOS модели учун қуйидагилар ўринли бўлади:

1) $\varphi(x) = i, \forall x \in G_k$ ва $i = \pm 1$ бўлса, у ҳолда мос конфигурация $A_1$ тўпламда трансляцион-инвариант асосий ҳолат бўлади.

2) $\varphi(x) = 0, \forall x \in G_k$ конфигурация $A_{10}$ тўпламда трансляцион-инвариант асосий ҳолат бўлади.

$A \subset \{1, 2, ..., k+1\}$ бўлсин. $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) -$ жуфт $\} - G_k$ группа учун индекси 2 га тенг нормал бўлувчи бўлади (қаранг [1]), бу ерда $w_x(a_i)-$ $x$ сўздаги $a_i$ лар сони.

$G_k/H_A = \{H_0, H_1\}$ - фактор группани қарайлик, бу ерда

$$H_0 = \{x \in G_k | w_x(a_1) - \text{жуфт}\},$$
$$H_1 = \{x \in G_k | w_x(a_1) - \text{тоқ}\}.$$

**Theorem 2.** $k = 2$, $|A| = 1$ бўлсин.

1) $A_3$ тўпламда иккита $H_A-$ даврий (трансляцион-инвариант бўлмаган) асосий холатлар мавжуд ва унинг кўриниши қуйидагича:

$$\varphi(x) = \pm \begin{cases} -1, & x \in H_0, \\ 1, & x \in H_1. \end{cases}$$

2) Биринчи ҳолда кўрсатилганлардан ташқари барча $H_A-$ даврий асосий холатлар трансляцион-инвариант асосий ҳолат бўлади.

**Адабиётлар**


1. *U. A. Rozikov:* Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore, 2013.
2. *Х.-О. Георги* Гиббсовские меры и фазовые переходы, М., Мир, 1992.
3. *К. Престон* Гиббсовские состояния на счетных множествах, Мир, М., 1977.
4. *Я. Г. Синай* Теория фазовых переходов. Строгие результаты, Наука, М., 1980.
5. *М.М. Рахматуллаев, М.А. Расулова* Периодические и слабо периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли, Мат. труди. 2015.


# Yopiq 1-formalar hosil qilgan qatlamlar


**G'afforova Durdona G'ayrat qizi**

*Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti*

elektron pochta manzili: durdonagaffarovaa@gmail.com


**Ta'rif 1.1** $F = \{L_\alpha; \alpha \in B\}$- $M$ ning chiziqli bog'lanishli qism to'plamlari oilasi berilgan bo'lsin. Agar bu oila quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa;

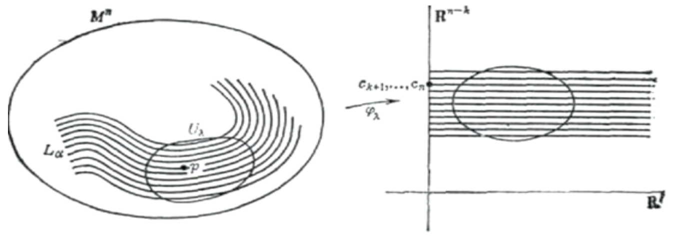
$$(F_{\text{I}}) : \bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha = M;$$

$(F_{\text{II}})$: barcha $\alpha, \beta \in B$, $\alpha \neq \beta$ lar uchun $L_\alpha \bigcap L_\beta = \emptyset$ bo'lsin;
$(F_{\text{III}})$: Har bir $p \in M$ nuqta uchun shunday $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^{(s)}$, $p \in U_\lambda$lokal koordinatalarni tanlash mumkinki, $\forall\ \alpha \in B$ uchun $U_\lambda \bigcap L_\alpha \neq \emptyset$ bo'lsa u holda $\varphi_\lambda\left(U_\lambda \bigcap L_\alpha\right)$ to'plamning chiziqli bog'lanishli komponentalari:

$$\left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \varphi_\lambda\left(U_\lambda\right) :\ x_{k+1} = c_{k+1}, x_{k+2} = c_{k+2}, ..., x_n = c_n\right\},$$

***ko'rinishga ega bo'ladi, bunda*** $c_{k+1}, c_{k+2}, ..., c_n$ ***lar o'zgarmas sonlar***,
$\mathcal{F}$ - $k$ o'lchovli($0 < k < n$ ) $C^s$- qatlama deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'rifning 1-qismida: barcha $L_\alpha$ qatlamalar $M$ to'p-lamni qoplaydi, bu yerda $\alpha \in \beta$. 2-qismida: ixtiyoriy $\alpha, \beta \in B$ o'zaro bir-biridan farqli sonlar uchun $L_\alpha$va $L_\beta$ o'zaro kesishmasligi aytib o'tilgan. buni quyidagi 1-rasmda yaqqol ko'rishimiz mumkin:



$L_\alpha$- to'plam $\mathcal{F}$ qatlamaning qatlami deyiladi.
$M^n$ ko'pxillikda $\mathcal{F}$ qatlamning berilishi ($M^n$, $\mathcal{F}$) simvol bilan aniqlanadi. (1) va (2) shartlar $M^n$ ko'pxillikning o'zaro kesishmaydigan qatlamlardan tuzilganligini ifodalaydi. (3) shart k-o'lchamli qatlamning yuqorida yozilgan $R^n$ dagi kabi lokal ko'rinishga ega ekanligini ifodalaydi.
**Tarif.1.2** Agar biron bir nuqtada $\mathcal{F}$-qatlamaning qatlamiga perpendikulyar chiziq o'tkazilsa bu chiziq barcha qatlamlarga perpendikulyar bo'lsa $\mathcal{F}$-qatlama Riman qatlamasi deyiladi.Riman qatlamasi birinchi bo'lib Reinhart tomonidan kiritilgan va o'rganilgan.
Har qanday 1-forma o'zining ko'rinishiga ega $\omega = \sum \omega_i(x)\,dx^i$, bu yerda $\omega_i$-silliq funksiya.1-forma yopiq bo'lishi uchun uning differensiali nolga teng bo'lishi kerak.Agar berilgan forma biror funksiyaning differensiali bo'lsa, bunday forma aniq forma deyiladi. Shuning uchun aniq formalar yopiq forma bo'ladi, teskarisi shart emas.
Quyidagi teorema shuni ko'rsatadiki, $\mathcal{F}$ -Riman qatlamalari silliq bog'langan kompakt Riman ko'pxilligida yopiq $(M, g)$ 1-forma izometrik egrilik bilan geodezik qatlamlashish bo'ladi.
**Teorema** [8] $(M, g)$ egrilikning silliq bog'lanishli kompakt Riman ko'pxilligi bo'lsin. Agar $\mathcal{F} -$ Riman qatlamalari yopiq 1-forma bilan berilgan bo'lsa u holda $\mathcal{F}$ - qatlamalari o'zaro izometrik to'la geodezik qatlama hosil qiladi.
**Misol 1.1** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ haqiqiy sonlar bo'lgan $\omega = a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_ndx_n$, differentsial shaklini ko'rib chiqing. Ushbu shakl n-o'lchovli tor $T^n = R^n/Z^n$ bo'yicha differentsial shaklni keltirib chiqaradi, bu erda $Z$ - butun sonlar to'plami. $\omega = 0$ tenglama $\mathcal{F}$-qatlamaning $T$ ga tenglashtirganligini belgilaydi. Agar $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ raqamlarning ratsional sonlar to'plami $k$ ga teng bo'lsa, u holda $A \subset \pi_1(M)$ guruhi $Z{+}Z{+}\ldots{+}Z$, bu erda $n - k$ yig'indilar.
**Misol 2.1** $f = x^2 + y^2$-metrik funksiya

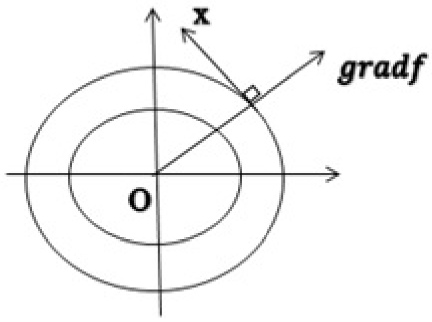
$$gradf = \{x, y\}\,,\ |gradf|^2 = x^2 + y^2$$

$$L_c = \left\{(xy) : x^2 + y^2 = c\right\}$$

$$\omega = df = 2xdx + 2ydy$$

$$\omega\,(dx; dy) = 2xdx + 2ydy = 2\,(\overline{a}, X)$$

$$\overline{a} = \{x, y\}\,gradf, \qquad X = \{dx, dy\}\,, \qquad X = \{-y, x\}$$




$M$- silliq Riman ko'pxilligida $\mathcal{F}$ $-$ Riman qatlamasi berilgan. $\omega$- yopiq 1-forma bo'lsin
**Teorema:** $(M, g)-$ silliq bog'lanishli riman ko'pxilligida $\mathcal{F}$ - yopiq 1-forma yordamida hosil qilingan Riman qatlamasi bo'lsin. U holda qatlamalarning urinma vektor maydonlari Killing – vektor maydon bo'ladi.

### Foydalanilgan adabiyotlar


1. *Ghys, E.* ClassiÖcation des feu etages totalement geodesiques de codimension un, Comment.Math.Helvetici., 58(1983), 543-572.
2. *Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W.,* Riemannian geometry in the large. (Russian), Moscow, Mir 1971.
3. *Hermann, R., A* Sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a Öber bundle, Proc. Amer. Math. Soc., 11(1960), 236-242.
4. *Hermann, R.,*The differential geometry of foliations, Ann. of Math., 72(1960), 445-457
5. *Narmanov, A. and Kaypnazarova, G.,* Metric functions on riemannian manifold, Uzbek math. Journal, 2(2010), 113-121.
6. *Narmanov, A. and Kaypnazarova, G.,* Foliation theory and its applications, J. Pure Appl. Math., 2(1)(2011), 112 - 126.
7. *Tondeur, Ph.,* Foliations on Riemannian manifolds, Springer-Verlag, 1988.
8. *A. Y. Narmanov and S. S. Saitova*, Foliations defined by closed differential 1-form, international journal of geometry, Vol. 3 (2014), No. 1, 37 - 43.


# Chorak tekislikda biparabolik tenglama uchun birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi haqida


**Oripov Sh.A.**

*Farg'ona davlat universiteti*
shoripov1991@gmail.com


Zamonaviy xususiy hosilali tenglamalar nazariyasida yuqori tartibli hamda aralash tipdagi tenglamalarni tadqiq qilish muhim o'rin egallaydi. Bu sinfdagi tenglamalarga bo'lgan katta e'tibor avvalo olingan natijalarning nazariy jihatdan muhimligi hamda gaz dinamikasi, gidrodinamika, sathning cheksiz kichik egilishlari nazariyasida, momentsiz qobiqlar nazariyasida, mexanikaning turli bo'limlarida, elektron sochilishlar nazariyasida va boshqa juda ko'p sondagi tatbiqlari orqali tushuntiriladi.

**Masalaning qo'yilishi** $\Omega = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$, $S = S_1 \cup S_2 \cup \{0\}$, $S_1 = \{(x,y) : x > 0,\ y = 0\}$, $S_2 = \{(x,y) : x = 0,\ y > 0\}$ belgilashlarni kiritaylik.

Ushbu to'rtinchi tartibli biparabolik tenglamani

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u = 0 \tag{1}$$

$\Omega$ - chorak tekislikda qaraymiz va quyidagi masalani o'rganamiz.

**I masala**. (1) tenglamaning $\Omega \cup S$ da aniqlangan, uzluksiz, chegaralangan va quyidagi

$$u\left(x,0\right) = \varphi_1\left(x\right), \quad u_y\left(x,0\right) = \varphi_2\left(x\right), \quad 0 \le x < +\infty \tag{2}$$

boshlang'ich va

$$u\left(0,y\right) = \tau\left(y\right), \quad u_{xx}\left(0,y\right) = \mu\left(y\right), \quad 0 \le y < +\infty \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\varphi_1\left(x\right)$, $\varphi_2\left(x\right)$, $\tau\left(y\right)$, $\mu\left(y\right)$ - berilgan uzluksiz funktsiyalar bo'lib, $\varphi_1\left(0\right) = \tau\left(0\right),\ \varphi''{}_1\left(0\right) = \mu\left(0\right)$ kelishuv shartlari bajariladi.

Masalani yechish uchun quyidagi

$$\upsilon\left(x,y\right) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

belgilashni kiritamiz. U holda (2) va (3) shartlardan foydalanib, $\upsilon\left(x,y\right)$ funksiyaga nisbatan ushbu

$$\upsilon\left(x,0\right) = \varphi_2\left(x\right) - \varphi''{}_1\left(x\right) = f\left(x\right) \tag{5}$$

boshlang'ich va

$$\upsilon\left(0,y\right) = \tau'\left(y\right) - \mu\left(y\right) = g\left(y\right) \tag{6}$$

chegaraviy shartlarni hosil qilamiz.

Natijada, (1)-(3) masalaga ekvivalent bo'lgan, (2) va (5) boshlang'ich hamda (3) va (6) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi quyidagi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \upsilon\left(x,y\right), \\ \quad \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini topish masalasiga kelamiz.

**Teorema.** Agar birinchi chegaraviy masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u yagonadir.

**Isbot**. Teskarisidan faraz qilamiz. Qo'yilgan masala $u_1\left(x,y\right)$ va $u_2\left(x,y\right)$ yechimlarga ega va $\left|u_1\left(x,y\right)\right| < M, \quad \left|u_2\left(x,y\right)\right| < M$ bo'lsin. U holda $U\left(x,y\right) = u_1\left(x,y\right) - u_2\left(x,y\right)$ funksiya $\Omega$ sohada (1) tenglamani va $S$ da esa $U\left(x,y\right) = 0$ tenglikni qanoatlantiradi. Bundan tashqari $\forall\left(x,t\right) \in \Omega \cup S$ uchun $\left|U\left(x,y\right)\right| \le 2M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ushbu $V\left(x,y\right) = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ belgilash kiritaylik. U holda qaralayotgan bir jinsli masala quyidagi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = V\left(x,y\right), \\ \quad \dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining $U(x,0)=0$, $U(0,y)=0$ hamda $V(x,0)=0$, $V(0,y)=0$ bir jinsli shartlarini topish masalasiga keladi.

U holda chorak tekislikda issiqlik o'tkazuvchalik tenglamasi uchun qo'yilgan 1-chegaraviy masala yechimining yagonaligi haqidagi teoremaga asosan $V(x,y)\equiv 0$ bo'ladi [1].

Bundan esa $U(x,y)$ funksiya uchun

$$\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=V(x,y)=0, U(x,0)=0, U(0,y)=0$$

masalaga kelamiz. Yuqorida ko'rganimizdek qo'yilgan masala ham trivial yechimga ega.

### Adabiyotlar


1. *O'rinov A.Q.* Parabolik tipdagi differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. – Toshkent: Mumtoz so'z, 2015.


# Фурье қаторларини ягона нуқтага яқинлашишининг баъзи шартлари хақида


**Раджабов Б.Ш., Ахмедов О.У, Ахмедова У.Ё**

*Чирчиқ педагогика иниститути, Фаргона давлат университети*

radjabov5252@gmail.com, Olimxonaxmedov@gmail.com


Бизга фақат биринчи турдаги узилиш нуқталарига эга бўлган $2\pi$ узунлик оралиқида мутлақо интегралланадиган $2\pi$-даврий $f(x)$ функциялар берилган бўлиб, сонлар ўқнинг ҳар бир нуқтасида бир томонлама чегаралар мавжуд бўлсин, яъни:

$$\lim_{h\to+0} f(x_0+h)=f(x_0+0),$$

$$\lim_{h\to+0} f(x_0-h)=f(x_0-0)$$

Масалани шакллантириш учун қуйидаги таърифдан фойдаланамиз [1,3,7].

**Таъриф (Лебег).** $x_0$ нуқта учун қуйидаги шарт бажарилса

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

у ҳолда $x_0$ нуқта $f$ функциянинг регуляр нуқтаси деб аталади. Маълумки, $f$ функцияни давомийлигининг ҳар бир нуқтаси унинг мунтазам нуқтасидир.

Агар $x_0$ нуқта $f$ функцянинг биринчи тур узулиш нуқтаси бўлса, у ҳолда унинг бир томонли ҳосилалаларини ${f'}_+(x)$ ва ${f'}_-(x)$ бу ерда биз чегараларни тушунилади, яъни

$${f'}_+(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h},$$

$${f'}_-(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h}$$

$x$ нуқтада функция узлуксиз бўлган ҳолда ва $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ бўлганлиги сабабли бир томонлама ҳосилаларнинг формулали таърифи илгари берилганига мос келади.

Фурье қаторларини яқинлашувчилигини асoслловчи шартларни аниқлаш учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$f_x^0(t) \overset{def}{=} f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0) \tag{1}$$

Маълумки, регуляр $x$ нуқтада (1) функция қуйидаги кўринишга келади

$$f_x^*(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

Бу функция учун қуйидаги леммани келтирамиз:

**Лемма.** $2\pi$- даврий $2\pi$ кесмада абсолют интегралланувчи $f$ функция интеграли

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}dt, 0 < \delta \leq \pi, u \int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}dt \tag{2}$$

бир вақтда яқинлашади ёки узоқлашади.

Ҳақиқатдан ҳам ҳар қандай $\delta$, $0 < \delta < \pi$ $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ функция узлуксиз, шунинг учун $[\delta, \pi]$кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлади. $f_x^*(t)$ функция эса $[\delta, \pi]$ кесмада абсолют интегралланувчи, бундан ҳосилалари $\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ ҳам бу кесмада абсолют интегралланувчи бўлади яъни ҳар қандай $\delta$, $0 < \delta < \pi$ учун

$$\int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}dt \tag{3}$$

интеграл яқинлашади.

$\delta > 0$ ни шундай танлаймиз, $[0, \delta]$ кесмада $f_x^*(t)$функция ягона нуқталарга эга бўлмайди, $t = 0$ нуқта бундан мустасно, яъни у ҳар қандай $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \delta$ учун $[\varepsilon, \delta]$ кесмада Риман маъносида интегралланувчи. Бу ҳар доим ҳам мумкин, чунки $f$ функциясининг абсолют интегралланувчанлигидан $f_x^*$ функциянинг фақат чекли сондаги махсус нуқтага эга эканлиги келиб чиқади.

Энди $t \to 0$ да $\frac{f_x^*(t)}{t}$ ва $\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ функциялар эквивалентлигини хисобга олсак $\lim\limits_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}}{t} = 1$ Шунга кўра, кўриб чиқилаётган функцияларнинг абсолют қийматларига, интегралларга нисбатан қўлланиладиган, таққослаш белгиси деб номланган интегралларнинг яқинлашиш белгисига нисбатан [ 1,3,5,6]

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}dt, \int_0^\delta \frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

бир вақтнинг ўзида яқинлашиши ёки узоқлашиши келиб чиқади. Интегралнинг яқинлашиши (3) туфайли, бу дарҳол (2) интеграллар бир вақтнинг ўзида яқинлашишини ёки узоқлашишини англатади. Демак, юқоридаги лемма исботланди шунга асосланган холда қўйилган шартларни кучайтирамиз ва қуйидаги теоремани қараймиз.

**Теорема (Дини белгиси).** $f$ - $2\pi$даврий фунция бўлиб, $2\pi$ узунлик оралиғида абсолют интегралланaнувчи бўлади. Бундан, агар $x$ доимий узликсиз ёки биринчи турдаги узилиш нуқтаси ва баъзи бир $\delta$, $0<\delta<\pi$, учун $\int\limits_0^{\delta}\frac{|f_x^*(t)|}{t}dt$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $f$ функциянинг Фуре қатори $x$ нуқтада

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{4}$$

қийматга яқинлашади.

Агар юқоридаги теореманинг шартлари бажарилса қуйидаги натижаларга эришиш мумкин [1,3,5] , яъни $f$ функциянинг исталган доимий нуқтасида (қисман - барча узлуксизлик нуқталарида) ушбу функциянинг Фурье қатори унинг кўрилаётган нуқтадаги қийматига яқинлашади. Агар $f-2\pi$ даври фунция бўлса, $2\pi$ узунлик оралиғида абсолют интегралланса ва х нуқтада $f\,(x+0)$, $f\,(x-0)$, $f'_+\,(x)$ ва $f'_-\,(x)$ лар мавжуд бўлса, у ҳолда Фурье қатори функциянинг шу нуқтадаги (4)(55.26) қийматига яқинлашади. Хусусан, $[-\pi,\pi]$ кесмадаги узлуксиз дифференциалланадиган функция $f$ нинг Фурье қатори $(-\pi,\pi)$ интервалнинг ҳар бир нуқтасида (4) қийматига, $x=-\pi$ ва $x=\pi$ нуқталарда

$$\frac{f\,(-\pi+0)+f\,(\pi-0)}{2} \tag{5}$$

яқинлашади.

$[-\pi,\pi]$ кесмадаги узлуксиз бўлакли дифференциалланувчи функциянинг Фурье қатори $(-\pi,\pi)$оралиқнинг исталган нуқтасида функциянинг шу нуқтадаги қийматига, $x=-\pi$ ва $x=\pi$ нуқталарда эса (5) қийматга яқинлашади.

**Теореманинг исботи.** Юқорида келтирилган формулалар ёрдамида қуйидагиларга эга бўламиз:

$$S_n\,(x;f)-\frac{f\,(x+0)+f\,(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}D_n\,(t)\,[f\,(x+t)+f\,(x-t)]\,dt-$$

$$-\frac{f\,(x+0)+f\,(x-0)}{2}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}D_n\,(t)\,dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}D_n\,(t)\,[f\,(x+t)+f\,(x-t)-f\,(x+0)-f\,(x-0)]\,dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{f_x^*\,(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt \tag{6}$$

Фараз қилайлик, (3) интеграл яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда леммага асосан,

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{|f_x^*\,(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}dt,$$

Яъни интеграл, $\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ функция $[0,\pi]$ кесмада абсолют яқинлашувчи интегралдир. Шунинг учун, Риман теоремасига кўра

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{f_x^*\,(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt=0$$

шу сабабли, (6)(55.28) га кўра:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x; f) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Юқоридаги биринчи натижа тўғридан-тўғри теоремадан функциянинг регуляр нуқтаси таърифидан келиб чиқади. Иккинчи натижа юқоридаги теоремадан келиб чиқади, яъни , агар $f(x+0)$, $f(x-0)$ чегараланган бўлса ва бир томонлама ҳосилалар $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ мавжуд бўлса, унда (3) интеграл баъзи бир $\delta > 0$ да яқинлашишини кўрсатиш етарлидир. Аввало,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_x^*(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \left[ \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right] = f'_+(x) - f'_-(x)$$

чегараланган бўлганлиги сабабли, $\frac{f_x^*(t)}{t}$ функция баъзи $t = 0$ нуқта атрофида чегараланган. шунинг учун, $\frac{f_x^*(t)}{t}$ функция $[0, \delta]$ кесмада чегараланган ва шунинг учун махсус нуқталарга эга бўлмагани учун $\delta$, $0 < \delta < \pi$ мавжуд, натижада у Риман маъносида шу кесмада интегралланувчи бўлади. Риман маъносида интегралланувчи функцияси абсолют интегралланувчи ва шунинг учун интеграл (3) чекланган .

Кейинги натижани исботлаш учун $[-\pi, \pi]$ кесмада аниқланган $f$ функцияни исботлаш учун баъзи холларда $[-\pi, \pi)$ ярим интервалдан бутун сон ўқигача давом этамиз ва ҳосил бўлган функцияни $\bar{f}$ билан белгилаймиз. Бўлаклаб дифференциаллаш таърифига асосан [ ], $\bar{f}$ функцияни 2-натижани шартларини қаноатлантиради. Ушбу хулосага кўра, Фурье қаторига $\bar{f}$ га тўғри келадиган $\bar{f}$ нинг Фурье қатори ҳар бир $x$ нуқтада $\frac{\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)}{2}$. га яқинлашади.

Агар $x \in (-\pi, \pi)$ учун $\bar{f}(x \pm 0) = f(x \pm 0)$ бўлса, у ҳолда $\frac{\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)}{2} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ бўлади. $x = -\pi$ да кўрилаётган қатор $\frac{\bar{f}(-\pi+0)+\bar{f}(-\pi-0)}{2}$га, $x = \pi$ да эса $\frac{\bar{f}(\pi+0)+\bar{f}(\pi-0)}{2}$ қийматга яқинлашади. $\bar{f}$ функцияларнинг даврийлигидан $\bar{f}(-\pi - 0) = \bar{f}(\pi - 0) = f(\pi - 0)$, $\bar{f}(\pi + 0) = \bar{f}(-\pi + 0) = f(-\pi + 0)$ келиб чиқади.

Шунга кўра $\frac{\bar{f}(-\pi+0)+\bar{f}(-\pi-0)}{2} = \frac{\bar{f}(\pi+0)+\bar{f}(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$. Сўнги натижадан тўғридан-тўғри биринчи ва учинчи натижалар келиб чиқади. (4) ва (5) формулаларда $f$ функциянинг Фурье қатори йиғиндиси унинг бутун сонлар ўқига $\bar{f}$ даврий давоми эмас, балки $[-\pi, \pi]$ кесмада берилган $f$ функциясининг ўзи билан ифодаланганлигини аниқлаймиз.

Агар $f$ функция тўртинчи натижанинг шартларини қаноатлантирса, яьни у $[-\pi, \pi]$ кесмада бўлакли дифференциалланувчи ва бундан ташқари $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлса (яъни, $[-\pi, \pi]$нинг бутун сон ўқига даврий қаторига ёйиш мумкин бўлсин, шу жумладан чегарасида ҳам, демак $[-\pi, \pi]$ кесманинг барча нуқтасида $f$ фунциянинг қиймати унинг Фуре қаторининг йиғиндисига тенг:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Шунинг учун, $[-\pi, \pi]$ кесманинг ҳар бир нуқтасида бундай функцияни исталган аниқлик даражаси билан унинг Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси билан, яъни синуслар ва кўп ёйли косинусларнинг чизиқли бирикмаси билан ифодалаш мумкин (шунингдек, улар бу фунцияни тахмини оддий гармониклар йиғиндиси дейишади). Кўрилаётган вазиятда даври $2\pi$ бўлиши муҳим эмас: ихтиёрий $T > 0$ даврий ҳолати ўзгарувчининг оддий ўзгариши билан кўриб чиқилган даврга камаяди [1,2,4,7,8].

**1-Мисол.** y=ch$x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ функциянинг Фурье қаторини топинг. Фурье коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{ch}x dx = \left.\frac{\mathrm{sh}x}{\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{ch}x \cos nx dx = (-1)^n \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi\,(1+n^2)}, n = 1, 2, \dots$$

y=ch$x$ функциясининг жуфтлигидан $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. ch$x$ да y=ch$x$ функция узлуксиз дифференциалланувчи ва шунинг учун теоремадаги натижа шартларини қаноатлантиради; Бундан ташқари, y $[-\pi, \pi]$ кесманинг чегараларида бир хил қиймат қабул қилади, шунинг учун унинг $[-\pi, \pi]$ кесмадаги барча нуқталарида Фурье қатори $y = \mathrm{ch}x$ функциянинг ўзига яқинлашади, яъни

$$\mathrm{ch}x = \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{1+n^2}\cos nx\right).$$

Ушбу кетма-кетлик текис яқинлашади, бу холат унинг яқинлашаётган сонлар қатори $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ билан таққосланишидан келиб чиқади.

Шундай қилиб, $[-\pi, \pi]$ кесманинг ҳар бир нуқтасида бундай функцияни исталган аниқлик даражаси ва Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси билан, яъни синуслар ва кўп ёйли косинусларнинг чизиқли бирикмаси билан ифодалаш мумкин (шунингдек, улар бу фунцияни тахмини оддий гармониклар йиғиндиси дейишади).

## Адабиётлар


1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. 3-том, 1978 г.

2. *Ўрунов А.Қ.* Фурье қаторлари ва уларнинг тадбиқлари.Фар.ДУ, Фарғона - 2019. 112 б.

3. *Горлач, Б.А.* Математический анализ: Учебное пособие / Б.А. Горлач. - СПб.:Лань, 2013. - 308 с.

4. *Азларов. Т., Мансуров. Х.* Математик анализ. Т.: "Ўзбекистон". 1 т: 1994 й.-416 б.

5. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков Д.И.* Лекции по математическому анализу. М.: "Высшая школа". 1999 г. - 695 стр.

6. *Пискунов Н.С.* Дифференциалное и интегралное исчисление. 2 том. СПб.: "Мифрил". 1996 г.-426 стр.

7. *Claudia Canuto, Anita Tabacco.* Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.- 419 p.

8. *Раджабов Б.Ш., Ахмедова У.Ё.* "Функциялар ортогонал тизими асосида бир каррали Фурье қатори коэффициэнтларининг баъзи хусусиятилари ҳақидаДифференциал тенгламалар ва математиканинг турдош бўлимлари замонавий муаммолари". Халқаро илмий конфренция материаллари. Фарғона, 2020.

# Поликругда интерполяцион кетма-кетликлар

**Ражабов С.М.**

*Тошкент транспорт университети*

rajabovs90@mail.ru

Фараз қилайлик, $D \subset \mathbb{C}$ бирлик доира ва унинг нуқталаридан иборат $\{z_j\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

**Таьриф.** Агар ихтиёрий $\{a_j\} \in l^\infty$ чегараланган кетма-кетлик олганимизда ҳам шундай $f \in H^\infty$ функция топилсаки, қуйидаги тенгликлар

$$f\left(z_j\right) = a_j, \qquad j = 1, 2, ...$$

ўринли бўлса, $\{z_j\}$ кетма-кетлик интерполяцион кетма-кетлик дейилади.

**Теорема (Карлесон).** ([1],[2]). Бирлик доирада берилган $\{z_j\}$ кетма-кетлик интерполяцион бўлиши учун шундай $\delta > 0$ сон топилиб

$$\prod_{k \neq j} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \overline{z_j} z_k} \right| \geq \delta > 0, \qquad j = 1, 2, ...$$

ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Демак, бирлик доирада кетма-кетликнинг интерполяцион бўлиши учун зарурий ва етарли шарти мавжуд.

Фараз қилайлик, $\{z_j\}$ кетма-кетлик

$$U^n = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \left|z^1\right| < 1, \left|z^2\right| < 1, ... \left|z^n\right| < 1 \right\}$$

поликруг нуқталаридан иборат бўлсин. Қуйидаги метрикани қарайлик

$$\rho(z_k, z_j) = \max(\rho_1(z_k, z_j), \rho_2(z_k, z_j), ..., \rho_n(z_k, z_j)) =$$
$$= \max\left( \left| \frac{z_k^1 - z_j^1}{1 - \overline{z_j^1} z_k^1} \right|, \left| \frac{z_k^2 - z_j^2}{1 - \overline{z_j^2} z_k^2} \right|, ..., \left| \frac{z_k^n - z_j^n}{1 - \overline{z_j^n} z_k^n} \right| \right).$$

Ушбу метрикадан фойдаланиб [3] да поликругда берилган $\{z_j\}$ кетма-кетликнинг интерполяцион бўлишининг етарли шарти топилган.

Энди биз қуйидагича метрикани қараймиз

$$\hat{\rho}(z_k, z_j) = \sqrt{\sum_{m=1}^{n} \left| \frac{z_k^m - z_j^m}{1 - \overline{z_j^m} z_k^m} \right|^2}$$

Ушбу метрикадан фойдаланиб қуйидаги теоремани келтирамиз

**Теорема.** Бирлик поликругда $\{z_j\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар қандайдир $\delta > 0$ учун қуйидаги

$$\prod_{k \neq j} \hat{\rho}(z_k, z_j) \geq \delta > 0, \qquad j = 1, 2, ...$$

ўринли бўлса, у ҳолда $\{z_j\}$кетма-кетлик $U^n$ да интерполяцион бўлади.

**Адабиётлар.**

1. *Дж. Гарнетт* Ограниченные аналитические функции, перевод с английского Е.М.Дынькина, Москва,Мир, 1984.

2. *П. Кусис* Введение в теорию пространств $H^p$, пер. с анг.,Мир 1984 год.

3. *Bo Berndtsson, Sun Yung A. Chang va Kai-Ching Lin* Interpolating sequences in the polidisc Amer. Math. Soc. V.302, Number 1, July 1987.

# Uch o'chovli elliptik tipdagi tenglama uchun integral shartli nolokal chegaraviy masala

**Rafiqov A.N., Dehqonova M.**

*Farg'ona davlat universiteti*

rafiqov72@mail.ru

Quyidagi uch o'lchovli elliptik tipdagi

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \equiv u_{xx} + Lu = 0, \tag{1}$$

tenglamani $\Omega = \{(x,y,z): \ 0 < x < a, \ \ 0 < y < b, \ \ 0 < z < c\}$ sohada qaraymiz, bu yerda $u = u(x,y,z) -$ noma'lum funksiya, $a,b,c \in R$.

(1) tenglama uchun $\Omega$ sohada quyidagi integral shartli masalani qaraymiz:

**Nolokal masala.** Shunday

$$u(x,y,z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\bar{\Omega} \cap (\{x=0\} \cup \{x=a\})\right) \cap C^2(\Omega),$$

funksiya topilsinki, u $\Omega$ sohada (1) tenglamani va quyidagi

$$u(0,y,z) = u(a,y,z), \ \ 0 \le y \le b, \ 0 \le z \le c, \tag{2}$$

$$u(x,y,0) = u(x,y,1) = 0, 0 \le x \le a, \ \ 0 \le y \le b, \tag{3}$$

$$u(x,0,z) = f_1(x,z), \ \ 0 \le x \le a, \ \ 0 \le z \le c, \tag{4}$$

$$u(x,b,z) = f_2(x,z), \ \ 0 \le x \le a, \ \ 0 \le z \le c, \tag{5}$$

chegaraviy shartlarni hamda ushbu

$$\int\limits_0^a u(x,y,z)\,dx = 0, \ \ 0 \le y \le b, \ 0 \le z \le c, \tag{6}$$

integral shartni qanoatlantirsin, bu yerda $f_j, j = \overline{1,2} -$ uzluksiz funksiyalar.

(6) shart birinchi tur integral shart deb nomlangan bo'lib, u $\{x=0\}$ va $\{x=a\}$ tekisliklarni o'zaro integral orqali bog'laydi. Uni boshqa turdagi nolokal ko'rinishga keltiraylik.

**Lemma.** Agar $u(x,y,z)$ funksiya (1) tenglamani va $\int\limits_0^a f_j(x,z)\,dx = 0, \ j \ = \ \overline{1,2}$ kelishuv shartlarini qanoatlantirsa, u holda (6) shart $u_x(a,y,z) = u_x(0,y,z)$ ko'rinishidagi shartga teng kuchlidir.

**Isbot.** Faraz qilaylik, $u\,(x, y, z)$ funksiya (1)-(6) masalaning yechimi bo'lsin. (1) tenglamani [0,a] kesmada $x$ o'zgaruvchi bo'yicha integrallaymiz. So'ngra (6) shartni e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$-\int\limits_0^a Lu\,(x,y,z)\,dx = -L\int\limits_0^a u\,(x,y,z)\,dx = \int\limits_0^a u_{xx}\,(x,y,z)\,dx = u_x\,(a,y,z) - u_x\,(0,y,z) = 0.$$

Shunday qilib, agar $u\,(x, y, z)$ funksiya (1) tenglamani va (6) shartni qanoatlantirsa, u holda u quyidagi

$$u_x\,(a,y,z) - u_x\,(0,y,z) = 0. \tag{7}$$

shartni qanoatlantiradi.

Endi faraz qilaylik $u\,(x, y, z)$ funksiya (1) tenglamani va (7) shartni qanoatlantirsin. (1) tenglamani $[0, a]$ kesmada x o'zgaruvchi bo'yicha integrallasak

$$\int\limits_0^a u_{xx}\,(x,y,z)\,dx = -\int\limits_0^a Lu\,(x,y,z)\,dx = -L\int\limits_0^a u\,(x,y,z)\,dx = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz. U holda kelishuv shartini inobatga olib, $\omega\,(y,z) = \int\limits_0^a u\,(x,y,z)\,dx$ funksiyaga nisbatan quyidagi

$$L\omega\,(y,z) = 0, \omega\,(0,z) = 0, \;\; \omega\,(b,z) = 0, \;\; \omega\,(y,0) = 0, \;\; \omega\,(y,c) = 0 \tag{8}$$

masalaga kelinadi. (8) masala faqat trivial yechimga ega, shuning uchun $\int\limits_0^a u\,(x,y,z)\,dx = 0$. Shunday qilib, agar $u\,(x, y, z)$ funksiya (1) tenglamani va (7) shartni qanoatlantirsa, u holda bu funksiya (6) shartni qanoatlantiradi. Lemma isbotlandi.

Integral shartli nolokal chegaraviy masalalar tekislikda yaxshi o'rganilgan va o'rganilmoqda [1,2]. Bu kabi tadqiqotlar amaliy ahamiyatga ega bo'lib, jumladan kapilliar muhitda namlikning sizilishi jarayonini ifodalanishi [3] ishda ko'rsatib o'tilgan. Bu tipdagi masalalarni turli tipdagi tenglamalar uchun rivojlantirgan ishlarga [4]-[10] ni misol qilib keltirish mumkin. Yana bu tipdagi tenglamalar shunisi bilan murakkabki, topilgan xos funsiyalar sistemasi qaralayotgan fazoda to'la emasligi va bu fazoda qo'shilgan funksiyalar yordamida uni to'la funksiyalar sistemasiga keltirish bilan asoslanadi. Bu sohadagi klassik ishlarga [11]-[12] ni misol qilib keltirish mumkin.

Keyinchalik, biz (1)-(6) masala o'rniga (1)-(5) va (7) masalani o'rganamiz. (1)-(5) va (7) masalani o'zgaruvchilarini ajratamiz, ya'ni $u\,(x, y, z) = W\,(x, z)\,Q\,(y) = X\,(x)\,Z\,(z)\,Q\,(y)$ formula yordamida o'zgaruvchilarni ajratsak, quyidagi tenglama va xos qiymat haqidagi masalalarga kelinadi:

$$Q''\,(y) + \frac{2\beta}{y}Q'\,(y) - \lambda Q\,(y) = 0, \quad 0 < y < b; \tag{9}$$

$$X''\,(x) + \mu X\,(x) = 0, X\,(0) = X\,(a)\,, X'\,(0) = X'\,(a)\,; \tag{10}$$

$$Z''\,(z) + (\lambda - \mu)\,Z\,(z) = 0, Z\,(0) = 0, \quad Z\,(c) = 0. \tag{11}$$

(10) masalaning xos qiymatlari

$$\mu_n = \left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2, n = 0, 1, 2, 3, ...$$

lardan va ularga mos keladigan xos funksiyalar esa

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \ \ X_{2n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi nx}{a}\right), \ \ X_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right), \ \ n \in N \tag{12}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

(12) xos funksiyalar sistemasi ortogonal va to'la hamda $L_2[0,a]$ fazoda ortonormallangan bazisni tashkil qiladi [13], [14].

(11) masalaning xos qiymatlari va ularga mos keladigan xos funksiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2, Z_m(z) = \sin\left(\frac{\pi mz}{c}\right), \ \ n+1, m \in N. \tag{13}$$

[14] ishga asosan (13) funksiyalar sistemasi $L_2[0,c]$ sinfda to'la sistemani tashkil qiladi.

Endi (9) tenglamaning umumiy yechimini $\lambda = \lambda_{nm}$ bo'lganda yozamiz:

$$Q_{nm}(y) = a_{nm} sh\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right) + b_{nm} ch\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right), \ \ 0 \le y \le b, \tag{14}$$

bu yerda $a_{nm}$ va $b_{nm}$-ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Demak (1) tenglamaning (2), (3) va (7) bir jinsli shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$u_{nm}(x,y,z) = X_n(x) Q_{nm}(y) Z_m(z), \tag{15}$$

bu yerdagi $X_n(x)$, $Z_m(z)$ va $Q_{nm}(y)$ lar mos ravishda (12), (13) va (14) formulalar yordamida aniqlanadi.

Masalaning yechimini

$$u(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(x,y,z) \tag{16}$$

ko'rinishda qidiramiz, bu yerda $u_{nm}(x,y,z)$, (15) formula yordamida aniqlanadi.

(16) ni (4) va (5) chegaraviy shartlarga bo'sundirib, $a_{nm}$ va $b_{nm}$ koeffitsientlarni bir qiymatli topamiz va masala yechimini hosil qilamiz:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\delta_m z}{c}\right) \omega_{0m}(y) +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sin\frac{2\pi nx}{a} + \cos\frac{2\pi nx}{a}\right) \cos\left(\frac{\delta_m z}{c}\right) \omega_{nm}(y),$$

bu yerda

$$\omega_{nm}(y) = \left[\frac{f_{1nm} - f_{2nm} ch\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)}{sh\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b\right)} sh\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right) + f_{2nm} ch\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right)\right],$$

$$f_{jnm} = \int_0^c \int_0^a \left(\sin\frac{2\pi nx}{a} + \cos\frac{2\pi nx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi mz}{c}\right) f_j(x,z)\, dx dz, \ \ j = 1, 2.$$

## Adabiyotlar


1.*Cannon J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. V. 21 -P. 155-160.

2.*Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием//Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13. N 2 .-С. 294-304.

3.*Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод//Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. N 1 -С.72-81.

4.*Пулькина Л. С.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени//Изв. вузов. матем. 2012. №10, -С.32-44.

5.*Дмитриев В.Б.* Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения// Вестн. СамГУ. 2 (42), 15-27 (2006).

6.*Кожанов А.И., Пулькина Л.С.*О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений//Матем. журнал ин-та матем., Алматы 9 (2) (32), 78-92 (2009).

7.*Уринов А.К., Каримов К.Т.* Нелокальные краевые задачи для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде//Сибирские электронные математические известия, 2020, том 17, 161-178.

8.*Каримов К.Т.* Нелокальная задача с интегральным условием для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами// Бюллетень Института математики 2018, N 6, -С.10-24.

9.*Karimov K.T.* Nonlocal Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-infinite Parallelepiped//Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 1, pp. 46-57.

10.*Karimov K.T.* Nonlocal Problem for a Three-dimensional Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Rectangular Parallelepiped//Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics 2020, 13(5). 533-546.

11.*Ильин В.А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Докл.АН СССР, т. 273, N 5. -1983. -С.1048-1053.

12.*Ильин В.А.* Об абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного эллиптического оператора//Докл.АН СССР, т. 274, N1. -1984. -С.19-22.

13.*Сабитов К.Б., Новикова В.А.* Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева - Бицадзе // Изв. вузов. 2016. Т. 6. С. 61-72.

14.*Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М.: Наука. 1980. 384 с.

# Ikki karrali Furye qatorlarining elliptik qismiy yig'indisi uchun umumlashgan lokalizatsiya

**Turdiyev H.N[1], Buvayev Q.T[2].**

*Farg'ona davlat universiteti*[1]
*O'zbekiston milliy universiteti*[2]
hurshidjon2801@gmail.com[1], buvayev@mail.ru[2]

Quyidagi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{nm} e^{i(nx+my)} \tag{1}$$

Furye qatorini qaraymiz. Bu yerda $f_{nm} = (2\pi)^{-2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-i(nx+my)} dxdy$- Furye koeffitsientlari.

$T^2 = (-\pi, \pi] \times (-\pi, \pi]$ - orqali kvadratni belgilaymiz, $S_\lambda f(x,y)$ - (1) qatorning elliptik qismiy yig'indisi bo'lsin, ya'ni:

$$S_\lambda f(x,y) = \sum_{n^4+m^4<\lambda} f_{nm} e^{i(nx+my)}, \tag{2}$$

bu yerda $\lambda > 0$ ixtiyoriy son. $L_2(T^2)$ - $T^2$ da kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar sinfi bo'lsin. Bu sinfda normani quyidagicha kiritish mumkin:

$$\|f\|_{L_2(T^2)} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bir o'lchovli hol uchun, 1915 yilda N.N. Luzin o'zining "Integral va trigonometrik qator"deb nomlanuvchi dissertatsiyasida $L_2(T)$, $T = (-\pi, \pi]$ sinfdagi ihtiyoriy funksiyaning Furye qatori deyarli yaqinlashadi degan gipotezani keltirib o'tgan. Ko'p yillar davomida Luzinning gipotezasi mutaxasislarning bir qancha izlanishlar olib borishiga e'tiborini o'ziga jalb etdi. 1966 yilga kelibgina, ushbu gipotezaga Karleson ijobiy javob berdi, ya'ni u $L_2(T)$ sinfdagi ihtiyoriy funksiyaning Furye qatori deyarli yaqinlashishini isbot qildi. Karlesonning natijasini Xant kuchaytirdi, ya'ni u $L_p(T), p > 1$ sinfdagi ihtiyoriy funksiyaning Furye qatori deyarli yaqinlashishini isbot qildi. Boshqa tomondan, 1922 yilda A.N. Kolmogorov $L_1(T)$ sinfga tegishli shunday funksiyaga misol tuzdiki, qaysiki bu funksiyaning Furye qatori deyarli hattoki har bir nuqtada uzoqlashadi.

Bu ishning asosiy maqsadi (2) qismiy yig'indining deyarli yaqinlashishini o'rganishdan iborat. (2) yig'indining deyarli yaqinlashishini o'rganish jarayonida kelib chiqadigan savollardan biri bu Luzinning gipotezasi biz qarayotgan hol uchun o'rinlimi: $\forall \in L_2(T^2)$ funsiyaning Furye qatorini (2) elliptik yig'indisi $T^2$ da deyarli yaqinlashadimi? Boshqacha so'z bilan aytganda, Karlesonning teoremasini ikki karrali Furye qatorining elliptik yig'indisi uchun o'tkazish mumkinmi. Faqat shu g'oya oydinki, Xant teoremasi biz qarayotgan hol uchun o'tmasligi [1] ishda keltirib o'tilgan. Luzin gipotezasini yechish masalasi, undanda soddaroq muammolarni hal etish yo'li orqali boshlandi. Bu muammolardan biri (2) qismiy yig'indini $T^2/suppf$ to'plamda 0 ga deyarli yaqinlashishi xisoblanadi.

V.A. Il'in [2] ishida xos funksiyalar bo'yicha ihtiyoriy yoyilma uchun umumlashgan lokalizatsiya prinsipi tushunchasini kiritdi. Il'in tushinchasidan kelib chiqib, biz $L_2(T^2)$ da

$S_\lambda f(x,y)$ uchun umumlashgan lokalizatsiya prinsipi o'rinli deb aytamiz, agar $\forall \in L_2(T^2)$ funksiya uchun ushbu

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda f(x,y) = 0 \qquad (3)$$

tenglik $T^2/suppf$ da deyarli bajarilsa.

Ko'rinib turibdiki, klassik lokalizatsiya prinsipidan farqli o'laroq bu erda (3) tenglikni $T^2/suppf$ da deyarli (hamma joyda emas) bajarilishi yetarli.

$N$ karrali Furye qatorlarining shar bo'yicha qismiy yig'indisi uchun umumlashgan lokalizatsiya masalasini birinchi bo'lib R.R. Ashurov tomonidan [3] ishda o'rganilgan va bu borada ijobiy natija olingan.

Ushbu tezisning asosiy natijasi quyidagi teorema hisoblanadi.

**1-teorema.** *Agar:*
*1)$f \in L_2(T^2)$ bo'lsa va har bir argumentlari bo'yicha davriy va davri $2\pi$ ga teng bo'lsin;*
*2)$\forall(x,y) \in \Omega$ da $f(x,y) = 0$ bo'lsa, bu yerda $\Omega \subset T^2$ biror ochiq to'plam.*
*U holda, ushbu*

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda f(x,y) = 0 \qquad (4)$$

*munosabat $\Omega$ ning deyarli hamma yerida bajariladi.*

Deyarli yaqinlashish masalalarini o'rganishda maksimal operatorini kiritish maqsadga muvofiq:

$$S_* f(x,y) = sup_{\lambda>0}|S_\lambda f(x,y)|.$$

1-teoremaning isboti maksimal operatorining quyidagi bahosiga asoslangan:

**2-teorema.** $K_R = \{(x,y) : x^4 + y^4 < R\}$ *- elliptik soha bo'lsin. Agar:*
*1) $f \in L_2(T^2)$ bo'lsa;*
*2)$\forall(x,y) \in K_R$ da $f(x,y) = 0$ bo'lsa, u holda $\forall r$ $(r < R)$ uchun $\exists C = C(R,r)$ o'zgarmas mavjudki, ushbu*

$$\int_{K_r} [S_* f(x,y)]^2 dxdy \le C \int_{T^2} [f(x,y)]^2 dxdy \qquad (5)$$

*tengsizlik o'rinli bo'ladi.*

## Adabiyotlar

1. *Ш. А. Алимов, Р. Р. Ашуров, А. К. Пулатов* Кратные ряды и интегралы Фурье, Коммутативный гармонический анализ-4, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, том 42, Москва 1989, 105 с.

2. *В.А. Ильин* Об обобщенный интерпритации принципа локализации для рядов Фурье по фундаментальным системам функций, Сиб. мат. журнал, 1968, 9, 1093-1106.

3. *Р.Р.Ашуров* Обобщенная локализация и суммируемость почти всюду кратных рядов и интегралов Фурье. Современная математика. Фундаментальная направления. С.1-18 (в печати).

# Karrali Furye qatorlarining deyarli yaqinlashishi

**Xamraqulov A.A.**[1], **Buvayev Q.T.**[2]

*O'zbekiston milliy universiteti*[1],
*O'zbekiston milliy universiteti*[2].
abdurahim.hamraqulov@mail.ru[1], buvayev@mail.ru[2].

$f \in L_2(T^N)$ funksiyaning quyidagi

$$\sum_{n \in Z^N} f_n e^{inx} \tag{1}$$

Furye qatorini qaraymiz. Bu yerda $f_n = (2\pi)^{-N} \int_{T^N} f(y) e^{-iny} dy$ - $f$ funksiyaning Furye koeffitsientlari, $T^N = (-\pi, \pi]^N$-$N$ o'lchovli kub, $nx = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_N x_N$.

O'zgarmas koeffitsientli ihtiyoriy $A(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha, \xi \in R^N$ bir jinsli elliptik ko'phad uchun (ya'ni $\forall \xi \neq 0$ da $A(\xi) > 0$) (1) qatorning quyidagi

$$S_\lambda f(x) \sum_{A(n)<\lambda} f_n e^{inx} \tag{2}$$

qismiy yig'indisini mos qo'yish mumkin, bu yerda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$-multiindeks, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_N^{\alpha_N}$. Xususan, agar $A(\xi) = |\xi|^2$ bo'lsa, u holda $S_\lambda f(x)$ odatdagi shar bo'yicha qismiy yig'indi bilan ustma-ust tushadi.

Tezisning assosiy maqsadi Sobolev fazosidagi funksiyalar uchun (2) qismiy yig'indini deyarli yaqinlashishga o'rganishdir. Asosiy natijani bayon etishdan oldin $L_p^a(T^N)$ ($a > 0$ haqiqiy son) Sobolev fazosini eslatib o'tamiz. $f \in L_p(T^N), p \geq 1$ funksiya $L_p^a(T^N)$ Sobolev fazosiga tegishli deyiladi, agar quyidagi

$$\|f\|_{L_p^a(T^N)} = \| \sum_{n \in Z^N} (1 + |n|^2)^{\frac{a}{2}} f_n e^{inx} \|_{L_p(T^N)} \tag{3}$$

norma chekli bo'sa, $a$ butin bo'lmagan holda bu fazo Liuvill fazosi deb ham ataladi.

Yuqorida keltirilgan barcha tushunchalarni batafsilroq [1] ishdan ham ko'rish mumkin.

Endi asosiy natijani quyidagi teorema orqali bayon etamiz.

**Teorema .** *$1 < p \leq 2$ va $a > (N-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ bo'lsin. U holda $\forall f \in L_p^a(T^N)$ funksiya uchun $S_\lambda f(x)$ qismiy yig'indi $f(x)$ funksiyaga $T^N$ da deyarli yaqinlashadi. O'z navbatida, ushbu $S_* f(x) = sup_{\lambda > 0} |S_\lambda f(x)|$ maksimal operatori uchun, quyidagi*

$$\|S_* f\| \leq C(p, a) \|f\|_{L_p^a(T^N)}$$

*baho o'rinli.*

Mazkur teorema shar bo'yicha qismiy yig'indi uchun [2] ishda isbotlangan.

## Adabiyotlar

1. *Ш.А.Алимов, Р.Р.Ашуров, А. К. Пулатов.* Кратные ряды и интегралы Фурье, Коммутативный гармонический анализ-4, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, том 42, Москва 1989, 105 с.

2. *Р.Р.Ашуров.* Сходимость почти всюду кратных тригонометрических рядов Фурье функций из классов Соболева. Математические заметки, т.109, N2, 2021, с.163-169.

# Об одной задаче для уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа с младшими членами

**Абдуллаев О.Х.,Матчанова А.А.**

Институт математики имени В.И.Романовского
Институт ионно-плазменных и лазерных технологий имени У.А. Арифова АНУз
obidjon.mth@gmail.com, oygul87-87@mail.ru

Пусть $-$ $\Omega$ односвязная область, ограниченная отрезками $BB_0$,$B_0A_0$,$A_0A$ прямых $x=1$, $y=1$, $y=0$ и характеристиками $AC: x+y=0$, $BC: x-y=-1$ уравнения колебания струны, пересекающимися в точке $C(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Введем обозначения:

$\Omega_1=\Omega\cap\{x>0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{x<0\}=\left\{(x,y): -\frac{1}{2}<x<0, -x<y<x+1\right\}$

В этой области рассмотрим уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0 \tag{2.2}$$

где

$$Lu\equiv\begin{cases} L_1u=u_{xx}-{}_cD_{0y}^{\alpha}u+a_1(x,y)\,u_x+c_1(x,y)\,u; & (x,y)\in\Omega_1\\ L_2u=u_{xx}-u_{yy}+a_2(x,y)\,u_x+b_2(x,y)\,u_y+c_2(x,y)\,u; & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

и ${}_cD_{oy}^{\alpha}$ является частной дробной производной Капуто порядка $0<\alpha<1$ функции u(x,y)

$${}_cD_{oy}^{\alpha}f(y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y(y-t)^{-\alpha}f'(t)dt$$

$a$, $b$ и $c$ заданные постоянные числа, $a\neq0$ $a_i(x,y)$ $b_2(x,y)$ $c_i(x,y)$ заданные функции в $\Omega_i$ i=1,2, причем $c_1(x,y)\leq0$ в $\Omega_1$, кроме того, в $\Omega_1$ $a_1,c_1,a_{1x},a_{1y}$ удовлетворяют условию Гельдера, $a_2,b_2\in C^1(\overline{\Omega_2}),c_2\in C^0(\overline{\Omega_2})$ при $ab=0$, а при $ab\neq0$ $a_2,b_2\in C^2(\Omega_2),c_2\in C^1(\overline{\Omega_2})$.

**Задача .** Найти в области $\Omega$ регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса функций

$$W=\left\{u(x,y): u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega_2\cup\overline{AC}\cup\{\{x=0\}\cap\{0\leq y<1\}\})\right\}$$

и удовлетворяющее группу граничных условий: при $1<\frac{b}{a}\leq+\infty$

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\leq y\leq1 \tag{2.3}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\quad 0\leq x\leq1 \tag{2.4}$$

$$\lim_{y\to+0}{}_cD_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\psi_2(x),\quad 0\leq x\leq1 \tag{2.5}$$

$$u\,|_{AC}=\varphi_2(y),\ \ 0\leq y\leq\frac{1}{2}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{AC} = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2} \tag{2.7}$$

где $n$-внутренняя нормаль, $\varphi_i(y)$ , $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)(i = \overline{1,3})$– заданные функции, причем $\psi_1(0) = \varphi_2(0)$ и $\sqrt{2}\varphi_3(0) - \psi_1'(0) = \varphi_2'(0)$

**Теорема.** Пусть выполняются условия

$$\varphi_1(y), \psi_1(x) \in C^1[0,1]; \quad \psi_2(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1],$$

$$\varphi_2(y) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \varphi_3(y) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

то решения задачи существует и единственно.

Следует отметить, что аналогичные задачи для уравнений третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором целого порядка было изучена в работах [1], [2]. При определенных условиях на заданных функций доказывается однозначная разрешимость исследуемой задачи.

### Литература


1. *Джураев Т.Д, Сопуев А, Мамажонов М.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан. 1986г.

2. *Мамажанов М. Холмуратов Д.* Краевые задачи для уравнений параболического-гиперболического типа третьего порядка. Дифф. Уравн., 1989, том. 25, no 2, стр. 271–275.


# Бисингулярный интеграл Коши с суммируемой плотностью и его приложения


**Абсаламов Т., Файзуллаева Б., Мухаммадиев А**

*Самаркандский Государственный университет*

fayzullayeva55@mail.ru


Рассмотрим бисингулярный интеграл вида:

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \frac{u(s_1, s_2)}{(s_1 - x_1)(s_2 - x_2)}\, ds_1 ds_2,$$

где функция

$$u \in L_p^{loc}(a_2, b_2) = u : \forall \xi_1, \eta_1 > 0, \xi_1 + \eta_1 \le b_2 - a_2 = l_2, u \in L_p[a_1, b_1, a_2 + \xi_1, b_2 - \eta_1], \quad p > 1.$$

Введем характеристики

$$\Omega_{p,1}(u, \xi, \xi_1, \eta_1) = \left( \int_{a_1}^{a_1+\xi} \int_{a_2+\xi_1}^{b_2-\eta_1} |u(x_1, x_2)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Omega_{p,2}(u,\xi,\xi_1,\eta_1)=\left(\int\limits_{b_1-\xi}^{b_1}\int\limits_{a_2+\xi_1}^{b_2-\eta_1}|u(x_1,x_2)|^p\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\omega_{p,1}(u,\xi,\delta,\xi_1\xi,\eta_1)=\sup_{0<\eta<\delta}\left(\int\limits_{a_1}^{a_1+\xi}\int\limits_{a_2+\xi_1}^{b_2-\eta_1-h}|u(x_1+\eta_1,x_2)-u(x_1,x_2)|^p\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\omega_{p,2}(u,\xi,\delta,\xi_1\xi,\eta_1)=\sup_{0<\eta<\delta}\left(\int\limits_{b_1-\xi}^{b_1}\int\limits_{a_2+\xi_1}^{b_2-\eta_1-h}|u(x_1+\eta_1,x_2)-u(x_1,x_2)|^p\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}}$$

где $\xi_1+\eta_1+h\le l_2,\delta>0$. Пользуясь (1-6) доказана следующая

**Теорема.** Пусть $u\in L_p^{loc}$. Тогда при сходимости соответствующих интегралов справедливо неравенства

$$\begin{aligned}\omega_{p,i}(\tilde{u},\xi,\delta,\xi_1,\eta_1) &\le C_p\left[\frac{\delta}{\xi_1+\delta}\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{p}}}\int\limits_{\xi}^{l_1}\int\limits_{0}^{\frac{\xi_1}{2}}\frac{\Omega_{p,i}\left(u_1,t_1,t_2,\frac{l_2}{2}\right)}{t_2^{\frac{1}{p}}t_1^{1+\frac{1}{p}}}\,dt_1dt_2\right.\\ &+ \frac{\delta}{\eta_1+\delta}\frac{1}{\eta_1^{\frac{1}{q}}}\xi^{\frac{1}{p}}\int\limits_{\xi}^{l_1}\int\limits_{0}^{\frac{\eta_1}{2}}\frac{\Omega_{p,i}\left(u_1,t_1,\frac{l_2}{2},t_2\right)}{t_2^{\frac{1}{p}}t_1^{1+\frac{1}{p}}}\,dt_1dt_2\\ &+ \left.\xi^{\frac{1}{p}}\omega_{p,i}\left(u,l_1,\delta,\frac{\xi_1}{2},\frac{\eta_1}{2}\right)\right],i=1,2.\end{aligned}$$

На основе полученной оценки строится класс функций $H_{\varphi\psi}^p$ инвариантной относительно бисингулярного оператора $\tilde{u}$.

Методом последовательных приближений доказана разрешимость нелинейного бисингулярного интегрального уравнения

$$\tilde{u}(x_1,x_2)=\lambda\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{f(s_1,s_2,u(s_1,s_2))}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}\,ds_1ds_2,$$

в $H_{\varphi\psi}^p$ где функция $f(s_1,s_2,u)$ определена на $(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times(-\infty,+\infty)$, а $\lambda-$действительный параметр.

## Литература


1. *Абсаламов Т., Файзуллаева Б., Маннонов Г.* Некоторые свойства бисингулярного интеграла Коши. Научный вестник СамГУ,2019,№1,6-14.

2. *Гусейнов Е.Г., Салаев В.В.* Особый интеграл по отрезку прямой в пространствах суммируемых функций, Науч.Тр.МВ и ССО Азерб.ССР, серия физ-мат. Наук, №1,1979, 81-87.

3. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства-М., Изд.И.Л., 1948.

4. *Холмуродов Э.* Некоторые оценки для особого интеграла с локально суммируемой плотпостью, Уч.зап. МВ и ССО Азерб. ССР, серияфиз-мат. Наук-1978,6,71-80.

5. *Fefferman R* $A_p$ weights and singular integrals., Amer.J. Math., M1988, 110, 5, p. 975-987.

6. *Riesz M.* Surles functions conjugue'es., Math.Z., 1927,27,2.

# Краевая задача для одного уравнения четвертого порядка со сингулярным коэффициентом

**Азизов М.С.**

*Ферганский Государственный университет*
e-mail muzaffar.azizov.1988@mail.ru

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p, \ -T < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv sign(t)u_{xxxx} + u_{tt} + \frac{2\gamma}{t}u_t = 0, \quad (x,t) \in \left(\Omega^+ \cup \Omega^-\right) \tag{1}$$

где $p$, $T$, $\gamma \in R$, причем $p > 0$, $T > 0$, $(-1/2) \ < \gamma < (1/2)$; $\Omega^+ = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (t < 0)$ и исследуем следующую смешанную задачу:

**Задача.** Найти функцию $u\,(x,t) \in C^{3,0}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ и следующим краевым условиям

$$u\,(0,t) = 0, \quad u\,(p,t) = 0, \quad u_{xx}\,(0,t) = 0, \quad u_{xx}\,(p,t) = 0, \quad -T \le t \le T; \tag{2}$$

$$u\,(x,-T) = \varphi\,(x)\,, \quad 0 \le x \le p \tag{3}$$

а также условиям склеивания

$$u\,(x,+0) = u\,(x,-0)\,, \quad 0 \le x \le p; \tag{4}$$

$$\lim_{t\to+0} t^{2\gamma} u_t\,(x,t) = \lim_{t\to-0} (-t)^{2\gamma} u_t\,(x,t)\,, \quad 0 \le x \le p; \tag{5}$$

$$\lim_{t\to+0} t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{2\gamma}u_t\,(x,t)\right] = \lim_{t\to-0} (-t)^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[(-t)^{2\gamma}u_t\,(x,t)\right], \quad 0 \le x \le p, \tag{6}$$

где $\varphi\,(x)$ - заданная непрерывная функция.

**Теорема 1.** Задача (1)-(6) не может иметь более одного решения.

**Доказательство.** Если $u_1\,(x,t)$ и $u_2\,(x,t)$- решения задачи (1)-(6) при $\varphi(x) \equiv 0$, $0 \le x \le p$. Тогда $u\,(x,t) = u_1\,(x,t) - u_2\,(x,t)$ будет удовлетворять уравнениям

$$sign(t)u_{xxxx} + u_{tt} + \frac{2\gamma}{t}u_t = 0, \quad (x,t) \in \left(\Omega^+ \cup \Omega^-\right). \tag{7}$$

Рассмотрим интегралы [1]

$$\alpha_n\,(t) = \int\limits_0^p u\,(x,t)\,X_n\,(x)\,dx, \quad n = 1, 2, ..., \quad t > 0, \tag{8}$$

$$\beta_n\,(t) = \int\limits_0^p u\,(x,t)\,X_n\,(x)\,dx, \quad n = 1, 2, ..., \quad t < 0, \tag{9}$$

где

$$X_n\,(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, \quad n = 1, 2, ... \,. \tag{10}$$

Отметим, что функции $X_n(x)$ образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0,p)$ [7]. Продифференцируя (8) два раза по $t$, имеем

$$\alpha'_n(t) = \int\limits_0^p u_t(x,t)\,X_n(x)\,dx, \quad \alpha''_n(t) = \int\limits_0^p u_{tt}(x,t)\,X_n(x)\,dx, \quad n = 1,2,..., \quad 0 < t < T.$$

Из последнего, учитывая уравнения (7), получаем

$$\alpha''_n(t) + \frac{2\gamma}{t}\alpha'_n(t) = -\int\limits_0^p u_{xxxx}(x,t)\,X_n(x)\,dx, \quad n = 1,2,..., \quad 0 < t < T.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям, находим

$$\alpha''_n(t) + \frac{2\gamma}{t}\alpha'_n(t) + \lambda_n^4\alpha_n(t) = 0, \quad n = 1,2,..., \quad 0 < t < T. \tag{11}$$

Аналогично, из (9) находим

$$\beta''_n(t) + \frac{2\gamma}{t}\beta'_n(t) - \lambda_n^4\beta_n(t) = 0, \quad n = 1,2,..., \quad -T < t < 0. \tag{12}$$

Произведя замену $\alpha_n(t) = (z/\lambda_n^2)^{1/2-\gamma} g_n^+(z)$, где $z = \lambda_n^2 t$, в уравнение (11) и используя представление общего решения уравнения Бесселя [2] получим общее решение уравнения (11) в виде

$$\alpha_n(t) = a_n t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right) + b_n t^{1/2-\gamma} Y_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right), \quad 0 \le t \le T. \tag{13}$$

где $a_n$, $b_n$ - произвольные постоянные.

Аналогично, произведя замену $\beta_n(t) = (z/\lambda_n^2)^{1/2-\gamma} g_n^-(z)$, где $z = -\lambda_n^2 t$, в уравнении (12), получим общее решение уравнения (12) в виде

$$\beta_n(t) = c_n(-t)^{1/2-\gamma} I_{1/2-\gamma}\left(-\lambda_n^2 t\right) + d_n(-t)^{1/2-\gamma} K_{1/2-\gamma}\left(-\lambda_n^2 t\right), \quad -T \le t \le 0, \tag{14}$$

где $c_n$, $d_n$ - произвольные постоянные.

Далее, из (13) и (14) используя условия

$$\beta(-T) = 0, \quad \alpha(+0) = \beta(-0), \quad \lim_{t\to+0} t^{2\gamma}\alpha'(t) = \lim_{t\to-0}(-t)^{2\gamma}\beta'(t),$$

$$\lim_{t\to+0} t^{-2\gamma}\left[t^{2\gamma}\alpha'(t)\right]' = \lim_{t\to-0}(-t)^{-2\gamma}\left[(-t)^{2\gamma}\beta'(t)\right]'$$

которые следуют из (3)-(6), для определения неизвестных коэффициентов $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_n + \pi/2\; d_n = 0, \\ a_n + tg\gamma\pi\, b_n + c_n + \pi/(2\cos\gamma\pi)\, d_n = 0, \\ b_n - \pi/2\; d_n = 0, \\ \quad c_n T^{1/2-\gamma} I_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 T\right) + d_n T^{1/2-\gamma} K_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 T\right) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Нетрудно убедиться, что определитель системы уравнений (15) имеет вид $\Delta_n = -\pi\, T^{\frac{1}{2}-\gamma} I_{\frac{1}{2}-\gamma}(\lambda_n^2 T) \ne 0$.

Поэтому из (15) следует, что $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$. Следовательно $\alpha_n(t) = 0$, $\beta_n(t) = 0$. Тогда, правые части равенств (8) и (9) будут равным нулю. Отсюда следует ортогональность $u(x,t)$ к полной системе (10). Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** Если $\varphi(x) \in C^4[0,p] \cap C^5(0,p)$, $\varphi^{(5)}(x) \in L(0,p)$, $\varphi^{(2i)}(0) = \varphi^{(2i)}(p) = 0$, $i = \overline{0,2}$, то решение задача 1 существует.

**Доказательство.** Решение задачи (1)-(6) ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \tag{16}$$

Разложим функция $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе (10):

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x), \quad \texttt{где} \quad \varphi_n = \int_0^p \varphi(x) X_n(x)\, dx. \tag{17}$$

Обозначим $u_n(t) = u^+(t)$ при $0 \le t \le T$ и $u_n(t) = u^-(t)$ при $-T \le t \le 0$. Учитывая это и подставляя (16) в уравнения (1), имеем

$$u_n^{+\prime\prime}(t) + \frac{2\gamma}{t} u_n^{+\prime}(t) + \lambda_n^4 u_n(t) = 0, \quad 0 < t < T; \tag{18}$$

$$u_n^{-\prime\prime}(t) + \frac{2\gamma}{t} u_n^{-\prime}(t) - \lambda_n^4 u_n(t) = 0, \quad -T < t < 0. \tag{19}$$

В силу (11)-(14). Общее решение уравнений (18) и (19) соответственно имеет вид

$$u_n^+(t) = a_n t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right) + b_n t^{1/2-\gamma} Y_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right), \quad 0 \le t \le T, \quad n = 1, 2, ..., \tag{20}$$

$$u_n^-(t) = c_n(-t)^{1/2-\gamma} I_{1/2-\gamma}\left(-\lambda_n^2 t\right) + d_n(-t)^{1/2-\gamma} K_{1/2-\gamma}\left(-\lambda_n^2 t\right), \quad -T \le t \le 0, \quad n = 1, 2, ..., \tag{21}$$

где $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$ произвольные постоянные.

Для нахождения неизвестных коэффициентов в (20), (21) используем условия (3)-(6), которые переходят в следующие

$$u_n^-(-T) = \varphi_n, \qquad u_n^+(+0) = u_n^-(-0), \quad \lim_{t\to+0} t^{2\gamma} u_n^{+\prime}(t) = \lim_{t\to-0} t^{2\gamma} u_n^{-\prime}(t),$$

$$\lim_{t\to+0} t^{-2\gamma}\left[t^{2\gamma} u_n^{+\prime}(t)\right]' = \lim_{t\to-0} (-t)^{-2\gamma}\left[(-t)^{2\gamma} u_n^{-\prime}(t)\right]',$$

Тогда приходим к системах уравнений относительно $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$:

$$\begin{cases} b_n + \pi/2\ d_n = 0, \\ a_n + b_n tg\gamma\pi + c_n + \pi/(2\cos\gamma\pi)\, d_n = 0, \\ b_n - \pi/2\ d_n = 0, \\ \quad T^{1/2-\gamma} I_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 T\right) c_n + T^{1/2-\gamma} I_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 T\right) d_n = \varphi_n, \end{cases} \tag{22}$$

Решая систему уравнений (22), находим коэффициенты $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$. Подставляя найденные коэффициенты в (20) и (21) имеем

$$u_n^+(t) = -\left(\frac{t}{T}\right)^{1/2-\gamma} \frac{J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right)}{I_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 T\right)} \varphi_n, \quad 0 \le t \le T, \quad n = 1, 2, ..., \tag{23}$$

$$u_n^-(t) = \left(-\frac{t}{T}\right)^{1/2\,-\gamma} \frac{I_{1/2\,-\gamma}\left(-\lambda_n^2 t\right)}{I_{1/2\,-\gamma}\left(\lambda_n^2 T\right)}\varphi_n, \quad -T \le t \le 0, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{24}$$

Далее, подставляя (23) и (24) в (16) находим решение задачи 1 в виде:

$$u^+(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{T}\right)^{1/2\,-\gamma} \frac{J_{1/2\,-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right)}{I_{1/2\,-\gamma}\left(\lambda_n^2 T\right)}\varphi_n\, X_n(x), \quad 0 \le t \le T, \tag{25}$$

$$u^-(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{t}{T}\right)^{1/2\,-\gamma} \frac{I_{1/2\,-\gamma}\left(-\lambda_n^2 t\right)}{I_{1/2\,-\gamma}\left(\lambda_n^2 T\right)}\varphi_n\, X_n(x), \quad -T \le t \le 0, \tag{26}$$

Нетрудно убедиться что $\forall n \in N$ справедливы оценки:

$$\left|u_n^+(t)\right| \le C_1\left|\varphi_n\right|, \quad \left|t^{2\gamma} u_n^{+\prime}(t)\right| \le C_2\lambda_n^2\left|\varphi_n\right|, \quad \left|t^{-2\gamma}\left[t^{2\gamma} u_n^{+\prime}(t)\right]'\right| \le C_3\lambda_n^4\left|\varphi_n\right|, \quad t > 0; \tag{27}$$

$$\left|u_n^-(t)\right| \le C_4\lambda_n^2\left|\varphi_n\right|, \left|(-t)^{2\gamma} \quad u_n^{-\prime}(t)\right| \le C_5\lambda_n^2\left|\varphi_n\right|,$$

$$\left|(-t)^{-2\gamma}\left[(-t)^{2\gamma} u_n^{-\prime}(t)\right]'\right| \le C_6\lambda_n^4\left|\varphi_n\right|, t < 0, \tag{28}$$

где $C_j$ $j = \overline{1,6}$ - некоторые положительные постоянные.

Теперь исследуем сходимость рядов (25), (26) и рядов, полученные из них дифференцированием

$$\frac{\partial^4 u^+}{\partial x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 u_n^+(t)\, X_n(x), \quad \frac{\partial^4 u^-}{\partial x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 u_n^-(t)\, X_n(x), \tag{29}$$

$$t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{2\gamma} u_t^+(x,t)\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 u_n^+(t)\, X_n(x), \quad t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{2\gamma} u_t^-(x,t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 u_n^-(t)\, X_n(x), \tag{30}$$

Отсюда видно, чтодостаточно доказать абсолютной и равномерной сходимости рядов (29). Можорантной для (29) и (30) является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 \left|u_n(t)\right|. \tag{31}$$

Принимая во внимания (27) и (28), выбросив постоянные, из (31) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 \left|\varphi_n\right|. \tag{32}$$

Применяем правилу интегрирования по частям пять раз к интегралу в (17). Затем, учитывая свойства функций $X_n(x)$ и $\varphi(x)$, имеем $\varphi_n = \varphi_n^{(5)}/\lambda_n^5$, где $\varphi_n^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p \varphi^{(5)}(x)\cos\lambda_n x dx$.

Подставляя в (32) $\varphi_n = \varphi_n^{(5)}/\lambda_n^5$ и выбросив множитель $(p/\pi\,)$, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\varphi_n^{(5)}\right|. \tag{33}$$

В силу $\varphi^{(5)}(x) \in C(0,p) \cap L(0,p)$, согласно лемме Римана [7], $\varphi_n^{(5)} \to 0$ при $n \to \infty$. Если учесть это, то ряды (33) сходятся как обобщенный гармонические ряды. Тогда сходятся и ряды (31).

На основании доказанные выше можно заключить, что ряды (29) и (30) а также (25) и (26) сходятся абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$. Тогда сумма рядов (25) и (26) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)-(6), т.е. является решением поставленной задачи. Теорема 2 доказана.

**Литература**


1. *Моисеев Е.И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи, Дифференц. уравнения. Т. 35, N 8. 1999, С. 1094-1100.

2. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Том. 1. -М.: Изд. ИЛ, 1949.

3. *Аманов Д., Киличов О.* Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка в прямоугольной области, Бюллетень Института математики 2018, N 2, С. 1-8.

4. *Azizov M.S.* A Boundary Problem for the Fourth Order Equation with a Singular Coefficient in a Rectangular Region, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, N 6, pp. 1043-1050.

5. *Азизов М.С.* Смешанная задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике, Бюллетень Института математики 2020, N 4, С. 50-59.

6. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.,* Основы математического анализа. ч. 2, М.: Наука. 1973, С. 448.

7. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т. 2. -М.: Наука, 1968, С. 464.


# Об одном условие дифференцируемости комплекснозначных функций


**Аликулов Э. О., Омонова Н. Р.**

*Каршинский государственний университет, Узбекистан.*
e-mail: eshpulat05@mail.ru, e-mail: omonovanargiza1996@gmail.com


Известное утверждения из классического анализа гласит: если непрерывная функция обладает частными производными в области и эти производные непрерывны в некоторой точке, то функция дифференцируема в этой точке. Имеются различные обобщения и усиления этого утверждения[1-3]. Например, для липшицевой функции(вещественной, или комплексной) существование пределов ее частных производных в некоторой точке по точкам дифференцируемости также приводят к дифференцируемости в этой точке; при этом о существовании частных производных в ней ничего не предполагается. К сожалению, в общем случае это утверждение не верно [1]. Тем не менее, в работе [2] было доказано усиление вышеуказанного утверждения, рассматривая общий случай комплексной функции заменой её частных производных комплексными производными. Более того, для липшицевой функции указанные выше пределы были заменены асимптотическими и получены условия дифференцируемости в смысле действительного и комплексного анализа.

В докладе будут приводится аналогичные утверждения для функций многих комплексных переменных с некоторыми дополнительными условиями.

Пусть функция $f$ определена в области $D \subset \mathbb{C}^2$ и $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$ содержится в $D$ со своей поликруговой окрестностью.

**Определение.** Функция $f$ называется в области $D \subset \mathbb{C}^2$ липшицевой по переменной $z_2$, если найдется константа $L$ такая, что $|f(z_1', z_2') - f(z_1'', z_2'')| \le L|z_2' - z_2''|$ при любых $z' = (z_1', z_2')$, $z_2'' = (z_1'', z_2'') \in D$.

**Теорема.** Пусть для липшицевой функции $f$ по переменной $z_2$ в области $D$ выполняются следующие условия

1. $f-$ $\mathbb{C}-$дифференцируема по $z_1$ в некоторой окрестности $z^0$;

2. Существует один из асимптотических пределов $f_{\overline{z}_2}$, либо $f_{z_2}$ при $z \to z^0$.

Тогда $f$ дифференцируема в смысле действительного анализа в точке $z^0$.

### Литература

1. *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерий аналитичности. Киев, Институт математики НАН Украины, 2007, 307стр.

2. *Тар М. М.* Про деякі достатні умови аналітичності функцій комплексної зминої.// Докл.АН УРСР. Сер.А.-1971, N 3.стр. 260-269.

3. *Аликулов Э. О.* Новые кретерии дифферецируемости и голоморфности колплекснозначных функций. Укр.мат.журнал,1994, т.46, N4. Стр.328-334.

# О постановке и исследовании одной краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка

**Апаков Ю.П., Мамажонов С.М.**

*Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз.*

*Докторант института математики им. В.И.Романовского АН РУз.*

yusupjonapakov@gmail.com, sanjarbekmamajonov@gmail.com

В настоящей статье в пятиугольной области $G$ плоскости $xOy$ ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu) = 0, \tag{1}$$

где $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup J_1 \cup J_2$; $G_1-$ прямоугольник с вершинами в точках $A\,(0;\,0)$, $B\,(1;\,0)$, $B_0\,(1,\,1)$, $A_0\,(0,\,1)$; $G_2-$ треугольник с вершинами в точках $B$, $C\,(0,\,-1)$, $D\,(-1,\,0)$; $G_3-$ прямоугольник с вершинами в точках $A$, $D$, $D_0\,(-1,\,1)$, $A_0$; $J_1-$ открытый отрезок с вершинами в точках $B$, $D$; $J_2-$ открытый отрезок с вершинами в точках $A$, $A_0$; $Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x,\,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x,\,y) \in D_i, \;\; i = 2,\,3. \end{cases}$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

**Задача-1.** Найти функцию $u(x, y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\backslash\overline{J_1\backslash J_2}$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем $u_x$, $u_y$, $u_{xx}$, $u_{xy}$, $u_{yy}$ - непрерывны в $G$ вплоть до части границы области $G$, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\backslash J_1\backslash J_2$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{2}$$

$$u(-1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{3}$$

$$u_x(1, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{4}$$

$$u|_{BC} = \psi_1(x), \ \ 0 \le x \le 1; \tag{5}$$

$$u|_{DF} = \psi_2(x), \ \ -1 \le x \le -1/2; \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \ \ 0 \le x \le 1; \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DC} = \psi_4(x), \ \ -1 \le x \le 0; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC} = \psi_5(x), \quad 0 < x < 1; \tag{9}$$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x, +0) = u(x, -0) = T(x), \ \ -1 \le x \le 1; \tag{10}$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = N(x), \ \ -1 \le x \le 1; \tag{11}$$

$$u_{yy}(x, +0) = u_{yy}(x, -0) = M(x), \ \ x \in (-1, 0) \cup (0, 1); \tag{12}$$

$$u_{yyy}(x, +0) = u_{yyy}(x, -0) = \Theta(x), \ \ x \in [-1, 0) \cup (0, 1]; \tag{13}$$

$$u(+0, y) = u(-0, y) = \tau_3(y), \ \ 0 \le y \le 1; \tag{14}$$

$$u_x(+0, y) = u_x(-0, y) = \nu_3(y), \ \ 0 \le y \le 1; \tag{15}$$

$$u_{xx}(+0, y) = u_{xx}(-0, y) = \mu_3(y), \ \ 0 < y \le 1, \tag{16}$$

где $\varphi_i \ \left(i = \overline{1,3}\right)$, $\psi_j \ \left(j = \overline{1,5}\right)$ - заданные достаточно гладкие функции, причем выполняются условия согласования $\psi_1(1) = \varphi_1(0)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(-1)$, $\psi'_3(0) = -\psi'_4(0)$, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x + y = -1$ или $x - y = 1$, а $F(-1/2\,, -1/2\,)$. При этом, кроме введенных выше обозначений используются еще следующие обозначения: $T(x) = \begin{cases} \tau_1(x), & 0 \le x \le 1, \\ \tau_2(x), & -1 \le x \le 0; \end{cases}$ $N(x) = \begin{cases} \nu_1(x), & 0 \le x \le 1, \\ \nu_2(x), & -1 \le x \le 0; \end{cases}$ $M(x) = \begin{cases} \mu_1(x), & 0 \le x \le 1, \\ \mu_2(x), & -1 \le x \le 0, \end{cases}$ $\Theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x), & 0 \le x \le 1, \\ \theta_2(x), & -1 \le x \le 0, \end{cases}$ а $\tau_i,\ \nu_i,\ \mu_i\ (i = \overline{1,\,3})$, $\theta_1, \theta_2$ - неизвестные пока достаточно гладкие функции.

В работах [1-4] был рассмотрен ряд краевых задач для уравнений второго, третьего и четвертого порядков параболо-гиперболического типа. А в работах [1, 2] был рассмотрен ряд краевых задач для уравнений четвертого порядка параболо-гиперболического типа в области с одной линией изменения типа.

**Теорема.** Если, $\varphi_3 \in C^3[0,\,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,\,1]$, $\psi_2 \in C^4[-1,\,-1/2\,]$, $\psi_3 \in C^3[0,\,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,\,0]$, $\psi_5 \in C^2[0,\,1]$, причем выполняется условие согласования $\psi_1(1) =$

$\varphi_1(0),\ \varphi_2(0) = \psi_2(-1),\ \psi'_4(0) = -\psi'_3(0)$, то задача-1 допускает единственное решение.

**Доказательство.** Теорему докажем методом непосредственном построения решением. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(x+y) + \omega_{12}(x)\,,\ \ (x,\,y) \in G_1, \tag{17}$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(x+y) + \omega_{i2}(x)\,,\ \ (x,\,y) \in G_j\ \ (j = 2,\,3), \tag{18}$$

где введены обозначения $u(x,\,y) = u_i(x,\,y)\,,\, (x,\,y) \in G_i\ \left(i = \overline{1,\,3}\right)$, причем $\omega_{i1}(x+y)\,,\ \omega_{i2}(x)\ \left(i = \overline{1,\,3}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в области $G_2$. Решение уравнения (18) $(i = 2)$, удовлетворяющее условиям (10), (11) можно представить в виде

$$u_2(x,\,y) = \frac{1}{2}\left[T(x+y) + T(x-y)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} N(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta \int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \left[\omega_{21}(\xi+\eta) + \omega_{22}(\xi)\right] d\xi. \tag{19}$$

Подставляя (19) в условия (7) и (8) после упрощений, имеем

$$\omega_{21}(2x-1) + \omega_{22}(x) = -\sqrt{2}\psi'_3(x)\,,\ \ 0 \le x \le 1, \tag{20}$$

$$\omega_{21}(-1) + \omega_{22}(x) = \sqrt{2}\psi'_4(x)\,,\ \ -1 \le x \le 0. \tag{21}$$

Далее, подставляя (19) в (9), после некоторых выкладок, находим

$$\omega_{22}(x) = 2\psi_5(x) - 2T''(1) - 2N'(1) + \omega_{21}(1) + 2\omega_{22}(1)\,,\ \ 0 \le x \le 1. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (20) и меняя аргумент $2x-1$ на $x+y$, получим

$$\omega_{21}(x+y) = -\sqrt{2}\psi'_3\left(\frac{x+y+1}{2}\right) - 2\psi_5\left(\frac{x+y+1}{2}\right) + 2T''(1) + 2N'(1) - \omega_{21}(1) - 2\omega_{22}(1)\,. \tag{23}$$

Слагая (23) и (22), находим: при $-1 \le x+y \le 1,\ 0 \le x \le 1$

$$\omega_{21}(x+y) + \omega_{22}(y) = -\sqrt{2}\psi'_3\left(\frac{x+y+1}{2}\right) + 2\left[\psi_5(x) - \psi_5\left(\frac{x+y+1}{2}\right)\right].$$

Из (23) при $x+y = -1$ следует

$$\omega_{21}(-1) = -\sqrt{2}\psi'_3(0) - 2\psi_5(0) + 2T''(1) + 2N'(1) - \omega_{21}(1) - 2\omega_{22}(1)\,.$$

Подставляя это в (21), находим

$$\omega_{22}(x) = \sqrt{2}\psi'_4(x) + \sqrt{2}\psi'_3(0) + 2\psi_5(0) - 2T''(1) - 2N'(1) + \omega_{21}(1) + 2\omega_{22}(1)\,,\ \ -1 \le x \le 0.$$

Слагая последнее равенство и (23), получим: при $-1 \le x+y \le 0,\ -1 \le x \le 0$

$$\omega_{21}(x+y) + \omega_{22}(x) =$$

$$= \sqrt{2}\psi'_4(x) - \sqrt{2}\left[\psi'_3\left(\frac{x+y+1}{2}\right) - \psi'_3(0)\right] - 2\left[\psi_5\left(\frac{x+y+1}{2}\right) - \psi_5(0)\right].$$

Теперь подставляя (19) в (5), после некоторых выкладок, имеем соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$:

$$T'(x) + N(x) = \alpha_1(x), \ -1 \le x \le 1, \tag{24}$$

где $\alpha_1(x)$ - известная функция.

При $-1 \le x \le 0$ имеем соотношение

$$\tau'_2(x) + \nu_2(x) = \alpha_1(x), \ -1 \le x \le 0. \tag{25}$$

Далее, подставляя (19) в (6), получим соотношение

$$\tau'_2(x) - \nu_2(x) = \delta_1(x), \ -1 \le x \le 0, \tag{26}$$

где $\delta_1(x)$ - известная функция.

Из (25) и (26) находим функции $\tau'_2(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\tau'_2(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(x) + \delta_1(x)\right], \qquad \nu_2(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(x) - \delta_1(x)\right]. \tag{27}$$

Интегрируя первое из равенств (27) от $-1$ до $x$, находим

$$\tau_2(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x}\left[\alpha_1(t) + \delta_1(t)\right]dt + \psi_2(-1).$$

При $0 \le x \le 1$ уравнение (24) имеет вид

$$\tau'_1(x) + \nu_1(x) = \alpha_1(x), \ 0 \le x \le 1. \tag{28}$$

Теперь переходя в уравнении (18) ($i = 2$), к пределу при $y \to 0$, в силу (10) и (12) получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\mu_1(x) = \tau''_1(x) - \omega_{21}(x) - \omega_{22}(x). \tag{29}$$

Дифференцируя уравнение (18) ($i = 2$), получим соотношение

$$\theta_1(x) = \nu''_1(x) - \omega'_{21}(x). \tag{30}$$

Далее, применяя оператор $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$ к уравнению (17) и устремляя $y$ к нулю, получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$:

$$\nu'''_1(x) - \mu''_1(x) - \mu'_1(x) + \theta_1(x) = 0. \tag{31}$$

Исключая из (28), (29), (30) и (31) функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение трижды от 0 до $x$, имеем

$$\tau'_1(x) + \tau_1(x) = \alpha_2(x) + k_1\frac{x^2}{2} + k_2 x + k_3, \ 0 \le x \le 1,$$

где $\alpha_2(x)$ - известная функция, а $k_1$, $k_2$, $k_3-$ неизвестные пока действительные числа.

Теперь решая последнее уравнение при условиях $\tau_1(1) = \varphi_1(0)$, $\tau'_1(1) = \varphi_3(0)$, $\tau_1(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t) + \ +\delta_1(t)\right]dt + \psi_2(-1)$, $\tau'_1(0) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(0) + \delta_1(0)\right]$, находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x) = \int\limits_0^x \exp(t-x)\,\alpha_2(t)\,dt + k_1\left(\frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x}\right) + k_2\left(x - 1 + e^{-x}\right) + k_3\left(1 - e^{-x}\right) + k_4 e^{-x},$$

где $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ - уже известные постоянные. Тогда будут известными и функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$, $u_2(x,\, y)$.

Переходяя в уравнениях (18) $(i=2)$ и (18) $(i=3)$ к пределу при $y \to 0$ с учетом условий (10), (12), находим

$$\omega_{31}(x)+\omega_{32}(x)=\omega_{21}(x)+\omega_{22}(x)\,,\ -1 \le x \le 0. \tag{32}$$

Далее, дифференцируя уравнения (18) $(i=2)$ и (18) $(i=3)$ по $y$ и устремляя $y$ к нулю, получим

$$\omega'_{31}(x)=\omega'_{21}(x)\,,\ -1 \le x \le 0. \tag{33}$$

Из (33) и (32) после некоторых выкладок и преобразований находим

$$\omega_{31}(x+y)+\omega_{32}(x)=\omega_{21}(x+y)+\omega_{22}(x)\,,\ -1 \le x+y \le 0,\ -1 \le x \le 0.$$

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области $G_3$. Методом продолжения после некоторых вычислений из области $G_3$ имеем соотношение

$$\nu_3(y)=\frac{1}{2}\tau'_3(y)+\frac{1}{2}\int\limits_0^y \tau'_3(\eta)\,d\eta+\gamma_3(y)\,,\ 0 \le y \le 1. \tag{34}$$

Теперь переходим в область $G_1$. Записывая решение уравнения (17), удовлетворяющего условиям (2), (10), (14) и дифференцируя это решение по $x$ и полагая $x \to 0$ и $x \to 1$, с учетом равенства (34), после некоторых вычислений, получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\tau'_3(y)$ и $\overline{\overline{\omega}}_{11}(1+y)-\overline{\overline{\omega}}_{11}(1)$.

Решая эту систему, находим функции $\tau'_3(y)$, $\overline{\overline{\omega'}}_{11}(1+y)$, тем самым и функции $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$, $\overline{\overline{\omega}}_{11}(x++y)+\omega_{11}(x)$, $\omega_{31}(y)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x,y)$ и $u_1(x,y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

## Литература


1. *Джураев Т.Д., Мамажанов М.* Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференциальные уравнения. - 1986, т.22, N1, с25-31.

2. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболи-ческого типа. Т.: Фан. - 1986. - 220 с.

3. *Тахиров Ж.О.* Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с известной и неизвестной линиями раздела. Автореферат кандидатской диссертации. Ташкент, 1988.

4. *Бердышев А.С.* Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. Алматы, 2015, 224 с.

5. *С.М.Мамажонов.* К постановке и исследованию одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка парабола-гиперболического типа в пятиугольной области. Научный вестник НамГУ. 2019. N7. Ст.18-26.

# Обратная задача определения порядка дробной производной Капуто по времени для уравнения субдиффузии в $R^N$

**Р.Р. Ашуров**[1], **Р.Т. Зуннунов**[2]

[1] *Институт Математики имени В.И. Романовского АН РУз.100174, г.Ташкент, ул.Университетская 4 Б.*

e-mail: ashurovr@gmail.com, e-mail: zunnunov@mail.ru

В механике сплошной среды рассматриваются тела, обладающие пространственно однородными свойствами. Если материалы неоднородны и нерегулярны, то процессы переноса, протекающие в них, не подчиняются законам классической механики. Процессы переноса частиц и энергии (диффузия и теплопроводность соответственно), возникающие в пористых материалах, аморфных полупроводниках, перколяционных кластерах, полимерных структурах, называют аномальными, а иногда и фрактальными из-за их связи с дробно-дифференциальным исчислением. Наиболее естественным и удобным математическим аппаратом описания процессов аномальной диффузии (теплопроводности) на некотором множестве являются уравнения в частных дробных производных как по пространственным координатам, так и по времени. Производная дробного порядка– это нелокальная характеристика функции: она зависит не только от поведения функции в окрестности рассматриваемой точких , но и от принимаемых ею значений на всем интервале (a,x) (или (x,b)). Эта нелокальность означает, что изменение плотности потока частиц зависит не только от ее значений в окрестности рассматриваемой точки (как это имеет место в случае нормальной диффузии либо классической теплопроводности), но и от ее значений в удаленных точках пространства. Случайный процесс, скорость изменения плотности которого зависит от значений плотности в предшествующие моменты времени, называется эредитарным. Рассматриваемый класс процессов вызывает все больший интерес у исследователей в связи с обнаружением аномальных свойств у ряда наноматериалов и наносистем. Такие процессы удобно описывать уравнениями, содержащими дробную производную по времени. Одним из наиболее важных дробных по времени уравнений является уравнение субдиффузии, которое моделирует аномальные или медленные процессы диффузии. Это уравнение представляет собой интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, полученное из классического уравнения теплопроводности путем замены производной первого порядка дробной по времени производной порядка $\rho \in (0, 1)$ . При рассмотрении уравнения субдиффузии как модельного уравнения при анализе аномальных диффузионных процессов, порядок дробной производной часто неизвестен и его трудно измерить напрямую. Чтобы определить этот параметр, необходимо исследовать обратные задачи идентификации этих физических величин на основе некоторой косвенно наблюдаемой информации о решениях .

В зависимости от физического смысла задачи - рассматривается начальная фаза процесса или же стабилизировавшийся процесс - используются различные виды дробно-дифференциальных операторов. В первом случае применяется дробная производная Капуто , но во втором дробная производная Римана–Лиувилля.

В данной работе мы исследуем существование и единственность решения начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии с дробной производной Капуто и эллиптическим оператором $A(D)$ в $R^N$ с постоянными коэффициентами. Также будут исследована обратная задача определения порядка дробной производной Капуто по времени .

Пусть $A(D) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ однородное симметричное эллиптическое дифференциальное выражение четного порядка $m = 2l$ с постоянными коэффициентами, т.е $A(\xi) > 0$ для всех $\xi \neq 0$ где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ - мультииндекс и $D = (D_1, D_2, ..., D_N)$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $i = \sqrt{-1}$. Дробное интегрирование в смысле Римана–Лиувилля порядка $\rho\ < 0$ имеет вид

$$\partial_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(-\rho)} \int\limits_0^t \frac{h(\xi)}{(t-\xi)^{\rho+1}} d\xi, \quad t > 0,$$

при условии, что правая сторона существует. Здесь $\Gamma(\rho)$-гамма функция Эйлера. Используя это определение можно определить дробную производную Капуто порядка $\rho$ , $0 < \rho\ < 1$ как

$$D_t^\rho h(t) = \partial_t^{\rho-1} \frac{d}{dt} h(t).$$

Заметим, что если $\rho\ = 1$ то дробная производная совпадает с обычной классической производной первого порядка

$$D_t h(t) = \frac{d}{dt} h(t)$$

Пусть $\rho \in (0, 1]$ заданное число и $L_2^m(R^N)$ обозначают классы Соболева .

Рассмотрим начально-краевую задачу: найти функцию $u(x,t) \in L_2^m(R^N)$, $t \in [0,T)$ такую, что (заметим, что это включение рассматривается как граничное условие на бесконечности)

$$D_t^\rho u(x,t) + A(D)u(x,t) = 0, \quad x \in R^N, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R^N, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$-заданная непрерывная функция. Задачу (1) - (2) мы называем прямой задачей. Обратим внимание на то, что в постановке прямой задачи требование $u(x,t) \in L_2^m(R^N)$ не вызвано существом дела. Однако, с одной стороны, единственность именно такого решения доказывается достаточно просто, а с другой-решение, найденное методом Фурье, удовлетворяет выше приведенному условию.

**Определение 1.** Функция $u(x,t) \in C(R^N \times [0,T))$ со свойствами

$$D_t^\rho u(x,t) \text{ и } A(D)u(x,t) \in C(R^N \times (0,T))$$

и удовлетворяющие условиям (1) - (2) называют классическим решением (или просто, решением) прямой задачи. Обозначим через $E_\rho(t)$ функцию Миттага-Леффлера вида

$$E_\rho(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{\Gamma(\rho k + 1)},$$

и обозначим через $\widehat{f}(\xi)$ преобразование Фурье функции $f(x) \in L_2(R^N)$:

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{R^N} f(\xi) e^{-ix\xi} dx$$

Теперь мы можем сформулировать теорему существования и единственности для прямой задачи.

**Теорема 1.** Пусть $\tau > \frac{N}{2}$ и $\varphi \in L_2^\tau(R^N)$. Тогда прямая задача имеет единственное решение, и это решение имеет вид

$$u(x,t) = \int\limits_{R^N} E_\rho(-A(\xi)t^\rho)\,\hat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi. \tag{3}$$

Интеграл равномерно и абсолютно сходится относительно $x \in R^N$ и для каждого $t \in [0,T)$. Кроме того, решение (3) обладает свойством

$$\lim_{|x|\to\infty} D^\alpha u\,(x,t) = 0, |\alpha| \le m, 0 < t < T, \tag{4}$$

Далее мы будем предполагать, что исходная функция $\varphi$ принадлежит классу $L_2^\tau(R^N)$ при $\tau > \frac{N}{2}$, тогда по теореме 1 прямая задача имеет единственное решение вида (3) для любого $\rho \in (0,1]$. Теперь рассмотрим порядок дробной производной $\rho$ в уравнении (1) как неизвестный параметр.Чтобы сформулировать нашу обратную задачу мы дополнительно предположим, что $\varphi(x) \in L_1(R^N)$. Это означает , что обе функции $\widehat{\varphi}(\xi)$ и $\widehat{u}(\xi,t) = E_\rho(-A(\xi))t^\rho\widehat{\varphi}(\xi)$, $t \in [0,T)$ непрерывны по переменной $\xi \in R^N$. Пусть вектор $\xi_0 \ne 0$ такой, что $\widehat{\varphi}(\xi_0) \ne 0$ и положим $\lambda_0 = A(\xi_0) > 0$. Чтобы определить порядок $\rho$ дробной производной воспользуемся следующими дополнительными данными:

$$U(t_0,\rho) \equiv |\widehat{u}(\xi_0,t_0)| = d_0, \tag{5}$$

где $t_0$ , $0 < t_0 < T$ - фиксированный момент времени.

Задача (1)-(2) вместе с дополнительным условием (5) называется обратной задачей. Для решения обратной задачи зафиксируем число $\rho_0 \in (0,1)$ и рассмотрим задачу для $\rho \in [\rho_0,1]$ .

**Определение 2.** Пара $\{u(x,t),\rho\}$ решения $u(x,t)$ прямой задачи и параметра $\rho \in [\rho_0,1]$ называется классическим решением (или просто решением) обратной задачи.

Следующее свойство преобразования Фурье $\widehat{u}(\xi,t)$ решения прямой задачи играет важную роль в решении обратной задачи и, на наш взгляд, представляет самостоятельный интерес.

**Лемма.** Для $\rho_0$ из интервала $0 < \rho_0 < 1$ существует число $T_0 = T_0(\lambda_0,\rho_0)$ , такое что для всех $T_0 \le t_0 < T$ функция $U(t_0,\rho)$ монотонно убывает относительно $\rho \in [\rho_0,1]$.

Результат, связанный с обратной задачей, имеет вид:

**Теорема 2.** Пусть $T_0 \le t_0 < T$ . Тогда обратная задача имеет единственное решение $\{u(x,t),\rho\}$ тогда и только тогда, когда

$$e^{-\lambda_0 t_0} \le \frac{d_0}{|\hat{\varphi}(\xi_0)|} \le E_{\rho_0}(-\lambda_0 t_0^{\rho_0}).$$

# Слабая плотность и $\pi$ - вес плоскость Немыцкого

**Байтураев А.М., Шахобиддинова З.Б.**

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*

abayturaev@mail.ru, zsh020996@gmail.com

Через $L$ - обозначим подмножество плоскости, определенное условием $y \geq 0$, т.е. замкнутая верхняя полуплоскость и через $L_1$ прямую $y = 0$ и положим $L_2 = L \backslash L_1$. Для каждого $x \in L_1$ и $r > 0$ пусть $U(x; r)$ - множество всех точек из $L$, лежащих внутри круга радиуса $r$, касающегося $L_1$ в точке $x$. Пусть далее $U_i(x) = U\left(x; \frac{1}{i}\right) \bigcup \{x\}$, $i = 1, 2, ....$ Для каждого $L_1$ и $r > 0$ пусть $U(x; r)$ - множество всех точек из $L$, лежащих внутри круга радиуса $r$ с центром в точке $x$, и пусть $U_i(x) = U\left(x; \frac{1}{i}\right) \bigcup \{x\}$, $i = 1, 2, ....$

Можно легко проверить, что совокупность $\{B(x)\}_{x \in L}$, где $\{B(x)\}$=$\{U_i(x)\}_i^\infty = 1$ обладает свойствами базы (BP1)-(BP3):

(BP1). Для всякого $x \in X$ имеем $B(x) \neq \emptyset$ и для всякого $U \in B(x)$ имеем $x \in U$.

(BP2). Если $x \in U \in B(y)$, то существует такое $V \in B(x)$, что $V \subset U$.

(BP3). Для любых $U_1, U_2 \in B(x)$ существует такое $U_1 \in B(x)$, что $U \subset U_1 \bigcap U_2$.

Множество $L_1$ замкнуто относительно топологии, порожденной системой окрестностей $\{B(x)\}_{x \in X}$. Пространство $L$ называется плоскостью Немыцкого [1].

**Определение.** Слабая плотность топологического пространства $X$ равна $\tau \geq \aleph_0$, если $\tau$ наименьшее кардинальное число такое, что в $X$ существует $\pi$ - база, распадающаяся на $\tau$ центрированных систем открытых множеств, то есть существует $\pi$ -база, $B = \bigcup\{B_\alpha : \alpha \in A\}$ где $B_\alpha$ - центрированная система открытых множеств для каждого $\alpha \in A$, $|A| = \tau$. Слабая плотность топологического пространства $X$ обозначается через $wd(X)$ [2]. Если $wd(X) = \alpha_0$, то топологическое пространство называется слабо сепарабельным [3].

**Теорема 1.** Слабая плотность пространства $L$ счетная $wd(X) = \aleph_0$.

Говорят, что $\beta \subset \tau(X) \backslash \{\emptyset\}$ называется $\pi$-базой пространства $X$, если для каждого непустого открытого множества $G$ существует $B \in \beta$, что $B \subset G$.

$\pi$-вес пространства $X$ определяется следующим образом:

$\pi(X) = min\{|\beta| : \beta$ это $\pi-$ база пространства $X\}$ [4].

**Теорема 2.** $\pi$-вес пространства Немыцкого счетный, т.е. $\pi(L) = \aleph_0$.

## Литература

1. *Энгелькинг Р.*, Общая топология, Мир, Москва, 1986, 752 стр.

2. *Бешимов Р.Б.* Слабая плотность топологических пространств // ДАН РУз 2000, (4), стр 3-5.

3. *Beshimov R.B.* O note weakly separable spaces // Mathematica Moravica. 2002. (6). P. 9-19.

4. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. Москва: Наука, 1977. 368с.

# Слабо некорректная задача интегральной геометрии по семейству парабол в полосе с возмущением

**Бегматов А.Х., Исмоилов А.С.**

*Самаркандский государственный университет*

akrambegmatov@mail.ru, alisher_8778@mail.ru

Приведем определение задачи интегральной геометрии [1]. Пусть $x \in R^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y \in R^m$, $y = (y_1, ..., y_m)$, $S(y)$ - семейство многообразий в $x \in R^n$, зависящих от параметра $y$ размерности $m, \dim S = p$. Пусть, далее, $u(x)$ - функция, определена в некоторой области $D \subset R^n$, $\rho(x, y)-$ функция переменных $x, y, \omega(y)-$ мера на многообразии $S(y)$.

Рассмотрим функцию

$$\int\limits_{S(y)} \rho(x, y) u(x) d\omega = f(y). \tag{1}$$

Интегральная геометрия есть раздел математики, в котором изучаются различные взаимоотношения между элементами, входящими в (1). Мы будем считать, что в (1) $S(y)$, $\rho(x, y)$, $f(y)$ заданы и рассмат-ривать (1) как линейное операторное уравнение относительно функции $u(x)$.

Вопросы единственности решения плоской задачи интегральной геометрии на семействе парабол с возмущением рассматривались в статье [2].

В работах А.Х. Бегматова [3] изучается новый класс задач обращения лучевого преобразования с неполными данными. По характеру неустойчивости это сильно некорректная задача.

В работах [4-7] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью.

В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в полосе с весовой функцией нового вида. Доказана теорема единственности и существование решения задачи. Показано что решение поставленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости. Далее рассматривается соответствующая задача интегральной геометрии с возмущением. Получены теорема единственности ее решения в классе гладких финитных функций с носителем в полосе и оценка устойчивости решения в Соболевских пространствах.

Введем обозначения, которые будем использовать:

$$x \in R^2, \;\; \xi \in R^2, \; \lambda \in R^1, \; \mu \in R^1, \quad R^2_+ = \{x = (x_1, x_2) \, : \, x_2 \geq 0\}\,;$$
$$\Omega = \left\{x \in R^2_+ : \;\; 0 < x_2 < l \,\right\},$$

здесь, $0 < l < \infty$.

В полосе $\bar{\Omega}$ рассмотрим семейство $P(x_1, x_2)$ кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин $(x_1, x_2) \in \Omega$:

$$P(x_1, \; x_2) = \{(\xi_1, \; \xi_2) : \; x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2, \quad 0 \leq \xi_2 \leq x_2\}.$$

**Задача I.** Определить функцию двух переменных $u(x_1,x_2)$, если для всех $(x_1,x_2)$ из полосы $\bar{\Omega}$ известны интегралы от нее параболам $P(x_1,x_2)$:

$$\int\limits_{x_1-\sqrt{x_2}}^{x_1+\sqrt{x_2}} g(x_1,\xi_1)\, u(\xi_1, x_2-(x_1-\xi_1)^2)d\xi_1 = f(x_1,x_2) \tag{2}$$

где $g(x_1,\xi_1)=|x_1-\xi_1|$.

Обозначим через $U$ класс функция $u(x_1,x_2)$, которые имеют все непрерывные частные производные до восьмого порядка включительно и финитны с носителем в $R_+^2$. Для определенности имеем

$$supp\, u \subset D = \{(x_1,x_2) : -a < x_1 < a,\ \ 0 < a < \infty,\ \ 0 < x_2 < l, \quad l < \infty\}\ .$$

Введем следующие функции

$$I(\lambda,\mu) = \int\limits_0^\infty e^{-i\mu\tau}\cos\lambda\sqrt{\tau}d\tau,$$

$$I_1(\lambda, x_2-\xi_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu(x_2-\xi_2)}\frac{d\mu}{(1+\mu^4)\, I(\lambda,\mu)},$$

$$I_2(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(x_1-\xi_1)}I_1(\lambda, x_2-\xi_2)}{1+\lambda^4}d\lambda\,.$$

**Теорема-1.** Пусть функция $f(x_1,x_2)$ известна для всех $(x_1,x_2)\ \in \Omega$. Тогда решение задачи 1 в классе восемь раз непрерывно дифференцируемых финитных с носителем в полосе $\Omega$ функций единственно, выражается через функцию $f(x_1,x_2)$ по формуле

$$u(x_1,x_2) = \int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial{\xi_2}^4}\right)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial{\xi_1}^4}\right)f(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \tag{3}$$

и выполняется неравенство

$$||u(x_1,x_2)||_{L_2(\Omega)} \le C_0||f(\xi_1,\xi_2)||_{W_2^{4,4}(\Omega)},$$

где $C_0$ – некоторая постоянная, $E$ - единичный оператор.

**Теорема-2.** Пусть весовая функция $g(x_1,\xi_1)=|x_1-\xi_1|$, а правая часть уравнение (2) известна всюду в полосе $\Omega$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x_1,x_2)$ финитна по переменной $x_1$;

2) $f(x_1,x_2)$ имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка по каждой переменной;

3) $f(x_1,x_2)$ обращается в нуль вместе со своими частными производными до четвертого порядка включительно на границах полосы, т.е. при $x_2=0$ и $x_2=l$.

Тогда существует решение уравнения (2) в классе непрерывных функций, финитных по аргументу $x_1$, определенное формулой (3).

Теперь исследуем задачу интегральную геометрии с возмущением. Через $S(x_1, x_2)$ обозначим часть $R_2^+$, ограниченную кривой $P(x_1, x_2)$ и осью $x_2 = 0$. $\bar{\Omega}$ есть полоса:

$$\bar{\Omega} = \left\{ x \in R_+^2 : \ 0 \leq x_2 \leq l \right\} ,$$

**Задача II.** Определить функцию $u(x_1, x_2)$, если для всех $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$ известны интегралы от неё по кривым $P(x_1, x_2)$ и площадям $S(x_1, x_2)$ с весовой функцией $K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$

$$\int\limits_{\Upsilon(x_1,x_2)} g(x_1, \xi_1) u(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 + \int\limits_0^{x_2} \int\limits_{x_1-h}^{x_1+h} K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = F(x_1, x_2)$$

где $h = \sqrt{x_2 - \xi_2}$.

Функция $K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ - функция финитна, имеет все непрерывные частные производные до восьмого порядка включительно и вместе своими производными обращается в ноль на параболах $x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2$, $x_2 > 0, \xi_2 > 0$.

Задача II является задачей интегральной геометрии с возмущением.

**Теорема-3.** Пусть функция $F(x_1, x_2)$ известна в полосе $\bar{\Omega}$. Весовая функция $K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \in C_0^8(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$ вместе со своими производными до восьмого порядка включительно обращается в ноль на параболах $P(x_1, x_2)$. Тогда решение задачи II в классе восемь раза непрерывно дифференцируемых и финитных функций единственно в полосе $\bar{\Omega}$ и выполняется неравенство

$$||u(x_1, x_2)||_{L_2(\bar{\Omega})} \leq C_3 ||F(x_1, x_2)||_{W_2^{4,4}(\bar{\Omega})},$$

где $C_3$ - некоторая константа.

## Литература


1. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. – Издательство Института математики, Новосибирск 2010.

2. *Лаврентьев М.М.* Задача интегральной геометрии на плоскости с возмущением, Сиб. мат. Журн. Т. 37, 1996, С. 851-857.

3. *Бегматов Акрам Х.* Об одной задаче обращения лучевого преобразования с неполными данными, Сиб. матем. журн. № 42:3, (2001), 507-514.

4. *Begmatov Akram H., Muminov M.E., Ochilov Z. H.* The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type // Horizon Research Publishing (HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics, No 3:5, (2015), 113-120.

5. *Бегматов А.Х., Исмоилов А.С.* Задача интегральной геометрии в полосе с весовой функцией // Научный вестник СамГУ, № 117:5 (2019), 12-17.

6. *Begmatov Akram Kh., Ismoilov A.S.* Restoring the function set by integrals for the family of parabolas on the plane // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, Vol. 3, issue 2. 2020, pp. 246-254.

7. *Исмоилов А.С.* Единственность и существование решения задачи интегральной геометрии в полосе // Бюллетень Института Математики, № 2, 2020 г., с. 58-68.

# Об одной задаче интегральной геометрии по кривым с особенностью

**Бегматов А.Х., Усманов А.В.**

*Самаркандский государственный университет*
akrambegmatov@mail.ru, dj_neso@mail.ru

Интегральная геометрия представляет собой один из важнейших разделов теории некорректных задач математической физики и анализа. Актуальность задач интегральной геометрии обусловлена развитием топографических методов, представляющих повышенные требования к глубине применяемых результатов, тем обстоятельством, что к решению задач интегральной геометрии сводится ряд много-мерных обратных задач для дифференциальных задач с частными производными, а также внутренними потребностями развития теории некорректных задач математической физики и анализа.

Задачами интегральной геометрии вольтеровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений Вольтера в смысле определения, данного М.М. Лаврен-тьевым [1].

Единственность решения значительно более широких классов задач интегральной геометрии в полосе, рассматриваемых как сильно некорректные, была установлена В.Г. Романовым [2].

В работах А.Х. Бегматова [3] изучается новый класс задач обращения лучевого преобразования с неполными данными. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [4]. Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах получены в [5].

В работах [6-8] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью.

В полосе

$$\Omega = \{(x, y) : x \in R^1,\ y \in (0, l),\, l < \infty\}$$

рассматривается семейство кусочно-гладких кривых $\{\Gamma(x, y)\}$ с особенностью в вершине $(x, y)$.

Кривые семейства однозначно параметризируются с помощью своих вершин, произвольная кривая семейства определяется соотношением

$$\Gamma(x, y) = \{(\xi, \eta) : (y - \eta)^2 = |x - \xi|,\ 0 \le \eta \le y,\, y \le l,\, l < \infty\}. \tag{1}$$

Левая часть уравнения (1) представляет собой совокупность интегралов от искомой функции по кривым семейства $\{\Gamma(x, y)\}$ с вершинами в точках $x, y$. Область, которая ограничена произвольной кривой семейства $\{\Gamma(x, y)\}$ и действительной осью, не является выпуклой.

В работе доказана теорема единственности решение уравнения (1) и показано что решение постав-ленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости.

## Литература

1. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. Издательство Института математики, Новосибирск 2010.

2.*Романов В.Г.* О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых, Сиб. мат. журн., 1967, 8:5, С. 1206-1208.

3. *Бегматов Акрам Х.* Об одной задаче обращения лучевого преобразования с неполными данными, Сиб. матем. журн. 42:3 (2001), 507-514.

4.*Бегматов А.Х.* О единственности решения задачи интегральной геометрии Вольтерровского типа на плоскости, Доклады Академии Наук, 427:4 (2009), 439-441

5. *Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х.* Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией, Доклады РАН, 429:3 (2009), 295-297.

6. *Begmatov Akram H., Muminov M.E., Ochilov Z.H.* The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type, Horizon Research Publishing (HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics, 3:5 (2015), 113-120.

7. *Бегматов А.Х., Исмоилов А.С.* Задача интегральной геометрии в полосе с весовой функцией, Научный вестник СамГУ, 117:5 (2019), 12-17.

8. *Begmatov Akram Kh., Ismoilov A.S.* Restoring the function set by integrals for the family of parabolas on the plane, Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, Vol. 3, issue 2. 2020, pp. 246-254.


# Индекс ограниченности пространства $G$-симметрической степени


**Бешимов Р.Б.[1], Жураев Р.М.[2]**

[1)] *Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*
[2)] *Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*
rbeshimov@mail.ru, rmjurayev@mail.ru


На $n$-й степени $X^n$ компакта $X$ действует группа $G \subset S_n$ как группа перестановок координат. Множество орбит этого действия с фактор-топологией обозначим через $SP^n_G X$. Пространство $SP^n_G X$ называется $n$-й симметрической степенью пространства $X$ [1].

Пусть $X$ – некоторое множество, $A$ и $B$ – подмножества произведения $X \times X$, т.е. отношения на множестве $X$. Обратное к $A$ отношение будет обозначаться через $A^{-1}$, а композиция отношений $A$ и $B$ – через $AB$; так,

$$A^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in A\}$$

и

$$AB = \{(x, z) : \text{ существует такой } y \in X, \text{ что } (x, y) \in A \text{ и } (y, z) \in B\}.$$

Для произвольного отношения $A \subset X \times X$ и натурального числа $n$ отношение $A^n \subset X \times X$ определяется индуктивно формулами

$$A^1 = A \text{ и } A^n = A^{n-1}A$$

Пусть $X$ непустой множества. Семейство $\mathcal{U}$ подмножество $X \times X$ удовлетворяет условия:

1. Каждое $U \in \mathcal{U}$ содержащие диагональ $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$;
2. Если $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, то $V_1 \bigcap V_2 \in \mathcal{U}$;
3. Если $U \in \mathcal{U}$ и $U \subset V$, то $V \in \mathcal{U}$;
4. Для любого $U \in \mathcal{U}$ существует такое $V \in \mathcal{U}$, что $V^2 \subset U$;
5. Для любого $U \in \mathcal{U}$, имеем $U^{-1} \in \mathcal{U}$

называется *равномерность на* $X$ [2].

Элементы равномерности $\mathcal{U}$ называется окружениями. Для каждое окружение $U \in \mathcal{U}$, точка $x \in X$ и множество $A \subset X$ определяется множество

$$U[x] = \{y \in X : (x,y) \in U\}$$

называется *$U$-шаром с центром $x$* и множество

$$U(A) = \bigcup_{a \in A} U(a)$$

называется $U$-окрестности множество $A$.

Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ называется базой равномерности $\mathcal{U}$, если для любого $V \in \mathcal{U}$ существует такое $W \in \mathcal{B}$, что $W \subset V$. Очевидно, что равномерность $U$ может иметь много баз; наименьший кардинал вида $|\mathcal{B}|$, где $\mathcal{B}$ – база для $\mathcal{U}$, называется весом равномерности $\mathcal{U}$ и обозначается $w(\mathcal{U})$ [2].

Отображение $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ называется *равномерно непрерывным*[3], если для любого $V \subset \mathcal{V}$ существует $U \subset \mathcal{U}$, такое, что $f(U[x]) \subset V(f([x]))$ для всех $x \in X$.

Равномерно непрерывное отображение $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ называется *равномерно открытым*[4], если для любого $U \subset \mathcal{U}$ существует $V \subset \mathcal{V}$, такое, что $V(f([x])) \subset f(U[x])$ для всех $x \in X$.

Наименьшее кардинальное число $\tau$ называется индексом ограниченности равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$, если равномерность $\mathcal{U}$ имеет базу $\mathcal{B}$, состоящую из покрытий мощности $\leq \tau$ и обозначается через $l(\mathcal{U})$. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется $\tau$-ограниченным, если $l(\mathcal{U}) \leq \tau$ [5].

**Теорема 1**. Пусть $(X,\mathcal{U})$ равномерное пространство. Семейство всех подмножества $SP^n_G X \times SP^n_G X$ вида

$$O[U_1, U_2, ..., U_n] = \{([x],[y]) : \text{существует такое } \sigma, \delta \in G, \text{ что } (x_i, y_{\sigma(i)}) \in U_{\delta(i)} \text{ для } i = 1,2,...,n\},$$

где $\{U_1, U_2, ..., U_n\} \subset \mathcal{U}$ порождает некоторой равномерности на множестве $SP^n_G X$. Это равномерность обозначим через $SP^n_G \mathcal{U}$.

**Теорема 2**. Пусть $(X,\mathcal{U})$ равномерное пространство. Тогда $w(\mathcal{U}) = w(SP^n_G \mathcal{U})$.

**Теорема 3**. Пусть $(X,\mathcal{U})$ равномерное пространство. Тогда отображение $\pi^s_{n,G} : (X^n,\mathcal{U}^n) \to (SP^n_G X, SP^n_G \mathcal{U})$ является равномерно открытым.

**Теорема 4**. Мы имеем $l(\mathcal{U}) = l(SP^n_G \mathcal{U})$.

### Литература

1. *Fedorchuk V. V., Filippov V. V.* Topology of hyperspaces and its applications, Mathematica, cybernetica, No 4, 1989, стр.48.
2. *James I. M.* Introduction to Uniform Spaces, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 144, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, 148 pages.
3. *Itzkowitz G., Rothman S., Strassberg H. and Wu T. S.* Characterization of equivalent uniformities in topological groups, Topology Appl., No 47, 1992, 9–34.
4. *Fedorchuk V. V, Kunzi H. A.* Uniformly open mappings and uniform embeddings of function spaces, Topology Appl., No 61, 1995, 61–84.
5. *Borubaev A. A.* Uniform Topology, Ilim, Bishkek, 2013 (In Russian), 338 pages.

# Нелокальные задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка

**Боймиров Х.М.**

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*
hojiakbarboymirov@gmail.com e-mail адрес автора1

В области $D = \{(x, t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + u_{xxt} + f(x, t), \tag{1}$$

где $a(x, t)$ и $f(x, t)$ – известные функции.

Заметим, что различные классы псевдопараболических уравнений рассмотрены в работах [1]–[3]. Как близкие к настоящей работе, отметим работы [4], которые посвящены исследованию некоторых краевых задач с нелокальными условиями для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Через $C^{m+n}(D)$ обозначим класс функций $u(x, t)$, непрерывных со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u/\partial x^k \partial t^l$ для всех $k = 0, 1, 2, ..., m$; $l = 0, 1, 2, ..., n$, $C^{k+0}(D) = C^{0+k}(D) = C^k(D)$.

В данной работе для уравнения (1) исследуются следующие нелокальные задачи.

**Задача 1.** *Найти регулярное в области $D$ решение $u(x, t)$ уравнения (1) из класса $C^{1+0}(\overline{D}) \cap C^{2+1}(D)$, удовлетворяющее начальному*

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)u(x, t_k), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

*и граничными условиями*

$$u(0,t) = g_0(t), \qquad u_x(0,t) = g_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

здесь $0 < t_1 < \ldots < t_n \le T$; $\alpha_k(x)$, $g_0(t)$ и $g_1(t)$ – заданные гладкие в областях определения функции, причем выполняется равенство

$$g_0(0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(0) g_0(t_k).$$

**Задача 2.** *Найти регулярное в области $D$ решение $u(x,t)$, уравнения (1) из класса $C^{1+0}\left(\bar{D}\right) \cap C^{2+1}(D)$, удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

*и граничными условиями*

$$u_x(0,t) = \alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u(l,t) + \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$u_x(l,t) = \beta_1 u(0,t) + \beta_2 u(l,t) + \mu_2(t) \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

здесь $\alpha_1$, $\alpha_2$ $\beta_1$ и $\beta_2$ – некоторые постоянные, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – заданные гладкие в областях определения функции, причем

$$\varphi(0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(0)\varphi(x_k) + \mu_1(0), \quad \varphi(l) = \mu_2(0).$$

Имеет место следующая теорема о разрешимости задачи 1.

**Теорема**. Пусть выполнены следующие условия $a(x,t)$, $a_x(x,t)$, $f(x,t) \in C(\overline{D})$; $g_0(t)$, $g_1(t) \in C^1[0,T]$; $\varphi(x) \in C^2[0,l]$. Тогда задача 1 имеет единственное регулярное в области $D$ решение.

Аналогичной результат имеет место и для задачи 2.

### Литература


1. *Жегалов В.И., Уткина Е.А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка.//*Изв.вузов. Математика.* 1999. N 10 (449). – С. 73 – 76.

2. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. – Казань: Казанское математическое общество. – 2001. – 226 с.

3. *Dai D. – Q., Huang Y.* Non local boundary problems for a third–order one–dimensional nonlinear pseudo parabolic equation.//*Nonlinear analysis.* 2007. – vol. 66. – P. 179 – 191.

4. *Керефев А.А., Плотникова Е.В.* Нелокальные задачи для одного уравнения третьего порядка.//
*Владикав. матем. журн.* 2005. – том 7, вып. 1. – С. 51 – 60.

# Нелокальная задача с интегральным условием для трехмерного эллиптического уравнения

**Дехконова М.**

*Ферганский государственный университет*

Рассмотрим трехмерное эллиптическое уравнение

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{1}$$

для которого нелокальная задача исследуется в параллелепипеде

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \ 0 < x < 1, \ \ 0 < y < b, \ \ \ 0 < z < 1 \right\},$$

здесь $u = u\,(x, y, z)$ −неизвестная функция, $b = const$.

**Нелокальная задача.** Найти функцию

$$u\,(x, y, z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\bar{\Omega} \cap \left(\{x = 0\} \cup \{x = 1\}\right)\right) \cap C^2\,(\Omega)\,,$$

удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega$ и краевым условиям

$$u\,(0, y, z) = 0, \ \ 0 \le y \le b, \quad 0 \le z \le 1, \tag{2}$$

$$u\,(x, y, 0) = u\,(x, y, 1) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le b, \tag{3}$$

$$u\,(x, 0, z) = f\,(x, z)\,, \ \ 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le z \le 1, \tag{4}$$

$$u\,(x, b, z) = g\,(x, z)\,, \ \ 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le z \le 1 \tag{5}$$

и нелокальным интегральным условиям

$$\int\limits_0^1 u\,(x, y, z)\,dx = 0, \ \ 0 \le y \le b, \ 0 \le z \le 1, \tag{6}$$

где $f, g$−заданные непрерывные функции. Условие (6) является нелокальным интегральным условием первого рода, т.е. связывает значения искомого в области $\Omega$ решения на некотором внутреннем многообразии и в точках плоскости $x = 0$ и $x = 1$ границы области $\Omega$. Сведем его к нелокальному условию другого вида.

Нелокальные задачи с интегральными условиями возникают при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания недоступна для непосредственных измерений. Например, математическое моделирование процессов распространения тепла [1, 2], процессы влагопереноса в капиллярно пористых средах [3] приводятся к таким задачам.

**Лемма.** *Если функция $u\,(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению (1) и выполняются условия согласования*

$$\int\limits_0^1 f\,(x, z)\,dx = 0, \qquad \int\limits_0^1 g\,(x, z)\,dx = 0,$$

*то условие (6) эквивалентно условию*

$$u_x\left(1, y, z\right) - u_x\left(0, y, z\right) = 0. \tag{7}$$

В дальнейшем вместо задачи (1)-(6), будем изучать задачу (1)-(5), (7).

В работе доказана следующая

**Теорема.** *Пусть функции* $f\left(x, z\right)$, $g\left(x, z\right)$ *удовлетворяют условиям*

$$f_{xxzz}\left(x, z\right) \in C\left([0,1] \times [0,1]\right), \quad g_{xxzz}\left(x, z\right) \in C\left([0,1] \times [0,1]\right),$$

$$f_{zz}\left(1, z\right) = 0, \quad f_{zz}\left(0, z\right) = 0, \quad g_{zz}\left(1, z\right) = 0, \quad g_{zz}\left(0, z\right) = 0,$$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left|f_{xxxzzz}\left(x, z\right)\right| dxdz < +\infty, \quad \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left|g_{xxxzzz}\left(x, z\right)\right| dxdz < +\infty.$$

*Тогда единственное решение поставленной задачи существует.*

### Литература


1. *Cannon J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. V. 21 -P. 155-160.

2. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием//Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13. N 2 .-С. 294-304.

3. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод//Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. N 1 -С.72-81.


# Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения Трикоми в неограниченном области


**Джамалов С.З. [1], Туракулов Х.Ш. [2]**

[1],[2] Институт математики имени В. И. Романовского АНРУз,Ташкент, Узбекистан .

e-mail : siroj63@mail.ru.


Как известно задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые, нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа в ограниченных областях были предложены и изучены в работах [2],[3]. В данной работе для уравнения Трикоми, в неограниченной области впервые изучается корректность одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами.

В области

$$Q = (\alpha, \beta) \times (0, T) \times (-\infty, +\infty) =$$

$$= Q_1 \times (-\infty, +\infty) = \{(x, t, y);\ x \in (\alpha, \beta),\ 0 < t < T < +\infty,\ -\infty < y < +\infty\}$$

рассмотрим уравнение Трикоми.

$$Lu = x\,u_{tt} - b\left(x, t\right)\Delta u + a\left(x, t\right)u_t + c\left(x, t\right)u = f\left(x, t, y\right), \tag{1}$$

где $\alpha < 0 < \beta$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}-$оператор Лапласа.

***Нелокальная краевая задача.*** Найти обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяющее нелокальным краевым условиям.

$$\gamma\, D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$\eta\, D_x^p u|_{x=\alpha} = D_x^p u|_{x=\beta}, \tag{3}$$

при $p = 0, 1;\ \gamma\ \ \eta = const \neq 0$.

**Теорема.** Пусть коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции, кроме того, пусть $2a + \lambda \cdot x > 0$, $\lambda\ c - c_t > 0$, $b(x,t) > 0$, для всех $(x,t) \in \overline{Q}$ где $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ при $|\gamma| > 1$, $|\eta| \geq 1$, $c(x,0) = c(x,T)$, $a(x,0) = a(x,T)$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Тогда для любой функции $f \in W_2^1(Q)$, такой, что $\gamma \cdot f(x,0) = f(x,T)$, существует единственное решение задачи (1)-(3) из пространства Соболева $W\,_2^3(Q)$.

### Литература


1. *Бицадзе А.В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа. ДАН СССР, 1953, Т.122, N-2, с.167-170.

2. *Кальменов Т.Ш.* О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа. Дифференциальные уравнения. 1978, т.14, N-3, с. 546-548.

3. *Джамалов С.З., Ашуров Р.Р.* О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве. Казахский математический журнал. 2018, Т18, N-2, с.59-70


# О корректности одной линейной многоточечной обратной задаче для многомерного уравнения теплопроводности с нелокальными условиями


**Джамалов С.З.** [1], **Рузиев У.Ш.** [2]

[1,2] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, 4, University str., 100174, Tashkent, Uzbekistan.

РГУ Нефти и Газа им.Губкина филиал в г. Ташкенте, Узбекистан.

e-mail: siroj63@mail.ru, e-mail:galland@mail.ru


В работе [1,2] впервые предложены математические модели, возникающие при изучении ряда прикладных задач и приводящие к рассмотрению нелокальных краевых задач. Как известно, нетрудно установить связь между нелокальными краевыми задачами и многоточечными обратными задачами [3]. С этой целью мы изучаем корректность по Адамару некотороя линейная многоточечная обратная задача (Л.М.О.З) для многомерного уравнения теплопроводности.

Пусть $\Omega = \prod\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i, \beta_i)$ $n-$ мерный параллелепипед в пространстве $R^n$. В области $Q = (0,T) \times \Omega \times (0,l) = Q_1 \times (0,l) \subset R^{n+2}$, рассмотрим многомерное уравнение теплопроводности.

$$Lu = u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - a(x,t)u_{yy} + c(x,t)u = g(x,t,y) + \sum_{k=1}^{m-1} h_k(x,t) f_k(x,t,y), \tag{1}$$

где $g$, и $f_k, \forall k = \overline{1, m-1}$-заданные функции. Пусть коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции.

**(Л.М.О.З)** Найти функции $(u, h_1, h_2, \ \ldots \ , h_{m-1})$, удовлетворяющие уравнению (1) в области $Q$ такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет нелокальным краевым условиям

$$\gamma u\,|_{t=0} = u\,|_{t=T}, \tag{2}$$

$$D^p_{x_i} u|_{x_i=\alpha_i} = D^p_{x_i} u|_{x_i=\beta_i}, p = 0, 1. \tag{3}$$

$$D^p_y u|_{y=0} = D^p_y u|_{y=\ell}, p = 0, 1. \tag{4}$$

с дополнительными условиями

$$u\,|_{y=\ell_k} = \varphi_k(x,t), \tag{5}$$

где $k = \overline{1, m-1}$; и $0 = \ell_0 < \ell_1 < \ldots < \ell_{m-1} < \ell_m = \ell < +\infty$ и принадлежит классу

$$U = \{(u, h_k, k = \overline{1, m-1}) \in W^{2,1}_2(Q), D^3_y(u_t, u_x, u_{xx}) \in L_2(Q), D^4_y u \in L_2(Q); h_i \in W^2_2(Q_1)\}.$$

Введем обозначение. Пусть $g_k(x,t) = g(x,t,l_k)$, $f_{ik}(x,t) = f_i(x,t,l_k), \forall i, k = \overline{1, m-1}$. Тогда через $F = \{f_{ik}\}_{i,k=1}^{m-1}$ определим квадратную матрицу порядка $(m-1)$.

**Теорема.** Предположим что, выполнены условия $|\det F| \geq \varepsilon > 0$; $\varphi_k, \varphi_{kt}, \varphi_{kxx} \in W^2_2(Q_1)$; $\gamma\varphi_k\,|_{t=0} = \varphi_k\,|_{t=T}$; $D^p_{x_i}\varphi|_{x_i=\alpha_i} = D^p_{x_i}\varphi|_{x_i=\beta_i}, p = 0, 1$. $|\gamma| > 1$; $g_k \in W^2_2(Q_1)$; $f_{ik} \in W^2_2(Q_1)$; $\forall_{i,k} = \overline{1, m-1}$.

и пусть $\beta \equiv M \sum\limits_{k=1}^{m-1} \left\|(1 + D^3_y) f_k\right\|^2_{W^1_2(Q)} < 1$, где $M = const(mes(Q_1), \det F)$,

Тогда для любых функций $g$ и $f_k$ таких, что $(1 + D^3_y) f_k \in W^2_2(Q)$; $D^p_{x_i} f_k|_{x_i=\alpha_i} = D^p_{x_i} f_k|_{x_i=\beta_i}, p = 0, 1$. $\forall k = \overline{1, m-1}$, $(1 + D^3_y) g \in W^2_2(Q)$; $D^p_{x_i} g|_{x_i=\alpha_i} = D^p_{x_i} g|_{x_i=\beta_i}, p = 0, 1$. тогда существует единственное решение задачи (1)-(5) из указанного класса $U$.

**Замечание 1.** Для уравнения (1) аналогично изучаются Л.М.О.З. с условием Коши то есть в этом случае вместо условия (2) предлагается начальное условие $u\,|_{t=0} = u_0(x)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. *Докл. АН СССР.* **185**(4) (1969), 739–740.

2. *Ильин В.А,Моисеев Е.И.* Нелокальная краевая задача первого рода для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовке. *Дифференциальные уравнения.* **23**(7) (1987), 1198–1207.

3. *Джамалов.С.З.* Об одной линейной многоточечной задаче управления для модельного уравнения теплопроводности.*ДАН РУз.* **(6-7)**(1992),9–11.

# О глобальной разрешимости одномерной обратной задачи для волнового уравнения на отрезке

**Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш.**

*институт Математики им.В.И.Романовского*
durdiev65@maii.ru, j.safarov65@mail.ru

Рассматривается интегро-дифференциальное волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = \int_0^t k(\alpha)u(x, t-\alpha)\, d\alpha, \qquad x \in (0, l), t > 0, \tag{1}$$

с начальными

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u_x|_{x=0} = \psi(t), \qquad u_x|_{x=l} = 0, \qquad t > 0. \tag{3}$$

Здесь $\psi(t)-$ некоторая достаточно гладкая функция. Нахождения функции $u(x,t)$ из уравнения $(1)-(3)$ при известной $k(t)$ называется прямой задачей.

Обратная задача заключается в определении ядра $k(t), t > 0$, если относительно решения задачи $(1)-(3)$ известна дополнительная информация

$$u(0, t) = f(t), \qquad t \geq 0, \tag{4}$$

где $f(t)-$ заданная функция.

Для одномерного телеграфного уравнения $u_{tt} - u_{xx} = q(x)u(x,t)$ подобная задача была рассмотрена в [1]. В той работе найдены необходимые и достаточные условия на функцию $f(t)$ при которых неизвестный коэффициент $q(x) \in C(0,l)$ определяется однозначно. В работе [2] доказана теорема о локальной однозначной разрешимости обратной задачи. В обратных задачах имеются теоремы существования и единственности для достаточно малых областей определения неизвестных коэффициентов, т.е. для таких задач разрешимость носит локальный характер. Это явление связанно с нелинейностью задачи. Однако в задачах определения ядра интегрального члена в гиперболических уравнениях второго порядка, где нелинейность носит сверточный характер, удается получить глобальные теоремы существования в пространстве непрерывных функций с экспоненциальным весом. В данной работе исследуется вопросы разрешимости обратной задачи, для уравнения (1) с распределенными источниками данных, в ограниченной по переменной $x$ области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, t > 0\}$. Основными результатами данной работы являются следующие теоремы о глобальной однозначной разрешимости обратной задачи и условной устойчивости ее.

**Теорема1.** *Пусть выполнены условия* $\psi(t) \in C^3(0, 2l)$, $f(t) \in C^4(0, 2l)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = -c_1$, $f''(0) = -c_2$, *тогда для любого* $l > 0$ *решение обратной задачи* $(1)-(3)$ *существует, единственно и* $k(t) \in C(0, 2l)$.

Обозначим через $K(k_0)$ множество функций $k(t) \in C[0, 2l]$, удовлетворяющих при некотором $l > 0$ условию

$$\|k\|_{C[0,2l]} \leq k_0,$$

с постоянной $k_0 > 0$.

**Теорема2.** *Пусть* $k^1(t) \in K(k_0), k^2(t) \in K(k_0)-$ *два решения обратной задачи* $(1)-(4)$ *с данными* $f^1$ *и* $f^2$ *соответственно. Тогда найдется такое положительное число* $C = C(k_0, l)$, *что выполняется неравенство*

$$||k^1(t) - k^2(t)||_{C[0,2l]} \leq C||f^1 - f^2||_{C^3[0,2l]}.$$


**Литература**

1. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики,М:Наука, 1984г.

2. *Сафаров Ж.Ш.* Задача определения ядра интегро-дифференциального уравнения с гладкими данными в ограниченной области, Бюллетень Института математики, №2, 2020, стр.97-102.


# Нелокальная задача с интегральным условием склеивания для уравнения смешенного типа в смысле Капуто


**Исломов Б.И.[1], Дусанова У.Х.[2]**

*Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент*[1], *Каршинский государственный университет. Карши, Узбекистан*[2].

islomovbozor@yandex.com, umidaxon8996@gmail.com.


Рассмотрим уравнение :

$$0 = \begin{cases} u_{xx} -_C D_{0y}^{\alpha} u + p(x,y) \int\limits_0^x (t-x)^{\beta-1} u_t(t,0)dt, & \text{при } y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - q(x+y) \int\limits_0^{x+y} (t-x-y)^{\gamma-1} u_t(t,0)dt, & \text{при } y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

с оператором Капуто:

$$_C D_{0y}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t)dt, \quad (2)$$

где $0 < \alpha, \ \beta, \gamma < 1$, $p(x,y)$ и $q(x+y)$ заданные функции. Пусть $\Omega$ ограничена сегментами:

$$A_1A_2 = \{(x,y): \ x = 1, \ 0 < y < h\}, \quad (3)$$

$$B_1B_2 = \{(x,y): \ x = 0, \ 0 < y < h\}, \quad (4)$$

$$B_2A_2 = \{(x,y): \ y = h, \ 0 < x < 1\} \text{ при } y > 0, \quad (5)$$

и характеристиками : $A_1C: \ x - y = 1$; $B_1C: \ x + y = 0$ для уравнения (1) при $y < 0$, здесь $A_1(1;0)$, $A_2(1;h)$, $B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, $C\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
Вводим обозначения:

$$\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0), \Omega^- = \Omega \cap (y < 0), \Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup (A_1B_1). \quad (6)$$

В области $\Omega$ исследуем следующую задачу:

**Задача I.** Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) из классов функции $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-)$, $u_x \in C\left(\overline{\Omega^+} \backslash \{y=h\}\right)$, $u_{xx} \in C\left(\Omega^+\right)$, ${}_C D_{oy}^{\alpha} u \in C\left(\Omega^+\right)$ удовлетворяющие граничными условиями:

$$u_x(x,y)\Big|_{A_1 A_2} = \varphi(y), \quad 0 \le y \le h; \tag{7}$$

$$u_x(x,y)\Big|_{B_1 B_2} = \psi(y), \quad 0 \le y \le h; \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx} u\left[\frac{x}{2}; -\frac{x}{2}\right] = a(x) u_y(x,0) + b(x), \quad 0 < x < 1; \tag{9}$$

и условием склеивания:

$$\lim_{y \to +0} y^{1-\alpha} u_y(x,y) = \lambda_1(x) u_y(x,-0) + \lambda_2(x) \int\limits_x^1 r(t) u_t(t,0) dt + \lambda_3(x) u(x,0), \quad 0 < x < 1, \tag{10}$$

где $\varphi(y)$, $\psi(y)$, $a(x), b(x), r(x), \sum\limits_{j=1}^{3} \lambda_j^2(x) \neq 0$ заданные функции.

**Теорема.** Если выполняются условия

$$a(x), b(x) \in C^1\left[0;1\right] \cap C^3\left(0,1\right), \tag{11}$$

$$p(x,y) \in C\left(\overline{\Omega^+}\right) \cap C^2\left(\Omega^+\right), \quad q(x+y) \in C\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap C^2\left(\Omega^-\right), \tag{12}$$

$$\varphi(y), \psi(y) \in C\left[0;h\right] \cap C^1\left(0,h\right), \tag{13}$$

$$r(x), \lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x) \in C\left[0;1\right] \cap C^2\left(0,1\right), \tag{14}$$

то в области $\Omega$ существует единственное регулярное решение задачи I.

Теорема доказывается методом интегральных уравнений и энергии с использованием свойств Капуто.

Замети что, задача I для уравнения (1) при $p(x,y) \equiv 0$, $q(x+y) \equiv 0$ и $a(x) \equiv 0$ изучена в работе [1].

*Литература*


1. *E. T. Karimov, J. Akhatov.* A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative. Electron. J. Differential Equ., Vol. 2014 (2014) N3. pp. 1-6.

# Об одной нелокальной задаче для нагруженного уравнения теплопроводности

**Зикиров О.С., Сагдуллаева М.М.**

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*

e-mail zikirov@yandex.ru, e-mail sagdullayevam@mail.ru

Различные классы нагруженных уравнений рассмотрены в работах [1]–[3]. Как близкие к настоящей работе, отметим работы [3], которые посвящены исследованию некоторых классов нагруженных уравнений параболического типа.

В области $D = (x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T$ рассмотрим нагруженное параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) - \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

где $f(x,t)$ – заданные функции.

Особенностью рассматриваемого уравнения является то, что порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части оператора. Доказано, что рассматриваемая в работе нелокальная граничная задача является корректной.

Для уравнения (1) рассматривается следующая нелокальная задача: Требуется найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному

$$u(x,t) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

граничным

$$u_x(0,t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

и интегральным условием

$$\int_0^l u(x,t)dx = \int_0^t h(t,\tau)u_x(l,\tau)d\tau + \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi_1(t), (i = 1, 2)$; $h(t,\tau)$ – заданные, непрерывные при $x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,t]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям соглосования:

$$\varphi'(0) = \psi_1(0), \qquad \int_0^l \varphi(x)dx = \psi_2(0).$$

**Определение.** Регулярным в области $D$ решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x,t)$, из класса $C^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.

Основным результатом данной работы является следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи (1)-(4).

**Теорема.** Пусть $\varphi(x) \in C[0,l]$, $f(x,t) \in C(\overline{D})$, $\psi_1(t) \in C[0,T]$, $\psi_2(t) \in C^1[0,t]$ и $h(t,\tau) \in C^1([0,T])$, $h(t,\tau) \neq 0$ для всех $t \in C[0,T]$. Тогда решение задачи (1)-(4) существует и единственно.

## Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения. – М.: Наука. 2012, 232 с.

2. *Кожанов А.И.,* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера. Дифференц. уравнения, 2004, Т. 40, N 6. – С. 763–774.

3. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения – как возмущения дифференциальных уравнения. – Алматы. Гылым. 2010, 334 с.

# Свойство единственности квазианалитических функций в смысле Гончара на порождающих многообразиях

**Имомкулов С.А. Ибрагимов З. Ш. Расулов К. К.**

*Хорезмское региональное отделение математического института имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан.*
*Ургенчский государственный университет.*
*Докторант Ургенчского государственного университета.*
sevdiyor_i@mail.ru, z.ibragim@gmail.com

Квазианалитическими функциями можно ознакомится в работе Мольденбройда [6], а также в роботах [7], [8]). Хорошо известно, что графики квазианалитических функций тесно связаны с плюриполярным множеством, которое является основным объектом теории плюрипотенциала. Этими вопросами занимались многие известные математики, таких как Ж.Э. Форнесс, К. Дидрих [1,2], Т. Эдлунд, Б. Ёрике [3], Д. Коман, Н. Левенберг, Е. Полетский [4], Levenberg N., Martin G., Poletskiy E.A. [5] и др.

Известно, что если $f \in A(\Delta)$, то её график $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{C}^2 : x \in \Delta\}$ является плюриполярным множеством в $\mathbb{C}^2$. В работе [1] К. Дидрих и Ж. Э. Форнесс построили пример бесконечно дифференцируемой функции, график которого не является плюриполярным в $\mathbb{C}^2$. Однако, в работе [4] Д.Коман, Н.Левенберг и Е.Полетский доказали, что если $f$ квазианалитическая в смысле Бернштейна, то её график $_f$ является плюриполяным в $\mathbb{C}^2$. В этой же работе они доказали, что график квазианалитических функций в смысле Данжуа (на окружности $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) тоже является плюриполярным в $\mathbb{C}^2$.

В работе [7] А. Гончаром введено следующий класс квазианалитических функций в терминах быстрой рациональной аппроксимации:

**Определение.** Пусть $f$- функция, определенная и непрерывная на компакте $K$ комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $\rho_m(f)$ - наименьшее отклонение функции $f$ на компакте $K$ от рациональных функций степени не выше $m$:

$$\rho_m(f) = \inf_{\{r_m\}} \|f - r_m\|_K,$$

где $\|\cdot\|_K$ – равномерная норма и нижняя грань берется в классе всех рациональных функций вида

$$r_m(z) = \frac{\sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha z^\alpha}{\sum\limits_{|\alpha|\le m} b_\alpha z^\alpha},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ – мультииндекс.

Класс функций

$$R(K) = \{f \in C(K) : \varliminf_{m\to\infty} \rho_m(f,K)^{\frac{1}{m}} < 1\}$$

называется классом квазианалитических функций в смысле Гончара на компакте $K$. В случае, когда

$$\varliminf_{m\to\infty} \rho_m(f,K)^{\frac{1}{m}} = 0$$

и

$$\varlimsup_{m\to\infty} \rho_m(f,K)^{\frac{1}{m}} = 0$$

эти классы соответственно обозначаются через $R_0(K)$и $R^0(K)$.

В одномерном случае Гончаром доказано следующая теорема единственности: пусть $f$- функция, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$ действительной прямой $\mathbb{R}$, если $f \in R([a,b])$ и $f(x) = 0$ на множестве $E \subset [a,b]$ положительной логарифмической емкости, то $f(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$. В работе [10] С.А. Имомкулов и З. Ш. Ибрагимов доказали следующую теорему: *пусть $f(x) \in R(\Omega)$, где $\Omega = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times ... \times [a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Если функция $f(x) = 0$ на неплюриполярном множестве $E \subset \Omega$, то $f(x) \equiv 0$ на $\Omega$.*

В этой работе мы получили следующий результат.

**Теорема.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ – связанный открытый кусок некоторой $C^1$-гладкой порождающийся многообразии $M : \Omega \subset\subset M \subset \mathbb{C}^n$, и пусть $f(x) \in R(\bar{\Omega})$. Если функция $f(x) = 0$ на неплюриполярном множестве $E \subset \Omega$, то $f(x) \equiv 0$ на $\Omega$.*

### Литература


1. *Diederich K., Fornass J.E.* A smooth curve in which is not a pluripolar set// Duke Math. J. 1982, Volume 49, 931-936.

2. *Diederich K., Fornass J.E.* Smooth, but not complex-analytic pluripolar sets// Manuscript Math. 1982, Volume 37, 121-125.

3. *Edlund T., Joricke B.* The pluripolar hull of a graph and fine analytic continuation// Ark. Mat., Volume 44 (2006), pp. 39–60.

4. *Coman D., Levenberg N., Poletskiy E.A.* Quasianalyticity and Pluripolarity// J. Amer. Math. Soc. Volume 18, (2005) №2, pp. 9-16.

5. *Levenberg N., Martin G., Poletskiy E.A.* Analytic disks and pluripolar sets// Indiana Univ. Math. J. Volume 41, (1992), pp. 515-.

6. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. ОНТИ. Москва. 1937 г. 105 с.

7. *Гончар А. А.* Квазианалитические классы функций, связанные с наилучшими приближениями рациональными функциями// Изв. АН. Арм. ССР. 1971.- VI, № 2-3, с. 148-159.

8. *Plesniak W.* Quasianalytic functions in the sense of Bernstein. Dissertationes Mathematicae. Polska Akademia Nauk, Institut Matematityczny, Warszawa, 1977. pp 66.

9. *Садуллаев А.* Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества// Мат. сб. - 1982. - Т. 119(1). - с. 96 - 118.

10. *Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh.* Uniqueness property for Gonchar quasianalytic functions of several variables. Contemp.Math. Vol. 662. 2016. pp. 121-129.

# Об одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка

**Иргашев Б.Ю., Абдужаббарова Х.**

*Наманганский инженерно-строительный институт*
*Наманганский Государственный университет*
e-mail bahromirgasev@gmail.com

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu \equiv D_x^4 u(x,y) + (\mathrm{sgn} y)\ D_y^4 u(x,y) = 0, \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < l, -a < y < a\}$ где $l, a$ - заданные положительные действительные числа. Пусть $\Omega_+ = \Omega \cap (y > 0)\,, \Omega_- = \Omega \cap (y < 0)\,.$

**Задача А.** Найти в области $\Omega$ функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^3\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^4\left(\Omega_+ \cup \Omega_-\right),$$

$$Lu\,(x,y) \equiv 0,\ \ (x,y) \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

$$D_x^{2s} u\,(0,y) = D_x^{2s} u\,(l,y) = 0,\ \ -a \le y \le a,$$

$$D_y^{2s+1} u\,(x,-a) = \varphi_s(x)\,,\ \ 0 \le x \le l,$$

$$D_y^{2s} u\,(x,a) = \psi_s(x)\,,\ \ 0 \le x \le l,$$

где $s = 0,1,\ \ \varphi_s(x)\,, \psi_s(x)$ - заданные достаточно гладкие функции и выполняются естественные условия согласования.

Уравнение (1) является малоизученным. Уравнение второго порядка типа (1) - есть известное уравнение Лаврентьева-Бицадзе, для которого некорректность задачи Дирихле было показано А.В.Бицадзе [1]. После этого специалистами, различными методами, были найдены условия единственности решения задачи Дирихле, как для уравнений 2-го порядка смешанного типа, так и для уравнений высокого порядка с гладкими коэффициентами, например в работах [2]-[5].

Справедливы теоремы существования:

**Теорема 1.** Пусть выполнены следующие условия:
1. либо $\frac{a}{l} \in N$, либо $\frac{a}{l} = \frac{s}{t}\ \ \left(\frac{a}{l} \notin N\right),\ s,t \in N,\ (s,t) = 1,\ \ (t,4) = 1$ ;
2. $\varphi_s(x)\,, \psi_s(x) \in C^5\,[0;l]\,,\ \varphi_s^{2m}(0) = \varphi_s^{2m}(l) = \psi_s^{2m}(0) = \psi_s^{2m}(l) = 0,\ s = 0,1,\ \ m = 0,1,2;$
тогда решение задачи А существует .

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:
1. $\tau = \frac{a}{l} > 0$ - является иррациональным алгебраическим числом степени $p \ge 2;$

2. $\varphi_s(x), \psi_s(x) \in C^7[0;l]$, $\varphi_s^{2m}(0) = \varphi_s^{2m}(l) = \psi_s^{2m}(0) = \psi_s^{2m}(l) = 0,\ s = 0,1,\ m = 0,...,3;$

Тогда решение задачи A существует .

Следует отметить, что выполнения условий теоремы 1 и 2 не гарантируют единственность решения задачи A.

**Литература**


1. *Бицадзе А.В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа , ДАН СССР, No 2, 1953, С. 167-170.

2. *Cannon J. R.*A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient,Annali di Matematica Pura ed Applicata, No1, 1963, С. 371-377.

3. *Нахушев А.М.* Критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в цилиндирической области, Дифференциальные уравнения, No 1, 1970, С.190-191.

4. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, Киев, Наукова Думка,1984, С.264.

5. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков, Математические заметки, No 2, 2015, С. 262-276


# Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболо-гиперболического типа в двусвязной области


**Исломов Б. И.[1], Юнусов О. М.[2]**

[1]*Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент,*
islomovbozor@yandex.com

[2]*Кокандский Педагогический Институт, г. Коканд, Узбекистан*
oybek198543@mail.ru


Краевые задачи для нагруженных уравнений второго порядка гиперболического, параболического, гиперболо-параболичсского и эллиптико-параболического типов в односвязных областях исследованы в работах А.М.Нахушева[1], В.М.Казиева[2], М.Х.Шханкова[3], А.Х.Аттаева[4], М.Т.Дженалиева[5], К.У.Хубиева[6], Б.Исломова и Д.М.Курьязова[7], М.И.Рамазанова [8], Б.Исломова и У.И.Болтаевой[9], К.Б. Сабитова и Е.П. Мелишевой[10],

Насколько нам известно, многие задачи математической биологии, биологии[11-12], медицины, синер-гетики, а также генетики, иммунологии сводятся к краевым задачам для нагруженных дифференциаль-ных уравнений с частными производными второго и третьего порядков.

Заметим, что краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического и эллиптического типа второго порядка, когда нагруженная часть содержит след или производную от искомой функции изучены, сравнительно мало. Отметим только работы А.В.Бородина[13], Б.Исломова и Д.М.Курьязова [14]. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям со сдвигом. Такие задачи в двусвязной области изучены в работах Б.Исломова и О.М. Юнусова[15].

Настоящая работа посвящена исследованию краевой задаче для нагруженного уравнения гиперболо-гиперболического типа второго порядка в двусвязной области.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - \ u_{yy} + \mu_1 u(x,0), & (x,y) \in \Omega_1, \\ u_{xx} - \ u_{yy} + \mu_2 u(x,0), & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega$, где $\Omega = \sum_{j=1}^{2} \left[\Omega_j \cup A_j B_j \cup C_j D_j\right]$ , а $\Omega_1$ – область, ограниченная отрезками $A_i B_i$ оси $Ox$ и характеристиками

$$A_i C_1 : x + (-1)^{i-1} y = (-1)^{i-1}, B_i D_1 : x + (-1)^{i-1} y = (-1)^{i-1} q, \ \ (i = 1, 2)$$

уравнения (1), выходящими из точек $A_i\left((-1)^{i-1}; 0\right)$ и $B_i\left((-1)^{i-1} q \ ; \ 0\right)$, пересекающимися в точках $C_1\left(0; \ 1\right)$ и $D_1\left(0 \ ; \ q\right)$;

$\Omega_2$ –область, ограниченная отрезками $A_i B_i$ оси $Ox$ и характеристиками

$$A_i C_2 : x - (-1)^{i-1} y = (-1)^{i-1}, B_i D_2 : x - (-1)^{i-1} y = (-1)^{i-1} q$$

уравнения (1), выходящими из точек $A_i\left((-1)^{i-1}; 0\right)$ и $B_i\left((-1)^{i-1} q \,; 0\right)$, пересекающимися в точках $C_2\left(0; \ -1\right)$ и $D_2\left(0; \ -q\right)$, $\quad 0 < q < 1, \quad \quad \mu_j \ \left(j = \overline{1,2}\right)$ –заданные действительные числа.

Введем следующие обозначения:

$$J_1 = \left\{(x,y) : q < x < 1, \ y = 0\right\}, \quad J_2 = \left\{(x,y) : -1 < x < -q, \ y = 0\right\},$$

$$I_1 = \left\{(x,y) : \ \ x = 0, \ q < y < 1\right\}, \ \ I_2 = \left\{(x,y) : \ \ x = 0, \ -q < y < -1\right\},$$

$$E_j\left(\frac{q+1}{2}; (-1)^{j-1}\frac{1-q}{2}\right) \in A_1 C_j, \quad N_j\ \left(-\frac{q+1}{2}; (-1)^{j-1}\frac{1-q}{2}\right) \in A_2 C_j,$$

$$P_j\left(\frac{1-q}{2}; (-1)^{j-1}\frac{1+q}{2}\right) \in A_1 C_j, \quad M_j\ \left(\frac{q-1}{2}; (-1)^{j-1}\frac{q+1}{2}\right) \in A_2 C_j,$$

$$D_j P_j : x - (-1)^{j-1} y = (-1)^{j-1} q, \quad \ D_j M_j : x + (-1)^{j-1} y = (-1)^{j-1} q,$$

$$C_j P_j : x + (-1)^{j-1} y = 1, \quad C_j M_j : x - (-1)^{j-1} y = -1, \quad B_1 E_j : x - (-1)^{j-1} y = q,$$

$$A_1 E_j : x + (-1)^{j-1} y = 1, \ \ B_2 N_j : x + (-1)^{j-1} y = -q, \quad A_2 N_j : x - (-1)^{j-1} y = -1.$$

Через $\Omega_{j1}$, $\quad \Omega_{j2}$, $\quad \Omega_{j3}$, и $\Omega_{j4}$, $\quad \Omega_{j5}$ соответственно обозначим характеристические треугольник $A_1 B_1 E_j$, $\quad A_2 B_2 N_j$, $\quad P_j C_j D_j$ и четырехугольники $\quad B_1 E_j P_j D_j$, $B_2 N_j M_j D_j$.

**Определение**. Регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega$ называется функция

$$u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup J_1 \cup J_2 \cup I_1 \cup I_2) \cap C^2(\Omega_{jk}), \ \ (k = \overline{1,5})$$

удовлетворяющая уравнению (1) в областях $\Omega_{jk}$ $(j = 1,2)$ и такая, что функция $u_y(x,0)$ и $u_x(0,y)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы соответственно на концах интервала $J_j$ и $I_j$, $\ (j = 1,2)$.

**Задача** $A_\mu$. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,y)|_{A_1 E_j} = \varphi_j(x), \qquad \frac{1+q}{2} \le x \le 1, \quad u(x,y)|_{B_1 D_j} = \psi_j(x), \qquad 0 \le x \le q,$$

$$u(x,y)|_{A_2N_j} = g_j(x),\ \ -1 \le x \le -\frac{1+q}{2}, \quad u(x,y)|_{B_2D_j} = h_j(x), \qquad -q \le x \le 0,$$

где $\varphi_j(x),\ \ \psi_j(x),\ \ g_j(x),\ \ \ h_j(x),\ (j=1,2)$–заданные функции, причем

$$\varphi_1(1) = \varphi_2(1), \quad g_1(-1) = g_2(-1), \psi_j\left((-1)^{j-1}q\right) = \ h_j\left((-1)^{j-1}q\right), \tag{3}$$

$$\varphi_j(x) \in C^1\left[\frac{1+q}{2}, 1\right] \cap C^3\left(\frac{1+q}{2}, 1\right), g_j(x) \in C^1\left[-1, -\frac{1+q}{2}\right] \cap C^3\left(-1, -\frac{1+q}{2}\right), \tag{4}$$

$$\psi_j(x) \in C^1\left[0, q\right] \cap C^3\left(0, q\right), h_j(x) \in C^1\left[-q, 0\right] \cap C^3\left(-q, 0\right). \tag{5}$$

**Доказана следующая теорема.**

**Теорема.** Если выполнены условия (3) - (5), то задача $A_\mu$ имеет единственное регулярное решение.

### Литература


1.*Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения. Дифференциальные уравнения. 1983. Т 19. N 1. С. 86-94.

2. *Казиев В.М.* О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. N 1. С. 181-184.

3. *Елеев В.А.* О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка. Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. N 2. С. 230-237.

4. *Шхануков М. Х.* Разностный метод решения одного нагруженного уравнения параболического типа. Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. N 1. С. 163-167.

5. *Аттаев А.Х.* Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения. Тез. докл. областного межвуз. семинара. 20-25 мая 1984г. Куйбишев, 1984. С.9-10.

6. *Дженалиев Н.Т.* Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными и граничными условиями. Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. N 10. С. 1925-1927.

7.*Хубиев К.У.* Задача Геллерстедта для нагруженного уравнения смешанного типа с данными на непараллельных характеристиках. Доклады Адыг. межд.акад.наук. 2008. N 1. С.1-4.

8. *Исломов Б., Курьязов Д.М.* Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа. Узбекский математический журнал. 2000. N 2. С. 29-35.

9. *Рамазанов М.И.* О нелокальной задаче для нагруженного гиперболо-эллиптического типа в прямоугольной области. Математический журнал. 2002. Т.2, N 4. С. 75-81.

10.*Исломов Б., Балтаева У.И.* Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка. "Уфимский математический журнал" 2011, Том 3, N 3. С.15-25.

11.*Сабитов К.Б., Мелишева Е.П.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области. // Известия вузов. Математика. 2013. N 7. С. 62-76.

12. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.

13.*Нахушев А.М., Борисов В.Н.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод. Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. N 1. С. 105-110.

14. *Бородин А.Б.* Об одной оценке для эллиптических уравнений и ее приложении к нагруженным уравнениям. Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13. N 1. С. 17-22.

15. *Исломов Б., Курьязов Д.М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка. "ДАН РУз". 1996. N 1-2. С. 3-6.

16.*Исломов Б. И., Юнусов О. М.* Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболического типа в специальной области. Узбекский математический журнал. 2017. N 1. С. 86-95.

# Движения изотропного пространства и решения уравнения Монжа-Ампера

**Исмоилов Шерзодбек Шокиржон угли**

*Национального университета Узбекистана*

e-mail Ismoilovsh94@mail.ru

Пусть нам дано трехмерное аффинное пространство $A_3$ с установленной аффинной системой координат $Oxyz$.

**Определение 1. [1]** Если скалярное произведение векторов $X\{x_1, y_1, z_1\}$ и $Y\{x_2, y_2, z_2\}$ определяется формулой

$$\begin{cases} (X,Y)_1 = x_1x_2 + y_1y_2 & (X,Y)_1 \neq 0 \\ (X,Y)_2 = z_1z_2 & (X,Y)_1 = 0 \end{cases},$$

то пространство называется изотропным пространством и обозначается через $R_3^2$.

Движение, то есть линейное преобразование сохраняющая введенную расстоянию имеет вид[1]:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha + a \\ y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha + b \\ z' = A \cdot x + B \cdot y + z + c \end{cases}$$

а матрица преобразования

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ A & B & 1 \end{pmatrix}$$

В изотропном пространстве ${R^2}_3$-существует два вида сферы. Сфера по расстоянию

$$x^2 + y^2 = r^2$$

и сфера по кривизне в пространстве [2]

$$z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

Когда рассматриваем $Z = Z(x, y)$ поверхности однозначно проектирующаяся на плоскость $Oxy$, то формула полной и средней кривизны поверхности вычеслается по формуле[3]

$$K = Z_{xx}Z_{yy} - {Z_{xy}}^2, \ \ 2H = Z_{xx} + Z_{yy}.$$

**Лемма 1.** Если $Z = \omega(x, y)$ является решением уравнения Монжа-Ампера, функция $\widetilde{Z}(x, y) = \omega(x, y) + C_1x + C_2y + C$ также является решением уравнения.

**Лемма 2.** Поверхность $Z(x, y) = \omega(x, y)$ равна поверхности $Z(x, y) = \omega(x, y) + C_1x + C_2y + C$ в изотропном пространстве.

**Теорема 1.** Если полная кривизна $K = -a^2$, $(a = const)$, то уравнение поверхности $\omega(x, y) = \pm axy + C_1x + C_2y + C$ в изотропном пространстве.

**Теорема 2.** Если полная кривизна поверхности переноса $K = \varphi(x)\psi(y)$, то его уравнения $Z(x, y) = f(x) + g(y)$, где:

$$f(x) = C_1 \int\limits_a^x (x-t)\varphi(t)dt \qquad g(y) = \frac{1}{C_1}\int\limits_b^y (y-\xi)\psi(\xi)d\xi$$

Эти утверждения доказываются с использованием теории поверхностей изотропного пространства и свойства его движения.

### Литература


1. *Артикбаев А. ,Исмоилов Ш.* О сечение плоскости со сферой изотропного пространства, SamSU scientific journal 2020. N5(123) 84-89 p.

2. *Artikbaev A., Sokolov D.D.* Геометрия в целом в пространстве время. Ташкент, "Фан 1991, стр 180.

3. *Saleem M.L, Karacan M.K.* Dual translation surfaces in the three dimensional simply isotropic space $I_3^1$, Tamking journal of mathematics Volume 49, Number 1, 67-77, March 2018.

4. *Polyanin, A. D. Zaitsev, V. F.*, Handbook of Nonlinear Mathematical Physics Equations, Fizmatlit Nauka, Moscow, 2002.


# Апроксимация нижнего оператора Понтрягина в нелинейных дифференциальных играх с фиксированным временем


**Исканаджиев И.М.**

*Институт Математики им.В.И.Романовского АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан* e-mail: iskan1960@mail.ru


Настоящее сообщение предложены упрощенные схемы для построения нижнего оператора Понтрягина для дифференциальных игр преследования с фиксированным временем.В частности, предложена точная формула для вычисления этого оператора, когда структура игры имеет более простой вид.

Рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot{z} = f(z, u, v), \tag{1}$$

где $z \in R^d$, $u \in P, v \in Q$, $f : R^d \times P \times Q \longrightarrow R^d$– непрерывно, $P$ и $Q$–выпуклые компактные подмножества $R^p$ и $R^q$ соответственно. Через $X[\alpha,\beta]$ обозначим совокупность всех измеримых функций $a(\cdot) : [\alpha,\beta] \to X$. Любую функцию $u(\cdot) \in P[\alpha,\beta]$ ( соответственно $v(\cdot) \in Q[\alpha,\beta]$) назовем допустимым управлением преследователя (убегающего). Решение уравнение (1), определяемое допустимыми управлениям $u(t)$ и $v(t)$ и начальной точкой $\xi$, обозначим через $z(t,u(\cdot),v(\cdot),\xi)$.Фиксируем терминальное множество$M$, $M \subset R^d$.

**Определение 1**. Оператор $\Pi_\varepsilon$ ставит в соответствие каждому множеству $A \subset R^d$ множество $\Pi_\varepsilon A$ всех точек $\xi \in R^d$, таких, что существует допустимое управление $u(\cdot) \in P[0,\varepsilon]$ преследователя при любом допустимым управлений убегающего $v(\cdot) \in Q[0,\varepsilon]$ соответствующая траектория $z(t,u(\cdot),v(\cdot),\xi)$ системы (1) с началом в точке $\xi \in R^d$ попадает на множества $A \subset R^d$ в момент времени $\varepsilon$.

Пусть $\omega = \{\tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n = t\}$ – разбиение отрезка $[0,t]$ и $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $|\omega| = t$. Положим

$$\Pi_\omega M = \Pi_{\delta_1}\Pi_{\delta_2}...\Pi_{\delta_n}M,$$

где $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}, \quad i = 1,2,...n.$

**Определение 2.** $\widetilde{\Pi}_t M = \bigcup\limits_{|\omega|=t} \Pi_\omega M$. Оператор $\widetilde{\Pi}_t$ называется нижним операторам Понтрягина в дифференциальных играх преследования с фиксированным временем окончания [1-5].

Рассмотрим следующий оператор

$$\Phi_\varepsilon B = \bigcup_{u\in P}\bigcap_{v\in Q} \{\xi \in R^d \mid z(\varepsilon,u,v,\xi) = \xi + \varepsilon f(\xi,u,v) \in B.\}$$

Аналогично оператору $\widetilde{\Pi}_t$ определяется оператор $\Phi_t$.

**Теорема 1.** Если $M$ - открытое подмножество $R^d$, то

$$\Pi_t M = \bigcup_{\delta>0} \Phi_t(M \underline{*} \delta H).$$

В этом пункте рассмотрим случай, когда $f(z.u,v) = \lambda E + f(u,v)$, $E$ - единичная матрица размерности $d$. Пусть для любых $u_1, u_2 \in P$ и $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ существует $\overline{u} \in P$ такое,что

$$f(\overline{u},Q) \subset \alpha f(u_1,Q) + \beta f(u_2,Q). \tag{2}$$

**Теорема 2.**Пусть выполнено условие (2). Тогда справедливо равенство

$$\widetilde{\Pi}_t M = \Phi_t(M) = exp(-\lambda t)(\bigcup_{u\in P}\{M \underline{*} t f(u,Q)\}).$$

Приближенные схемы для верхнего оператора $\widetilde{\Pi}^t$ предложены в работе [4].

### Литература

1. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследование, Матем. сбор.,т.112,№3,1980, сс.307-330.

2. *Пшеничный Б.Н. Сагайдак М.И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем ,Кибернетика, №2, 1970, сс.54-63 .

3. *Остапенко В.В.* Приближенное решение задач сближения - уклонения в дифференциальных играх, ДАН СССР, т.263, №1, 1982, сс.30-34.

4. *Азамов А.* О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх, Матем.сбор., т.118, № 3,1982, сс.422-430.

5. *Азамов А* Качестенная структура фазового пространства дифференциальных игр преследования-убегания, Дис. ... докт. ф.-м.н., ТашГУ, Ташкент, 1986,260с

# Нелокальная задача с интегральным условием для трехмерного уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде

**Каримов К.Т., Акбарова С.Х.**

*Ферганский государственный университет*

e-mail: karimovk80@mail.ru

В настоящей работе рассматривается трехмерное уравнение смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами:

$$u_{xx} + (\mathrm{sgn}y)\, u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{|y|} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0, \tag{1}$$

для которого нелокальная задача исследуется в полубесконечном параллелепипеде

$$\Omega = \left\{(x, y, z): \; x \in (0, a)\,, \; y \in (-b, +\infty), \; z \in (0, c)\right\},$$

где $u = u\,(x, y, z) -$ неизвестная функция; $a, b, c, \beta, \gamma \in R$, причем $b > 0$, $\gamma$, $|\beta| < 1/2$.

Уравнение (1) в области $\Omega$ принадлежит смешанному типу, а именно в области $\Omega^+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ принадлежит эллиптическому типу, а в области $\Omega^- = \Omega \cap \{y < 0\} -$ гиперболическому типу. Плоскости $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения. Среди них $y = 0-$ плоскость изменения типа уравнения.

Рассмотрим следующую нелокальную задачу и исследуем ее однозначную разрешимость.

**Нелокальная задача**. Найти функцию

$$u\,(x, y, z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\bar{\Omega} \cap (\{x = 0\} \cup \{x = 1\})\right) \cap C^2\left(\Omega^+ \cup \Omega^-\right),$$

удовлетворяющую в области $\Omega^+ \cup \Omega^-$ уравнению (1), краевым условиям

$$u\,(0, y, z) = 0, \;\; y \in [-b, +\infty)\,, \, z \in [0, c]\,,$$

$$u\,(x, y, 0) = 0, \, u\,(x, y, c) = 0, \;\; y \in [-b, +\infty), \;\; z \in [0, c];$$

$$\lim_{y \to +\infty} u\,(x, y, z) = 0, \;\; u\,(x, -b, z) = f\,(x, z)\,, \, x \in \; [0, a]\,, \, z \in [0, c]\,,$$

нелокальным интегральным условиям

$$\int_0^a u\,(x, y, z)\, dx = A = const, \; y \in [-b, +\infty), \; z \in [0, c]\,,$$

и условию склеивания

$$\lim_{y\to -0} (-y)^{2\beta} u_y (x, y, z) = \lim_{y\to +0} y^{2\beta} u_y (x, y, z) , \; x \in (0, a) , \; z \in (0, c) ,$$

где $\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : \; x \in [0, a] , \; y \in [-b, +\infty), \; z \in [0, c]\}$ , а $f(x, z)$ – заданная функция.

Нелокальные задачи с интегральными условиями возникают при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания недоступна для непосредственных измерений. Например, математическое моделирование процессов распространения тепла [1-2], процессы влагопереноса в капиллярно пористых средах [3] приводятся к таким задачам. Задачи с нелокальными интегральными условиями в настоящее время активно изучаются, разрабатываются методы доказательства их разрешимости (см. например [4-6]).

Для исследования поставленной задачи используются методы спектрального анализа. Решены две одномерные спектральные задачи. На основании свойства полноты систем собственных функций этих задач, доказана теорема единственности. Решение поставленной задачи построено в виде суммы двойного ряда Фурье-Бесселя. При обосновании равномерной сходимости построенного ряда использованы асимптотические оценки функций Бесселя действительного и мнимого аргумента. На их основе получены оценки для каждого члена ряда, позволившие доказать сходимость ряда и его производных до второго порядка включительно, а также теорему существования в классе регулярных решений.

## Литература


1. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент. Mumtoz so'z, 2010. -354 с.

2. *Пономарев С.М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе, Дис... . д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.

3. *Каримов К.Т.* Спектральные задачи для трехмерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2017, выпуск 2(18), -С.7-19.

4. *Уринов А.К., Каримов К.Т.* Построение собственных функций задачи Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами. Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых. Неклассические уравнения математической физики и их приложения. Ташкент. 23-25 октября 2014 г. -С 165-166.

5. *Каримов К.Т.* Задача на собственные значения для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами. Материалы третьего международного Российско-Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик. 3-7 декабря. 2014 г. -С 87-89.

6. *Уринов А.К., Каримов К.Т.* Об одном методе нахождения общего решения вырожденного уравнения Гойна. Материалы научной конференции "Современные методы математической физики и их приложения". Ташкент. 15-17 апреля 2015 г. -С. 298-300.

7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. - М.: Наука, 1973. -296 с.

# Аналог задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка

**Каримов Ш.Т, Юлбарсов Х.А.**

*Ферганский государственный университет*
shaxkarimov@gmail.com

*Ферганский политехнический институт, Узбекистан, Фергана*
xojiakbaryulbarsov1@gmail.com

В настоящее время в связи с проблемами передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвенных грунтах, нестационарного процесса фильтрации в трещиновато-пористой среде и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению начально-краевых и краевых задач для неклассических уравнений с частными производными. К таким неклассическим уравнениям относится уравнения псевдопараболического типа. Под псевдопараболическими уравнениями подразумевается уравнения высокого порядка с производными по времени первого порядка [1].

В работе Г.И.Баренблатта, Ю.П.Желтова, И.Н.Кочиной [2] получено впервые линейное псевдопараболическое уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_x u(x,t) + \lambda u(x,t)) + \Delta_x u(x,t) = 0 \tag{1}$$

описывающее нестационарный процесс фильтрации в трещиновато-пористой среде, где $\Delta_x$ - многомерный оператор Лапласа, $\lambda = const \in R$.

Исследованию уравнений псевдопараболического типа посвящено большое количество работ, обзор которых можно найти в монографиях [1, 3, 4].

Задачи для неклассических уравнений продолжают привлекать внимание исследователей в силу двух обстоятельств. Во – первых, они возникают при рассмотрении целого ряда важных практических задач. Во – вторых, исследование этих уравнений начато сравнительно недавно и еще далеко от завершения, что обуславливает интерес к ним. Этот интерес также связан и с математическим своеобразием, выражающимся в неклассическом характере получаемых уравнений.

Данная работа посвящена изучению вопросов разрешимости в классическом смысле аналога краевой задачи Гурса для неоднородного одномерного уравнения (1) вида

$$L\left(u\right) \equiv u_{xxt} + u_{xx} + \lambda u_t = f\left(x,t\right), \tag{2}$$

где $f(x,t)$ - заданная функция.

**Задача G.** В области $\Omega = \{(x,t) :\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ требуется найти функцию $u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

$$u\left(0,t\right) = \varphi_1\left(t\right),\ u_x\left(0,t\right) = \varphi_2\left(t\right),\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $\psi(x)$, $\varphi_k(t)$, $(k = 1, 2)$- заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \psi(0)$,$\varphi_2(0) = \psi'\left(0\right)$.

Данную задачу решим методом функции Римана. В работах [5], [6], [7] функция Римана вводиться как решение некоторой специальной задачи Гурса, причем граничные условия указанной специальной задачи должна быть получена с помощью определенной задачи Коши. В работах [8], [9] функция Римана вводиться как решение интегрального уравнения типа Вольтера. Заметим, что функция Римана работ [5], [6], [7] и [8], [9] не совпадают. Например, в [8] функция Римана $v\left(x,t;x,t\right)=1$, а в вышеуказанных работах $v\left(x,t;x,t\right)=0$.

В данной работе будем использовать метод Римана рассматриваемые в работах [5], [6], [7] и построим функцию Римана оператора $L(u)$, которая выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию. Заменяя переменные $(x,t)$ на $(\xi,\tau)$ и введя сопряженный оператор по Лагранжу для оператора $L(u)$ в виде

$$M\left(v\right)\equiv -v_{\xi\xi\tau}+v_{\xi\xi}-\lambda v_{\tau}=0, \tag{5}$$

получим тождества Грина

$$vL\left(u\right)-uM\left(v\right)=\frac{\partial Q}{\partial \xi}-\frac{\partial P}{\partial \tau} \tag{6}$$

где $Q=\left(v_{\xi\tau}-v_{\xi}\right)u+\left(u_{\xi\tau}-u_{\xi}\right)v,\ P=v_{\xi}u_{\xi}-\lambda vu.$

Интегрируя тождество (6) по области $\Omega_0=\{(\xi,\tau):\ 0<\xi<x,\ 0<\tau<t\}$ придём к следующему соотношению:

$$\iint\limits_{\Omega_0}[vL\left(u\right)-uM\left(v\right)]d\xi d\tau=\iint\limits_{\Omega_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}-\frac{\partial P}{\partial \tau}\right)d\xi d\tau=\int\limits_{\partial\Omega_0}Pd\xi+Qd\tau$$

где $\partial\Omega_0$ - граница области $\Omega_0$.

Полагая, что $u\left(x,t\right)$ -решение уравнения (2), а $v=v\left(x,t;\xi,\tau\right)$ удовлетворяет сопряженному уравнению (5), после некоторых преобразований с криволинейными интегралами второго рода, получим

$$u\left(x,t\right)=v_{\xi}\left(x,t;0,t\right)\varphi_1\left(t\right)+\int\limits_0^x[v_{\xi}\left(x,t;\xi,0\right)\psi'\left(\xi\right)-\lambda v\left(x,t;\xi,0\right)\psi\left(\xi\right)]d\xi-$$

$$-\int\limits_0^t[\left(v_{\xi\tau}\left(x,t;0,\tau\right)-v_{\xi}\left(x,t;0,\tau\right)\right)\varphi_1\left(\tau\right)+\left(\varphi_2'\left(\tau\right)+\varphi_2\left(\tau\right)\right)v\left(x,t;0,\tau\right)]d\tau-$$

$$-\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^t v\left(x,t;\xi,\tau\right)f\left(\xi,\tau\right)d\tau. \tag{7}$$

Функция Римана для уравнения (2) называется решение $v=v\left(x,t;\xi,\tau\right)$ сопряженного уравнения (5) удовлетворяющее условиям

$$v\left(x,t;x,\tau\right)=0,\ v_{\xi}\left(x,t;x,\tau\right)=e^{\tau-t},\ v\left(x,t;\xi,t\right)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(\xi-x\right)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Введём новые переменные $\sigma=-\frac{\lambda}{4}\left(\xi-x\right)^2,\ \omega=\tau-t$. Функцию Римана ищем в виде $v\left(x,t;\xi,\tau\right)=\left(\xi-x\right)w\left(\sigma,\omega\right)$, где $w\left(\sigma,\omega\right)$ неизвестная функция которая является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial\sigma^2}+\frac{3}{2}\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right)-\left(\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial\sigma^2}+\frac{3}{2}\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right)-\frac{\partial w}{\partial\omega}=0.$$

Одно из решений этого уравнения является следующая функция:

$$w(\sigma,\omega) = {}_1R_3(1;\ 3/2,1,1;\sigma,\omega) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(1)_{m+n}}{(3/2)_m\,(1)_m\,(1)_n} \frac{\sigma^m}{m!}\frac{\omega^n}{n!}.$$

Данную функцию можно представить в виде

$${}_1R_3(1;\ 3/2,1,1;\sigma,\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma^m}{(3/2)_m\, m!}\, {}_1F_1(1+m;1;\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!}\, {}_1F_2(1+n;3/2,1;\sigma)$$

где ${}_1F_1(a;b;\omega)$ - вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, ${}_1F_2(a;b,c;\sigma)$ - обобщенная гипергеометрическая функция [10].

Таким образом, функция Римана имеет вид

$$v(x,t;\xi,\tau) = (\xi - x)\, {}_1R_3(1;\ 3/2,1,1;\sigma,\omega.) \tag{8}$$

При подстановке (8) в (7) после некоторых преобразований решение задачи Гурса для уравнения (2) принимает вид

$$u(x,t) = \varphi_1(t)\cos\sqrt{\lambda}x + \varphi_2(t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \psi(x)e^{-t} - \psi(0)\, {}_1R_3\left(1;\frac{1}{2},1;1;-\frac{\lambda}{4}x^2,-t\right) -$$

$$-\varphi_2(0)\, x\, {}_1R_3\left(1;\frac{3}{2},1;1;-\frac{\lambda}{4}x^2,-t\right) + \frac{\lambda}{2}x^2\int_0^t {}_1R_3\left(2;\frac{3}{2},2,2;-\frac{\lambda}{4}x^2,\tau-t\right)\varphi_1(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{\lambda}{6}x^3\int_0^t {}_1R_3\left(2;\frac{5}{2},2,2;-\frac{\lambda}{4}x^2,\tau-t\right)\varphi_2(\tau)\,d\tau -$$

$$-\lambda t\int_0^x {}_1R_3\left(2;\frac{3}{2},2,2;-\frac{\lambda}{4}(\xi-x)^2,-t\right)(\xi-x)\,\psi(\xi)\,d\xi -$$

$$-\int_0^x d\xi\int_0^t v(x,t;\xi,\tau)\, f(\xi,\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что (9) удовлетворяет задаче (2), (3), (4). Таким образом, резюмируя вышеизложенное, основные результаты можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема.** Если $\psi(x) \in C^1[0,l] \cap C^2(0,l)$, $\varphi_j(t) \in C^1[0,T)$, $j = 1,2$, $f(x,t) \in C(\bar{\Omega})$ то существует единственное решение задачи Гурса (2) – (4), которое имеет вид (9).

Случай $\lambda < 0$ исследуется аналогично.

## Литература


1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978.

2. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах. // Прикл. мат. мех. - 1960. - 24. -№ 5. - С. 58-73.

3. *Kozhanov A.I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. – Utrecht: VSP 1999.

4. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.Ю., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. – М.: Физматлит, 2007.

5. *Colton D.* Pseudoparabolic equation in one space variable. // J. Differen. equations, 1972, vol. 2. p. 559-565.

6. *Солдатов А.П., Шхануков М.Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка. // ДАН СССР, 1987, -т. 297, -№ 3, -с. 547-553..

7. *Зикиров О.С.* Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка. // Соврем. мат. прилож., 2011. Т. 68, С. 101-120.

8. *Жегалов В.И., Уткина Е.А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка. // Изв. вузов. Математика. 1999, №10 (449)

9. *Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А.* Уравнения с доминирующей частной производнгой. Казань, Изд-во Казанского унив-та, 2014. 385 с с.

10. *10. Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т.1,2. -М.: Наука, 1973. - 296 с.

# Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром в четверть цилиндре

**Каримов К.Т., Шокиров А.М.**

*Ферганский государственный университет*
*Ферганский филиал ТУИТ*
e-mail: karimovk80@mail.ru, ashokirov87@mail.ru

В цилиндрической области $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < a^2,\ x > 0,\ y > 0,\ z \in (0, c)\}$ рассмотрим трехмерное эллиптическое уравнение с тремя сингулярными коэффициентами

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\alpha}{x}U_x + \frac{2\beta}{y}U_y + \frac{2\gamma}{z}U_z + \lambda U = 0, \tag{1}$$

где $U = U(x, y, z)-$ неизвестная функция, а $a, c, \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in R$, причем $\alpha, \beta, \gamma < 1/2$.

В работах [1], [2] для равномерно эллиптических уравнений второго порядка, довольно подробно изучены обобщенные решения задачи Дирихле в ограниченной области и доказано фредгольмова разрешимость задачи Дирихле для таких уравнений в Гильбертовом пространстве. С.А.Алдашевым [3], [4] получен явный вид классического решения локальных задач в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа. Задачи для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами изучены в работах [6-8] и др.

Насколько нам известно, для трехмерных эллиптических уравнений с тремя сингулярными коэффициентами в цилиндрических областях является малоизученной.

В данной статье методом спектрального анализа исследована однозначная разрешимость задачи Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в четверть цилиндре.

**Задача D.** Найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega$ и краевым условиям

$$U(x,y,z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega), \tag{2}$$

$$U(x,y,z) = F_1(x,y,z), \quad (x,y,z) \in S_0, \tag{3}$$

$$U(0,y,z) = \Psi_1(y,z), \quad (0,y,z) \in S_1, \tag{4}$$

$$U(x,0,z) = \Psi_2(x,z), \quad (x,0,z) \in S_2, \tag{5}$$

$$U(x,y,0) = \Psi_3(x,y), \quad (x,y,0) \in S_3, \tag{6}$$

$$U(x,y,c) = \Psi_4(x,y), \quad (x,y,c) \in S_4, \tag{7}$$

где $S_0 = \{(x,y,z):\ x^2+y^2=a^2,\ x>0,\ y>0,\ z\in(0,c)\}$, $S_1 = \{(x,y,z): x=0, y\in(0,b), z\in(0,c)\}$, $S_2 = \{(x,y,z):\ x\in(0,a),\ y=0,\ z\in(0,c)\}$, $S_3 = \bar{\Omega}\cap\{z=0\}$, $S_4 = \bar{\Omega}\cap\{z=c\}$, а $F_1(x,y,z)$, $\Psi_j(x,y)$, $j=\overline{1,4}-$ заданные непрерывные функции.

Для нахождения решения задачи $D$, используем спектральный метод Фурье. С этой целью введем в области $\Omega$ цилиндрические координаты $(\rho,\varphi,z)$, связанные с декартовыми координатами $(x,y,z)$ по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arctg(y/x)$. В цилиндрических координатах, область $\Omega$ переходят в $\Delta=\{(\rho,\varphi,z):\ \rho\in(0,a),\ \varphi\in(0,\pi/2),\ z\in(0,c)\}$, а уравнение (1) и условия (2)-(7) принимают вид

$$u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}+\frac{1+2\alpha+2\beta}{\rho}u_\rho+\frac{2\beta ctg\varphi-2\alpha tg\varphi}{\rho^2}u_\varphi+u_{zz}+\frac{2\gamma}{z}u_z+\lambda u=0,\ (\rho,\varphi,z)\in\Delta, \tag{8}$$

$$u(\rho,\varphi,z)\in C\left(\bar{\Delta}\right)\cap C^2(\Delta), \tag{9}$$

$$u(a,\varphi,z)=f_1(\varphi,z),\ \ \varphi\in[0,\pi/2],\ z\in[0,c], \tag{10}$$

$$u(\rho,\pi/2,z)=\psi_1(\rho,z),\ \ u(\rho,0,c)=\psi_2(\rho,z),\ \ \rho\in[0,a],\ z\in[0,c], \tag{11}$$

$$u(\rho,\varphi,0)=\psi_3(\rho,\varphi),\ \ u(\rho,\varphi,c)=\psi_4(\rho,\varphi),\ \ \rho\in[0,a],\ \varphi\in[0,\pi/2], \tag{12}$$

где $u=u(\rho,\varphi,z)=U(x,y,z)$, $f_1(\varphi,z)=F_1(x,y,z)$, $\psi_1(\rho,z)=\Psi_1(y,z)$, $\psi_2(\rho,z)=\Psi_2(x,z)$, $\psi_3(\rho,\varphi)=\Psi_3(x,y)$, $\psi_4(\rho,\varphi)=\Psi_4(x,y)$.

В области $\Delta$ будем искать решение задачи D в виде

$$u(\rho,\varphi,z)=u_1(\rho,\varphi,z)+u_2(\rho,\varphi,z)+u_3(\rho,\varphi,z), \tag{13}$$

где функции $u_1(\rho,\varphi,z)$, $u_2(\rho,\varphi,z)$ и $u_3(\rho,\varphi,z)$ являются решениями следующих краевых задач:

**Задача $D_1$.** Найти функцию $u_1(\rho,\varphi,z)$, удовлетворяющую уравнению (8) в области $\Delta$ и условиям (9), (11), (12),

$$u_1(a,\varphi,z)=0,\ \ \varphi\in[0,\pi/2],\ z\in[0,c].$$

**Задача $D_2$.** Найти функцию $u_2(\rho,\varphi,z)$, удовлетворяющую уравнению (8) в области $\Delta$ и условиям (9), (10), (12),

$$u(\rho,\pi/2,z)=0,\ \ u(\rho,0,c)=0,\ \ \rho\in[0,a],\ z\in[0,c].$$

**Задача $D_3$.** Найти функцию $u_3(\rho,\varphi,z)$, удовлетворяющую уравнению (8) в области $\Delta$ и условиям (9), (10), (11),

$$u(\rho,\varphi,0)=0,\ \ u(\rho,\varphi,c)=0,\ \ \rho\in[0,a],\ \varphi\in[0,\pi/2].$$

В самом деле, если функции $u_1(\rho,\varphi,z)$, $u_2(\rho,\varphi,z)$ и $u_3(\rho,\varphi,z)$ являются решениями задач $D_1$, $D_2$ и $D_3$ соответственно, то функция (13) удовлетворяет всем условиям задачи $D$.

Исследование поставленных задач проводится с помощью метода разделения переменных Фурье и спектрального анализа. Для поставленной задачи с помощью метода Фурье получены одномерные спектральные задачи. На основании свойства полноты систем собственных функций этих задач доказана теорема единственности. Решение исследуемой задачи построено в виде суммы двойного ряда Фурье-Бесселя. В обосновании равномерной сходимости построенного ряда использовались асимптотические оценки функций Бесселя действительного и мнимого аргумента. На их основе получены оценки для каждого члена ряда, которые позволили доказать равномерную сходимость полученного ряда и его производных до второго порядка включительно, а также теорему существования в классе регулярных решений.

**Литература**

1. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.

2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

3. *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 3-7.

4. *Aldashev S.A.* The correctness of the local boundary value problem in cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation, Izv. Saratov Univ., Ser. Math. Mech. Inform., 15, 365-371(2015).

5. *Karimov K.T.* Nonlocal problem for an elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped. Lobachevskii Journal of Mathematics, 41, 46-57(2020).

6. *Уринов А.К., Каримов К.Т.* Задача Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами. Вестник Национального университета Узбекистана. 2017. 2/1, С.195-206.

7. *Каримов К.Т.* Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами. Узбекский математический журнал. 2017. N1, С.96-105.

8. *Karimov K.T.* On one version of the Dirichlet-Neumann problem for a three-dimensional elliptic equation with two singular coefficients. Uzbek Mathematical Journal, 3, 102-115(2018).

# Сохранение равновесия

**Кушаков Х., Абдуллаев А., Тиллаев Д.**

Андижанский государственный университет

Чтобы понять, когда происходят бифуркации, важно сначала понять, когда они не происходят. Как мы скоро увидим, ничего не может случиться с невырожденными равновесиями, когда параметр немного изменен. Равновесие называется вырожденным, если хотя бы одно из собственных значений его линеаризации равно нулю. Таким образом, мы увидим, что равновесие, все собственные значения которого отличны от нуля, является «структурно устойчивым» - его нельзя устранить небольшими изменениями в уравнениях. Обычно поток $\varphi$ структурно устойчив, если каждый поток в окрестности $\varphi$ топологически эквивалентен. Здесь окрестность соответствует набору векторных полей в некотором функциональном пространстве, например, $C^r$ для некоторого $r$, вблизи векторного поля $\varphi$. Практически также обычно необходимо рассмотреть окрестность в фазовом пространстве относительно некоторой конкретной орбиты. Здесь мы рассмотрим простейшую орбиту, равновесие.

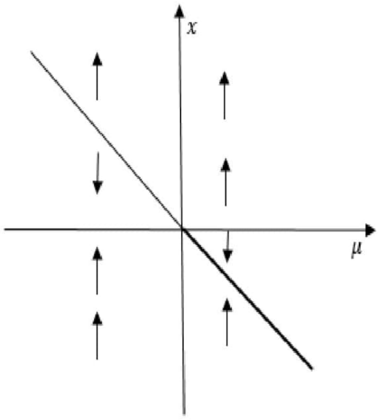


рис. 3.

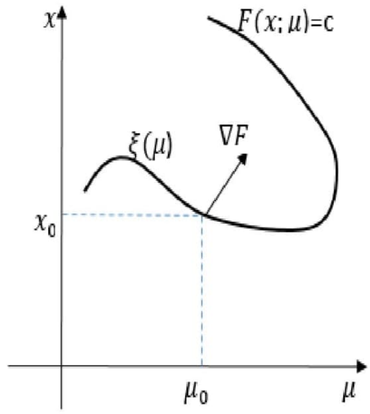


рис. 4.

Важным инструментом, демонстрирующим это, а также многими другими результатами в теории бифуркаций, является теорема о неявной функции. Как видно из ее названия, эта теорема имеет дело с «неявно» определенными функциями. Например, мы могли бы ожидать, что уравнение $f(x;\mu)=0$ «обычно» может быть решено для $x$, чтобы определить «функцию» $x(\mu)$. Однако, как мы видели, такая функция не обязательно уникальна (там мы получили две, $x_{\pm}(\mu)$, и также легко построить примеры, где такой функции явно нет, например, $f(x;\mu)=sechx+\mu^2$. Теорема о неявной функции дает достаточные условия на $f$, чтобы неявно определенная функция существовала и была единственной [2].

**Теорема (о неявной функции).** Пусть $U$ - открытое множество в $R^n \times R^k$ и $F \in C^r(U,R^2)$ с $r \geq 1$. Предположим, что существует точка $(x_0,\mu_0) \in U$ такая, что $F(x_0,\mu_0)=c$ и $D_xF(x_0,\mu_0)$ неособая матрица $n \times n$. Тогда существуют открытые множества $V \subset R^n$ и $W \subset R^k$ и единственная функция $\xi(\mu) : W \to V$ из $C^r$, для которой $x_0=\xi(\mu_0)$ и $F(\xi(\mu);\mu)=c, \mu \in W$. [1].

Эта теорема и ее обобщение на функции на Банаховых пространствах могут быть выведены из теоремы о сжимающем отображении [3]. Это доказано в любом респектабельном курсе по расширенному исчислению или анализу (Markley 2004; Taylor and Mann 1983).

Теорема о неявной функции утверждает, что если мы знаем решение для некоторого специального значения параметра $\mu_0$, то существует единственная поверхность решений, которая проходит через специальное решение, при условии, что якобиан неособой. Легко получить грубое понимание того, почему необходимо условие на якобиан $D_xF$. Разложим $F = c$ относительно $(x_0, \mu_0)$ и пренебрегаем членами более высокого порядка, чем первые производные получим

$$c = F(x_0 + \delta x, \mu_0 + \delta\mu) = c + D_xF(x_0, \mu_0)\delta x + D_\mu F(x_0, \mu_0)\delta\mu + O(2).$$

Если бы можно было игнорировать члены высшего порядка, мы могли бы найти $\delta x$

$$\delta x \approx -(D_xF)^{-1} D_\mu F \delta\mu;$$

это можно сделать для произвольных $\delta\mu$ только в том случае, если $D_xF$ неособо. Этот расчет дает приближение низшего порядка к функции $\xi(\mu) = x_0 + \delta x(\mu)$. Теорема утверждает, что это приближение можно распространить на гладкую функцию, которая является точным решением $F = c$ в некоторой окрестности $(x_0, \mu_0)$.

Геометрическое понимание этого результата легко получить в двух измерениях; см. рис. 4. Если $(x, \mu) \in R^1 \times R^1$, то контур $F(x, \mu) = c$ является в общем случае кривой. Вектор градиента $\nabla F(D_xF, D_\mu F)$ перпендикулярен контуру. В любой точке, где $\nabla F$ не находится в направлении $\mu$, контур локально представляет собой график над ? и однозначно определяет функцию $x = \xi(\mu)$. Когда $D_xF = 0$, локального графа $\xi(\mu)$ не существует. Отметим, что в этом случае теорема о неявной функции может применяться для «переменной» ? как функции от «параметра» $x$ для получения $\mu(x)$ при условии, что $D_xF \neq 0$.

Из теоремы о неявной функции немедленно следует, что невырожденные равновесия структурно устойчивы.

**Список литературы**

1. А.А.Андронов, Е.А.Леонтович, И.И.Гордон, А.Г.Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, Наука, Москва. 1967.
2. L.Perko, Differential equations and dynamical sistems, Springer 2000
3. А.Н.Колмогоров, С.Б.Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, Наука. 1989.

# О компактности семейства А-аналитических функций

**Г.М.Лян, С.Р.Ахатова**

*Национальный университет Узбекистана, Ташкент*

В докладе дается новое конструктивное доказательство критерия компактности семейства А - аналитических функций.

Итальянский математик Эудженио Бельтрами в 1868 году построил локальную модель геометрии Лобачевского на псевдосфере, чем показал, что геометрия Лобачевского столь же непротиворечива, как и геометрия Евклида. Он же впервые рассмотрел эллиптическую систему уравнений в частных производных вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha u_x + \beta u_y = v_y \\ \beta u_x + \gamma u_y = -v_x \end{array} \right\} \text{- уравнения Бельтрами,} \tag{1}$$

где $\alpha(x,y)\gamma(x,y) - \beta^2(x,y) = 1$. Гомеоморфные решения этих уравнений определяют квазиконформные отображения. В начале сороковых годов прошлого века Отто Тейхмюллер с помощью квазиконформных отображений решил знаменитую проблему модулей римановых поверхностей, поэтому возродился интерес к уравнениям Бельтрами, который сохранился до настоящего времени. В последнее время группой ташкентских математиков были установлены замечательные теоретико-функциональные свойства решений уравнения Бельтрами в комплексной записи $w_{\bar{z}} = A(z)w_z$ когда функция $A(z)$ является антиголоморфной фунцией. Такие решения называются $A$ - аналитическими функциями. Первые результаты в этом направлении были опубликованы в работе [1].

Настоящая заметка посвящена теореме о компактности семейства $A$- аналитических функций. Заметим, что аналогичная теорема приведена в [1] как теорема Монтеля, однако в нашей заметке дается другое конструктивное доказательство. Приведем некоторые вспомогательные формулировки и утверждения.

В пространстве $C \approx R^2$ наряду с базисом $(x,y)$ можно рассмотреть базис $(z,\bar{z})$. Тогда будем иметь: $z = x+iy, \bar{z} = x-iy$ формальные производные находим из равенств

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2i}$$

,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{-1}{2i}.$$

Если положить $w = u+iv$, то уравнения Бельтрами можно записать в комплексной форме:

$$w_{\bar{z}} = A(z)w_z \tag{2}$$

$A(z) = -\frac{p(z)-1}{p(z)+1}e^{2i\theta(z)}$, $p = \frac{\alpha+\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2 + \beta^2}$, $tg2\theta = \frac{2\beta}{\alpha-\gamma}$, где $p \geq 1, 0 \leq \theta < \pi$ Отметим, что комплексная запись уравнений Коши-Римана имеет вид: $f_{\bar{z}} = 0$, т.е. при $A(z) = 0$ уравнение Бельтрами становится уравнением Коши-Римана.

Далее будем предполагать, что область $G$ ограниченная, односвязная и её граница $\partial G$ – кусочно-гладкая замкнутая кривая. В области $G$ задана функция $A(z)$, которая в дальнейшем предполагается антианалитической, т.е. функция $\overline{A(z)}$ голоморфна в $G$ и всюду в этой области удовлетворяет неравенству $|A(z)| \leq q < 1$. Тогда по свойству голоморфной функции интеграл $\int\limits_{\overset{\cup}{az}} \overline{A(z)}dz$, где $\overset{\cup}{az}$ - произвольный кусочно-гладкий путь в $G$ , соединяющий точки $a, z \in G$, не зависит от формы пути и при фиксированной точке $a$ является голоморфной функцией от z , при этом

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\int\limits_{\overset{\cup}{az}} \overline{A(z)}dz\right) = \overline{A(z)}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\int\limits_{\overset{\cup}{az}} \overline{A(z)}dz\right) = 0 \tag{3}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(z,\zeta) = z - \zeta + \overline{\int\limits_{\gamma(\zeta,z)} \overline{A(\tau)}d\tau} \tag{4}$$

где $\gamma(\zeta,z)$- произвольный кусочно-гладкий путь в $G$, соединяющий точки $\zeta$ и $z$. Вычисления показывают, что функция $\psi(z,\zeta)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами

$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = A(z)\frac{\partial\psi}{\partial z}$ и, следовательно, является по определению $A$-аналитической функцией по первой переменной. Так как

$$\psi(\zeta, z) = -\psi(z, \zeta), \tag{5}$$

то эта функция является $A$-аналитический и по второй переменной.

**Теорема 1.** ([1], аналог интегральной теоремы Коши) Пусть $f(z)$ является $A$-аналитической в области $G$ и $D \subset G$ - односвязная область, ограниченная кусочно-гладким контуром $\Gamma = \partial D \subset G$. Тогда $\int\limits_{\Gamma} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = 0$.

В работе [1] доказан аналог интегральной формулы Коши для $A$-аналитических функций: при условиях теоремы 1 имеет место формула:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)(d\zeta + A(\zeta)\overline{d\zeta})}{\psi(\zeta, z)}. \tag{6}$$

и получен аналог формулы Тейлора для $A$-аналитических функций: если функция $f(z)$ $A$-аналитична в $A$-лемнискате $L(a, R) = \{z : |\psi(z, a)| < R\}$ и непрерывна на ее замыкании, то эта функция может быть разложена в аналог ряда Тейлора вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi^k(z, a), \tag{7}$$

где $c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{[\psi(\zeta,a)]^k}(d\zeta + A(\zeta)\overline{d\zeta}),\ 0 < \rho < R,\ k = 0, 1, ...$ Обобщенный степенной ряд (7) сходится в A-лемнискате $L(a, r)$ и радиус сходимости находится по формуле Коши-Адамара $\frac{1}{r} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$. Там же доказано неравенство Коши для коэффициентов ряда (7)

$$|c_k| \leq \frac{\max\{|f(z)| : z \in \partial L(a, \rho)\}}{\rho^k}, 0 < \rho < r, k = 0, 1, 2, ... \tag{8}$$

Совокупность функций $\{f\}$, заданных в некоторой области $D$, называется компактным в $D$, если из каждой последовательности $\{f\}$ функций этой совокупности можно извлечь подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходящуюося равномерно на любом компакте $K \subset D$.

**Теорема 2.** Если совокупность $A$-аналитических $\{f(z)\}$ функций равномерно ограничена в $A$-лемнискате $L(a, r)$, т.е. существует положительное число $M$ такое, что неравенства $|f^*(z)| < M$ выполняются во всех точках $A$-лемнискаты $L(a, r)$ для всех функций $f^*(z)$ из данной совокупности $\{f(z)\}$, тогда эта совокупность компактна в $A$-лемнискате $L(a, r)$.

Доказательство чисто конструктивное: для произвольной последовательности функций $\{f_n(z)\}$ из данной совокупности $\{f(z)\}$ дается процедура выделения подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$, сходящейся равномерно на любом компакте $K \subset D$. Процедура основана на формуле Тейлора (7) и неравенствах Коши (8) для коэффициентов ряда.

### Литература


1. *A. Sadullaev, N. Jabborov.* On a class of A-analytic functions, J. Sib. Federal Univ., Mathematics and Physics, 2016, 9(3), 374-383.

# Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков

**Мамадалиев Н., Саломова М.,Базаркулов А.**

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
Ферганский годударственный университет, Фергана,Узбекистан;
M_numana59@mail.ru

В данной работе изучены линейные дифференциальные игры, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающие аргументом при интегральными ограничениями на управления игроков. Получено достаточное условие для разрешимости линейной задачи преследования в системе с запаздыванием. Данная работа примыкает к исследованиям [1-3].

**Постановка задачи.** В пространстве $R^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра преследования [1]

$$\dot{z}\,(t) = Az\,(t) + Bz\,(t-h) + Cu(t) - Dv(t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in R^n, n \geq 1; A, B, C, D$ — постоянные матрицы, размерности которых $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(n \times p), (n \times q)$, соответственно. $h$ — фиксированное положительное число, т.е. величина запаздывания. $u(t) \in R^p$ — управление преследователя, $v(t) \in R^q$ — управление убегающего, соответственно. Они выбираются как суммируемые с квадратом функции $u(t)$, $v(t)$, удовлетворяющие интегральным ограничениям

$$\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq 1,\ \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq 1. \tag{2}$$

Измеримые функции $u = u\,(t)\,, v = v\,(t)\,,\ 0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие интегральным ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

В $R^n$ выделено непустое терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где $M_0$ — линейное подпространство пространства $R^n$, $M_1$ — выпуклое компактное подмножество подпространства $L$, $L$ — ортогональное дополнение к подпространству $M_0$ в $R^n$. Начальным положением для системы (1) является $n$ — мерная абсолютно непрерывная функция $z_0(\cdot)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$.

Преследование начинается из начального положения $z_0\,(\cdot)$ и считается законченным в момент времени $t = t(z_0(\cdot))$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на $M$. Цель убегаюшего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

**Определение 1.** *Пусть* $K(t), 0 < t \leq \tau,$ *— единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами* ([1,c.199]): а) $K(t) = \tilde{0},\ t < 0,\ \tilde{0}$ — *нулевая матрица порядка* $n$; b) $K(0) = E_n$, где $E_n$ — *единичная матрица порядка* $n$; в) *функция* $\sum_{i=0}^{m} C_i K(t - h_i)$ *непрерывна на* $[0, +\infty)$; г) $K(t)$ *при* $t > 0$ *удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению*

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h),\ t > 0. \tag{3}$$

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а)–г), могут быть доказаны обычном методом последовательного интегрирования уравнения (3).

Пусть допустимые управления $u = u(t)$, $v = v(t)$ преследующего и убегающего игроков в игре (1),(2), выбраны на отрезке $[0, \tau]$, $\tau > 0$. Тогда для решения $z(t)$, $0 \le t \le \tau$, уравнения (1), при начальном условии $z(s) = z_0(s)$, $-h \le s \le 0$, справедлива формула [1]

$$z(\tau) = K(\tau)z_0(0) + \int_{-h}^{0} K(\tau - t - h)Bz_0(t)dt + \int_{0}^{\tau} K(\tau - t)\Big[Cu(t) - Dv(t)\Big]dt. \qquad (4)$$

**Определение 2.** Будем говорить, что в игре (1),(2) из начального положения $z_0(\cdot)$ возможно завершение преследования за время $T = T(z_0(\cdot)), 0 \le T < +\infty$, если существует функция $u(t, v)$, $0 \le t < +\infty$, $v \in R^q$, $u(t, v) \in R^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t)$, $0 \le t < +\infty$, $v(t) \in R^q$, удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \le 1$, функция $u(t) = u(t, v(t))$, $0 \le t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \le 1$ и траектория $z(t)$, $0 \le t < +\infty$, уравнения (1) с учетом начального условия $z(s) = z_0(s)$, до момента $T$ попадает на терминальное множество $M$ при некотором $t = t^* \in [0, T]$, т.е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M$.

Требуется найти начальные положения $z_0(\cdot)$ из которых в игре (1),(2) возможно завершение преследования за конечное время $\tau$.

В настоящей работе исследуется конфликтно-игровые задачи, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающие аргументом при интегральными ограничениями на управления игроков, с точки зрения завершения преследования за конечное время. Надо отметить, что данное работа без запаздывание рассмотрена в работе [3]. С использованием идей работы [3] получено достаточное условие для завершения преследования из заданной начальной точки. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [1-3].

Обозначим через $\pi$ — матрицу оператора ортогонального проектирования из $R^n$ на $L: \ \pi : R^n \longrightarrow L$; под операцией $\underline{*}$ понимается операции геометрической разности [3].

**Предположение 1**[3,предположение 1]. *Существует число* $\alpha$, $0 \le \alpha < 1$, *такое, что для всех* $t \ge 0$, *выполняется включение*

$$\pi K(t)DV \subset \alpha\pi K(t)CU, \qquad (5)$$

где $U = \{u \in R^p : \|u(\cdot)\|^2_{L_2[0,\infty)} \le 1, \}$ и $V = \{v \in R^q : \|v(\cdot)\|^2_{L_2[0,\infty)} \le 1, \}$ — единичные шары в пространствах управлений.

Зафиксируем некоторое начальное положение $z_0(\cdot)$. Рассмотрим многоэначное отображение

$$\overset{\wedge}{W}(t, \tau, v) = \Big\{\lambda \in R: \ \lambda\Big(\xi[\tau, z_0(\cdot)] - M_1\Big) + \pi K(\tau - t)Dv \in \sqrt{\lambda(1-\alpha) + \alpha\|v(\cdot)\|^2}\pi K(\tau - t)CU\Big\},$$

где

$$\xi[\tau, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau)z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - t - h)Bz_0(t)dt,$$

$0 \le t < \infty, \ 0 \le \tau < \infty, \ v \in R^q$.

Рассмотрим вспомогательную функцию, так называемую разрешающую функцию [3]:

$$\lambda(t, \tau, v) = \sup \overset{\wedge}{W}(t, \tau, v).$$

Теперь сформулируем достаточное условие гарантированного приведения решения уравнения (1),(2) на терминальное множество $M$ из начального положения $z_0(\cdot)$.

**Теорема 1.** *Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1),(2) выполнено предположение 1. Предположим, что существует момент времени* $\tau_1(z_0(\cdot) > 0$ *такой, что либо* $\xi[\tau, z_0(\cdot)] \in M_1$, *либо* $\xi[\tau, z_0(\cdot)] \notin M_1$, *и для всех допустимых управлений* $v(\cdot)$ *выполняется неравенство*

$$1 - \inf\Big\{\int\limits_0^{\tau_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))dt : \int\limits_0^{\tau_1} \|v(\cdot)\|^2 dt \le 1\Big\} \le 0.$$

*Тогда в игре (1) при ограничениях (2) возможно завершение преследования за время* $T = \tau_1(z_0(\cdot))$.

Пусть теперь терминальное множество $M$ является линейным подпространством $R^n$. Зафиксируем некоторое начальное положение $z_0(\cdot)$. Введем многозначное отображение вида

$$\overset{\wedge}{W}(t, \tau, v) = \Big\{\lambda \in R : \lambda\xi[\tau, z_0(\cdot)] + \pi K(\tau - t)Dv \in \sqrt{\lambda(1-\alpha) + \alpha\|v(\cdot)\|^2}\pi K(\tau - t)CU\Big\},$$

где $0 \le t < \infty$, $0 \le \tau < \infty$, $v \in R^q$. Теперь определим разрешающую функцию следующим образом:

$$\lambda(t, \tau, v) = \sup \overset{\wedge}{W}(t, \tau, v).$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1),(2) выполнено предположение 1. Предположим, что существует момент времени* $\tau_2(z_0(\cdot) > 0$ *такой, что либо* $\xi[\tau, z_0(\cdot)] \ne 0$, *либо* $\xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0$, *и для всех допустимых управлений* $v(\cdot)$ *выполняется неравенство*

$$1 - \inf\Big\{\int\limits_0^{\tau_2} \lambda(t, \tau_2, v(t))dt : \int\limits_0^{\tau_2} \|v(\cdot)\|^2 dt \le 1\Big\} \le 0.$$

*Тогда в игре (1) при ограничениях (2) возможно завершение преследования за время* $T = \tau_2(z_0(\cdot))$.

Доказаельства теорем 1,2 праводятся без каких-либо существенных изменений по схеме доказательства теоремы работы [3].

*ЛИТЕРАТУРА*

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально - разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 254 с.

2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.:Наука. Том 2. 1998. 576 с.

3. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Тр. ИММ УрО РАН, 2009,том 15, № 4,С.290-301.

# О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа


**М.Мамажонов, Х.М.Шерматова, М.Р.Мирзавалиев**

*доцент КГПИ*
*преподаватель ФерГУ*
*магистрант КГПИ*
bek84-08@mail.ru, hilola-1978@mail.ru


В этой статье ставится один класс краевых задач для уравнения третьего порядка параболо - гиперболического типа вида

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+\right)(Lu)=0 \qquad (1)$$

в треугольной области $G$ плоскости $xOy$, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, $G_1-$ прямоугольник с вершинами в точках $A\,(0;\,0)$, $B\,(1;\,0)$, $B_0\,(1,\,1)$, $A_0\,(0,\,1)$; $G_2-$ треугольник с вершинами в точках $A$, $B$, $C\,(1/2\,,\,-1/2\,)$; $G_3-$ треугольник с вершинами в точках $A$, $D\,(-1,\,1)$, $A_0$; $G_4-$ треугольник с вершинами в точках $B$, $E\,(2,\,1)$, $B_0$; $J_1-$ открытый отрезок с вершинами в точках $A$, $B$; $J_2-$ открытый отрезок с вершинами в точках $A$, $A_0$; $J_3-$ открытый отрезок с вершинами в точках $B$, $B_0$; $a,b,c\in R$, $a^2+b^2\neq 0$, $Lu=\begin{cases}u_{1xx}-u_{1y}, & (x,\,y)\in G_1,\\ u_{ixx}-u_{iyy}, & (x,\,y)\in G_i\ \ (i=2,\,3,4).\end{cases}$

Перед тем, как приступить к формулировке краевых задач для уравнения (1) в области $G$, запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, которые пользуются при постановке краевых задач:

Краевые условия:

$$u|_{AC}=\psi_1\,(x)\,,\quad 0\leq x\leq 1/2; \qquad (2)$$

$$u|_{BC}=\psi_1\,(x)\,,\quad 1/2\ \leq x\leq 1; \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2\,(x)\,,\ \ 0\leq x\leq 1/2; \qquad (4)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_3\,(x)\,,\ \ 1/2\ \leq x\leq 1; \qquad (5)$$

$$u|_{DF_1}=\psi_4\,(x)\,,\ -1\leq x\leq -1/2; \qquad (6)$$

$$u|_{AF_1}=\psi_4\,(x)\,,\ -1/2\ \leq x\leq 0; \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AD}=\psi_5\,(x)\,,\ \ -1\leq x\leq 0; \qquad (8)$$

$$u|_{BF_2}=\psi_6\,(x)\,,\ \ 1\leq x\leq 3/2; \qquad (9)$$

$$u|_{EF_2}=\psi_6\,(x)\,,\ \ 3/2\ \leq x\leq 2; \qquad (10)$$

$$u|_{A_0D}=f_1\,(x)\,,\ \ -1\leq x\leq 0; \qquad (11)$$

$$u|_{B_0E} = f_3(x), \ \ 1 \le x \le 2; \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BE} = \psi_7(x), \ \ 1 \le x \le 2; \tag{13}$$

$$u_y|_{A_0D} = f_2(x), \ \ -1 \le x \le 0; \tag{14}$$

$$u_y|_{B_0E} = f_4(x), \ \ 1 \le x \le 2; \tag{15}$$

Условия склеивания:

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau_1(x), \ \ 0 \le x \le 1; \tag{16}$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = \nu_1(x), \ \ 0 \le x \le 1; \tag{17}$$

$$u_{yy}(x, +0) = u_{yy}(x, -0) = \mu_1(x), \ \ 0 < x < 1; \tag{18}$$

$$u(+0, y) = u(-0, y) = \tau_2(y), \ \ 0 \le y \le 1; \tag{19}$$

$$u_x(+0, y) = u_x(-0, y) = \nu_2(y), \ \ 0 \le y \le 1; \tag{20}$$

$$u_{xx}(+0, y) = u_{xx}(-0, y) = \mu_2(y), \ \ 0 < y < 1; \tag{21}$$

$$u(1-0, y) = u(1+0, y) = \tau_3(y), \ \ 0 \le y \le 1; \tag{22}$$

$$u_x(1-0, y) = u_x(1+0, y) = \nu_3(y), \ \ 0 \le y \le 1; \tag{23}$$

$$u_{xx}(1-0, y) = u_{xx}(1+0, y) = \mu_3(y), \ \ 0 < y < 1. \tag{24}$$

Здесь $\psi_i\left(i=\overline{1,7}\right), f_j\ \left(j=\overline{1,4}\right)$ - заданные достаточно гладкие функции, а $\tau_i,\ \nu_i,\ \mu_i\ (i=1,\,2,3)$ - неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=0$ или $x-y=1$, $F_1(-1/2\ ,1/2\ )$, $F_2(3/2\ ,1/2\ )$.

Постановка краевых задач для уравнения (1) в области $G$ существенно зависит от значения углового коэффициента $\gamma = b/a$ характеристики оператора $a\left({}^{\partial}/_{\partial x}\right) + b\left({}^{\partial}/_{\partial y}\right)$, то есть от коэффициентов $a$ и $b$. Учитывая это обстоятельство, для уравнения (1) ставится следующая задача:

**Задача-1.** Требуется найти функцию $u(x, y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\backslash J_1\backslash J_2\backslash J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем $u_x$ и $u_y$ - непрерывны в $G$ вплоть до части границы области $G$, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\backslash J_1\backslash J_2\backslash J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа, которые указаны в следующей таблице:

| N | Значения $\gamma$ | Краевые условия | Условия склеивания |
|---|---|---|---|
| 1. | $\gamma = 0$ ($a \neq 0$, $b = 0$) | (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15) Всего: 24 таких групп условий. | (16), (17), (19)-(24) |
| 2. | $\gamma = \infty$ ($a = 0$, $b \neq 0$) | (2), (4), (5), (6), (8), (10), (11), (12), (13) Всего: 18 таких групп условий. | (16)-(20), (22), (23) |
| 3. | а) $0 < \gamma < 1$ | (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15) Всего: 6 таких групп условий. | (16)-(24) |
| | б) $\gamma = 1$ $(a = b)$ | (2), (4), (6), (8), (9), (11), (12) или (2), (4), (7), (8), (9), (11), (12) или (2), (4), (8), (9), (11), (12), (14). | (16) - (24) |
| 4. | $1 < \gamma < +\infty$ | (2), (4), (5), (6), (8), (10), (11), (12), (13) Всего: 18 таких групп условий | (16)-(24) |
| 5. | а) $-1 < \gamma < 0$ | (2), (5), (10), (11), (12), (13), (14) Всего: 6 таких групп условий. | (16)-(24) |
| | б) $\gamma = -1$ $(a = -b)$ | (3), (5), (10), (11), (12), (13), (14) или (3), (5), (9), (11), (12), (13), (14) или (3), (5), (11), (12), (13), (14), (15). | (16) - (24) |
| 6. | $-\infty < \gamma < -1$ | (2), (4), (5), (6), (8), (10), (11), (12), (13) Всего: 18 таких групп условий. | (16)-(24) |

Здесь мы укажем решение поставленной задачи лищь в случае 1 с группой условий (2), (4), (7), (8), (11), (12), (15). В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + c\right)(Lu) = 0 \tag{$1'$}$$

**Теорема.** Если $\psi_1 \in C^3\,[0,\,1/2\,]$, $\psi_2 \in C^2\,[0,\,1/2\,]$, $\psi_3 \in C^3\,[-1/2\,,0]$, $\psi_5 \in C^2\,[-1,\,0]$, $f_1 \in C^3\,[-1,\,0]$, $f_3 \in C^3\,[1,\,2]$, $f_4 \in C^2\,[1,\,2]$, причем выполняются условия согласования $\psi_3\,(0) = \psi_1\,(0)$, $\psi_5\,(0) = \psi_2\,(0)$, то задача-1 допускает единственное решение в случае 1 с условиями (2), (4), (7), (8), (11), (12), (15).

**Доказательство.** Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение ($1'$) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1\,(y)\,e^{-\frac{c}{a}x},\ \ (x,\,y) \in G_1, \tag{25}$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_i\,(y)\,e^{-\frac{c}{a}x},\ \ (x,\,y) \in G_i\ \ (i = 2, 3, 4), \tag{26}$$

где введено обозначение $u\,(x,\,y) = u_i\,(x,\,y)$, $(x,\,y) \in G_i$ $\left(i = \overline{1,\,4}\right)$, причем $\omega_i\,(y)$ $\left(i = \overline{1,\,4}\right)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Сначала рассмотрим задачу в области $G_2$. Решение уравнения (26) $(i = 2)$, удовлетворяющее условиям (16) и (17) имеет вид

$$u_2\,(x,\,y) = \frac{1}{2}\left[\tau_1\,(x+y) + \tau_1\,(x-y)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu_1\,(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y} \omega_2\,(\eta)\,d\eta \int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \exp\left(-\frac{c}{a}\xi\right)d\xi. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (4), находим

$$\omega_2\,(y) = \sqrt{2}\psi'_2\,(-y)\,e^{-\frac{c}{a}y},\ -\frac{1}{2} \leq y \leq 0.$$

Затем, подставляя (27) в (2) после некоторых выкладок, имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau'_1(x) - \nu_1(x) = \alpha_1(x), \ \ 0 \le x \le 1, \tag{28}$$

где $\alpha_1(x)$ - известная функция.

Переходя в (25) к пределу при $y \to 0$, имеем второе соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau''_1(x) - \nu_1(x) = \omega_1(0)\, e^{-\frac{c}{a}x}, \ \ 0 \le x \le 1, \tag{29}$$

где $\omega_1(0)$ – неизвестная пока постоянная.

Исключая из (28) и (29) функцию $\nu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 0 до $x$, приходим к уравнению

$$\tau'_1(x) - \tau_1(x) = \alpha_2(x) + \omega_1(0)\,\alpha_3(x) + k_1, \tag{31}$$

где $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$ - известные функции, а $k_1$ - неизвестная пока постоянная.

Теперь переходим в область $G_3$. Методом продолжения после длинных вычислений и преобразований соотношение

$$\nu_2(y) = -\tau'_{22}(y) + \beta_1(y), \ \ 0 \le y \le 1, \tag{32}$$

где $\beta_1(y)$ - известная функция.

Решая уравнение (31) при условиях

$$\tau_1(0) = \psi_1(0), \tau'_1(0) = \frac{1}{2}\psi'_1(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0), \tau''_1(0) = \frac{1}{2}\left[\omega_2(0) + \alpha'_1(0) + \beta'_1(0)\right],$$

находим

$$\tau_1(x) = \int_0^x e^{x-t}\alpha_2(t)\,dt + \omega_1(0)\int_0^x e^{x-t}\alpha_3(t)\,dt + k_1(e^x - 1) + k_2,$$

где $k_1, \ k_2, \omega_1(0)$ - уже известные постоянные.

Аналогично в область $G_3$, переходя в область $G_4$, методом продолжения после длинных преобразований и вычислений имеем соотношение

$$\nu_3(y) = \tau'_2(y)\,e^{-\frac{c}{a}} + \frac{c-a}{a}\int_0^y \tau'_2(\eta)\,e^{-\frac{c}{a}(\eta+1-y)}d\eta - \frac{c-a}{a}\int_0^y \tau'_3(\eta)\,e^{-\frac{c}{a}(\eta-y)}d\eta + \beta_4(y). \tag{33}$$

Теперь переходим в область $G_1$. Записывая решение уравнения (25), удовлетворяющего условиям (16), (19), (22) и дифференцируя это решение по $x$ и устремляя $x$ к нулю и к единице в силу (32), (33), после длинных вычислений и преобразований, получим систему двух интегральных уравнений типа Абеля относительно $\tau''_2(y)$ и $\tau'_3(y)$. Применяя к этим уравнениям обращение Абеля, после длинных вычислений, приходим к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций $\tau''_2(y)$ и $\tau'_3(y)$. Решая эту систему, находим функции $\tau''_2(y)$ и $\tau'_3(y)$ и тем самым, и функции $\nu_2(y)$, $\nu_3(y)$, $\omega_1(y)$, $\omega_4(y)$, $u_1(x,y)$, $u_3(x,y)$ и $u_4(x,y)$.

### Литература

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. Итоги науки (2). Физ.-мат. науки. М, 1959, 164 с.

2. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.

3. *Джураев Т.Д., Мамажанов М.* Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференциальные уравнения, 1986, т.22, N 1,с.25-31.

4. *Мамажанов М., Шерматова Х,М., Мукадасов Х.* Постановка и метод решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа. Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. науки. 2014. N 1 (8). с.7-13.

5. *Мамажанов М., Шерматова Х.М.* Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Вестник КРАУНЦ, Физ.мат. науки, 2017, N1 (17), стр. 14-21.


# Обратная задача по определению плотности тепловых источников для параболических уравнений с эллиптическим оператором произвольного порядка


**Мухиддинова А.Т.**

*Институт Математики АнРУз, г. Ташкент 100170, ул. Университет 4б, Узбекистан*

e-mail: oqila1992@mail.ru



В настоящей работе исследуется обратная задача для параболических уравнений, эллиптическая часть которого является оператором любого порядка, определенный в произвольной ограниченной области с достаточно гладкой границей. Методом Фурье доказаны теоремы о существования и единственности классического решения начально-краевой задачи и неизвестной правой части уравнения.


1. Приведем необходимые определения.

Пусть $A(D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$-произвольный положительный формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка $m = 2k$ с достаточно гладкими коэффициентами $a_\alpha(x)$ в произвольной $N$-мерной области $\Omega$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$-мультииндекс и $D = (D_1, D_2, ..., D_N)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Применение метода Фурье к исследуемым задачам приводит нас к рассмотрению следующей спектральной задачи:

$$A(x, D)\nu(x) = \lambda\nu(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$B_j\nu(x) = \sum_{|\alpha|\leq m_j} b_{\alpha,j}(x)D^\alpha\nu(x) = 0, \ 0 \leq m_j \leq m-1, \ j = 1, 2, ..., k; \quad x \in \ \partial\Omega. \tag{1.2}$$

В работе С. Агмона [1] найдены достаточные условия на границу $\partial\Omega$ области $\Omega$ и на коэффициенты операторов $A$ и $B_j$, обеспечивающие компактность обратного оператора, или, что тоже самое, существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$, системы собственных функций $\{\nu_k(x)\}$ и счетного множества положительных собственных значений $\lambda_k$ задачи (1.1)-(1.2). Эти условия будем называть условием $(A)$.

Пусть $\tau$-произвольное действительное число. В пространстве $L_2(\Omega)$ введем оператор $\hat{A}^\tau$, действующий по правилу

$$\hat{A}^\tau g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^\tau g_n \nu_n(x), \quad g_n = (g, \nu_n).$$

Очевидно, данный оператор $\hat{A}^\tau$, с областью определения

$$D(\hat{A}^\tau) = \left\{ g \in L_2(\Omega) : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{2\tau} |g_n|^2 < \infty \right\},$$

является самосопряженным. Если через $A$ обозначить оператор в $L_2(\Omega)$ действующий по правилу $Ag(x) = A(x, D)g(x)$ и с областью определения

$$D(A) = \left\{ g \in C^m(\bar{\Omega} : B_j g(x) = 0, \ j = 1, ..., k, \ x \in \partial\Omega) \right\}$$

то оператор $\hat{A} = \hat{A}^1$ является самосопряженным расширением в $L_2(\Omega)$ оператора $A$.

2. Рассмотрим обратную задачу для параболического уравнения:

$$u_t(x,t) + A(x,D)u(x,t) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \le T, \tag{2.1}$$

в котором функция $f(x)$, характеризующая действие источников тепла, зависит только от $x$. Если эта функция известна, то для того, чтобы найти однозначно распределение температуры $u(x,t)$, необходимо задавать дополнительные условия. Например, можно задавать начальное условие

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.2}$$

и граничные условия

$$B_j u(x,t) = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{\alpha,j}(x) D^\alpha u(x,t) = 0, \quad 0 \le m_j \le m-1, \quad j = 1, 2, ..., l; \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.3}$$

где $\varphi(x)$ и коэффициенты $b_{\alpha,j}(x)$ - заданные функции. В результате получим прямую начально-краевую задачу.

В данной работе рассмотрим обратную задачу. Ее можно интерпретировать следующим образом. Найти, наряду с решением $u(x,t)$ начально-краевой задачи, плотность тепловых источников $f(x)$ так, чтобы в момент времени $T$ распределение температуры достигло заданного уровня:

$$u(x,T) = \Psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{2.4}$$

Обратные задачи такого типа возникают при исследовании теплофизических и ряда других процессов.

Сформулируем основные результаты работы относительно обратной задачи.

**Теорема 1.** (О единственности). Пусть функции $\varphi(x),\ \psi(x)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{\Omega}$. Тогда может существовать лишь одно классическое решение $\{u(x,t),\ f(x)\}$ обратной задачи (2.1)-(2.3), (2.4).

**Теорема 2.** (О существовании). Пусть $\varphi(x) \in D(\hat{A}^{\tau}),\ \psi(x) \in D(\hat{A}^{\tau+1})$ где $\tau > \frac{N}{2m}$. Тогда существует решение $\{u(x,t),\ f(x)\}$ обратной задачи (2.1)-(2.2), (2.4).

Отметим, что аналогичная обратная задача для гиперболических уравнений изучена в работе [2].

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*


1. *Agmon S.*: On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure and Appl. Math., 15 119 (1962)

2. *Р.Р. Ашуров, А.Т. Мухиддинова.* Обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии. Дифференциальные уравнения, 2020, т. 56, № 12, 1596-1609.


# Оценка множество предельных точек траекторий


**Машарипов.С.И.**

*Национальный Университет Узбекистан*

Sirojiddinmasharipov1995@gmail.com


Каждой динамической системе Вольтерровского типа:

$$V : x'_k = x_k \cdot (1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i)$$

Где $a_{ki} = -a_{ik}$, $|a_{ki}| \leq 1$ поставим в соответствие некоторый полный ориентированный граф $G_m$ с m вершинами. Во избежание частных случае, предполагаем: $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$ на ребрах $G_m$ зададим направления следующим образом: ребро соединяющие вершины $k$ и $i$ направлено от $k$ той вершины к $i$-той, если $a_{ki} < 0$ и имеет обратное направление, если $a_{ki} > 0$.Поскольку $a_{ki} = -a_{ik}$ и $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$, то направления на всех ребрах графа $G_m$ однозначно определяется заданием динамической системы.Полученный полный ориентированный граф называется турниром и обозначается через $T_m$.

**Определения**. Турнир называется сильным, если из любой вершины можно попасть в любую другую вершину с учетом направления.

**Определения**. Сильная компонента турнира - максимальный сильный под турнир данного турнира.

**Определения**. Турнир содержащий в качестве вершин сильные компоненты турнира $T_m$ и с направлением на ребрах индуцированными из турнира $T_m$ называется фактор-турниром турнира $T_m$ и обозначается через $\widetilde{T_m}$.

Фактор - турнир $\widetilde{T_m}$ любого турнира $T_m$ является транзитивным. Сток транзитивного турнира это вершина, из которой нельзя попасть ни в какую другую с учетом направления на ребрах.

Например, если динамическая система имеет вид:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \cdot (1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6)\\
x_2' &= x_2 \cdot (1 - a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6)\\
x_3' &= x_3 \cdot (1 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6)\\
x_4' &= x_4 \cdot (1 - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3 + a_{45}x_5 + a_{16}x_6)\\
x_5' &= x_5 \cdot (1 - a_{51}x_1 - a_{52}x_2 - a_{53}x_3 - a_{54}x_4 + a_{56}x_6)\\
x_6' &= x_6 \cdot (1 - a_{61}x_1 - a_{62}x_2 - a_{63}x_3 - a_{64}x_4 - a_{65}x_5)
\end{aligned}
$$

В этом случае для любой начальной точки $x^0 \in intS^5$ траектория сходится к вершине $M_1 = (1,0,0,0,0,0)$. Турнир $T_6$ транзитивен. Поэтому фактор - турнир $\widetilde{T_m}$ совпадает с сами турниром $T_6$. Стоком $\widetilde{T_m}$ является вершина 1. Согласно теореме [1] при $i > 1$ имеем $x_i^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$, т.е. $x_2^{(n)} + x_3^{(n)} + x_4^{(n)} + x_5^{(n)} + x_6^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$. Тогда $x_1^{(n)} \to 1$ $(n \to \infty)$. Поэтому любая траектория сходится к вершине $M_1 = (1,0,0,0,0,0)$ симплекса $S^5$.

### Литература


1. *Курганов.К.А.* Диссертация,1993 год, стр123.
2. *Ganikhodzhaev.R.N.* Doctoral thesis (rehabilitation degree) 1995 p229.


## О геометрии субмерсий


**Нарманов А.Я., Зойидов А.Н.**

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*

e-mail narmanov@yandex.ru, e-mail zoyid.azam.math@gmail.com


Дифференцируемые отображения максимального ранга играют важную роль во всех разделах математики, в частности в римановой геометрии. Одним из важных классов дифференцируемых отображений максимального ранга состоит из погружений.

Погружения интенсивно изучались с самого зарождения римановой геометрии. Первыми простыми примерами римановых многообразий являются поверхности, вложенные в трехмерное евклидово пространство. Поэтому дифференциальная геометрия изометричных погружений и вложений хорошо изучена и достаточно представлена во многих учебниках по дифференциальной геометрии.

Двойственное понятие субмерсии сформировалось относительно недавно, во второй половине двадцатого века. Геометрия субмерсий впервые изложена в работах [5], [6], [7]. Изучение геометрии субмерсий, в частности римановых субмерсий оказалось очень плодотворным в силу того, что римановы субмерсии имеют приложения во всех разделах современной римановой геометрии.

Рассмотрим некоторе множество $D \subset V(M)$, которое содержит конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля $X$, проходящую через точку $x$ при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x) \subset R$, которая в общем случае зависит от поля $X$, и от начальной точки $x$. В дальнейшем, всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$.

**Определение 1.** Орбита $L(x)$ семейства $D$ векторных полей, проходящая через точку $x$, определяется как множество таких точек $y$ из $M$, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, ..., t_k$ и векторные поля $X_1, X_2, ..., X_k$ из $D$ (где $k-$произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(...(X_1^{t_1}(x))...)).$$

Гладкость в данной работе означает гладкость класса $C^\infty$.

**Определение 2.** Дифференцируемое отображение $\pi : M \to B$ максимального ранга, где $B$-гладкое риманово многообразие размерности $m$, называется субмерсией при $n > m$.

По теореме о ранге дифференцируемой функции для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $\pi^{-1}(p)$ является подмногообразием размерности $k = n - m$. Таким образом субмерсия $\pi : M \to B$ порождает слоение $F$ размерности $k = n - m$ на многообразии $M$, слоями которого являются компоненты связности подмногообразий Если для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $L_q = \pi^{-1}(q)$ является связным многообразием, то слоями слоения являются поверхности уровня $L_q = \pi^{-1}(q)$.

В общем случае поверхности уровня не является связными даже при $\pi : M \to R$ [8].

Известно, что для римановых субмерсий на полных римановых многообразий для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $L_q = \pi^{-1}(q)$ является связным многообразием [9].

Напомним опредление римановых субмерсий.

Пусть $P : x \to P(x)$, где $x \in M$, $P(x) \subset T_xM$,- вполне интегрируемое распределение, максимальными подмногообразиями которого являются слои слоения $F$, $H : x \to H(x)$ - распределение, которое является ортогональным дополнением $P$, т.е. $T_xM = P(x) \oplus H(x)$ для всех $x \in M$. Если для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $L_q = \pi^{-1}(q)$ является связным многообразием, то слоями слоения являются поверхности уровня $L_q = \pi^{-1}(q)$.

Каждое векторное поле $X$ можно представить в виде $X = X^v + X^h$, где $X^v, X^h-$ ортогональные проекции $X$ на $P$, $H$ соответственно. Здесь для удобства, $P, H$ рассматриваются как подрасслоения касательного расслоения $TM$. Если $X^h = 0$, то $X$ называется вертикальным полем (оно является касательным к слоению),а если $X^v = 0$, то $X$ называется горизонтальным полем.

**Определение 3.** Субмерсия $\pi : M \to B$ называется римановой, если ее дифференциал $d\pi$ сохраняет длину горизонтальных векторов.

Изучению геометрии римановых субмерсий посвящены многочисленные исследования ([2]-[7]), в частности в работе [5] получены фундаментальные уравнения римановой субмерсии.

В этой работе мы построим пример субмерсии на полном многообразии над орбитой векторных полей, для которой каждый прообраз имеет бесконечно много компонент связности.

Рассмотрим семейство , состоящее из следующих векторных полей

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, X_2 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, X_3 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Нетрудно проверить, что орбита этого семейства для каждой точки семейства совпадает со всей плоскостью.

Полагая
$$\pi(t_1,t_2,t_3) = X_3^{t_3}(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)))$$
определим следующее отображение
$$\pi : R^3 \to R^2,$$
где $O-$начало координат в $R^2$.

Отображение $\pi$ имеет вид
$$\pi(t_1,t_2,t_3) = \{t_1 e^{t_3} cost_2, t_1 e^{t_3} sint_2\}.$$

Нетрудные показать, что ранг отображения $\pi : R^3 \to R^2$ в каждой точке $t^0 = (t_1,t_2,t_3)$ равен 2. Поэтому отображение
$$\pi : R^3 \to R^2$$
является субмерсией.

Для каждой точки $p = (x_0,y_0) \in R^2$ полный прообраз задается уравнением $\pi^{-1}(p)$ имеет вид
$$\pi^{-1}(p) = L_p(u) = \{\frac{1}{u}\frac{x_0^2+y_0^2}{x_0}, 2\arctan\frac{x_0}{y_0} + 2\pi n, u\}.$$
Таким образом на каждой плоскости
$$t_2 = 2\arctan\frac{x_0}{y_0} + 2\pi n$$
имеется две компонента связности прообраза точки $p = (x_0,y_0) \in R^2$. Компоненты связности на каждой плосоксти
$$t_2 = 2\arctan\frac{x_0}{y_0} + 2\pi n$$
определяют гиперболу.

## Литература


1. *Ю.Д.Бураго, В.А.Залгаллер. Введение в Риманову геометрию.* Санкт-Петербург. Наука. 1994г. 318 стр.

2. *Нарманов А.Я., Саитова С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга. Дифференциальные уравнения. 2014,том 50, N 12,с.1582-1589.

3. *Нарманов А.Я., Абдишукурова Г.* О геометрии римановых субмер-сий. Узбекский математический журнал. 2016, N 2,с.

4.*Нарманов А.Я., Норжигитов Ш.* О геометрии многообразий неотрицательной кривизны. Узбекский математический журнал, 2014, N 3,83-88

5. *O'Neil B.*, The Fundamental equations of a submersions. Michigan Mathematical Journal, v.13, 1966, p. 459-469

6. *Hermann R.* A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc.11 (1960), 236-242.

7. *Reinhart B. L.* Foliated manifolds with bundle-like metrics. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 69, No. 1,1959, pp. 119-132

8. *Нарманов А.Я.,Шарапов С.*, On the level surfaces of submersions, Uzbek Matematical Journal, 2004, N 2, 62-66

9. *A. Ya. Narmanov,A. Boyturaev*, "On the class of submersions", GEOMETRY and Foliations. (Ryukoku University, Fukakusa, Kyoto, Japan, September 10-19, 2003), 2003, 361-367

# О геометрии векторных полей

**Нарманов А., Шамсиев Ж.**

*Национальный университет Узбекистана, Ташкент, 100174, Узбекистан*

narmanov@yandex.ru,jahongirshamsiyev455@gmail.com

Пусть $M-$ гладкое многообразие размерности $n$, $V(M)-$ множество всех гладких векторных полей, определенных на $M$.

Обозначим через $[X,Y]$ скобку Ли векторных полей $X,Y\in V(M)$. Относительно скобки Ли множество $V(M)$ является алгеброй Ли.

Гладкость в данной работе означает гладкость класса $C^\infty$.

Рассмотрим множество $D\subset V(M)$, через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество $D$. Семейство $D$ может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Для точки $x\in M$ через $t\to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля $X$, проходящую через точку $x$ при $t=0$. Отображение $t\to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)\subset R$, которая в общем случае зависит от поля $X$, и от начальной точки $x$.

В дальнейшем, всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t\in I(x)$.

**Определение.** Орбита $L(x)$ семейства $D$ векторных полей, проходящая через точку $x$, определяется как множество таких точек $y$ из $M$, для которых существуют действительные числа $t_1,t_2,\ldots,t_k$ и векторные поля $X_1X_2,\ldots,X_k$ из $D$ (где $k-$ произвольное натуральное число) такие, что

$$y=X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(...(X_1^{t_1}(x))...)).$$

Изучению структуры множества достижимости и орбиты систем гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с ее важностью в теории оптимального управления, динамических системах, в геометрии и в теории слоений [1],[3],[4].

В работах [3],[4] доказано, что каждая орбита семейства векторных полей (класса $C^r, r\geq 1$) с топологией Суссмана обладает дифференциальной структурой, по отношению которым она является гладким многообразием класса $C^r$, гладко погруженным в $M$.

Известно, что разбиение многообразия $M$ на орбиты семейства $D$ является сингулярным слоением [3].

Если размерности всех орбит одинаковы, то разбиение $M$ на орбиты $D$ является регулярным слоением.

Обозначим через $A(D)$ наименьшую подалгебру алгебры Ли $V(M)$ ,содержащую множество $D$. Рассмотрим подпространство $A_x(D)=\{X(x):X\in A(D)\}$ касательного пространства $T_xM$ в точке $x$ многообразия $M$. Известно, что для размерности орбиты имеет место $dimA_x(D)\leq dimL(x)$ [4].

Пусть $M=R^3(x_1,x_2,x_3)$, где $(x_1,x_2,x_3)-$ декартовы координаты.

Рассмотрим семейство $D$, состоящее из следующих векторных полей

$$X_1=-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, X_2=\frac{\partial}{\partial x_1}+2x_1\frac{\partial}{\partial x_3}.(1)$$

**Теорема-1.** Орбиты семейства $D$, порождают двумерное слоение, слоями которого являются эллиптические параболоиды.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3,$$

определенную в $R^3(x_1, x_2, x_3)$. Легко проверить, что функция (2) удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравненй в частных производных

$$X_1(F) = 0, X_2(F) = 0.$$

Эта система дифференциальных уравнений в частных производных в координтах имеет следующий вид

$$-x_2\frac{\partial F}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial F}{\partial x_1} + 2x_1\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0.$$

Используя этот вид системы можно проверить, что функция

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3,$$

является решением этой системы.

Поэтому каждое множество уровня

$$N_c = \{(x_1, x_2, x_3) : F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = c\}$$

функции (2) является инвариантным множеством для семейства векторных полей (1) по известной теореме [2]. Это означает, что если $p \in N_c$, то орбита $L(p)$, проходящая через точку $p$, лежит в $N_c$.

Мы докажем, что в этом случае орбита $L(p)$ совпадает с поверхностью уровня $N_c$.

Из равенства

$$X_1(F) = 0, X_2(F) = 0$$

и известных свойств скобки Ли вытекает, что для скобки Ли $[X_1, X_2]$ векторных полей $X_1, X_2$ имеет место равенство

$$[X_1, X_2](F) = 0.$$

Это означает,что подпространство $A_p(D) = \{X(p) : X \in A(D)\}$ является подпространством касательного пространства $T_pN_c$ в точке $p$ поверхности $N_c$.

Так как $dimA_p(D) = 2$, в силу того, что $dimA_p(D) \leq dimL(p)$, орбита $L(p)$ является двумерным многообразием. Отсюда вытекает,что для $p(x_1, x_2, x_3) \in N_c$ орбита $L(p)$ является открытым подмножеством двумерного многобразия $N_c$.

По определению орбиты непересекаются и поэтому поверхность $N_c$ является обьедиенением открытых подмножеств $L(p)$ . В силу связности получим, что $L(p) = N_c$.
**Теорема-1 доказана.**

**Теорема-2.** Поток векторного поля $X = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$ состоит из движений евклидова пространства, переводящие слои слоения $F$ в слои этого слоения,т.е. является подгруппой слоеного простраства $(R^3, F)$.

**Доказательство.** В связи с тем, что $V(F) = 0$, для $V = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ значение функции $F$ остается постоянной вдоль траектории векторного поля $V$. Для интегральной кривой

$$t \to X^t(x) = (X_1^t(x), X_2^t(x), \cdots, X_n^t(x), X_{n+1}^t(x)).$$

векторного поля $X$, проходящая через точку $x$ при $t = 0$. последняя координаты имеет вид $X^t_{n+1}(x) = x_{n+1} + t$. Это означает, что поток векторного поля $\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$ состоит из параллельных переносов. Следовательно, координаты точки $X^t(x)$ удовлетворяют уравнению $x_{n+1} = x_1^2 + x_2^2 + x_n) + c - t$. Отсюда следует поток векторного поля $X$ состоит из диффеоморфизмов слоеного многообразия $(F, R^{n+1})$, которое переводит каждый слой $N_c$ на слой $N_{c-t}$ этого слоения.Так как поток векторного поля $V$,состоит из вращений, поток векторного поля $\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$ состоит из параллельных переносов, поток векторного поля X состоит из движений.

### Литература


1. *Азамов А.А.,Нарманов А. Я.* О предельных множествах орбит систем векторных полей. Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, N 2, С. 257-260.

2. *Olver P. J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations.Springer,1993.

3. *Stefan P.* Accessible sets, orbits, and foliations with singularities. Proc. London Mathematical Society. 1974, v. 29, p. 694-713.

4. *Sussmann. H.* Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, p. 197-199.


# Система линейных гиперболических систем из двух уравнений с переменными коэффициентами


**Д.Э.Неъматова**

*докторант Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека*

nematova_dilfuza@mail.ru



**Аннотация.** Статья посвящена изучению смешанной задачи для одномерной линейной гиперболической систем из двух линейных гиперболических уравнений с диссипативными граничными условиями в случае переменных коэффициентов [1].

Здесь исследуется противопоточная разностная схема для численного расчета устойчивых решений смешанной задачи в случае переменных коэффициентов. Будет построен дискретный аналог функции Ляпунова и получена априорная оценка для неё, означающая экспоненциальную устойчивость численного решения. Мы приведём численные примеры демонстрирующие подтверждающих полученных теоретических результатов для систем из двух линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами.


**Постановка задачи**

Рассмотрим гиперболическую систему двух линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} + a_1(x)\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - a_2(x)\frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \qquad t \in [0, +\infty), \quad x \in [0, L], \;\; a_1(x) > 0 > -a_2(x),$$

с граничными условиями при $x = 0$:

$$v_1(t, 0) = rv_2(t, 0),$$

и при $x = L$ :

$$v_2(t, L) = s v_1(t, L),$$

где $s$ и $r$ - постоянные вещественные коэффициенты.
и с начальными данными при $t = 0$

$$v_1(0, x) = v_{1o}(x), \qquad v_2(0, x) = v_{2o}(x)$$

**Противопоточная разностная схема**
Исследуем следующую противопоточную разностную схему

$$\begin{cases} (v_1)_j^{\kappa+1} = (v_1)_j^{\kappa} - (a_1)_j \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (v_1)_j^{\kappa} - (v_1)_{j-1}^{\kappa} \right], \quad j = 1, \ldots, J; \\ (v_2)_j^{\kappa+1} = (v_2)_j^{\kappa} - (a_2)_j \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (v_2)_j^{\kappa} - (v_2)_{j+1}^{\kappa} \right], \ j = 0, \ldots, J-1, \end{cases} \quad \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K} - 1. \tag{1}$$

Начальные условия (1) аппроксимируются следующим образом:

$$(v_1)_j^0 = (v_{10})_j, \quad (v_2)_j^0 = (v_{20})_j; \ \ j = 0, \ldots, J. \tag{2}$$

Граничные условия (2)- (3) аппроксимируются следующим способом:

$$(v_1)_0^{\kappa} = r\,(v_2)_0^{\kappa}, \quad (v_2)_J^{\kappa} = s\,(v_1)_J^{\kappa}, \quad \kappa = 1, \ldots, \mathrm{K}; \qquad \forall t > 0 \tag{3}$$

Предположим, что шаги разностной сетки удовлетворяют условию Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{1 \le j \le J} \left| (a_1)_j, (a_2)_j \right| \le 1.$$

А теперь исследуем вопрос об экспоненциальной устойчивости численного решения разностной задачи (1)-(3). Сперва дадим определение экспонециальной устойчивости численного решения разностной задачи.
**Теорема.** Пусть $T > 0$. Если шаги разностной сетки удовлетворяют условию КФЛ

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{1 \le j \le J} \left| (a_1)_j, \ (a_2)_j \right| \le 1$$

и параметры граничных условий (3) $r, \ s$ подчиняются неравенству $\rho_2(R) < 1$, тогда численное решение $v_j^{\kappa} = \left( (v_1)_j^{\kappa}, \ (v_2)_j^{\kappa} \right)^T$ разностной начально краевой задачи (1)-(3) экспоненциально устойчиво в $\mathrm{L}^2$-норме.
$\rho_2(R) < 1, \quad$ где $\ R = \begin{pmatrix} 0 & s \\ r & 0 \end{pmatrix}$.
Поскольку по предположению $\rho_2(R) < 1$, существуют строго положительно определенные матрицы $D_0, \ D_1$ размерности соответственно $m$ и $n - m$ такие, что
$\|\Delta R \Delta^{-1}\| < 1, \ $ где $\Delta \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{diag}\{D_0, \ D_1\}$

**Пример численного расчета**

В области $G = \{(x, t) : \ 0 \le x \le l; \ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую систему гиперболических уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} + x^3 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - x^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} v_1(0,t) = \frac{1}{2}v_2(0,t), \\ v_2(l,t) = \frac{1}{2}v_1(l,t). \end{cases}$$

Здесь $l$, $T$-некторые положительные константы.
Итак из граничных условий получим $s = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$. Проверим условия устойчивости в теоремы. В качестве $d_1$, $d_2$ берём значения $d_1 = 2 - \sqrt{3}$, $d_2 = 1$. Тогда очевидно, что

$$\Delta R \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & s \\ r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1/_{d_1} & 0 \\ 0 & {}^1/_{d_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & {}^1/_2 \\ {}^1/_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1/_{(2-\sqrt{3})} & 0 \\ 0 & {}^1/_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2(2-\sqrt{3})} & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\|\Delta R \Delta^{-1}\right\| = 0.189$$

Итак $\|\Delta R \Delta^{-1}\| < 1$, следовательно $\rho_2(R) < 1$.
В качестве исходных данных берём следующие значения параметров задачи

$$a_1 = x^3,\ a_2 = x^2,\ \ l = 1,\ \ T = 1,\ \ v_{10}(x) = -x^3,\ v_{20}(x) = x^3,\ \ r = 0.5,\ \ s = 0.5.$$

В качестве параметров разностной сетки заданы следующие их значения:

$$J = 900, \quad K = 1000, \quad \Delta x = \frac{1}{J}, \quad \Delta t = \frac{1}{K}$$

Тогда очевидно, что условие КФЛ выполняется

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{1 \le j \le J} \left[ (a_1)_j, (a_2)_j \right] = 0.9 \le 1$$

выполняется. Условие теоремы на параметры граничных условий (3) $r, s$:

$$|rs| = 0.25 < 1$$

также выполяется. Отсюда следует, что согласно теореме численное решение $v_j^\kappa = \left((v_1)_j^\kappa,\ (v_2)_j^\kappa\right)^T$ разностной начально краевой задачи (1)-(3) экспоненциально устойчиво в $L^2$-норме (см. Рис.1). Ниже приведен график и таблица значения $L^2$-нормы численного решения относительно $k$, подтверждающий экспоненциальную устойчивость численного решения.

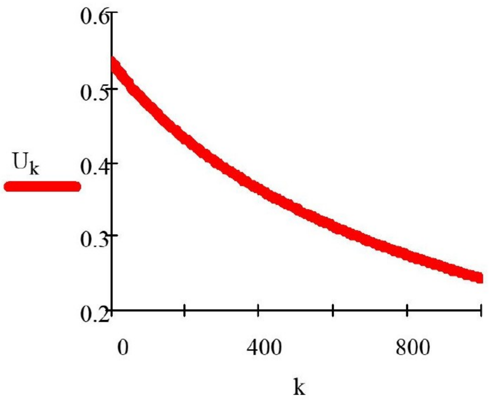



**Рис.1.** Экспонециальная устойчивость

Таблица 2.1: Экспонециальная устойчивость.

| № | $L^2$-Норма | Значение |
|---|---|---|
| 1 | $V^0$ | 0.535 |
| 2 | $V^{100}$ | 0.476 |
| 3 | $V^{200}$ | 0.431 |
| 4 | $V^{300}$ | 0.395 |
| 5 | $V^{400}$ | 0.364 |
| 6 | $V^{600}$ | 0.314 |
| 7 | $V^{700}$ | 0.294 |

**Литература**

1. *Aloev, R.D., Eshkuvatov, Z.K., Davlatov, Sh.O., Nik Long, N.M.A.,* Equations of mathematical physics, Nauka, 1979

2. *Aloev R.D., Davlatov Sh.O., Eshkuvatov Z. K., Nik Long N.M.A.,* Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients, Malaysian Journal of Mathematical Sciences (MJMS), 10(S), 2016, pp. 49-60.

3. *Aloev R.D., Khudoyberganov M.U., Blokhin A.M.,* Construction and research of adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems, Numerical Algebra, Control and Optimization. Vol.8, 2018. pp. 287-299.

4. *Aloev R.D., Eshkuvatov Z.K., Khudoyberganov M.U., Nematova D.E.* The Difference Splitting Scheme for Hyperbolic Systems with Variable Coefficients, Mathematics and Statistics, Vol. 7, 2019, pp. 82-89 DOI: 10.13189/ms.2019.070305

# Об одной задаче интегральной геометрии в трехмерном пространстве с весовой функции специального вида

**Очилов З.Х.**

*Самаркандский государственный университет*

zarifjonochilov@mail.ru

Пусть $u(x)-$ достаточно гладкая функция, определенная в $R^n$ и $\{S(y)\}$ $-$ семейство кусочно $-$ гладких многообразий в этом пространстве, зависящих от параметра $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Пусть, далее, от функции $u(x)$ известны интегралы

$$\int\limits_{S(y)} g(x,y)u(x)ds = f(y),$$

где $g(x,y)-$ заданная весовая функция, $ds-$ элемент меры на $S(y)$. Требуется по функции $f(y)$ восстановить функцию $u(x)$.

Задачами интегральной геометрии вольтеровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений Вольтера в смысле определения, данного М.М. Лаврентьевым [1].

В своей работе [1] М.М. Лаврентьев показал единственность решения сильно некорректной задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с возмущением достаточно общего вида.

Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтеровского типа с весовыми функциями, исследовались в работах [2-6]. Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым с особенностями вершинах получены в работах [7-14].

Введем обозначения

$$(x,y,z) \in R^3, (\xi,\eta,\zeta) \in R^3, \lambda \in R^1, \mu \in R^1, p \in R^1,$$

$$\Omega = \{(x,y,z): \ \ x\in R^1, \quad y\in R^1, \ z\in(0,h), \quad h<\infty\},$$

$$\bar{\Omega} = \{(x,y,z): \ \ x\in R^1, \quad y\in R^1, \, z\in[0,h]\}.$$

В слое $\bar{\Omega}$ рассматривается семейства конусов $S(x,y,z)$, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин $(x,y,z)\in\bar{\Omega}$ :

$$S(x,y,z) = \left\{(\xi,\eta,\zeta): (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 = (z-\zeta)^2, \quad \xi\in R, \quad \eta\in R, \quad 0\le\zeta\le z\right\}.$$

**Задача A.** Определить функцию трёх переменных $u(x,y,z)$, если для всех $(x,y,z)$ из слоя $\bar{\Omega}$ известны интегралы от функции $u(x,y,z)$ по семейство конусов $S(x,y,z)$:

$$\iint\limits_{S(x,y,z)} g\left(x-\xi,y-\eta\right)u\left(\xi,\eta,\zeta\right)ds = f\left(x,y,z\right)$$

где $g(x-\xi,y-\eta) = e^{-i\rho[\lambda(x-\xi)+\mu(y-\eta)]}-$ весовая функция.

Введем следующие функции

$$I(\lambda,\mu,p) = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{z}\rho e^{ip\rho}d\rho d\varphi,$$

$$I_1(\lambda,\mu,z-p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(z-\zeta)}\frac{dp}{p^{l+2}I(\lambda,\mu,p)},$$

$$I_2(\lambda,y-\eta,z-p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu(y-\rho\sin\phi)}\frac{I_1(\lambda,\mu,z)d\mu}{1+\mu^{n+2}},$$

$$I_3(x-\xi,y-\eta,z-p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda(x-\rho\cos\phi)}\frac{I_2(\lambda,y,z)}{1+\lambda^{m+2}}d\lambda.$$

Доказана следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть функция $f(x,y,z)$ известна для всех $(x,y,z)$ из слоя $\bar{\Omega}$. Тогда решение задачи A в классе U единственно и имеет место представление

$$u(x,y,z) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_3(x-\xi,y-\eta,z-p)\left\{\frac{\partial^{l+2}}{\partial\zeta^{l+2}}+\frac{\partial^{l+n+4}}{\partial\eta^{n+2}\partial\zeta^{l+2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{l+n+m+6}}{\partial\zeta^{l+2}\partial\eta^{n+2}\partial\xi^{m+2}}\right\}f(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta,$$

кроме того выполняется неравенство

$$||u(x,y,z)||_{L_2(\Omega)} \le C_0||f(x,y,z)||_{W_2^{m+2,n+2,l+2}(\Omega)},$$

где $C_0-$ некоторая постоянная.

## Литература

1. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. - Новосибирск: Издательство Института математики. 1999. - 702 с.

2. *Бегматов Акрам Х.* Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа // Доклады РАН. - Москва, 1996. Т. 349. - N 3. - С. 297-298.

3. *Бегматов Акрам Х.* Задачи интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // Сиб. мат. журн., 1996. Т. 37. - N 3. - С. 500-505.

4. *Бегматов Акрам Х.* Вольтерровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журн., 1997. Т. 38. - N 4. - С. 723-737.

5. *Бегматов Акрам Х.* Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершине // Доклады РАН. - Москва, 1998. Т. 358. - N 2. - С. 151-153.

6. *Бегматов Акрам Х.* Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии // Доклады РАН. - Москва, 2002. Т. 386. - N 1. - С. 1-3.

7. *Бегматов Акрам Х.,Очилов З.Х.* Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией // Доклады РАН. - Москва, 2009. 429. - N 3. - С. 295-297.

8. *Begmatov A.X., Ochilov Z.X., Muminov M.E.* The problem of integral geometry of Volterra type with a weight function of a special type// Horizon Research Publishing(HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics Vol 3, N 5. 2015. p. 113-120

9. *Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х.* Задачи интегральной геометрии вольтеровского типа с весовой функцией специального вида. Журнал Continuum: М. И. О. Россия 2017 г., N 2., С. 11-15.

10. *Бегматов А.Х., Очилов З.Х., Хусанов А.З.* Задача интегральной геометрии для семейства специальных кривых// Научный вестник СамГУ, 2019. -N 1.-С. 36-43.

11. *Бегматов А.Х., Очилов З.Х., Хусанов А.З.* Задача интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида// Научный вестник БухГУ, 2019. - N 2- С. 3-8.

12. *Бегматов А.Х., Очилов З.Х., Хусанов А.З.* Единственность и устойчивость решения задачи интегральной геометрии с возмущением// Научный вестник СамГУ, 2020. -N 1- (119), с.21- 25.

13. *Очилов З.Х.* Единственость решения задача интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида // Научный вестник СамГУ, 2020. - N 3- (121), с. 40- 46.

14. *Ochilov Z.X.* The uniqueness of solution problems of integral geometry a family of parabolas with a weight function of a special type // Uzbek Mathematical Journal, 2020, N 3, pp.107-116.

# Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом

**Рузиев М.Х.**

*Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз.*

e-mail : mruziev@mail.ru.

Рассмотрим уравнение

$$signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексной плоскости $z = x + iy$, где $D^+$ - первый квадрант плоскости, $D^-$ - конечная область четвертый квадрант плоскости, ограниченная характеристиками $OC$ и $BC$ уравнения (1) выходящими из точек $O(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком $OB$ прямой $y = 0$, $I = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$. В (1) $m, \beta_0$ - некоторые действительные числа, удовлетворяющее условиям $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Введем обозначения: $J_0 = \{(x,y) : 0 < y < \infty, x = 0\}$, $\bar{J_1} = \{(x,y) : 1 \le x < \infty, y = 0\}$, $C_0$ и $C_1$ - соответственно точки пересечения характеристик $OC$ и $BC$ с характеристикой исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I$- произвольное фиксированное число.

Пусть $p(x) \in C^1[0,c]$ - диффеоморфизм из множества точек отрезка $[0,c]$ в множество точек отрезка $[c,1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(0) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = 1 - kx$, где $k = \frac{1-c}{c}$.

**Задача B**. Найти в области $D$ функцию $u(x,y)$ со свойствами: 1)$u(x,y) \in C(\bar{D})$ где $\bar{D} = \bar{D^-} \cup D^+ \cup \bar{I_0} \cup \bar{I_1}$;

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса $R_1$ [1] в области $D^-$;

4) выполняется равенства

$\lim\limits_{R\to\infty} u(x,y) = 0$, $R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi(y),\ y \ge 0,$$

$$u(x,0) = \tau_1(x),\ x \in \bar{I}_1,$$

$$u(x,y)|_{EC_0} = \psi(x),\ \frac{c}{2} \le x \le c,$$

$$u(p(x),0) = \mu u(x,0) + f(x),\ 0 \le x \le c,$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c\},$$

причем эти пределы при $x = 0$, $x = 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$, $f(x) \in C[0,c] \cap C^{1,\delta_1}(0,c)$, $f(0) = 0$, $f(c) = 0$, $\psi(x) \in C[0,c] \cap C^{1,\delta_2}(0,c)$, $\psi(0) = 0$, $\tau_1(x) \in C(\bar{I}_1)$, причем функцию $\tau_1(x)$ в окрестности точке $x = 1$ представима в виде $\tau_1(x) = (1-x)\tilde{\tau_1}(x)$, $\tau_1(x) \in C(\bar{I}_1)$, и при достаточно больших $x$ удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)| \le \frac{M}{x^{\varepsilon}}$, $\varepsilon, M$ - положительные константы, $\tau_1(x)$ - удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[1, N]$, $N > 1$, $\varphi(y) \in C(I_0)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}}\varphi(y) \in L(0, \infty)$, $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[0, N]$, $N > 0$, $\varphi(\infty) = 0$, $\varphi(0) = 0$.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия $\varphi(y) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $\tau_1(x) \equiv 0$, $0 < \mu < 1$. Тогда задача $B$ имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство теоремы проводится с помощью принципа экстремума.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия $\mu k^{\frac{1}{2}-3\alpha} sin(\alpha\pi) < 1$, где $\alpha = (1-2\beta)/4$, $p(x) = 1 - kx$. Тогда решение задачи $B$ существует.

Доказательство теоремы устанавливается методами интегральных уравнений.

**Литература**


1. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. Высшая школа, Москва, 1985.


# О продолжение голоморфного отображение матричных шаров в метрике Кобаяси


**Тишабаев Ж.К.[1] , Нурматова Ш.Х.[2]**

*Национальный университет Узбекистана, Ташкент*

e-mail: jura63@rambler.ru[1], e-mail:shoirakhon96@gmail.com[2]


Пусть $Z = (Z_1, ..., Z_n)$ вектор, составленный из квадратных матриц $Z_j$ порядка $m$, рассматриваемых над полем комплексных чисел $C$. Можно считать, что $Z$- элемент пространства $C^n[m \times m] \cong C^{nm^2}$. Матричное ≪скалярное≫ произведение для $Z, W \in C^n[m \times m]$ определим так:

$$\langle Z, W\rangle = Z_1 {W_1}^* + ... + Z_n {W_n}^*.$$

Область $B_{m,n}$ пространства $C^n[m \times m]$ (см.[1]):

$$B_{m,n} = \{Z : I - \langle Z, Z\rangle > 0\},$$

где $I$, как обычно, единичная матрица порядка $m$, есть матричный шар.

Пусть $D \subset C^n[m \times m]$, $\Delta = \{t \in C : |t| < 1\}$. Обозначим через $Hol(\Delta, D)$ множество голоморфных отображений из $\Delta$ в $D$. Дифференциальная метрика Кобаяси $K_D(Z, V)$ в точке $Z \in D$в направлении $V$ определяется по формуле:

$$K_D(Z, V) = inf\left\{\frac{1}{r} : \ f \in Hol\ (\Delta, D), f(0) = Z, f'(0) = rV, (r > 0\ )\right\}$$

Расстояние Кобаяси $k_D(Z_1, Z_2)$ для точек $Z_1, Z_2 \in D$ определяется

$$k_D(Z_1, Z_2) = \inf\left\{\int_0^1 K_D(\gamma(t), \gamma'(t))dt, \gamma : [0, 1] \to D, \gamma \in C^1[0, 1], \gamma(0) = Z_1, \gamma(1) = Z_2\right\}.$$

Определим шар с центром в точке $Z_0 \in D$ и с радиусом $r > 0$ относительно этой метрики следующим образом:

$$D^{(r)}(Z_0) = \{Z \in D : k_D(Z_0, Z) < r\}.$$

**Теорема.** Пусть $Z_0, W_0 \in B_{n,m}$ и $B_{n,m}{}^{(r)}(Z_0)$ и $B_{n,m}{}^{(r)}(W_0)$ шары в метрике Кобаяси с центром в точки $Z_0$ и $W_0$ соответственно. Тогда, если $f : B_{n,m}{}^{(r)}(Z_0) \to B_{n,m}{}^{(r)}(W_0)$ биголоморфное отображение, такое что $f(Z_0) = W_0$, то отображение $f$ биголоморфно продолжается до автоморфизма $\widetilde{f} : B_{n,m} \to B_{n,m}$.

В случае $B_{n,m} = \tau$, где $\tau = \{Z \in C[m \times m] : ZZ^* < I\}$ - обобщенный единичный круг, задача рассмотрена в работе [4].


**Литература**

1. *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.ИЛ, 1959.

2. *Bland J., Duchamp T., Kalka M.* // On the automorphism group of strictly convex domains in $C^n$ //Contemporary math.1986. V.49. P.19-30.

3. *Тишабаев Дж.К.* Продолжение собственных голоморфных отображений шаров относительно метрики Кобаяси до отображений областей. Некоторые вопросы анализа и алгебры.1994.

4. *Тишабаев Ж.К. , Нурматова Ш.Х.* // О продолжение голоморфного отображение шаров в метрике Кобаяси.


# Лемма Шварца для матричного шара


**Тишабаев Ж.К[1]., Завгороднева С.Ю.[2]**

*Национальный университет Узбекистана, Ташкент*

e-mail: jura63@rambler.ru[1], e-mail: svetik1657@mail.ru[2]


Пусть $Z = (Z_1, ..., Z_n)$ вектор, составленный из квадратных матриц $Z_j$ порядка $m$, рассматриваемых над полем комплексных чисел $C$. Можно считать, что $Z$- элемент пространства $C^n[m \times m] \cong C^{nm^2}$.

Матричное ≪скалярное≫ произведение для $Z, W \in C^n[m \times m]$ определим так:

$$\langle Z, W \rangle = Z_1 W_1{}^* + ... + Z_n W_n{}^*.$$

Область $B_{m,n}$ пространства $C^n[m \times m]$ (см.[1]):

$$B_{m,n} = \{Z : I - \langle Z, Z \rangle > 0\},$$

где $I$, как обычно, единичная матрица порядка $m$, есть матричный шар.
Определим обобщенный единичный круг $\tau$ в $C[m \times m]$ следующим образом:

$$\tau = \{Z \in C[m \times m] : ZZ^* < I\}$$

где $Z^*$ матрица, сопряженная и транспонированная к $Z$. Известно, что $\tau$-полная круговая выпуклая область.

Пусть $D \subset C^m[m \times m]$, $\Delta = \{t \in C : |t| < 1\}$. Обозначим через $Hol(D, \Delta)$ множество голоморфных отображений из $D$ в $\Delta$ и через $Hol(\Delta, D)$ множество голоморфных отображений из $\Delta$ в $D$. Дифференциальная метрика Кобаяси $K_D(Z, V)$в точке $Z$ в направлении $V$ определяется по формуле:

$$K_D(Z, V) = \inf\left\{\frac{1}{r} : f \in hol\ (\Delta, D), f(0) = Z, f'(0) = rV, (r > 0\ )\right\}$$

Дифференциальная метрика Каратеодори $C_D(Z,V)$ в точке $Z$ в направлении $V$определяется по формуле:

$$C_D(Z,V) = Sup\{|f'(Z)V| : f \in hol(D,\Delta) f(Z) = 0\}$$

Поскольку $B_{n,m}$ классическая область и группа автоморфизмов $Aut(\tau)$действует на $B_{n,m}$ транзитивно, достаточно определить $C_\tau(0,V)$ и $K_\tau(0,V)$.

**Теорема 1.** Пусть задано $F : \tau \to \tau$ голоморфное отображение, где $\tau$-обобщенный единичный круг, тогда верно следующее неравенство:

$$C_\tau(f(Z), f'(Z)V) \leq C_\tau(Z,V),$$

где

$$C_\tau(0,V) = \max\{\text{квадратсобственных значений } VV^*\}$$

**Теорема 2.** Пусть задано $F : B_{n,m} \to B_{n,m}$ голоморфное отображение, где $B_{m,n}$-матричный шар, тогда верно следующее неравенство :

$$C_{B_{n,m}}(f(Z), f'(Z)V) \leq C_{B_{n,m}}(Z,V)$$

### Литература


1. *Г. Худайберганов, А.М.Кытманов, Б.А.Шаимкулов.* Комплексный анализ в матричных областях. с-12

2. *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.ИЛ, 1959.

3. *Тишабаев Дж.К.* Об областях биголоморфно эквивалентных матричному поликругу, 2004, №3, с-38


# Задача со свободной границей Флорина с нелинейным граничным условием


**Тураев Р.Н., Тураев К.Н**

*Чирчикский государственный педагогический институт*
*Термезский государственный университет*
e-mail rasul.turaev@mail.ru, *k_turaev@mail.ru*


Задачи со свободной границей возникают при математическом описании тепловых процессов, связанных с изменением агрегатного состояния вещества, движения жидкости в пористой среде. Связи с этим они находят широкое применение в металлургии, при изучении процессов сварки, электронной и плазменной обработки материалов, в теории электрических контактов, в геотермии, мерзлотоведении, теории фильтрации, математической биологии, экологии, биомедицины и т.д.[1,2].

В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина (условие для свободной границы задается в неявной для этой границы форме) для квазилинейного параболического уравнения с нелинейным граничным условием.

**Постановка задачи.** Требуется найти на некотором отрезке $0 \leq t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$,

$s(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a(t,x,u)u_{xx}(t,x) + bu_x(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = f(t, u(t,0)), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(t, s(t)) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

где $s(t)$-свободная (неизвестная) граница, которая определяется вместе с функциям $u(t,x)$. $a(t,x,u)$ - коэффициент фильтрации.

Задача (1)-(5) обобщает ранее рассмотренные задачи возникающие при изучении фильтрации с учетом влияния связанной воды. Именно вопросы существования и единственности классического решения однофазной одномерной задачи Флорина изучались в работах [3,4,5,6], когда $a(t,x,u) = 1$, $b = 0$ и условия (3) задано линейными. Асимптотическое поведение решения при $t \to \infty$ рассматривается в работе [7].

Всюду в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1.$f(t,\xi)$ определена и непрерывна при $t \ge 0, |\xi| < \infty$, она ограничена вместе с производными в замкнутом множестве своих аргументов.

2.Функции $a(t,x,u)$, $a'_u(t,x,u)$, $a''_{uu}(t,x,u)$, $a''_{u_x}(t,x,u)$ и $a''_{xx}(t,x,u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причем $a(t,x,u) \ge a_0 > 0$.

3. $\varphi(x)$ трижды, $\psi(t)$ один раз непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi'''(x), \psi'(t)$ удовлетворяют условию Гельдера.

4. Выполнены условия согласования в угловых точках (в т.ч. рассматриваемых в вспомогательных задачах), в частности

$$\varphi'(0) = f(0, \varphi(0)), \varphi(s_0) = 0, \varphi'(s_0) = \psi(0) = \psi_0,$$

$$f'_t(0,\varphi(0)) = a(0,0,\varphi(0))\varphi'''(0) + a'_u(0,0,\varphi(0))\varphi'(0)\cdot\varphi''(0) + a'_x(0,0,\varphi(0))\varphi''(0) -$$
$$- f'_u(0,\varphi(0))\cdot a(0,0,\varphi(0))\cdot\varphi''(0); \psi(0) = a(0,s_0,\varphi(s_0))\varphi'''(s_0) +$$
$$+ a'_u(0,s_0,\varphi(s_0))\varphi'(s_0)\cdot\varphi''(s_0) + a_x(0,s_0,\varphi(s_0))\cdot\varphi'(s_0).$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются априорные оценки для решений $u(t,x)$.

**Лемма 1.** *Пусть $\varphi(x) \le 0$ и для любого $u(t,x)$ справедливо неравенство $f(t,u) \ge \psi(t) \ge \psi_0 > 0, \frac{f(t,u)-f(t,0)}{u} \ge f_0 = const > 0$. Тогда для решения задачи (1)-(5) в области $\bar{D}$ справедлива оценка*

$$-M_1 \le u(t,x) \le 0, \tag{6}$$

*где* $M_1 = \max\{\frac{1}{f_0}[\max\limits_{0\le t\le T}|f(t,0)|, \max\limits_{0\le x\le s_0}|\varphi(x)|]\}$.

Далее, устанавливаются некоторые априорные оценки для решений и их производные в норм Гельдера. Чтобы оценить $u_x(t,x)$, а также исследовать характер и гладкость свободной границы $s(t)$, мы перейдем к задаче типа Стефана. Для этого поставленную задачу (1)-(5) сведем к эквивалентной задаче (типа Стефана) для функций $s(t)$,$u_x(t,x)$.

Обозначим $u_x(t,x) = v(t,x)$. Тогда из задачи (1)-(5) получим следующую задачу

$$v_t(t,x) = a(t,x,u)v_{xx}(t,x) + a'_u(t,x,u)v(t,x)\cdot v_x(t,x)+$$

$$+a'_x(t,x,u)v_x(t,x) + bv_x(t,x), \quad (t,x)\in D, \tag{7}$$

$$v(0,x) = \varphi'(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{8}$$

$$v(t,0) = f(t,u(t,0)), \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

$$v(t,s(t)) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{10}$$

$$\psi(t)\cdot \dot{s}(t) = -a(t,s(t),0)v_x(t,s(t)) + b\psi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{11}$$

**Лемма 2.** *Пусть $\varphi'(x) \ge \psi(t) \ge \psi_0 > 0$ и для ограниченных $u(t,x)$ справедливо неравенство $f(t,u) \ge \psi(t) \ge \psi(0)$, а также выполнены условии леммы 1. Тогда справедлива следующая оценка*

$$0 < \psi_0 \le \psi(t) \le v(t,x) = u_x(t,x) \le M_2, \quad (t,x)\in \bar{D}, \tag{12}$$

*где* $M_2 = \max\{\max\limits_x |\varphi'(x)|, \max\limits_t |\psi(t)|, \max\limits_t |f(t,u(t,0))|\}$.

Теперь изучается поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени.

**Теорема 1.** *Пусть $\psi'(t) \ge 0, a'_u(t,x,u) \ge 0, a'_x(t,x,u) \ge 0, b \le 0$ и выполнены условии леммы 2. Тогда существует такая постоянная $N$, зависящая от заданных функций, что справедливы неравенства*

$$0 < \dot{s}(t) \le N, \quad 0 \le t \le T, \tag{13}$$

*где* $N = \max\{\max\limits_{0\le x\le s_0} \frac{|\varphi'(x)-f_0|}{s_0-x}, \max\limits_{0\le t\le T} \frac{|\psi(t)-f(t)|}{s_0}\}$.

Далее на основе установленных оценок доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученных и первоначальных задач методом неподвижной точки Шаудера.

## Литература

1. *Fasano A.* Mathematical Models of Some Diffusive Processes with Free Boundaries. MAT - Serie A, 8 (2004), pp. 11-19.

2. *Murray J.D.* Mathematical Biology: Spatial Models and Biomedical Applications, Springer-Verlag, New York, 2004, p. 811.

3. *Takhirov J., Turaev R.* The free boundary problem without initial condition. // J. Math. Sci. – 2012. 187,No.1. pp. 86-100.

4. *Флорин В.А.* Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористой с учетом влияния связанной воды. //Изв. АН СССР.,1951, ОТН, №11, с. 1625-1649.

5. *Т. Д. Вентцель.* Об одной задаче со свободной границей для уравнения теплопроводности.// Докл. АН СССР, 1960, том 131, номер 5, 1000–1003.

6. *Нгуен Дин Чи.* Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения.// Вестник МГУ. Сер 1. Мат.Мех. No2. 1966.с.40054.

7. *Нгуен Дин Чи.* Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения.// Вестник МГУ.No.5.1966. с.51-62.

# Приближенное решение обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности методом квази-обращения

**Фаязов К. С., Рахматов Х. Ч.**

*Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, Узбекистан*
*Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, Узбекистан*
kudratillo52@mail.ru, khondamir.rakhmatov@gmail.com

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = -u_{xx} \tag{1}$$

в области $D = \{0 < x < \pi, \quad t > 0\}$.

**Постановка задачи.** Найти функцию $u\,(x,t)$ непрерывную в $\bar{D}$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области $D$, а также начальному

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; 0 \le x \le \pi, \tag{2}$$

и однородным граничным условиям

$$\begin{matrix} u(0,t) = 0, \\ u(\pi,t) = 0, \end{matrix} \;\; 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Задача (1)-(3) называется обратной задачей Коши для уравнения теплопроводности. Она некорректно поставлена в смысле Адамара, то есть «небольшое» произвольное изменение данных может привести к «большим» ошибкам в решении. Нужно заметить, что рассматриваемая обратная задача может быть решена многими методами, такими как метод регуляризации А. Н. Тихонова [1], методом М. М. Лаврентьева [2], методом квазирешений В. К. Иванова [3, 4] и так далее. Большинство методов используемых для решения обратных задач математической физики, также применимы для решения классической (прямой) задачи теплопроводности.

Теоретические основы и численное решение обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности рассматривались многими авторами. В работе Mu H., Li J. и Wang X [5] методом регуляризации Тихонова построена функция стоимости для задачи обратной теплопроводности и для ее преобразования в задачу оптимизации. P. Duda в своей работе [6] Для определения распределения температуры в пластине используется метод полудискретного регулирования. Х. К. Аль-Махдави в работе [7] методом Пикара функцию источника уравнения диффузии при помощи регуляризующего семейства операторов $\{R_N\}$, отображающих пространство $L_2\,[0,1]$ в себя.

Оценка условной устойчивости и единственности решения данной задачи вытекает из работ С.Г. Крейна [8] и М. Ландиса [9].

Задача (1)-(3) на условную корректность исследована в работах [8], [9], а регуляризованное решение построено многими авторами (см. например, работу [10] и библиографию там).

Приближенное решение задачи (1)-(3) ищем в виде решения краевой задачи для псевдо-параболического уравнения. Нами в данной работе доказывается существование и единственность начально-краевой задачи для псевдо-параболического уравнения. Используя данный факт строится регуляризованное решение задачи (1)-(3) и получены оценки эффективности данного метода.

**Литература**


1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. «Наука», Москва, 1979. 285 с.

2. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Линейные операторы и некорректные задачи. «Наука», Москва, 1991. 331с.

3. *Иванов В.К.* О применении метода Пикара к решению интегральных уравнений первого рода // Bui. Inst. Politehn. Iasi. 1968. Т. 4, № 34. С. 71–78.

4. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва: Наука, 1978. 206 с.

5. *Mu H., Li J., Wang X.* Optimization Based Inversion Method for the Inverse Heat Conduction Problems // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2017. Vol. 64, no. 1. P. 1–9. DOI: 10.1088/1755-1315/64/1/012094.

6. *Duda P.* Solution of Inverse Heat Conduction Problem Using the Tikhonov Regularization Method // Journal of Thermal Science. 2017. Vol. 26, no. 1. P. 60–65. DOI: 10.1007/s11630-017-0910-2.

7. *Аль-Махдави Х.К.* Исследование метода Пикара при решении обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2019. Т. 8, № 4. С. 5–14. DOI: 10.14529/cmse190401.

8. *С. Г. Крейн, М. И. Хазан* “Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве”, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., 21 (1983), 130–264

9. *Е. М. Ландис* Тр. 3-го Всесоюзн. матем. съезда, 2, 1956, стр. 57.

10. *М. М. Лаврентьев* Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1973. 71 с.


# Нелокальная задача для одного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка со спектральном параметром


**Халилов К.С.**

*Ферганский государственный университет*

xalilov_q@mail.ru


В данной работе сформулирована и исследована неклассическая задача с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка.

В области $D$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}Lu = 0, \tag{1}$$

где $D = D_1 \cup D_2 \cup D_0$, $D_1 = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ 0 < y \le 1\}$, $D_2 = \{(x,y):\ -y < x < y+1,$
$(-1/2\ ) < y < 0\}$, $D_0 = \{(x,0):\ 0 < x < 1\}$,

$$L = \begin{cases} L_1 \equiv \left(\partial^2/\partial x^2\ \right) - \left(\partial/\partial y\ \right) - \lambda_1^2, & (x,y) \in D_1, \\ L_2 \equiv \left(\partial^2/\partial x^2\ \right) - \left(\partial^2/\partial y\ ^2\right) + \lambda_2^2, & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

$\lambda_1$ и $\lambda_2$ – заданные действительные числа.

Для уравнения (1) в области $D$ исследуем следующую задачу с интегральным условием.

**Задача.** Найти функцию $u\,(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u\,(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$, $u_x,\ u_y \in C\,(D \cup D_3)$;

2) является регулярным в $D_1 \cup D_2$ решением уравнения (1);

3) удовлетворяет условиям:

$$u\,(0,y) = \varphi_1\,(y)\,, \quad u\,(1,y) = \varphi_2\,(y)\,, \quad 0 \le y \le 1;$$

$$\int\limits_0^1 u\,(x,y)\,dx = \varphi_3\,(y)\,, \quad 0 \le y \le 1;$$

$$u\,(x,y)|_{D_3} = \psi_1\,(x)\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{D_3} = \psi_2\,(x)\,, \quad 0 \le x \le (1/2)\,;$$

$$\lim_{y\to+0} u_y\,(x,y) = \lim_{y\to-0} u_y\,(x,y)\,, \quad 0 < x < 1,$$

где $D_3 = \{(x,y) : y = -x,\ 0 \le x \le 1/2\ \}$, $n$ – внутренняя нормаль к $D_3$, а $\varphi_j\,(y)$, $\psi_1\,(x)$, $\psi_2\,(x)$ – заданные гладкие функции.

**Теорема.** *Если* $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ *и* $\varphi_j\,(y) \in C^1\,[0,1]$, $j = \overline{1,3}$; $\psi_1 \in C^1\,[0,1/2] \cap C^2\,(0,1/2)$, $\psi_2 \in C\,[0,1/2] \cap C^1\,(0,1/2)$, $\psi_1\,(0) = \varphi_1\,(0)$ *и* ${\psi_1}''\,(x)$, ${\psi_2}'\,(x)$ *иметь особенность порядка меньше 1 при* $x \to 0$ *и* $x \to 1/2$, *то решение задачи существует единственно.*

При исследовании поставленной задачи, здесь в отличие от работ [1,2] и др., не использовано представление регулярного решения уравнения (1) $u\,(x,y) = v\,(x,y) + \omega\,(y)$, где $v\,(x,y)$ – решение уравнения $Lu = 0$, а $\omega\,(y)$ – произвольная функция, а задача эквивалентно сведена к краевой задаче для уравнения смешанного типа второго порядка с неизвестной правой частью.

### Литература


1. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. – Ташкент: Фан, 1979. 120 с.

2. *Салахитдинов М.С.* Уравнения смешанно-составного типа. – Ташкент: Фан, 1974. 156 с.

# Модифицированное уравнение Кортевега -де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций

[1] **Хасанов М.М.,**[2] **Хайитбоев И.И.**

[1,2] *Ургенчский государственный университет*
e-mail: hmuzaffar@mail.ru [1]

В работе [1] установлена полная интегрируемость модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ), в классе быстроубывающих функций. В работах [2, 3] уравнение мКдФ исследована в классе конечнозонных функций.

В этой работе изучается следуюшее уравнение мКдФ

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k(t) s_1(\pi, \lambda_k, t)[(\psi_1(x,\lambda_k,t))^2 - (\psi_2(x,\lambda_k,t))^2], t > 0\ ,\ \ x \in R. \tag{1}$$

Требуется найти решение $q(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), q(x+\pi,t) \equiv q(x,t) \in C_x^3(t \geq 0) \bigcap C_t^1(t > 0), \tag{2}$$

где $q_0(x)$ заданная действительная функция. Здесь $\alpha_k(t)$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику

$$\alpha_k(t) = O\left(\frac{1}{k^2}\right),\ \ k \to \pm\infty,$$

$\psi = (\psi_1(x,\lambda,t),\ \psi_2(x,\lambda,t))^T$ решение Флоке (нормированное условием $\psi_1(0,\lambda,t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, x \in R. \tag{3}$$

Обозначим через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t),\ s_2(x,\lambda,t))^T$ решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $s(0,\lambda,t) = (0,\ 1)^T$.

Спектр оператора (3) состоит из следующего множества $E = \bigcup\limits_{n \in Z} [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n \in Z$ задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (**??**) вместе со знаками $\sigma_n(t) = sign\{s_2(\pi,\xi_n(t),t) - 1/s_2(\pi,\xi_n(t),t)\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (3).

**Теорема.** Пусть $(q(x,t)$,$\psi(x,\lambda,t))$ является решением задачи (1)-(2). Тогда спектр оператора Дирака (3) с коэффициентом $q(x+\tau,t)$ не зависит от $\tau$ и $t$, а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$,$n \in Z$ удовлетворяют системе уравнений Дубровина-Трубовица

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \cdot \{-2\xi_n[q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \alpha_k(t) s_1(\pi,\lambda_k,t)}{\xi_n^2 - \lambda_k^2}\}, n \in Z \tag{4}$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{k \neq n} (\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)(\xi_k - \xi_n)^{-2}}$$

и

$$s_1(\pi, \lambda, t) = \pi \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{a_k}.$$

Знак $\sigma_n(\tau, t) \equiv \pm 1$ меняется при каждом столкновении $\xi_n(\tau, t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in Z, \tag{5}$$

где $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau)$ $n \in Z$ - спектральные параметры оператора Дирака соответствующие коэффициенту $q_0(x + \tau)$.

Учитывая формулы следов

$$q^2(\tau, t) + q_x(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right)$$

систему (4) можно переписать в замкнутой форме.

**Следствие 1.** Эта теорема дает метод решения задачи (1)+(2). Для этого сначала найдем спектральные данные $\lambda_n$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$, соответствующие коэффициенту $q_0(x+\tau)$. Далее, решая задачу Коши (4)+(5) находим $\xi_n(\tau, t)$, $n \in Z$. После этого, по формуле $q(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi)$, определяем $q(x, t)$.

**Следствие 2.** Из результатов работы [4] следует, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то и решение $q(x, t)$ является действительной аналитической функцией по $x$.

**Следствие 3.** Используя результаты работы [5], выводим, что если $\pi/2$ является периодом начальной функции $q_0(x)$, то и решение $q(x, t)$ является $\pi/2$-периодическим по $x$.

**Следствие 4.** Используя результаты работы [6], выводим, что если $\pi/2$ является антипериодом начальной функции $q_0(x)$, то и решение $q(x, t)$ является $\pi/2$-антипериодическим по $x$.

## Литература


1. *Wadati M.* The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan. 1972. - V. 32. P. 1681.

2. *Итс А.Р.* Точное интегрирование в римановых -функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. - Дисс. канд. физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ, 1977.

3. *Смирнов А.О.* Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза // Мат. сб., 1994. - Т. 185. N 8. - С. 103-114.

4. *Хасанов А.Б.* Ибрагимов А.М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // УзМЖ. 2001. - N 3-4. C. 48-55.

5. *Хасанов А.Б.* Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака // УзМЖ. 2000. - N 3. - С. 40-46.

6. *Currie S., Roth T., Watson B.* Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // Proceedings of the Edinburgh mathematical society, 2017. - v. 60. - P. 615-633.

# О разрешимости нелокальной задачи для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка

**Холиков Д.К.**

*Ташкентский архитектурно строительный институт,*
xoliqov23@mail.ru

Рассмотрим нагруженное уравнение в частных производных третьего порядка

$$Lu = f(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\alpha}^{\beta} u(x,t)dx, \tag{1}$$

здесь

$$Lu \equiv u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_x + d(x,t)u_t + e(x,t)u;$$

$a(x,t), b(x,t), c(x,t), d(x,t), e(x,t)$ и $f(x,t)-$ заданные функции, а $\alpha$ и $\beta-$ заданные постоянные, причем $0 \le \alpha < \beta \le l$.

Такого вида уравнения возникают в теории фильтрации жидкостей в пористых средах , неустановившегося движения грунтовых вод со свободной поверхностью , в теории влагопереноса в почве, и многих других дисциплинах, связанных с математическим моделированием [1].

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим вопрос о разрешимости одной нелокальной задачи с интегральным условиям для уравнения (1) в следующей постановке: *найти в области $D$ решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$ удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

*и следующим граничным условиям*

$$u(0,t) = \beta(t)\int\limits_0^l u(x,t)dx + \int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau + \psi_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \psi_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

здесь функции $\varphi_0(x), \psi_1(t), \psi_2(t), \beta(t), \rho(t,\tau)$ заданы, непрерывны на $[0,l]$ и $[0,T], 0 \le \tau \le t$, соответственно. Кроме того удовлетворяют условиям согласования

$$\varphi_0(0) = \beta(0)\int_0^l \varphi_0(x)dx + \psi_1(0), \quad \varphi_0'(0) = \psi_2(0).$$

Заметим, что нелокальное условие (3)можно заменить условием

$$u(0,t) = \beta(t)\int\limits_0^h u(x,t)dx + \int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau - \psi_1(t),$$

где $h-$ −активный слой почвы, который участвует в водоснабжении корневой системы, в процессах испарения и транспирации [2].

В работе исследуется разрешимость нелокальной задачи с интегральным условиям для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка. С помощью метода Римана доказаны существование и единственность классического решения исследуемой задачи (1)–(4).

### Литература


1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных, М: Наука. 2006.-287.с.

2. *Кожанов А.И., Пулькина Л.С.* О разрешимости краевых задач с нелокальными и граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. Дифференц. уравнения. 2006. – том 42, № 9. - С. 1166 - 1179.

3. *Холиков Д.К.* Об одном нагруженном псевдопараболическом уравнении,Uzbek Mathematical Journal, 2011, N 2, с.154-161.


# Об одной задаче с интегральными условиями для уравнения гиперболического типа


**Шакарова Н.А.**

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*

sagdullayevam@mail.ru


Различные нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений рассмотрены в работах [1]–[3]. Как близкие к настоящей работе, отметим работы [3], которые посвящены исследованию некоторых классов уравнений гиперболического типа.

В данной работе доказывается разрешимость нелокальной задачи для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности.

**Постановка задачи.** Требуется найти в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ t > 0\}$ решение $u(x,t)$ уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

краевым условиям

$$u(l,t) = \mu_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и интегральному условию

$$u_x(0,t) = \lambda(t)\int\limits_0^l u(x,t)dx + \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $f(x,t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\lambda(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_1(t)$ – заданные функции, причем удовлетворяют выполнены следующее условия согласования

$$\varphi_0(l) = \mu_1(0), \quad \varphi_1(l) = \mu_1^{'}(0), \quad \varphi_0^{'}(0) = \lambda(0)\int_0^l \varphi(x)dx + \mu_2(0), \tag{5}$$

Для рассматриваемой нелокальной задачи доказана теорема разрешимости в классе регулярных решений с помощью метода, предложенного в работе [1].

**Литература**

1. *Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений.* – Самара. Самарский университет. 2012. – 194 с.

2. *Bouziani A.* A mixed problem with only integral boundary conditions for a hyperbolic equations.//*Intern. J. of Math. and Math. Sci.* 2004. – vol. 34, N 24. – P. 1279 – 1291.

3. *Зикиров О.С.* О краевых задачах для гиперболического уравнения третьего порядка.//*Докл. Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук.* 2007. – том 9, N 1. – С. 45 – 48.

# Об одном дробном интегро-дифференциальном уравнении с нелинейными максимумами и вырожденным ядром

**Юлдашев Т. К., Кадиркулов Б. Ж.**

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*
*Ташкентский государственный университет востоковедения*
tursun.k.yuldashev@gmail.com, kadirkulovbj@gmail.com

Пусть $(t_0; b) \subset R^+ \equiv [0; \infty)$ – конечный интервал на множестве положительных действительных чисел, $\alpha > 0$. Дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $\alpha$ для функции $\eta(t)$ определяется следующим образом:

$$I_{t_0+}^{\alpha}\eta(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\eta(s)ds, \quad \alpha > 0, \quad t \in (t_0; b),$$

где $\Gamma(\alpha)$ – Гамма функция.

Пусть $n-1 < \alpha \leq n, \; n \in N$. Дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha$ для функции $\eta(t)$ задается с помощью следующей формулы:

$$D_{t_0+}^{\alpha}\eta(t) = \frac{d^n}{dt^n}I_{t_0+}^{n-\alpha}\eta(t), \quad t \in (t_0; b).$$

Дробная производная Герасимова–Капуто порядка $\alpha$ для функции $\eta(t)$ имеет вид

$${}_*D_{t_0+}^{\alpha}\eta(t) = I_{t_0+}^{n-\alpha}\eta^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{\eta^{(n)}(s)\,d\,s}{(t-s)^{\alpha-n+1}}, \;\; t \in (t_0; b).$$

Такие производные дробного порядка сводятся к следующим производным порядка $\alpha = n \in N$:

$$D^{n}_{t_0+}\eta\,(t) =_* D^{n}_{t_0+}\eta\,(t) = \frac{d^n}{dt^n}\eta\,(t),\;\; t \in (t_0;\, b).$$

Дробная производная Хильфера порядка $\alpha$, $n-1 < \alpha \le n$, $n \in N$, и типа $\beta$, $0 \le \beta \le 1$, определяется как композиция трех операторов:

$$D^{\alpha,\,\beta}_{t_0+}\eta\,(t) = I^{\beta\,(n-\alpha)}_{t_0+}\frac{d^n}{dt^n}I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{t_0+}\eta\,(t),\quad t \in (t_0;\, b).$$

Для $\beta = 0$, этот оператор сводится к дробной производной Римана–Лиувилля $D^{\alpha,\,0}_{t_0+} = D^{\alpha}_{t_0+}$. Случай $\beta = 1$ соответствует дробной производной Герасимова–Капуто $D^{\alpha,\,1}_{t_0+} =_* D^{\alpha}_{t_0+}$. Пусть $\gamma = \alpha + \beta\, n - \alpha\,\beta$. Тогда нетрудно убедиться, что $\alpha \le \gamma \le n$. Поэтому для оператора удобно использовать другое обозначение $D^{\alpha,\,\gamma}\eta(t) = D^{\alpha,\,\beta}_{t_0+}\eta\,(t)$. Обобщенный оператор Римана–Лиувилля был введен Р. Хильфером на основе эволюции дробного времени, возникающей при переходе от микроскопического масштаба к макроскопическому масштабу времени. Используя интегральные преобразования, он исследовал задачу Коши для обобщенного уравнения диффузии.

Дробное исчисление играет важную роль в математическом моделировании во многих научных и технических дисциплинах [1]. В [2] рассматриваются задачи сплошной среды и статистической механики. В [3] изучаются математические проблемы модели эпидемии Эболы. В [4] и [5] изучаются фракционные модели динамики туберкулезной инфекции и коронавируса, соответственно. Построение различных моделей теоретической физики с помощью дробного исчисления описано в [6–8]. Конкретная интерпретация дробной производной Хильфера, описывающей случайное движение частицы, движущейся по действительной прямой с временами шага Пуассона с конечной скоростью, дается в [9].

В данном докладе дробное интегро-дифференциальное уравнение типа Хильфера с вырожденным ядром и нелинейными максимумами мы решаем при заданных начальных условиях. Отметим, что дифференциальные уравнения с максимумами играют важную роль в решении задач управления продажей товаров и инвестициями производственных компаний в рыночной экономике [10]. В [11] обосновывается актуальность теоретического исследования дифференциальных уравнений с максимумами. Появление интегрального члена в дифференциальном уравнении имеет приложения в теории автоматического регулирования динамическими системами [12, 13].

Итак, рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с дробным оператором типа Хильфера на интервале $(t_0;\, T)$:

$$D^{\alpha,\,\gamma}x\,(t) + \omega\, x\,(t) = \int\limits_{t_0}^{T} K\,(t,\, s)\, x\,(s)\, d\,s + f\,(t,\, x\,(t),\, \max\,\{x\,(\theta)\,|\,\theta \in [q_1(t);\, q_2(t)]\}) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\lim_{t\to+t_0} J^{2-\gamma}_{t_0+}x\,(t) = \varphi_0,\quad \lim_{t\to+t_0}\frac{d}{dt}J^{2-\gamma}_{t_0+}x\,(t) = \varphi_1,\;\; x\,(t) = \varphi_2(t),\quad t \notin (t_0,\, T)\,, \qquad (2)$$

где $f\,(t,\, u,\, \vartheta) \in C\,(\Omega)$, $\varphi_2(t) \in C\,([0;\, t_0] \cup [T;\, \infty))$, $0 < \omega$ – действительный параметр, $\varphi_0,\ \varphi_1 = \mathrm{const}$, $\Omega \equiv [t_0;\, T] \times X \times X$, $0 \le t_0$, $X \subset R \equiv (-\infty;\, \infty)$, $q_i(t) = q_i(t,\, x\,(t)) \in$

$C\ ([t_0;\, T] \times X)\,,\ i = 1, 2,\ X$ – закрытое множество. Здесь

$$D^{\alpha,\,\gamma} = J_{t_0+}^{\gamma-\alpha} \frac{d^2}{dt^2} J_{t_0+}^{2-\gamma},\ 1 < \alpha \le 2,\ \gamma = \alpha + 2\beta - \alpha\,\beta,\ \ \alpha < \gamma \le 2.$$

В данном докладе мы рассмотрим простой случай вырожденного ядра: $K\,(t,\, s) = t \cdot s$. Мы положим $0 < q_1 < q_2 < \infty$. Здесь возможны следующие три случаев: 1) $0 < q_1 < q_2 < 1$; 2) $0 < q_1 < 1,\ 1 < q_2 < \infty$; 3) $1 < q_1 < q_2 < \infty$.

**Лемма.** Решение интегро-дифференциального уравнения (1) с начальными условиями (2) представляется следующим образом

$$x\,(t) = \varphi_0\big(t - t_0\big)^{\gamma-2} E_{\alpha,\,\gamma-1}(\omega\,\big(t - t_0\big)^{\alpha}) + \varphi_1\big(t - t_0\big)^{\gamma-1} E_{\alpha,\,\gamma}(\omega\,\big(t - t_0\big)^{\alpha}) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\,\alpha}\,(-\omega\,(t - s)^{\alpha})\,[\chi \cdot s + f\,(s,\, x\,(s),\, \max\{x\,(\theta)\,|\,\theta \in [q_1(s);\, q_2(s)]\})]\; d\,s, \tag{3}$$

где $E_{\alpha,\,\gamma}(z)$ – функция Миттага–Лефлера, имеющий вид

$$E_{\alpha,\,\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\,k}}{\Gamma\,(\alpha\,k + \gamma)},\ \ z,\, \alpha,\, \gamma \in (0;\, \infty), \quad q_i(t) = q_i(t,\, x\,(t)),\ i = 1, 2,$$

$$\chi = \int\limits_{t_0}^{T} \xi\, x\,(\xi)\, d\,\xi. \tag{4}$$

Подставляя представление (4) в интегральное уравнение (3), получаем

$$x\,(t) = G\,(t) + \frac{1}{1 - \sigma_2} \int\limits_{t_0}^{t} s\,(t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\,\alpha}\,(-\omega \cdot (t - s)^{\alpha}) \times$$

$$\times \int\limits_{t_0}^{T} \varsigma \int\limits_{t_0}^{\varsigma} (\varsigma - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\,\alpha}\,(-\omega \cdot\ (\varsigma - \xi)^{\alpha})\ f\,(\xi,\, x\,(\xi),\, \max\ \{x\,(\theta)\,|\,\theta \in [q_1(\xi);\, q_2(\xi)]\})\, d\,\xi\, d\,\varsigma\, d\,s +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\,\alpha}\,(-\omega\,(t - s)^{\alpha})\, f\,(s,\, x\,(s),\, \max\ \{x\,(\theta)\,|\,\theta \in [q_1(s);\, q_2(s)]\})\ d\,s, \tag{5}$$

где

$$G\,(t) = P_1(t) + \frac{\sigma_1}{1 - \sigma_2} \int\limits_{t_0}^{t} s\,(t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\,\alpha}\,(-\omega \cdot (t - s)^{\alpha})\ d\,s, \quad q_i(t) = q_i(t,\, x\,(t)),\ i = 1, 2$$

и $P_1(t)$ определяется из формулы

$$P_1(t) = \varphi_0 \cdot \big(t - t_0\big)^{\gamma-2} E_{\alpha,\,\gamma-1}\left(\omega \cdot \big(t - t_0\big)^{\alpha}\right) + \varphi_1 \cdot \big(t - t_0\big)^{\gamma-1} E_{\alpha,\,\gamma}\left(\omega \cdot \big(t - t_0\big)^{\alpha}\right).$$

Вместо интегрального уравнения (5) исследуются вопросы однозначной разрешимости следующего интегрального уравнения на отрезке $[t_0;\, T]$

$$x\,(t,\, \omega)\big(t - t_0\big)^{2-\gamma} = \Im\,(t;\, x,\, \omega) \equiv G\,(t,\, \omega)\,\big(t - t_0\big)^{2-\gamma} +$$

$$+\frac{\left(t-t_0\right)^{2-\gamma}}{1-\sigma_2}\int\limits_{t_0}^{t} s\,(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha}\right)\int\limits_{t_0}^{T}\varsigma\int\limits_{t_0}^{\varsigma}(\varsigma-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\omega\cdot(\varsigma-\xi)^{\alpha}\right)\times$$

$$\times f\left(\xi,\,x\,(\xi,\,\omega),\,\max\left\{x\,(\theta,\,\omega)\,|\,\theta\in[q_1(\xi,\,x\,(\xi,\,\omega));\,q_2(\xi,\,x\,(\xi,\,\omega))]\right\}\right)\,d\,\xi\,d\,\varsigma\,d\,s+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\left(t-t_0\right)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}E_{\alpha,\alpha}\left(-\omega\cdot\,(t-s)^{\alpha}\right)\times$$

$$\times f\left(s,\,x\,(s,\,\omega),\,\max\left\{x\,(\theta,\,\omega)\,|\,\theta\in[q_1(s,\,x\,(s,\,\omega));\,q_2(s,\,x\,(s,\,\omega))]\right\}\right)\,d\,s,\qquad(6)$$

который не имеет особенностей в точке $t=t_0$.

Для изучения однозначной разрешимости нелинейного функционально-интегрального уравнения (6) воспользуемся пространством непрерывных функций $C\,[t_0;\,T]$ с нормой

$$\|\,x\,(t)\,\|=\max_{t_0\le t\le T}|\,x\,(t)\,|\,.$$

**Теорема** Пусть выполняются следующие условия:

1). $\max\left\{\max\limits_{t\notin\left(t_0;T\right)}|\,\varphi_2(t)\,|\,;\;\max\limits_{t_0\le t\le T}|\,f\,(t,\,x,\,y)\,|\right\}\le M_0=\mathrm{const}<\infty;$

2). $\left|\,f\left(t,\,x_1,\,y_1\right)-f\left(t,\,x_2,\,y_2\right)\right|\le L_0\,\left(|\,x_1-x_2\,|+|\,y_1-y_2\,|\right),\;\;0<L_0=\mathrm{const}<\infty;$

3). $\left|\,q_i\left(t,\,x_1\right)-q_i\left(t,\,x_2\right)\right|\le L_{0\,i}\,|\,x_1-x_2\,|\,,\;\;0<L_{0\,i}=\mathrm{const}<\infty,\;\;i=1,\,2;$

4). $\rho=L_0M_3\left(2+M_0\left(L_{01}+L_{02}\right)\right)\max\limits_{t_0\le t\le T}\left[\frac{k_0M_3}{|\,1-\sigma_2\,|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha\,(\alpha+1)}+\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right]<1$, где

$$k_0=\frac{(T-t_0)^{\alpha+2}}{\alpha\,(\alpha+1)(\alpha+2)},\quad M_3\ge\max_{t_0\le t\le T}\left|\,E_{\alpha,\alpha}\left(-\omega\cdot\left(t-t_0\right)^{\alpha}\right)\right|.$$

Тогда существует единственное решение начальной задачи (1), (2) в пространстве непрерывных функций $C\,(t_0;\,T)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений:

$$\begin{cases}\left(t-t_0\right)^{2-\gamma}x_{\,0}(t,\,\omega)=\left(t-t_0\right)^{2-\gamma}G\,(t,\,\omega),\\ \left(t-t_0\right)^{2-\gamma}x_{\,k+1}(t,\,\omega)=\Im\left(t;\,x_{\,k}\right),\;\;k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\end{cases}$$

где

$$G(t,\,\omega)=\varphi_0\cdot\left(t-t_0\right)^{\gamma-2}E_{\alpha,\,\gamma-1}\left(-\omega\cdot\left(t-t_0\right)^{\alpha}\right)+\varphi_1\cdot\left(t-t_0\right)^{\gamma-1}E_{\alpha,\,\gamma}\left(-\omega\cdot\left(t-t_0\right)^{\alpha}\right)+$$

$$+\frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\int\limits_{t_0}^{t}s\,(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha}\right)d\,s.$$

**Литература**


1. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Yverdon, Gordon and Breach, 1993.

2. *Mainardi F.* Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. In: Carpinteri, A., Mainardi, F. (eds.) Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer, Wien, 1997.

3. *Area I., Batarfi H., Losada J., Nieto J. J., Shammakh W., Torres A.* On a fractional order Ebola epidemic model // Adv. El. J. Differ. Equations. 2015. Vol. 1, Article ID 278.

4. *Hussain A., Baleanu D., Adeel M.* Existence of solution and stability for the fractional order novel coronavirus (nCoV-2019) model // Adv. in Differ Equations. 2020. 384.

5. *Ullah S., Khan M. A., Farooq M., Hammouch Z., Baleanu D.* A fractional model for the dynamics of tuberculosis infection using Caputo–Fabrizio derivative // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S. 2020. Vol. 13, № 3. P. 975-993.

6. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Vols. 1–8. Tenreiro Machado J. A. (ed.). Berlin, Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2019.

7. *Kumar D., Baleanu D.* Editorial: fractional calculus and its applications in physics // Front. Phys. 2019. Vol. 7. № 6.

8. *Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W.* A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications // Fract. Calc. Appl. Anal. 2019. Vol. 22, № 1 P. 27–59.

9. *Saxena R. K., Garra R., Orsingher E.* Analytical solution of space-time fractional telegraph-type equations involving Hilfer and Hadamard derivatives // Integral Transforms Spec. Funct. 2015. Vol. 27, № 1. P. 30–42.

10. *Юлдашев Т. К., Овсяников С. М.* Приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений с запаздывающим аргументом и приближенное вычисление функционала качества // Журнал СВМО. 2015. Том 17, № 2. С. 85–95.

11. *Юлдашев Т. К.* Предельная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с двухточечными смешанными максимумами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. Том 1, № 16. С. 15–22.

12. *Юлдашев Т. К.* Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра // Дифференц. уравнения. 2018. Том 54, № 12. С. 1687–1694

13. *Юлдашев Т. К.* О разрешимости одной краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Том 59, № 2. С. 252–263.

# Об одной задаче для уравнения, связанного с перидинамической моделью

**Юлдашева А.В.**

*филиал МГУ в городе Ташкенте*

yuasv86@mail.ru

Рассмотрим в области $\Omega \subset R^2$ с кусочно-гладкой границей следующую задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\Omega} K(x,y)\,[u(x,t) - u(y,t)]\,dy = f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что неизвестная функция $u : \Omega \times [0,T] \to R$, ядро $K : \Omega \times \Omega \to R$ и внешняя сила $f : \Omega \times [0,T] \to R$ являются скалярными функциями, причём $n = 2$.

Интегральный оператор в правой части уравнения (1) имеет специальное сильно сингулярное ядро, особенность которого заключается в том, что вблизи диагонали $x = y$ оно имеет вид

$$K(x,y) \ = \ \frac{c_n}{|x-y|^n} \ + \ \gamma(x,y),$$

где $\gamma(x,y)$ интегрируемая функция, и выполняется граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} K(x,y) \ = \ 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь $\nu = \nu(x)$ − внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ области $\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$.

Уравнение (1) является гиперсингулярным и неограниченным в классических функциональных пространствах, таких, как $L_p(\Omega)$ или соболевские пространства $W_p^l(\Omega)$.

При решении задачи мы воспользуемся самосопряжённым расширением оператора Лапласа $-\Delta$, порождённым граничными условиями Неймана. Спектр этого расширения состоит из обственных значений $\{\lambda_k\}$, а собственные функции $\{v_k(x)\}$ удовлетвряют соотношениям:

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v(x), \ x \in \Omega, \qquad \frac{\partial v_k(s)}{\partial \nu} = 0, \ s \in \partial\Omega, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Решение этой спектральной задачи мы понимаем в смысле $W_2^1(\Omega)$

Для любого $\beta \geq 0$ введём гильбертово пространство $H^\beta(\Omega) \ = \ D\left((I-\Delta)^{\beta/2}\right)$ с нормой

$$\|u\|_\beta^2 \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} (1+\lambda_k)^\beta |(u, v_k)|^2.$$

Имеет место следующая теорема

**Теорема 1.** *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $0 < \beta < \alpha/n$. *Для любого* $T > 0$ *и любых* $\varphi \in W_2^\alpha(\Omega)$, $\psi \in W_2^\alpha(\Omega)$ *и* $f \in C\big\{[0,T] \to W_2^\alpha(\Omega)\big\}$ *существует, и при том единственное, решение задачи (1)-(2) из класса* $C^2\big\{[0,T] \to H^\beta(\Omega)\big\}$.

В работах [1-4] изучались решения данной задачи Коши, допускающие разрывы первого рода по пространственной переменной, исключаемые моделями, описываемыми дифференциальными уравнениями.

## Литература


1. *Q. Du, J. R. Kamm, R. B. Lehoucq, and Michael L. Parks* A new approach for a nonlocal, nonlinear conservation law,SIAM J. Appl. Math., № 72(1), 2012, 464–487.

2. *E. Emmrich, R. Lehoucq, and D. Puhst.* Peridynamics: A Nonlocal Continuum Theory,Lecture Notes in Computational Science and Engineering, №89, 2013, 45–65.

3. *S. A. Alimov, Y. Cao and O. A. Ilhan* On the problems of peridynamics with special convolution kernels,J. of Integral Equations and Applications, № 26, 2014, 301-321. 4. *S. A. Alimov and S. Sheraliev* On the solvability of the singular equation of peridynamics, Complex Variables and Elliptic Equations, № 5, 2019, 873-887.

# Интегральное представление усеченных смешанных дробных производных Маршо-Адамара и типа Маршо-Адамара

**Яхшибоев М.У.**

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
m.yakhshiboev@gmail.com

Ж. Адамаром (J.Hadamard [2]) была введена конструкция дробного интегродифференцирования, являющаяся дробной степенью $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$, приспособленная к полуоси и инвариантная относительно растяжения.

Работа посвящена интегральным представлениям усеченных смешанных дробных производных Маршо-Адамара и типа Маршо-Адамара в весовых смешанных пространствах Лебега. Доказанны теоремы обращения смешанных дробных интегралов Адамара и типа Адамара от функций в весовых смешанных пространствах Лебега.

В статьях [1], [3], [4], [5] были рассмотрены операторы одномерного дробного интегродифференцирования Адамара и типа Адамара.

Рассмотрение ведется в рамках пространств со смешанной нормой

$$\mathcal{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}\left(\mathbf{R}_{+}^{n},\, \frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \left\{ f : \left\| f;\ \mathcal{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}} \right\| = \left\{ \int\limits_{0}^{\infty} [\ldots (\int\limits_{0}^{\infty} |f(x)|^{p_1} x_1^{-\gamma_1} \frac{dx_1}{x_1})^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots ]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} x_n^{-\gamma_n} \frac{dx_n}{x_n} \right\}^{\frac{1}{p_n}} < \infty \right\},$$

$$C_{\overline{\gamma}}\left(\mathbf{R}_{+}^{n}\right) = \left\{ f : \| f;\ C_{\overline{\gamma}} \| = \max_{x\in\mathbf{R}_{+}^{n}} \left| x^{-\overline{\gamma}} f(x) \right| < \infty,\ \lim_{|x|\to 0} x^{-\overline{\gamma}} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} x^{-\overline{\gamma}} f(x) \right\},$$

$\gamma_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}$. Норма в $\mathcal{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}}$ также определяется формулой

$$\left\| f;\ \mathcal{L}_{\overline{\gamma}}^{\overline{p}} \right\| = \left\| x^{-\overline{\gamma}*} f;\ L^{\overline{p}} \right\|, 1 \leq \overline{p} \leq \infty,$$

где $x^{-\overline{\gamma}^*} = x_1^{-\gamma_1^*} \ldots x_n^{-\gamma_n^*}$, $\gamma_i^* = \begin{cases} \frac{\gamma_i}{p_i}, & 1 \leq p_i < \infty, \\ \gamma_i,\ p_i = \infty, & i = \overline{1,n}. \end{cases}$ Введем смешанная конечную разность функции $f$ векторного порядка $l = (l_1, l_2 \ldots, l_n)$, $l_k \in \mathbf{N}$, с мультипликативным векторным шагом $t \in \mathbf{R}_{+}^{n}$:

$$(\tilde{\Delta}_t^l f)(x) = \tilde{\Delta}_{\xi_1}^{l_1} [\tilde{\Delta}_{\xi_2}^{l_2} \ldots (\tilde{\Delta}_{\xi_n}^{l_n} f)](x) = \sum_{0\leq|k|\leq l} (-1)^{|k|} \binom{l}{k} f\left(x \circ t^k\right),$$

здесь $x \circ t^k = \left(x_i \cdot t_1^{k_1}, \ldots, x_n \cdot t_n^{k_n}\right)$, $\binom{l}{k} = \prod\limits_{i=1}^{n} \binom{l_i}{k_i}$, $\binom{l_i}{k_i}$ – биномиальные коэффициенты, $k-$ мультииндекс.

**Определение 1.** Для функции $\varphi(x)$, заданной во всем октанте $\mathbf{R}_{+}^{n}$, интегралы

$$(J_{+\ldots+,\mu}^{\alpha} \varphi)(x) = \int\limits_{0}^{x_1} \cdots \int\limits_{0}^{x_n} \varphi(t) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \left(\frac{t_i}{x_i}\right)^{\mu_i} \left(\ln \frac{x_i}{t_i}\right)^{\alpha-1} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n},$$

$$\left(J^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi\right)(x)=\int\limits_{x_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{x_n}^{\infty}\varphi\left(t\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\frac{x_i}{t_i}\right)^{\mu_i}\left(\ln\frac{t_i}{x_i}\right)^{\alpha_i-1}\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_n}{t_n}$$

назовем смешанными интегралами дробного порядка $\alpha$ ( $\alpha_i>0,\ i=\overline{1,n}$ ) типа Адамара (соответственно левосторонними и правосторонними).

**Определение 2.** Для функции $f\left(x\right)$, заданной в октанте $\mathbf{R}^n_+$, выражение

$$\left(D^{\alpha}_{\pm\ldots\pm}f\right)(x)=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}æ\left(\alpha_k,l_k\right)}\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\prod_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{1}{t_k}\right)^{-1-\alpha_k}\left(\tilde{\Delta}^l_{t^{\pm1}}f\right)(x)\,\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_n}{t_n}$$

назовем дробной смешанной приозводной Маршо-Адамара порядка $\alpha=\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$, $\alpha_i>0,\ i=\overline{1,n}$.

**Определение 3.** Для функции $f\left(x\right)$, заданной в октанте $\mathbf{R}^n_+$, выражение

$$D^{\alpha}_{\pm\ldots\pm,\mu}f=\left(\tilde{D}^{\alpha_1}_{\pm,\mu_1}+\mu_1^{\alpha_1}E\right)\otimes\left(\tilde{D}^{\alpha_2}_{\pm,\mu_2}+\mu_2^{\alpha_2}E\right)\otimes\ldots\otimes\left(\tilde{D}^{\alpha_n}_{\pm,\mu_n}+\mu_n^{\alpha_n}E\right)f=$$

$$=\tilde{D}^{\alpha_1}_{\pm,\mu_1}\otimes\ldots\otimes\tilde{D}^{\alpha_n}_{\pm,\mu_n}f+\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{D}^{\alpha_1}_{\pm,\mu_1}\otimes\ldots\otimes\tilde{D}^{\alpha_n}_{\pm,\mu_n}\right)_{\mu_i^{\alpha_i}E}f+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i<j}}^{n}\left(\tilde{D}^{\alpha_1}_{\pm,\mu_1}\otimes ...\otimes\tilde{D}^{\alpha_n}_{\pm,\mu_n}\right)_{\mu_{ij}^{\alpha_{ij}}E}f+\ldots+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i<j}}^{n}\left(\mu_1^{\alpha_1}E\otimes\ldots\otimes\mu_n^{\alpha_n}E\right)_{\tilde{D}^{\alpha_{ij}}_{\pm,\mu_{ij}}}f+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_1^{\alpha_1}E\otimes\ldots\otimes\mu_n^{\alpha_n}E\right)_{\tilde{D}^{\alpha_i}_{\pm,\mu_i}}f+\mu_1^{\alpha_1}E\otimes\ldots\otimes\mu_n^{\alpha_n}Ef$$

назовем дробной смешанной приозводной типа Маршо-Адамара порядка $\alpha=\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$, $0<\alpha_k<1,\ k=\overline{1,n}$. В частности, при $n=2$

$$D^{\alpha}_{\pm\ldots\pm,\mu}f=\left(\tilde{D}^{\alpha_1}_{\pm,\mu_1}+\mu_1^{\alpha_1}E\right)\otimes\left(\tilde{D}^{\alpha_2}_{\pm,\mu_2}+\mu_2^{\alpha_2}E\right)f=$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2}{\Gamma\left(1-\alpha_1\right)\Gamma\left(1-\alpha_2\right)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1^{\mu_1}u_2^{\mu_2}\frac{[\tilde{\Delta}^1_{u_2^{\pm1}}(\tilde{\Delta}^1_{u_1^{\pm1}}f)]\left(x\right)}{\left(\ln\frac{1}{u_1}\right)^{\alpha_1+1}\left(\ln\frac{1}{u_2}\right)^{\alpha_2+1}}\frac{du_1}{u_1}\frac{du_2}{u_2}+$$

$$+\mu_2^{\alpha_2}\frac{\alpha_1}{\Gamma\left(1-\alpha_1\right)}\int\limits_0^1 u_1^{\mu_1}\frac{(\tilde{\Delta}^1_{u_1^{\pm1}}f)\left(x\right)}{\left(\ln\frac{1}{u_1}\right)^{\alpha_1+1}}\frac{du_1}{u_1}+$$

$$+\mu_1^{\alpha_1}\frac{\alpha_2}{\Gamma\left(1-\alpha_2\right)}\int\limits_0^1 u_2^{\mu_2}\frac{(\tilde{\Delta}^1_{u_2^{\pm1}}f)\left(x\right)}{\left(\ln\frac{1}{u_2}\right)^{\alpha_2+1}}\frac{du_2}{u_2}+\mu_1^{\alpha_1}\mu_2^{\alpha_2}f\left(x_1,x_2\right),$$

где $0<\alpha_k<1,\ k=1,2$.

**Теорема 1**. Пусть $f\left(x\right)=\left(J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi\right)(x)$, $\varphi\in\mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$, где $1\leq p_i<\infty,\ \ \gamma_i>0$, $\mu_i\geq 0$, $\mu_i>-\frac{\gamma_i}{p_i}$, $0<\alpha_i<1$, $i=\overline{1,n}$, и $0<\rho_i<1$, $i=\overline{1,n}$, усеченная смешанная дробная производная $D^{\alpha}_{+\ldots+,\mu;\,1-\rho}f$ имеет следующее интегральное представление

$$D^{\alpha}_{+\cdots+,\mu;\,1-\rho}f=\int\limits_{\mathbf{R}^n}K^{+}_{\alpha,\,\mu}\left(t,\,\rho\right)\varphi\left(x\circ\rho^{t}\right)dt,$$

где $K^{+}_{\alpha,\,\mu}\left(t,\,\rho\right) = K^{+}_{\alpha_1,\,\mu_1}\left(t_1,\,\rho_1\right)\cdot\cdot\cdot K^{+}_{\alpha_n,\,\mu_n}\left(t_n,\,\rho_n\right),\quad K^{+}_{\alpha_i,\,\mu_i}\left(t_i,\,\rho_i\right) = \frac{\sin\alpha_i\pi}{\pi}\frac{\rho_i^{\mu_i\,t_i}}{t_i}[(\alpha_i\,\Gamma\left(-\alpha_i,\,\mu_i\,\ln\frac{1}{\rho_i}\right) + +\Gamma\left(1-\alpha_i\right))\left(\mu_i\,\ln\frac{1}{\rho_i}\right)^{\alpha_i}\left(t_i\right)^{\alpha}_{+} - \left(t_i-1\right)^{\alpha_i}_{+}]$, $\Gamma\left(-\alpha_i,\,\mu_i\ln\frac{1}{\rho_i}\right)$, $i=\overline{1,n}-$ неполная гамма-функция. При этом ядро $K^{+}_{\alpha_i,\,\mu_i}\left(t_i,\,\rho_i\right)\in L_1\left(R^1_{+}\right)$ является усредняющим $\int\limits_0^{\infty}K^{+}_{\alpha_i,\,\mu_i}\left(t_i,\,\rho_i\right)dt_i = 1, K^{+}_{\alpha_i,\,\mu_i}\left(t_i,\,\rho_i\right) > 0$ при $0<t_i<1$.

**Теорема 2**. Пусть $f\left(x\right)=\left(J^{\alpha}_{+\ldots+}\varphi\right)\left(x\right),\,\varphi\in\mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$ , где $\alpha_i>0,\ 1\le p_i\le\infty,\ \gamma_i>0,\ i=\overline{1,n}$, или $0<\alpha_i<1,\ 1<p_i<\frac{1}{\alpha},\,\gamma_i=0,\ i=\overline{1,n}$ и $0<\rho_i<1,\ i=\overline{1,n}$. Тогда усеченная смешанная дробная производная $D^{\alpha}_{+\ldots+,\,1-\rho}f$ имеет следующее интегральное представление

$$\left(D^{\alpha}_{+\ldots+,1-\rho}f\right)\ \left(x\right)=\int\limits_0^{\infty}\ldots\int\limits_0^{\infty}\prod_{i=1}^{n}K^{+}_{l_i,\alpha_i}(y_i)\varphi(x\circ\rho^{y})dy_1\cdots dy_n, \tag{1}$$

где ядро

$$K^{+}_{l_i,\,\alpha_i}(y_i)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{l_i}\left(-1\right)^{k}\left(\begin{array}{c}l_i\\k\end{array}\right)\left(y_i-k\right)^{\alpha_i}_{+}}{\vartheta\left(\alpha_i,l_i\right)\Gamma(1+\alpha_i)y_i}\in L_1\left(\mathbf{R}^1_{+}\right) \tag{2}$$

при $l>\alpha>0,\ \int\limits_0^{\infty}K^{+}_{l_i,\,\alpha_i}(y_i)dy_i=1,\ l_i>\alpha_i>0.$

**Теорема 3**. Пусть $f\in\mathcal{L}^{\overline{r}}_{\overline{\lambda}},\quad 1\le r_i\le\infty,\lambda_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}$ такова, что ее разность $(\tilde{\Delta}^{l}_{t}f)\left(x\right)$ порядка $l$ представима модифицированным смешанным адамаровским дробным интегралом $\left(\tilde{\Delta}^{l}_{\tau}f\right)\left(x\right)=J^{\alpha,l}_{+\cdots+,\tau}$ от функции из $\mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}}$:

$$(\tilde{\Delta}^{l}_{\tau}f)\left(x\right)=\int\limits_0^{\infty}\ldots\int\limits_0^{\infty}\left(\tilde{\Delta}^{l}_{\tau^{-1}}k^{+}_{\alpha}\right)\left(y\right)\varphi\left(x\circ y\right)\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_n}{y_n},$$

where $l_i>\alpha_i>0,\ 0<\tau_i<1,\ \varphi\in\mathcal{L}^{\overline{p}}_{\overline{\gamma}},\ 1\le p_i\le\infty,\quad\gamma_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}$ и $0<\rho_i<1,\ i=\overline{1,n}$. Тогда усеченная смешанная дробная производная $D^{\alpha}_{+\ldots+,1-\rho}f$ допускает интегральное представление (1) при всех $1\le p_i<\infty,\,\gamma_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}$ и интегральное представление

$$\left(D^{\alpha}_{+\ldots+,1-\rho}f\right)\ \left(x\right)=K_1\left(\Pi^{1}_{\rho_1^{t_1}}-\Pi^{1}_{0}\right)\otimes\cdots\otimes K_n\left(\Pi^{n}_{\rho_n^{t_n}}-\Pi^{n}_{0}\right)\varphi\left(x\right)$$

при всех $p_i=\infty,\gamma_i=0,\ i=\overline{1,n}$, где оператор $\Pi^{i}_{0}$ is: $(\Pi^{i}_{0}\varphi)\left(x\right)=\varphi\left(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n\right)$ в частности, при $n=2$

$$\left(D^{\alpha}_{+\ldots+,1-\rho}f\right)\ \left(x\right)=K_1\left(\Pi^{1}_{\rho_1^{t_1}}-\Pi^{1}_{0}\right)\otimes K_2\left(\Pi^{2}_{\rho_2^{t_2}}-\Pi^{2}_{0}\right)\varphi\left(x\right)=$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty K^+_{l_1,\alpha_1}(t_1)\, K^+_{l_2,\alpha_2}(t_2)\, \varphi\left(x_1 \cdot \rho_1^{t_1}, x_2 \cdot \rho_2^{t_2}\right) dt_1 dt_2 -$$

$$- \int\limits_0^\infty K^+_{l_1,\alpha_1}(t_1)\, \varphi\left(x_1 \cdot \rho_1^{t_1}, 0\right) dt_1 - \int\limits_0^\infty K^+_{l_2,\alpha_2}(t_2)\, \varphi\left(0, x_2 \cdot \rho_2^{t_2}\right) dt_2 + \varphi(0,0),$$

при всех $p_i = \infty$, $\gamma_i = 0,\ i = 1, 2$, где $K^+_{l_i,\alpha_i}(t_i)-$ где оператор (2).

*Литература*


1. *Butzer P. L., Kilbas A. A. and Trujillo J.J.* Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property// J. Math. Anal. Appl.. Vol. 269, No. 2. 2002. pp. 387–400.

2. *Hadamard J.* Essai sur l'retude des functions donnrees par leur developpment de taylor// J. math. pures et appl.. Vol.8, Ser. 4. 1982. pp. 101–186.

3. *Kilbas A.* Hadamard-type fractional calculus // J. Korean Math. Soc.. Vol.38, No.6. 2001. pp. 1191–1204.

4. *Килбас А.А., Титюра А.А.* Дробная производная типа Маршо-Адамара и обращение дробных интегралов типа Адамара// Доклады НАН Беларуси. Т. 50, N 4. 2006. С. 5-10.

5. *Yakhshiboev M.U.* Hadamard-type Fractional Integrals and Marchaud-Hadamard-type Fractional Derivatives in the Spaces With Power Weight// Uzbek Mathematical Journal. No. 3 2019.C. 155-174.

# Path. Бўлим. Раздел. 3

- **Functional analysis and algebra**

- **Функционал анализ ва алгебра**

- **Функциональный анализ и алгебра**

# The Bergman kernel for the Cartesian product of the classical domains

**Abdullayev J.Sh.**[1]

*National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek*
jonibek-abdullayev@mail.ru

In classical theory, such kind kernels are usually constructed in bounded symmetric domains (see [1]). One of these domains is classical domains and matrix balls associated with classical domains. A number of problems were set for these domains, (see [2]): finding the transitive group of automorphisms in these matrix balls, calculating the Bergman and Cauchy-Szegő kernels for these domains, finding the Carleman formula, restoring the values of holomorphic functions in classical domains and in matrix balls by the values of the function on some boundary sets of uniqueness (see [3-4]).

In homogeneous domains, automorphism groups for finding integral formulas [5-6]. Domains with rich automorphism groups are often implemented as matrix domains [1-2]. They are useful in solving various problems in function theory. Writing out explicitly the transitive group of automorphisms of classical domains and matrix balls associated with classical domains, a direct calculation can be used to find the Bergman and Cauchy-Szegő kernels for these domains. And then (using the properties of the Poisson kernel) we can find the Carleman formula, which restores the values of holomorphic functions in this domain from its values on some boundary sets of uniqueness (see [7]). In this case, the scheme for finding the Bergman and Cauchy-Szegő kernels from [1], [8] is used. In [9] the volumes of a matrix ball of the third type and a generalized Lie ball are calculated. The total volumes of these domains are necessary for finding the kernels of integral formulas for these domains (The Bergman, Cauchy - Szegő, Poisson kernels, etc. (see, for example, [3], [8]). In addition, it is used for the integral representation of functions holomorphic in these domains, in the mean value theorem and in other important concepts. In [10] gives definitions of holomorphic and pluriharmonic functions are for classical domains of the first type by E. Cartan, who studied the Laplace and Hua Luogeng operators and a connection is found between these operators.

The paper presents, an analogue of Bremermann's theorem on finding the Bergman kernel is obtained for the Cartesian product of classical domains. For this purpose, the groups of automorphisms of the considered domains are used, i.e., the Bergman kernels are constructed for the Cartesian product of classical domains, without applying to the complete orthonormal systems.

## References

1. *Hua Luogeng.* Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains, Inostr. Lit., M., 1959 (in Russian)

2. *Khudayberganov G., Kytmanov A.M., Shaimkulov B.A.* Analysis in matrix domains. Monograph. Krasnoyarsk, Siberian Federal University. 297 p. (in Russian) (2017)

3. *Khudayberganov G., Abdullayev J.Sh.* Relationship between the Kernels Bergman and Cauchy-Szegő in the domains $\tau^+(n-1)$ and $\Re_{IV}^n$. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 13:5, 559–567(2020).

4. *Kytmanov A.M., Nikitina T.N.* Analogs of Carleman's formula for classical domains, Mat. Zametki, 45:3 (1989), 87–93; Math. Notes, 45:3 (1989), 243–248

5. *Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P.* Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis, Novosibirsk: Nauka, 335 pp (1979). (in Russian) Engl. transl.: transl. Math. Monogr. Vol. 58, Providence, 283 pp. (1983).

6. *Gindikin S.G. Analysis in homogeneous domains*, Uspekhi Mat. Nauk, 19:4 (118) (1964), 3–92; Russian Math. Surveys, 19:4 (1964), 1–89

7. *Khudayberganov G., Rakhmonov U.S., Matyakubov Z.Q.* Integral formulas for some matrix domains, Topics in Several Complex Variables, AMS, 2016, 89–95

8. *Simona G. Myslivets.* Construction of Szegő and Poisson kernels in convex domains, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2018, Volume 11, Issue 6, 792–795

9. *Rakhmonov U.S., Abdullayev J.Sh.* On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls, Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 29:4 (2019), 548–557

10. *Khudayberganov G, Khalknazarov A.M., Abdullayev J.Sh.* Laplace and Hua Luogeng operators, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2020, no. 3, 74–79

# On the Invariant Curve of a Gonosomal Evolution Operator

**Absalamov Akmal Tolliboyevich**

Samarkand State University, Department of Mathematics, Boulevard str., 140104, Samarkand, Uzbekistan.

e-mail absalamov@gmail.com

Non-linear dynamical systems, in general, is currently a very active field of mathematical research. In this paper we consider discrete-time dynamical systems generated by gonosomal evolution operators of sex linked inheritance, see [1-4] for more details.

Consider the evolution operator $W : S^{2,2} \to S^{2,2}$ which is defined as:

$$W : \begin{cases} x' &= \dfrac{axu}{(x+y)(u+v)}, \\ y' &= \dfrac{\sigma_1 xv + ayu + ayv}{(x+y)(u+v)}, \\ u' &= \dfrac{\sigma_2 xv + bxu + byu}{(x+y)(u+v)}, \\ v' &= \dfrac{byv}{(x+y)(u+v)}. \end{cases} \tag{1}$$

where

$$S^{2,2} = S^3 \setminus \Theta,$$

$S^3 = \Big\{ s = (x, y, u, v) \in R^4 : x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, x + y + u + v = 1 \Big\}$ - 3 dimensional simplex

$$\Theta = \{ s = (x, y, u, v) \in S^3 : (x, y) = (0, 0) \ or \ (u, v) = (0, 0) \}$$

and coefficients of this operator satisfy

$$a + b = \sigma_1 + \sigma_2 = 1, \quad a, b, \sigma_1, \sigma_2 > 0.$$

The main problem for a given operator $W$ and arbitrarily initial point $s^{(0)} \in S^{2,2}$, is to describe the limit points of the trajectory $\{s^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$, where

$$s^{(m)} = W^m(s^{(0)}) = \underbrace{W(W(...W}_{m}(s^{(0)}))...).$$

The forms of fixed points of the operator $W$ are:

$$F_{11} = \Big\{(0, a, u, v) : \quad u + v = b, \quad u,\, v \in [0, b]\Big\}$$

and

$$F_{12} = \Big\{(x, y, b, 0) : \quad x + y = a, \quad x,\, y \in [0, a]\Big\}$$

It is not hard to see that $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 - \frac{v}{b}$ and $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 - \frac{x}{a}$ are eigenvalues of the fixed points of the forms $F_{11}$ and $F_{12}$ respectively.

**Theorem 1.** For any initial point $(x, y, u, v) \in S^{2,2}$ the sequence $W^m(x, y, u, v) = (x^{(m)}, y^{(m)}, u^{(m)}, v^{(m)})$ is convergent and

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} \cdot v^{(m)} = 0.$$

**Theorem 2.** For any initial point $(x, y, u, v) \in S^{2,2}$ the $\omega$-limit set of the operator $W$ is:

$$\omega(t) = \begin{cases} (0, a, b, 0) & if \quad t = (x, y, u, v) \in T_0, \\ F_{12} & if \quad t = (x, y, u, v) \in T_1, \\ F_{11} & if \quad t = (x, y, u, v) \in T_2 \end{cases} \tag{2}$$

where

$$T_0 = \Big\{(x, y, u, v) \in S^{2,2} : \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \lim_{m\to\infty} v^{(m)} = 0 \Big\},$$

$$T_1 = \Big\{(x, y, u, v) \in S^{2,2} : \lim_{m\to\infty} v^{(m)} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} x^{(m)} \in (0, a]\Big\},$$

$$T_2 = \Big\{(x, y, u, v) \in S^{2,2} : \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} v^{(m)} \in (0, b]\Big\}.$$

We make the notation

$$p_1 = \frac{\sigma_1}{a}, \qquad p_2 = \frac{\sigma_2}{b}.$$

There are three possibilities for $p_1$, $p_2$.

$$\begin{aligned} &1. \quad p_1 = p_2 = 1, \\ &2. \quad p_1 > 1 > p_2 > 0, \\ &3. \quad p_2 > 1 > p_1 > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

**Theorem 3.** If $p_1 = p_2 = 1$ then $\Omega_\theta = \Big\{(x, y, u, v) \in S^{2,2} : \quad \frac{v}{u+v} = \frac{x}{x+y} + 1 - \theta\Big\}$ is invariant respect to the operator (1).

Note that when $p_1 = p_2 = 1$, it holds that

$$\bigcup_{\theta\in[0,1)} \Omega_\theta = T_2 = \Big\{(x, y, u, v) \in S^{2,2} : yv > xu\Big\},$$

$$\bigcup_{\theta\in(1,2]}\Omega_\theta = T_1 = \Big\{(x,y,u,v)\in S^{2,2} : yv < xu\Big\},$$

$$\Omega_1 = T_0 = \Big\{(x,y,u,v)\in S^{2,2} : yv = xu\Big\}$$

and

$$\Omega_{\theta_1}\cap\Omega_{\theta_2} = \emptyset \quad for \quad any \quad \theta_1\neq\theta_2.$$

The dynamical system on the invariant surface $\Omega_\theta$ has the following result.

**Theorem 4.** (i) For any initial point $t=(x,y,u,v)\in T_0$, we have

$$\lim_{m\to\infty} W^{(m)}(x,y,u,v) = \lim_{m\to\infty}(x^{(m)},y^{(m)},u^{(m)},v^{(m)}) = (0;a;b;0).$$

(ii) For any initial point $t=(x,y,u,v)\in T_1$ there exists $\theta\in(1,2]$ such that

$$\lim_{m\to\infty} W^{(m)}(x,y,u,v) = \lim_{m\to\infty}(x^{(m)},y^{(m)},u^{(m)},v^{(m)}) = (a\theta;a(1-\theta);b;0).$$

(iii) For any initial point $t=(x,y,u,v)\in T_2$ there exists $\theta\in[0,1)$ such that

$$\lim_{m\to\infty} W^{(m)}(x,y,u,v) = \lim_{m\to\infty}(x^{(m)},y^{(m)},u^{(m)},v^{(m)}) = (0;a;b\theta;b(1-\theta)).$$

## References


1. *Lyubich Y.I.* Mathematical structures in population genetics. Springer-Vergar, Berlin. (1992).

2. *Bacaër N.* A short history of mathematical population dynamics. Springer-Verlag London, Ltd., London, (2011).

3. *Absalamov A.T., Rozikov U.A.* The dynamics of gonosomal evolution operator. Journal of Applied Nonlinear Dynamics, **9** (2020), 247-257.

4. *Absalamov A.T.* The Global Attractiveness of the Fixed Point of a Gonosomal Evolution Operator. Discontinuity Nonlinearity and Complexity. 2021, V.10., No.1, p.143-149.


# Some construction of new Gibbs measure for the SOS model on a Cayley tree


**B.U.Abraev**

Chirchiq state pedagogical Institute, Chirchiq, Uzbekistan
abrayev89@mail.ru,


Let $\Gamma^k=(V,L)$ be the uniform Cayley tree, where each vertex has $k+1$ neighbors with $V$ being the set of vertices and $L$ the set of edges.

Let $\Phi:=\{0,1,2,...,m\}, m\geq 1$, and the configuration $\sigma\in\Phi^V$, i.e., $\sigma=\{\sigma(x)\in\Phi : x\in V\}$.

Consider the Hamiltonian

$$H(\sigma) = -J\sum_{\langle x,y\rangle\in L}|\sigma(x)-\sigma(y)|, \tag{1}$$

where $J \in R$ and $\langle x, y\rangle$ means neighboring vertices.

The model corresponding to (1) is called the SOS model (solid-on-solid ) model.

In [3] for the SOS model on $Z^d$ it was proved that there is $T_0 > 0$ such that for $T < T_0$ the structure of the thermodynamic phases is determined by the dominant ground states of the SOS model: for even $m$ the Gibbs measure (GM) is unique, for odd $m$ there are two periodic GMs.

In [6] the authors proved existence of up to seven phases in the case of ferromagnetic interactions. They investigated whether these states are extremal or non-extremal in the set of all Gibbs measures.

The *Cayley tree* $\Gamma^k$ of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Let $\Gamma^k = (V, L)$ where $V$ is the set of vertices and $L$ the set of edges. Two vertices $x$ and $y$ are called *nearest neighbors* if there exists an edge $l \in L$ connecting them and we denote $l = \langle x, y\rangle$. A collection of nearest neighbor pairs $\langle x, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y\rangle$ is called a *path* from $x$ to $y$.

On this tree, there is a natural distance to be denoted by $d(x, y)$, being the number of nearest neighbor pairs of the minimal path between the vertices $x$ and $y$.

For a fixed $x^0 \in V$, the root, let

$$W_n = \{x \in V : d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V : d(x, x^0) \leq n\}$$

be respectively the sphere and the ball of radius $n$ with center at $x^0$, and for $x \in W_n$ let

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(y, x) = 1\}$$

be the set of direct descendants (successors) of $x$.

Let assume that the spins take values in the set $\Phi := \{0, 1, 2\}$. A configuration $\sigma$ on $A \subseteq V$ is defined as the function $x \in A \mapsto \sigma_A(x) \in \Phi$. The set of all configurations coincides with $\Omega_A = \Phi^A$. Put $\Omega = \Omega_V$ and $\sigma = \sigma_V$.

Let $G_k$ be a free product of $k+1$ cyclic groups of the second order with generators $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, respectively. It is known that there exists a one-to-one correspondence between the set of vertices $V$ of the Cayley tree $\Gamma^k$ and the group $G_k$ (see [8], for detailed properties of this group representation).

A periodic configuration is defined as the configuration $\sigma \in \Omega$ that is invariant with respect to some subgroup $G_k^* \subset G_k$. In other words, a configuration $\sigma \in \Omega$ is called periodic if $\sigma(yx) = \sigma(x)$ for any $x \in G_k$ and $y \in G_k^*$. For a given periodic configuration, the subgroup index is called the configuration period. A configuration that is invariant with respect to all shifts on the tree is called translation-invariant. The Hamiltonian $H : \Omega \to R$ of the SOS model is given by the formula (1).

For a finite domain $D \subset V$ with the boundary condition $\varphi_{D^c}$ given on its complement $D^c = V \backslash D$, the conditional Hamiltonian is

$$H(\sigma_D|\varphi_{D^c}) = -J \sum_{\substack{\langle x,y\rangle, \\ x,y\in D}} |\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| - J \sum_{\substack{\langle x,y\rangle, \\ x\in D, y\in D^c}} |\sigma_n(x) - \omega(y)|. \tag{2}$$

A probability measure $\Omega$ on $(\Omega, B)$ (where $B$ is the $\sigma$-algebra generated by cylinder subsets of $\Omega$) is called a Gibbs measure (with Hamiltonian $H$) if it satisfies the Dobrushin-Lanford-Ruelle (DLR) equation: for all finite $D \subset V$ and $\sigma_D \subset \Omega_D$:

$$\mu(\{\omega \in \Omega : \omega|_D = \sigma_D\}) = \int_\Omega \mu(d\varphi) \upsilon_\varphi^D(\sigma_D),$$

where $\upsilon_\varphi^D$ is the conditional probability (finite-volume Gibbs measure):

$$\upsilon_\varphi^D(\sigma_n) = \frac{1}{Z_{D,\varphi}} \exp(-\beta H(\sigma_D|\varphi_{D^c}).$$

Here,

$$Z_{D,\varphi} = \sum_{\widetilde{\sigma}_D \in \Omega_D} \exp(-\beta H(\widetilde{\sigma}_D|\varphi_{D^c})).$$

Since only neighboring vertices interact, the GM satisfies the Markov property, if a configuration $\omega_{W_n}$ is given, then the configurations in $V_{n-1}$, i.e. inside $W_n$, and in $V \setminus V_{n+1}$, i.e. outside $W_n$ are (conditionally) independent.

It is known that for any $\beta > 0$ the set of all GMs forms a nonempty convex compact subset in the space of all probability measures (see, for example, [1], [2], [7]).

Fix $x^0 \in V$. For $x, y \in V$ we will write $x < y$ if the path from $x^0$ to $y$ passes through $x$. A vertex $y$ is called a direct descendant of $x$ if $y > x$ and $x$, $y$ are neighbors. Note that in $\Gamma^k$ every vertex $x \neq x^0$ has $k$ direct descendants, and $x^0$ has $k+1$ descendants.

Consider a special class of GMs, which in the work [1] are called Markov chains, and in the work [4] - splitting GMs (SGMs).

Let $h : x \mapsto h_x = (h_{0,x}, h_{1,x}, ..., h_{m,x}) \in R^{m+1}$ be a vector function of $x \in V \setminus \{x^0\}$. Consider a probability distribution $\mu^{(n)}$ on $\Omega_{V_n}$:

$$\mu^n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}), \tag{3}$$

where $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ and

$$Z_n = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp(-\beta H(\tilde{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\tilde{\sigma}(x),x}).$$

A probability distribution $\mu^{(n)}$ is said to be compatible if for any $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{Vn-1}$, we have

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \cup \omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \tag{4}$$

where $\sigma_{n-1} \cup \omega_n \in \Omega_{V_n}$.

In this case, there is a unique measure $\mu$ on $\Omega$ such that

$$\mu(\{\sigma_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

for all $n$ and $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$. Such a measure is called an SGM corresponding to the Hamiltonian $H$ and to the function $x \mapsto h_x, x \neq x_0$.

The following statement gives a condition on $h_x$ guaranteeing that the distribution of $\mu^{(n)}(\sigma_n)$ is compatible.

**Theroem 1.**[5] *The probability distributions $\mu^{(n)}(\sigma_n), n = 1, 2, ...$ determined by the formula (3) are compatible iff for any $x \in V \setminus \{x^0\}$ the following equation holds:*

$$h_x^* = \sum_{y \in S(x)} F(h_y^*, m, \theta), \tag{5}$$

*где* $\theta = e^{J\beta}, \beta = \frac{1}{T}$. *Here* $h_x^* = (h_{0,x} - h_{m,x}, h_{1,x} - h_{m,x}, ..., h_{m-1,x} - h_{m,x})$ *and* $F(\bullet, m, \theta): R^m \to R^m$ *is a vector function, i.e.*

$$F(h, m, \theta) = (F_0((h, m, \theta), ..., F_{m-1}(h, m, \theta))), \quad h = (h_0, h_1, ..., h_{m-1}),$$

*such that*

$$F_i(h, m, \theta) = \ln \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|} e^{h_j} + \theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j} e^{h_j} + 1}, \quad i = 0, ..., m-1. \tag{6}$$

Let $\bar{G_k}$ is a normal subgroup of $G_k$.

**Definition 1.** A set of vectors $h = \{h_x, x \in G_k\}$ is called $\bar{G_k}$-periodic, if $h_{yx} = h_x$ for any $x \in G_k$, $y \in \bar{G_k}$. $G_k$-periodic collection of vectors is called translation-invariant.

**Definition 2.** A measure $\mu$ is called $\bar{G_k}$ -periodic, if it correspond to a $\bar{G_k}$-periodic set of vectors $h$. $G_k$-periodic Gibbs measures are called translation-invariant.

In numerous studies (see, for example, [1], [3-5]), periodic Gibbs measures for various models of statistical mechanics have been studied on the Cayley tree. These measures were mainly translation-invariant, or $G_k^{(2)}$-periodic, where $G_k^{(2)}$ is a subgroup of $G_k$, which consist of the words of even length.

Let $k = 2$ and $\Phi = \{0, 1, 2\}$, i.e. $m = 2$. Suppose $h_{2,x} = 0$. For translation-invariant Gibbs measures from (5), using notations $e^{\frac{h_0}{2}} = x$, $e^{\frac{h_1}{2}} = y$, we get the following system of equations:

$$\begin{cases} x = \frac{x^2+\theta y^2+\theta^2}{\theta^2 x^2+\theta y^2+1} \\ y = \frac{\theta x^2+y^2+\theta}{\theta^2 x^2+\theta y^2+1} \end{cases} \tag{7}$$

Note that $x = 1$ satisfies the first equation of (7) for any $\theta$. In [6] the following is proved.

**Theorem 2.** For the SOS model with $m = 2$ and $\theta = \theta_{cr} (\approx 0.1242)$ on the Cayley tree of order five, there are at least two non-periodic Gibbs measures.

**Remark 1.** It was proved in [3] that for $m = 2$ and $\theta \geq \theta' (\approx 0.53)$ on the Cayley tree of order five there exists a unique translation-invariant Gibbs measure; if $\theta < \theta'$, there is a three translation-invariant Gibbs measure on a Cayley tree. Note that the described Gibbs measures in Theorem 2 are not translation-invariant, i.e. different from the measures found in [3].

**Theorem 3:** For the SOS model with $m = 2$ and $\theta \in E(a, b)$, there are at least two non-periodic Gibbs measures on the Cayley tree of order $k = a + b + 2$.

**Remark 2.** Note that the set $E(a, b)$ is not empty, since the case $a = 1, b = 2$ is considered in Theorem 2. Also it is easy to cheek, that in the cases $a = e, b = 2e, \forall e \in N$ the set $E(a, b)$ is not empty. May be exist another $(a, b) \in \{(a, b) : a = e, b = 2e, \forall e \in N\}$, which the set $E(a, b)$ is not empty.

## References


1. *K. Preston,* Gibbs states on countable sets, Mir, M., 1977

2. *Christof Külske, Utkir A. Rozikov* Random Structures and Algorithms DOI 10.1002/rsa. 2017 640.

3. *A. E. Mazel, Yu. M. Suhov, J. Statist.* Phys., 64 (1991), 111-134.

4. *R. Fernandez,* Contour ensembles and the description of Gibbsian probability distributions at low temperature, http://www.univ-rouen.fr//LMRS/Persopage/Fernandez/resucont.html, 1998.

5. *Rozikov U.A. Suhov Y.M.* Gibbs measures for SOS model on a Cayley tree. Inf.Dim.An.,Quant.Prob. and Related Topics. 2006, V9, N3, 471-488.
6. *C.Kuelske, U.A.Rozikov,* Extremality of translation-invariant phases for s three-state SOS-model on the binary tree. J.Stat.Phys. (2015) 160:659-680, doi 10.1007/s10955-015-1279-9.
7. *Ya. G. Sinai,* Theory of phase transitions: rigorous results, Science, M., 1980.
8. *U.A. Rozikov,* Gibbs Measures on Cayley Trees World Scientific, Singapore, 2013.

# Ergodic theorems for flows in Banach ideals of compact operators

**Azizov A. N., Chilin V. I.**

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
azizov.07@mail.ru, vladimirchil@gmail.com

**Introduction**

Advancing Lance's extension of the pointwise ergodic theorem for actions of the group of integers on von Neumann algebras, Conze and Dang-Ngoc [1] and Watanabe [8] studied continuous extensions of Lance's results. In particular, the noncommutative ergodic theorems were established for actions of the semigroups $R_+^d$ and $R_+$ respectively. The corresponding ergodic theorem for actions of $R_+$ and with respect to bilaterally almost uniform convergence (in Egorov's sense) was initially considered by Junge and Xu [5]. In particular, they derived that these averages converge bilaterally almost uniformly in any noncommutative $L^p$-space for $1 \leq p < \infty$ and almost uniformly if $2 \leq p < \infty$.

Denote by $\{T_t\}_{t\geq 0}$ a strongly continuous semigroup of Dunford-Schwartz operators acting in fully symmetric ideal $\mathcal{C}_E$ of compact operators, and let

$$A_t(x) = \frac{1}{t}\int_0^t T_s(x)ds, \ x \in \mathcal{C}_E, t > 0,$$

be the corresponding ergodic averages. We establish that the net $A_t(x)$ converge to some $\widehat{x} \in \mathcal{C}_E$ with respect to the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$ as $t \to \infty$ for all $x \in \mathcal{C}_E$. Besides, we show that if $\mathcal{C}_E \neq \mathcal{C}_1$ and $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ is separable space, then $\|A_t(x) - \widehat{x}\|_{\mathcal{C}_E} \to 0$ as $t \to \infty$. Note that, along with any Schatten ideals $\mathcal{C}_p, \ 1 \leq p < \infty,$ of compact operators, the family of such fully symmetric ideals $\mathcal{C}_E$ contains many noncommutative counterparts of classical symmetric sequence space, examples of which are given in the last section of this note.

**Preliminaries**

Let $l^\infty$ (respectively, $c_0$) be the Banach lattice of bounded (respectively, converging to zero) sequences $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ of complex numbers equipped with the uniform norm $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup\limits_{n\in N} |\xi_n|$, where $N$ is the set of natural numbers.

If $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$, then the non-increasing rearrangement $\xi^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^\infty$ of $\xi$ is defined by

$$\xi_n^* = \inf\left\{\sup_{n\notin F} |\xi_n| : F \subset N, \ |F| < n\right\}.$$

The Hardy-Littlewood-Polya partial order in the space $l^\infty$ is defined as follows:

$$\xi = \{\xi_n\} \prec\prec \eta = \{\eta_n\} \iff \sum_{n=1}^m \xi_n^* \leq \sum_{n=1}^m \eta_n^* \quad \text{for all} \quad m \in N.$$

A non-zero linear subspace $E \subset l^\infty$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called a *symmetric* (*fully symmetric*) sequence space if

$$\eta \in E,\ \xi \in l^\infty,\ \xi^* \leq \eta^* \text{ (respectivelly, } \xi^* \prec\prec \eta^*) \implies \xi \in E \text{ and } \|\xi\|_E \leq \|\eta\|_E.$$

Let $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ be an infinite-dimensional separable Hilbert space over the field $C$ of complex numbers, and let $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ be the $C^*$-algebra of bounded linear operators in $\mathcal{H}$. Denote by $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (respectively, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$) the two-sided ideal of compact (respectively, finite rank) linear operators in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Let $\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x = x^*\}$, $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) : x \geq 0\}$, and let $\tau : \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \to [0,\infty]$ be the canonical trace on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, that is, $\tau(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x\varphi_i, \varphi_i)$, $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, where $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ is an orthonormal basis in $\mathcal{H}$.

Let $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ be the lattice of projections in $\mathcal{H}$. If $\mathbf{1}$ is the identity of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, we will write $e^\perp = \mathbf{1} - e$.

Let $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, and let $\{e_\lambda\}_{\lambda \geq 0}$ be the spectral family of projections for the absolute value $|x| = (x^*x)^{1/2}$ of $x$, that is, $e_\lambda = \{|x| > \lambda\}$. If $t > 0$, then the $t$-th generalized singular number of $x$, or the non-increasing rearrangement of $x$, is defined as (see [3]) $\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \tau(e_\lambda^\perp) \leq t\}$. A non-zero linear subspace $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ with a Banach norm $\|\cdot\|_X$ is called noncommutative symmetric (fully symmetric) if the conditions $x \in X$, $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mu_t(y) \leq \mu_t(x)\ \forall\ t > 0$ (respectively, $\int\limits_0^s \mu_t(y)dt \leq \int\limits_0^s \mu_t(x)dt\ \forall\ s > 0$ (writing $y \prec\prec x$)) imply that $y \in X$ and $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.

The spaces $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$, as well as the classical Banach two-sided ideals (Schatten ideals)

$$\mathcal{C}_p = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\},\ 1 \leq p < \infty,$$

are examples of noncommutative fully symmetric spaces.

If $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, then $|x| = \sum\limits_{n=1}^{m(x)} s_n(x)p_n$ (if $m(x) = \infty$, the series converges uniformly, i.e. with respect to the operator uniform norm $\|x\|_\infty$), where $\{s_n(x)\}_{n=1}^{m(x)}$ is the set of eigenvalues of the compact operator $|x|$ in the decreasing order, and $p_n$ is the projection onto the eigenspace corresponding to $s_n(x)$. In this case the non-increasing rearrangement $\mu_t(x)$ of $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ can be identified with the sequence $\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $s_n(x) \downarrow 0$ (if $m(x) < \infty$ then $s_n(x) = 0$ for all $n > m(x)$).

Let $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ be an orthonormal basis in $\mathcal{H}$, and let $p_n$ be an one-dimensional projection on the one-dimensional subspace $C \cdot \varphi_n \subset \mathcal{H}$. If $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ is a noncommutative symmetric space then the set

$$E(X) = \left\{\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in c_0 :\ x_\xi = \sum_{n=1}^\infty \xi_n p_n \in X\right\}$$

(the series converges uniformly) is a symmetric sequence space with respect to the norm $\|\xi\|_{E(X)} = \|x_\xi\|_X$. Therefore, each symmetric space $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ generates a symmetric sequence space $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)}) \subset c_0$. The converse is also true: every symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ generates a symmetric space $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ by the following rule (see, for example, [6, Chapter 3, Section 3.5]):

$$\mathcal{C}_E = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\} \in E\}, \quad \|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E.$$

The pair $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is called a Banach ideal of compact operators (cf. [4, Chapter III]). It is clear that $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_E \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ for every symmetric sequence space $E \subset c_0$, in addition, $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|x\|_1$ and $\|y\|_\infty \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$ for all $x \in \mathcal{C}_1$ and $y \in \mathcal{C}_E$.

Hardy-Littlewood-Polya partial order in the Banach ideal $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ is defined by

$$x \prec\prec y, \ x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff \{s_n(x)\} \prec\prec \{s_n(y)\}.$$

We say that a Banach ideal $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is fully symmetric, if conditions $y \in \mathcal{C}_E$, $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $x \prec\prec y$ entail that $x \in \mathcal{C}_E$ and $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$. It is clear that $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a fully symmetric ideal if and only if $(E, \|\cdot\|_E)$ is a fully symmetric sequence space.

A linear contraction $T : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is called a Dunford-Schwartz operator (writing $T \in DS$), if $T(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1$ and $\|T(x)\|_1 \leq \|x\|_1$ for all $x \in \mathcal{C}_1$. We will write $T \in DS^+$ if $T$ is a positive Dunford-Schwartz operator, that is, $T \in DS$ and $T(\mathcal{B}_+(\mathcal{H})) \subset \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$.

It is well known that the fully symmetric ideal $\mathcal{C}_E$ is an exact interpolation space in the Banach pair $(\mathcal{C}_1, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ (see [2, Theorem 2.4]). Consequently, $T(\mathcal{C}_E) \subset \mathcal{C}_E$ and $\|T\|_{\mathcal{C}_E \to \mathcal{C}_E} \leq 1$ for all $T \in DS$. In particular, $T(\mathcal{K}(\mathcal{H})) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ and the restriction of $T$ on $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ is a linear contraction (also denoted by $T$).

The following theorem establishes an extension of any linear contraction $T : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$ with the property $\|T(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ for all $x \in \mathcal{C}_1$ up to the Dunford-Schwarz operator $\widetilde{T} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

**Theorem 1.** Let $T : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$ be a linear contraction such that $\|T(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ for all $x \in \mathcal{C}_1$. Then there exists a unique operator $\widetilde{T} \in DS$ such that $\widetilde{T}(x) = T(x)$ for all $x \in \mathcal{C}_1$, and $\widetilde{T}$ is $\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{C}_1)$-continuous.

**The main results**

Let $R$ be the set of real numbers and let $R_+ = \{t \in R, \ t \geq 0\}$. In what follows, $\{T_t\}_{t \in R_+} \subset DS^+$ is a semigroup such that $T_0(x) = x$ for all $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

A semigroup $\{T_t\}_{t \in R_+}$ is said to be strongly continuous on fully symmetric ideal $\mathcal{C}_1$, if $\lim\limits_{t \to s} \|T_t(x) - T_s(x)\|_1 = 0$ for each $x \in \mathcal{C}_1$.

Let $\{T_t\}_{\in R_+} \subset DS^+$ be a strongly continuous semigroup on $\mathcal{C}_1$. Fix $x \in \mathcal{C}_1$. Then for any given $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ the function $\varphi_{x,y}(t) = \tau(T_t(x)y)$ is continuous on $R_+$. Therefore, if $\mu$ is the Lebesgue measure on $R_+$, then the map $U_x : R_+ \to \mathcal{C}_1$ defined as $U_x(t) = T_t(x)$ is weakly $\mu$-measurable [9, Ch.V, § 4]. Since, in addition, $U_x(R_+)$ is a separable subset in $\mathcal{C}_1$, Pettis theorem [9, Ch.V, § 4] entails that the map $U_x$ is strongly $\mu$-measurable and the real function $\|U_x(t)\|_1 = \|T_t(x)\|_1$ is $\mu$-measurable on $R_+$. Since $\|T_t(x)\|_1 \leq \|x\|_1$, it follows that $\|T_s(x)\|_1$ is an integrable function on $[0, t]$ for any $t > 0$. By [9, Ch.V, § 5, Theorem 1], the function $T_s(x)$ is Bochner $\mu$-integrable on $[0, t]$, $t > 0$. Therefore, for any $x \in \mathcal{C}_1$ and $t > 0$ there exists $A_t(x) = \frac{1}{t} \int_0^t T_s(x) ds \in \mathcal{C}_1$. It is clear that $\|A_t(x)\|_1 \leq \|x\|_1$ and $\|A_t(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ for all $x \in \mathcal{C}_1$. Consequently, by Theorem 1, there exists a unique operator $\widetilde{A_t} \in DS$ such that $\widetilde{A_t}(x) = A_t(x)$ for all $x \in \mathcal{C}_1$, and $\widetilde{A_t}$ is $\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{C}_1)$-continuous. Below, the operator $\widetilde{A_t}$ is denoted by $A_t$.

**Theorem 2.** Let $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ be a fully symmetric Banach ideal, and let $\{T_t\}_{t \in R_+} \subset DS^+$ be a strongly continuous semigroup on $\mathcal{C}_1$. Then

$(i)$. (Individual ergodic Theorem). Given $x \in \mathcal{C}_E$, the averages $A_t(x)$ converge to some $\widehat{x} \in \mathcal{C}_E$ with respect to the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$ as $t \to \infty$.

$(ii)$. (Mean ergodic Theorem). If $\mathcal{C}_E \neq \mathcal{C}_1$ and $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ is separable space, then $\|A_t(x) - \widehat{x}\|_{\mathcal{C}_E} \to 0$ as $t \to \infty$.

**Applications to Orlicz and Lorentz Banach ideals**

In this section we give applications of Theorem 2 to Orlicz and Lorentz ideals of compact operators.

1. Let $\Phi$ be an *Orlicz function*, that is, $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ is left-continuous, convex, increasing and such that $\Phi(0) = 0$ and $\Phi(u) > 0$ for some $u \neq 0$. Let

$$l_\Phi(N) = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty : \sum_{n=1}^\infty \Phi\left(\frac{|\xi_n|}{a}\right) < \infty \text{ for some } a > 0 \right\}$$

be the corresponding *Orlicz sequence space*, and let $\|\xi\|_\Phi = \inf\left\{ a > 0 : \sum\limits_{n=1}^\infty \Phi\left(\frac{|\xi_n|}{a}\right) \leq 1 \right\}$ be the *Luxemburg norm* in $l_\Phi(N)$. It is well-known that $(l_\Phi(N), \|\cdot\|_\Phi)$ is a fully symmetric sequence space.

If $\Phi(u) > 0$ for all $u \neq 0$, then $\sum\limits_{n=1}^\infty \Phi\left(\frac{1}{a}\right) = \infty$ for each $a > 0$. Hence $\mathbf{1} = \{1, 1, ...\} \notin l_\Phi(N)$ and $l_\Phi(N) \subset c_0$. If $\Phi(u) = 0$ for all $0 \leq u < u_0$, then $\mathbf{1} \in l_\Phi$ and $l_\Phi(N) = l^\infty$.

It is said that an Orlicz function $\Phi$ satisfies $(\Delta_2)$-*condition at* 0 if there exist $u_0 \in (0, \infty)$ and $k > 0$ such that $\Phi(2u) < k \cdot \Phi(u)$ for all $0 < u < u_0$ . It is well known that an Orlicz function $\Phi$ satisfies $(\Delta_2)$-condition at 0 if and only if $(l_\Phi(N), \|\cdot\|_\Phi)$ is a separable space.

We also note that $l_\Phi(N) = l^1$ as sets if and only if $\limsup\limits_{u\to 0} \frac{\Phi(u)}{u} > 0$ [7, Chapter 16, §16.2].

Set $\mathcal{C}_\Phi = \mathcal{C}_{l_\Phi(N)}$ and $\|x\|_\Phi = \|x\|_{\mathcal{C}_{l_\Phi(N)}}$, $x \in \mathcal{C}_\Phi$. Theorem 2 yield the following.

**Theorem 3.** Let $\Phi$ be an Orlicz function. Then

$(i)$. If $\Phi(u) > 0$ for all $u > 0$, $T \in DS^+$, and $x \in \mathcal{C}_\Phi$, then the averages $A_t(x)$ converge to some $\widehat{x} \in \mathcal{C}_\Phi$ with respect to the uniform norm as $t \to \infty$;

$(ii)$. If $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0$ and the Orlicz function $\Phi$ satisfy $(\Delta_2)$-condition at 0, then $\|A_t(x) - \widehat{x}\|_\Phi \to 0$ as $t \to \infty$.

2. Let $\psi$ be a concave function on $[0, \infty)$ with $\psi(0) = 0$ and $\psi(t) > 0$ for all $t > 0$, and let

$$\Lambda_\psi(N) = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty : \|\xi\|_{\Lambda_\psi} = \sum_{n=1}^\infty \xi_n^*(t)(\psi(n) - \psi(n-1)) < \infty \right\}$$

be the corresponding *Lorentz space.* It is well-known that $(\Lambda_\psi(N), \|\cdot\|_{\Lambda_\psi})$ is a fully symmetric sequence space (see, for example, [7, Part III, Ch.9, § 9.1]); in addition, if $\psi(\infty) = \infty$, then $\mathbf{1} \notin \Lambda_\psi(N)$ and $\Lambda_\psi(N) \subset c_0$. If $\psi(\infty) < \infty$, then $\mathbf{1} \in \Lambda_\psi(N)$ and $\Lambda_\psi(N) = l^\infty$. In addition, the space $(\Lambda_\psi(N), \|\cdot\|_{\Lambda_\psi})$ is separable if and only if $\psi(+0) = 0$ and $\psi(\infty) = \infty$ [7, Ch.9, §9.3, Theorem 9.3.1]. It is clear that $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t} > 0$ if and only if the norms $\|\cdot\|_{\Lambda_\psi}$ and $\|\cdot\|_1$ are equivalent on $\Lambda_\psi(N)$, i.e. the equality $\Lambda_\psi(N) = l^1$ (as sets) is true.

Set $\mathcal{C}_{\Lambda_\psi} = \mathcal{C}_{\Lambda_\psi(N)}$ and $\|x\|_{\Lambda_\psi} = \|x\|_{\mathcal{C}_{\Lambda_\psi(N)}}$, $x \in \mathcal{C}_{\Lambda_\psi}$. Theorem 2 imply the following.

**Theorem 4.** Let $\psi$ be a concave function on $[0, \infty)$ with $\psi(0) = 0$ and $\psi(t) > 0$ for all $t > 0$. Then

$(i)$. If $\psi(\infty)=\infty$, then the averages $A_t(x)$ converge to some $\widehat{x}\in\mathcal{C}_{\Lambda_\psi}$ with respect to the uniform norm;

$(ii)$. If $\psi(+0)=0$, $\psi(\infty)=\infty$ and $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t}=0$, then $\|A_t(x)-\widehat{x}\|_{\mathcal{C}_{\Lambda_\psi(N)}}\to 0$ as $t\to\infty$.

### References


1. *Conze J.P., Dang-Ngoc N.* Ergodic theorems for noncommutative dynamical systems, Invent. Math., Vol. 46, 1978, pp. 1–15.
2. *Dodds P.G., Dodds T.K. and Pagter B.* Fully symmetric operator spaces, J. Integr. Equat. Oper. Theory, Vol. 15, 1992, pp. 942–972.
3. *Fack T., Kosaki H.* Generalized $s$-numbers of $\tau$-measurable operators, Pacific. J. Math., Vol. 123, 1986, pp. 269–300.
4. *Gohberg I.C., Krein M.G.* Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18, 1969, Amer. Math. Soc., Providence, RI 02904.
5. *Junge M., Xu Q.* Noncommutative maximal ergodic theorems, J. Amer. Math. Soc., Vol. 20, iss. 2, 2007, pp. 385–439.
6. *Lord S., Sukochev F. and Zanin D.* Singular Traces, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2013.
7. *Rubshtein B.A., Grabarnik G.Ya., Muratov M.A., and Pashkova Yu.S.* Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz Spaces. Springer International Publishing, Switzerland, 2016.
8. *Watanabe S.* Ergodic theorems for dynamical semi-groups on operator algebras, Hokkaido Math. J., Vol. 8, 1979, pp. 176–190.
9. *Yosida K.* Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.


# Limit theorem of hitting times for crictical circle maps


**Ayupov Sh.A. , Jalilov A.A.**

*Institute of Mathematics, ASRUz*

shavkat.ayupov@mathinst.uz, adjalilov2013@gmail.com


The goal of this talk is to study the asymptotic behaviour of critical circle maps with a single critical point having an odd type. These maps have been a subject of intensive study since the early 1980's as one of the two main examples of universality in transition to chaos ([16], [17], [18], [19]) Following to the work Ostlund and etc [17] we define a set of real-analytic commuting pairs that corresponds to a set of real-analytic critical circle homeomorphisms the order of three. We denote by $\mathcal{X}_{cr}(\rho)$ the subset $\mathcal{X}_{cr}$ of pairs $(\xi,\eta)$ for which the rotation number $\rho(f_{\xi,\eta})=\rho=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i.e. it is equal to the golden mean.

Next we define the renormalization group transformation $\mathcal{R}:\mathcal{X}_{cr}(\rho)\to\mathcal{X}_{cr}(\rho)$ :

$$\mathcal{R}(\xi,\eta)=(\alpha\eta(\alpha^{-1}x),\alpha\eta(\xi(\alpha^{-1}x)),$$

where $\alpha:=[\eta(0)-\eta(\xi(0))]^{-1}$. The renormalization group transformation $\mathcal{R}$ has a single hyperbolic stable point $(\xi_0,\eta_0)$ in the subspace $\mathcal{X}_{cr}(\rho)$ ( see [6], [7].)

Graczyk and Swiatek in [4] proved that if $f$ is $C^3$ circle homeomorphism with finitely many critical points of polynomial type and an irrational rotation number, then the conjugating map $\varphi$ is singular function on $S^1$ i. e. $\varphi'(x) = 0$ a.e. on $S^1$. Consequently, the unique probability invariant measure $\mu_f$ of critical circle homeomorphisms $f$ is singular w.r.t. Lebesque measure on $S^1$. We define two Hölder singularity exponents for the invariant measure $\mu_f$ :

$$\overline{\tau}(x) := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \mu_f([x, x+\varepsilon])}{\log |\varepsilon|},$$

$$\underline{\tau}(x) := \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \mu_f([x, x+\varepsilon])}{\log |\varepsilon|}.$$

The functions $\overline{\tau}(x)$ and $\underline{\tau}(x)$ are invariant with respect to $f$. The other hand the map $f$ is ergodic with respect to measures $\mu_f$ and $\lambda$ ( see [4]). Consequently, the functions $\overline{\tau}(x)$ and $\underline{\tau}(x)$ are almost constant with respect to both the measures $\mu_f$ and $\lambda$. The obtained constants denote by $\overline{\tau}(\mu)$, $\underline{\tau}(\mu)$ and $\overline{\tau}(\lambda)$, $\underline{\tau}(\lambda)$. Graczyk and Swiatek in [4] proved that for cubic circle maps with irrational rotation numbers of the "bounded type,"the following bounds hold:

$$1 < \underline{\tau}(\lambda) \leq \overline{\tau}(\lambda) < +\infty, 0 < \underline{\tau}(\mu),\ \ \overline{\tau}(\mu) < 1. \tag{1}$$

Another important characterestic of the singular invariant measure $\mu := \mu_f$ is the Hausdorff dimension $HD(\mu)$ (the infimum of dimensions of sets of "full $\mu-$ measure"). The well known Frostman lemma states that the Hausdorff dimension $HD(\mu)$ satisfies $0 < HD(\mu) < 1$.

A. Dzhalilov in [9] built the thermodynamic formalism for critical circle maps $f$ in $Cr(\rho)$ and showed that the upper and lower singularity exponents of the invariants measure $\mu$ coincide i.e. $\overline{\tau}(\lambda) = \underline{\tau}(\lambda) =: \tau(\lambda)$ and $\overline{\tau}(\mu) = \underline{\tau}(\mu) =: \tau(\mu)$. Applying (1) we have

$$1 < \tau(\mu) < \tau(\lambda) < +\infty.$$

The problem of regularity of the conjugacy between two critical maps with identical irrational rotation number arises naturally. This is called the rigidity problem for critical circle homeomorphisms. For the critical circle maps the rigidity problem is developed by de Faria, de Melo, Yampolsky, Khanin and Teplinsky, Guarino among others.

Next we formulate the result of P. Guarino, M. Martens and W. de Melo [5].

**Theorem 1.** *(see [5]) Let $f_1$ and $f_2$ be two analytic $C^4$-circle homeomorphisms with the same irrational rotation number and with a unique critical point of the same odd type. Then they are $C^1$-smoothly conjugate to each other. The conjugacy is $C^{1+\alpha}$ for Lebesgue almost every rotation number.*

Denote by $Cr(\rho)$ the set of all circle homeomorphisms whose are $C^1-$conjugated to $f_{cr}$. and defined on the standard circle $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0, 1)$. It is well known (see [3]) that any two topological conjugated homeomorphisms have the same rotation number. Therefore, the rotation numbers of homeomorphisms of $Cr(\rho)$ are the same and equal to $\rho$.

Studying the asymptotic behaviour the hitting times is one of classical problems of ergodic theory.

Limit laws of hitting times have been obtained in various contexts such as: hyperbolic automorphisms of the torus and Markov chains [11], Axiom A diffeomorphisms and shifts of finite type with a Hölder potential [12] and piecewise expanding maps of the circle [13].

Let $(X, \mathbb{B}, \mu)$ be a probability measure space and $T : X \to X$ be $\mu-$ invariant transformation. Fix a point $z \in X$ and consider the measurable subset $A \subset X$, such that $\mu(A) > 0$. Define the **first hitting time** $N_A^{(1)} : X \to \mathbb{N}$ as

$$N_A^{(1)}(x) = inf\{i \geq 1 : f^i(x) \in A\},$$

and we set $N_A(x) = \infty$, if $f^i(x) \notin A$ for all $i \in \mathbb{N}$. The restriction of $N_A^{(1)}(x)$ to $A$ is called the **first return time** of $A$. The fundamental theorem of Poiencare ( see for instance [15]) states that $\mu-$ almost all points $x$ of $A$ return infinitely many times.

The problem consists of finding conditions under which the hitting time, after rescaling by some suitable constant depending on A, converges in law, when $\mu(A)$ tends to zero. Since the expectation of the first hitting time is of the order $1/\mu(A)$, it is natural to rescale the hitting time by this factor.

In present talk we study the behaviour of rescaled hitting times for the critical circle maps in $Cr(\beta)$.

Let $f$ be an orientation preserving homeomorphism of the circle $S^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1 \simeq [0, 1)$ with irrational rotation number $\rho = \rho(f)$. Let $\mu = \mu_f$ be the unique invariant probability measure of $f$. Fix a point $z \in S^1$ and consider the interval $\mathfrak{J}_\varepsilon(z) = [z, z+\varepsilon] \subset S^1$. Consider the first hitting time to the interval $\mathfrak{J}_\varepsilon(z)$: $N_\varepsilon^{(1)}(t) = inf\{i \geq 1 : f^i \in \mathfrak{J}_\varepsilon(z)\}$. Next define rescaled hitting time as $E_\varepsilon^{(1)}(t) = \mu(\mathfrak{J}_\varepsilon(z))N_\varepsilon^{(1)}(t)$ We are interested in the converges of the distribution function of the random variable $E_\varepsilon^{(1)}(t)$ i.e. in the convergence of the distribution function

$$F_\varepsilon(t) = \mu\left(x \in S^1 : E_\varepsilon^{(1)}(x) \leq t\right), \ \ \forall t \in \mathbb{R}^1,$$

as $\varepsilon \to 0$, for every $t$ belonging to the continuity points of the limit function.

Coelho and de Faria in [8], Coelho in [14] investigated the problem of convergence of random variables $E_\varepsilon^{(1)}(t)$ for linear irrational rotations $f_\rho(x) = x+\rho \ mod 1$. It is known that for linear irrational rotation $f_\rho$ the Lebesgue measure $\ell$ is the unique invariant measure.

De Faria and Z. Coelho in [8] studied $F_n(t)$ when $c_n$ is chosen such that $[x_c, c_n]$ corresponds to a sequence of renormalization intervals for $f$. It is proved in [8] that for Lebesque almost every rotation number $\rho$, the rescaled hitting times $E^{(1)}(\cdot) := \mu([x_c, c_n])N_n^{(1)}(\cdot)$ do not converge in law as $c_n$ tends to zero, and all possible limit laws under a subsequence of $c_n$ are obtained.

Fix $\theta \in (0, 1)$. Let $q_n, \ n \geq 1$ be the first return times for $f_\rho$ . For every $n \geq 1$ uniquely define the points $c_n(\theta)$ by relation:

$$\mu([x_0, c_n(\theta)]) = \theta \cdot \mu([x_0, f^{q_n}(x_0)]),$$

We denote by $I_{n,\theta}$ the interval $[x_0, c_n(\theta))$. Consider the hitting time $N_{n,\theta}^{(1)}$ to the interval $I_{n,\theta}$ and rescaled hitting time $E_{n,\theta}^{(1)}(x) := \mu(I_{n,\theta})N_{n,\theta}^{(1)}(x)$.

There are two natural measures on the circle: invariant probability measure $\mu$ and Lebesque measure $\ell$. We define two distribution functions of $E_{n,\theta}^{(1)}(x)$ :

$$F_{\theta,n}(t) = \mu\left(x \in S^1 : E_{n,\theta}^{(1)}(x) \leq t\right), \ \ t \in \mathbb{R}^1,$$

$$\Phi_{\theta,n}(t) = \ell\left(x \in S^1 : E_{n,\theta}^{(1)}(x) \leq t\right), \ \ t \in \mathbb{R}^1. \tag{3}$$

De Faria and Z. Coelho in [8] studied $F_n(t)$ when $c_n$ is chosen such that $[x_c, c_n]$ corresponds to a sequence of renormalization intervals for $f$. It is proved in [8] that for Lebesque almost every rotation number $\rho$, the rescaled hitting times $E^{(1)}_{n,\theta}(x)(\cdot) := \mu([x_c, c_n])N^{(1)}_n(\cdot)$ do not converge in law as $c_n$ tends to zero, and all possible limit laws under a subsequence of $c_n$ are obtained.

Z. Coelho in [14] investigated all the possible limit distributions for $F_{\theta,n}(t)$ under a subsequence $c_n \to 0$. It is showed that for every convergent subsequence $F_{\theta,n_m}(t), m = 1, 2, ...$ the limit distribution $F_\theta(t)$ is piecewise linear on $[0, 1]$, $F_\theta(t) = 0,\ t \le 0$ and $F_\theta(t) = 1,\ t \ge 1$. Notice that the results is valid for all circle diffeomorphisms which are $C^1-$ conjugate to an rigid irrational rotation $f_\rho(x) := x + \rho$, mod 1 (see [10],[7]) and replacing the invariant measure $\mu$ by Lebesque measure.

In this talk we investigate the rescaled hitting times for critical circle maps $f \in Cr(\rho)$.

We should mention that asymptotic time distributions have been obtained in a number of contexts, when studying hitting and return times of neighbourhoods of generic points in the natural scale of the measure of the neighburhoods.

For finite state Markov chains and Anosov diffeomorphisms [11] Axiom A diffeomorphisms [1], piecewise expanding maps of the interval [13]. We formulate the main result of our talk.

**Theorem 2.** *Let $\rho \in (0, 1)$ and let $f \in Cr(\rho)$ be critical circle map. Consider for $\theta \in (0, 1)$ the sequence of distribution functions $\{\Phi_{n,\theta}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ with respect to Lebesgue measure on circle corresponding to the first rescaled hitting times $E^{(1)}_{n,\theta}(x)$ to interval $[x_c, c_n(\theta)]$. Then*
*1) for all $t \in \mathbb{R}^1$ there exists the finite limit*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{n,\theta}(t)(t) = \Phi_\theta(t),$$

*where $\Phi_\theta(t) = 0,$ if $t \le 0,$ and $\Phi_\theta(t) = 1,$ if $t > 1$ ;*
*2) $\Phi_\theta(t)$ is a strictly increasing on $[0, 1]$ and continuous distribution function on $\mathbb{R}^1$ .*
*3) $\Phi_\theta(t)$ is singular on $[0, 1]$ i.e. $\Phi'_\theta(t) = 0$ a.e. with respect to Lebesque measure $\ell$.*

## References


1. R. Bowen. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Lecture Notes in Math., N 470, Springer, Berlin (1975).
2. D. Ruelle. Thermodynamic Formalism. Encyclopedia of mathematics and its applications.. v 5, Cambridge University Press, (2004)
3. V.I. Arnol'd. Small denominators: I. Mappings from the circle onto itself. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 21-86 (1961).
4. J. Graczyk, G. Swiatek. Singular measures in circle dynamics. Commun. Math. Phys. 213-230 (1993).
5. P. Guarino, M. Martens and W. de Melo. Rigidity of critical circle maps. Duke Math. J., 2125-2188 (2018).
6. K.M. Khanin and Ya.G. Sinai. Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations. Russ. Math. Surv., 69-99 (1989), translation of Usp. Mat. Nauk, 57-82 (1989).
7. Y. Katznelson and D. Ornstein. The absolute continuity of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle. Ergod. Theor. Dyn. Syst., 681-690 (1989).
8. Z. Coelho, E. de Faria. Limit laws of entrance times for homeomorphisms, *Israel J. Math.* 93 (1996), p. 93-112.
9. A. A. Dzhalilov, Thermodynamic formalism and singular invariant measures for critical circle maps, Theor. Math. Phys., 134, 166-180 (2003).
10. D.H.Kim, B.K.Seo. The waiting time for irrational rotations, *Nonlinearity 16.* 2003, p. 1861-1868.
11. B. Pitskel. Poisson limit law for Markov chains// Ergodic Theory Dynam. Syst.- 1991. V.11.-p. 501-513.

12. M.Hirata. Poisson law for Axiom A diffeomorphisms// Ergodic theory Dynamical Systems.-1993. v. 13.-P.533-556.

13. P. Collet, A. Galves. Asymptotic distribution of entrance times for expanding maps of an interval. Preprint .-1992.

14. Z. Coelho. "The Loss of Tightness of Time Distributions for Homeomorphisms of the Circle", Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 356, No. 11, pp. 4427–4445, 2004.

15. W. De Melo , S. van Strien. One dimensional dynamics-Berlin, New York.: Springer,1993.-P. 3-25.

16. E. De Faria , W. de Melo. Rigidity of critical circle mappings I// Eur.Math. Soc.(JEMS).-1999.-1(4).-.339-392.

17. R. Ostlund , D. Rand , J. Sethna , E. Siggia. Universal Propertias of the transition from quasiperiodisity to Chaos in dissipative Systems//Physica 8D.-1983.-P.303-342.

18. O. E. Lanford, III and R. de la Llave. Solution of the functional equation for critical circle mappings with golden rotation number. Manuscript, 1984.

19. H. Epstein. Fixed points of composition operators. II. Nonlinearity, 2(2):305-310, 1989.

# Separable cubic stochastic operators

**Baratov.B.S**

Karshi State University

baratov.bahodir@bk.ru

One of the main tasks in the study of a dynamic system is to study the evolution of the state of the system. The evolution of a population comprises a determined change of state in the next generations as a result of reproduction and selection.The evolution of a population can be studied by a dynamical system of a nonlinear operator [see e.g. 1,2]. We consider discrete-time dynamical systems generated by cubic stochastic operators. In [3], a new notion of a cubic stochastic operator is introduced and investigated.

Let

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, ..., x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

be the $(m-1)$-dimensional simplex.

**Definition 1.1:** A cubic stochastic operator (CSO) is a mapping $W : S^{m-1} \to S^{m-1}$ of the form

$$W : x_l' = \sum_{i,j,k=1}^{m} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l \in E. \tag{1}$$

where the a matrix $\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(W) = \{P_{ijk,l}\}_{ijk,l=1}^{m}$ satisfying the following properties

$$P_{ijk,l} = P_{kij,l} = P_{ikj,l} = P_{kji,l} = P_{jik,l} = P_{jki,l} \geq 0, \ \sum_{l=1}^{m} P_{ijk,l} = 1 \quad for\ each \quad i,j,k \in E. \tag{2}$$

and the coefficient $P_{ijk,l}$ do not change for any permutation of $i, j$ and $k$ if the types are not relation to sex.

A cubic stochastic operator (CSO) has meaning of a population evolution operator, which arises as follows: Consider a population consisting of $m$ species. The population evolves by starting form an arbitrary state $x^{(0)}$, then passing to the state $x^{(1)} = W(x^{(0)})$ , then to the state $W(x^{(1)}) = W(W(x^{(0)}))$, and so on

$$x^{(t+1)} = W(x^{(t)}), \quad where \quad t = 0, 1, ... \qquad (3).$$

Clearly, that $x^{(t)} = W^{(t)}(x^{(0)})$. We assume that the operator $W$ is continuous and so the general theory of discrete time dynamical systems applies to (3). For any point $x^{(0)} \in S^{m-1}$ the associated sequence $x^{(t)} : t = 0, 1, ...$ . defined by (3) is called the trajectory of $x^{(0)}$.

If $x^{(0)}$ is an equilibrium then the trajectory remains at $x^{(0)}$. More generally, if the trajectory sequence converges and $x^{(\infty)} = \lim_{t\to\infty} x^{(t)}$ then $x^{(\infty)}$ is an equilibrium by (3) and continuity of the operator $W$. Denote by $\omega(x^{(0)})$ the set of limit points of the trajectory $\{x^{(t)}\}_{t=0}^{\infty}$. Since $\{x^{(t)}\}_{t=0}^{\infty} \subset S^{m-1}$ and $S^{m-1}$ is a compact set, it follows that $\omega(x^{(0)})$.

If $\omega(x^{(0)})$ consists of a single point, then the trajectory converges, and $\omega(x^{(0)})$ is a fixed point of the operator $W$.

One of the main problems in mathematical biology is to study the asymptotic behavior of the trajectories. In this paper we consider CSO (1),(2) with additional properties

$$P_{ijk,l} = a_{il} b_{jl} c_{kl}, \quad for\ all \quad i, j, k, l \in E \qquad (4)$$

where $a_{il}, b_{jl}, c_{kl} \in R$ entries of quadratic matrices $A = (a_{il})$, $B = (b_{jl})$ and $C = (c_{kl})$ such that the properties (2) are satisfied for the coefficients (4).

Then the CSO $W$ corresponding to the matrices $A$, $B$ and $C$ has the form

$$x'_l = (W(x))_l = (A(x))_l (B(x))_l (C(x))_l, \ \ for\ all\ \ l \in E, \qquad (5)$$

where

$$(A(x))_l = \sum_{i=1}^{m} a_{il} x_i, (B(x))_l = \sum_{j=1}^{m} b_{jl} x_j, (C(x))_l = \sum_{k=1}^{m} c_{kl} x_k.$$

**Definition 1.2:** The CSO (5) is called separable cubic stochastic operator SCSO $W = (A, B, C)$.
**Remark 1.1:** Let $A = I_m$ or $B = I_m$ or $C = I_m$ be the identity $m \times m$ matrix, then for SCSO $W = (A, B, C)$ becomes

$$x'_l = x_l \quad l \in E.$$

which is a linear stochastic operator.

## REFERENCES


1. *Rozikov U.A., Nazir S.,* "Separable Quadratic Stochastic Operators" Lobachevskii. Jour. Math.**31** No. 3, pp.215–221, (2010), (Russian).

2. *Rozikov U.A., Zada A.,* "On a Class of Separable Quadratic Stochastic Operators" Lobachevskii. Jour. Math, **32**, No.4, pp.397–406,(2011), (Russian).

3. *Rozikov, U.A. and Khamraev, A.Yu.*: On cubic operators, defined on the finite-dimensional simplexes. Ukraine Math. Jour. 56 (10) (2004) p. 1699-1711.

# Approximations of Rauzy-Veech renormalizations of generalized and affine interval exchange maps

**Abdumajid Begmatov**[1,2]

[1]*Faculty of Mathematics, National University of Uzbekistan,*
[2]*Turin Polytechnic University in Tashkent, Uzbekistan*
ab.begmatov@nuu.uz

We study generalized interval exchange maps and prove that their Rauzy-Veech renormalizations converges to the renormalizations of affine interval exchange maps in $C^{1+L_1}$-norm.

Consider the partition of $I$ into $d$ subintervals indexed by $\mathcal{A}$, that is, $\mathcal{P} = \{I_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$. Let $f : I \to I$ be a bijection. We say that the triple $(f, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ is a **generalized interval exchange map** with $d$ intervals (for short g.i.e.m.), if $f|_{I_\alpha}$ is an orientation-preserving homeomorphism for all $\alpha \in \mathcal{A}$.

Let $f : I \to I$ be a g.i.e.m. with alphabet $\mathcal{A}$ and $\pi_0,\, \pi_1 : \mathcal{A} \to \{1, ..., d\}$, be bijections such that $\pi_0(\alpha) < \pi_0(\beta)$, iff $I_\alpha < I_\beta$, and $\pi_1(\alpha) < \pi_1(\beta)$, iff $f(I_\alpha) < f(I_\beta)$. We call pair $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ the **combinatorial data** associated to the g.i.e.m. $f$. When appropriate we will also use the notation $\pi = (\pi(1),\, \pi(2),\, ..., \pi(d))$ for the combinatorial data of $f$. We always assume that the pair $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ is **irreducible**, that is, for all $j \in \{1, ..., d-1\}$ we have: $\pi_0^{-1}(1, ..., j) \neq \pi_1^{-1}(1, ..., j)$. We say that g.i.e.m. $f$ has **cyclic permutation**, if $\pi_0(\{1, 2, ..., d\}) = \{j+1, ..., d, 1, ..., j\}$, for some $1 \leq j \leq d-1$.

Let us assume that the intervals $I_{\alpha(0)}$ and $f(I_{\alpha(1)})$ have different lengths. Then the g.i.e.m. $f$ is called **Rauzy-Veech renormalizable**(renormalizable, for short). If $|I_{\alpha(0)}| > |f(I_{\alpha(1)})|$ we say that $f$ is renormalizable of **type 0**. When $|I_{\alpha(0)}| < |f(I_{\alpha(1)})|$ we say that $f$ is renormalizable of **type 1**. In either case, the letter corresponding to the largest of these intervals is called **winner** and the one corresponding to the shortest is called the **loser** of $\pi$. Let $I^{(1)}$ be the subinterval of $I$ obtained by removing the loser, that is, the shortest of these two intervals:

$$I^{(1)} = \begin{cases} I \setminus f(I_{\alpha(1)}), & \text{if type } 0, \\ I \setminus I_{\alpha(0)}, & \text{if type } 1. \end{cases}$$

The **Rauzy-Veech induction** of $f$ is the first return map $R(f)$ to the subinterval $I^{(1)}$. Denote by $I_\alpha^{(1)}$ the subintervals of $I^{(1)}$. Let $f$ be renormalizable of type 0, then

$$R(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{if } x \in I_\alpha^{(1)} \text{ and } \alpha \neq \alpha(1), \\ f^2(x), & \text{if } x \in I_{\alpha(1)}^{(1)}. \end{cases} \tag{1}$$

If $f$ is renormalizable of type 1, then

$$R(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{if } x \in I_\alpha^{(1)} \text{ and } \alpha \neq \alpha(0), \\ f^2(x), & \text{if } x \in I_{\alpha(0)}^{(1)}. \end{cases} \tag{2}$$

It is easy to see, that $R(f)$ is a bijection on $I^{(1)}$ and an orientation-preserving homeomorphisms on each $I_\alpha^{(1)}$. Moreover, the alphabet $\mathcal{A}$ for $f$ and $R(f)$ remains the same.

The triple $(R(f), \mathcal{A}, \mathcal{P}^1)$ is called the **Rauzy-Veech renormalization** of $f$.

We say that a g.i.e.m. $f$ is **infinitely renormalizable**, if $R^n(f)$ is well defined for every $n \in N$. Let $I^{(n)}$ be the domain of $R^n(f)$. It is clear that, $R^n(f)$ is the first return map for $f$ to the interval $I^{(n)}$. Similarly, $R^n(f)^{-1} = R^n(f^{-1})$ is the first return map for $f$ to the interval $I^{(n)}$.

For every interval of the form $J = [a, b)$ we put $\partial J := \{a\}$.

**Definition**. We say that g.i.e.m. $f$ **has no connection**, if

$$f^m(\partial I_\alpha) \neq \partial I_\beta, \quad \textit{for all} \quad m \geq 1 \quad \textit{and} \quad \alpha, \beta \in \mathcal{A} \quad \textit{with} \quad \pi_0(\beta) \neq 1. \tag{3}$$

Let $\varepsilon_n$ be the type of the $n$-th renormalization and let $\alpha_n(\varepsilon_n)$ the winner and $\alpha_n(1-\varepsilon_n)$ be the loser of the $n$-th renormalization.

**Definition**. We say that g.i.e.m. $f$ has $k$- **bounded combinatorics**, if for each $n \in N$ and $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$ there exist $n_1, p \geq 0$ with $|n - n_1| < k$ and $|n - n_1 - p| < k$ such that

$$\alpha_{n_1}(\varepsilon_{n_1}) = \beta, \, \alpha_{n_1+p}(1 - \varepsilon_{n_1+p}) = \gamma,$$

and

$$\alpha_{n_1+i}(1 - \varepsilon_{n_1+p}) = \alpha_{n_1+i+1}(\varepsilon_{n_1+i}), \quad \textit{for every} \quad 0 \leq i < p.$$

We say that g.i.e.m. $f : I \to I$ has **genus one**(or belongs to the **rotation class**), if $f$ has at most two discontinuities. Note that every g.i.e.m. with either two or three intervals has genus one. The genus of g.i.e.m. is invariant under renormalization.

Denote by $B^{KO}$ the set of g.i.e.m. satisfying the following conditions:

(i) the map $f$ has genus one (cyclic permutation);

(ii) the map $f$ has no connection and has $k$- bounded combinatorics;

(iii) for each $\alpha \in \mathcal{A}$ we can extend $f$ to $\overline{I}_\alpha$ as an orientation-preserving diffeomorphism satisfying Katznelson and Ornstein's(KO, for short) smoothness condition: $f'$ is absolutely continuous and $f'' \in L_p$, for some $p > 1$.

Denote by $B_\star^{KO}$ the subset of functions $f \in B^{KO}$ satisfying **zero mean nonlinearity** condition:

$$\int\limits_{[0,1]} \frac{f''(t)}{f'(t)} dt = 0.$$

Our main result is the following

**Theorem**. Let $f \in B^{KO}$. Then there exist a sequence of positive numbers $\{\delta_n\} \in l_2$ and an affine i.e.m. $(f_A, \mathcal{A}, \{\widetilde{I}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}})$, that is, $f_A|_{\widetilde{I}_\alpha}$ is affine for each $\alpha \in \mathcal{A}$ such that

(i) $f_A$ has the same combinatorics of $f$;

(ii) $\|R^n f - R^n f_A\|_{C^1([0,1])} \leq \delta_n, \quad \|D^2 R^n f - D^2 R^n f_A\|_{L_1([0,1], d\ell)} \leq \delta_n$.

## References


1. A. Begmatov, K. Cunha, A. Dzhalilov: *On the renormalizations of circle homeomorphisms with several break points*, https://arxiv.org/abs/1706.03654v2.

2. K. Cunha, D. Smania: *Renormalization for piecewise smooth homeomorphisms on the circle*, Ann. Inst. H.Poincare, Anal. Non Lineaire, 30(3), 441-462, (2013).

3. K. Cunha, D. Smania: *Rigidity for piecewise smooth homeomorphisms on the circle*, Advances in Mathematics, 250, 193-226, (2014).

4. S. Marmi, P. Moussa, J.-C. Yoccoz: *Linearization of generalized interval exchange maps*. Ann. of Math. 176, 1583-1646, (2012).

5. M. Viana: *Dynamics of interval exchange transformations and Teichmüller flows*. Lecture notes of graduate courses taught at IMPA in 2005 and 2007.

# On equivalence of polygons in finite dimensional vector spaces

**Bekbaev U.**

*Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan*

uralbekbaev@gmail.com

**Introduction**

Let $\mathbb{F}$ be a field, $n$ be any natural number and $T$ be any fixed set. If $\mathbf{u}: T \to \mathbb{F}^n$ is any map then $\mathbf{u}(T) = \{\mathbf{u}(t) : t \in T\}$- the range of $\mathbf{u}$ can be considered as a "parameterized figure"in $\mathbb{F}^n$ and one can consider equivalence of such "parameterized figures"with respect to different motion groups of the linear space $\mathbb{F}^n$ [1].

If $s : T \to T$ is any bijection then $\mathbf{u}(T) = (\mathbf{u} \circ s)(T)$, that is the corresponding "figure"is not changed, where $\circ$ stands for the composition operation $(\mathbf{u} \circ s)(t) = \mathbf{u}(s(t)))$. Therefore investigation of equivalence problem of maps $\mathbf{u} : T \to \mathbb{F}^n$ with respect the motion groups and change of variable $t \in T$ is important. Further it is assumed that elements of $\mathbb{F}^n$ are presented in row-vector form. Let $G$ stand for a subgroup of $GL(n, \mathbb{F})$.

**The main results**

Let $\mathbf{Bi} = \mathbf{Bi}(T)$ stand for the group, with respect to the composition operation, of all bijections of $T$ to itself and $\mathbf{B}$ be a fixed subgroup of $\mathbf{Bi}$.

**Definition 1.** *Two maps* $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$ *are said to be equivalent (more exactly,* $(G, \mathbf{B})$*- equivalent) if the equality*

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{s}(t))g = (u \circ s)(t)g$$

*holds true for some* $g \in G$ *and* $\mathbf{s} \in \mathbf{B}$ *at all* $t \in T$.

For any map $\mathbf{u}(t)$ we define its rank as $rk(\mathbf{u}) = \dim(\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}(t) : t \in T\})$. So $rk(\mathbf{u})$ means the dimension of the smallest subspace of $\mathbb{F}^n$ which contains the range, that is $\mathbf{u}(T) = \{\mathbf{u}(t) : t \in T\}$, of $\mathbf{u}$. It is clear that $rk(\mathbf{u}) = m$ is equivalent to the existence of $t^i \in T,\ i = 1, 2, ..., m$ such that the system of vectors $\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^m)$ is linear independent and $\mathrm{Span}(\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^m)) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}(t) : t \in T\})$.

Further we use the notation $\mathbf{u}(t; t^1, ..., t^m)$ for $\mathbf{u}(t)$ to emphasize only that $rk(\mathbf{u}) = m$ and $\mathbf{u}(t)$ is considered with respect to the given $t^i \in T,\ i = 1, 2, ..., m$ for which the system of vectors $\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^m)$ is linear independent.

If one has $\mathbf{u}(t; t^1, ..., t^m)$ and $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(s(t))g$ for some $s \in \mathbf{B}$ and $g \in G$, then $rk(\mathbf{v}) = m$ and the system $\mathbf{v}(\underline{t}^1), \ldots, \mathbf{v}(\underline{t}^m)$ is linear independent, where $\underline{t}^i = s^{-1}(t^i)$ for $i = 1, 2, ..., m$. Therefore the definition given above on equivalence of maps can be reformulated for maps of the form $\mathbf{u}(t; t^1, ..., t^m)$ in the following way.

**Definition 2.** *Two maps* $\mathbf{u}(t; t^1, \ldots, t^m)$, $\mathbf{v}(t; \underline{t}^1, \ldots, \underline{t}^m)$ *are said to be* $(G, \mathbf{B})$*-equivalent if* $v(t) = u(s(t))g$ *for some* $(g, s) \in (G, \mathbf{B})$ *and* $s^{-1}(t^i) = \underline{t}^i$ *for* $i = 1, 2, \ldots, m$.

Note that according to [1] in $\mathbf{u}(t; t^1, \ldots, t^m)$ case there are uniquely defined functions $\alpha_{\mathbf{u},1}(t), \ldots, \alpha_{\mathbf{u},m}(t)$, from $T$ to $\mathbb{F}$, such that

$$\mathbf{u}(t) = \alpha_{\mathbf{u}}(t)[\mathbf{u}(t^1), \ldots, \mathbf{u}(t^m)],$$

where $\alpha_{\mathbf{u}}(t)$ stands for the row-vector with components $\alpha_{\mathbf{u},1}(t), \ldots, \alpha_{\mathbf{u},m}(t)$ and $[\mathbf{u}(t^1), \ldots, \mathbf{u}(t^m)]$ stands for the matrix with rows $\mathbf{u}(t^1), \ldots, \mathbf{u}(t^m)$. These functions can be evaluated by the use of $\mathbf{u}(t)$ as follows

$$\alpha_{\mathbf{u},j}(t)=\frac{|[\mathbf{u}(t^1),\dots,\mathbf{u}(t^{j-1}),\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t^{j+1}),\dots,\mathbf{u}(t^m)]_{i_1,i_2,\dots,i_m}|}{|[\mathbf{u}(t^1),\dots,\mathbf{u}(t^m)]_{i_1,i_2,\dots,i_m}|},\quad j=1,2,\dots,m,$$

where $1\le i_1<i_2<\dots<i_m\le n$, $|[\mathbf{u}(t^1),\dots,\mathbf{u}(t^m)]_{i_1,i_2,\dots,i_m}|\neq 0$, $[\mathbf{u}(t^1),\dots,\mathbf{u}(t^m)]_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ stands for the matrix consisting of $i_1,i_2,\dots,i_m$-th columns of $[\mathbf{u}(t^1),\dots,\mathbf{u}(t^m)]$, $|A|$ stands for the determinant of matrix $A$.

The value $\alpha_{\mathbf{u},j}(t)$ does not depend on $1\le i_1<i_2<\dots<i_m\le n$ for which $|[\mathbf{u}(t^1),\dots,\mathbf{u}(t^m)]_{i_1,i_2,\dots,i_m}|\neq 0$ and the components of $\alpha_{\mathbf{u}}(t)$ are $GL(n,\mathbb{F})$-invariant functions. Note that $[\alpha_{\mathbf{u}}(t^1),\dots,\alpha_{\mathbf{u}}(t^m)]=I_m$-$m$-order identity matrix.

The following results are proved, in $\mathbf{B}=\mathbf{Bi}$ case, in [2]. The proofs in $\mathbf{B}\neq\mathbf{Bi}$ case are similar to those of [2].

**Theorem 1.** *Two maps $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m)$, $\mathbf{v}(t;\underline{t}^1,...,\underline{t}^m)$ are $(G,\mathbf{B})$-equivalent if and only if the equalities*

$$[\mathbf{v}(\underline{t}^1),...,\mathbf{v}(\underline{t}^m)]=[\mathbf{u}(t^1),...,\mathbf{u}(t^m)]g,\quad \alpha_{\mathbf{v}}(t)=(\alpha_{\mathbf{u}}\circ s)(t),\ \underline{t}^j=s^{-1}(t^j),\ j=1,2,...,m$$

*are true for some $g\in G$ and $s\in\mathbf{B}$.*

**Corollary 1.** *If maps $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m)$, $\mathbf{v}(t;\underline{t}^1,...,\underline{t}^m)$ are $(G,\mathbf{B})$-equivalent then for any $1\le k\le n$ and $1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le m$ the equality $\alpha\prime_{\mathbf{u}}(T)=\alpha\prime_{\mathbf{v}}(T)$ holds true, where $\alpha\prime_{\mathbf{u}}(t)=(\alpha_{\mathbf{u},j_1}(t),\dots,\alpha_{\mathbf{u},j_k}(t))$.*

It should be noted that $G$-equivalence problem of finite system of vectors is one of the most investigated problems of invariant theory, see for example [3]. The $G=GL(n,\mathbb{F})$ and $G=SL(n,\mathbb{F})$ cases, considered in Corollaries, can be considered as applications of the corresponding main results formulated for any subgroup of $GL(n,\mathbb{F})$.

**Corollary 2.** *Two maps $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m)$, $\mathbf{v}(t;\underline{t}^1,...,\underline{t}^m)$ are $(GL(n,\mathbb{F}),\mathbf{B})$-equivalent if and only if the equalities*

$$\alpha_{\mathbf{v}}(t)=(\alpha_{\mathbf{u}}\circ s)(t),\ \underline{t}^i=s^{-1}(t^i),\ i=1,2,...,m$$

*are true for some $s\in\mathbf{B}$.*

**Corollary 3.** *If $m<n$ then two maps $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m)$, $\mathbf{v}(t;\underline{t}^1,...,\underline{t}^m)$ are $(SL(n,\mathbb{F}),\mathbf{B})$-equivalent if and only if the equalities*

$$\alpha_{\mathbf{v}}(t)=(\alpha_{\mathbf{u}}\circ s)(t),\ \underline{t}^i=s^{-1}(t^i),\ i=1,2,...,m \text{ are true for some } s\in\mathbf{B}.$$

*In $n=m$ case two maps $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^n)$, $\mathbf{v}(t;\underline{t}^1,...,\underline{t}^n)$ are $(SL(n,\mathbb{F}),\mathbf{B})$-equivalent if and only if the equalities $\alpha_{\mathbf{v}}(t)=(\alpha_{\mathbf{u}}\circ s)(t)$, $\underline{t}^i=s^{-1}(t^i)$, $i=1,2,...,m$ are true for some $s\in\mathbf{B}$ and*

$$\det([\mathbf{v}(\underline{t}^1),\dots,\mathbf{v}(\underline{t}^n)])=\det([\mathbf{u}(t^1),\dots,\mathbf{u}(t^n)]).$$

Further we consider only such $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m)$ for which there exist numbers $1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le m$ such that $\alpha\prime_{\mathbf{u}}:T\to\mathbb{F}^k$, where $\alpha\prime_{\mathbf{u}}(t)=(\alpha_{\mathbf{u},j_1}(t),\dots,\alpha_{\mathbf{u},j_k}(t))$ is an injective map. Note that if $\alpha\prime_{\mathbf{u}}(t)=(\alpha_{\mathbf{u},j_1}(t),\dots,\alpha_{\mathbf{u},j_k}(t))$ is injective and $1\le l_1<l_2<\dots<l_{k'}\le m$ includes all $1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le m$ then the map $(\alpha_{\mathbf{u},l_1},\dots,\alpha_{\mathbf{u},l_{k'}}):T\to\mathbb{F}^{k'}$ is also an injective map.

We use notation $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m,j_1,\dots,j_k)$ for $\mathbf{u}(t)$ to emphasize that $rk(\mathbf{u})=m$, the system $\mathbf{u}(t^1),\dots,\mathbf{u}(t^m)$ is linear independent and $\alpha\prime_{\mathbf{u}}(t)=(\alpha_{\mathbf{u},j_1}(t),\dots,\alpha_{\mathbf{u},j_k}(t))$ is an injective map on $T$.

**Theorem 2.** *Two maps* $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m,j_1,...,j_k), \mathbf{v}(t,\underline{t}^1,...,\underline{t}^m)$ *are* $(G,\mathbf{B})$*-equivalent if and only if* $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(t)=(\alpha_{\mathbf{v},j_1}(t),\ldots,\alpha_{\mathbf{v},j_k}(t))$ *is an injective map on* $T$, $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(T)=\alpha\prime_{\mathbf{u}}(T)$, $\alpha\prime_{\mathbf{u}}^{-1}\circ\alpha\prime_{\mathbf{v}}\in\mathbf{B}$, $[\mathbf{v}(\underline{t}^1),...,\mathbf{v}(\underline{t}^m)]=[\mathbf{u}(t^1),...,\mathbf{u}(t^m)]g$ *for some* $g\in G$ *and* $\alpha_{\mathbf{v}}\circ\alpha\prime_{\mathbf{v}}^{-1}=\alpha_{\mathbf{u}}\circ\alpha\prime_{\mathbf{u}}^{-1}$.

**Corollary 5.** *Two maps* $\mathbf{u}(t,t^1,...,t^m,j_1,...,j_k), \mathbf{v}(t,\underline{t}^1,...,\underline{t}^m)$ *are* $(GL(n,\mathbf{F}),\mathbf{B})$*-equivalent if and only if* $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(t)=(\alpha_{\mathbf{v},j_1}(t),\ldots,\alpha_{\mathbf{v},j_k}(t))$ *is an injective map on* $T$, $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(T)=\alpha\prime_{\mathbf{u}}(T)$, $\alpha\prime_{\mathbf{u}}^{-1}\circ\alpha\prime_{\mathbf{v}}\in\mathbf{B}$ *and* $\alpha_{\mathbf{v}}\circ\alpha\prime_{\mathbf{v}}^{-1}=\alpha_{\mathbf{u}}\circ\alpha\prime_{\mathbf{u}}^{-1}$.

**Corollary 6.** *Two maps* $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m,j_1,...,j_k), \mathbf{v}(t,\underline{t}^1,...,\underline{t}^m)$, *where* $m<n$, *are* $(SL(n,\mathbf{F}),\mathbf{B})$*-equivalent if and only if* $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(t)=(\alpha_{\mathbf{v},j_1}(t),\ldots,\alpha_{\mathbf{v},j_k}(t))$ *is an injective map on* $T$, $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(T)=\alpha\prime_{\mathbf{u}}(T)$ *and* $\alpha_{\mathbf{v}}\circ\alpha\prime_{\mathbf{v}}^{-1}=\alpha_{\mathbf{u}}\circ\alpha\prime_{\mathbf{u}}^{-1}$. *Two maps* $\mathbf{u}(t,t^1,...,t^n,j_1,...,j_k), \mathbf{v}(t,\underline{t}^1,...,\underline{t}^n)$ *are* $(SL(n,\mathbf{F}),\mathbf{B})$*-equivalent if and only if* $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(t)=(\alpha_{\mathbf{v},j_1}(t),\ldots,\alpha_{\mathbf{v},j_k}(t))$ *is an injective map on* $T$, $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(T)=\alpha\prime_{\mathbf{u}}(T)$, $\alpha\prime_{\mathbf{u}}^{-1}\circ\alpha\prime_{\mathbf{v}}\in\mathbf{B}$, $\alpha_{\mathbf{v}}\circ\alpha\prime_{\mathbf{v}}^{-1}=\alpha_{\mathbf{u}}\circ\alpha\prime_{\mathbf{u}}^{-1}$ *and*

$$|[\mathbf{v}(\underline{t}^1),...,\mathbf{v}(\underline{t}^n)]|=|[\mathbf{u}(t^1),...,\mathbf{u}(t^n)]|.$$

**Corollary 7.** *Maps* $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m,1,...,m), \mathbf{v}(t,\underline{t}^1,...,\underline{t}^m)$ *are* $(G,\mathbf{Bi})$*-equivalent if and only if* $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(t)=(\alpha_{\mathbf{v},1}(t),\ldots,\alpha_{\mathbf{v},m}(t))$ *is an injective map on* $T$, $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(T)=\alpha\prime_{\mathbf{u}}(T)$ *and* $[\mathbf{v}(\underline{t}^1),...,\mathbf{v}(\underline{t}^m)]=[\mathbf{u}(t^1),...,\mathbf{u}(t^m)]g$ *for some* $g\in G$. *Moreover, maps* $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m,1,...,m), \mathbf{v}(t,\underline{t}^1,...,\underline{t}^m)$ *are* $(GL(n,\mathbb{F}),\mathbf{Bi})$*-equivalent if and only if* $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(t)=(\alpha_{\mathbf{v},1}(t),\ldots,\alpha_{\mathbf{v},m}(t))$ *is an injective map on* $T$, $\alpha\prime_{\mathbf{v}}(T)=\alpha\prime_{\mathbf{u}}(T)$

Theorem 2 is a quite general result. But for its direct application to a given $\mathbf{u}(t;t^1,...,t^m,j_1,...,j_k)$ one needs the inverse of the map $\alpha\prime_{\mathbf{u}}$ the evaluation of which is not an easy problem if $T$ is not finite. In finite $T$ case the $(G,\mathbf{B})$-equivalence of maps is closely related to the equivalence problem of polygons.

Further we consider only finite $T=\{0,1,\ldots,N-1\}$ case, that is "Tfigure consists of finite number of points, $\mathbf{Bi}=S_N$-the symmetric group, $\mathbf{Bi}=S_N$-the symmetric group. It is convenient assume that $T=\mathbb{Z}_N$-the group of integer numbers modulo $N\in\mathbb{N}$.

**Proposition 1.** *Two sets consisting of* $N$ *points of* $\mathbb{F}^n$, *presented by maps* $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ *of the same rank, are* $(GL(n,\mathbb{F}),S_N)$*-equivalent if and only if*

$$\{\alpha_{\mathbf{u}}(i):\ i\in\mathbb{Z}_N\}=\{\alpha_{\mathbf{v}}(i):\ i\in\mathbb{Z}_N\},$$

**Proof.** It is a consequence of Corollary 7.

Further, for the sake of simplicity, by $N$-polygon we understand the following. A $N$-polygon in $\mathbb{F}^n$ is a sequence of $N$ different points (vertexes) $\mathbf{u}(0),\mathbf{u}(1),...,\mathbf{u}(N-1)$, where $\mathbf{u}(i)\in\mathbb{F}^n,\ i\in\mathbb{Z}_N$. Any subset $\{\mathbf{u}(i),\mathbf{u}(i+1)\}$, where $i\in\mathbb{Z}_N$, is called to be a "side"ot the polygon.

Note that according to this understanding several vertexes of a polygon may lie on the same "straight line but any vertex belongs only to two "sides". Of course one can consider $(G,\mathbb{P})$-equivalence of polygons with respect to different group of symmetries $\mathbb{P}$-a subgroup of $S_N$. Here we consider only one case.

Let $\mathbf{P}$ be subgroup of $S_N$ generated by $s_1$: $s_1(i)=i+1$ and $s_c(i)=N-i=-i$ for all $i\in\mathbb{Z}_N$. Due to $s_1^N(i)=i$, $s_c^2(i)=i$-identity elements, $s_cs_1^j=s_1^{-j}s_c$ for $j\in\mathbb{N}$ it is clear that this group has $2N$ elements.

**Theorem 3.** *Two* $N$*-polygons given as* $\mathbf{u}(0,t^1,...,t^m),\mathbf{u}(1,t^1,...,t^m),...,\mathbf{u}(N-1,t^1,...,t^m)$ *and*

$\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1), ..., \mathbf{v}(N-1)$, *of the same rank, are* $(G, \mathbf{P})$*-equivalent if and only if there exists* $j \in \mathbb{Z}_N$ *such that*

$$\alpha_{\mathbf{v}}(i+j) = \alpha_{\mathbf{u}}(i) \text{ or } \alpha_{\mathbf{v}}(N-(i+j) = \alpha_{\mathbf{u}}(i)) \text{ for all } i \in \{0, 1, \ldots, N-1\},$$

$$[\mathbf{v}(t^1+j), ..., \mathbf{v}(t^m+j)] = [\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^m)]g$$

$$\text{or, respectively, } [\mathbf{v}(N-(t^1+j)), ..., \mathbf{v}(N-(t^m+j))] = [\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^m)]g$$

*for some* $g \in G$.

**Proof.** If $N$-polygons $\mathbf{u}(0, t^1, ..., t^m), \mathbf{u}(1, t^1, ..., t^m), ..., \mathbf{u}(N-1, t^1, ..., t^m)$, $\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1), ..., \mathbf{v}(N-1)$ are $(G, \mathbf{P})$-equivalent then there exist $g \in G$,$j \in S_n$ such that

$$\mathbf{v}(i+j) = \mathbf{u}(i)g \quad (1) \quad (\text{or } \mathbf{v}(N-(i+j)) = \mathbf{u}(i))g \quad (2))$$

for all $i \in S_N$. Therefore, in particular,

$$[\mathbf{v}(t^1+j), ..., \mathbf{v}(t^m+j)] = [\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^m)]g$$

$$\big(\text{or, respectively, } [\mathbf{v}(N-(t^1+j)), ..., \mathbf{v}(N-(t^m+j))] = [\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^m)]g\big)$$

is valid. Let us consider only (1) case because of similarity of proofs in (1) and (2) cases. Due to

$$\alpha_{\mathbf{v}}(i+j)[\mathbf{v}(t^1+j), ..., \mathbf{v}(t^m+j)] = \mathbf{v}(i+j) = \mathbf{u}(i)g =$$

$$\alpha_{\mathbf{u}}(i)[\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^m)]g = \alpha_{\mathbf{u}}(i)[\mathbf{v}(t^1+j), ..., \mathbf{v}(t^m+j)]$$

one has equality $\alpha_{\mathbf{v}}(i+j) = \alpha_{\mathbf{u}}(i)$ for all $i \in S_N$ as well.

Vice versa, if

$$\alpha_{\mathbf{v}}(i+j) = \alpha_{\mathbf{u}}(i) \text{ for all } i \in S_N \text{ and } [\mathbf{v}(t^1+j), ..., \mathbf{v}(t^m+j)] = [\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^m)]g$$

for some $j \in S_N,\ g \in G$ then $\mathbf{v}(i+j) = \alpha_{\mathbf{v}}(i+j)[\mathbf{v}(t^1+j), ..., \mathbf{v}(t^m+j)] = \alpha_{\mathbf{u}}(i)[\mathbf{v}(t^1+j), ..., \mathbf{v}(t^m+j)] = \alpha_{\mathbf{u}}(i)[\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^m)]g = \mathbf{u}(i)g$ for all $i \in S_N$.

Note that in $m = n$, $G = Q(n, \mathbb{F}) = \{g \in GL(n, \mathbb{F}) :\ g^t g = I_n\}$- the orthogonal group case, the condition $[\mathbf{v}(t^1+j), ..., \mathbf{v}(t^n+j)] = [\mathbf{u}(t^1), ..., \mathbf{u}(t^n)]g$ for some $g \in Q(n, \mathbb{F})$, is equivalent to the system of equalities $(\mathbf{v}(t^p+j), \mathbf{v}(t^q+j)) = (\mathbf{u}(t^p), \mathbf{u}(t^q))$, $p, q = 1, 2, \ldots, n,\ p \leq q$, where $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{p=1}^n x_p y_p$ -the "scalar product $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $g^t$- meant the transpose of $g$. Therefore in $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ case this condition means the equality of lengths of vectors $|\mathbf{v}(t^p+j)| = |\mathbf{u}(t^p)|$ and angles $\angle(\mathbf{v}(t^p+j), \mathbf{v}(t^q+j)) = \angle(\mathbf{u}(t^p), \mathbf{u}(t^q))$ for all $p, q = 1, 2, \ldots, n,\ p \leq q$.

**Remark.** Analogies of the above presented results can be formulated when the motion group is of the form $G \ltimes \mathbb{F}^n$ as well, where $G$ is a subgroup of $GL(n, \mathbb{F})$. Indeed, it is not difficult to see that two maps $\mathbf{u}(t)$ and $\mathbf{v}(t)$ are $(G \ltimes \mathbb{F}^n, \mathbf{B})$-equivalent, that is $\mathbf{v}_0(t) = (\mathbf{u_0} \circ \mathbf{s})(t)g + \mathbf{c}$ for some $(g, \mathbf{c}) \in G \ltimes \mathbb{F}^n,\ s \in \mathbf{B})$, if and only if maps $\mathbf{u}_0(t)$ and $\mathbf{v}_0(t)$ are $(G, \mathbf{B})$-equivalent, where $\mathbf{v}_0(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0)$, $\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)$, $t_0 \in T$ is a fixed element.

**Acknowledgment** This work is supported by the grant UT-OT-2020-2 of the Ministry of innovative development of the Republic of Uzbekistan.

*References*

1. *Khadjiev Dj., Bekbaev U. Aripov*, R. On equivalence of vector-valued maps, arXiv:2005.08707v1 [math GM] 13 May 2020.
2. *Bekbaev U.* On equivalence of vector valued maps with respect to some motion groups and change of variable, Abstract book II of "Modern problems of Mathematical Physics and its Applications 17-18 November-2020, Tashkent conference. pp. 75–79.
3. *H. Weyl* , The Classical Groups: Their Invariants and Representations, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1946.

# On classification of two-dimensional algebras over the field of rational numbers

**U.Bekbaev, Sh.Eshmirzayev**

*Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan*
uralbekbaev@gmail.com
*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
Shoxjahoneshmirzayev.95@mail.ru

**Introduction**

The classification of mathematical structures, up to the corresponding isomorphisms, is considered as one of the important problems. In this paper we consider classification of, up to isomorphism, of two-dimensional algebras over the field of rational numbers. Our approach to this problem is a coordinate (basis, structure constants) based approach. One advantage of this approach is that when a full classification is obtained then many problems related to these algebras can be handled quite easily. In two-dimensional case a complete classification, by basis free approach, is stated in [9] over any basic field. So far its application to solve many problems related to two-dimensional algebras is not known and probably one should not expect big help from that basis free approach. In opposite a coordinate based complete classification of two-dimensional algebras over any field $\mathbb{F}$, where any second and third order polynomials has a root, and over the field of real numbers $\mathbb{R}$ is given in [1]. In [2-6] one can find their applications to different problems related to such algebras. In [8] one can find another coordinate based approach to this problem and its applications. It should be noted that classification of all $n$-dimensional algebras over a field, usually assumed algebraically closed, is obtained only in $n = 2$ case. In $n > 2$ case there many investigations on classification of special, usually polynomial-identity, classes of algebras.

Not every second and third order polynomial with rational coefficients has a root in $\mathbb{Q}$ and therefore classification of two-dimensional algebras over it needs a separate investigation.

**The main result**

Further we need the following result which is given in [7] in a slightly different form. Let $n$ be a natural number, $G$ be a group, $\mathbb{F}$ be any field, $\tau : G \to GL(n, \mathbb{F})$ be a homomorphism of groups and $M \subset \mathbb{F}^n$ be a $\tau$-invariant subset, that is $\tau(g)u \in M$ whenever $u \in M$ and $g \in G$. We write $u \simeq^G v$ if $\tau(g)u = v$ for some $g \in G$.

**Lemma** *If there exists $m \in \mathbb{N}$, a map $P : M \to GL(m, \mathbb{F})$ and a homomorphism $\tau' : G' \to GL(n, \mathbb{F})$ such that*

$$\tau'(P(\tau(g)u)) = \tau'(P(u))\tau(g^{-1}) \quad \textit{whenever} \quad u \in M,\ g \in G$$

*and $v, w \in M$ are any two elements then $v \simeq^G w$ if and only if*

$$\tau'(P(v))v = \tau'(P(w))w \quad \text{and} \quad \tau'(P(w)^{-1}P(v)) \in \tau(G),$$

*where $G'$ stands for the subgroup of $GL(m, \mathbb{F})$ generated by $\{P(u) : u \in M\}$.*

Let $\mathbf{A}$ be any 2 dimensional algebra over $\mathbb{F}$ with multiplication $\cdot$ given by a bilinear map $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ whenever $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{A}$. If $e = (e^1, e^2)$ is basis for $\mathbf{A}$ as a vector space over $\mathbb{F}$ then one can represent this bilinear map by a matrix

$$A = \begin{pmatrix} A^1_{1,1} & A^1_{1,2} & A^1_{2,1} & A^1_{2,2} \\ A^2_{1,1} & A^2_{1,2} & A^2_{2,1} & A^2_{2,2} \end{pmatrix} \in Mat(2 \times 4; \mathbb{F})$$

such that

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = eA(u \otimes v)$$

for any $\mathbf{u} = eu, \mathbf{v} = ev$, where $u = (u_1, u_2)$, and $v = (v_1, v_2)$ are column coordinate vectors of $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$, respectively, $(u \otimes v) = (u_1v_1, u_1v_2, u_2v_1, u_2v_2)$, $e^i \cdot e^j = A^1_{i,j}e^1 + A^2_{i,j}e^2$ whenever $i, j = 1, 2$. So the algebra $\mathbf{A}$ is presented by the matrix $A \in Mat(2 \times 4; \mathbb{F})$ (called the matrix of MSC of $\mathbf{A}$ with respect to the basis $e$).

If $e' = (e'^1, e'^2)$ is also another basis for $\mathbf{A}$, $g \in G = GL(2, \mathbb{F})$, $e'g = e$ and $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = e'B(u' \otimes v')$, where $\mathbf{u} = e'u', \mathbf{v} = e'v'$, then

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = eA(u \otimes v) = e'B(u' \otimes v') = eg^{-1}B(gu \otimes gv) = eg^{-1}B(g \otimes g)(u \otimes v)$$

as far as $\mathbf{u} = eu = e'u' = eg^{-1}u', \mathbf{v} = ev = e'v' = eg^{-1}v'$. Therefore the equality

$$B = gA(g^{-1})^{\otimes 2}$$

is valid, where for $g^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$ one has

$$(g^{-1})^{\otimes 2} = g^{-1} \otimes g^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\eta_1 & \xi_1\eta_1 & \eta_1^2 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_1\eta_2 & \xi_2\eta_1 & \eta_1\eta_2 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2\eta_1 & \xi_1\eta_2 & \eta_1\eta_2 \\ \xi_2^2 & \xi_2\eta_2 & \xi_2\eta_2 & \eta_2^2 \end{pmatrix}.$$

**Definition.** Two-dimensional algebras $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, given by their matrices of structural constants $A$, $B$, are said to be isomorphic if $B = gA(g^{-1})^{\otimes 2}$ holds true for some $g \in GL(2, \mathbb{F})$.

Further $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ and for the simplicity we use the notation

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix},$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ stand for any elements of $\mathbb{Q}$.

**Theorem 1.** *Any non-trivial 2-dimensional algebra over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ is isomorphic to only one of the following listed, by their matrices of structure constants, algebras:*

$$A_1(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 + 1 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 + 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \text{ where } \mathbf{c} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{Q}^4,$$

$$A_2(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & p \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } \mathbf{c} = (\alpha_1, p, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Q}^3, \ \beta_1 \geq 0,$$

$p \in \mathbb{Z}$*-without prime square divisor(square-free integer),*

$$A_3(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \textit{where } \mathbf{c} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Q}^2,$$

$$A_4(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{where } \mathbf{c} = (\alpha_1, \beta_2) \in \mathbb{Q}^2,$$

$$A_5(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{where } \mathbf{c} = \alpha_1 \in \mathbb{Q},$$

$$A_6(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & p \\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{where } \mathbf{c} = (\alpha_1, p, \beta_1) \in \mathbb{Q}^2, \ \beta_1 \geq 0,$$

$p \in \mathbb{Z}$*-without prime square divisor,*

$$A_7(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \textit{where } \beta_1 \in \mathbb{Q},$$

$$A_8(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{where } \alpha_1 \in \mathbb{Q}, \ A_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{10}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{where } p > 0, \ p \in \mathbb{Z} \ -\textit{without prime cube divisor},$$

$$A_{11}(\alpha_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & |\alpha_4^2 - 2| \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

*where* $\alpha_4 > 0, \ \alpha_4 \notin \{\alpha + \frac{1}{\alpha} : \ \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\} \cup \{\alpha^2 - 3\alpha : \ \alpha \in \mathbb{Q}\},$

$$A_{12}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \textit{where } p = 0 \textit{ or } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ -\textit{without prime square divisor},$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To prove this result, in general, we follow the same approach used in [1] for classification of two-dimensional algebras over a field where every second and third order polynomial has a root in it. But in rational field case when, in the process of proof, we run into second or third order polynomial which has no rational root we manage to find a way out.

## References


1. H. Ahmed, U. Bekbaev, I. Rakhimov, Complete classification of two-dimensional algebras, 12 pages, *AIP Conference Proceedings*, 1830, 070016, 2017, doi 10.1063/1.4980965.

2. H. Ahmed, U. Bekbaev, I. Rakhimov, Classification of 2-dimensional evolution algebras, their groups of automorphisms and derivation algebras, *Journal of Physics Conference Series*, 1489 (2020) 012001, doi:10.1088/1742-6596/1489/1/012001.

3. H. Ahmed, U. Bekbaev, I. Rakhimov, Identities on Two-Dimensional Algebras, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, 41(9), 1615–B–1629.

4. H. Ahmed, U. Bekbaev, I. Rakhimov, Subalgebras, idempotents, ideals and quasi-units of two-dimensional algebras, *International Journal of Algebra and Computations*, 2020, 30(5), 903–929.

5. H. Ahmed, U. Bekbaev, I. Rakhimov, On Two-Dimensional Power Associative Algebras Over Algebraically Closed Fields and $\mathbb{R}$, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, 40(1), 1–13.
6. H. Ahmed, U. Bekbaev, I. Rakhimov, Classification of two-dimensional Jordan algebras over $\mathbb{R}$, *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 2018, 12(3), 287–303.
7. U. Bekbaev, On classification of $m$-dimensional algebras, *Journal of Physics: Conf. Series*, 819 (2017) 012012 doi:10.1088/1742-6596/819/1/012012.
8. I. Kaygorodov, Yu. Volkov, The variety of 2-dimensional algebras over an algebraically closed field, *Canadian Journal of Mathematics*, 2019, 71(4), 819–842.
9. H.P. Petersson, The classification of two-dimensional nonassicative algebras, 2000, *Result. Math.*, 3, 120–154.

# On irreducible real subfactors

**Boltayev Kh.Kh.**

*Department of General Mathematics, Tashkent state pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan.*

bkhabibzhan2020@mail.ru

Let $H$ be a complex Hilbert space, $B(H)$ denote the algebra of all bounded linear operators on $H$. The *weak (operator) topology* on $B(H)$ is the locally convex topology, generated by the seminorm of the form: $\rho(a) = |(\xi, a\eta)|,\ \xi, \eta \in H, a \in B(H)$. $W^*$-*algebra* is a weakly closed complex *-algebra of operators on a Hilbert space $H$ containing the identity operator $e$. Recall that $W^*$-algebras are also called *von Neumann algebras.* The *center* $Z(M)$ of a $W^*$-algebra $M$ is the set of elements of $M$, commuting with each element from $M$. A $W^*$-algebra $M$ is called *factor*, if $Z(M)$ consists of the complex multiples of $e$, i.e $Z(M) = \{\lambda e, \lambda \in \mathbf{C}\}$. A real *-subalgebra $R \subset B(H)$ with $e$ is called a *real* W*-*algebra*, if it is weakly closed and $R \cap iR = \{0\}$. The smallest (complex) W*-algebra $M$ containing $R$ is called the enveloped W*-algebra of $R$, which coincides with its complexication $R + iR$, i.e. $M = R + iR$ (see [1,2]).

Banach *-algebra $A$ is called a C*-*algebra* if the equality $\|aa^*\| = \|a\|^2$ holds for any $a \in A$. By a *real C*-algebra* we mean a real Banach *-algebra $R$ such that the relation $\|aa^*\| = \|a\|^2$ holds and the element $e + a^*a$ is invertible for any $a \in A$. It is known that any complex or real W*-algebra is a (complex and real, respectively) C*-algebra. Let $A$ is a complex or real C*-algebra, and $\{\pi, H\}$ be a *-representation of $A$. $\{\pi, H\}$ is said to be *irreducible*, if $E = \{0\}$ or $H$ are the only closed linear subspaces of $H$ which satisfy $\pi(a)E \subset E,\ \forall a \in A$.

The main result of this work is the following theorem

**Theorem.** Let $Q \subset R$ be real factors and let $N = Q + iQ$ and $M = R + iR$ be the enveloped W*-algebras of $Q$ and $R$, respectively. Then $Q' \cap R$ is finite dimensional if and only if $N' \cap M$ is finite dimensional.

In particular, $Q$ is an irreducible real subfactor of $R$ if and only if $Q + iQ$ is an irreducible subfactor of $R + iR$.

## References.

1. Ayupov Sh.,A., Rakhimov A.,A., Usmanov Sh.,M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Kluw.Acad.Pub.,MAIA. Vol 418, (1997), 235p.

2. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A. Real W*-algebras, Actions of groups and Index theory for real factors. VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Mauritius. (2010), 138p.

# Two-Electron Singlet State in the Impurity Hubbard Model

**Chilin V. I., Tashpulatov S. M.**

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent
vladimirchil@gmail.com, sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru, toshpul@inp.uz

## Introduction

In the early 1970s, three papers [1-3], where a simple model of a metal was proposed that has become a fundamental model in the theory of strongly correlated electron systems, appeared almost simultaneously and independently. In that model, a single nondegenerate electron band with a local Coulomb interaction is considered. The model Hamiltonian contains only two parameters: the matrix element $t$ of electron hopping from a lattice site to a neighboring site and the parameter $U$ of the on-site Coulomb repulsion of two electrons. In the secondary quantization representation, the Hamiltonian can be written as

$H = t\sum_{m,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + U\sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^{+}_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}$, where $a^{+}_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ denote Fermi operators of creation and annihilation of an electron with spin $\gamma$ on a site $m$ and the summation over $\tau$ means summation over the nearest neighbors on the lattice.

Recall that the local form of Coulomb interaction was first introduced for an impurity model in a metal by Anderson [4]. The Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals [5]. But little is known about exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model and impurity Hubbard model, and obtaining the corresponding statements is therefore of great interest. The spectrum and wave functions of the system of three electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [6]. Correspondingly, the spectrum of the energy operator of system of four electrons for a crystal described by the Hubbard Hamiltonian in the triplet state were studied in [7]. For the four-electron systems are exists quintet state, and three type triplet states, and two type singlet states. The spectrum of the energy operator of four-electron systems in the Hubbard model in the quintet, and singlet states were studied in [8]. Naturally, we have analogous problem in the case of two-electron systems in the impurity Hubbard model. Here there are exist two states: triplet and singlet states. In this paper we give a full description of the structure of the essential spectra and discrete spectrum of two-electron systems in the impurity Hubbard model for singlet states.

**Preliminaries**

The Hamiltonian of two-electron systems in the impurity Hubbard model has the following form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} +$$

$$+(B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0 - U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \quad (1)$$

Here $A$ ($A_0$) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; $B$ ($B_0$) is the transfer integral between electrons (between electron and impurity) in a neighboring sites (we assume that $B > 0,\ B_0 > 0$), $\tau = \pm e_j,\ j = 1, 2, ..., \nu$, where $e_j$ are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, $U$ ($U_0$) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, correspondingly in the regular (impurity) lattice site; $\gamma$ is the spin index (in this case $\gamma =\uparrow$ or $\gamma =\downarrow$, where $\uparrow$ and $\downarrow$ denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$), and $a^+_{m,\gamma}$, $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$, where $Z^\nu$ is a $\nu$-dimensional integer lattice.

It is known that the Hamiltonian $H$ acts in the symmetric complex Foc'k space $(\widetilde{\mathcal{H}}_s, (\cdot,\cdot)_{\widetilde{\mathcal{H}}_s})$. Denote by $\varphi_0$ the vacuum vector in the space $\widetilde{\mathcal{H}}_s$. The singlet state corresponds the free motions of two-electrons in the lattice and their interactions, i.e., two-electron bound states (or two-electron antibound states) to the basis functions $s_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{a^+_{m\uparrow}a^+_{n\downarrow} - a^+_{m\downarrow}a^+_{n\uparrow}\}\varphi_0$. The linear subspace $\widetilde{\mathcal{H}}^s_2 \subset \widetilde{\mathcal{H}}_s$, corresponding to the singlet state is the set of all vectors of the form $\psi = \sum_{m,n\in Z^\nu} \widetilde{f}(m,n)s_{m,n}$, $\widetilde{f} \in l^s_2$, where $l^s_2$ is the subspace of symmetric functions in $l_2((Z^\nu)^2)$.

**Theorem 1.** *The subspace $\mathcal{H}^s_2$ is invariant with respect action of the operator $H$, and the restriction $H^s_2$ of operator $H$ to the subspace $\mathcal{H}^s_2$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator $\overline{H}^s_2$, acting in the space $l^s_2$ as*

$$(\overline{H}^s_2 f)(p,q) =$$

$$= 2Af(p,q) + 2B\sum_{\tau}[f(p+\tau,q) + f(p,q+\tau)] + U\delta_{p,q}f(p,q) + (A_0 - A)[\delta_{p,0} + \delta_{q,0}]f(p,q) +$$

$$+(B_0 - B)\sum_{\tau}[\delta_{p,\tau}f(0,q) + \delta_{q,\tau}f(p,0) + \delta_{p,0}f(\tau,q) + \delta_{q,0}f(p,\tau)] + (U_0 - U)\delta_{p,0}\delta_{q,0}f(p,q), \quad (2)$$

*where $\delta_{k,j}$ Kronecker symbol. In addition, $H^s_2\psi = \sum_{p,q}(\overline{H}^s_2 f)(p,q)s_{p,q}, \psi \in \mathcal{H}^s_2$.*

Let $\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^2) \to L_2((T^\nu)^2) := \widetilde{\mathcal{H}}^s_2$, be the Fourier transform, where $T^\nu$ is the $\nu-$ dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, that is, $\lambda(T^\nu) = 1$. Setting $\widetilde{H}^s_2 = \mathcal{F}\overline{H}^s_2\mathcal{F}^{-1}$ we get that the operator $\widetilde{H}^s_2$ acts in the Hilbert space $L^s_2((T^\nu)^2)$, where $L^s_2$ is the linear subspace of symmetric functions in $L_2((T^\nu)^2)$.

Using the equality (2) and properties of the Fourier transform we have the following

**Theorem 2.** *The operator $\widetilde{H}^s_2$ acting in the space $\widetilde{\mathcal{H}}^s_2$ as*

$$(\widetilde{H}^s_2\widetilde{f})(\lambda,\mu) =$$

$$= 2A\widetilde{f}(\lambda,\mu) + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos\mu_i]\widetilde{f}(\lambda,\mu) + U\int_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s)ds + \varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(s,\mu)ds +$$

$$+\varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(\lambda,t)dt + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos s_i + \cos\lambda_i]\widetilde{f}(s,\mu)ds + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos t_i + \cos\mu_i]\widetilde{f}(\lambda,t)dt +$$

$$+\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s,t)dsdt,$$

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\nu), \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\nu),\ s = (s_1, \dots, s_\nu),\ t = (t_1, \dots, t_\nu) \in T^\nu,$$

*where* $\varepsilon_1 = A_0 - A, \quad \varepsilon_2 = B_0 - B,$ *and* $\varepsilon_3 = U_0 - U.$

It is clear that spectral properties of energy operator of two-electron systems in the impurity Hubbard model in the singlet state are closely related to the spectral properties of its one-electron subsystems in the impurity Hubbard model. First we give a description of the spectrum of one-electron subsystems.

**Spectra of the energy operator of one-electron system in the impurity Hubbard model**

The Hamiltonian $H$ of one-electron systems in the impurity Hubbard model also has the form (1). Denote by $\mathcal{H}_1$ the Hilbert space spanned by the vectors $\psi = \sum_p a^+_{p,\uparrow}\varphi_0$. The space $\mathcal{H}_1$ is invariant with respect to action of the operator $H$. Let $H_1 = H|_{\mathcal{H}_1}$ be the restriction of $H$ to the subspace $\mathcal{H}_1$.

**Theorem 3.** *$H_1\psi = \sum_p (\overline{H}_1 f)(p) a^+_{p,\uparrow}\varphi_0,\ \psi \in \mathcal{H}_1$, where $\overline{H}_1$ is a linear bounded self-adjoint operator acting in the space $l_2$ as*

$$(\overline{H}_1 f)(p) = Af(p) + B\sum_\tau f(p+\tau) + \varepsilon_1 \delta_{p,0} f(p) + \varepsilon_2 \sum_\tau (\delta_{p,\tau} f(0) + \delta_{p,0} f(\tau)). \quad (3)$$

Using the equality (3) and properties of the Fourier transform we have the following

**Theorem 4.** *The operator $\widetilde{H}_1 = \mathcal{F}\overline{H}_1\mathcal{F}^{-1}$ acting in the space $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ as $(\widetilde{H}_1 f)(\mu) = [A + 2B\sum_{i=1}^\nu \cos\mu_i] f(\mu) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} f(s)ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^\nu [\cos\mu_i + \cos s_i] f(s)ds, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), s = (s_1, \dots, s_n) \in T^\nu$.*

It is clear that the continuous spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ is independent of the numbers $\varepsilon_1$ and $\varepsilon_2$, and is equal to segment $[m_\nu, M_\nu] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$, where $m_\nu = \min\limits_{x \in T^\nu} h(x)$, $M_\nu = \max\limits_{x \in T^\nu} h(x)$ (here $h(x) = A + 2B\sum_{i=1}^\nu \cos x_i$).

The following Theorem describe of the exchange of the spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ in the case $\nu = 1$.

**Theorem 5.** *A). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$,) then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A + \varepsilon_1$, lying the below (respectively, above) of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.*

*B). If $\varepsilon_2 = -2B$ and $\varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 = -2B$ and $\varepsilon_1 > 0$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (respectively, $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$), lying the below (respectively, above) of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.*

*C). If $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 > 0$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (respectively, $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$), lying the below (respectively, above) of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.*

*D).If $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ (respectively, $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, $(z = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}})$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, lying the below (above) of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.*

*E). If $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, (respectively, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$, (respectively, $z = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$), where $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, lying the above (respectively, below) of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.*

*F). If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z_1 = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and the real number $\alpha > 1$, lying the above of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.*

*K). If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z_1 = A - \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} < m_1$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and the real number $\alpha > 1$, lying the below of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.*

*M). If $\varepsilon_2 > 0$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a exactly two eigenvalues $z_1 = A+\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} < m_1$, and $z_2 = A+\frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} > M_1$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and the real number $|\alpha| < 1$, lying the above and below of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.*

*N). If $-2B < \varepsilon_2 < 0$, then the operator $\widetilde{H}_1$ has no eigenvalues lying the outside of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.*

Therefore, the spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ is consists from continuous spectrum and at most two eigenvalues. In turn, the operator $\widetilde{H}_2^s$ can be represented in the form

$$\widetilde{H}_2^s = \widetilde{H}_1 \bigotimes I + I \bigotimes \widetilde{H}_1 + K, \tag{4}$$

where $(K\widetilde{f})(\lambda,\mu) = (K_1\widetilde{f})(\lambda,\mu) + (K_2\widetilde{f})(\lambda,\mu) = U\int_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s)ds + \varepsilon_3\int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(s,t)dsdt$.

**Essential spectrum and discrete spectrum of operator $\widetilde{H}_2^s$**

Now, using the obtained results and representation (4), we describe the structure of essential spectrum and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^s$ (we suppose that $\nu = 1$).

**Theorem 6.** *A). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$,) then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^s$ is the union of two segments $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, and the discrete spectrum contains at most three points: $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, where $z = A+\varepsilon_1$, $z_3$, and $z_4$ are the additional eigenvalues of the operator $\widetilde{H}_2^s$.*

*B). If $\varepsilon_2 = -2B$ and $\varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 = -2B$ and $\varepsilon_1 > 0$), then $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, and the discrete spectrum contains at most three points: $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, where $z = A - \sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ (respectively, $z = A + \sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$).*

*C). If $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 > 0$), then $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, and the discrete spectrum contains at most three points: $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, where $z = A + \sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ (respectively, $z = A - \sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$).*

*D). If $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ (respectively, $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$), then $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, and the discrete spectrum contains at most three points: $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, where $z = A-\frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, (respectively, ($z = A+\frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$)), and $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.*

*E). If $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, (respectively, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, and the discrete spectrum contains at most three points:*

$\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, *where* $z = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$, *(respectively,* $z = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$*), and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

*F). If* $\varepsilon_2 > 0$ *and* $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$*, and the discrete spectrum contains at most three points:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$*, where* $z = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$*, and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

*K). If* $\varepsilon_2 > 0$ *and* $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$*, and the discrete spectrum contains at most three points:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$*, where* $z = A - \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$*, and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$*, and the real number* $\alpha > 1$.

*M). If* $\varepsilon_2 > 0$ *and* $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z_1, A+2B+z_1] \cup [A-2B+z_2, A+2B+z_2]$*, and the discrete spectrum contains at most five points:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z_1, z_1+z_2, 2z_2, z_3, z_4\}$*, where* $z_1 = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$*, and* $z_2 = A + \frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$*, and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$*, and the real number* $|\alpha| < 1$.

*N). If* $-2B < \varepsilon_2 < 0$*, then* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B]$*, and discrete spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^s$ *contains at most two points:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{z_3, z_4\}$.


*REFERENCES*

1. *Hubbard J.* Electron Correlations in Narrow Energy Band, Proc. Roy. Soc. A., vol. 276:1365, 1963, pp. 238–257.
2. *Gutzwiller M. C.* Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals, Phys. Rev. Lett., vol. 10:5, 1963, pp. 159–162 .
3. *Kanamori J.* Electron correlation and ferromagnetism of transition metals, Prog. Theor. Phys., vol. 30:3, 1963, pp. 275–289.
4. *Anderson P.W.* Localized Magnetic States in Metals, Phys. Rev., vol. 124:1, 1961, pp. 41–53.
5. *Karpenko B.V., Dyakin V.V.,Budrina G.L.* Two electrons in the Hubbard Model, Phys. Met. Metallogr., vol. 61, 1986, pp. 702–706.
6. *Tashpulatov S.M.* Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard model, Theoretical and Mathematical Physics, vol. 179(3), 2014, pp. 712–728.
7. *Tashpulatov S.M.* Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard model, Journal of Physics: Conference Series. vol. 697, 2016, 012025 doi:10.1088/1742-6596/697/1/012025.
8. *Tashpulatov S.M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state, Lobachevskii Journal of Mathematics, vol. 38(3), 2017, pp. 530–541.

# Corruption and non-linear dynamical systems

**Ganikhodjaev N.**

*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail nasirgani@hotmail.com

**Introduction.** In an evolutionary game each individual chooses among alternative actions or behaviors whose payoff or fitness depends on the choices of others. Over time the distribution of observed behavior in a population evolves, as fitter strategies become more prevalent. The very prevalence of a behavior can make it (and other behaviors) more fit or less fit, so dynamics can be quite complex. One can ask which behaviors become extinct and which survive over time, whether the system approaches some stable steady-state, and so forth.

The biologists emphasize pairwise interactions of individuals drawn randomly from a single population and center their analysis on a static equilibrium concept known as ESS, for "evolutionarily stable"strategy or state.

The state of the population can be described by the $m$-tuple $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ of species probabilities, that is $x_k$ is the fraction of the species $k$ in the total population. In the case of panmixia (random interbreeding) the parent pairs $i$ and $j$ arise for a fixed state $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ with probability $x_i x_j$. Assume the scale of species is such that the species of the parents $i$ and $j$ unambiguously determines the probability $p_{ij,k}$ of every species $k$ for the first generation of direct descendants of the $i$ and $j$. This probability is called the heredity coefficient. Hence the total probability of the species $k$ in the first generation of direct descendants is defined by

$$\sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j, \quad (k = 1, \cdots, m)$$

A map $V$ of $S^{m-1}$ into itself is called a quadratic stochastic operator (qso) if

$$(V\mathbf{x})_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j \tag{1}$$

for any $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ and for all $k = 1, \cdots, m$, where

$$a) p_{ij,k} \geq 0, \quad b) p_{ij,k} = p_{ji,k} \text{ for all } i, j, k; \quad c) \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k} = 1.$$

Assume $\{\mathbf{x}^{(n)} \in S^{m-1} : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ is the trajectory of the initial point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$, where $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)})$ for all $n = 0, 1, 2, \cdots$, with $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$.
A point $\mathbf{a} \in S^{m-1}$ is called a fixed point of a qso $V$ if $V(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.
A qso $V$ is called regular if for any initial point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ the limit

$$\lim_{n \to \infty} V^n(\mathbf{x}) \tag{2}$$

exists.
Note that the limit point be a fixed point of a qso $V$. Thus the fixed points of qso

describe limit or long run behavior the trajectories of any initial point. Limit behavior of trajectories and fixed points of qso play important role in many applied problems.
Economists and other social scientists can usefully employ many of the ideas introduced by the biologists, but the biologists' formal structure needs to be adapted and extended. A fundamental point is that biologists almost always deal with the genetic mechanism of natural selection. For economists the social mechanisms of learning and imitation are usually more important than the genetic mechanism [1,2]. Two other, less fundamental extensions are worth noting briefly. Most of the existing biological models consider the evolution of a single species rather than the coevolution of several distinct species. In [3] the authors provided the model of the bisexual population system in which the gender difference has taken into the consideration. It is worth mentioning that this model for the bisexual population system is totally different from the model (1).
Below we consider a model features interactions of several strategically distinct populations, so as to represent economic relationships between buyers and sellers, or between residents in different jurisdictions, etc.

**A model of interaction between two populations.** In [1] Friedman provided the following model of interaction between two populations. It is considered a stylized interaction between two populations, called "buyers"and "sellers". Each seller has available two possible actions or strategies, "honest"($i = 1$) and "cheat"($i = 2$); and each buyer also has two alternative strategies, "inspect"($i = 1$) and "don't inspect"($i = 2$). Since the strategy/state simplices here are 1-dimensional the state $s = ((s^1_1, s^1_2), (s^2_1, s^2_2))$ can be described by a point $(p, q)$ in the square $[0, 1] \times [0, 1]$, with $s^1_1 = p$ as the fraction of buyers who inspect and $s^2_1 = q$ as the fraction of honest sellers, so $s^1_2 = 1-p$ and $s^2_2 = 1-q$.

As for dynamics, it is assumed with Malthus that the growth rate of a strategy is proportional to or (with an appropriate choice of time scale) equal to its relative fitness. Hence we have the following dynamic

$$\begin{aligned} \dot{p} &= p(1-p)(1-2q) \\ \dot{q} &= q(1-q)(2p-1) \end{aligned} \tag{3}$$

It is easy to check that the system (2) of coupled differential equations has five fixed points (i.e., steady-states), at the center and at the four corners of the $p$ - $q$ square. It can be shown that all other points are on periodic trajectories circling counterclockwise. Thus under Malthusian dynamics the four corner fixed points are unstable and the center point is neutral, neither asymptotically stable nor unstable.
Below we produce a discrete dynamical systems for considered model. Discrete systems are of interest in part because computer simulations are intrinsically discrete [4].

**Discrete Friedman's model.** Below we produce a discrete dynamical systems for model considered by Friedman. As noted above the discrete systems are of interest in part because computer simulations are intrinsically discrete [4]. The discrete time dynamical system corresponding to (2) is defined as follows

$$\begin{aligned} p' &= p(2-p-2q+2pq) \\ q' &= q(2p+q-2pq) \end{aligned} \tag{4}$$

To describe fixed points of (3) we have to solve the following system of equations

$$\begin{aligned} p &= p(2-p-2q+2pq) \\ q &= q(2p+q-2pq) \end{aligned} \tag{5}$$

It is easy to verify that the system of coupled equations (4) has also five fixed points at the center $M_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ and at the four corners $M_1 = (0,0), M_2 = (0,1), M_3 = (1,0), M_4 = (1,1)$ of the $p$ - $q$ square. A Jacobian for dynamical system (3) has the form

$$D(p,q) = \begin{bmatrix} 2-2p-2q+4pq & -2p+2p^2 \\ 2q-2q^2 & 2p+2q-4pq \end{bmatrix}$$

At the corners $M_1$ and $M_4$ we have

$$D(M_1) = D(M_4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and at the corners $M_2$ and $M_3$ we have

$$D(M_2) = D(M_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

At the center $M_0$ we have

$$D(M_0) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

**Theorem 1.** The non-linear dynamical system (3) is the regular transformation. We verify this statement applying numerical analysis. We check that for any initial point its trajectory converges to one of 4 fixed points $M_1, M_2, M_3, M_4$. Recall that if the Jacobian of the dynamical system at an fixed point happens to be a stability matrix,i.e., if the real part of each eigenvalue is strictly negative, then the fixed point is asymptotically stable.

**Theorem 2.** All 5 fixed points are non asymptotically stable.

**Conclusion.** We can consider also a stylized interaction between two populations, called "officials"and "supplicants". Each official has available two possible actions or strategies, "not briber"($i = 1$) and "bribe taker"($i = 2$); and each supplicant also has two alternative strategies, "corrupter"($i = 1$) and "not bribing"($i = 2$).

## References


1. *Friedman,D.* Evolutionary Games in Economics, Econometrica, Vol.59, No. 3,1991, 637-666.

2. *Friedman, D.* On economic applications of evolutionary game theory, J.Evol. Econ., 8 ,1998, 15-43.

3. *Ganikhodjaev, N., Saburov, M., and Jamilov U.* Mendelian and Non-Mendelian Quadratic Operators, Applied Mathematics and Information Sciences Vol. 7, No. 5, 2013, 1721-1729.

4. *Nachbar, J.H.* "Evolutionary" Selection Dynamics in Games: Convergence and Limit Properties, International Journal of Game Theory, 19, 1990, 59-89.

# On the integral formula for matrix factorizations of the Helmholtz equation in multidimensional space

**Juraev D.A.**

*Higher Military Aviation School of the Republic of Uzbekistan*
e-mail: juraev_davron@list.ru

In this paper, we are talking about the validity of the integral formula for matrix factorization of the Helmholtz equation in a multidimensional bounded domain.

In the future, we will construct the Carleman matrix for matrix factorizations of the Helmholtz equation in multidimensional bounded domain and based on it we will find an approximate solution to the Cauchy problem in explicit form, using the methodology of previous works (See for instance [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and 10]). The system considered in this paper was introduced by N.N. Tarkhanov. For this system, he studied correct boundary value problems and found an analogue of the Cauchy integral formula in a bounded domain (see for instance [12]). An integral formula for matrix factorizations of the Laplace equation was considered by N.N. Tarkhanov. In this paper, we present an integral formula for matrix factorizations of the Helmholtz equation.

Let $\mathbf{R}^m$ be the $m-$dimensional real Euclidean space,

$$x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbf{R}^m,\ y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbf{R}^m,$$

$$x' = (x_1, ..., x_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1},\ y' = (y_1, ..., y_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}.$$

We introduce the following notation:

$$r = |y - x|\,, \alpha = |y' - x'|\,, w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m,\ u \geq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^T,\ \frac{\partial}{\partial x} = \xi^T,\ \xi^T = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_m \end{pmatrix} - \text{transposed vector } \xi,$$

$$U(x) = (U_1(x), ..., U_n(x))^T,\ u^0 = (1, ..., 1) \in \mathbf{R}^n,\ n = 2^m,\ m \geq 2,$$

$$E(z) = \left\| \begin{matrix} z_1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots. \\ 0 \ldots z_n \end{matrix} \right\| - \text{diagonal matrix}, z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbf{R}^n.$$

$G \subset \mathbf{R}^m-$be a bounded simply-connected domain with piecewise smooth boundary consisting of the plane $T$: $y_m = 0$ and of a smooth surface $S$, lying in the half-space $y_m > 0$, i.e., $\partial G = S \bigcup T$.

Let $D(\xi^T), (n \times n)-$dimensional matrix with elements consisting of a set of linear functions with constant coefficients of the complex plane for which the following condition is satisfied:

$$D^*(\xi^T)D(\xi^T) = E((|\xi|^2 + \lambda^2)u^0),$$

where $D^*(\xi^T)$ is the Hermitian conjugate matrix $D(\xi^T)$, $\lambda-$ is a real number.

We consider in the region $G$ a system of differential equations

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x)=0, \qquad (1)$$

where $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ is the matrix of first-order differential operators.

We denote by $A(G)-$the class of vector functions in the domain $G$ continuous on $\overline{G}=G\bigcup\partial G$ and satisfying system (1).

If $U(y)\in A(G)$, then the following integral formula of Cauchy type is valid

$$U(x)=\int\limits_{\partial G}N(y,x;\lambda)U(y)ds_y,\ \ x\in G,$$

where

$$N(y,x;\lambda)=\left(E\left(\varphi_m(\lambda r)u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D(t^T).$$

Here $t=(t_1,\dots,t_m)-$is the unit exterior normal, drawn at a point $y$, the surface $\partial G$, $\varphi_m(\lambda r)-$ is the fundamental solution of the Helmholtz equation in $\mathbf{R}^m$, where $\varphi_m(\lambda r)$ defined by the following formula:

$$\varphi_m(\lambda r)=P_m\lambda^{(m-2)/2}\frac{H^{(1)}_{(m-2)/2}(\lambda r)}{r^{(m-2)/2}},$$

$$P_m=\frac{1}{2i(2\pi)^{(m-2)/2}},$$

Here $H^{(1)}_{(m-2)/2}(\lambda r)-$ is the Hankel function of the first kind of $(m-2)/2-$ the order (see for instance [11]).

We denote by $K(w)$ is an entire function taking real values for real $w$, $(w=u+iv,\ \ u,v-$real numbers) and satisfying the following conditions:

$$K(u)\neq 0,\ \sup_{v\geq 1}\left|v^pK^{(p)}(w)\right|=B(u,p)<\infty,$$

$$-\infty<u<\infty,\ p=0,1,...,m.$$

We define the function $\Phi(y,x;\lambda)$ at $y\neq x$ by the following equalities

$$\Phi(y,x;\lambda)=\frac{1}{c_mK(x_m)}\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}}\int\limits_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{K(w)}{w-x_m}\right]\frac{uI_0(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du,$$

$$m=2k,\ k\geq 1,$$

where $c_2=-2\pi$, $c_m=(-1)^{k-1}(k-1)!(m-2)\pi\omega_m$, $k\geq 2$; $I_0(\lambda u)=J_0(i\lambda u)-$is the Bessel function of the first kind of zero order, $\omega_m-$ area of a unit sphere in space $\mathbf{R}^m$, and

$$\Phi(y,x;\lambda)=\frac{1}{c_mK(x_m)}\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}}\int\limits_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{K(w)}{w-x_m}\right]\frac{cos(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du,$$

$$m=2k+1,\ k\geq 1,$$

where $c_m = (-1)^k 2^{-k}(2k-1)!(m-2)\pi\omega_m$, $k \geq 1$; $\omega_m-$ area of a unit sphere in space $\mathbf{R}^m$.

## References


1. *Juraev D.A.* Regularization of the Cauchy problem for systems of equations of elliptic type. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, Germany, 2014.
2. *Juraev D.A.* Regularization of the Cauchy problem for systems of elliptic type equations of first order. Uzbek Mathematical Journal, N 1, 2016, 61–71.
3. *Juraev D.A.* The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain. Siberian Electronic Mathematical Reports, V. 14, 2017, 752–764.
4. *Juraev D.A.* Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. Ukrainian Mathematical Journal, V. 69, N 10, 2017, 1364–1371.
5. *Juraev D.A.* On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain. Siberian Electronic Mathematical Reports, V. 15, 2018, 11–20.
6. *Juraev D.A.* The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in $\mathbf{R}^3$. Journal of Universal Mathematics, V. 1, N 3, 2018, 312–319.
7. *Juraev D.A.* On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain in $\mathbf{R}^2$. Siberian Electronic Mathematical Reports, V. 15, 2018, 1865–1877.
8. *Juraev D.A.* On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. Advanced Mathematical Models & Applications, V. 4, N 1, 2019, 86–96.
9. *Juraev D.A.* On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. Journal of Universal Mathematics, V. 2, N 2, 2019, 113–126.
10. *Juraev D.A.* The solution of the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation, Advanced Mathematical Models & Applications, V. 5, N 2, 2020, 205–221.
11. *Kythe P.K.* Fundamental solutions for differential operators and applications, Birkhauser, Boston, 1996.
12. *Tarkhanov N.N.* The Cauchy problem for solutions of elliptic equations, Akad. Verl., V. 7, Berlin, 1995.


# Some classes of 5-dimensional complex nilpotent associative algebras


**Karimjanov I.A., Kodirova M.A., Sodiqov Sh.Sh**

Andijan State University
e-mail: iqboli@gmail.com,
mahfuza.kodirova@inbox.ru,
bek_0188@bk.ru


The algebraic classification (up to isomorphism) of associative algebras is an old and classic problem. The problem of classifying all associative algebras is still unsolved and it is very complicated. There are many results related to the algebraic classification of low-dimensional associative algebras. The classification of nilpotent algebras of dimension less or equal 4 over the complex numbers, were given by Hazlet [1]. Kruse and Price [2] classified nilpotent associative algebras of dimension less or equal 4 over any field. Associative unitary algebras of dimension 5 over algebraic closed fields of characteristic different from 2 and on nilpotent commutative associative algebras of dimension less or equal 5 over algebraically closed fields of characteristic different from 2,3 were published by Mazzola in [3-4]. Poonen [5] gave a classification of nilpotent commutative associative algebras of dimension ($\leq 5$), over algebraically closed fields. Eick and Moede [6] have developed a coclass theory for nilpotent associative algebras, offering a different perspective on their classification. De Graaf classified nilpotent associative algebras of dimension less or equal 4 using the method of central extensions [7].

In this work we give the classification of some 5-dimensional complex nilpotent associative algebras. We use $\chi(\mathcal{A}) = (dim\mathcal{A}, dim\mathcal{A}^2, dim\mathcal{A}^3, \ldots, dim\mathcal{A}^n)$ - the isomorphism invariant. We consider the isomorphism invariants $\chi(\mathcal{A}) = (5, 2, 1, 0, 0)$ for any 5-dimensional complex nilpotent associative algebra $\mathcal{A}$ with the condition $\mathcal{A}^4 = 0 \wedge \mathcal{A}^3 \neq 0$ and we give the classification (up to isomorphism) of such type algebras.

All algebras and vector spaces in this paper are over $\mathbb{C}$.

An algebra $\mathcal{A}$ is called *associative algebra* if for any $x, y, z \in \mathcal{A}$ it satisfies the identity

$$(xy)z = x(yz).$$

For an algebra $\mathcal{A}$, we consider the series

$$\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}, \qquad \mathcal{A}^{i+1} = \mathcal{A}^i\mathcal{A}, \qquad i \geq 1.$$

We say that an algebra $\mathcal{A}$ is *nilpotent* if $\mathcal{A}^i = 0$ for some $i \in \mathbb{N}$. The smallest integer satisfying $\mathcal{A}^i = 0$ is called the *nilpotency index* of $\mathcal{A}$.

For a given $n$ - dimensional nilpotent associative algebra $\mathcal{A}$ we define the following isomorphism invariant:

$$\chi(\mathcal{A}) = (dim\mathcal{A}, dim\mathcal{A}^2, dim\mathcal{A}^3, \ldots, dim\mathcal{A}^n).$$

It is evident that

$$dim\mathcal{A} > dim\mathcal{A}^2 > dim\mathcal{A}^3 > \cdots > dim\mathcal{A}^n.$$

**Proposition 1.** Any 5 - dimensional nilpotent complex associative algebra $\mathcal{A}$ with $\mathcal{A}^4 = 0 \wedge \mathcal{A}^3 \neq 0$ belongs to one of the following types of algebras:

$$\chi(\mathcal{A}) = (5, 2, 1, 0, 0), \quad \chi(\mathcal{A}) = (5, 3, 1, 0, 0).$$

Now we give a classification of 5 - dimensional nilpotent complex associative algebra $\mathcal{A}$ which satisfies $\chi(\mathcal{A}) = (5, 2, 1, 0, 0)$.

**Theorem 2.** Let A be a 5 - dimensional nilpotent complex non-split associative algebra with $\chi(\mathcal{A}) = (5, 2, 1, 0, 0)$. Then $\mathcal{A}$ is isomorphic to a pairwise non-isomorphic associative algebras spanned by $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ with the nonzero products given by one of the following:

$$\lambda_1 : \begin{cases} e_1e_1 = e_2, \\ e_1e_2 = e_2e_1 = e_3, \\ e_4e_4 = e_3, \\ e_5e_5 = e_3 \end{cases} \quad \lambda_2 : \begin{cases} e_1e_1 = e_2, \\ e_1e_2 = e_2e_1 = e_3, \\ e_1e_4 = e_3, \\ e_4e_5 = e_5e_4 = e_3 \end{cases} \quad \lambda_3 : \begin{cases} e_1e_1 = e_2, \\ e_1e_2 = e_2e_1 = e_3, \\ e_1e_4 = e_3, \\ e_5e_5 = e_3 \end{cases}$$

$$\lambda_4 : \begin{cases} e_1e_1 = e_2, \\ e_1e_2 = e_2e_1 = e_3, \\ e_1e_4 = e_3, \\ e_4e_4 = e_5e_5 = e_3 \end{cases} \quad \lambda_5 : \begin{cases} e_1e_1 = e_2, \\ e_1e_2 = e_2e_1 = e_3, \\ e_4e_5 = -e_5e_4 = e_3 \end{cases} \quad \lambda_6^\alpha : \begin{cases} e_1e_1 = e_2, \\ e_1e_2 = e_2e_1 = e_3, \\ e_4e_4 = e_4e_5 = e_3, \\ e_5e_5 = \alpha e_3 \end{cases}$$

where $\alpha \in \mathbb{C}$ and in the different values of $\alpha$, the obtained algebras are non-isomorphic.

**BIBLIOGRAPHY**


1. *O.C. Hazlett.* On the classification and invariantive characterization of nilpotent algebras. Am. J. Math. 38(2), 1916, 109вЂ“138.

2. *R.L. Kruse, D.T. Price.* Nilpotent Rings. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.

3. *G. Mazzolla.* The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five. Manuscr. Math. 27(1), 1979, 81вЂ“101.

4. *G. Mazzolla.* Generic finite schemes and Hochschild cocycles. Comment. Math. Helv. 55(2), 1980, 267вЂ“293.

5. *B. Poonen.* Isomorphism types of commutative algebras of finite rank over an algebraically closed field, In Computational Arithmetic Geometry, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 111вЂ“120.

6. *B. Eick and T. Moede.* Nilpotent associative algebras and coclass theory, J. Algebra 434, 2015, 249вЂ“260.

7. *W.A. De Graaf.* Classification of nilpotent associative algebras of small dimension. Int. J. Algebra Comput. 28(1), 2018, 133вЂ“161.


# Central extensions of filiform Zinbiel algebras $F_n^1$


**I.A.Karimjanov, S.M.Umrzaqov, F.G.Qodirov**

Andijan State University
e-mail: iqboli@gmail.com,
sardor.umrzaqov1986@gmail.com,
faxriddinqodirov124@gmail.com


Central extensions play an important role in quantum mechanics: one of the earlier encounters is by means of Wigner's theorem which states that a symmetry of a quantum mechanical system determines an (anti-)unitary transformation of a Hilbert space. Another area of physics where one encounters central extensions is the quantum theory of conserved currents of a Lagrangian. These currents span an algebra which is closely related to so-called affine Kac-Moody algebras, which are universal central extensions of loop algebras. Central extensions are needed in physics, because the symmetry group of a quantized system usually is a central extension of the classical symmetry group, and in the same way the corresponding symmetry Lie algebra of the quantum system is, in general, a central extension of the classical symmetry algebra. Kac-Moody algebras have been conjectured to be symmetry groups of a unified superstring theory. The centrally extended Lie algebras play a dominant role in quantum field theory, particularly in conformal field theory, string theory and in $M$-theory. In the theory of Lie groups, Lie algebras and their representations, a Lie algebra extension is an enlargement of a given Lie algebra $g$ by another Lie algebra $h$. Extensions arise in several ways. There is a trivial extension obtained by taking a direct sum of two Lie algebras. Other types are a split extension and a central extension. Extensions may arise naturally, for instance, when forming a Lie algebra from projective group representations. A central extension and an extension by a derivation of a polynomial loop algebra over a finite-dimensional simple Lie algebra gives a Lie algebra which is isomorphic to a non-twisted affine Kac-Moody algebra [3, Chapter 19]. Using the centrally extended loop algebra one may construct a current algebra in two spacetime dimensions. The Virasoro algebra is the universal central extension of the Witt algebra, the Heisenberg algebra is the central extension of a commutative Lie algebra [3, Chapter 18].

In this work we describe central extensions (up to isomorphism) of filiform Zinbiel algebras $F_n^1$.

All algebras and vector spaces in this paper are over $\mathbb{C}$.

An algebra $\mathbf{A}$ is called *Zinbiel algebra* if for any $x, y, z \in \mathbf{A}$ it satisfies the identity

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y).$$

For an algebra $\mathbf{A}$, we consider the series

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A}^{i+1} = \sum_{k=1}^{i} \mathbf{A}^k \mathbf{A}^{i+1-k}, \qquad i \geq 1.$$

We say that an algebra $\mathbf{A}$ is *nilpotent* if $\mathbf{A}^i = 0$ for some $i \in \mathbb{N}$. The smallest integer satisfying $\mathbf{A}^i = 0$ is called the *nilpotency index* of $\mathbf{A}$.

**Definition 1.** An $n$-dimensional algebra is called filiform if $\dim(\mathbf{A}^i) = n - i,\ 2 \leq i \leq n$.

All filiform Zinbiel algebras were classified in [1].

**Theorem 2.** An arbitary $n$-dimensional $(n \geq 5)$ filiform Zinbiel algebra is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$\begin{array}{lcl} F_n^1 & : & e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^{j} e_{i+j}, \quad 2 \leq i+j \leq n-1; \\ F_n^2 & : & e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^{j} e_{i+j}, \quad 2 \leq i+j \leq n-1, \quad e_n \circ e_1 = e_{n-1}; \\ F_n^3 & : & e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^{j} e_{i+j}, \quad 2 \leq i+j \leq n-1, \quad e_n \circ e_n = e_{n-1}. \end{array}$$

Let $(\mathbf{A}, \circ)$ be a Zinbiel algebra and $\mathbb{V}$ a vector space. Then the $\mathbb{C}$-linear space $\mathrm{Z}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$ is defined as the set of all bilinear maps $\theta\colon \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{V}$, such that

$$\theta(x \circ y, z) = \theta(x, y \circ z + z \circ y).$$

Its elements will be called *cocycles*. For a linear map $f$ from $\mathbf{A}$ to $\mathbb{V}$, if we write $\delta f\colon \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{V}$ by $\delta f(x, y) = f(x \circ y)$, then $\delta f \in \mathrm{Z}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$. We define $\mathrm{B}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V}) = \{\theta = \delta f\ : f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbb{V})\}$. One can easily check that $\mathrm{B}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$ is a linear subspace of $\mathrm{Z}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$ whose elements are called *coboundaries*. We define the *second cohomology space* $\mathrm{H}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$ as the quotient space $\mathrm{Z}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V}) \big/ \mathrm{B}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$.

Let $aut(\mathbf{A})$ be the automorphism group of the Zinbiel algebra $\mathbf{A}$ and let $\phi \in aut(\mathbf{A})$. For $\theta \in \mathrm{Z}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$ define $\phi\theta(x, y) = \theta(\phi(x), \phi(y))$. Then $\phi\theta \in \mathrm{Z}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$. So, $aut(\mathbf{A})$ acts on $\mathrm{Z}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$. It is easy to verify that $\mathrm{B}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$ is invariant under the action of $aut(\mathbf{A})$ and so we have that $aut(\mathbf{A})$ acts on $\mathrm{H}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$.

Let $\mathbf{A}$ be a Zinbiel algebra of dimension $m < n$, and $\mathbb{V}$ be a $\mathbb{C}$-vector space of dimension $n - m$. For any $\theta \in \mathrm{Z}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$ define on the linear space $\mathbf{A}_\theta := \mathbf{A} \oplus \mathbb{V}$ the bilinear product "$[-,-]_{\mathbf{A}_\theta}$" by $[x + x', y + y']_{\mathbf{A}_\theta} = x \circ y + \theta(x, y)$ for all $x, y \in \mathbf{A}, x', y' \in \mathbb{V}$. The algebra $\mathbf{A}_\theta$ is a Zinbiel algebra which is called an $(n-m)$-*dimensional central extension* of $\mathbf{A}$ by $\mathbb{V}$. Indeed, we have, in a straightforward way, that $\mathbf{A}_\theta$ is a Zinbiel algebra if and only if $\theta \in \mathrm{Z}^2(\mathbf{A}, \mathbb{V})$.

Let $\mathbb{V}$ be a finite-dimensional vector space. The *Grassmannian* $G_k(\mathbb{V})$ is the set of all $k$-dimensional linear subspaces of $\mathbb{V}$. Let $G_s(\mathrm{H}^2(\mathbf{A}, \mathbb{C}))$ be the Grassmannian of subspaces of dimension $s$ in $\mathrm{H}^2(\mathbf{A}, \mathbb{C})$. There is a natural action of $aut(\mathbf{A})$ on $G_s(\mathrm{H}^2(\mathbf{A}, \mathbb{C}))$. Let $\phi \in aut(\mathbf{A})$. For $W = \langle [\theta_1], [\theta_2], \dots, [\theta_s] \rangle \in G_s(\mathrm{H}^2(\mathbf{A}, \mathbb{C}))$ define $\phi W = \langle [\phi\theta_1], [\phi\theta_2], \dots, [\phi\theta_s] \rangle$. Then $\phi W \in G_s(\mathrm{H}^2(\mathbf{A}, \mathbb{C}))$. We denote the orbit of $W \in G_s(\mathrm{H}^2(\mathbf{A}, \mathbb{C}))$ under the action of $aut(\mathbf{A})$ by $\mathrm{Orb}(W)$. Since given

$$W_1 = \langle [\theta_1], [\theta_2], \dots, [\theta_s] \rangle, W_2 = \langle [\vartheta_1], [\vartheta_2], \dots, [\vartheta_s] \rangle \in G_s\left(\mathrm{H}^2(\mathbf{A}, \mathbb{C})\right),$$

we easily have that in case $W_1 = W_2$, then $\bigcap\limits_{i=1}^{s} ann(\theta_i) \cap ann(\mathbf{A}) = \bigcap\limits_{i=1}^{s} ann(\vartheta_i) \cap ann(\mathbf{A})$, and so we can introduce the set

$$T_s(\mathbf{A}) = \left\{ W = \langle [\theta_1], [\theta_2], \dots, [\theta_s] \rangle \in G_s\left(\mathrm{H}^2(\mathbf{A}, \mathbb{C})\right) : \bigcap_{i=1}^{s} ann(\theta_i) \cap ann(\mathbf{A}) = 0 \right\},$$

which is stable under the action of $aut(\mathbf{A})$.

Now, let $\mathbb{V}$ be an $s$-dimensional linear space and let us denote by $E(\mathbf{A}, \mathbb{V})$ the set of all *non-split $s$-dimensional central extensions* of $\mathbf{A}$ by $\mathbb{V}$. We can write

$$E(\mathbf{A}, \mathbb{V}) = \left\{ \mathbf{A}_\theta : \theta(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x, y) e_i \ \text{ and } \ \langle [\theta_1], [\theta_2], \dots, [\theta_s] \rangle \in T_s(\mathbf{A}) \right\}.$$

We also have the next result, which can be proved as in Lemma 17 [2].

**Lemma 3.** Let $\mathbf{A}_\theta, \mathbf{A}_\vartheta \in E(\mathbf{A}, \mathbb{V})$. Suppose that $\theta(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{s} \theta_i(x, y) e_i$ and $\vartheta(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{s} \vartheta_i(x, y) e_i$. Then the Zinbiel algebras $\mathbf{A}_\theta$ and $\mathbf{A}_\vartheta$ are isomorphic if and only if

$$\mathrm{Orb}\langle [\theta_1], [\theta_2], \dots, [\theta_s] \rangle = \mathrm{Orb}\langle [\vartheta_1], [\vartheta_2], \dots, [\vartheta_s] \rangle.$$

From here, there exists a one-to-one correspondence between the set of $aut(\mathbf{A})$-orbits on $T_s(\mathbf{A})$ and the set of isomorphism classes of $E(\mathbf{A}, \mathbb{V})$. Consequently we have a procedure that allows us, given the Zinbiel algebra $\mathbf{A}'$ of dimension $n - s$, to construct all non-split central extensions of $\mathbf{A}'$. This procedure would be:

$$\text{cc } \phi_1^n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{1,1}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{3,1} & * & a_{1,1}^3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & * & * & & a_{1,1}^{n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

*Procedure*

1. For a given Zinbiel algebra $\mathbf{A}'$ of dimension $n-s$, determine $\mathrm{H}^2(\mathbf{A}',\mathbb{C})$, $ann(\mathbf{A}')$ and $aut(\mathbf{A}')$.
2. Determine the set of $aut(\mathbf{A}')$-orbits on $T_s(\mathbf{A}')$.
3. For each orbit, construct the Zinbiel algebra corresponding to a representative of it.

Finally, let us introduce some of notation. Let $\mathbf{A}$ be a Zinbiel algebra with a basis $e_1, e_2, \dots, e_n$. Then by $\Delta_{i,j}$ we will denote the bilinear form $\Delta_{i,j}\colon \mathbf{A}\times\mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ with $\Delta_{i,j}(e_l, e_m) = \delta_{il}\delta_{jm}$. Then the set $\{\Delta_{i,j} : 1 \le i,j \le n\}$ is a basis for the linear space of the bilinear forms on $\mathbf{A}$. Then every $\theta \in \mathrm{Z}^2(\mathbf{A},\mathbb{C})$ can be uniquely written as $\theta = \sum\limits_{1\le i,j\le n} c_{ij}\Delta_{i,j}$, where $c_{ij} \in \mathbb{C}$.

## MAIN RESULT

**Proposition 4.** Let $F_n^1$ be $n$-dimensional filiform Zinbiel algebras defined in Theorem [2]. Then:

- A basis of $\mathrm{Z}^2(F_n^1,\mathbb{C})$ is formed by the following cocycles

$$\mathrm{Z}^2(F_n^1,\mathbb{C}) = \langle \Delta_{1,1}, \Delta_{1,n}, \Delta_{n,1}, \Delta_{n,n}, \sum_{i=1}^{s-1} C_{s-1}^{i-1}\Delta_{i,s-i};\ 3 \le s \le n\rangle,$$

- A basis of $\mathrm{B}^2(F_n^1,\mathbb{C})$ is formed by the following coboundaries

$$\mathrm{B}^2(F_n^1,\mathbb{C}) = \langle \Delta_{1,1}, \sum_{i=1}^{s-1} C_{s-1}^{i-1}\Delta_{i,s-i},\ 3 \le s \le n-1\rangle,$$

- A basis of $\mathrm{H}^2(F_n^1,\mathbb{C})$ is formed by the following cocycles

$$\mathrm{H}^2(F_n^1,\mathbb{C}) = \langle [\Delta_{1,n}], [\Delta_{n,1}], [\Delta_{n,n}], [\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1}\Delta_{i,n-i}]\rangle.$$

**Proposition 5.** Let $\phi_1^n \in aut(F_n^1)$. Then
So we have the next theorem
**Theorem 6.** An arbitrary non-split central extension of the algebra $F_n^1$ is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras

- one-dimensional central extensions:

$$\mu_1^{n+1},\ \mu_2^{n+1}(\alpha),\ \mu_3^{n+1},\ \mu_4^{n+1},\ F_{n+1}^1,\ F_{n+1}^2,\ F_{n+1}^3$$

- two-dimensional central extensions:

$$\mu_5^{n+2},\ \mu_6^{n+2},\ \mu_7^{n+2},\ \mu_1^{n+2},\ \mu_8^{n+2},\ \mu_9^{n+2},\ \mu_{10}^{n+2}(\alpha),\ \mu_{11}^{n+2}(\alpha),\ \mu_2^{n+2}(\alpha),\ \mu_{12}^{n+2},\ \mu_4^{n+2},\ \mu_{13}^{n+2},\ \mu_3^{n+2}$$

- three-dimensional central extensions:

$$\mu_{14}^{n+3},\ \mu_{15}^{n+3},\ \mu_{5}^{n+3},\ \mu_{9}^{n+3},\ \mu_{16}^{n+3},\ \mu_{10}^{n+3}(\alpha),\ \mu_{6}^{n+3}$$

- four-dimensional central extensions:

$$\mu_{14}^{n+4}$$

with $\alpha \in \mathbb{C}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_1^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-2$, | $e_1 \circ e_n = e_{n-1}$, | | |
| $\mu_2^n(\alpha)$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-2$, | $e_1 \circ e_n = \alpha e_{n-1}$, | $e_n \circ e_1 = e_{n-1}$, | |
| $\mu_3^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-2$, | $e_n \circ e_n = e_{n-1}$, | | |
| $\mu_4^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-2$, | $e_1 \circ e_n = e_{n-1}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-1}$, | |
| $\mu_5^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-3$, | $e_1 \circ e_n = e_{n-1}$, | $e_n \circ e_1 = e_{n-2}$, | |
| $\mu_6^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-3$, | $e_1 \circ e_n = e_{n-1}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-2}$, | |
| $\mu_7^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-2$, | $e_1 \circ e_n = e_{n-1}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-2}$, | |
| $\mu_8^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-2$, | $e_1 \circ e_n = \frac{1}{n-3} e_{n-1}$, | $e_n \circ e_1 = e_{n-2} + e_{n-1}$, | |
| $\mu_9^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-3$, | $e_1 \circ e_n = e_{n-2} + e_{n-1}$, | $e_n \circ e_1 = e_{n-1}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-2}$ |
| $\mu_{10}^n(\alpha)$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-3$, | $e_1 \circ e_n = \alpha e_{n-1}$, | $e_n \circ e_1 = e_{n-1}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-2}$, |
| $\mu_{11}^n(\alpha)$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-2$, | $e_1 \circ e_n = \alpha e_{n-1}$, | $e_n \circ e_1 = e_{n-1}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-2}$, |
| $\mu_{12}^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-2$, | | $e_n \circ e_1 = e_{n-2} + e_{n-1}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-1}$, |
| $\mu_{13}^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-2$, | | $e_n \circ e_1 = e_{n-2}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-1}$, |
| $\mu_{14}^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-4$, | $e_1 \circ e_n = e_{n-2}$, | $e_n \circ e_1 = e_{n-1}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-3}$, |
| $\mu_{15}^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-3$, | $e_1 \circ e_n = e_{n-2}$, | $e_n \circ e_1 = e_{n-1}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-3}$, |
| $\mu_{16}^n$ | : | $e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j$, | $2 \le i+j \le n-3$, | $e_1 \circ e_n = \frac{1}{n-4} e_{n-1}$, | $e_n \circ e_1 = e_{n-3} + e_{n-1}$, | $e_n \circ e_n = e_{n-2}$. |

## BIBLIOGRAPHY


1. *Adashev J., Khudoyberdiyev A. Kh., Omirov B. A.,* Classifications of some classes of Zinbiel algebras, Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 4 (2010), 10 pages.

2. *Hegazi A., Abdelwahab H., Calderón Martín A.,* The classification of $n$-dimensional non-Lie Malcev algebras with $(n-4)$-dimensional annihilator, Linear Algebra and its Applications, 505 (2016), 32–56.

3. *Bauerle G.G.A., de Kerf E.A., ten Kroode A.P.E.,* Lie Algebras. Part 2. Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics, edited and with a preface by E.M. de Jager, Studies in Mathematical Physics, vol. 7, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, ISBN 0-444-82836-2, 1997, x+554 pp.

# Non-uniqueness of the translation-invariant Gibbs measure in a set of DNA for the Blume-Capel model on the Cayley tree

**Khatamov Nosijon Muydinovich, Adashova Sarvinoz Rasuljon qizi**

*Doctoral student Institute of Mathematics, Academy of Sciences of RU, master student of NamSU*

e-mail nxatamov@mail.ru, e-mail: adashovasarvinoz95@gmail.com

It is known that each molecule of DNA is a double helix formed from two complementary strands of nucleotides held together by hydrogen bonds between $G-C$ and $A-T$ base pairs, where cytosine (C), guanine (G), adenine (A), and thymine (T). The genetic information stored in an organism's DNA contains the instructions for all the proteins the organism will ever synthesize [1].

Holliday junction [3], cross-shaped structure that forms during the process of genetic recombination, when two double-stranded DNA molecules become separated into four strands in order to exchange segments of genetic information.

In papers [6,7] an Ising and a Potts model of DNAs are considered, to study their thermodynamics. It is shown that, depending on temperature, number of TIGMs can be up to three. Note that non-uniqueness of Gibbs measure corresponds to phase coexistence in the system of DNAs. By properties of Markov chains (corresponding to TIGMs) Holliday junction and branches of DNAs are studied. (For other results about Blume-Capel model see [2,8,9]).

In our model we consider a set of DNAs which 'live' on a tree-like graph. Let $l$ be an edge of this graph we have a function $\sigma(l)$ with three possible values -1,0, 1 (an analogue of spin values in physical systems), in case $\sigma(l)=0$ we say the edge $l$ does not belong to a DNA. If this $l$ separates two DNA then the value $\sigma(l)=1$ or $\sigma(l)=-1$ means that these two DNA have a Holliday junction.

Now following [5-7] we recall some definitions.

The Cayley tree $\Gamma^k$ of order $k\geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Let $\Gamma^k=(V,L,i)$, where $V$ is the set of vertices $\Gamma^k$, $L$ the set of edges and $i$ is the incidence function setting each edge $l\in L$ into correspondence with its endpoints $x,y\in V$. If $i(l)=\{x,y\}$, then the vertices $x$ and $y$ are called the nearest neighbors, denoted by $l=\langle x,y\rangle$. The distance $d(x,y), x,y\in V$ on the Cayley tree is the number of edges of the shortest path from $x$ to and $y$:

$d(x,y)=\min\{d|\exists\ x=x_0,x_1,...,x_{d-1},x_d=y\in V \text{ such that } \langle x_0,x_1\rangle,...,\langle x_{d-1},x_d\rangle\}$.

For a fixed $x^0\in V$ we set $W_n=\{x\in V: d(x^0,x)=n\}$,

$$V_n=\{x\in V: d(x^0,x)\leq n\}, L_n=\{l=\langle x,y\rangle\in L|x,y\in V_n\}. \tag{1}$$

For any $x\in V$ denote

$$W_m(x)=\{y\in V: d(x,y)=m, m\geq 1\}.$$

Denote $\mathbf{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$. In [4] it was shown that there exists a continuum sets as set $\mathbf{Z}$ on the Cayley tree. Each such path is called a $\mathbf{Z}-path$.

Let $L$ be the set of edges of a Cayley tree. Consider function $\sigma$ which assigns to each edge $l \in L$, values $\sigma(l) \in \{-1, 0, 1\}$. Value $\sigma(l) = -1$ (resp. $+1$) means that edge $l$ is 'occupied' by -1 ="A with T"(resp. 1 ="C with G"), and $\sigma(l) = 0$ that $l$ is 'vacant'.

A configuration $\sigma = \{\sigma(l), l \in L\}$ on edges of the Cayley tree is given by a function from $L$ to $\{-1, 0, 1\}$. The set of all configurations in $L$ is denoted by $\Omega$. Configurations in $L_n$ are defined analogously and the set of all configurations in $L_n$ is denoted by $\Omega_n$.

A configuration $\sigma = \{\sigma(l), l \in L\}$ is called *admissible* if $\sigma(l) \neq 0$ for any $l \in \mathbf{Z} - path$.

The restriction of an admissible configuration on a $\mathbf{Z} - path$ is called a DNA (since it is a sequence of - 1 and 1 values, see above the part "About DNA").

We consider the following Blume-Capel model of the energy of the configuration $\sigma$ of a set of DNAs (see [10]):

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle l,t\rangle \in L\times L;} (\sigma(l) - \sigma(t))^2, \tag{2}$$

where $J > 0$ is a coupling constant, $\sigma(l) \in \{-1, 0, 1\}$ and $\langle l, t\rangle$ stands for nearest neighbor edges, i.e. edges which have a common endpoint.

Let $\Omega_n^a$ (resp. $\Omega^a$) be the set of all admissible configurations on $L_n$ (resp. $L$).

Denote

$$E_n = \{\langle x, y\rangle \in L : x \in W_{n-1}, y \in W_n\},$$

$$\Omega_n^{ba} = \text{the set of admissible configurations on } E_n.$$

For $l \in E_{n-1}$ denote

$$S(l) = \{t \in E_n : \langle l, t\rangle)\}.$$

It is easy to see that

$$S(l) \bigcap \mathbf{Z} - path = \begin{cases} \{l_0, l_1\} \subset L, & \text{if } l \notin \mathbf{Z}\text{-path}, \\ \{l_1\} \subset L, & \text{if } l \in \mathbf{Z}\text{-path}. \end{cases}$$

We denote

$$S_0(l) = S(l) \setminus \{l_0, l_1\}, l \notin \mathbf{Z} - path,$$

$$S_1(l) = S(l) \setminus \{l_1\}, l \in \mathbf{Z} - path.$$

By standard way (see [5-7]) one can reduce the study of Gibbs measures of Blume-Capel model to the problem of finding solutions of the following system of functional equations:

$$z_{0,l} = \frac{\lambda z_{l_0} + \lambda}{\lambda^4 z_{l_0} + 1} \cdot \frac{\lambda z_{l_1} + \lambda}{\lambda^4 z_{l_1} + 1} \cdot \prod_{t\in S_0(l)} \frac{\lambda z_{+1,t} + \lambda + z_{0,t}}{\lambda^4 z_{+1,t} + 1 + \lambda z_{0,t}}, l \notin \mathbf{Z} - path,$$

$$z_{1,l} = \frac{z_{l_0} + \lambda^4}{\lambda^4 z_{l_0} + 1} \cdot \frac{z_{l_1} + \lambda^4}{\lambda^4 z_{l_1} + 1} \cdot \prod_{t\in S_0(l)} \frac{z_{+1,t} + \lambda^4 + \lambda z_{0,t}}{\lambda^4 z_{+1,t} + 1 + \lambda z_{0,t}}, l \notin \mathbf{Z} - path,$$

$$z_l = \frac{z_l + \lambda^4}{\lambda^4 z_l + 1} \cdot \prod_{t\in S_1(l)} \frac{z_{+1,t} + \lambda^4 + \lambda z_{0,t}}{\lambda^4 z_{+1,t} + 1 + \lambda z_{0,t}}, l \in \mathbf{Z} - path. \tag{3}$$

*Here*

$$\lambda = exp(-J\beta). \tag{4}$$

Moreover, it follows that for any set of vectors $\mathbf{z} = \{(z_{0,l}, z_{1,l}, z_t), l \notin \mathbf{Z} - path, t \in \mathbf{Z} - path$ satisfying the system of functional Eq.(3) there exists a unique Gibbs measure $\mu$ and vice versa. However, the analysis of solutions to (3) is not easy. We shall give several solutions to (3).

A translation invariant Gibbs measure correspondis a solution $\mathbf{z}_l$ of the system of functional Eq. (3), which does not depend on $l$, i.e.,

$$z_{0,l} = u, z_{1,l} = v, \forall l \notin \mathbf{Z} - path; z_l = w, \forall l \in \mathbf{Z} - path, \tag{5}$$

where $u, v, w > 0$ (by (3)) satisfy

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{\lambda v + \lambda + u}{\lambda^4 v + 1 + \lambda u}\right)^{k-2} \left(\frac{\lambda w + \lambda}{\lambda^4 w + 1}\right)^2, \\ v &= \left(\frac{v + \lambda^4 + \lambda u}{\lambda^4 v + 1 + \lambda u}\right)^{k-2} \left(\frac{w + \lambda^4}{\lambda^4 w + 1}\right)^2, \\ w &= \left(\frac{v + \lambda^4 + \lambda u}{\lambda^4 v + 1 + \lambda u}\right)^{k-1} \left(\frac{w + \lambda^4}{\lambda^4 w + 1}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Denote by $\mu_i$ the Gibbs measure which, by (3), corresponds to the solution $\mathbf{z}_i, i = 1, 2, 3$.

Thus we obtain the following

**Theorem.** *For the model (2) of DNAs on the Cayley tree of order $k = 2$ the following statements are true*

(1) *If the temperature $T > T_c = \frac{J}{ln\frac{1}{\lambda_*}}$* ($\lambda_* \approx 0.7110460893$) *then there is unique translation-invariant Gibbs measure $\mu_1$.*

(2) *If $T = T_c$ then there are 2 translation-invariant Gibbs measures $\mu_1, \mu_2$.*

(3) *If $T < T_c$ then there are 3 translation-invariant Gibbs measures $\mu_1, \mu_2, \mu_3$.*

## References.


1. **Alberts B. and others.** Molecular biology of the cell, 4th edn. Garland Science, New York, 2002.

2. **Cirillo E.N., Olivieri E.** Metastabilty and nucleation for the Blume-Capel model.Different mechanisms of transition. Journal of Statistical Physics, vol.83, 1996, pp.473-554.

3. **Holliday R.** A mechanism for gene conversion in fungi. Genet Res 5:282-304,1964.

4. **Rozikov U.A., Ishankulov F.T.** Description of periodic p-harmonic functions on Cayley trees. Nonlinear Diff Equ Appl 17(2):153-160, 2010.

5. **Rozikov U. A.** Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore 2013.

6. **Rozikov U.A.** Tree-hierarchy of DNA and distribution of Holliday junctions. J.Math.Biol.75:1715-1733. 2017.

7. **Rozikov U.A.** Holliday junctions for the Potts model of DNA. Algebra, Complex Analysis. Springer, Switzerland, pp. 151-165, 2018.

8. **Khatamov N.M., Khakimov R.M.** Translation-invariant Gibbs measures for the Blume-Capel model on a Cayley tree. JMAG. 2019, Vol.15, No.2, pp.239-255.

9. **Khatamov N.M.** Translation-invariant extreme Gibbs measures for the Blume-Capel model with a wand on a Cayley tree. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, Vol 72, No. 4(2020), p.540-556.

10. **Swigon D.** The mathematics of DNA structure. Mech Dyn IMA Vol Math Appl 150:293-320, 2009.

# 2-Local *-automorphisms of real W*-algebra $B(H_r)$ are inner *-automorphism


**Kh.A.Nazarov**

*Ferghana State University, Ferghana, Uzbekistan.*

e-mail : hasanbek.nazarov@mail.ru.


Given an *-algebra $\mathcal{A}$, a linear operator $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is called a **-automorphism*, if $\theta(A^*) = \theta(A)^*$ and $\theta(AB) = \theta(A)\theta(B)$, for all $A, B \in \mathcal{A}$. Each invertible element (or unitary) element $U \in \mathcal{A}$ implements a *-automorphism $AdU$ on $\mathcal{A}$ defined as $AdU(A) := UAU^{-1}$, $A \in \mathcal{A}$. Such *-automorphisms are said to be *inner *-automorphisms.* A map $\Theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (not linear in general) is called a *2-local *-automorphism*, if for every $A, B \in \mathcal{A}$, there exists a *-automorphism $\theta_{A,B} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ such that $\Theta(A) = \theta_{A,B}(A)$ and $\Theta(B) = \theta_{A,B}(B)$.

Let $\mathcal{A}$ be a Banach *-algebra over the field $\mathbb{C}$. The algebra $\mathcal{A}$ is called a C*-*algebra*, if $\|AA^*\| = \|A\|^2$, for any $A \in \mathcal{A}$. A real Banach *-algebra $\mathcal{R}$ is called a *real* C*-*algebra*, if $\|AA^*\| = \|A\|^2$ and an element $\mathbb{1} + AA^*$ is invertible for any $A \in \mathcal{R}$. It is easy to see that $\mathcal{R}$ is a real C*-algebra if and only if a norm on $\mathcal{R}$ can be extended onto the complexification $\mathcal{A} = \mathcal{R} + i\mathcal{R}$ of the algebra $\mathcal{R}$ so that algebra $\mathcal{A}$ is a C*-algebra.

Let $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space $H$. A weakly closed *-subalgebra $M$ containing the identity operator $\mathbb{1}$ in $B(H)$ is called a W*-*algebra*. A real *-subalgebra $R \subset B(H)$ is called a *real* W*-*algebra* if it is closed in the weak operator topology, $\mathbb{1} \in R$ and $R \cap iR = \{0\}$. It is known that (see [1], [2]) there is a real Hilbert space $H_r$ with

$$H_r + iH_r = H, \quad R \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H),$$

where $B(H_r)$ is the algebra of all (real) linear bounded operators on $H_r$. It's obvious that $B(H_r)$ is a real W*-algebra and if $H_r$ is a finite-dimensional, i.e. $dim(H) = n < \infty$, then $B(H_r) = M_n(\mathbb{R})$ is the algebra of all $n \times n$ - real matrices. It is known that every *-automorphism of an algebra $B(H)$ is inner.

The real analogue of the result is also true

**Theorem 1.** Every *-automorphism of an algebra $B(H_r)$ is inner.

Now, let $dim(H_r) = n < \infty$. Then $B(H_r) = M_n(\mathbb{R})$.

**Theorem 2.** Every 2-local *-automorphism $\Theta : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ is a *-automorphism.

Now, let us to consider an infinite-dimensional case, i.e. let $dim(H_r) = \infty$.

**Theorem 3.** Every 2-local *-automorphism $\Theta : B(H_r) \to B(H_r)$ is a *-automorphism.

Theorems 1 and 3 imply the following corollary.

**Corollary.** Every 2-local *-automorphism of real W*-algebra $B(H_r)$ is inner *-automorphism.

## References


1. *B.R.Li*, Real operator algebras, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003, pp. 241.

2. *Ayupov, Sh.A, Rakhimov, A.A. and Usmanov, Sh.M.* Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Kluw.Acad.Pub., MAIA. 418, 1997.235p.


# Two periodic $p$-adic generalized Gibbs measure for Ising model on a Cayley tree


**Rahmatullaev M.M, Tukhtabaev A.M**

*Institute of mathematics, Namangan regional department, Uzbekistan academy of sciences*
*Namangan state university*
mrahmatullaev@rambler.ru, akbarxoja.toxtaboyev@mail.ru


In this paper we study two periodic non translation-invariant $p$-adic generalized Gibbs measure for Ising model on the Cayley tree of order three.

Let $Q$ be the field of rational numbers. For a fixed prime number $p$, every rational number $x \neq 0$ can be represented in the form $x = p^r \frac{n}{m}$ where, $r, n \in Z$, $m$ is a positive integer, and $n$ and $m$ are relatively prime with $p$. The $p$-adic norm of $x$ is given by

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

This norm is non-Archimedean, i.e. it satisfies the strong triangle inequality $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ for all $x, y \in Q$.

The completion of $Q$ with respect to the $p$-adic norm defines the $p$-adic field $Q_p$ (see [1]).
Any $p$-adic number $x \neq 0$ can be uniquely represented in the canonical form

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + ...)$$

where $\gamma = \gamma(x) \in Z$ and the integers $x_j$ satisfy: $x_0 > 0,\ 0 \leq x_j \leq p-1$ (see [2]). In this case $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

**Theorem 1** [2]. The equation $x^2 = a,\ 0 \neq a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ...),\ 0 \leq a_j \leq p-1,\ a_0 > 0$ has a solution in $x \in Q_p$ iff hold true the following:
i) $\gamma(a)$ is even;
ii) $x^2 \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, p)$ is solvable for $p \neq 2$; the equality $a_1 = a_2 = 0$ hold if $p = 2$.

For $a \in Q_p$ and $r > 0$ we denote

$$B(a,\ r) = \{x \in Q_p :\ |x - a|_p \leq r\}.$$

$p$-adic *logarithm* is defined by the series

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n!}.$$

which converges for $x \in B(1,1)$ and $p$-adic *exponential* is defined by

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

which converges for $x \in B\left(0, p^{-1/(p-1)}\right)$.

We set

$$\mathcal{E}_p = \left\{x \in Q_p : |x-1|_p < p^{-1/(p-1)}\right\}.$$

This set is the range of the $p$-adic exponential function.

Let $(X, \mathcal{B})$ be a measurable space, where $\mathcal{B}$ is an algebra of subsets $X$. A function $\mu : \mathcal{B} \to Q_p$ is said to be a $p$-adic measure if for any $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{B}$ such that $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$, the following holds:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

A $p$-adic measure $\mu$ is called *bounded* if $\sup\{|\mu(A)|_p : A \in \mathcal{B}\} < \infty$ It is said that $p$-adic measure is probabilistic if $\mu(X) = 1$ (see [3]).

The Cayley tree $\Gamma^k$ of order $k \geq 1$ is an infinite tree i.e., a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Denote by $V$ the set of vertices, and by $L$ the set of edges of the Cayley tree $\Gamma^k$. Two vertices $x$ and $y$ are called *nearest neighbours* if there exist an edge $l \in L$ connecting them and denote by $l = <x, y>$.

Fix $x_0 \in \Gamma^k$ and given vertex $x$, denote by $|x|$ the number of edges in the shortest path connecting $x_0$ and $x$. For $x, y \in \Gamma^k$, denote by $d(x, y)$ the number of edges in the shortest path connecting $x$ and $y$. For $x, y \in \Gamma^k$,we write $x \leq y$ if $x$ belongs to the shortest path connecting $x_0$ with y, and we write $x < y$ if $x \leq y$ and $x \neq y$. If $x \leq y$ and $|y| = |x| + 1$, then we write $x \to y$. We call vertex $x_0$ the *root* of the Cayley tree $x, y \in \Gamma^k$

We set

$$W_n = \{x \in V : |x| = n\}, \quad V_n = \{x \in V : |x| \leq n\}, \quad L_n = \{l = <x, y> \in L : x, y \in V_n\}$$

$$S(x) = \{y \in V : x \to y\}, \quad S_1(x) = \{y \in V : d(x, y) = 1\}.$$

The set $S(x)$ is called the set of direct successors of the vertex $x$.

We consider $p$-adic Ising model on the Cayley tree $\Gamma^k$. Let $Q_p$ be a field of $p$-adic numbers and $\Phi = \{-1, 1\}$. A configuration $\sigma$ on V is define by the function $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Similarly one can define the configuration $\sigma_n$ and $\sigma^{(n)}$ on $V_n$ and $W_n$, respectively. The set of all configurations on V (resp.$V_n$,$W_n$ ) is denoted by $\Omega = \Phi^V$ (resp. $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$,$\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$ ).

For given configurations $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ and $\varphi^{(n)} \in \Omega_{W_n}$ we define a configuration in $\Omega_{V_n}$ as follows

$$(\sigma_{n-1} \vee \varphi^{(n)})(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), & \text{if } x \in V_{n-1}. \\ \varphi^{(n)}(x), & \text{if } x \in W_n. \end{cases}$$

A formal $p$-adic Hamiltonian $H : \Omega \to Q_p$ of Ising model is defined as

$$H(\sigma) = \sum_{<x,y> \in L} J\sigma(x)\sigma(y),$$

where $|J|_p < p^{-1/(p-1)}$ for any $<x, y> \in L$.

Let $h : x \to h_x \in Q_p \setminus \{0\}$ be a $p$-adic function on $V$. Consider $p$-adic probability distribution $\mu_h^{(n)}$ on $\Omega_{V_n}$, which is defined as

$$\mu_h^{(n)}(\sigma_n) = Z_{n,h}^{-1} \exp_p\{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x\in W_n} h_x^{(\sigma_n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

where $Z_{n,h}$ is the normalizing constant

$$Z_{n,h}^{-1} = \sum_{\varphi\in\Omega_{V_n}} \exp_p\{H_n(\varphi)\} \prod_{x\in W_n} h_x^{\varphi(x)}.$$

A $p$-adic probability distribution $\mu_h^{(n)}$ is said to be consistent if for all $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$, we have

$$\sum_{\varphi\in\Omega_{W_n}} \mu_h^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \varphi) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1}.)$$

In this case, by the $p$-adic analogue of Kolmogorov theorem [3], there exists a unique measure $\mu_h$ on the set $\Omega$ such that $\mu_h(\{\sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1})$ for all $n$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$.

The measure $\mu_h$ is called $p$-adic generalized Gibbs measure corresponding to the function $h : x \to h_x \in Q_p$ if restriction of $\mu_h$ to $V_n$ is a measure (1). We notice that if $h_x \in \mathcal{E}_p$ for all $x \in V$ then corresponding measure is called $p$-adic Gibbs measure. It is said that a phase transition occurs for a given hamiltonian if there exist at least two measures. Moreover, if one of them is not bounded and another one is bounded then it is said that there exists the strong phase transition for that model.

**Proposition 1**[4]. A sequence of $p$-adic probability distributions $\mu_h^{(n)}, n = 1, 2, ...$ determined by formula (1) is consistent if and only if for any $x \in V\setminus\{x_0\}$, we have the equality

$$h_x^2 = \prod_{y\in S(x)} \frac{\theta h_y^2 + 1}{h_y^2 + \theta}, \tag{2}$$

where $\theta = \exp_p\{2J\}$.

**Remark 1**[4]. It is easy to see that if the function $h_x$ is a solution to equation (2), then the function $-h_x$ is also a solution. If we consider Ising model on the Cayley tree of order $k$, then these solutions define the same measure $\mu_h$ if $k$ is even. If $k$ is a odd then the corresponding measures$\mu_h$ and $-\mu_h$ are different.

In [4] $p$-adic translation-invariant and two periodic generalized Gibbs measures for the Ising model on the Cayley tree of order two are studied. In [5] $p$-adic translation-invariant generalized Gibbs measures for the Ising model on the Cayley tree of order three are studied.

Because of proposition 1, to find all two periodic generalized measures, it suffices to consider system of the following equations

$$h_1^2 = \left(\frac{\theta h_2^2 + 1}{h_2^2 + \theta}\right)^3, h_2^2 = \left(\frac{\theta h_1^2 + 1}{h_1^2 + \theta}\right)^3. \tag{3}$$

Denote $z = h^2$, $f(z) = \left(\frac{\theta z+1}{z+\theta}\right)^3$. To solve (7) is equivalent to find two periodic fixed points of $f(z)$. We may find two periodic non translation-invariant generalized Gibbs measures by solving the following equation:

$$\frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z} = 0. \tag{4}$$

Since the equation (4) we have

$$\left(\theta^3 z^2 + (3\theta^2 - 1)z + \theta^3\right)\left((\theta^6 + 3\theta^4 + 3\theta^2 + 1)(z^4 + 1) + \right.$$

$$\left. + (6\theta^5 + 20\theta^3 + 6\theta)(z^3 + z) + (24\theta^4 + 24\theta^3)z^2\right) = 0.$$

From the equation $\theta^3 z^2 + (3\theta^2 - 1)z + \theta^3 = 0$, we have

$$z_{1,2} = \frac{1 - 3\theta^2 \pm (\theta^2 - 1)\sqrt{1 - 4\theta^2}}{2\theta^3}. \tag{5}$$

Let us we consider following equation

$$(\theta^6 + 3\theta^4 + 3\theta^2 + 1)(z^4 + 1) + (6\theta^5 + 20\theta^3 + 6\theta)(z^3 + z) + (24\theta^4 + 24\theta^3)z^2 = 0. \tag{6}$$

We can solve the equation (6), but there does not exist a field $Q_p$ such that the solutions of (6) belong to $Q_p$.

**Proposition 2.** *Let $\mathcal{N}_p$ be a number of solutions of (4). Then*

$$\mathcal{N}_p = \begin{cases} 0, & \text{if } \ p \not\equiv 1 (\operatorname{mod} 6) \\ 2, & \text{if } \ p \equiv 1 (\operatorname{mod} 6). \end{cases}$$

We denote by $TPNTIpGGM(H)$ the set of all two periodic non translation-invariant $p$-adic generalized Gibbs measures for hamiltonian $H$. Notation $|A|$ means cardinality of the set $A$.

**Theorem 2.** *Let $H$ be an Ising model on a Cayley tree order three. Then it holds the following*:

$$|TPNTIpGGM(H)| = \begin{cases} 0, & \text{if } \ p \not\equiv 1 (\operatorname{mod} 12) \\ 4, & \text{if } \ p \equiv 1 (\operatorname{mod} 12). \end{cases}$$

*Furthermore, all measures are unbounded.*

## References


1. *N. Koblitz, p-Adic Numbers, p-Adic Analysis, and Zeta-Functions (Springer, Berlin, 1977).*

2. *V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. V. Zelenov, p-Adic Analysis and Mathematical Physics (World Sci. Publ., Singapore, 1994).*

3. *N. N. Ganikhodjayev, F. M. Mukhamedov and U. A. Rozikov, Phase transitions in the Ising model on Z over the p-adic numbers, Uzbek Math. J. 4,23-29 (1998).*

4. *O.N.Khakimov, On a Generalized p-adic Gibbs Measure for Ising Model on Trees, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 6(3), 207-217, (2014).*

5. *M.M.Rahmatullaev, O.N.Khakimov, A.M.Tukhtaboev, A p-Adic generalized Gibbs measure for the Ising model on a Cayley tree,Theor. Math.Phys.201(1),1521-1530 (2019).*

# Real $AW^*$-algebras with abelian self-adjoint part

**Rakhimov A.A, Ramazonova L.D**

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

rakhimov@ktu.edu.tr, rlaylo2405@gmail.com

The study of C*-algebras was begun in the work of Gelfand and Naimark, who proved that such algebras can be characterized abstractly as Banach *-algebras satisfying conditions connecting the norm and the involution. They also proved the fundamental result (Gelfand-Naimark theorem) that a commutative unitial C*-algebra is isomorphic to the algebra of complex valued continuous functions on a compact space (its spectrum).

Nowadays the theory of W*-algebras and C*-algebras is a deeply and widely developed theory interacting with many branches of mathematics and several areas of theoretical physics.

Recently, along with the theory of W*- and C*-algebras, the theory of real W*- and C*-algebras has also been developed quite well. It is known that, unlike to the complex case, in real C*algebras $R$ their hermitian part $R_s$ and skew-hermitian part $R_k$ are not connected by the relation $R_k = iR_s$. In [1] described up to *-isomorphism all real W*-algebras with abelian hermitian part. In paper this result is generalized for the real AW*-algebras. Exactly, it is describe up to *-isomorphism all real AW*-algebras with abelian hermitian part.

**Definition 1.** Let $\mathcal{A}$ be a Banach *-algebra over the field $\mathbf{C}$. The algebra $\mathcal{A}$ is called a C*-*algebra*, if $\|AA^*\| = \|A\|^2$, for any $A \in \mathcal{A}$.

**Definition 2.** A real Banach *-algebra $\mathcal{R}$ is called a *real* C*-*algebra*, if $\|AA^*\| = \|A\|^2$ and an element $\mathbf{1} + AA^*$ is invertible for any $A \in \mathcal{R}$.

It is easy to see that $\mathcal{R}$ is a real C*-algebra if and only if a norm on $\mathcal{R}$ can be extended onto the complexification $\mathcal{A} = \mathcal{R} + i\mathcal{R}$ of the algebra $\mathcal{R}$ so that algebra $\mathcal{A}$ is a C*-algebra (see [2], [3] and [4.,5.1.1]).

Let $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space $H$. A weakly closed *-subalgebra $M$ containing the identity operator $\mathbf{1}$ in $B(H)$ is called a W*-*algebra*. A real *-subalgebra $R \subset B(H)$ is called a *real* W*-*algebra* if it is closed in the weak operator topology, $\mathbf{1} \in R$ and $R \cap iR = \{0\}$ (see [2], [3]).

The notion of AW*-algebras was introduced by Kaplansky as an abstract generalization of weakly closed self-adjoint operator algebras on a complex Hilbert space (W*-algebras). He showed that much of the "non-spatial theory"of W*-algebras can be extended to AW*-algebras. By an AW*-algebra it is meant a C*-algebra such that the left annihilator of any subset is a principal left ideal generated by a projection, i.e. an idempotent self-adjoint element. Every W*-algebra is an AW*-algebra, but the converse is not true as was shown by Dixmier with an abelian example. Let $A$ be a real or complex *-algebra and let $S$ be a nonempty subset of $A$. Put

$$R(S) = \{x \in A | \ sx = 0 \text{ for all } s \in S\}$$

and call $R(S)$ the *right-annihilator* of $S$. Similarly

$$L(S) = \{x \in A | \ xs = 0 \text{ for all } s \in S\}$$

denotes the *left-annihilator* of $S$. Following [5] we introduce the following notions

**Definition 3.** A *-algebra $A$ is called a *Baer *-algebra* if for any nonempty $S \subset A$, $R(S) = gA$ for an appropriate projection $g$.

Since $L(S) = (R(S^*))^* = (hA)^* = Ah$ the definition is symmetric and can be given in terms of the left-annihilator and a suitable projection $h$. Here $S^* = \{s^* | \ s \in S\}$.

**Definition 4.** A complex or real C*-algebra, which is a Baer *-algebra is called an (complex or real, respectively) *AW*-algebra*.

Unlike to the complex case, in real C*-algebras $R$ their hermitian part $R_s$ and skew-hermitian part $R_k$ are not connected by the relation $R_k = iR_s$. In the paper [1] it was described up to *-isomorphism all real W*-algebras with abelian hermitian part. Here we generalize this result for the real AW*-algebras. The main result of this work is the following theorem.

**Theorem.** Let $A$ be a real AW*-algebra. If $A_s = \{x \in A : x^* = x\}$ is abelian, then $A$ contains a central projection $e$ such, that $eA$ is an abelian AW*-algebra, $(\mathbf{1} - e)A$ is an AW*-algebra of type $\mathrm{I}_2$.

### References


1. *Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Abduvaitov A.* Description of the real von Neumann algebras with abelian self -adjoint part, Mathematical Notes, №3, 2002, 473-476.

2. *Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M.* Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras, Kluw.Acad.Pub., MAIA. 418, 1997, 235p.

3. *Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A.* Real W*-algebras, Actions of groups and Index theory for real factors. VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Mauritius. 2010, 138p.

4. *Li Bing-Ren.* Real operator algebras. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003, 241p.

5. *Berberian S.K.* Baer *-rings. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg N.Y. (1972), 309p.


# Trajectories of a non-linear $p$-adic dynamical system


**Rozikov U.A.[1], Hamidov Sh.[2]**

[1] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, 4, University str., 100174, Tashkent, Uzbekistan.*

[2] *Bukhara State University, The department of Mathematics, 11, M.Iqbol, Bukhara, Uzbekistan.*

e-mail: rozikovu@yandex.ru, e-mail: sayitovamehinbonu@gmail.com


The completion of the set of rational numbers $\mathcal{Q}$ with respect to $p$-adic norm $|\cdot|_p$ defines the $p$-adic field which is denoted by $\mathcal{Q}_p$ (see [3]).

The algebraic completion of $\mathcal{Q}_p$ is called *the set of complex p-adic numbers* and denoted by $\mathcal{C}_p$.

For any $a \in \mathcal{C}_p$ and $r > 0$ we denote

$$U_r(a) = \{x \in \mathcal{C}_p : |x-a|_p < r\}, \quad V_r(a) = \{x \in \mathcal{C}_p : |x-a|_p \le r\},$$
$$S_r(a) = \{x \in \mathcal{C}_p : |x-a|_p = r\}.$$

Let $x_0$ be a fixed point of a function $f(x)$, i.e. $f(x_0) = x_0$.

Put $\lambda = f'(x_0)$. The point $x_0$ is attractive if $0 < |\lambda|_p < 1$, *indifferent* if $|\lambda|_p = 1$, and repelling if $|\lambda|_p > 1$.

We study $p$-adic dynamical systems generated by a rational function. For motivation of such investigations see [1], [2] and references therein.

Consider the dynamical system associated with the function $f : \mathcal{C}_p \to \mathcal{C}_p$ defined by

$$f(x) = \frac{a}{x^2}, \quad a \ne 0, \quad a \in \mathcal{C}_p,$$

where $x \ne 0$.

This function has three fixed point $x_k$, $k = 1, 2, 3$, which are solutions to $x^3 = a$ in $\mathcal{C}_p$.

For these fixed points we have

$$x_k^3 = a \quad \Rightarrow \quad |x_k^3|_p = |a|_p \quad \Rightarrow \quad |x_k|_p = \alpha \equiv (|a|_p)^{1/3}. \tag{1}$$

Thus $x_k \in S_\alpha(0)$, $k = 1, 2, 3$.

**Lemma 1.** For $\alpha$ defined in (1) the following assertions hold

1. The sphere $S_\alpha(0)$ is invariant with respect to $f$, (i.e., $f(S_\alpha(0)) \subset S_\alpha(0)$);
2. $f(U_\alpha(0)) \subset \mathcal{C}_p \setminus V_\alpha(0)$;
3. $f(\mathcal{C}_p \setminus V_\alpha(0)) \subset U_\alpha(0)$.

We have

$$f'(x) = \frac{-2a}{x^3} = \frac{-2}{x} \cdot f(x).$$

Therefore at a fixed point we get

$$f'(x_k) = \frac{-2}{x_k} \cdot f(x_k) = -2.$$

$$|f'(x_k)|_p = \begin{cases} 1/2, & \text{if} \ \ p = 2 \\ 1, & \text{if} \ \ p \ge 3 \end{cases}$$

Hence the fixed point $x_k$ is an attractive for $p = 2$ and an indifferent for $p \ge 3$.

Here we can explicitly calculate $f^n$:

**Lemma 2.** For any $x \in \mathcal{C}_p \setminus \{0\}$ we have

$$f^n(x) = a^{\frac{1}{3}(1-(-2)^n)} \cdot x^{(-2)^n}, \quad n \ge 1.$$

Recall $\alpha = (|a|_p)^{1/3}$. For $r > 0$, take $x \in S_r(0)$, i.e., $|x|_p = r$. Then we have

$$|f^n(x)|_p = \left| a^{\frac{1}{3}(1-(-2)^n)} \cdot x^{(-2)^n} \right|_p = \alpha^{1-(-2)^n} \cdot r^{(-2)^n}, \quad n \ge 1. \tag{2}$$

For given $r > 0$, denote

$$r_n = \alpha^{1-(-2)^n} \cdot r^{(-2)^n}.$$

Then by (2) we get the trajectory $f^n(x)$, $n \ge 1$ of $x \in S_r(0)$ has the following sequence of spheres on its route:

$$S_r(0) \to S_{r_1}(0) \to S_{r_2}(0) \to S_{r_3}(0) \to \ldots$$

Now we calculate the limits of $r_n$.
**Case of even** $n$. From (2) it is easy to see that

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(x)|_p = \lim_{n\to\infty} r_n = \begin{cases} 0, & \text{if } \ r < \alpha \\ \alpha, & \text{if } \ r = \alpha \\ +\infty, & \text{if } \ r > \alpha \end{cases}$$

**Case of odd** $n$. In this case we have

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(x)|_p = \lim_{n\to\infty} r_n = \begin{cases} +\infty, & \text{if } \ r < \alpha \\ \alpha, & \text{if } \ r = \alpha \\ 0, & \text{if } \ r > \alpha \end{cases}$$

Summarizing above-mentioned results we obtain the following theorem:
**Theorem 1.** If $p \geq 3$ and $\alpha$ is defined by (1). Then
1. if $x \in U_\alpha(0)$ then

$$\lim_{k\to\infty} f^{2k}(x) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} |f^{2k-1}(x)|_p = +\infty.$$

2. if $x \in S_\alpha(0)$ then $f^n(x) \in S_\alpha(0)$, $n \geq 1$.
3. if $x \in \mathcal{C}_p \setminus V_\alpha(0)$ then

$$\lim_{k\to\infty} |f^{2k}(x)|_p = +\infty, \quad \lim_{k\to\infty} f^{2k-1}(x) = 0.$$

### References


1. *Albeverio S., Rozikov U.A., Sattarov I.A.,* $p$-adic $(2,1)$-rational dynamical systems. *Jour. Math. Anal. Appl.* **398**(2) (2013), 553–566.
2. *Anashin V., Khrennikov A.,* Applied algebraic dynamics, de Gruyter Expositions in Mathematics vol 49, Walter de Gruyter (Berlin - New York), 2009.
3. *Koblitz N.,* $p$-adic numbers, $p$-adic analysis and zeta-function. Springer, Berlin, 1977.


# $p$-adic dynamical systems of a non-linear function


**Rozikov U.A.[1], Sayitova M.[2]**

[1] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, 4, University str., 100174, Tashkent, Uzbekistan.*

[2] *Bukhara State University, The department of Mathematics, 11, M.Iqbol, Bukhara, Uzbekistan.*

e-mail: rozikovu@yandex.ru, e-mail: sayitovamehinbonu@gmail.com


We study $p$-adic dynamical systems generated by a rational function. For motivation of such investigations see [1], [2] and references therein.

It is known that the completion of the set of rational numbers $\mathcal{Q}$ with respect to $p$-adic norm $|\cdot|_p$ defines the $p$-adic field which is denoted by $\mathcal{Q}_p$ (see [3]).

The algebraic completion of $\mathcal{Q}_p$ is denoted by $\mathcal{C}_p$ and it is called *complex $p$-adic numbers.*

For any $a \in \mathcal{C}_p$ and $r > 0$ denote

$$U_r(a) = \{x \in \mathcal{C}_p : |x-a|_p < r\}, \quad V_r(a) = \{x \in \mathcal{C}_p : |x-a|_p \le r\},$$

$$S_r(a) = \{x \in \mathcal{C}_p : |x-a|_p = r\}.$$

Let $x_0$ be a fixed point of a function $f(x)$, i.e. $f(x_0) = x_0$.

Put $\lambda = f'(x_0)$. The point $x_0$ is attractive if $0 < |\lambda|_p < 1$, *indifferent* if $|\lambda|_p = 1$, and repelling if $|\lambda|_p > 1$.

The ball $U_r(x_0)$ is said to be a *Siegel disk* if each sphere $S_\rho(x_0)$, $\rho < r$ is an invariant sphere of $f(x)$, i.e. if $x \in S_\rho(x_0)$ then all iterated points $f^n(x) \in S_\rho(x_0)$ for all $n = 1, 2 \dots$. The union of all Siegel desks with the center at $x_0$ is said to *a maximum Siegel disk* and is denoted by $SI(x_0)$.

Consider the dynamical system associated with function $f : \mathcal{C}_p \to \mathcal{C}_p$ defined by

$$f(x) = \frac{a}{x-2b}, \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathcal{C}_p, \tag{1}$$

where $x \neq 2b$.

Our goal here is to present the behavior of trajectories $\{f^n(x),\ x \in \mathcal{C}_p\}$ of (1) in the complex $p$-adic filed $\mathcal{C}_p$.

**Remark.** The case $b = 0$ is simple: in this case any point $x \in \mathcal{C}_p \setminus \{-b\}$ is two periodic. That is $f(f(x)) = x$. Indeed,

$$f(f(x)) = \frac{a}{\frac{a}{x}} = a \cdot \frac{x}{a} = x.$$

Therefore, below we consider the case $b \neq 0$.

Since $\mathcal{C}_p$ is algebraic closed, this function (for $ab \neq 0$) has two fixed points:

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2bx - a = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = b - \sqrt{b^2+a}, \quad x_2 = b + \sqrt{b^2+a}.$$

Denote:

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{C}_p : \exists n \in \mathcal{N} \cup \{0\}, f^n(x) = 2b\}.$$

For example, $x = \hat{x} = 2b + \frac{a}{2b} \in \mathcal{P}$, because $f(\hat{x}) = 2b$.

The following proposition describes the set $\mathcal{P}$

**Proposition.** The set $\mathcal{P}$ is the following

$$\mathcal{P} = \{2b\} \cup \left\{ \frac{b_n - 2bd_n}{2bc_n - a_n} : n \geq 1 \right\},$$

where $a_n, b_n, c_n, d_n$ are coefficients of $f^n$.

For (1) we have

$$f'(x) = -\frac{a}{(x-2b)^2} = -\frac{1}{a}\left(\frac{a}{(x-2b)}\right)^2 = -\frac{1}{a}(f(x))^2.$$

Using this formula and $x_1 x_2 = -a$ we get

$$|f'(x_1)|_p = \frac{|x_1|_p}{|x_2|_p}, \quad |f'(x_2)|_p = \frac{|x_2|_p}{|x_1|_p},$$

i.e., if the point $x_1$ (resp. $x_2$) is repeller then $x_2$ (resp. $x_1$) is attractive. Moreover, $x_1$ is indifferent iff $x_2$ is indifferent. Thus we need to compare $|x_1|_p = |b - \sqrt{b^2+a}|_p$ and $|x_2|_p = |b + \sqrt{b^2+a}|_p$.

**Case:** $b^2 + a = 0$. In this case $x_1 = x_2$, i.e. the function has unique fixed point $x_1 = b$. Moreover, $|f'(x_1)|_p = 1$, i.e. the fixed point is an indifferent point. Denote $B = |b|_p$ and

$$B^*(x) = |f(x) - x_1|_p, \quad \text{if} \quad x \in S_B(x_1).$$

We have the following

**Theorem 1.** The $p$-adic dynamical system is generated by the function (1), for $b^2+a = 0$, has the following properties:

1. $SI(x_1) = U_B(x_1)$.
2. $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}_p \setminus U_B(x_1)$.
3. If $r > B$ and $x \in S_r(x_1)$, then $f(x) \in S_B(x_1)$ and

$$f^n(x) \in S_{B^*(f^{n-1}(x))}(x_1), \quad n \geq 2,$$

where $B^*(x) = |f(x) - x_1|_B \geq B$.

**Case:** $b^2 + a \neq 0$. In this case $x_1 \neq x_2$. We denote

$$\alpha = |x_1|_p = |b - \sqrt{b^2+a}|_p, \quad \beta = |x_2|_p = |b + \sqrt{b^2+a}|_p.$$

We obtain the following theorem

**Theorem 2.** The $p$-adic dynamical system is generated by the function (1), for $b^2+a \neq 0$ and $\alpha = \beta$, has the following properties:

i. $SI(x_i) = U_\alpha(x_i)$, with

$$SI(x_1) = SI(x_2), \quad \text{if} \quad |x_1 - x_2|_p < \alpha$$

$$SI(x_1) \cap SI(x_2) = \emptyset, \quad \text{if} \quad |x_1 - x_2|_p = \alpha.$$

ii. $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}_p \setminus (SI(x_1) \cup SI(x_2))$.

iii. If $r > \alpha$ and $x \in S_r(x_1)$, then $f(x) \in S_\alpha(x_1)$ and

$$f^n(x) \in S_{A^*(f^{n-1}(x))}(x_1), \quad n \geq 2,$$

where $A^*(x) = |f(x) - x_1|_\alpha \geq \alpha$.

## References


1. *Albeverio S., Rozikov U.A., Sattarov I.A.,* $p$-adic $(2,1)$-rational dynamical systems. *Jour. Math. Anal. Appl.* **398**(2) (2013), 553–566.

2. *Anashin V., Khrennikov A.,* Applied algebraic dynamics, de Gruyter Expositions in Mathematics vol 49, Walter de Gruyter (Berlin - New York), 2009.

3. *Koblitz N.,* $p$-adic numbers, $p$-adic analysis and zeta-function. Springer, Berlin, 1977.

# Quasi-inversion method in stochastic inverse reconstruction problem

**Tleubergenov M.I.,**[1,2] **Vassilina G.K.,**[1,3] **Sarypbek A.T.**[1,2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[3]*AUPET named after G.Daukeev, Almaty, Kazakhstan*
marat207@mail.ru, v_gulmira@mail.ru, alua.sarypbek@mail.ru

The general reconstruction problem in the class of second-order stochastic differential equations of the Ito type is considered for given properties of motion, when the control is included in the drift coefficient. And the form of control parameters is determined by the quasi-inversion method, which provides necessary and sufficient conditions for existence of a given integral manifold. The solution of the Meshchersky's stochastic problem is given.

It is assumed that random perturbations belong to the class of processes with independent increments. To solve the posed problem an equation of perturbed motion is drawn up by the Ito rule of stochastic differentiation. And, further, the Erugin method in combination with the quasi-inversion method is used to construct: 1) a set of control vector functions and 2) a set of diffusion matrices that provide necessary and sufficient conditions for a given second-order differential equation of Ito type to have a given integral manifold.

**Problem statement.** Let us consider the second-order Ito stochastic differential equation

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)u + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}. \tag{1.1}$$

It is required to determine the vector-function included in the drift coefficient for the given integral manifold

$$\Lambda(t) : \lambda(x,\dot{x},t) = 0, \ \ \lambda = \lambda(x,\dot{x},t) \in C^{121}_{x\dot{x}t}, \ \ \lambda \in R^m. \tag{1.2}$$

In other words, for the given $f$, $D$, $\sigma$ and $\lambda$, the control $u$ should be defined so that the set (1.2) is the integral set of equation (1.1).

Here $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\}$ is a system of random processes with independent increments, which, following [1], can be represented as a sum $\xi = \xi_0 + \int c(y)P^0(t,dy)$ of Wiener process $\xi_0$ and Poisson process $P^0$. $P^0(t,dy)$ is the number of process $P^0$ jumps in the interval $[0,t]$ that fall on the set $dy$; $c(y)$ is a vector function that maps space $R^{2n}$ into the space $R^k$ of values of process $\xi(t)$ for any $t$.

The quasi-inversion method is used to solve the stochastic recovery problem (2).

By Ito rule of stochastic differentiation (1) for solving the posed problem the equation of perturbed motion

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}f + \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}Du + \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\sigma\dot{\xi}_0 + S_1 + S_2 + S_3, \tag{1.4}$$

is compiled. Here $S_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2} : \sigma\sigma^T$; $S_2 = \int[\lambda(x,\dot{x}+\sigma c(y),t) - \lambda(x,\dot{x},t) - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\sigma\dot{x}c(y)]dy$; $S_3 = \int[\lambda(x,\dot{x}+\sigma c(y),t) - \lambda(x,\dot{x},t)]\dot{P}_0(t,dy)$ Following (1), $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2} : D$ is a vector whose elements are the traces of the products of the matrices of the second derivatives of the corresponding elements $\lambda_\mu(x,\dot{x},t)$ of the vector $\lambda(x,\dot{x},t)$ with respect to components $\dot{x}$ by the matrix $D$

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2}:D=\begin{bmatrix} tr\left(\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\dot{x}^2}D\right) \\ \dots \\ tr\left(\frac{\partial^2\lambda_m}{\partial\dot{x}^2}D\right)\end{bmatrix},\ D=\sigma\sigma^T.$$

We introduce arbitrary Erugin functions (3): an $m$-dimensional vector function $A$ and a $(m\times k)$-matrix $B$, with the properties $A(0,x,\dot{x},t)\equiv 0,\ B(0,x,\dot{x},t)\equiv 0$ such that

$$\dot{\lambda}=A(\lambda,x,\dot{x},t)+B(\lambda,x,\dot{x},t)\dot{\xi} \tag{1.5}$$

takes place.

Based on equations (1.4) and (1.5), we obtain the relations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}Du=A-\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x}-\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}f-S_1-S_2-S_3, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\sigma=B, \tag{1.7}$$

from which you need to determine the control $u$ and the matrix $\sigma$. To solve the problem, you need the following lemma.

**Lemma.**(2, p.12-13). The set of all solutions of a linear system

$$H\vartheta=g,\ H=(h_{\mu\nu}),\ \vartheta=(\vartheta_\nu),\ g=(g_\mu),\ \mu=\overline{1,m},\ \nu=\overline{1,n},\ m\le n, \tag{1.8}$$

is determined by the expression

$$\vartheta=s[HC]+H^+g. \tag{1.9}$$

Here $H$ is matrix has rank $m$. $s$ is arbitrary scalar, $[HC]=[h_1...h_mc_{m+1}...c_{n-1}]$ is the cross product of vectors $h_\mu=(h_{\mu\nu})$ and $c_\rho=(c_{\rho\nu})$, $\rho=\overline{m+1,n-1}$; $H^+=H^T(HH^T)^{-1}$, $H^T$ is the matrix transposed to $H$.

Denoting $\widetilde{D}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}D$, by formula (1.9) from (1.6), (1.7) we define the required vector-function $u$ and columns $\sigma_i$, $i=\overline{1,k}$ of $\sigma$ in the form :

$$u=s_1\left[\widetilde{D}C\right]+(\widetilde{D})^+\left(A-\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x}-\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}f-S_1-S_2-S_3\right), \tag{1.10}$$

$$\sigma_i=s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+B_i,\ i=\overline{1,k}. \tag{1.11}$$

Therefore, the following theorem is true.

**Theorem.** A necessary and sufficient condition that second-order Ito differential equation (1.1) has a given integral manifold (1.2) is that the control function $u$ has the form (1.10) and the columns $\sigma_i$ of diffusion matrix $\sigma$ have the form (1.11).

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08955847).

**References.**

1. *Pugachev V.S., Sinitsyn I.N.* Stochastic differential systems. Analysis and filtering, Moscow, Nauka, 1990.
2. *Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G.* Equations of program motions, Moscow, Publishing House of the Peoples' Friendship University, 1986.
3. *Galiullin A.S.* Methods for solving inverse problems of dynamics, Moscow, Nauka, 1986.


# O'lchami 4 ga teng bo'lgan nilpotent elementli yordan algebralarida lokal differensiallashlar


**Arzikulov F. N., Nuriddinov O. O., Umrzaqov S. M.**

*O'zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti,*
*Andijon davlat universiteti*

arzikulovfn@rambler.ru, o.nuriddinov86@mail.ru, umrzaqov86@bk.ru


Mazkur maqolada o'lchami 4 ga teng bo'lgan nilpotent elementga ega Yordan algebralarida differensiallashlar va lokal differensiallashlar tadqiq qilingan. Lokal differensiallashlarni o'rganish R.Kedison, D.Larson va A.Sourourlarning tadqiqot ishlarida boshlab berilgan. Kedison fon Neyman algebrasini uning qo'shma Banax bimoduliga akslantiruvchi har qanday uzluksiz lokal differensiallash differensiallash bo'lishini isbotladi. B.Jonson o'z tadqiqot ishida yuqoridagi natijani kengaytirib $C^*$ - algebrasini uning qo'shma Banax bimoduliga akslantiruvchi har qanday uzluksiz lokal differensiallash differensiallash bo'lishini ko'rsatdi. Sh.A.Ayupov va K.K.Kudayberganovlarning maqolalarida $dimL \geq 3$ bo'lgan chekli o'lchamli $L$ nilpotent Li algebrasida aniqlangan lokal differensiallash har doim ham differensiallash bo'lavermasligiga misol keltirilgan. I.Kashuba va M.E. Martinlarning [1] maqolasida o'lchami 4 dan ortmagan Yordon algebralari tasniflangan. F. Arzikulov, N. Umirzaqovlarning [2] maqolasida ayrim o'lchami 4 dan oshmagan nilpotent elementli Yordan algebralarida lokal differensiallashlarning differensiallash bo'lishi tekshirilgan.

Berilgan maqolada [2] tadqiqot ishida qaralgan nilpotent elementga ega Yordan algebralaridan o'lchami 4 ga teng bo'lgan ba'zilari ajratib olindi va bu algebralarda differensiallashlar va lokal differensiallashlar o'rganildi. Ma'lumki J algebrada $f(x) = Ax$ chiziqli akslantirish berilgan bo'lib $f(xy) = f(x)y + xf(y)$ tenglik bajarilsa, u holda bu akslantirish $J$ algebrada aniqlangan differensiallash deyiladi. Maqolada berilgan algebralarda $f(x) = Ax$ chiziqli akslantirish differensiallash bo'lishi uchun $A$ matritsa qanday ko'rinishda bo'lishi zarur va yetarli ekanligi aniqlandi. Shu bilan birga bu Yordan algebralarida berilgan har qanday lokal differensiallash differensiallash bo'lishi isbotlandi.

Bizga chekli $n = 4$ o'lchamli $J$ Yordan algebrasi berilgan bo'lsin. Bu algebrada $\phi(x) = Ax$ chiziqli akslantirishni qaraylik, bu yerda $A - n$ o'lchamli kvadrat matritsa. Ravshanki, agar $J$ algebaradan olingan ixtiyoriy $x, y$ elementlar uchun

$$A(xy) = (Ax)y + x(Ay)(1)$$

tenglik bajarilsa $\phi(x) = Ax$ akslantirish qaralayotgan $J$ algebrada differensiallash bo'ladi.

**1-Ta'rif.** Aytaylik $\Delta : J \to J$ chiziqli akslantirish berilgan bo'lsin. Agar $J$ algebaradan olingan ixtiyoriy $a$ element uchun shunday $\phi_a(x)$ differensiallash toplilsaki $\Delta(a) = \phi_a(a)$ tenglik bajarilsa, $\Delta$ akslantirish lokal differensiallash deb ataladi.

$\phi(x) = Dx$ chiziqli akslantirishni qaraylik, bu yerda $D - n$ o'lchamli kvadrat matritsa. Ravshanki, agar $J$ algebaradan olingan ixtiyoriy $a$ element uchun shunday $A_a$ matritsa topilsaki birinchidan $\phi(x) = A_a x$ akslantirish differensiallash bo'lsa, ikkinchidan $Da = A_a a$ tenglik bajarilsa $\phi(x) = Dx$ akslantirish qaralayotgan $J$ algebrada lokal differensiallash bo'ladi.

$R$ haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan $\{e_1, e_2, n_1, n_2\}$ bazisli $J_{16}$ Yordan algebrasi berilgan bo'lsin. Bu algebrada ko'paytirish jadvali quyidagicha aniqlanadi:

$$e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1,\ e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2,\ e_2 n_1 = \frac{1}{2} n_1.$$

Yuqorida keltirilgan ko'paytmalardan boshqa barcha ko'paytmalarnng qiymati 0 ga teng. [1]

$J_{16}$ algebrada ihtiyoriy $x$ vektorni

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 n_1 + x_4 n_2$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\phi : J_{16} \to J_{16}$ akslantirishni qaraylik.

**1-Teorema.** $\phi(x) = Ax$ akslantirish $J_{16}$ algebrada differensiallash bo'lishi uchun $A$ matritsa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lishi zarur va yetarli.

$R$ haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan $\{e_1, n_1, n_2, n_3\}$ bazisli $J_{33}$ Yordan algebrasi berilgan bo'lsin. Bu algebrada ko'paytirish jadvali quyidagicha aniqlanadi:

$$e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1,\ e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2,\ e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3.$$

$J_{33}$ algebrada ihtiyoriy $x$ vektorni

$$x = x_1 e_1 + x_2 n_1 + x_3 n_2 + x_4 n_3$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\phi : J_{33} \to J_{33}$ akslantirishni qaraylik.

**2-Teorema.** $\phi(x) = Ax$ akslantirish $J_{33}$ algebrada differensiallash bo'lishi uchun $A$ matritsa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lishi zarur va yetarli.

$R$ haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ bazisli $J_{62}$ Yordan algebrasi berilgan bo'lsin. Bu algebrada ko'paytirish jadvali quyidagicha aniqlanadi:

$$n_1^2 = n_4^2 = n_2,\, n_1n_2 = n_3.$$

$J_{62}$ algebrada ihtiyoriy $x$ vektorni

$$x = x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + x_4n_4$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\phi : J_{62} \to J_{62}$ akslantirishni qaraylik.

**3-Teorema.** $\phi(x) = Ax$ akslantirish $J_{62}$ algebrada differensiallash bo'lishi uchun $A$ matritsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 3a_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lishi zarur va yetarli.

I.Kashuba va M.E.Martinlarning [1] maqolasida aniqlangan $J_{17}$, $J_{18}$, $J_{25}$, $J_{31}$, $J_{32}$, $J_{36}$, $J_{45}$, $J_{52}$, $J_{53}$, $J_{57}$, $J_{58}$, $J_{62}$ Yordan algebralarining differensiallashlarini aniqlovchi matritsalarining strukturasi $J_{16}$, $J_{33}$ Yordan algebralari differensiallashlarini aniqlovchi matritsalarining yuqorida aniqlangan ko'rinishiga oxshash. Ushbu Yordan algebralari uchun umumiy usul ishlab chiqildi va quyidagi teorema isbotlandi.

**4-Teorema.** $J_{16}$, $J_{17}$, $J_{18}$, $J_{25}$, $J_{31}$, $J_{32}$, $J_{33}$, $J_{36}$, $J_{45}$, $J_{52}$, $J_{53}$, $J_{57}$, $J_{58}$, $J_{62}$ Yordan algebralarining har qanday lokal differensiallashi differensiallash bo'ladi.

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:**


1.*I.Kashuba, M.E.Martin. Deformations of Jordan algebras of dimension four*. Journal of Algebra, 399 (2014) 277-289.

2. *F.N.Arziqulov, N.M.Umrzaqov. Ayrim olchami 4 dan ortmagan nilpotent elementli Yordan algebralarida lokal differensiallashlar*. NamDU. Ilmiy xabarnoma, No 8, (2020) 4-10.


# Yordan algebralarida umumiylashtirilgan differensiallashlar haqida


**Arzikulov F.N., O'rinboyev F.S., Voxobov F.F.**

*Андижон давлат университети*
*Қўқон давлат педагогика институти*
*Қўқон давлат педагогика институти*

e-mail: arzikulovfn@rambler.ru, forever1005@mail.ru, furqatjonforever@gmail.com, fazliddinkspi@gmail.com


Algebralarning umumiylashtirilgan differensiyallashlarini o'rganishga, tadqiqotiga bir necha yondashuvlar mavjud. 2000 yilda Leger va Luks [1] Lie algebrasining umumiylashtirilgan differensiyallashini kiritishning, aniqlashning umumiy versiyasini o'rgandi. Hartwig va boshqalar [2] 2003 yilda Lie algebrasining umumiylashtirilgan differensiyallashi tushunchasini o'rgandilar va ular unga $\sigma, \tau$-differensiyallash deb murojaat qiladilar va qaraydilar. Shuningdek, Hrivnak [3] hamda Novotny va Hrivnaklarning [4] ishlarida ham Lie algebralarining umumiylashtirilgan differensiyallashining yangi versiyasi kiritiladi va tadbiq etiladi. Ular Lie algebralarining $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$-differensiyallashi deb ataluvchi tushuncha bo'yicha muhim natijalarni oladilar.

Rahimov va boshqalar [5] hamda Fiidov va boshqalar [6] tomonidan bajarilgan ba'zi tadqiqotlar Novotny va Hrinvak g'oyalarini mos ravishda assotsiativ va noassotsiative algebralar kabi algebralarning bir nechta turlariga kengaytiradi. Ushbu maqolada bizning maqsadimiz chekli o'lchamli Yordan algebralarida umumiylashtirilgan differentsiyalash tushunchasini kiritish va o'rganishdir. Differensiyalashlar va umumiylashtirilgan differensiyalashlar algebrasi algebraning algebraik va geometrik klassifikatsiya (tasniflash) muammolarida juda foydali hisoblanadi.

Berilgan maqolada Yordan algebralarida umumiylashtirilgan differensiallash tushunchasi kiritilgan va uning umumiy xossalari o'rganilgan. Xususan, Yordan algebralarida berilgan umumiylashtirilgan differensiallashlar yordamida invariantlar qurilgan. Shuningdek Yordan algebralarida $\alpha, \beta, \gamma$-differensiallashlar to'plamining $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ parametrlarining ayrim qiymatlari bo'yicha tavsifi keltirilgan.

Keling keyinchalik muhokamamiz davomida zarur bo'ladigan Yordan algebrasida umumiylashtirilgan differentsiyalash ta'rifni kiritamiz va uning hossalarini o'rganamiz. Yordan algebralarining ta'rifi va uning ba'zi asosiy xossalarini [7] va [8] da topish mumkin.

**Ta'rif:** Yordan algebrasi $J$ - bu quyidagi ayniyatlarni qanoatlantiruvchi $\cdot :\ J \times J \to J$ bichiziqli akslantirish berilgan $F$ maydonidagi $V$ vektor fazosidir

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad a, b \in J,$$

$$(a^2 \cdot b) \cdot a = a^2 \cdot (b \cdot a), \quad a, b \in J.$$

Yordan algebralarining $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$-differensiyallashlari ta'rifni quyidagicha yozish mumkin.

**Ta'rif:** Aytaylik $(J, \cdot)$ - Yordan algerasi bo'lsin. Chiziqli operator $d \in End\,(J)$ $J$ Yordan algebrasining $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ - differensiyalashi deb ataladi, agar shunday $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in C$ mavjud bo'lib, barcha $x, y \in J$ elementlar uchun quyidagi shart bajarilsa

$$\alpha d\,(x \cdot y) = \beta\,(d\,(x) \cdot y) + \gamma\,(x \cdot d\,(y))\,.$$

$J$ Yordan algebrasining barcha $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ - differensiallashlari to'plamini $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}\,(J)$ orqali belgilaylik. Ushbu to'plam quyidagicha aniqlanadi

$$Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}\,(J) = \{d \in End\,(J) :\ \alpha d\,(x \cdot y) = \beta\,(d\,(x) \cdot y) + \gamma\,(x \cdot d\,(y))\,,\ \ x, y \in J\}\,.$$

Bu yerda $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}\,(J)$ to'plam $End\,(J)$ ning vektor qism fazosi bo'ladi.

**Teorema 1.** Aytaylik $f\ :\ J_1 \to J_2$ - bu $(J_1, \cdot)$ va $(J_2, \cdot)$ Yordan algebralarining izomorfizmi bo'lsin. U holda $g\,(d) = fdf^{-1}$ tenglik bilan aniqlangan $g\ :\ End\,(J_1) \to End\,(J_2)$ akslantirish $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}\,(J_1)$ va $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}\,(J_2)$ vektor fazolarning izomorfizmi bo'ladi.

Novotny va Hrinvaklarning [4] maqolasida kiritilgan $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$-differensiallashlar ta'rifidan kelib chiqadiki, Lie algebralarida, har qanday $0 \neq t \in C$ uchun quyidagi munosabatlar to'g'ri bo'ladi

$$Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}\,(L) = Der_{(t\alpha,t\beta,t\gamma)}\,(L) = Der_{(\alpha,\gamma,\beta)}\,(L)\,.$$

Yordan algebralari uchun ham xuddi shunday tengliklar o'rinlidir. Biz kiritgan $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$-differensiallashlar ta'rifidan kelib chiqadiki, Yordan algebralarida, har qanday $0 \neq t \in C$ uchun quyidagi munosabatlar to'g'ri bo'ladi

$$Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J) = Der_{(t\alpha,t\beta,t\gamma)}(J) = Der_{(\alpha,\gamma,\beta)}(J).$$

**Natija.** $J$ - Yordan algebrasi bo'lsin. Har qanday $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in C$ haqiqiy sonlar uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J) = Der_{(0,\beta-\gamma,\gamma-\beta)}(J) \cap Der_{(2\alpha,\beta+\gamma,\gamma+\beta)}(J).$$

Yana bir boshqa muhim natija $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J)$ ning ikki turli qism fazolari kesishmasi haqida bo'lib, boshqa mustaqil invariantni (o'zgarmasni) beradi. Endi quyidagi teoremaga e'tibor qaratamiz.

**Teorema 2.** Aytaylik $f : J_1 \to J_2$ - bu $(J_1,\cdot)$ va $(J_2,\cdot)$ Yordan algebralarining izomorfizmi bo'lsin. U holda $g(d) = fdf^{-1}$ bilan aniqlangan $g : End(J_1) \to End(J_2)$ akslantirish $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J_1) \cap Der_{(\alpha',\beta',\gamma')}(J_1)$ va $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J_2) \cap Der_{(\alpha',\beta',\gamma')}(J_2)$ vektor fazolarning izomorfizmi bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma' \in R$ sonlar uchun, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$g\left(Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J_1) \cap Der_{(\alpha',\beta',\gamma')}(J_1)\right) = Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J_2) \cap Der_{(\alpha',\beta',\gamma')}(J_2).$$

Endi $d : J \to J$ chiziqli almashtirish $J$ Yordan algebrasining $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ - differensiallashi bo'lishi uchun $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ parametrlar qabul qiladigan qiymatlarini tasniflab chiqamiz.

**Teorema 3.** Aytaylik $J$ - xarakteristikasi 0 ga teng bo'lmagan $R$ maydon ustida berilgan Yordan algebrasi va $\alpha,\beta,\gamma \in R$ bo'lsin, u holda $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J)$ to'plam uchun $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ parametrlarning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

1. $Der_{(1,1,1)}(J) = Der(J)$, bu yerda $Der(J)$ - bu $J$ Yordan algebrasining barcha differensiallashlari Lie algebrasi;
2. $Der_{(1,1,0)}(J) = \{d \in End(J)\,|d(x\cdot y) = d(x)\cdot y, \quad x,y \in J\}$;
3. $Der_{(1,1,-1)}(J) = \{d \in End(J)\,|d(x\cdot y) = d(x)\cdot y - x\cdot d(y), \quad x,y \in J\}$;
4. $Der_{(1,0,0)}(J) = \{d \in End(J)\,|d(x\cdot y) = 0, \quad x,y \in J\}$ ;
5. $Der_{(0,1,1)}(J) = \{d \in End(J)\,|d(x)\cdot y = -x\cdot d(y), \quad x,y \in J\}$;
6. $Der_{(0,1,-1)}(J) = \{d \in End(J)\,|d(x)\cdot y = x\cdot d(y), \quad x,y \in J\}$;
7. $Der_{(0,1,0)}(J) = \{d \in End(J)\,|d(x)\cdot y = 0, \quad x,y \in J\}$;
8. $Der_{(\delta,1,0)}(J) = \{d \in End(J)\,|\delta d(x\cdot y) = d(x)\cdot y, \quad x,y \in J\}$.

**Izoh.** Har qanday $\alpha,\beta,\gamma \in R$ uchun $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J)$ vektor fazoning o'lchami Yordan algebralari izomorfizmi invarianti (o'zgarmasi) hisoblanadi. Yordan algebralari umumiylashtirilgan differensiallashlari talqini quyidagi teoremada o'z aksini topgan.

**Teorema 4.** $J$ - birlik elementli Yordan algebrasi va $\alpha,\beta,\gamma \in R$ bo'lsin. U holda $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}(J)$ vektor fazo quyidagi ko'rinishlarga ega bo'ladi.

1. $Der_{(1,1,1)}(J) = Der(J)$, bu yerda $Der(J)$ - bu $J$ Yordan algebrasining barcha differensiallashlari Lie algebrasi;

2. $Der_{(1,1,0)}(J) \subseteq End(L)$ va $Der_{(1,1,0)}(J)$ to'plamni $J$ Yordan algebrasining barcha idempotent elementlari to'plami $Id(J)$ bilan

$$p \in Id(J), \qquad d(x) = p\cdot x, \quad x \in J$$

orqali aynan tenglashtirish mumkin.

3. $Der_{(1,1,-1)}(J) \subseteq Der_{(1,0,0)}(J) \equiv 0$.

4. $Der_{(0,1,1)}(J) \equiv 0$.

5. $Der_{(0,1,-1)}(J)$ to'plamni $Z_o(J) = \{a \in J\,|(b\cdot a)\cdot c = b\cdot(a\cdot c), \quad b,c \in J\}$ to'plam bilan
$a \in Z_o(J), \quad d(x) = a\cdot x, \quad x \in J$. orqali aynan tenglashtirish mumkin.

6. $Der_{(0,1,0)}(J) \equiv 0$;

7. Agar $\delta \neq 1$ bo'lsa, u holda $Der_{(\delta,1,0)}(J) \equiv 0$.

**Адабиётлар**

1. *Leger G., Luks E.* Generalized Derivations of Lie algebras, J. Algebra, 2000, 228, 165-203.

2. *Hartwig J., Larsson D., Silvestrov S.* Deformation of Lie algebras using $(\sigma, \tau)$ - derivation, Journal of algebra, 38 (2), 2006, 109-138.

3. *Hrivnak J.* Invariants of Lie algebras. PhD Thesis, Faculty of Nuclear Science and Physical Engineering, Czech Technical University, Prague, 2007.

4. *Novotny P., Hrivnak J* On $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$-derivation of Lie algebras and corresponding invariant functions. J. Geom. Phys., 2008, 58, 208-217.

5. *Rakhimov I. S., Said Husain Sh. K., Abdulkadir A.* On Generalized derivations of ?nite dimensional associative algebras. FEIIC International journal of Engineering and Technology, 2016, 13 (2) 121-126.

6. *Fiidow M.A., Rakhimov I.S., Said Husain Sh.K., Basri W.* $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$-Derivations of diassociative algebras. Malaysian Journal Of Mathematical ciences, 2016, 10 101-126.

7. *McCrimmon K.* A taste of Jordan algebras. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, 2004, pp. 562.

8. *Hanche-Olcen H., Stormer E.* Jordan operator algebras. Boston etc: Pitman Publ. Inc., 1984, pp. 183.


# Determinanti $\varepsilon = \sqrt[n]{1}$ bo'lgan matritsalar gruppasi


**Bobomurodov N. G'., Jiyanbekov E.Y.**

*O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent shahri*

nurshodbobomurodov8@gmail.com, esonalijiyanbekov@gmail.com


Ushbu tezisda o'rin almashtirishlar gruppasidan hosil qilingan determinanti birning idizlariga teng bo'lgan. O'rin almashtirishlar matritsalarining spektrlari qaralgan

Bizga $I = \{1, 2, 3, \ldots n\}$ va $1, 2, 3 \ldots n$ sonlardan iborat $G$ o'rin almashtirish gruppasi berilgan bo'lsin.

Agar $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ (1) va $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ (2) bo'lsa, u holida

$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ (3) bo'ladi.

Bizga ma'lumki $(n > 2)$ da $G$-gruppa kommutativ bo'lmagan gruppadir. O'rin almashtirish gruppasidan hosil qilingan matritsani quydagicha kiritamiz. (1)o'rin almashtirish berilgan bo'lsin.

U holda bu o'rin almashtirish yordamida $A_g$ $(n{\times}n)$ tartibli kvadrat matritsani quydagicha aniqlaymiz:

$A_g$ matritsamizning $(k, i_k)$ elementi 1 ga, qolgan elementlari esa 0 ga teng. Bu yerda $k = 1, 2, \ldots, n$. Bunda matritsalarning soni n ta bo'ladi

Yuqoridagi (1) va (2) o'rin almashtirishlardan hosil qilingan $A_g$ va $A_h$ matritsalar quydagi xossalarga ega bo'ladi.

1. $A_{h \cdot g} = A_h \cdot A_g$
2. $(A_h)^{-1} = A_{h^{-1}}$
3. $A_{(h \cdot g)^{-1}} = A_{g^{-1}} \cdot A_{h^{-1}}$

**1-ta'rif:** Agar biror $\lambda \in C$ son uchun $(A_g - \lambda E)x = 0$ tenglama noldan farqli $(x \neq 0)$ yechimga ega bo'lsa, $\lambda$ son $A_g$ matritsaning xos qiymati deyiladi, tenglamaning $\lambda$ daga mos keladigan noldan farqli yechimi x esa xos vektor deyiladi.

**2-ta'rif:** $S(A_g)$ - barcha xos qiymatlar to'plami $A_g$ matritsaning spektri deb ataladi. Endi yuqoridagilarni umumlashtirib quydagi teoremani keltiramiz.

**Teorema.** $(n \times n)$ o'lchamli $A_g$ matritsaning spektri $S(A_g) = \lambda \in C; |\lambda| = 1$ birlik aylanada joylashgan bo'ladi. Ya'ni $\exists k \in N, \lambda^k = 1$ bo'ladi.

### Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati


1. *М. Холл* „Теория групп" Москва 1962.

2. *Колмогоров А. Н , Фомин С.В* Элеменъ теории функций и функционального анализа. Москва Наука 1989


# Маълум бир синф ноассоциатив алгебра хакида


**С.Н.Носиров[1], Д.Д. Ароев[2]**

[1]*Қўқон ДПИ*
[2]*Қўқон ДПИ*
dilshodaroyev@mail.ru


$M = \{1, 2, ..., n\}, n \in N$ тўплам берилган бўлсин. Агар $F : M \to M$ акслантириш ўзаро бир қийматли бўлиб, $R_n$ тўпламдаги ихтиёрий иккита

$$x(t) = (x_1, x_2, ..., x_n) \qquad x_i \in R$$
$$y(t) = (y_1, y_2, ..., y_n) \qquad y_i \in R$$

элементлар ўртасида аниқланган

$$(x + y)(t) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$(x * y)(t) = x(F(t)) \cdot y(F(t))$$

$+$ ва * амалларига нисбатан $R_n$ тўплам ноассоциатив ҳалқа ташкил этади. Бу ерда * амалини аниқлашда $x(F(t)) \cdot y(F(t))$ кўпайтма $x(F(t))$ ва $y(F(t))$ ларнинг мос координаталар кўпайтмасидан иборат. Бу ҳалқани $R_n(F)$ билан белгилайлик. $R_n(F)$ ҳалқада қуйидаги

$$(\lambda x)(t) = \lambda \cdot x(t)$$

тенглик билан $\lambda \in R$ сонга кўпайтириш амали ҳам аниқлаш мумкин, яъни $R_n(F)$ тўплам эслатиб ўтилган амалар устида ассоциатив алгебра ташкил қилади.

Маълумки, ҳар қандай $F : M \to M$акслантириш (ёки $n$ ўринли ўрнига қуйишларни ўзаро кесишмайдиган циклларнинг кўпайтмаси шаклида ифодаланади [1]. Бу хоссадан фойдаланиб $R_n(F)$ ҳалқанинг ҳар қандай максимал идеали қандайдир циклда 0 га тенг бўлган $x(t) \in R_n(F)$ функциялардан иборат бўлиши ва ҳар қандай идеал қандайдир максимал идеалларнинг кўпайтмасидан иборат эканлиги кўрсатилган [2].

Агар $F : M \to M$ ва $G : M \to M$ иккита ўзаро бир қийматли акслантиришлар учун $F = H^{-1}GH$ тенгликни қаноатлантирувчи $H : M \to M$ ўзаро бир қийматли акслантириш мавжуд бўлса, у ҳолда $F$ ва $G$ акслантиришларни ўхшаш дейилади.

Ўхшаш бўлган $F$ ва $G$ акслантиришдаги бир хил узунликка эга бўлган цикллар ўртасида ҳам ўзаро бир қийматли мослик бўлиши равшан. Шу хоссадан фойдаланиб иккита $R_n(F)$ ва $R_n(G)$ ҳалқанинг изоморф бўлиши учун, $F$ ва $G$ акслантиришлар ўхшаш бўлиши зарур ва етарли эканлиги ҳам исботланган [3].

Ушбу мақолада деярли юқоридаги ҳамма натижаларни тегишли ўзгартиришлар оркали $F : M \to M$ акслантириш ўзаро бир қийматли эмас балки, бир қийматли акслантириш бўлганлиги холда ҳам исботлаш мумкинлиги кўрсатилган. Буниг учун маълум тушунчаларни киритамиз.

$F : M \to M$ бир қийматли акслантириш учун

$$F(i_1) = F(i_2) = ... = F(i_k)$$

тенгликларни қаноатлантирувчи $i_s$элементлар қўшни нуқталар дейилади.

Исботлаш мумкинки, ҳар қандай $F : M \to M$ акслантириш учун (ўзаро бир қийматли акслантириш бўлган холдаги циклга ўхшаш) шундай $s_1, s_2, ..., s_p \in M$ элементлар мавжудки, улар учун

$$F(s_1) = s_2, F(s_2) = s_3, ..., F(s_p) = s_p$$

тенгликлар бажарилади. Бундай элементларни $F$акслантиришнинг цикли деб атаймиз. $F$ акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш бўлмаган ҳолда, $F$ акслантирни кесишмайдиган циклларнинг кўпайтмаси шаклида ифодалаш мумкин бўлмаслигини эслатиб ўтиш ўринлидир. $F$акслантиришнинг цикллар сони биттадан ортиқ бўлиши мумкин.

Масалан:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 4 & 4 & 10 & 11 & 12 & 13 & 10 \end{pmatrix}$$

акслантиришда иккита цикл мавжуд. Улар $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ва $\begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$ кўринишда бўлиб улардан биринчисининг узунлиги 3 га, иккинчисининг узунлиги эса 4 га тенг. Биринчи циклга алоқадор бўлган 3 , 6 , 7, 8 элеменлар учун

$$F(3) = F(6) = F(7) = F(8)$$

тенгликлар бажарилади, яъни биринчи циклга алоқадор 4 та қўшни нуқталар бор, иккинчи циклнинг узунлиги 4 га тенг бўлиб, 9 ва 13 лар қўшни нуқталар ($F$акслантирга нисбатан) бўлади.

Юқорида келтирилган таърифлар асосида қуйидаги теоремаларни исботлаш мумкин.

**1-теорема.** Иккита $R_n(F)$ ва $R_n(G)$ ҳалқалар изоморф бўлиши учун, $F$ ва $G$ бир қийматли акслантиришлар ўхшаш бўлиши зарур ва етарли.

Агар $F$ ва $G$ бир қийматли акслантиришлар ўхшаш бўлса, улардаги цикллар сони, улардаги мос циклларнинг узунликлари уларга алоқадор қўшни нуқталар сони ҳам бир хил бўлади.

**2-теорема.** $R_n(F)$ ҳалқадаги $F$ акслантиришнинг бирор циклида факат 0 қиймат оладиган барча функциялар тўплами $R_n(F)$ ҳалқанинг максимал идеали бўлади.

Бундай идеални $R_n(F)$ ҳалқанинг I тип идеали деб атаймиз.

**3-теорема.** $R_n(F)$ ҳалқадаги $F$ акслантириш учун қўшни бўлган 2 та $i$ ва $j$ элементларда тенг қиймат қабул қилувчи функциялар тўплами $R_n(F)$ ҳалқанинг максимал идеали бўлади.

$R_n(F)$ ҳалқанинг бундай идеалини II тип идеали деб атаймиз.

**4-теорема.** $R_n(F)$ ҳалқанинг ҳар қандай идеали унинг I ёки II типдаги максимал идеалларнинг кўпайтмасидан иборат бўлади.

### Адабиётлар


1. *А.Г.Курош.* Курс высшей алгебры// Наука, М.1975.-С. 572.

2. *С.Н.Насиров.* Описание идеалов одного класса неассоциативных алгебр// Научные труды ТашГУ, вып 418, 1972. –С. 232-236

3. *С.Н.Насиров.* Об идеалах одного класса конечномерных неассоциотивных алгебр// Научные труды, ТашГУ, вып 461, 1974. –С. 86-89.


# Kvazi novoterra kubik stoxastik operatorining dinamikasi


**XamroyevA.,Safarov A.**

*Qarshi davlat universiteti. Qashqadaryo, O'zbekiston* khamrayev@yandex.ru, abbossafarov123@gmail.com


$$S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_i \geq 0, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

to'plam $(n-1)$ o'lchovli simpleks deyiladi.

**1-ta'rif.** Quyidagi $W : S^{n-1} \to S^{n-1}$ akslantirish:

$$(Wx)_l : x_l' = \sum_{i,j,k=1}^{n} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, l = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

bu yerda

$$P_{ijk,l} = P_{ikj,l} = ... = P_{kij,l} \geq 0, \sum_{l=1}^{n} P_{ijk,l} = 1, \forall i, j, k \in \{1, 2, ..., n\} \tag{2}$$

$(1)-(2)$ ga chekli o'lchovli simpleksda aniqlangan kubik stoxastik operator deyiladi.

**2-ta'rif.** $P_{ijk,l} = 1$, $\forall l \in \{i, j, k\}(3)$ shartni qanoatlantiruvchi $(1)-(2)$ operatorni novolterra kubik stoxastik operatori deb ataladi.

**3-ta'rif.** Agar $P_{iii,i}$ va $P_{ijk,l}, i \neq j \neq k$, $P_{iii,i} \geq 0, P_{ijk,l} \geq 0$ lar uchun (3) shart bajarilmasa, $W$ kubik stoxastik operator $S^{n-1}$ da aniqlangan kvazi novolterra kubik stoxastik operatori deyiladi.

Biz $S^2$ da aniqlangan kvazi novolterra kubik stoxastik operatorni qaraymiz:

$$W : \begin{cases} x' = \alpha_1 x^3 + \beta_1 y^3 + \gamma_1 z^3 + 3y^2 z + 3yz^2 + 2xyz, \\ y' = \alpha_2 x^3 + \beta_2 y^3 + \gamma_2 z^3 + 3xz^2 + 3x^2 z + 2xyz, \\ z' = \alpha_3 x^3 + \beta_3 y^3 + \gamma_3 z^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + 2xyz, \end{cases} \tag{4}$$

bu yerda $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0, i = 1, 2, 3,$ $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \sum_{i=1}^{3} \beta_i = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i = 1$

$\alpha_1=\gamma_1=\alpha_2=\beta_2=\beta_3=\gamma_3=0,\quad \alpha_3=\beta_1=\gamma_2 = 1$ bo'lsin. U holda operator quyidagi ko'rinishga keladi:

$$W:\begin{cases} x'=y^3+3y^2z+3yz^2+2xyz,\\ y'=z^3+3xz^2+3x^2z+2xyz,\\ z'=x^3+3x^2y+3xy^2+2xyz. \end{cases} \tag{5}$$

**Qo'zg'almas nuqtalar.** . (5) operatorning qo'zg'almas nuqtalarini $W(\lambda)=\lambda$, $\lambda=(x,y,z)$ tenglamani yechish orqali aniqlaymiz.

$$\begin{cases} y^3+3y^2z+3yz^2+2xyz=x,\\ z^3+3xz^2+3x^2z+2xyz=y,\\ x^3+3x^2y+3xy^2+2xyz=z. \end{cases} \tag{6}$$

(6) sistemaning yechimi $C=(1/3,1/3,1/3)$ ekanligi quyidagi lemma orqali isbotlanadi.

**Lemma.** (5) operator yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.

*Adabiyotlar*


1. R. L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, stud.Nonlinearity,Westviev Press, Boulder, CO 2003.

2. A.J.M.Hardin, U.A.Rozikov, A Quasi-strictly non-Volterra Quadratic Stochastic Operator. Qualitative Theory of Dynamical Systems(2019)18:1013-1029.

3 R. R. Davronov, U. U. Jamilov, M. Ladra, Conditional cubic stochastic operator, J. Difference Equ.Appl.21 (12) (2015) 1163-1170.

4 A. Yu. Khamraev, On cubic operators of Volterra type (Russian), Uzbek.Mat.Zh. 2004 (2) (2004) 79-84.

5 U. A. Rozikov, A. Yu. Khamraev, On cubic operators defined on finite-dimensional simplices, Ukrainian Math. J.56 (10) (2004) 1699-1711.

6 A. Yu. Khamraev, A condition for the uniqueness of a fixed point for cubic operators(Russian), Uzbek.Math.Zh.2005(1) (2005) 79-87.


# Связанные состояния системы двух бозонов с финитным сферическим потенциалом на решетке


**Ж.И.Абдуллаев, Й.С.Шотемиров, Ш.Х.Эргашова**

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан*
*Навоийский государственный педагогический институт, Навои,Узбекистан*
*Навоийский государственный педагогический институт, Навои,Узбекистан*
e-mail: jabdullaev@mail.ru, e-mail: shotemirov.y@mail.ru, e-mail: sh.ergashova@mail.ru


**Введение.** Природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра впервые подробно исследовалась Минлосом и Маматовым [1], а потом в более общей ситуации Минлосом и Могильнером [2]. Исследование связанных состояний гамильтониана $H$ системы двух частиц на $d-$ мерной решетке $Z^d$ сводится к изучению собственных значений семейства операторов Шредингера $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k}\in T^d=(-\pi,\pi]^d$. При этом собственные функции оператора $H(\mathbf{k})$ трактуются как связанные состояния гамильтониана $H$, а собственные значения как энергии связанного состояния. Связанные состояния гамильтониана $H$ системы двух бозонов на двумерной решетке изучены в [3], а связанные состояния системы двух фермионов на трехмерной решетке со цилиндрическим потенциалом исследовались в работе [4]. Работы [5] и [6] посвящены проблеме конечности числа связанных состояния гамильтониана $H$ системы двух частиц на решетке.

В этой работе рассматриваются связанные состояния гамильтониана $\hat{H}$ системы двух бозонов на трехмерной решетке $Z^3$ с потенциалом $\hat{v}$, носитель которого совпадает с шаром $B_2(0) = \{x \in Z^3 : |x| \leq 2\}$ и значение потенциала зависит только от $|x| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$. Изучаются собственные значения оператора $H(\mathbf{k}), \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in T^3$, соответствующие гамильтониану $\hat{H}$ при $\mathbf{k} = (\pi - 2\beta, \pi, \pi)$.

**Описание двухчастичного гамильтониана.** Свободному гамильтониану $\hat{H}_0$ системы двух бозонов на трехмерной решетке $Z^3$ обычно соответствует следующий ограниченный, самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\ell_2^{sym}(Z^3 \times Z^3) := \{f \in \ell_2(Z^3 \times Z^3) : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$ по формуле

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2.$$

Здесь $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ и $\Delta_2 = I \otimes \Delta$, где $I-$ единичный оператор, решетчатый Лапласиан $\Delta$ есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3}[\hat{\psi}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j) + \hat{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_j) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in Z^3, \quad \hat{\psi} \in \ell_2(Z^3),$$

где $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ единичные орты в $Z^3$. Полный гамильтониан $\hat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^{sym}(Z^3 \times Z^3)$ и состоит из суммы свободного гамильтониана $\hat{H}_0$ и потенциала взаимодействия $\hat{V}_2$ двух частиц, т.е.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_2, \tag{1}$$

где

$$(\hat{V}_2\hat{\psi})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{v}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \hat{\psi} \in \ell_2^{sym}(Z^3 \times Z^3).$$

Относительно потенциала $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} \overline{v}(|x|), & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| \geq 3, \end{cases} \tag{2}$$

где $|x| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, $\overline{v}(0) > \overline{v}(1) > \overline{v}(2) > 0$.

При условии (2) гамильтониан $\hat{H}$ является ограниченным и самосопряженным оператором в пространстве $\ell_2^{sym}(Z^3 \times Z^3)$.

Гамильтониан $H = H_0 + V_2 = F\hat{H}F^{-1}$ в импульсном представлении действует в $L_2^{sym}(T^3 \times T^3)$ и разлагается в прямой интеграл (см. [3], [7])

$$H = \int_{T^3} \oplus \tilde{H}(\mathbf{k})\, \mathrm{d}\mathbf{k}.$$

Слой $\tilde{H}(\mathbf{k})$ оператора $H$ унитарно эквивалентен оператору $H(\mathbf{k}) := H_0(\mathbf{k}) + V$ называемому оператором Шредингера, который действует в гильбертовом пространстве $L_2^e(T^3) := \{f \in L_2(T^3) : f(-\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})\}$ по формуле

$$(H(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}) + (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{T^3} v(\mathbf{q} - \mathbf{s})f(\mathbf{s})\, \mathrm{d}\mathbf{s}. \tag{3}$$

Невозмущенный оператор $H_0(\mathbf{k})$ есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{q}) + \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{q}) = 6 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos q_1 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos q_2 - 2\cos\frac{k_3}{2}\cos q_3.$$

Оператор возмущения $V-$ интегральный оператор в $L_2^e(T^3)$ с ядром

$$(2\pi)^{-\frac{3}{2}} v(\mathbf{q}-\mathbf{s}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (F\hat{v})(\mathbf{q}-\mathbf{s})$$

и принадлежит классу Гильберта-Шмидта $\sum_2$.

**Собственные значения и инваиантные подпространства оператора** $H(\mathbf{k})$. Заметим, что спектры операторов $H_0(\mathbf{k})$ и $V$ известны. Оператор $H_0(\mathbf{k})$ не имеет собственных значений, его спектр чисто непрерывный и состоит из области значений функции $\varepsilon_{\mathbf{k}}$, т.е.

$$\sigma(H_0(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})], \quad \text{где} \quad m(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q}\in T^3} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}),\ \ M(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q}\in T^3} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}).$$

Спектр оператора $V$ состоит только из собственных значений $\{0, \overline{v}(0), \overline{v}(1), \overline{v}(2)\}$. При условии (2), $V$ является оператором конечного ранга (точнее $\dim ImV = 13$), в частности, компактным оператором. Поэтому в силу теоремы Вейля, существенный спектр оператора $H(\mathbf{k})$ совпадает со спектром оператора $H_0(\mathbf{k})$. Спектр оператора $H(\pi,\pi,\pi)$ чисто дискретной и совпадает с множеством $\{6, 6+\overline{v}(0), 6+\overline{v}(1), 6+\overline{v}(2)\}$. При этом $z_0 = 6+\overline{v}(0)$ невырожденное, $z_1 = 6+\overline{v}(1)$ трехкратное, а $z_2 = 6+\overline{v}(2)$ девятикратное собственное значение оператора $H(\pi,\pi,\pi)$. Число $z_\infty = 6$ является бесконечнократным собственным значением оператора $H(\pi,\pi,\pi)$. Мы исследуем поведение этих собственных значений при малых возмущениях.

Далее изучается инвариантные подпространства относительно оператора $H(\mathbf{k})$. Гильбертово пространство $L_2^e(T^3)$, состоящее из четных функций на $T^3$ можно представить в виде прямой суммы

$$L_2^e(T^3) = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_{123}.$$

Здесь

$$\mathcal{H}_1 := L_2^+(T)\otimes L_2^-(T)\otimes L_2^-(T),\ \ \mathcal{H}_2 := L_2^-(T)\otimes L_2^+(T)\otimes L_2^-(T),$$
$$\mathcal{H}_3 := L_2^-(T)\otimes L_2^-(T)\otimes L_2^+(T),\ \ \mathcal{H}_{123} := L_2^+(T)\otimes L_2^+(T)\otimes L_2^+(T),$$

где $L_2^-(T) = \{f \in L_2(T) : f(-\mathbf{p}) = -f(\mathbf{p})\}-$ подпространство пространства $L_2(T)$, состоящее из нечетных функций на $T = [-\pi,\pi]$, а $L_2^+(T) = \{f \in L_2(T) : f(-\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\}-$ подпространство пространства $L_2(T)$, состоящее из четных функций на $T$.

Мы ожидаем инвариантность этих подпространств относительно оператора $H(\mathbf{k})$. Оказывается, что эти подпространства являются инвариантными относительно оператора $H(\mathbf{k})$, т.е. имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (2). Тогда подпространства $\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2,\ \mathcal{H}_3$ и $\mathcal{H}_{123}$ являются инвариантными относительно оператора $H(\mathbf{k})$.*

Обозначим через $H_\alpha(\mathbf{k})$ сужение оператора $H(\mathbf{k})$ в инвариантном подпространстве $\mathcal{H}_\alpha, \alpha = 1,2,3$.

Сужение $H_{0(\alpha)}(\mathbf{k}) := H_0(\mathbf{k})$ невозмущенного оператора $H_0(\mathbf{k})$ есть оператор умножения на функцию $\varepsilon_{\mathbf{k}}$. Теперь видим, как действует сужение $V_\alpha$ оператора $V$ в инвариантном подпространстве $\mathcal{H}_\alpha$ :

$$(V_\alpha f)(\mathbf{p}) = \frac{\overline{v}(2)}{2\pi^3}\int_{T^3} \sin p_\beta \sin q_\beta \sin p_\gamma \sin q_\gamma f(\mathbf{q}) d\mathbf{q},\ \ \{\alpha,\beta,\gamma\} = \{1,2,3\}.$$

**Теорема 1.** *Оператор $H_1(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ имеет единственное собственное значение*

$$z_2^{(1)}(\beta)=6+\sqrt{\overline{v}^2(2)+4\sin^2\beta}.$$

**Теорема 2.** *При малых $\beta$ оба оператора $H_2(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ и $H_3(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ имеют единственное и равное собственное значение*

$$z_2^{(2)}(\beta)=z_2^{(3)}(\beta)=6+\overline{v}(2)+\frac{1}{\overline{v}(2)}\sin^2\beta.$$

Обозначим через $H_{123}(\mathbf{k})$ сужение оператора $H(\mathbf{k})$ в инвариантном подпространстве $\mathcal{H}_{123}$. Сужение $H_{0(123)}(\mathbf{k}):=H_0(\mathbf{k})$ невозмущенного оператора $H_0(\mathbf{k})$ не меняется и совпадает с $H_0(\mathbf{k})$. Сужение $V_{123}=V|_{\mathcal{H}_{123}}$ оператора $V$ действует на элемент $f\in\mathcal{H}_{123}$ по формуле

$$(V_{123}f)(\mathbf{p})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{T^3}[\overline{v}(0)+2\overline{v}(1)\sum_{j=1}^{3}\cos p_j\cos q_j+2\overline{v}(2)\sum_{j=1}^{3}\cos 2p_j\cos 2q_j+$$

$$+4\overline{v}(2)\sum_{1\le i<j\le 3}\cos p_i\cos p_j\cos q_i\cos q_j]f(\mathbf{q})d\mathbf{q}.$$

**Теорема 3.** *Существует $\delta>0$, такое, что для любого $\beta\in(0,\delta)$ оператор $H_{123}(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ имеет ровно десять собственных значений с учетом кратности и причем имеет место асимптотических формул:*

$$z_0(\beta)=6+\overline{v}(0)+\frac{2}{\overline{v}(0)-\overline{v}(1)}\beta^2+O(\beta^4),\tag{4}$$

$$z_1^{(1)}(\beta)=6+\overline{v}(1)+\frac{\overline{v}(0)+2\overline{v}(2)-3\overline{v}(1)}{(\overline{v}(0)-\overline{v}(1))(\overline{v}(1)-\overline{v}(2))}\beta^2+O(\beta^4),\tag{5}$$

$$z_1^{(2)}(\beta)=z_1^{(3)}(\beta)=6+\overline{v}(1)+\frac{2}{\overline{v}(1)-\overline{v}(2)}\beta^2+O(\beta^4),\tag{6}$$

$$z_2^{(4)}(\beta)=6+\overline{v}(2)+\frac{\overline{v}(1)-2\overline{v}(2)}{\overline{v}(2)(\overline{v}(1)-\overline{v}(2))}\beta^2+O(\beta^4),\tag{7}$$

$$z_2^{(5)}(\beta)=z_2^{(6)}(\beta)=6+\overline{v}(2)+\frac{\overline{v}(1)-3\overline{v}(2)}{\overline{v}(2)(\overline{v}(1)-\overline{v}(2))}\beta^2+O(\beta^4),\tag{8}$$

$$z_2^{(7)}(\beta)=z_2^{(8)}(\beta)=z_2^{(9)}(\beta)=6+\sqrt{\overline{v}^2(2)+4\sin^2\beta}.\tag{9}$$

**Заключение.** Оператор $H(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ имеет единственное невырожденное собственное значение $z_0(\beta)$ (см (4)), лежащее в окрестности $z_0=6+\overline{v}(0)$ при малых $\beta$. В окрестности $z_1=6+\overline{v}(1)$ оператор $H(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ имеет три собственных значения, одно из них невырожденное $z_1^{(1)}(\beta)$ (см (5)), а другое двухкратное собственное значение $z_1^{(2)}(\beta)=z_1^{(3)}(\beta)$ (см (6)). Девятикратное собственное значение оператора $H(\pi,\pi,\pi)$ при малых возмущениях распадаются на четыре различных собственных значений, лежащих в малой окрестности $z_2=6+\overline{v}(1)$. При этом $z_2^{(4)}(\beta)$ (см (7)) невырожденное, $z_2^{(5)}(\beta)=z_2^{(6)}(\beta)$ (см (8)) и $z_2^{(2)}(\beta)=z_2^{(3)}(\beta)$ (см. теорему 2) двухкратное,

$z_2^{(1)}(\beta) = z_2^{(7)}(\beta) = z_2^{(8)}(\beta) = z_2^{(9)}(\beta)$ (см. теорему 1 и (9)) четырехкратное собственное значение оператора $H(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$. Что касается бесконечнократного собственного значения 6 оператора $H(\pi, \pi, \pi)$, то он при любом возмущении $\beta > 0$ превращается в существенный спектр $\sigma_{ess}(H(\pi - 2\beta, \pi, \pi)) = [6 - 2\sin\beta,\ 6 + 2\sin\beta]$.

Собственное значение $z_0(\beta)$ (см (4)) при всех малых $\beta$ лежит правее от собственного значения $z_0 = 6 + \overline{v}(0)$ невозмущенного оператора $H(\pi, \pi, \pi)$. Трехкратное собственное значение $z_1 = 6 + \overline{v}(1)$ оператора $H(\pi, \pi, \pi)$ при малых возмущениях распадается на два различных собственных значений $z_1^{(1)}(\beta)$ (см (5)) и $z_1^{(2)}(\beta) = z_1^{(3)}(\beta)$ (см (6)), причем $z_1^{(2)}(\beta)$ всегда лежит правее от невозмущенного собственного значения $z_1$, а другое $z_1^{(1)}(\beta)$ либо лежит правее, либо лежит левее от $z_1$ в зависимости от знака выражения $\overline{v}(0) + 2\overline{v}(2) - 3\overline{v}(1)$.

При условии $\overline{v}(1) < 2\overline{v}(2)$ и малых $\beta$ выполняется соотношение

$$z_2^{(5)}(\beta) < z_2^{(4)}(\beta) < 6 + \overline{v}(2) < z_2^{(2)}(\beta) < z_2^{(1)}(\beta).$$

Это означает, что при распадении девятикратного собственного значения $6 + \overline{v}(2)$ на четыре, из них два $z_2^{(5)}(\beta)$, $z_2^{(4)}(\beta)$ падают слева, другие два $z_2^{(2)}(\beta)$, $z_2^{(1)}(\beta)$ падают справа.

При возрастании $\beta$ некоторые собственные значения оператора $H(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$ исчезают поглащаясь непрерывным спектром, например, собственные значения $z_2^{(2)}(\beta) = z_2^{(3)}(\beta)$ существуют только при $\sin\beta < \bar{v}(2)$. Собственные значения $z_0(\beta), z_1^{(2)}(\beta) = z_1^{(3)}(\beta)$ и $z_2^{(1)}(\beta) = z_2^{(7)}(\beta) = z_2^{(8)}(\beta) = z_2^{(9)}(\beta)$ существуют при всех $\beta \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

Теперь приведем некоторые сведения о собственных функциях оператора $H(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$. Общий вид собственных функций соотвестующего четырехкратного собственного значения $z_2^{(1)}(\beta)$ имеет вид:

$$C_1 f_2^{(1)}(\mathbf{p}) + C_7 f_2^{(7)}(\mathbf{p}) + C_8 f_2^{(8)}(\mathbf{p}) + C_9 f_2^{(9)}(\mathbf{p}) =$$
$$\frac{C_1 \sin p_2 \sin p_3 + C_7 \cos p_2 \cos p_3 + C_8 \cos 2p_2 + C_9 \cos 2p_3}{6 - 2\sin\beta\cos p_1 - z_2^{(1)}(\beta)}.$$

Здесь $C_1, C_7, C_8, C_9$ произвольные константы. Общий вид собственной функции соотвестующего двухкратного собственного значения $z_2^{(2)}(\beta) = z_2^{(3)}(\beta)$ имеет вид

$$C_2 f_2^{(2)}(\mathbf{p}) + C_3 f_2^{(3)}(\mathbf{p}) = \frac{C_2 \sin p_1 \sin p_2 + C_3 \sin p_1 \sin p_3}{6 - 2\sin\beta\cos p_1 - z_2^{(2)}(\beta)}.$$

где $C_2, C_3$ произволные константы.

## Литература

1. *Маматов Ш.С., Минлос Р.А.* Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора. ТМФ.
1989 Т.79, 2, 163-179.

2. *Minlos R.A., Mogilner A.I.* Some problems conserning spectra of lattice models. In Schrödinger operators: Standard and Nostandard (eds. P.Exner, P. Seba). World. Sceintific. Singapoor. 1989. p 243-257.

3. *Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д.* Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной решетке. ТМФ. 2016. Т. 186, 2, 272-292.

4. *J.I. Abdullaev, A.M. Toshturdiev.* Bound States of a System of Two Fermions on Invariant Subspace. Journal of Modern Physics. 2021, 12, 35-49.

5. *Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А.* Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ. 2007. Т.152, 2, 47-57.

6. *M.I.Muminov and S.K. Ghoshal.* Spectral Features of Two-Particle Schrödinger Operator on $d-$ Dimensional lattice. Complex Analysis and Operator Theory. 2020. 14(1), 288-300.

7. *M.Reed and B.Simon* Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов. М. Мир. 1982.

# Карта неподвижных точек вольтерровских операторов с однородным турниром в симплексе $S^4$

**[1]Р.Н.Ганиходжаев, [2]Д.Б.Эшмаматова, [3]М.А.Таджиева**

[1]*Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан.*
[2]*Ташкентский Государственный Транспортный Университет, Ташкент, Узбекистан.*
[3]*Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан.*
[1]rganikhodzhaev@gmail.com, [2]24dil@mail.ru, [3]mohbonut@mail.ru

Квадратичные отображения конечномерного симплекса в себя возникают в различных прикладных задачах. Такие отображения преобразуют распределение вероятностей, которое описывает состояние биологических систем.[1]-[3].

В работе изучаются карта неподвижных точек вольтерровских операторов с однородным турниром в симплексе $S^4$.

Пусть

$$S^{m-1} = \{x \in R^m : x = (x_1, ...x_m) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

стандартный $(m-1)$ мерный симплекс.

Квадратичный стохастический оператор (к.с.о.) $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ определяется равенствами:

$$(Vx)_k = x_k^{'} = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j,$$

$$\text{где} \quad P_{ij,k} \geq 0, \quad P_{ij,k} = P_{ji,k}\,, \quad \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} = 1, \;\; i,j,k = 1,...,m. \tag{1}$$

К.с.о. $V$, определенный на $S^{m-1}$, называется к.с.о. вольтерровского типа (к.с.о.в.т.), если

$$P_{ij,k} = 0, \quad k \notin \{i,j\}.$$

К.с.о.в.т. $V$ можно привести к виду [1]

$$V : x_k' = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i), \quad k = 1,..,m, \tag{2}$$

где

$$|a_{ki}| \leq 1,\ a_{ki} = -a_{ik} \ \text{ т.е. } \ A = (a_{ki}) - \text{кососимметрическая матрица.}$$

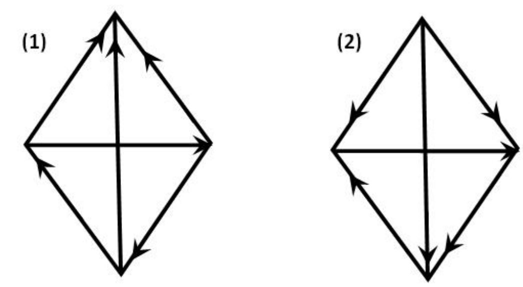
Пусть $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$. Рассмотрим полный граф с $m$ вершинами, пронумерованными $1, 2, ..., m$. На ребрах графа зададим направление следующим образом: ребро, соединяющее вершины $k$ и $i$, направлено от $k$-ой вершины к $i$-ой если $a_{ki} < 0$, и имеет обратное направление, если $a_{ki} > 0$.

Полученный полный ориентированный граф называется турниром к.с.о.в.т. $V$ и обозначается через $T_m$.

**Определение.** Турнир называется однородным, если любой подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.

Ясно, что при $m \leq 3$ все турниры с $m$ вершинами являются однородными.

**Теорема.**[2] Турнир является однородным тогда и только тогда, когда он не содержит подтурниров изоморфным одному из следующих двух турниров с четырьмя вершинами:




Пусть $I = \{1, 2, ..., m\}$ и $\alpha \subset I$-непустое подмножество, причем $|\alpha|$-число элементов $\alpha$. Тогда

$$\Gamma_\alpha = co\{e_i : i \in \alpha\}$$

называется $|\alpha| - 1$-мерной гранью симплекса $S^{m-1}$. Ясно, что любая грань симплекса также является симплексом.

Известно, что [4] грань $S^{m-1}$ инвариантна относительно вольтерровского оператора $V$, причем сужение $V$ на эту грань также является оператором вольтерровского типа.

Пусть $\Gamma_\alpha$ некоторая грань $S^{m-1}$, $V_\alpha$- сужение $V$ на $\Gamma_\alpha$ и $A_\alpha$-кососимметрическая матрица, которая получается из $A$ заменой всех $a_{ki}$ нулём при $(k, i) \notin \alpha \times \alpha$.

Введем обозначения:

$$P_\alpha = \{x \in \Gamma_\alpha : A_\alpha x \leq 0\}, \qquad Q_\alpha = \{x \in \Gamma_\alpha : A_\alpha x \geq 0\}$$

Множество всех неподвижных точек $\{x \in S^{m-1} : Vx = x\}$ оператора $V$ изобразим в виде точек на плоскости, затем для каждого $\alpha \subset I$ неподвижную точку $P_\alpha$ соединим дугой с неподвижной точкой $Q_\alpha$ дугой направленной из $P_\alpha$ в $Q_\alpha$. Полученный ориентированный граф называется картой неподвижных точек оператора $V$ и обозначим через $G_V$.

Легко заметить, что в случае транзитивных турниров карта неподвижных точек $G_V$ совпадает с исходным турниром. Содержательные примеры карт неподвижных точек начинаются с $m \geq 5$.

Рассмотрим в $S^4$ квадратичный оператор $V : S^4 \to S^4$ вида

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + a_4x_5) \\ x_2' = x_2(1 + a_1x_1 - a_5x_3 - a_6x_4 - a_7x_5) \\ x_3' = x_3(1 + a_2x_3 + a_5x_2 - a_8x_4 - a_9x_5) \\ x_4' = x_4(1 + a_3x_1 + a_6x_2 + a_8x_3 - a_{10}x_5) \\ x_5' = x_5(1 - a_4x_1 + a_7x_2 + a_9x_3 + a_{10}x_4) \end{cases}$$

где коэффициенты $0 < a_k \leq 1$.

Соответствующий турнир обозначим через $T_5$. $T_5$ имеет три циклических троек $\overline{125}$, $\overline{135}$, $\overline{145}$.

Пусть $\alpha = \{1,2,5\}$, $\beta = \{1,3,5\}$, $\gamma = \{1,4,5\}$. Они определяют следующие неподвижные точки:

$$x(\alpha) = \frac{1}{a_1 + a_4 + a_7}(a_7, a_4, 0, 0, a_1),$$

$$x(\beta) = \frac{1}{a_2 + a_4 + a_9}(a_9, 0, a_4, 0, a_2),$$

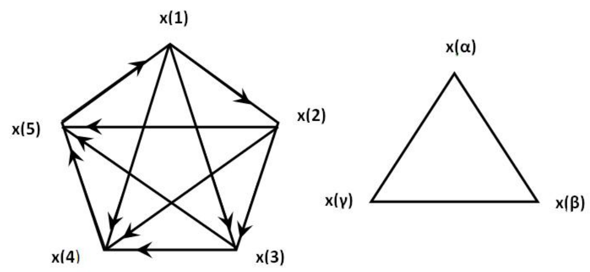
$$x(\gamma) = \frac{1}{a_3 + a_4 + a_{10}}(a_{10}, 0, 0, a_4, a_3).$$

Решая соответствующие непавенства, находим, что последние три неподвижные точки попарно образуют $(P_\alpha, Q_\alpha)$ пару.

Введем обозначения:

$$\Delta_1 = a_2a_7 + a_4a_5 - a_1a_9, \quad \Delta_2 = a_3a_7 + a_4a_6 - a_1a_{10}, \quad \Delta_3 = a_3a_9 + a_4a_8 - a_2a_{10}.$$

Тогда, карта неподвижных точек имеет следующий вид:




Направления на дугах соединяющих неподвижные точки $x(\alpha)$, $x(\beta)$ и $x(\gamma)$ определяется знаками чисел $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$. Отметим, что $\Delta_1^2$, $\Delta_2^2$, $\Delta_3^2$ - есть миноры четвертого порядка матрицы $A$.

Например, если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, то $\varphi_\alpha(x)$ является функцией Ляпунова для оператора $V$.

Если $\Delta_1 \cdot \Delta_2 < 0$, $\Delta_1 \cdot \Delta_3 > 0$, $\Delta_2 \cdot \Delta_3 < 0$, то $V$ имеет еще одну неподвижную точку внутри симплекса $S^4$.

*Список литературы*

1. Ganikhodzhaev R. N (1993), *Исследование по теории квадратичных стохастических операторов*, Дисс. на соискание учен. степ. докт. физ.-мат. наук. - Ташкент, 231 с.

2. Ganikhodzhaev R. N (1997) *Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments* , Russ. Acad.Sci. Sb.Math. V. 76, 2. P. 489-506.

3. Moon J.W. (2013) *Topics on Tournaments.*

4. Р. Н. Ганиходжаев, М. А. Таджиева, Д. Б. Эшмаматова (2018) *Динамические свойства квадратичных гомеоморфизмов конечномерного симплекса*, Итоги науки и техники современная математика и ее приложения.т.144. стр.104-109.

# Связь между симметричными и стохастическими матрицами

**Ганиходжаев Р.Н., Эшниязов А. И., Нишонов А. И., Сейтов Ш.Ж.**

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

rganikhodzhaev@gmail.ru

При изучении многомерных матриц, например, кубических $P_{ij,k}$ где $i, j, k = \overline{1, m}$ появляется необходимость выделения бистохастических.

При этом действие кубической матрицы $P_{ij,k}$ на вектор $x = (x_1, ..., x_m) \in R^m$ определяется равенствами

$$x_k^{'} = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j, k = \overline{1, m} \tag{1}$$

где $x^{'} = (x_1^{'}, ..., x_m^{'}) \in R^m$.

Очевидно, можно считать, что $P_{ij,k}$ симметрично относительно первых двух индексов $i$ и $j$, т.е.

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \qquad (2).$$

Ясно, что точки симплекса $S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m : \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0$ можно рассматривать как распределение вероятностей некоторой системы состоящей из видов. Следующие условия $P_{ij,k} \geq 0$ при всех $i, j, k$ и

$$\sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1 \tag{3}$$

являются достаточными, но не необходимыми для того чтобы из $x \in S^{m-1}$ следовало, что $x \in S^{m-1}$.

Таким образом, полагая $V = (P_{ij,k})$ можно записать, что $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ , т.е. $V$ переводит состояние системы (=распределение вероятностей) в некоторое, вообще говоря, другое состояние системы. Поэтому называется стохастическим отображением. Также ясно, что квадратичное отображение.

По аналогии с линейным случаем дважды стохастичность (=бистохастичность) можно определить дополнительными условиями

$$\sum_{i=1}^{m} P_{ij,k} = 1 = \sum_{j=1}^{m} P_{ij,k} = 1. \tag{4}$$

Но в этом случае, с учетом (3) нужно говорить о трижды стохастичности т.е. по $i$ , по $j$ и по $k$.

В этой работе бистохастичность определим при помощи понятия мажоризации Харди - Литтльвуд - Пойя и теоремы Биркгофа.

Пусть $x \in S^{m-1}$ , переставим координаты $x$ в порядке неубывания $x_{\uparrow} = (x_{[1]}, x_{[2]}, ..., x_{[m]})$, где $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq ... \geq x_{[m]}$ , причем $x_{[1]}, x_{[2]}, ..., x_{[m]}$ некоторая перестановка $x_1, x_2, ..., x_m$.

**Определение 1.** Пусть $x, y \in S^{m-1}$ , тогда $x \prec y$ , если

$$\sum_{i=1}^{t} x_{[i]} \preceq \sum_{i=1}^{t} y_{[i]} \tag{5}$$

для всех $t = 1, ..., m$.

В этом случае говорят, что $y$ мажорирует $xy$.

Очевидно, при $t = m$ имеем $\sum_{i=1}^{t} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{t} y_{[i]} = 1$.

Известно, что в линейном случае стохастическая матрица $P = (P_{ij})$ дважды стохастическая тогда и только тогда, когда для всех $x \in S^{m-1}$

$$Px \prec x. \tag{6}$$

**Определение 2.** Отображение $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ называется дважды стохастической если для всех $x \in S^{m-1}$

$$Vx \prec x. \tag{7}$$

Пусть $\mathbb{B}$ - множество дважды стохастических квадратичных отображений.

**Теорема 1.** $\mathbb{B}$ - выпуклый многогранник.

Пусть $A_k = (P_{ij,k}), k = 1, 2, ..., m$. Тогда $A_k$ - неотрицательная симметрическая матрица, так как $P_{ij,k} \geq 0$ и $P_{ij,k} = P_{ji,k}$.

В этом случае $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ можно записать в виде

$$Vx = ((A_1x, x), (A_2x, x), ..., (A_mx, x)) \tag{8}$$

где $(x, y)$ скалярное произведение.

Пусть $A$ и $B$ действительные матрицы порядка $m \times m$ . Когда для всех $x \in S^{m-1}$ верно равенство

$$(Ax, x) = (Bx, x). \tag{9}$$

Очевидно, что если $C : R^m \to R^m$ кососимметрическая матрица, но $(Cx, x) = 0$ для всех $x \in R^m$.

Верно и обратное утверждение.

**Теорема 2.** Если для действительной матрицы $C$ верно равенство $(Cx, x) = 0$ при всех $x \in R^m$, то $C$ кососимметрическая матрица.

**Следствие.** Равенство (9) возможно тогда и только тогда, когда $A = B$ кососимметрическая матрица.

Пусть $T_k$ стохастическая матрица, где $k = \overline{1, m}$.

Для описания дважды стохастических квадратичных отображений необходимо найти $T_k$ так, чтобы выполнялось равенства

$$(A_kx, x) = (T_kx, x), \sum_{k=1}^{m} T_k = J(V(x^*)) = \left| \begin{array}{c} 1......1 \\ ........... \\ 1......1 \end{array} \right|. \tag{10}$$

**Теорема 3.**Пусть $I = (1, 2, ..., m)$ и $\alpha$ непустое подмножество множество $\alpha \subset I$. Если $\triangle_\alpha \leq |\alpha|$ для любого $\alpha \subset I$ , причем $\triangle_I = m$, то существует такая стохастическая матрица $T$ что $(Ax, x) = (Tx, x)$.

**Замечание.**Стохастическая матрица из теореме 3 не обязана быть единственной.

**Теорема 4.** Совокупность стохастических матриц удовлетворяющих теореме 3 образует выпуклый компакт.

## Литература


1. *Маршалл. А, Олкин И.*, Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир,1983.
2. *Birkhoff, G.*, Tres observaciones sobre el algebra lineal. Univ.Nac.Tucuman Rev.Ser. A 5, 147-151
3. *Ганиходжаев Р.Н.*, Исследования по теории квадратичных стохастических операторов, Дисс. на соис. уч. ст. докт. наук, Ташкент, 1994.
4. *Ганиходжаев Р.Н.*, К определению квадратичных бистохастических операторов УМН, 1993, том 48 впуск 4(292), 231-232.
5. *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц. "Наука" М., 1967.
6. *Маркус М.,Минк Х.*, Обзор по теории матриц и матричным неравенствам. "Наука" М., 1972.


# Предельные распределения Гиббса для первых интегралов Цепочки Тоды


**Джалилов А.А., Хомидов М.К.**

*Туринский политехнический университет в Ташкенте, Ташкент, Узбекистан*
*Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*
adzhalilov21@gmail.com, mkhomidov0306@mail.ru


Одним из замечательных дискретных вполне интегрируемых модулей является Цепочка Тоды. Модель допускает точные решения типа многосолитонных состояний и периодических волн, а также решение задача Коши методом обратной задачи рассеяния (см.напр.[1]).

Гамильтониан бесконечной цепочки Тоды имеет вид:

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p_n^2}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{q_n - q_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

а соответствуюшая система уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_n}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial p_n}, \\ \dfrac{\partial p_n}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial q_n}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Введем новые переменные:

$$a_j = -\frac{1}{2} p_j, \quad \text{где } j = -m...l,$$

$$b_k = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}(q_k - q_{k-1})}, \quad \text{где } k = -m...(l-1),$$

называемые *переменными Фляшке.* Теперь запишем уравнения движения для цепочки Тоды в старых и новых координатах:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = e^{q_{i+1}-q_i} - e^{q_i-q_{i-1}} \\ \dot{q}_i = p_i \end{cases}$$

или в переменных Фляшке:

$$\begin{cases} \dot{a}_j = 2(b_{j-1}^2 - b_j^2) \\ \dot{b}_k = b_k(a_k - a_{k+1}) \end{cases} . \tag{1}$$

Система (1) эквивалентна матричному уравнению $\dot{L} = [A, L]$, где

$$L := \begin{pmatrix} a_{-m} & b_{-m} & 0 & \dots & 0 \\ b_{-m} & a_{-m+1} & b_{-m+1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{l-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{l-1} & a_l \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & -b_{-m} & 0 & \dots & 0 \\ b_{-m} & 0 & -b_{-m+1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -b_{l-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{l-1} & 0 \end{pmatrix},$$

а $[A, l] = AL - LA$ - обычный коммутатор.

**Лемма 1.** Функции

$$H^{(k)} = trL^k, \quad \text{где } k = 1...n$$

являются интегралами движения цепочки Тоды.

Нас будет интиросавать главным образом первый интеграл $\tilde{H} := H^{(4)} + \gamma_3 H^{(3)} + \gamma_2 H^{(2)} + \gamma_1 H^{(1)}$.

$$\tilde{H}_{-m,l} = \sum_{k=-m}^{l} \left( \frac{p_k^4}{16} - \frac{\gamma_3 p_k^3}{8} + \frac{\gamma_2 p_k^2}{4} - \frac{\gamma_1 p_k}{2} \right) +$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{k=-m}^{l-1} \left( p_k^2 + p_k p_{k+1} + p_{k+1}^2 - \frac{3\gamma_3}{2}(p_k + p_{k+1}) + 2\gamma_2 + \frac{1}{2} e^{q_{k+1}-q_k} \right) e^{q_{k+1}-q_k} +$$

$$+\frac{3}{16} \sum_{k=-m}^{l-2} e^{q_{k+2}-q_k}$$

Для каждого $s > 0$, $m, l \geq 0$ определим вероятностное распределение на $(\mathbb{R}^2)^{(m+l+1)}$ с плотностью

$$P_{m,l}(q_{-m}, p_{-m}, q_{-m+1}, p_{-m+1}, ..., q_l, p_l) =$$
$$= \Xi_{\beta,\mu}^{-1}(s) \exp\left\{ -\beta \left( \tilde{H}_{-m-2,l+2} + \mu(m + l + 1) \right) \right\} \tag{2}$$

здесь $(m + l + 1)-$ числа частиц, а $\Xi_{\beta,\mu}(s)-$ нормируюший множитель:

$$\Xi_{\beta,\mu}(s) = \sum_{m,l=0}^{\infty} z^{m+l+1} \int \prod_{j=-m}^{l} dq_j dp_j \exp\{-\beta \tilde{H}_{-m-2,l+2}\},$$

где $z = e^{\beta\mu}$, $q_{-m-1} = q_{-m-2} = s$, $q_{l+1} = q_{l+2} = -s$, $p_{-m-1} = p_{-m-2} = p_{l+1} = p_{l+2} = 0$.

**Определение 2.** *Условным распределением Гиббса при обратной температуре* $\beta > 0$ *и условии* $Y^l$, $Y^r$ *называется такое распределение вероятностей на* $M(Y^l, Y^r)$, *что при* $k \geq 0$ *ограничение этого распределения на* $M_k(Y^l, Y^r)$ *имеет плотность* $P_{m,l}(p,q)$,
*здесь* $\Xi^{-1}_{\beta,\mu}(s)-$ *нормирующий множитель. При его определении интегрирование происходит по* $q_i \in \Delta_0 \cup \Delta_1$ $(i = \overline{-m,\, l})$. *Параметр* $\mu \in \mathbb{R}^1$ *называется химическим потенциалом.*

Теперь сформулируем основной результат нашей работы.

**Теорема 3.** *Пусть числы* $\beta > 0$, $\varphi$, $\gamma_1$, $\gamma, \gamma_3$ *и* $\mu \in \mathbb{R}$ *удовлетворяют следующему условию*

$$e^{\beta\mu\frac{\gamma_2^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\left(\frac{5}{8}p^4 - \frac{\gamma_3}{8}p^3 + \frac{8\gamma_2+9\gamma_3^2}{32}p^2 - \frac{\gamma_1}{2}p\right)} dp \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(e^{2y}-\varphi y)} dy < 1.$$

*Тогда для вероятностных распределений с плотностью (2) при* $s \to +\infty$ *существует хотя бы одно предельное распределение на* $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}}$.

### Литература


1. А. А. Джалилов: *Цепочка Тода в термодинамическом пределе*, УМН, 1985, том 40, выпуск 1(241), 191-192

2. Я. Г. С и н а й: *Переход "соизмеримость-несоизмеримость"в одномерных цепочках*- ЖЭТФ, 1982, 83:3, с. 1223-1231.

3. С. В. Манаков :*О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах*- ЖЭТФ, 1974, 67:2, с. 543-555.

4. И. П. К о р н ф е л ь д, Я. Г. С и н а й, С. В. Ф о ми н: *Эргодическая теория*- М.: Наука, 1980.

5. В. И. Арнольд: *Математические методы классической механики*- М.: Наука, 1979.

6. А. Н. Ширияев: *Вероятность-1*

7. SARIG. O: *Thermodynamic formalism for countable Markov shifts*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 19(6), 1565-1593. doi:10.1017/S0143385799146820 (1999).


# Оценка дисперсии стохастической функции Ляпунова для отображения Фейгенбаума


**Джалилов А.А., Абдухакимов С.Х.**

*Туринский политехнический университет в Ташкенте, Узбекистан*
*Национальный Университет Узбекистана*
e-mail: a_dzhalilov@yahoo.com, e-mail: asaidahmat@mail.ru


В настоящей работе изучается стохастические функции Ляпунова для отображения Фейгенбаума. Рассмотрим пространство четных унимодальных отображений $\varphi(x)$ отрезка $[-1,1]$ в себя, переводящих критическую точку $x = 0$ в 1 т.е. $\varphi(0) = 1$. Отображение Фейгенбаума $\varphi(x)$ играет важную роль в теории универсальности. Для обьяснения явления универсальности Фейгенбаум предложил исследовать нелинейное преобразование $T$ этого пространства в себя:

$$(T\varphi)(x) = -\alpha\varphi(\varphi(\alpha^{-1}x)), \quad \alpha^{-1} = -\varphi(1). \tag{1}$$

Универсальность Фейгенбаума эквивалентна тому, что преобразование $T$ имеет неподвижную точку $g(x)$, $(Tg)(x) = g(x)$ и что спектр дифференциала отображения в неподвижной точке $D_gT$ лежит внутри единичного круга за исключением единственного собственного значения, большего 1. Это собственное значение и есть упомянутая выше постоянная $\delta$.(см. [1],[4].) Приведем несколько первых членов разложения $g(x)$ [3] :

$$g(x) \approx 1 - 1,52763x^2 + 0,104815x^4 - 0,0267057x^6 + ...$$

Величина $\alpha = -g^{-1}(1)$ является универсальной константой, характеризующей изменение масштаба,связанное с удвоением отображения, $\alpha \approx 2,50290...$ (см. [1],[4]).

Для каждого $n \geq 1$, положим

$$\Delta_0^{(n)} = [-\alpha^{-n}, \alpha^{-n}], \qquad \Delta_k^{(n)} = g^{(k)}(\Delta_{k-1}^{(n)}), \ k = \overline{1,(2^n-1)}.$$

Через неподвижную точку $g$ проходит одномерная неустойчивая сепаратриса $\Gamma^{(u)}(g)$, состоящая из отображений, удаляющихся от $g$ под действием $T$, и устойчивая сепаратриса $\Gamma^{(s)}(g)$ коразмерности 1, состоящая из отображений, притягивающихся к $g$ под действием $T$. Неустойчивая сепаратриса $\Gamma^{(u)}(g)$ отвечает собственному значению $\delta$. Результаты численного построения неустойчивой сепаратрисы $\Gamma^{(u)}(g)$ можно найти в работе Е.Б. Вул и К. М. Ханина [5].

Пусть $f(x,\mu)-$ семейство четных унимодальных отображений отрезка $[-1,1]$ в себя, аналитически зависящих от $x$ и $\mu$ в области $|x| < 1+\varepsilon_0$, $|\mu| < (\delta-1)^{-1}+\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$. Предположим, что при $\mu = 0$ критическая точка $x = 0$ переходит в 1 и является периодической с периодам 2 т.е. $f(0,0) = 1, \ f(1,0) = 0$.

Теперь определим преобразование $T^*$ в пространстве таких семейств. Положим

$$f^{(2)}(x,\mu) := f(f(x,\mu),\mu).$$

Определим минимальное положительное значение параметра $\mu = \overline{\mu}_2$, при котором $x = 0$ является периодической точкой периода 2 для отображения $f^{(2)}(x,\mu)$, т.е. $f^{(2)}(f^{(2)}(0,\overline{\mu}_2),\overline{\mu}_2) = 0$. Положим $f_1(x,\mu) = f^{(2)}(x,\overline{\mu_2}(1+\mu))$. Определим преобразование $T^*$ :

$$T^*f(x,\mu) = -\alpha f_1(\alpha^{-1}x,\mu),$$

где $\alpha^{-1} = -f_1(0,0)$. В результате получается семейство отображений с такими же свойствами, что и исходное. Преобразование $T^*$ имеет неподвижную точку $f_0(x,\mu)$ :

$$T^*f_0(x,\mu) = -\alpha f_0(f_0(\alpha^{-1}x,\overline{\mu_2}(1+\mu)) = f_0(x,\mu), \ \alpha \approx 2,5 \tag{2}$$

причем эта неподвижная точка является устойчивой, т.е. спектр производного отображения $D_{f_0(x,\mu)}T^*$ лежит строго внутри единичного круга. Нетрудно понять, что $\overline{\mu_2} = \frac{1}{\delta}$. В работе [5] приведены результаты численного счета для семейства $f_0(x,\mu)$ и для старшего собственного значения $D_{f_0}T^*$.

Положим

$$g(x,\mu) = \beta^{-1}f_0(\beta x, \frac{1}{\delta}(1+\mu)), \tag{3}$$

где $\beta = f_0(0,(\delta-1)^{-1})$. Легко проверить, что при $\mu = (\delta-1)^{-1}$ мы получим неподвижную точку $g(x)$ преобразования $T$. Семейство $\{g(x,\mu), |\mu| < (\delta-1)^{-1}+\varepsilon_0\}$ и есть неустойчивая сепаратриса $\Gamma^{(u)}(g)$, отвечающая неподвижной точке $g(x)$ преобразования удвоения $T$. Напомним, что для отображения $f(x)$ класса $C^3$ шварциан $Sf$ определяется так

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}(\frac{f''}{f'})^2, \ x \neq 0;$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими важными свойствами отображений $g(x,\mu)$ принадлежащим неустойчивой сепаратрисе $\Gamma^{(u)}(g)$ (см.напр. [5]):

(а) отображений $g(x,\mu)$ из $\Gamma^{(u)}(g)$ имеют отрицательный шварциан, т.е. $Sg(x,\mu) < 0$.

(б) каждое отображения $g(x,\mu)$ является строго выпуклым, т.е.

$$\max_{-1\leq x\leq 1} g''(x,\mu) < 0.$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$g^{(2)}(x, \delta^{-1}(1+\mu)) = -\alpha^{-1}g(\alpha x, \mu). \tag{4}$$

Обозначим через $\overline{\mu}_n$ $(n = 1, 2, ...)$ такое значение параметра, что точка $x = 0$ является сверх устойчивой периодической точкой периода $2^n$ для отображения $g(x, \overline{\mu_n})$. Из построения семейства $g(x,\mu)$ следует, что $\overline{\mu}_1 = 0, \quad \overline{\mu}_2 = \delta^{-1}$. Используя формулу (4) легко показать, что

$$\overline{\mu}_n = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + ... + \frac{1}{\delta^{n-1}}.$$

Очевидно, что

$$\mu_1 < \overline{\mu}_1 < \mu_2 < \overline{\mu}_2 < ... < \mu_n < \overline{\mu}_n < ...,$$

где $\mu_i-$ бифуркационные значения параметра.

Пусть $\tau_n \in (\mu_n, \mu_{n+1}]$. Используя четность отображений из $\Gamma^{(u)}$ и формулу (4) можно получить, что

$$g^{(2^n)}(\alpha^{-k}x, \tau_n) = (-\alpha^{-1})^k g^{(2^{n-k})}(x, \tau_n), \ 0 \leq k \leq n,$$

где

$$\tau_{n-k} = \delta^k\tau_n - \delta^{k-1} - ... - \delta - 1.$$

Пусть $g(x,\tau_n) \in \Gamma^u, \ \mu_n < \tau_n < \mu_{n+1}$. Рассмотрим цепь Маркова, заданную соотношением (см. [2], [4])

$$x_{n+1} = g(x, \tau_n) + \xi_{n+1},$$

где $\xi_n-$ независимые, одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что $\xi_n$ распределены в отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0-$ параметр, и распределение задается плотность $\rho_\varepsilon(x)$, причем

$$E\xi_n = \int x\rho_\varepsilon(x)dx = 0, \ D\xi_n = \int x^2\rho_\varepsilon(x)dx \sim C\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \to 0$ где $C > 0$ константа. Например, можно считать, $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}$. что отвечает равномерному распределению на $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Пусть $x_0 \in [-1, 1]$. Тогда

$$x_{2^n(\tau_n)} = \xi_{2^n} + g(\xi_{2^n-1} + ... + g(\xi_1 + g(x_0, \tau_n)...), \tau_n)$$

Поскольку все $\xi_i$ малы, мы можем написать для точки $x_{2^n}(\tau_n)$ линейное разложение по $\xi_i$, т.е

$$x_{2^n(\tau_n)} = \overline{x}_{2^n}(\tau_n) + \xi_{2^n} + \sum_{i=1}^{2^n-1} \xi_i \prod_{s=i}^{2^n-1} g'_x(\overline{x}_s(\tau_n), \tau_n) + Q_{2^n}(\overrightarrow{\xi}, x_0)$$

где $\overline{x}_s(\tau_n) = g^{(s)}(x_0, \tau_n)$, $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{2^n-1})$, а $Q_{2^n}(\overrightarrow{\xi}, x_0)$ есть погрешность.

**Определение**. Пусть $x \in [-1, 1]$. Для каждого $n \geq 1$ определим $L_{2^n}(x, \tau_n)$ по формуле

$$L_{2^n}(x, \tau_n) = \xi_{2^n} + \sum_{i=1}^{2^n-1} \xi_i \prod_{s=i}^{2^n-1} g'_x(\overline{x}_s(\tau_n)\tau_n). \tag{5}$$

$L_{2^n}(x, \tau_n)$ называется **стохастической функцией Ляпунова.**

Ясно, что

$$EL_{2^n}(x_0, \tau_n) = E(\xi_{2^n} + \sum_{i=1}^{2^n-1} \xi_i \prod_{s=i}^{2^n-1} g'_x(\overline{x}_s(\tau_n), \tau_n)) = E\xi_{2^n} + \prod_{s=i}^{2^n-1} g'_x(\overline{x}_s(\tau_n), \tau_n)) \sum_{i=1}^{2^n-1} E\xi_i = 0$$

$$DL_{2^n}(x_0, \tau_n) = D\xi_{2^n} + \sum_{i=1}^{2^n-1} \xi_i \prod_{s=i}^{2^n-1} g'_x(\overline{x}_s(\tau_n), \tau_n)) = D\xi_{2^n} + \prod_{s=i}^{2^n-1} (g'_x(\overline{x}_s(\tau_n), \tau_n)^2 \sum_{i=1}^{2^n-1} D\xi_i =$$

$$= D\xi_1\{1 + \sum_{i=1}^{2^n-1} \prod_{s=i}^{2^n-1} (g'_x(\overline{x}_s(\tau_n), \tau_n)^2\}.$$

Сформулируем основной результат нашей работы.

**Теорема**. Пусть $\tau_n \in (\mu_n, \mu_{n+1}]$ и $x_0 \in \Delta_i^{(n)}$. Тогда

$$DL_{2^n}(x_0, \tau_n) \leq R_3 \varepsilon^2 \lambda^{2n} |\Delta_i^{(n)}|^2,$$

где $0 \leq i \leq 2^n$, $R_3 > 0-$ не зависящая от $n$ константа, $\lambda \approx 6.6$.

## References


1. *M. Feigenbaum* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, J. Stat. Phys. 1978, 19:1, p. 25-52.

2. *Е. Б. Вул, Я. Г. Синай, К. М. Ханин* Универсальность Фейгенбаума, УМН, 1984, т. 39, вып. 3, с 3-37.

3. *O. E. Lanford III* A computer assisted proof of the Feigenbaum conjectures, Bull, Amer. Math. voc., 1982, 6:3, p. 427-434.

4. *Oliver Diaz-Espinosa, Rafael De La Llave* Renormalization and central limit theorem for critical dynamical systems with weak external noise, Journal of Modern Dynamics Volume 1, No.3,2007, 477-543 .

5. *Е. Б. Вул,К. М. Ханин*: О неустойчивой сепаратрисе неподвижной точки Фейгенбаума, УМН. 1982. 37:5,с. 173-174.

6. *Р.З. Хасьминский* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров , М.: Наука, 1969.

# Периодические основные состояния для модели Изинга с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли относительно нормального делителя индекса 4.

**Жураев И.Т.[1], Умрзаков Ш.К.[2]**

[1]*Наманганское отделение Института Математики, Академии Наук Узбекистана,*

[2]*Наманганский государственный университет.*

e-mail: *jurayev85@inbox.uz, sheraliumrzakov88@gmail.com*

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка $k$, где $V$ - множество вершин, $L$ - множество ребер $\tau^k$. Известно, что $\tau^k$ можно представить как $G_k-$ свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка. Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 1\}$. Тогда конфигурация $\sigma$ на $V$ определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков" точки $x \in G_k$, через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т.е. $S_1(x) = \{y \in G_k :< x, y >\}$ и $x_\downarrow = S_1(x) \backslash S(x)$.

Если точки $x, y \in V$ являются прямыми потомками некоторой вершины, то точки $x, y \in V$ называются вершинами, лежащими на одном "этаже" и обозначаются как $> x, y <$. Ясно, что $d(x, y) = 2$.

Если точки $x, y \in V$ такие, что $d(x, y) = 2$ и только одна из них является прямым потомком некоторой вершины, то точки $x, y \in V$ называются вершинами, лежащими на разных "этажах" и обозначаются как $\gg x, y \ll$.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ фактор группа, где $G_k^*$- нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

**Определение 1.** Конфигурация $\sigma(x)$, $x \in V$ называется $G_k^*$-периодической, если $\sigma(x) = \sigma_i$ при $x \in H_i$ и при любом $x \in G_k$. А $G_k$-периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.

Гамильтониан модели Изинга с рассеянными конкурирующими взаимодействиями имеет вид

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \\ x,y \in V}} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{>x,y< \\ x,y \in V}} \sigma(x)\sigma(y) + J_3 \sum_{\substack{\gg x,y \ll \\ x,y \in V}} \sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

где $J_1, J_2, J_3 \in R$.

Пусть $M-$ множество единичных шаров с вершинами в $V$. Мы назовем сужение конфигурации $\sigma$ на шаре $b \in M$ *ограниченной конфигурацией* $\sigma_b$. Определим энергию конфигурации $\sigma_b$ на $b$ следующим образом:

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \\ x,y \in V}} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{>x,y< \\ x,y \in V}} \sigma(x)\sigma(y) + J_3 \sum_{\substack{\gg x,y \ll \\ x,y \in V}} \sigma(x)\sigma(y), \tag{2}$$

где $J = (J_1, J_2, J_3) \in R^3$.

**Лемма.** При $k = 2$ для каждая конфигурация $U(\sigma_b)$ имеет вид:

$$U(\sigma_b) \in \Big\{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\Big\},$$

где,

$$U_1 = \frac{3}{2}J_1 + J_2 + 2J_3, \quad U_2 = \frac{1}{2}J_1 - J_2, \quad U_3 = -\frac{1}{2}J_1 + J_2 - 2J_3,$$

$$U_4 = -\frac{3}{2}J_1 + J_2 + 2J_3, \quad U_5 = -\frac{1}{2}J_1 - J_2, \quad U_6 = \frac{1}{2}J_1 + J_2 - 2J_3.$$

**Определение 2.** Конфигурация $\varphi$ называется основным состоянием относительного гамильтониана $H$, если

$$U(\varphi_b) = min\left\{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\right\},$$

для любого $b \in M$.

Введем следующие обозначения:

$$A_i = \left\{J = (J_1, J_2, J_3) \in R^3 : U_i \leq U_j, j = 1, ...6\right\}, \tag{3}$$

где, $i = 1, ...6$.

Следующие результаты получены путем непосредственных вычислений:

$$A_1 = \left\{J \in R^3 : \quad J_1 \leq 0, \quad J_1 + 4J_3 \leq 0, \quad J_1 + 2J_2 + 2J_3 \leq 0\right\},$$

$$A_2 = \left\{J \in R^3 : \quad J_1 \leq 0, \quad J_2 \geq 0, \quad J_2 - J_3 \geq 0, \quad J_1 - 2J_2 + 2J_3 \leq 0\right\},$$

$$A_3 = \left\{J \in R^3 : \quad J_1 \geq 0, \quad J_2 - J_3 \leq 0, \quad J_3 \geq 0, \quad J_1 - 2J_2 + 2J_3 \geq 0\right\},$$

$$A_4 = \left\{J \in R^3 : \quad J_1 \geq 0, \quad J_1 - 4J_3 \geq 0, \quad J_1 - 2J_2 - 2J_3 \geq 0\right\},$$

$$A_5 = \left\{J \in R^3 : \quad J_1 \geq 0, \quad J_2 \geq 0, \quad J_2 - J_3 \geq 0, \quad J_1 - 2J_2 - 2J_3 \leq 0\right\},$$

$$A_6 = \left\{J \in R^3 : \quad J_1 \leq 0, \quad J_2 - J_3 \leq 0, \quad J_3 \geq 0, \quad J_1 + 2J_2 - 2J_3 \leq 0\right\}.$$

Обозначим $C_i = \{\sigma_b : U(\varphi_b) = U_i\}$ $i = 1, ...6$. Для трансляционно-инвариантных основных состояний получена следующая теорема.

**Теорема 1.** При $k = 2$ на множестве $A_1$ и только в нем существуют ровно две трансляционно-инвариантные основные состояния и они имеют следующие виды: $\sigma(x) = \pm 1$ при любом $\forall x \in V$.

Тепер изучим периодические основные состояния относительно нормального делителя индекса 4. Пусть $A \subset \{1, 2, 3\}$. $H_A = \{x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) -$четно$\}$, где $w_j(x)$ – число $a_j$ в слове $x$ и $G_k^{(4)} = H_A \bigcap G_k^{(2)}$. Отметим что $G_k^{(4)}$ - нормальный делитель индекса 4.

Рассмотрим фактор группу $G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$, где

$$H_0 = \{x \in G_k \quad \sum_{j \in A} w_x(a_j) - \text{четно}, \quad |x| - \text{четно}\},$$

$$H_1 = \{x \in G_k \quad \sum_{j \in A} w_x(a_j) - \text{нечетно}, \quad |x| - \text{четно}\},$$

$$H_2 = \{x \in G_k \quad \sum_{j \in A} w_x(a_j) - \text{четно}, \quad |x| - \text{нечетно}\},$$

$$H_3=\{x\in G_k \quad \sum_{j\in A} w_x(a_j) - \text{нечетно}, \quad |x| - \text{нечетно}\}.$$

$G_k^{(4)}$ - периодическая конфигурация имеет следующий вид:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} l, & x\in H_0,\\ m, & x\in H_1,\\ n, & x\in H_2,\\ p, & x\in H_3.\end{cases},$$

где, $l,m,n,p\in\Phi$. Доказана следующая теорема:

**Теорема 2.**

**1)** При $k=2$ на множестве $A_4$ существуют ровно две $G_k^{(4)}$ - периодические основные состояния, которые являются $G_k^{(2)}$ - периодическими основными состояниями и они имеют вид:

$$\varphi(x)=\pm\begin{cases} -1, & x\in H_0,\\ -1, & x\in H_1,\\ 1, & x\in H_2,\\ 1, & x\in H_3.\end{cases} =\pm\begin{cases} -1, & |x| - \text{четно},\\ 1, & |x| - \text{нечетно}.\end{cases}$$

**2)** При $k=2$ и $|A|=1$ на множестве $A_2\bigcap A_6$ существуют ровно две $G_k^{(4)}$ - периодические основные состояния, являющиеся $H_{\{a_1\}}$ - периодическими основными состояниями и они имеет следующий вид:

$$\varphi(x)=\pm\begin{cases} -1, & x\in H_0,\\ 1, & x\in H_1,\\ -1, & x\in H_2,\\ 1, & x\in H_3.\end{cases} =\pm\begin{cases} -1, & x\in H_{\{a_1\}},\\ 1, & x\in G_2\backslash H_{\{a_1\}}.\end{cases}$$

**3)** При $k=2$ и $|A|=1$ на множестве $A_5\bigcap A_6$ существуют ровно две $G_k^{(4)}$ - периодические основные состояния и они имеют вид:

$$\varphi(x)=\pm\begin{cases} -1, & x\in H_0,\\ 1, & x\in H_1,\\ 1, & x\in H_2,\\ -1, & x\in H_3.\end{cases}$$

**Замечание:** Конфигурации $\varphi(x)$, приведенные в пункте 3, являются $G_k^{(4)}$ - периодическими, что являются новыми и они не являются $H_A$ - периодическими.

## Литература


1. *Синай Я.Г.,* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. Наука. М. 1980.

2. *Розиков У.А., Рахматуллаев М.М.,* Слабо периодические основные состояние и мер Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями надереве Кэли. ТМФ, 2009, T.160, N3.

3. *Ботиров Г.И., Розиков У.А.,* Модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли: контурный метод, ТМФ, 2007, T .153, N1, стр. 86-97.

4. *Rozikov U.A.,* A Constructive Description of Ground States and Gibbs Measures for Ising Model with Two-Step Interactions on Cayley Tree. Journal of Statistical Physics. Volume 122. No 2, 2006, pp. 217-235.

5. *Рахматуллаев М.М., Жураев И.Т.,* Основные состояния для модели Изинга с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. "Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики". Международная научная конференция. Фергана. 12-13 марта. 2020 г., стр. 85-87.

# Теорема о термодинамическом формализме для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома

**Каримов Ж.Ж.**

*Туринский политехнический университет в городе Ташкенте*
jkarimov0702@gmail.com

Настоящая работа посвящена построению потенциала для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома и числом вращений равным $\rho = [k,k,\dots,k,\dots],\ k \geq 1$.

Преобразование ренормгруппы в пространстве гомеоморфизмов окружности с изломами и алгебраическим числом вращения имеет периодическую орбиту [1]. Мы построим потенциал для отображения окружности являющееся периодической траекторией ренормгруппового реобразования. Обозначим через $X_b$ множество пар строго возрастающих функций $(f(x),\ x \in [-1,0],\ g(x),\ x \in [0,\alpha])$ удовлетворяющих следующим условиям:

а) $f(0) = \alpha,\ g(0) = -1;$ б) $f(-1) = g(\alpha);$

в) $f(g(0)) < 0,\ f^{(2)}(g(0)) < 0, ..., f^{(k-1)}(g(0)) < 0,\ f^{(k)}(g(0)) > 0;$

г) $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([-1,0]),\ g(x) \in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha])$ для любого $\varepsilon > 0$.

Условия а) - в) позволяют при помощи $(f,g) \in X_b$ построить гомеоморфизм окружности $[-1,\alpha)$ по формуле:

$$T_{f,g}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{если} \quad x \in [-1,0), \\ g(x) & \text{если} \quad x \in [0,\alpha). \end{cases}$$

Обозначим через $X_b(\rho)$ подмножество состоящих из таких пар $(f,g) \in X_b$ что число вращения

$$\rho = [k,k,\dots,k,\dots] = \frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2},\ k \geq 1.$$

Определим преобразование ренормгруппы $R_b : X_b(\rho) \to X_b(\rho)$ по формуле:

$$R_b(f(x),g(x)) = (\tilde{f}(x),\ x \in [-1,0];\ \tilde{g}(x),\ x \in [0,\alpha']),$$

где

$$\tilde{f}(x) = -\alpha^{-1} f^{(k-1)}(g(-\alpha x)),$$
$$\tilde{g}(x) = -\alpha^{-1} f^{(k-1)}(g(f(-\alpha x))),$$
$$\alpha' = -\alpha^{-1} f(-1).$$

Определим величину излома в точке $x = 0$: $c = \sqrt{\frac{f'(-0)}{f'(+0)}}$. Ясно, что при $c = 1$ мы получим гладкое отображение. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $c \neq 1$. В работе [1] доказано, что при фиксированном $c$, преобразование $R_b$ в подмножестве

$X_b(\rho)$ имеет единственную периодическую траекторию $\{f_i(x,c_i), g_i(x,c_i), i=1,2\}$ периода два. Отождествляя концы полуинтервалов $[-1,\alpha_i)$, $i=1,2$ получаем окружности $S_i$, $i=1,2$. Теперь при помощи $(f_i,g_i)$, $i=1,2$ определим гомеоморфизмы окружности $T_i : S_i \to S_i$ по формуле:

$$T_i(x) = \begin{cases} f_i(x,c_i) & \text{если} \quad x \in [-1,0), \\ g_i(x,c_i) & \text{если} \quad x \in [0,\alpha_i) \end{cases}$$

Ниже мы описываем свойства гомеоморфизма $T_1$ окружности $S_1$. Гомеоморфизм $T_1$ имеет изломы в точках $x_0$ и $x_1 = T_1(x_0)$ и произведение величин изломов в этих точках равно $c_1$. Гомеоморфизм $T_1$ переобозначим через $T_b$. Второй гомеоморфизм $T_2$ изучается аналогичным образом.

Обозначим через $B(T_b)$ множество всех $C^1-$сопряженных с гомеоморфизмов $T_b$. Мы построим термодинамический формализм для отображений принадлежащих $B(T_b)$. Пусть $T \in B(T_b)$. Отображение $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_0, T(x_0)\})$, имеет две точки излома $x_0$ и $T(x_0)$, а ее число вращения вращения равно $\rho = [k,k,\ldots,k,\ldots]$.

Обозначим через $\frac{p_n}{q_n}$, $n \geq 1$, $n$-ую подходящую дробь $\rho$. Числа $q_n$ удовлетворяют следующему разностному уравнению $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$, $q_0 = 1$, $q_1 = 1$. Числа $q_n$ называются числами Фибоначчи. Возьмем произвольную точку $x_0 \in S^1$ и рассмотрим ее орбиту

$$O_T(x_0) = \{x_0,\, x_1 = T(x_0)\; x_2 = T^2(x_0),, ..., x_n = T^n(x_0), ...\}.$$

При помощи орбиты $O_T(x_0)$ определим последовательность $\{P_n(x_0),\, n \geq 1\}$ динамических разбиений окружности.

Разбиение $P_n(x_0)$ получается при помощи части орбиты точки $x_0 : \{x_i,\, 0 \leq i \leq q_n + q_{n+1} - 1\}$. Для каждого $n \geq 1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ отрезок, соединяющий точек $x_0$ и $x_{q_n}$.

Положим $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T^i(\Delta_0^{(n)}(x_0))$, $i \geq 0$. Тогда разбиение $P_n(x_0)$ состоит из системы отрезков $\{\Delta_i^{(n)},\, 0 \leq i < q_{n+1}\}$ и $\{\Delta_j^{(n+1)},\, 0 \leq j < q_n\}$ (см. [2]). Разбиение $P_n(x_0)$ называется *$n$-ым динамическим разбиением* окружности. Отметим, что любые два отрезка разбиения $P_n(x_0)$ могут пересекаться только концевыми точками. При переходе от $P_n(x_0)$ к $P_{n+1}(x_0)$ все "короткие" отрезки $\Delta_j^{(n+1)}(x_0)$, $0 \leq j \leq q_n - 1$ сохраняются, а "длинные" отрезки $\Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \leq i < q_{n+1}$, разбиваются на пары отрезков: $\Delta_i^{(n)} = \Delta_i^{(n+2)} \bigcup \Delta_{i+q_n}^{(n+1)}$.

При помощи последовательности динамических разбиений $P_n(x_0)$ можно построить своеобразную символическую динамики следующим образом [3]. Пусть $x \in S^1 \backslash O_T(x_0)$. Положим $a_{n+1} := a_{n+1}(x) = a$, если $x \in \Delta_i^{(n+1)}(x_0)$, $0 \leq i < q_n$. Пусть $x \in \Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \leq i < q_{n+1}$. Используя свойств динамическую разбиению окружности, точка попадает в отрезок $\Delta_i^{(n+2)}(x_0)$ или в отрезок $\Delta_{i+q_n}^{(n+1)}(x_0)$. Положим в первом случае $a_{n+1} = 0$, а во втором $a_{n+1} = s$. Таким образом, мы получим взаимно-однозначное соответствие

$\varphi : S^1 \backslash O_f(x_0) \leftrightarrow \{\ \underline{a} = (a_1, a_2, ...a_n, ...),\ a_n = a, 0, 1$, при этом, $a_{n+1} = a$, тогда и только тогда, когда $a_n = 0,\ n \geq 1\} =: \Theta_+$

Отметим, что при этом каждому отрезку $\Delta^{(n)}$ динамического разбиения $P_n(x_0)$ соответствует единственное слово длины $n$ : $(a_1, a_2, ..., a_n)$. В частности, слова $(0, a, 0, a, ..., 0, a)$ и $(a, 0, a, 0, ..., a, 0)$ соответствует отрезкам $\Delta_0^{(n)}$ и $\Delta_0^{(n+1)}$, соответственно.

Определим другое пространство $\Omega$ односторонних бесконечных слов с тем же алфавитом $a, 0, 1$. $\Omega := \{\underline{a} = (a_1, a_2, ...a_n, ...),\ a_n = a, 0, 1$, при этом, $a_{n+1} = 0$, тогда и только тогда, когда $a_n = a,\ n \geq 1$.

Определим следующую функцию $\underline{\gamma}$ :

$$\underline{\gamma}(x) = \begin{cases} (a, 0, a, 0, \ldots, a, 0, \ldots), & \text{если} \quad x = a, \\ (0, a, 0, a, \ldots, 0, a, \ldots), & \text{если} \quad x = 0, 1. \end{cases}$$

Теперь сформулируем теорему о термодинамическом формализме.

**Теорема 1.** Для всех отображений $T \in B(T_b)$ с одной точкой излома, и иррациональным числом вращения $\rho = [k, k, \ldots, k, \ldots] = \frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $k \geq 1$, существует единственная, непрерывная (в тихоновской топологии) функция $U_b : \Omega \to (-\infty, 0)$ обладающая следующими свойствами:

1) Для любых $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, \ldots)$ и $\underline{b} = (a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n, \ldots)$ из пространства $\Omega$ верна оценка

$$|U_b(\underline{a}) - U_b(\underline{b})| \leq const \cdot q^k,$$

где константа $q \in (0, 1)$ - не зависит от $\underline{a}$, $\underline{b}$ и $k$.

2) Пусть $\Delta_{s_n}^{(n)} \subset \Delta_{s_r}^{(r)}$, $1 \leq r < n$ и $\varphi(\Delta_{s_n}^{(n)}) = (b_1, \ldots, b_n)$, $\varphi(\Delta_{s_r}^{(r)}) = (b_1, \ldots, b_r)$, тогда

$$|\Delta_{s_n}^{(n)}| = (1 + \psi(b_1, b_2, \ldots, b_n))|\Delta_{s_r}^{(r)}| \exp\{\sum_{s=r}^{n} U_b(b_s, b_{s-1}, \ldots, b_r, \ldots, b_1, \underline{\gamma}(b_1))\},$$

где $|\psi(b_1, b_2, \ldots, b_n)| \leq Const \cdot q^r$.

Аналогичный результат для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома и иррациональным числом вращений равным золотому сечению, т.е. $\rho = [1, 1, 1..., 1, ...] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, был получен в работе [4].

## Литература


1. *Вул Е.Б., Ханин К.М.* Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома. Успехи математических наук. 1990. Т. 45. Вып. 3 (273). С. 189–190.

2. *Синай Я.Г.* Современные проблемы эргодической теории. М.: Физматлит, 1995.

3. *Джалилов А.А.* Термодинамический формализм и сингулярные инвариантные меры критических отображений. Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 134, N 2. С. 191–206.

4. *Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж.* Термодинамический формализм и показатели сингулярности инвариантной меры отображений окружности с одним изломом. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т-30. Вып. 3. С. 343–366.

# Локальные дифференцирования на вещественных W*-алгебрах

**У.Ш.Каримов**

*Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан.*
e-mail : karimovulugbe07@gmail.com.

Инволютивные алгебры (т.е. *-алгебры). Пусть $A$ – алгебра над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Инволюцией* в $A$ называется такое отображение $a \to a^*$ алгебры $A$ в себя, которое удовлетворяет следующие условия:

1. $(a^*)^* = a$;
2. $(ab)^* = b^* a^*$;
3. $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$, для всех $a, b \in A$ и для всех чисел $\alpha, \beta$.

Алгебру с инволюцией называют *инволютивной алгеброй* или **-алгеброй*, а элемент $a^*$ называют *сопряженным* к $a$.

Банахова *-алгебра $A$ над полем $\mathbb{C}$ называется *C*-алгеброй*, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$, для любого $a \in A$. C*-алгебра $M$ называется *W*-алгеброй*, если существует банахово пространство $M_*$ такое, что $(M_*)^* = M$.

Вещественная *-подалгебра $R \subset B(H)$ называется **вещественной W*-алгеброй**, если она слабо замкнута, $\mathbb{1} \in R$ и $R \cap iR = \{0\}$.

Пусть $A$ - комплексная или вещественная алгебра. Линейное отображение $D : A \to A$ называется **дифференцированием**, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ для всех $x, y \in A$. Каждый элемент $a \in A$ определяет дифференцирование $D_a$ как $D_a(x) = ax - xa = [a, x]$, $x \in A$. Такие дифференцирования называются **внутренними**.

Известно, что всякое дифференцирование комплексной или вещественной W*-алгебры является внутренним, а для C*-алгебр существуют не внутренние дифференцирования.

В 1990 году Р.Кадисон, Д.Ларсон и А.Саур независимо друг от друга ввели понятие локального дифференцирования. Линейное отображение $\Delta : A \to A$ называется **локальным дифференцированием**, если для каждого $x \in A$ существует дифференцирование $D_x$ такое, что $\Delta(x) = D_x(x)$. Кадисон показал (1990), что всякое непрерывное по норме локальное дифференцирование из алгебры фон Неймана M в двойственный M-бимодуль является дифференцированием. В частности, всякое локальное дифференцирование W*-алгебры является дифференцированием.

**Теорема.** Если $R$ – вещественная W*-алгебра, то всякое локальное дифференцирование $\delta : R \to R$ является дифференцированием.

## Литература

1. *R.V.Kadison.*, Local Derivations. Journal of Algebra. **130**, (1990), 494-509.

2. *D.R.Larson and A.R.Sourour* Local derivations and local automorphisms of $B(X)$, Operator theory: operator algebras and applications, part 2 (Durham,NH, 1988), 187–194, Proc. Sympos. Pure Math. 51, Part 2, Amer.Math.Soc., Providence, RI, (1990).

# Динамика семейства стохастических операторов вольтерровского типа четвертой степени

**Курганов К. А.**[1]**, Адхамжонов М. Б.**[2]**, Охунова М.О.**[3]

*Национальный Университет Узбекистана*

[1]kurganov.k@mail.ru, [2]muxriddinadxamjonov@gmail.com

В симплексе $S^{m-1}=\{x=(x_1,x_2,...,x_m)\in[0,1]^m:\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=1,\}$ рассмотрим оператор

$V:S^{m-1}\to S^{m-1}$ 4-степени, определяемый равенствами:

$$V:x_i^{'}=\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4}^{m}P_{i_1,i_2,i_3,i_4,i}x_1x_2x_3x_4, i=\overline{1,m} \tag{1}$$

где $P_{i_1,i_2,i_3,i_4,i}\geq 0,\sum_{i=1}^{m}P_{i_1,i_2,i_3,i_4,i}=1$ и значения $P_{i_1,i_2,i_3,i_4,i}$ не меняются при любой перестановке

$$i_1,i_2,i_3,i_4. \tag{2}$$

Условии (2) обеспечивают стохастичность оператора, т.е $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$.

**Определение 1.** Оператор $(1)-(2)$ называется вольтерровским, если

$$P_{i_1,i_2,i_3,i_4,i}=0$$

при $i\notin\{i_1,i_2,i_3,i_4\}$.

**Определение 2.** Если $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)},x_4^{(0)})\in S^{m-1}$ начальная точка, то $\{x^n,n=0,1,2,3,....\}$ называется тректорией точки $x^{(0)}$ при действии оператора $(1)-(2)$, т.е. $x^{(n)}=V(x^{(n-1)}),n=1,2,....$

**Определение 3.** Оператор $(1)-(2)$ называется регулярным, если для любого $x^{(0)}\in intS^{m-1}$ существует единственная неподвижная точка $x^*\in S^{m-1}$ (т.е. $Vx^*=x^*$) такое, что

$$\lim_{n\to\infty}V^nx^0=x^*.$$

**Определение 4.** Оператор $(1)-(2)$ называется эргодичным, если для любого $x^{(0)}\in S^{m-1}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}V^kx.$$

**Определение 5.** Если якобиан оператора $V$ в неподвижной точке $x^*$

$$J(V(x^*))=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x_4}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_4}{\partial x_4}\end{vmatrix}$$

не имеет значения на единственной окружности, то данная неподвыжная точка называется гиперболической.

Гиперболическая неподвыжная точка $x^*\in S^{m-1}$ называется

1) притягивающей, если все абсолютные величины (модулы) собственных значений якобиана меньше единицы.

2) отталкивающей, если все абсолютные величины (модулы) собственных значений якобиана больше единицы.

3) седловой, в остальных случаях.

В симплексе $S^2 = \{(x,y,z) \in [0;1]^3, x+y+z=1\}$ стохастические операторыв вольтерровского типа четвертой степени имеет вид:

$$V_{4,2}: \begin{cases} x' = x^4 + 4ax^3y + 4dx^3z + 4(1-b)xy^3 + 4(1-c)xz^3 + \\ \qquad +6kx^2y^2 + 6(1-l)x^2z^2 + 12[h_1x^2yz + s_2xy^2z + g_3xyz^2] \\ y' = y^4 + 4bxy^3 + 4ey^3z + 4(1-a)x^3y + 4(1-f)yz^3 + \\ \qquad +6my^2z^2 + 6(1-k)x^2y^2 + 12[s_1xy^2z + h_2x^2yz + g_2xyz^2] \\ z' = z^4 + 4cxz^3 + 4fyz^3 + 4(1-d)x^3z + 4(1-e)y^3z + \\ \qquad +6lx^2z^2 + 6(1-m)y^2z^2 + 12[g_1xyz^2 + h_3x^2yz + s_3xy^2z] \end{cases}$$

где $a, b, c, d, e, f, k, l, m, h_i, s_i, g_i \in [0,1], i = \overline{1,3}$.

Вершины симплекса $M_1(1,0,0), M_2(0,1,0), M_3(0,0,1)$ являются неподвижными точками. Поскольку собственные числа относительно вершин симплекса являются числа

$4(1-a), 4(1-b), 4(1-c), 4(1-d), 4(1-e), 4(1-f)$, можем считать, $k = l = m = \frac{1}{2}, s_i = g_i = h_i = \frac{1}{3}$. Нас интересует "спиралеобразное"поведения траекторий, который возможна при

$\{a,c,e\} \subset [0;\frac{3}{4}), \{b,f,d\} \subset (\frac{3}{4};1]$ или обратно. Введем обозначении: $a = c = e = p, b = d = f = q$. Тогда оператор $V_{42}$ имеет вид:

$$V_{pq}: \begin{cases} x' = x^4 + 4px^3y + 4qx^3z + 4(1-q)xy^3 + 4(1-p)xz^3 + 3(x^2y^2 + x^2z^2) + \\ \qquad +4[x^2yz + xy^2z + xyz^2] \\ y' = y^4 + 4qxy^3 + 4py^3z + 4(1-p)x^3y + 4(1-q)yz^3 + 3(y^2z^2 + x^2y^2) + \\ \qquad +4[xy^2z + x^2yz + xyz^2] \\ z' = z^4 + 4pxz^3 + 4qyz^3 + 4(1-q)x^3z + 4(1-p)y^3z + 3(x^2z^2 + y^2z^2) + \\ \qquad +4[xyz^2 + x^2yz + xy^2z] \end{cases}$$

Оператор $V_{pq}$ кроме вершин, имеет внутреннюю неподвижную точку $C(1/3;1/3;1/3)$, собственные числа якобиана являются $\lambda_0 = 4, \lambda_{1,2} = \frac{2}{27} \times [(3+6p+6q) \pm 4\sqrt{3}|p-q| \times i]$

Пусть $A = (p-q)^2 + 6(p+1/4)^2 + 6(q+1/4)^2 - \frac{243}{16}$.

**Теорема** 1)Если $A > 0$ , то множество предельных точек бесконечно и лежит на границе симплекса. $V_{pq}$ является неэргодичным.

2) Если $A < 0$ , то для любых $x^0 \in intS^2, x^0 \neq C$, траектории "спиралеобразно"сходятся к $C$. $V_{pq}$ является регулярным.

## Литература

1. *Jamilov U.U., Kurganov K.A.* On-non ergodicity of volterra cubik stochastik operator. Доклады А.Н.Республики Узбекистан.2017. 3 стр.8-11.

# Динамика стохастических операторов вольтерровского типа пятой степени

**Курганов К.А , Каримова Ф.А.**

*Национальный университет Узбекистана, Узбекистан. Ташкент.*

e-mail:kurganov.k@mail.ru , gmail: iska2091@gmail.com

В симплексе $S^1 = \{(x,y) \in [0,1]^2, x+y=1\}$ операторы вольтерровского типа пятой степени имеет вид:

$$V: \begin{cases} x' = x[x^4 + 5ax^3y + 10cx^2y^2 + 10(1-d)xy^3 + 5(1-b)y^4] \\ y' = y[y^4 + 5bxy^3 + 10dx^2y^2 + 10(1-c)x^3y + 5(1-c)x^4] \end{cases}$$

где $a, b, c, d \in [0,1]$. Кроме вершин $M_1(1,0), M_2(0,1)$ при условии $a, b \in (\frac{4}{5}, 1]$ или $a, b \in [0, \frac{4}{5}]$ существует внутренняя неподвижная точка $C(\frac{t}{1+t}, \frac{1}{1+t})$, где

$$t = \Big(-\frac{1}{27}\frac{(5b-4)^3}{(4-5a)^3} + \frac{1}{6}\frac{(6-10c)(10d-6)}{(4-5a)^2} - \frac{1}{2}\frac{5b-4}{4-5a} + \frac{1}{18}\big(81(\frac{2}{27}\frac{(5b-4)^3}{(4-5a)^3} - \frac{1}{3}\frac{(6-10c)(10d-6)}{(4-5a)^2} + \frac{5b-4}{4-5a})^2 +$$
$$+12(-\frac{1}{3}\frac{(6-10c)^2}{(4-5a)^2} + \frac{10d-6}{4-5a})^3\big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{3}} + \Big(-\frac{1}{27}\frac{(5b-4)^3}{(4-5a)^3} + \frac{1}{6}\frac{(6-10c)(10d-6)}{(4-5a)^2} - \frac{1}{2}\frac{5b-4}{4-5a} -$$
$$-\frac{1}{18}\big(81(\frac{2}{27}\frac{(5b-4)^3}{(4-5a)^3} - \frac{1}{3}\frac{(6-10c)(10d-6)}{(4-5a)^2} + \frac{5b-4}{4-5a})^2 + +12(-\frac{1}{3}\frac{(6-10c)^2}{(4-5a)^2} + \frac{10d-6}{4-5a})^3\big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\frac{6-10c}{4-5a}$$

Для оператора волтерровского типа пятой степени V верна следующая

**Теорема.** *1) Если $a \in (\frac{4}{5}, 1], b \in [0, \frac{4}{5}]$, то для любой $(x^0, y^0) \in intS^1$, траектории сходятся к $M_2(1;0)$*
*2) Если $a, b \in (\frac{4}{5}, 1]$, то для любой $(x^0, y^0) \in int\overline{M_1C}$, траектории сходятся к $M_1(1,0)$, если $(x^0, y^0) \in int\overline{CM_2}$, траектории сходятся к $M_2(0,1)$ . C является отталкивающей неподвижной точкой.*
*3) Если $a, b \in [0, \frac{4}{5}]$ , то для любой $(x^0, y^0) \in intS^1$ , траектории сходятся к $C(\frac{t}{1+t}, \frac{1}{1+t})$*

## Литература

1.U.U.Jamilov, K.A.Kurganov. On—non ergodicity of volterra cubik stochastik operator. Доклады А.Н.Республики Узбекистан.2017.№ 3 стр.8-11.

# О существовании собственных значений одночастичного оператора Шредингера на решетке

**С.Н. Лакаев, Ш.И. Хамидов, А.К. Амиров**

[1,2,3] *Самаркандский Государственный Университет*

e-mail slakaev@mail.ru, e-mail shoh.hamidov1990@mail.ru

Пусть $Z^d$ – $d \geq 3$–мерная кубическая решетка, и $\ell^2(Z^d)-$ соотв. $\ell^1(Z^d)-$ гильбертово соотв. банахово пространство квадратично-суммируемых соотв. суммируемых функций, определенных на $Z^d$. Пусть $\widehat{H}_0-$ оператор типа Лорана-Теплица действующий в $\ell^2(Z^d)$ по формуле

$$(\widehat{H}_0\hat{f})(x) \ = \ \sum_{s\in Z^d}\hat{\mathcal{E}}(x-s)\hat{f}(s),$$

где функция $\hat{\mathcal{E}}(\cdot)$ определенная на $Z^d$ принадлежит пространству $\ell^1(Z^d)$. Предположим также, что выполняется условие самосопряженности оператора $\widehat{H}_0$:

$$\hat{\mathcal{E}}(s) = \overline{\hat{\mathcal{E}}(-s)}, \ \ s \in Z^d.$$

Пусть $\ell^1(Z^d; R_0^-) \subset \ell^1(Z^d)$– множество сумируемых неположительных функций. Оператор $\widehat{V}$ действует в $\ell^2(Z^d)$ как оператор умножения на функцию $\hat{v} \in \ell^1(Z^d; R_0^-)$:

$$(\widehat{V}\hat{f})(x) = \hat{v}(x)\hat{f}(x).$$

Заметим, что $\widehat{V}-$ неположительный и компактный оператор в $\ell^2(Z^d)$.

В координатном представлении одночастичный гамильтониан $\widehat{H}_{\widehat{V}} := \widehat{H}_{\widehat{V}}(\hat{\mathcal{E}})$, описивающий движение одной квантовой частицы в потенциальном поле $\hat{v}$, действует в $\ell^2(Z^d)$ по формуле

$$\widehat{H}_{\widehat{V}} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}.$$

Нетрудно видеть, что оператор $\widehat{H}_{\widehat{V}}$ ограничен и самосопряжен.

Пусть $T^d$– $d \geq 1$-мерный тор, т.е. куб $(-\pi,\pi]^d$ с соответствующим отождествлением противоположных граней, и $L^2(T^d,\eta)$- гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций на $T^d$ с мерой Хаара $\eta = \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}$.

Обозначим через

$$\mathcal{F}: \ell^2(Z^d) \to L^2(T^d,\eta), \ (\mathcal{F}\hat{f})(p) = \sum_{x\in Z^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p,x)}\hat{f}(x)$$

стандартное преобразование Фурье с обратным отображением

$$\mathcal{F}^{-1}: L^2(T^d,\eta) \to \ell^2(Z^d), \ (\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \int\limits_{T^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p,x)}f(p)\eta(\mathrm{d}p).$$

В импульсном представлении оператор Шредингера $H_V := \mathcal{F}\widehat{H}_{\widehat{V}}\mathcal{F}^{-1}$ действует в $L^2(T^d,\eta)$ по формуле

$$H_V = H_0 + V.$$

Здесь $H_0 := \mathcal{F}\widehat{H}_0\mathcal{F}^{-1}$ является оператором умножения на функцию $\mathcal{E}(\cdot)$:

$$(H_0 f)(p) = \mathcal{E}(p) f(p),\ \ f \in L^2(T^d, \eta),$$

где вещественнозначная непрерывная функция $\mathcal{E}(\cdot)$ определенная на $T^d$ является преобразованием Фурье функции $\hat{\mathcal{E}}(\cdot)$ :

$$\mathcal{E}(p) = \left(\mathcal{F}\hat{\mathcal{E}}\right)(p) = \sum_{x \in Z^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p,x)} \hat{\mathcal{E}}(x),\ \ p \in T^d.$$

Оператор $V := \mathcal{F}\widehat{V}\mathcal{F}^{-1}$ есть интегральный оператор действущий по формуле

$$(Vf)(p) = \int\limits_{T^d} v(p-t) f(t) \eta(\mathrm{d}t),\ \ f \in L^2(T^d, \eta),$$

где $v(\cdot)$ является преобразованием Фурье функции $\hat{v}(\cdot)$, т.е.

$$v(p) = \left(\mathcal{F}\hat{v}\right)(p) = \sum_{x \in Z^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p,x)} \hat{v}(x).$$

Так как оператор возмущения $\widehat{V}$ является компактным из теоремы Вейля следует, что существенный спектр оператора $\widehat{H}_{\widehat{V}}$ совпадает с непрерывным спектром оператора $\widehat{H}_0$,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\widehat{H}_{\widehat{V}}) = \sigma(H_0) = [\mathcal{E}_{\min}, \mathcal{E}_{\max}].$$

где

$$\mathcal{E}_{\min} \equiv \min_{p \in T^d} \mathcal{E}(p), \quad \mathcal{E}_{\max} \equiv \max_{p \in T^d} \mathcal{E}(p).$$

**Условие 1.**

*1. Дисперсионное соотношение $\mathcal{E}(\cdot)$ является вещественно-аналитической четной функцией и имеет единственный невырожденный минимум в точке $p = 0 \in T^d$.*

*2. $\hat{v}$ является ненулевой функцией и существует $C, \alpha > 0$ такие, что $|\hat{v}(x)| \leq Ce^{-\alpha|x|}$, $x \in Z^d$.*

Следующий результат показывает, что оператор $\widehat{H}_{\widehat{V}}$ имеет собственные значения лежащие ниже существенного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(\widehat{H}_{\widehat{V}})$, когда некоторое значение потенциала $\hat{v}$ большое. Наличие собственных значений одно- двух- и трех-частичных операторов исследовались в [1-3]

**Теорема 1.** Пусть $d \geq 3$ и выполняется условие 1. Предположим, что для некоторого $s \in Z^d$ имеет место неравенство

$$|\hat{v}(s)| \int\limits_{T^d} \frac{\eta(\mathrm{d}p)}{\mathcal{E}(p) - \mathcal{E}_{\min}} > 1.$$

Тогда оператор $\widehat{H}_{\widehat{V}}$ имеет собственное значение $z_{\hat{v}}$ на полуоси $(-\infty, \mathcal{E}_{\min})$.

В следующей теореме утверждается наличие собственного значения, лежащего ниже существенного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(\widehat{H}_{\widehat{V}})$ оператора $\widehat{H}_{\widehat{V}}$, в случае когда *сумма значений потенциала* $\hat{v}$ большая.

**Теорема 2.** Пусть $d \geq 3$. Предположим, что выполняется условие 1. Пусть для некоторого $s \in Z^d$ выполняется неравенство

$$\sum_{x\in Z^d} |\hat{v}(x)| \Big| \int_{T^d} \frac{\cos(p, s-x)\eta(\mathrm{d}p)}{\sqrt{\mathcal{E}(p) - \mathcal{E}_{\min}}} \Big|^2 > 1,$$

то оператор $\widehat{H}_{\widehat{V}}$ имеет собственное значение $z_{\hat{v}}$ на полуоси $(-\infty, \mathcal{E}_{\min})$.

### Литературы


1. *S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov* The threshold effects for the two-particle hamiltonians on lattices, Commun. Math. Phys., № 262, 2006, 91–115.

2. *V. Bach, W. de Siqueira Pedra, S.N. Lakaev* Bounds on the discrete spectrum of lattice Schrödinger operators, J. Math. Phys., № 59:2, 2017, 022109.

2. *S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov* Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics, Ann. Henri Poincaré, № 5, 2004, 743–772.


# Рациональный базис дифференциального поля инвариантов n - мерной группы Гейзенберга


**Муминов К. К., Чилин В. И.**

*Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент*
*Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент*
m.muminov@rambler.ru, vladimirchil@gmail.com


**Введение**

Пусть $R^n$ $n$-мерное линейное векторное пространство над полем действительных чисел $R$, и пусть $G$ подгруппа группы $GL(n, R)$ всех обратимых линейных преобразований пространства $R^n$. Одна из центральных задач дифференциальной геометрии, относящихся к классификации кривых, формулируется следующим образом: Какие необходимые и достаточные условия обеспечивают $G$-эквивалентность кривых $\gamma$ и $\beta$, лежащих в $R^n$, т.е. дают равенство $\beta = g(\gamma)$ для некоторого $g \in G$. Для решения этой задачи в последние годы активно привлекаются методы теории дифференциальных инвариантов. С помощью методов этой теории в работах Дж.Х.Хаджиева, Р.Г.Арипова, К.К.Муминова и других получены эффективные критерии $G$-эквивалентности путей и кривых для действий ортогональных, симплектических и псевдоортогональных групп (изложение этих результатов см., например, в монографии [1]).

Центральным моментом в решении задач $G$-эквивалентности кривых является нахождение в явном виде конечного рационального базиса соответствующего поля всех дифференциальных рациональных функций, инвариантных относительно действия группы $G$. Например, в работе [3] был найден конечный рациональный базис дифференциального поля всех дифференциальных рациональных функций, инвариантных относительно действия группы Галилея $\Gamma(n; R)$ и специальной группы Галилея $S\Gamma(n; R)$. Используя этот базис, в работе [3] получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие $\Gamma(n;R)$-эквивалентность и $S\Gamma(n;R)$-эквивалентность путей, лежащих в пространстве $R^n$, снабженным галилеевой метрикой.

В настоящей заметке решается задача нахождения конечного рационального базиса дифференциального поля дифференциальных рациональных функций, инвариантных относительно действия $n$-мерной группы Гейзенберга $Nil(n,R) \subset GL(n,R)$.

**Предварительные сведения**

Каждый элемент из $R^n$ будем записывать как вектор-столбец $\vec{x} = \{x_i\}_{i=1}^n$, а группу $GL(n,R)$ будем отождествлять с группой всех обратимых действительных $n\times n$-матриц. Действие подгруппы $G$ группы $GL(n,R)$ в $R^n$ определятся как обычное умножение матрицы на вектор-столбец.

Выберем произвольный счетный набор $E_n = \{\vec{x}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ векторов $\vec{x}^{(m)} = \{x_i^{(m)}\}_{i=1}^n$ из $R^n$ и обозначим через $R\{E_n\}$ алгебру всех многочленов от переменных $x_i^{(m)}$, $i = 1,...,n$, $m = 0,1,...$ Положив $d\left(x_i^{(m)}\right) = x_i^{(m+1)}$, $i = 1,...,n$, $m = 0,\ 1,...$, и $d\,(\alpha) = 0$ при $\alpha \in R$, продолжим отображение $d$ до дифференцирования в алгебре $R\{E_n\}$, относительно которого $R\{E_n\}$ становится дифференциальным кольцом. Дифференцирование $d$ на дифференциальном кольце $R\{E_n\}$ единственным образом продолжается до дифференцирования на поле частных $R(E_n)$ для кольца $R\{E_n\}$, превращая $R(E_n)$ в дифференциальное поле ($d$-поле), которое обозначается через $R < E_n >$. Элементы $d$-поля $R < E_n >$ называют $d$-рациональными функциями и записываются в виде $f < \vec{x} >$.

Говорят, что $d$-рациональная функция $f < \vec{x} >$ является $G$ - инвариантной, если $f < g\vec{x} >= f < \vec{x} >$ для всех $g \in G$. Известно, что множество всех $G$-инвариантных $d$-рациональных функций, обозначаемое через $R < E_n >^G$, является дифференциальным подполем в $R < E_n >$.

Дифференциальное поле $R < E_n >^G$ называют *$d$-конечно порожденным*, если существует такая конечная система $d$-рациональных функций $f_1, \dots, f_m$ из $R < E_n >^G$, что для каждой $d$-рациональной функции $\varphi \in R < E_n >^G$ найдется $d$-рациональная функция $r_\varphi < \{x_1, \dots, x_m\} >$ из $R < E_m >$, что $r_\varphi < \{f_1, \dots, f_m\} >= \varphi$. В этом случае, говорят, что система $d$-рациональных функций $f_1, \dots, f_m$ является *$d$-рациональным базисом* $d$-поля $R < E_n >^G$, а элементы $f_1, \dots, f_m$ есть *$d$-образующие* $d$-поля $R < E_n >^G$.

Группа Гейзенберга $Nil(n,R)$ есть подгруппа в группе $GL(n,R)$, состоящая из всех матриц вида

$$g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GL(n,R), \text{ где } g_{ij} = 0 \text{ для всех } j < i,\ g_{ii} = 1,\ i = 1, \dots, n.$$

Если $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$ (единица стоит на $n$-ом месте), $i = 1, \dots, n$, стандартный базис в $R^n$, то $ge_1 = e_1$ для всех $g \in Nil(n,R)$. Кроме того, для $d$-многочлена $p_1 < \vec{x} >= x_n$ верно равенство

$$p_1 < g\vec{x} >= p_1 < \vec{x} > \quad \text{для всех} \quad g \in Nil(n,R),$$

т.е. многочлен $p_1 < \vec{x} >$ является $Nil(n,R)$-инвариантным. Рассмотрим следующие многочлены:

$$p_2 < \vec{x} >= \begin{vmatrix} x_2 & x_2^{(1)} \\ x_3 & x_3^{(1)} \end{vmatrix}; \qquad p_3 < \vec{x} >= \begin{vmatrix} x_1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \\ x_3 & x_3^{(1)} & x_3^{(2)} \end{vmatrix};$$

........................................................................

$$p_n < \vec{x} >= \left| \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \ldots & x_1^{(n-1)} \\ x_2 & & & & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \ldots & x_2^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ x_n & & & & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} \ldots & x_n^{(n-1)} \end{array} \right|.$$

**Основной результат**

Следующая теорема устанавливает явный вид одного из рациональных базисов дифференциального поля $R < E_n >^{Nil(n,R)}$ дифференциальных рациональных функций, инвариантных относительно действия $n$-мерной группы Гейзенберга $Nil(n,R)$.

**Теорема 1.** Конечный рациональный базис в дифференциальном поле $R < E_n >^{Nil(n,R)}$ образуют многочлены $p_1 < \vec{x} >,\ p_2 < \vec{x} >, \ldots, p_n < \vec{x} >$.

**Замечание.** Утверждение теоремы 1 для случая $n = 3$ установлено в заметке [2].

### Литература


1. *Муминов К.К., Чилин В.И.* Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах, LAP LAMBERT Academic Publishing, Deutschland (Германия), 2015.

2. *Муминов К.К., Чилин В.И.* Базис трансцендентности дифференциального поля инвариантов группы Гейзенберга, Тезисы докладов Республиканской научной конф. «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Ташкент, 15-17 декабря, 2017, с. 218–219.

3. *Chilin V., Muminov K.* Equivalence of paths in Galilean geometry, Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. (in Russian), vol. 144, 2018, pp. 3–16.


# О крайности трансляционно-инвариантной меры Гиббса для HC моделей на дереве Кэли порядка три


**Хакимов Р.М, Умирзакова К.О.**

*Наманганское отделение института математики*
*Наманганский государственный университет*
rustam-7102@rambler.ru, kamola-0983@mail.ru


Известно, что множество всех предельных мер Гиббса образует выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер (см. например, [1]) и каждая точка этого выпуклого множества однозначно разлагается по его крайним точкам, то особый интерес представляет описание всех крайних точек этого выпуклого множества, т. е. крайних мер Гиббса.

Данная работа посвящена изучению плодородных Hard-Core (HC) моделей с тремя состояниями и параметром активности $\lambda > 0$ на дереве Кэли порядка три. Известно [2], что существуют четыре типа таких моделей. Для двух из них найдены области (не) крайности единственной трансляционно-инвариантной меры Гиббса (ТИМГ). Кроме того, для одной из рассматриваемых моделей найдены условия, при которых крайняя мера не единственна.

Пусть $\Im^k = (V, L, i)-$ дерево Кэли порядка $k \geq 1$, где $V$ есть множество вершин $\Im^k$, $L-$ множество его ребер и $i-$ функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то $x$ и $y$ называются *ближайшими соседями вершины* и обозначаются через $l = \langle x, y\rangle$.

Для фиксированной $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \qquad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m, \qquad L_n = \{\langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\},$$

где $d(x, y)$ есть расстояние между вершинами $x$ и $y$ на дереве Кэли. Множество прямых потомков вершины $x$ обозначим через $S(x)$, т.е. если $x \in W_n$, то

$$S(x) = \{y_i \in W_{n+1} | d(x, y_i) = 1, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Пусть $\Phi = \{0, 1, 2\}$ и $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ есть конфигурация, т.е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$. Иными словами, в этой модели каждой вершине $x$ ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \Phi = \{0, 1, 2\}$. Значения $\sigma(x) = 1, 2$ означают, что вершина $x$ 'занята', а значение $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина $x$ 'вакантна'. Множество всех конфигураций на $V$ ($V_n$, $W_n$) обозначается через $\Omega$ ($\Omega_{V_n}$, $\Omega_{W_n}$).

Рассмотрим множество $\Phi$ как множество вершин некоторого графа $G$. С помощью графа $G$ определим $G$-допустимую конфигурацию следующим образом. Конфигурация $\sigma$ называется *$G$-допустимой конфигурацией* на дереве Кэли (в $V_n$ или $W_n$), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$-ребро графа $G$ для любой ближайшей пары соседей $x, y$ из $V$ (из $V_n$). Обозначим множество $G$-допустимых конфигураций через $\Omega^G$ ($\Omega^G_{V_n}$).

Множество активности [2] для графа $G$ есть функция $\lambda : G \to R_+$. Значение $\lambda_i$ функции $\lambda$ в вершине $i \in \{0, 1, 2\}$ называется ее "активностью".

Для данных $G$ и $\lambda$ определим гамильтониан HC-модели как

$$H^\lambda_G(\sigma) = \begin{cases} \sum\limits_{x\in V} \log \lambda_{\sigma(x)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega^G. \end{cases}$$

**Определение 1.** [2] Граф называется плодородным, если существует набор активности $\lambda$ такой, что соответствующий гамильтониан имеет не менее двух ТИМГ.

В этой работе мы рассмотрим случай $\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и изучим ТИМГ в случаях плодородных графов $G =$ *петля* и $G =$ *жезл*:

$$\begin{array}{ll} \textit{петля}: & \{0,0\}\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}; \\ \textit{жезл}: & \{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}. \end{array}$$

Для $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$ положим

$$\#\sigma_n = \sum_{x\in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$$

число занятых вершин в $\sigma_n$.

Пусть $z :\ x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in R^3_+$ векторнозначная функция на $V$. Для $n = 1, 2, \ldots$ и $\lambda > 0$ рассмотрим вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на $\Omega^G_{V_n}$, определяемую как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x\in W_n} z_{\sigma(x),x}. \tag{1}$$

Здесь $Z_n-$ нормирующий делитель:

$$Z_n = \sum_{\widetilde{\sigma}_n \in \Omega^H_{V_n}} \lambda^{\#\widetilde{\sigma}_n} \prod_{x \in W_n} z_{\widetilde{\sigma}(x),x}.$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если $\forall\ n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega^G_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n)\mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^G_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{2}$$

В этом случае существует единственная мера $\mu$ на $(\Omega^G, \mathbf{B})$ такая, что для всех $n$ и $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

где $\mathbf{B}-\sigma$-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами $\Omega^G$.

**Определение 2.** Мера $\mu$, определенная формулой (1) с условием согласованности (2), называется ($G$-)НС-*мерой Гиббса* с $\lambda > 0$, *соответствующей функции* $z : x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$.

Пусть $L(G)-$ множество ребер графа $G$, обозначим через $A \equiv A^G = \left(a_{ij}\right)_{i,j=0,1,2}$ матрицу смежности $G$, т.е.

$$a_{ij} \equiv a^G_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ \{i,j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если} \ \ \{i,j\} \notin L(G). \end{cases}$$

В следующей теореме сформулировано условие на $z_x$, гарантирующее согласованность меры $\mu^{(n)}$.

**Теорема 1.**[3] Вероятностные меры $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, заданные формулой (1), согласованны тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} z'_{1,x} &= \lambda \prod\nolimits_{y \in S(x)} \tfrac{a_{10}+a_{11}z'_{1,y}+a_{12}z'_{2,y}}{a_{00}+a_{01}z'_{1,y}+a_{02}z'_{2,y}}, \\ z'_{2,x} &= \lambda \prod\nolimits_{y \in S(x)} \tfrac{a_{20}+a_{21}z'_{1,y}+a_{22}z'_{2,y}}{a_{00}+a_{01}z'_{1,y}+a_{02}z'_{2,y}}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x}/z_{0,x}, \quad i = 1, 2.$

В (3) мы полагаем, что $z_{0,x} \equiv 1$ и $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0, i = 1, 2$. Тогда в силу теоремы 1 существует единственная $G$-НС-мера Гиббса $\mu$ тогда и только тогда, когда для любых функций $z : x \in V \longmapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$ выполняется равенство

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in Sx} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y}}, i = 1, 2. \tag{4}$$

Рассмотрим трансляционно-инвариантные решения, в которых $z_x = z \in R^2_+$, $x \neq x_0$.

**Случай** $G =$ ***петля***. В этом случае предполагая $z_x = z$, из (4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \left(\frac{1+z_1}{1+z_1+z_2}\right)^k, \\ z_2 = \lambda \left(\frac{1+z_2}{1+z_1+z_2}\right)^k. \end{cases} \tag{5}$$

Для ТИМГ в случае $G =$ *петля* известны следующие факты:

1. В случае $k = 2$ ($k = 3$) доказано, что при $\lambda \le \frac{9}{4}$ ($\lambda \le \frac{32}{27}$) существует ровно одна ТИМГ $\mu_0$, при $\lambda > \frac{9}{4}$ ($\lambda > \frac{32}{27}$) существуют ровно три ТИМГ $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ (см.[3,4]).

2. В случае $k > 3$ доказано, что при $\lambda \le \lambda_{cr}$ существует ровно одна ТИМГ, при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют не менее трех ТИМГ, где $\lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$ (см. [5]).

3. В случае $k = 2$ показано, что мера $\mu_0$ при $0 < \lambda < \lambda_0$ и меры $\mu_1, \mu_2$ при $\frac{9}{4} < \lambda < \frac{1}{2}(5\sqrt{2} - 1)$ являются крайними и мера $\mu_0$ при $\lambda > \lambda_0$ не является крайней, где $\lambda_0 \approx 7.0355$ (см. [5]).

Рассмотрим (5) при $k = 3$:

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \left(\frac{1+z_1}{1+z_1+z_2}\right)^3, \\ z_2 = \lambda \left(\frac{1+z_2}{1+z_1+z_2}\right)^3. \end{cases} \tag{6}$$

Известно [4], что единственной ТИМГ $\mu_0$ соответствует единственное решение уравнения

$$z = \lambda \left(\frac{1+z}{1+2z}\right)^3,$$

которое получается из (6) при $z_1 = z_2 = z$.

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Единственное положительное решение $(z, z)$ системы уравнений (6) при $\lambda > 0$ имеет следующий вид:

$$(z, z) = \begin{cases} (x_1^3, x_1^3), & \text{если } 0 < \lambda < \lambda^*, \\ (x^3, x^3), & \text{если } \lambda = \lambda^*, \\ (x_3^3, x_3^3), & \text{если } \lambda > \lambda^*, \end{cases}$$

где $\lambda^* \approx 32$, $x = x_1 = x_3$ и $x_1,\ x_3$ определены явными формулами.

Пусть $\mu_0-$ ТИМГ, соответствующая решению $(z, z)$.

Используя методы из [6] и [7], доказаны теоремы 2 и 3.

**Теорема 2.** Пусть $k = 3$. Тогда для НС-модели в случае $G =$ *петля* мера $\mu_0$ при $\lambda > \hat{\lambda}$ не является крайней и при $0 < \lambda < \hat{\lambda}$ является крайней, где $\hat{\lambda} \approx 0.8094705632$.

**Случай $G =$ *жезл*.** В этом случае предполагая $z_x = z$, из (4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \left(\frac{1+z_1}{z_1+z_2}\right)^k, \\ z_2 = \lambda \left(\frac{1+z_2}{z_1+z_2}\right)^k \end{cases} \tag{7}$$

Для ТИМГ в случае $G =$ *жезл* известны следующие факты:

1. В случае $k = 2$ ($k = 3$) доказано, что при $\lambda \le 1$ ($\lambda \le \frac{4}{27}$) существует ровно одна ТИМГ $\nu_0$, при $\lambda > 1$ ($\lambda > \frac{4}{27}$) существуют ровно три ТИМГ $\nu_0, \nu_1, \nu_2$ (см. [3,4]).

2. В случае $k > 3$ доказано, что при $\lambda \le \lambda_{cr}$ существует ровно одна ТИМГ, при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют не менее трех ТИМГ, где $\lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^k$ (см. [5]).

3. В случае $k = 2$ показано, что мера $\nu_0$ при $0 < \lambda < \lambda_0$ и меры $\nu_1, \nu_2$ при $1 < \lambda < \lambda_1$ являются крайними и мера $\nu_0$ при $\lambda > \lambda_0$ не является крайней, где $\lambda_0 \approx 2.287572$, $\lambda_1 \approx 1.303094$ (см. [5]).

Рассмотрим (7) при $k=3$:

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \left(\frac{1+z_1}{z_1+z_2}\right)^3, \\ z_2 = \lambda \left(\frac{1+z_2}{z_1+z_2}\right)^3. \end{cases} \tag{8}$$

Известно [4], что единственной ТИМГ $\nu_0$ соответствует единственное решение уравнения

$$z = \lambda \left(\frac{1+z}{2z}\right)^3,$$

которое получается из (8) при $z_1 = z_2 = z$.

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Единственное положительное решение системы уравнений (7) при $\lambda > 0$ имеет вид $(z,z) = (x^3, x^3)$, где

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2t_0(a)} + \frac{1}{2}\sqrt{-2t_0(a) + \frac{a^3}{64}\sqrt{\frac{2}{t_0(a)}} + \frac{3a^2}{16}} + \frac{a}{8},$$

$a = \sqrt[3]{\lambda}$ и

$$t_0(a) = \frac{1}{24}\sqrt[3]{-108a^3 + 12\sqrt{81a^6 + 6144a^3}} - \frac{4a}{\sqrt[3]{-108a^3 + 12\sqrt{81a^6 + 6144a^3}}} + \frac{1}{32}a^2.$$

Пусть $\nu_0$– ТИМГ, соответствующая решению $(z,z)$.

**Теорема 3.** Пусть $k=3$. Тогда для HC-модели в случае $G =$ *жезл* мера $\nu_0$ при $\lambda \in (\tilde{\lambda}, \check{\lambda})$ является крайней и при $\lambda \in (0, \tilde{\lambda}) \cup (\check{\lambda}, \infty)$ не является крайней, где $\tilde{\lambda} \approx 0.4421534328$ и $\check{\lambda} \approx 2.103133692$.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** Если $k=3$, то для HC модели в случае $G =$ *жезл* при $\tilde{\lambda} < \lambda < \check{\lambda}$ кроме $\nu_0$ существует по крайней мере еще одна крайняя мера Гиббса.

## Литература


1. *Rozikov U. A.* Gibbs measures on Cayley trees, World Scientific, 2013.

2. *Brightwell G., Winkler P.* Graph homomorphisms and phase transitions, J.Combin. Theory Ser.B., № 77, 1999, стр.221-262.

3. *Rozikov U. A., Shoyusupov Sh. A.* Fertile HC models with three states on a Cayley tree, Theor. Math. Phys., 156(3), 2008, p.1319-1330.

4. *Khakimov R. M.* Translation-invariant Gibbs measures for fertile three-state "Hard Core"models on a Cayley tree, Theor. Math. Phys., 183(3), 2015, p.441-449.

5. *Rozikov U. A., Khakimov R. M.* Gibbs measures for the fertile three-state hard core models on a Cayley tree, Queueing Systems. 81(1), 2015, p.49-69.

6. *Kesten H, Stigum B.P.* Additional limit theorem for indecomposable multidimensional Galton-Watson processes, Ann. Math. Statist., **37**, (1966), 1463–1481.

7. *Martinelli F., Sinclair A., Weitz D.* Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees, Random Structures and Algoritms, **31**, (2007), 134–172.

# Фазовый переход для модели hard-core Блюма-Капеля в случае "жезл"на дереве Кэли

**Хатамов Носиржон Муйдинович, Нишонбоев Жасурбек Патхиддин угли**

*Докторант институт математики АН РУз,*
*магистрант НамГУ*

e-mail nxatamov@mail.ru, jasurbeknishonboyev959@gmail.com

Мера Гиббса-это фундаментальный закон, определяющий вероятность микроскопического состояния данной физической системы и она играет важную роль в определении существования фазового перехода той или иной физической системы, т.к. каждой предельной мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы и происходит фазовый переход, когда мера Гиббса не единственна.

В этом статье изучена трансляционно-инвариантные меры Гиббса для динамической модели Блюма-Капеля на дереве Кэли. Это двумерный спиновая система, где одна переменная спин может принимать три значения:$-1, 0, +1$. Первоначально он был введен для изучения $He^3 - He^4$ фазовый переход [7]. Можно думать о ней как о системе частиц со спином. Значение $\sigma(x) = 0$ спина на узле решетки (или на узле дереве) $x$ будет соответствовать отсутствие частиц (вакансия), в то время как значения $\sigma(x) = +1, -1$ , будет соответствовать присутствии, при $x$, частицы со спином $+1, -1$ , соответственно [5-8].

Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ - бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, где $V$ есть множество вершин $\Gamma^k$, $L$ - его множество ребер. Пусть $i$ - функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины $x$ и $y$ называются *ближайшими соседями* и обозначаются через $\langle x, y\rangle$. Расстояние $d(x, y), x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$d(x, y) = \min\{d | \exists\ x = x_0, x_1, ..., x_{d-1}, x_d = y \in V$ такой, что $\langle x_0, x_1\rangle, ..., \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}$.

Известно, что дерево Кэли представляется как группа $G_k$ , являющаяся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ [3].

Рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 0, +1\}$. Тогда *конфигурация* $\sigma$ на $V$ определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через $\Omega_A$ пространство конфигураций, определенных на множестве $A$.

Рассмотрим граф с тремя вершинами $-1, 0, +1$ (на множестве значений $\sigma(x)$), которые имеет следующий вид [3,4]:

$$\textit{жезл:} \quad \{0, -1\}, \{0, +1\}, \{-1, -1\}, \{+1, +1\}$$

Гамильтониан модели Блюма-Капеля определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle, x,y \in V;} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \tag{1}$$

где $J \in R$.

Пусть $x^0 \in V$-фиксированная точка. Будем писать $x < y$, если путь от $x^0$ до $y$ проходит через $x$.

Обозначим:

$$W_n=\{x\in V: d(x^0,x)=n\},\ V_n=\{x\in V: d(x^0,x)\leq n\}.$$

Точка $y$ называется *"прямым потомком"* точки $x$ , если $x<y$ и $d(x,y)=1$.

Для $x\in G_k$ обозначим через $S(x)-$ множество *"прямых потомков"* точки $x\in V$.

Пусть $O=\{жезл\}$, $G\in O$. Конфигурация $\sigma$ называется $G$ *-допустимой конфигурацией* на дереве Кэли (в $V_n$ или $W_n$), если $\{\sigma(x),\sigma(y)\}$-ребро $G$ для любой ближайшей пары соседей $x,y$ из $V$ (из $V_n$). Обозначим множество $G$-допустимых конфигураций через $\Omega^G(\Omega^G_{V_n})$.

Пусть $h: x\mapsto h_x=(h_{-1,x},h_{0,x},h_{+1,x})$-вектор функция от $x\in V\setminus\{x^0\}$. Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на $\Omega_{V_n}$ :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n)=Z_n^{-1}exp\{-\beta H(\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}h_{\sigma(x),x}\},\tag{2}$$

где $\sigma_n\in\Omega^G_{V_n}, Z_n=\sum_{\overline{\sigma}_n\in\Omega^G_{V_n}}exp\{-\beta H(\overline{\sigma}_n)+\sum_{x\in W_n}h_{\overline{\sigma}(x),x}\}$ и $h_{\overline{\sigma},x}\in R$.

Говорят, что вероятностное распределение $\mu^{(n)}$, $(\forall n\geq 1)$ согласованно, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}}\mu^{(n)}(\sigma_{n-1},\sigma^{(n)})=\mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1})\tag{3}$$

для всех $n\geq 1$ и $\sigma_{n-1}\in\Omega^G_{V_{n-1}}$.

В этом случае существует единственная мера $\mu$ на $\Omega^G_V$, такая, что

$$\mu(\{\sigma\mid_{V_n}=\sigma_n\})=\mu^{(n)}(\sigma_n),$$

для всех $n\geq 1$ и $\sigma_n\in\Omega^G_{V_n}$.

Пусть $L(G)$-множество ребер графа $G$, обозначим через $A\equiv A^G=(a_{ij})_{i,j=-1,0,+1}$ матрицу смежности $G$, т.е.

$$a_{ij}\equiv a_{ij}^G=\left\{\begin{array}{ll}1, & \text{если } \{i,j\}\in L(G),\\ 0, & \text{если } \{i,j\}\notin L(G).\end{array}\right.$$

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия на $h_{i,x}$, при которых выполняется (3).

**ТЕОРЕМА 1.** *Пусть $k\geq 2$. Вероятностное распределение $\mu^{(n)}(\sigma_n), n=1,2,...$* в (2) *согласованно тогда и только тогда, когда для любого $x\in V$ имеют место следующие:*

$$\begin{cases} z_{+1,x}=\prod_{y\in S(x)}\frac{a_{+1,-1}\theta^4 z_{-1,y}+a_{+1,0}\theta+a_{+1,+1}z_{+1,y}}{a_{0,-1}\theta z_{-1,y}+a_{0,0}+a_{0,+1}\theta z_{+1,y}},\\ \\ z_{-1,x}=\prod_{y\in S(x)}\frac{a_{-1,-1}z_{-1,y}+a_{-1,0}\theta+a_{-1,+1}\theta^4 z_{+1,y}}{a_{0,-1}\theta z_{-1,y}+a_{0,0}+a_{0,+1}\theta z_{+1,y}},\end{cases}\tag{4}$$

*где $\theta=exp\{-J\beta\},\beta=1/T, z_{i,x}=exp(h_{i,x}-h_{0,x}),\ i=+1,-1$ .*

Трансляционно-инвариантные(ТИ) меры Гиббса соответствуют решениям (4) с $z_{i,x}=z_i$ при всех $x\in V$ и $i=-1,+1$. Для удобства, перепишим $z_{+1}=z_1, z_{-1}=z_2$ . Тогда (4) имеет вид

$$\begin{cases} z_1=(\frac{\theta+z_1}{\theta z_1+\theta z_2})^k,\\ \\ z_2=(\frac{\theta+z_2}{\theta z_1+\theta z_2})^k,\end{cases}\tag{5}$$

Пусть $z_1 = z_2 = z$. Тогда, из (5) получаем

$$z = (\frac{\theta + z}{2\theta z})^k. \tag{6}$$

**ТЕОРЕМА 2.** *Пусть $k \geq 2$. Для любого $\theta > 0$ уравнение (6) имеет только единственное решение.*

Вычитая из первого уравнения системы (5) второе, имеем

$$(z_1 - z_2)\left[1 - \frac{(\theta + z_1)^{k-1} + ... + (\theta + z_2)^{k-1}}{(\theta z_1 + \theta z_2)^k}\right] = 0. \tag{7}$$

Следовательно, $z_1 = z_2$ или

$$\theta^k (z_1 + z_2)^k = (\theta + z_1)^{k-1} + ... + (\theta + z_2)^{k-1}. \tag{8}$$

Для $z_1 = z_2 = z$ из теоремы 2 следует, что система (5) имеет единственное решение $(z^*, z^*)$.

Рассмотрим случай когда $k = 2$. В этом случае верна следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 3.** *Для модели (1) существует $\theta_{cr} = 1$ такое, что при $\theta \geq \theta_{cr}$ существует ровно одна ТИ мера Гиббса, при $0 < \theta < \theta_{cr}$ существуют ровно три ТИ меры Гиббса.*

Из этой теоремы видно что, для рассматриваемой модели при $0 < \theta < \theta_{cr}$ происходит фазовый переход.

### Литература.

1. **Синай Я.Г.** Теория фазовых переходов. Строгие результаты, Наука, М., 1980.
2. **Георги Х.-О.** Гиббсовские меры и фазовые переходы, Мир, М, 1992.
3. **Rozikov U. A.** Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore 2013.
4. **Brightwell G., Winkler P.** A second threshold for the hard-core model on a Bethe lattice, Random Structur. Algor., 2004, V.24, p.303-314.
5. **Xatamov N.M., Xakimov R.M.** Translation-invariant Gibbs measures for the Blume-Capel model on a Cayley tree. JMAG. 2019, Vol.15, No.2, pp.239-255.
6. **Xatamov N.M.** Translation-invariant extreme Gibbs measures for the Blume-Capel model with a wand on a Cayley tree. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, Vol 72, No. 4(2020), p.540-556.
7. **Cirillo E.N., Olivieri E.** Metastabilty and nucleation for the Blume-Capel model. Different mechanisms of transition. Journal of Statistical Physics, vol.83, 1996, p.473-554.
8. **Hryniv O., Kotecky R.** Surfase Tension and the Orustein-Zernike Behavior for the 2D Blume-Capel model.Journal of Statistical Physics, V.106, N.314, 2002.

# Сечения симплекса с гиперплоскостью

**Шодиев О., Сейтов Ш., Ганиходжаев Р.**

*Национальный университет Узбекистана,*

oybekshodiyev1993@gmail.com, sh-seytov@mail.ru, rganikhodzhaev@gmail.com

В менделевской алгебре с двумя аллелями $A$ и $a$ существуют три генотипа: доминантные $D=(AA)$, гетерозиготные $H=(Aa)$ и рецессивные $R=(aa)$. В достаточно большой паниктической популяции, если аллель $A$ встречается с вероятностью $p$, а аллель $a$ с вероятностью $q$, т.е. $p\geq 0,\ q\geq 0,\ p+q=1$, тогда для вероятностей $D$, $H$, $R$ имеем $D=p^2$, $H=2pq$, $R=q^2$. Согласно закону Кастло-Харди-Вайнберга в результате случайного скрещивания отношения частот генотипов $D:H:R$ в популяции в процессе эволюции не меняется.

Геометрически это означает, что пересечение равностороннего треугольника с некоторой прямой остается инвариантной относительно квадратичного отображения треугольника в себя. В данной работе изучается многомерный вариант задачи, а именно, какие многогранники могут возникнуть при пересечении симплексе с гиперплоскостью.

Пусть $S^{m-1}=\left\{x=(x_1,...,x_m)\in R^m:\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1,\ x_i\geq 0\right\}$ ; симплекс в $R^m$. Очевидно, $S^{m-1}$ – выпуклый многогранник в $R^m$ размерности $m-1$.

Пусть $\delta_{ij}=\begin{cases}1,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}$ – символ Кронеккера. Тогда $e_k=(\delta_{k1},...,\delta_{km})$ называется вершиной $S^{m-1}$.

Ясно, что $S^{m-1}$ имеет $m$ вершин.

Положим $I=\{1,...,m\}$ и для любого непустого $\alpha\subset I$ множество

$$\Gamma_\alpha = co\{e_i:\ i\in\alpha\}$$

называется $|\alpha|-1$ мерной гранью $S^{m-1}$, где $|\alpha|$ – количество элементов множества $\alpha$ и $co$ означает выпуклую оболочку. Характерной чертой симплексе является то что, отрезок соединяющий любые две вершины это одномерная грань, т.е. ребро симплекса $S^{m-1}$. Говорят, что гиперплоскость $L_0$ отделяет точки $x$ и $y$, если они лежат на различных открытых полупространствах $L_+$ и $L_-$.

Понятно, что в этом случае отрезок $[x,y]=\{\lambda x+(1-\lambda)\,y:\ 0\leq\lambda\leq 1\}$ имеет единственную общую точку с $L_0$. В этом случае отрезок назовем отмеченным.

Пусть плоскость $L_0$ размерности $m-2$ не проходит через вершины $S^{m-1}$ и разбивает множество вершин на две непустых класса. Далее вершину $e_k$ обозначим через $k$. Таким образом, $I=I_1\bigcup I_2$, $I_1\bigcap I_2=\emptyset$ и $I_1\neq\emptyset$, $I_2\neq\emptyset$.

В случае симплекса, без ограничения, можно считать, что $I_1=\{1,2,...,k\}$, $I_2=\{k+1,\ k+2,...,m\}$, где $1\leq k\leq m-1$.

**Определение 1.** Граф называется двудольным, если множество вершин графа можно разбить на два класса так, что только лишь две вершиныб, принадлежащие различным классам могут быт соединены ребром.

**Определение 2.** Двудольный граф называется полным, если любые две вершины принадлежащие различных классам соединены ребрах.

**Теорема 1.** Любое сечение $S^{m-1}$ (не проходящее через вершины) определяет двудольный граф, и обратно, произвольный двудольный граф соответствует некоторому сечению симплекса.

**Теорема 2.** Сечение симплекса $m-2$ мерной многогранник.

**Теорема 3.** Если $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2, 3, ..., m\}$, то в сечении получится $m-2$ мерный симплекса.

**Теорема 4.** Если $I_1 = \{1, ..., k\}$, $I_2 = \{k+1, ..., m\}$, то $S^{m-1}$ имеет ровно $k \cdot (m-k)-$ отмеченных ребер.

**Следствие.** В этом случае сечение представляет собой многогранник с $k \cdot (m-k)$ вершиннами.

**Теорема 5.** Сечение $S^{m-1}$ является многогранником, который есть выпуклая оболочка $(m-k)$ штук $k-1$ мерных симплексов.

### Литература


1. *A.D.Alexandrov* Convex polyhedra, Nauka, 2013..

2. *M.V.Shukin* The course of the lectures on analytical geometry and linear algebra, Minsk, 2007.

3. *A.P.Veselov E.V.Troisky* Lectures on analytical geometry, Moscow, 2002.

# Path. Бўлим. Раздел. 4

- **Applied and Computational Mathematics**

- **Амалий ва ҳисоблаш математикаси**

- **Прикладная и вычислительная математика**

# Julia set of Blaschke products

**Bekhmurodova S.F.**

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

sabinabekmurodova5@gmail.com

Let $X$ be a complex manifold and for simplicity we take $X = \hat{C}$ where $\hat{C}$ is extended complex plane $\hat{C} := C \cup \{\infty\}$. We denote by $Hol(\hat{C}, \hat{C})$ the set of holomorphic maps $f : \hat{C} \to \hat{C}$, we shall denote by $f^k = f \circ \cdots \circ f$ the $k$-th iterate of $f$.

In this paper we are interested in the one-dimensional Riemann sphere case.

Let us recall the following proposition that describing the structure of the holomorphic self-maps of $\hat{C}$. It is well known every non-constant $f \in Hol(\hat{C}, \hat{C})$ is rational function, that is the form $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, where $P(z)$and $Q(z)$ are polynomials without common factors, uniquely determined up to multiplicative constant.

Here an interesting question is a behavior of the iteration in a neighborhood of a given point $z$ in $\hat{C}$. Let us define the notion of Fatou and Julia set.

**Definition 1.** If $Y$ is a compact complex manifold, then a family $F \subset Hol(X, Y)$ is normal if and only if every sequence in $F$admits a subsequence converging to a map in $Hol(\hat{C}, \hat{C})$.

**Definition 2.** Given $f \in Hol(\hat{C}, \hat{C}$ we shall say that $z \in \hat{C}$ belongs to the Fatou set $F(f)$ of $f$ if there is a neighbourhood $U$ of $z$in $\hat{C}$ such that the sequence $\left\{ f^k\big|_U \right\} \subset Hol(U, \hat{C})$ is a normal family. The complement $J(f) = \hat{C} \backslash F(f)$ is the Julia set of $f$.

Roughly speaking, orbits in the Fatou set have regular behavior (in particular, nearby orbits have similar behavior), whereas orbits in the Julia set have chaotic behavior.

**Example.** We will concentrate dynamics of $f(z) = z^2$. It is easy to write the iterates of $f$:

$$\forall z \in \hat{C}\ ,\ f^k(z) = z^{2^k},$$

in particular, it is clear that $|z| < 1$ implies $f^k(z) \to 0$ as $k \to 0$ and $|z| > 1$ implies$f^k(z) \to \infty$ as $k \to +\infty$, it is not hard to see for two situations $\{f^k\}$ is normal family. For $|z| = 1$ points are chaotic so we can say the points are seen Julia's elements.

**Dynamics of Blaschke product.** A finite Blaschke product is a product of finitely many authomorphisms of the unit disk. A finite Blaschke product is a function of the form

$$B(z) = e^{i\alpha} z^m \prod_{k=1}^{n} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}$$

where $\alpha \in R$, $m \in N_0$, and $\{z_1, z_2, ...\}$ is a finite set in $D \backslash \{0\}$ and $D$is unit disk which is central zeros. Each finite Blaschke product is analytic on a neighborhood of the closed unit disk $\bar{D}$. Since they are products of authomorphisms of $D$, finite Blaschke products enjoy many fascinating properties:

(i) *Let $B$ be a finite Blaschke product of degree $n$ and let $w \in D$. Then $\tau_w \circ B$ and $B \circ \tau_w$ are finite Blaschke products of degree $n$, where $\tau_w = \frac{w-z}{1-\bar{w}z}$;*

(ii) *If $B_1$ and $B_2$ are finite Blaschke products, then $B_1 \circ B_2$ is a finite Blaschke product. Moreover, if $n_1$ and $n_2$ are the orders of $B_1$ and $B_2$, respectively, then order of $B_1 \circ B_2$ is $n_1 n_2$.*

We can do classification for a Blaschke product. This classification relies on the Denjoy-Wolff Theorem.

**Theorem (Denjoy-Wolff).** If $B$ is a non-trivial finite Blaschke product, then there exists a unique $z_0 \in \bar{D}$ such that $B^n(z) \to z_0$ for every $z \in D$. This point is called the Denjoy-Wolff point of $B$. From the previous theorem we have following properties:

(i) *$B$ is called elliptic if the Denjoy-Wolff point $z_0$ of $B$ lies in $D$. In this case, we must have $\left|B^{'}(z_0)\right| < 1$,*

(ii) *$B$ is hyperbolic if the Denjoy-Wolff point $z_0$of $B$ lies on $\partial D$ and $B^{'}(z_0) < 1$,*

(iii) *$B$ is parabolic if the Denjoy-Wolff point $z_0$ of $B$ lies on $\partial D$ and $B^{'}(z_0) = 1$.*

Now we study the dynamics of $B$ products. In particular for finite Blaschke products, it is not hard to see that the Julia set is always contained in $\partial D$ and is either the whole of $\partial D$ or a Cantor subset of$\partial D$. These two cases can be characterized as follows; for a discussion of this characterization:

(i) *if $B$ is elliptic, then $J(B) = \partial D$,*

(ii) *if $B$ is hyperbolic, then $J(B)$ is a Cantor subset of $D$,*

(iii) *if $B$ is parabolic and $z_0 \in \partial D$ is the Denjoy-Wolff point of $B$, then $J(B) = \partial D$, if $B^{''}(z_0) = 0$ and $J(B)$ is a Cantor subset of $\partial B$ if $B^{''}(z_0) \neq 0$,*

Below we will concentrate some properties of Blaschke product for $m \geq 2$,$n = 1$ and Blaschke product will have the following form:

$$B_w(z) = e^{i\alpha} z^m \frac{w - z}{1 - \bar{w}z},$$

Note that the Julia set of $B_w$ is $\{|z| = 1\}$. Recall that

$$L(w) = \int\limits_{|z|=1} \ln \left|B^{'}\right| |dz|$$

is called Lyopunov exponent of $B_w$.

Our main result is the following

**Theorem.** *If $B_w$ is a Blaschke product with $m \geq 2$, then $dd^c L(w) \geq 0$, $L(w)$ is subharmonic.*

## References.


1. *L. Carleson, T.* Gamelin, Complex dynamics, Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993

# Numerical integration formulas on a sphere

**A.R. Hayotov[1], B.I. Bozarov[1,2]**

*V.I.Romanovskiy Institute of mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan [1],*

*Fergana polytechnic institute, Fergana, Uzbekistan[2],*

e-mail: hayotov@mail.ru, b.bozarov@mail.ru

Integrals over a spherical surface can be brought into a standard form, namely, using spherical coordinates for an integral on the unit sphere $\mathbb{S}^2 = \{\xi | \xi \in \mathbb{R}^3, \quad |\xi| = 1\}$, we get

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\mathbb{S}^2 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)\sin\varphi d\varphi d\theta,$$

where $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ a smooth function.

Then denoting $F(\theta, \phi) = f(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ we have

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} F(\theta, \varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta. \tag{1}$$

In the present work we use the following methods to approximate the integral (1) depending on whether the function $F(\theta, \varphi)$ is periodic or non-periodic with respect to variables $\varphi$ and $\theta$.

1) Suppose that the function $F(\theta, \varphi)$ under the integral (1) is a periodic function of variables $\varphi$ and $\theta$. Then for numerical calculation of the integral (1) we use the weighted optimal quadrature formula constructed in [2,3] with respect to $\varphi$ and the rectangle quadrature formula with respect to $\theta$ [4].

2) Let the function $F(\theta, \varphi)$ in expression (1) be non-periodic with respect to $\varphi$ and be periodic with respect to $\theta$. Then we use the optimal quadrature formula with sine weight function constructed in the work [5]. And we apply the rectangle quadrature formula with respect to $\theta$ [4].

3) For the function $F(\theta, \varphi)$ which is not a periodic with respect to $\varphi$ and $\theta$ we use the weighted optimal quadrature formula constructed in [6] with respect to $\varphi$ and $\theta$.

So in this work, we construct three different types of cubature formulas.

## References

1. *Atkinson K., Han W.* Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: An introduction. Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012, 246 p.

2. *Shadimetov Kh. M.* Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces, Tashkent, Fan va texnologiya, 2019, 224 p.

3. *Shadimetov Kh. M.* Weighted optimal quadrature formulas in a periodic Sobolev space. Uzbek mathematical journal. - Tashkent, 1998, No 2, 76-86.

4. *Nikol'skii S.M.* Quadrature formulas. Moscow, Nauka, 1979, 256 p.

5. *Bozarov B.I.* An optimal quadrature formula with $\sin x$ weight function in the Sobolev space. Uzbek Mathematical Journal, No.4, 2019, 47 - 53.

6. *Shadimetov Kh. M.* Weighted optimal quadrature formulas. Questions of computational and applied mathematics. - Tashkent, 1978, 51, 169-177.

# Calculation of the coefficients of optimal quadrature formulas in space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$


**Kuldoshev H., Azamov S.**

*Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad Al-Khwarizmi, Tashkent, Uzbekistan.*
*Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.*
e-mail hakimkhm1971@mail.ru, e-mail azamovs@mail.ru


We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta) \tag{1}$$

with the error functional

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta) \tag{2}$$

where $C_\beta$ are the coefficients and $x_\beta$ are the nodes of formula (1), $x_\beta \in [0,1]$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the indicator of the interval $[0,1]$, $\delta(x)$ is Dirac's delta-function, function $f(x)$ belongs to Hilbert space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)$. The norm of functions in this space is defined by the following equality

$$\|f(x)|W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)\| = \left\{ \int_0^1 \left(f''(x) + \sigma f'(x)\right)^2 dx \right\}^{1/2}, \text{ where } \sigma > 0. \tag{3}$$

The error of the quadrature formula (1) is difference

$$(\ell, f) = \int_0^1 f(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta) = \int_{\infty}^{\infty} \ell(x) f(x)dx. \tag{4}$$

The error of the formula (1) defines a linear functional in $W_{2,\sigma}^{(2,1)*}(0,1)$, where $W_{2,\sigma}^{(2,1)*}(0,1)$ is the conjugate space to the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)$.

By Cauchy-Schwartz inequality

$$|(\ell(x), f(x))| \le \|f(x)|W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)\| \cdot \|\ell(x)|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}(0,1)\|$$

the error (4) of formula (1) is estimated with the help of the norm

$$\|\ell|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}\| = \sup_{\|f|W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)\|=1} |(\ell, f)|.$$

of the error functional (2). Consequently, estimation of the error of the quadrature formula (1) on functions of the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)$ is reduced to finding the norm of the error functional $\ell(x)$ in the conjugate space $W_{2,\sigma}^{(2,1)*}(0,1)$.

It should be noted that in the works [1,2] using the $f-$ function method, investigated the problem of construction of optimal quadrature formulas in the sense of Sard which are exact for solutions of linear differential equations and several examples given for some number of the nodes.

The main aim of the present paper is to solve the Sard problem in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)$ using S.L.Sobolev's method [3,4] for any number $N+1$ of the nodes $x_\beta$, i.e. finding the coefficients $C_\beta$ satisfying the following equality

$$\|\overset{\circ}{\ell}|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}\| = \inf_{C_\beta} \|\ell|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}\|. \tag{5}$$

Thus, in order to construct the optimal quadrature formula in the sense of Sard in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)$ we need consequently to solve the following problems.

**Problem 1.** *Find the norm of the error functional $\ell(x)$ of quadrature formulas (1) in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)$.*

**Problem 2.** *Find the coefficients $C_\beta$ which satisfy equality (5) when the nodes $x_\beta$ are fixed.*

In the explicit formulas for the coefficients of optimal quadrature formula of the form (1) are found, i.e. the problem 2 is solved;

**Theorem.** The coefficients of optimal quadrature formulas in the sense of Sard of the form (1) in the space $W_{2,\sigma}^{(2.1)}$ have the following form

$$C_\beta = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma} + \dfrac{h}{1-e^{\sigma h}} - M(h)(\lambda_1^N - \lambda_1), & \beta = 0, \\ h + M(h)\left((\lambda_1 - e^{\sigma h})\lambda_1^\beta + (\lambda_1 e^{\sigma h} - 1)\lambda_1^{N-\beta}\right), & \beta = \overline{1, N-1}, \\ -\dfrac{1}{\sigma} + h\dfrac{e^{\sigma h}}{e^{\sigma h}-1} - M(h)(\lambda_1^N - \lambda_1)e^{\sigma h}, & \beta = N, \end{cases}$$

where

$$M(h) = \frac{\left[\sigma h(e^{\sigma h}+1) + 2(1-e^{\sigma h})\right](\lambda_1 - 1)}{2\sigma(e^{\sigma h}-1)\left[\lambda_1(e^{\sigma h}-1) - \lambda_1^{N+1}(e^{\sigma h}+1) + 2\lambda_1^N\right]},$$

here $|\lambda_1| < 1$.

## References


1. *A.Ghizzetti, A.Ossicini.* Quadrature Formulae.Berlin. Akademie Verlag, 1970.

2. *F. Lanzara* On Optimal Quadrature Formulae. J. of Inequality & Appl. volume-5, pages 201-225, year 2000.

3. *S.L.Sobolev.* Introduction to the theory of cubature formulas. -M.:Nauka (in Russian), 1974, 808 p.

4. *Kh.M.Shadimetov, A.R.Hayotov.* Computation the coefficients of optimal quadrature formulas in the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Uzbek Math. Journal. 2004, No3. p. 67-82.

# Computational technology for constructing an approximate solution of differential equations and improving the quality of difference schemes based on moving nodes

**Rasulov A., Dalabaev U.**

*University of Word economy and Diplomacy*
asrasulov@gmail.com, udalabaev@mail.ru

**Introduction.** The problems of convection-diffusion are basic in modelling the problems of hydrodynamics and heat and mass transfer. In connection with the extensive application of convective-diffusion transport processes, due attention is being paid to the numerical solution of differential equations describing them (2-9).

In the numerical solution of convection-diffusion transport equations, the main attention is paid to the approximation of convective terms. Discretization of convective terms of convective-diffusion transport equations has a decisive influence on the property of discrete equations. Widely used upwind schemes, hybrid schemes, upwind schemes of a high order. The main disadvantage of classical second-order approximation schemes using central differences is associated with stability violation (3-5)

Starting with the work of Leonard (7), in order to improve the results of the numerical solution, attempts were made to improve the algorithm (8), which are built in a five-point pattern.

In all of the above schemes (except upwind scheme), the conditions of boundedness and non-negativity of the coefficients are violated.

In (8,9) the method of moving nodes (MMN) was introduced to obtain an approximate analytical solution and construct compact schemes for a one-dimensional convective-diffusion problem. It is proposed to improve the scheme in a three-point pattern. As an initial scheme, a counterflow with one-sided differences is taken. Here we use the solution obtained by the upwind scheme based on MMN.

**The influence of the choice of interpolation profile on the quality of the scheme.**

Here we give some classic schemes, as well as its improvement on the basis of MMN.

We analyze discretization schemes using a simple transfer example.

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{Pe}\frac{d^2\Phi}{dx^2} + S(x) \tag{1}$$

Here the unknown $\Phi$ function, $S(x)$ the source, $Pe$ is the Peclet number. The equation is considered under the corresponding boundary conditions. We integrate equation (1) over the control volume.

$$\Phi_e - \Phi_w = \frac{1}{Pe}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_e - \frac{1}{Pe}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_w + \int_w^e S(x)dx \tag{2}$$

Replacing the derivatives with difference relations, we have

$$\Phi_e - \Phi_w = \frac{1}{Pe}\frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - \frac{1}{Pe}\frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W} + (x_e - x_w)\, f_P \tag{3}$$

Here $f_P = \frac{1}{x_e - x_w}\int_w^e S(x)dx$ . Depending on the type of function profile on the control volume, various schemes are obtained.

**Upwind scheme.**

Let the profile be piecewise constant in each control volume. Then assuming $\Phi_e = \Phi_P$, $\Phi_w = \Phi_W$ we have a upwind scheme:

$$\Phi_P - \Phi_W = \frac{1}{Pe}\frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - \frac{1}{Pe}\frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W} + (x_e - x_w)\, f_P \tag{4}$$

**Central difference scheme.**

If the profile is linear between the nodes and the faces of the control volume are located in the middle between the nodal points $\Phi_e = (\Phi_E + \Phi_P)/2$, $\Phi_w = (\Phi_P + \Phi_W)/2$, we have a diagram with central differences.

**Power Law scheme.**

This scheme is obtained if we take a profile close to the analytical solution (1) for $S(x) = 0$. For a uniform step, this scheme has the form.

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + hf_P \tag{5}$$

where $a_W = (1 - 0,1Rh)^5 + Rh,\ a_E = (1 - 0,1Rh)^5$ , $a_P = a_W + a_E,\ Rh = h\, Pe$

**Upstream-Based Improvements.**

To improve the accuracy order of many schemes, the authors recommended various schemes [4-6,7]. All of these schemes are multipoint (more than three). A method for improving three-point nodes is provided here.

Applying schemes of type (4) for nodes $(x_W,\ x_w, x_P)$ and $(x_P,\ x_e, x_E)$ and we determine $\Phi_e$ and $\Phi_w$ with their help. The resulting expressions are used in (2). As a result, for a uniform step, we have

$$\begin{gathered}\left[\tfrac{Rh^2}{4+Rh} + 2\right]\Phi_P = \left[1 + \tfrac{(2+Rh)Rh}{4+Rh}\right]\Phi_W + \left[1 - \tfrac{2Rh}{4+Rh}\right]\Phi_E + \\ h\, Rhf_P - \tfrac{h\cdot Rh^2}{2(4+Rh)}\left(f_e - f_w\right).\end{gathered} \tag{6}$$

$Rh < 4$ conditions are ensured by positive coefficients and stability of the scheme (6).

**Improvement of the scheme using MMN.**

Using moved nodes, you can improve the quality of the scheme. We demonstrate this method based on the upwind scheme (3), writing as

$$\frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W} = \frac{2}{Pe\,(x_E - x_W)}\left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - \frac{\Phi - \Phi_W}{x_P - x_W}\right) + S(x_P). \tag{7}$$

We write a scheme of type (7) for the segment $(x_W, x_P)$, taking an arbitrary point $x \in (x_W, x_P)$. We pass to the limit at $x \to x_P$, considering the existence of the limit, we have

$$\frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W} = \frac{2}{Pe\,(x_P - x_W)}\left(\frac{d\Phi_P^-}{dx_P} - \frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W}\right) + S(x_P).$$

Here $d\Phi_P^-/dx_P$ is the left-side derivative of an unknown function $x \to x_P$ at a point $x_P$

Similarly, taking an arbitrary point $x \in (x_P, x_E)$ and going to the limit $x \to x_P$, we can get $d\Phi_P^+/dx_P$

Equating the flows $d\Phi^+/dx = d\Phi^-/dx$, we get an improved scheme:

$$c_P\Phi_P = a_P\Phi_W + b_P\Phi_E + d_PS(x_P). \tag{8}$$

Таблица 4.1: Comparison difference schemes.

| $Pe$ | $Rh$ | $\max\lvert u-u_1\rvert$ | $\max\lvert u-u_2\rvert$ | $\max\lvert u-u_3\rvert$ | $\max\lvert u-u_4\rvert$ | $\max\lvert u-u_5\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 10 | 0,0526 | 0,03770 | 0,1801 | 0,03701 | 0,00077 |
| 1000 | 100 | 0,0470 | 0,0464 | 0,0273 | 0,01607 | 0,00927 |

where $a_P = \frac{2+Pe(x_P-x_W)}{(x_P-x_W)}$, $\quad b_P = \frac{2}{[2+Pe(x_E-x_P)](x_E-x_P)}$, $\quad c_P = a_P + b_P$, $d_P = \frac{Pe(x_E-x_P)}{2+Pe(x_E-x_P)} + \frac{Pe(x_P-x_W)}{2}$.

In (2), we use the profile obtained on the basis of (8). Acting in a similar way as in the derivation of (7), for a uniform step we obtain the following scheme:

$$\begin{gathered}\left[\frac{(4+Rh)^2-16}{(4+Rh)^2+16}\right]\Phi_P = \left[\frac{1}{Rh} - \frac{16}{(4+Rh)^2+16}\right]\Phi_E + \left[\frac{(4+Rh)^2}{(4+Rh)^2+16} + \frac{1}{Rh}\right]\Phi_W + \\ hS(P) + \frac{h(8Rh+8Rh^2)}{2[(4+Rh)^2+16]}\cdot\left(S(x_w)-S(x_e)\right).\end{gathered} \tag{9}$$

**Numerical experiments.**

**Model problem 1.**

Consider the equation $\frac{du}{dx} = \frac{1}{Pe}\frac{d^2u}{dx^2} + \sin \pi x$. with boundary conditions $u(0) = u(1) = 0$. Table 1 shows the maximum absolute differences of the schemes calculated at the nodal points ($u$- the exact solution to the problem, $u_1$- the solution obtained according to the scheme against the flow, $u_2$ - according to the power law, $u_3$ - according to the Leonard scheme, $u_4$ according to (6) and $u_5$ - according to the scheme (9).

**Model problem 2.**

Consider the equation $\frac{du}{dx} = \frac{1}{Pe}\frac{d^2u}{dx^2} + s(x)$, with boundary conditions $u(0) = 0, \;\; u(1) = 1$, with source

$$s(x) = \begin{cases} 10-50x, & 0 \le x \le 0.3, \\ 50x-20, & 0.3 < x \le 0.4 \\ 0, & 0.4 < x \le 1 \end{cases}$$

Fig. 1 a) shows that, scheme (9) gives the best results. Leonard's scheme gives an incorrect solution near the right border. Scheme (6) also exhibits a slight non-monotony. This is due to the fact that scheme (6) is stable at $Rh < 4$.

Fig. 1 b) shows that for large Peclet grid numbers, the upstream and Patancar schemes give similar results. Scheme (9) gives the best results. The solid line in fig.1 and fig.2 is the exact solution, the circle is the upwind scheme, the solid circle is the Patancar scheme, the asterisk is the Leonard scheme, plus is the scheme (6), the box is according to (9)

**Conclusion.**

The proposed schemes were applied to test problems. For comparison, various schemes were used: the upwind scheme, the Patancar scheme, QUICK, VONOS [7]. The calculation results, for various grid Peclet numbers, showed the grid convergence of the approximate solution. The proposed schemes have demonstrated an advantage over other schemes.

Thus, the proposed schemes allow one to obtain better numerical results. MMN can also be successfully applied for the approximate solution of applied problems.

## References


1. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic interpolation. B.P. Leonard B.P., Comp. methods appl. mech. 1979. Vol. 19. P.-59-98,(1979)

2. *Darwish, M.S.* A Comparison of six high resolution schemes formulated using the NVF methodology. M.S. Darwish 33rd Science week, alleppo, Syria. (1993)

3. *Leonard, B.P.* The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection. Leonard B.P., Comp. methods applied mech. eng. Vol. 88.P.- 17-74. (1991)

4. *Ferreira V.G. , de Queiroz R.A.B. , Lima G.A.B. , Cuenca R.G., Oishi C.M., Azevedo J.L.F., McKee S.* A bounded upwinding scheme for computing convection-dominated transport problems. Computers&Fluids 57 208–224 (2012)

5. *Il'in A.M.* Raznostnaya skhema dlya differentsial'nogo uravneniya s malym parametrom pri starshey proizvodnoy. — Matemat. Zametki, 1969, t. 6, 2, s. 237-248, (1969)

6. *Zverev V. G., Gol'den V. D.* Raznostnaya skhema dlya resheniya konvektivno-diffuzionnykh zadach teplomassoobmena.Vychislitel'nyye tekhnologii. T. 7, 16, 2002, s . 24-37, (2002)

7. *Varonos A., Bergeles G.,* Development and assessment of a Variable-Order Non-oscillatory Scheme for convection term discretization, International Journal for Numerical Methods in Fluids. 26, N 1. 1-16 (1998)

8. *Dalabaev U.* Difference -analytical method of the one-dimensional convection-diffusion equation, IJISET - International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology, Vol. 3 Issue 1, January 2016, ISSN 2348 – 7968, 234-239 (2016)

9. *Dalabaev U.* Computing Technology of a Method of Control Volume for obtaining of the Approximate Analytical Solution one-dimensional Convection-diffusion Problems. Open Access Library Journal, 5: 1104962. https://doi.org/10.4236/oalib.1104962, (2018)

# Тугун нуқталарига боғлиқ бўлмаган сплайн модели асосида биомедицина сигналларига рақамли ишлов бериш

**Бахромов С.А.**

*Ўзбекистон Миллий Университети*

baxromovsayfiddin@gmail.com

Сигналларга рақамли ишлов бериш бугунги куннинг ривожланиб бораётган долзарб соҳаларидан бири ҳисобланади. Сигналларга рақамли ишлов беришда математик аппаратларни тўғри танлаш соҳа мутахассисларининг тўғри қарор қабул қилиш аниқлигини юқори бўлишлигига олиб келади. Мисол сифатида айтишимиз мумкинки тиббиёт соҳаларида аниқлик жуда мухим ҳисобланади. Тиббиётда шифохонага оғир ҳолатда олиб келинган беморнинг айни дамдаги ҳолатини аниқлаш, касаллик турини аниқлаш, касаллик даражасини белгилаш каби жараёнларда аниқлик муҳим рўл ўйнайди (1-3).

Ушбу мақолада қурилишида интерполяция шарти талаб қилинмайдиган, базис функциялар асосида танлаб олинган локал кубик сплайнлар ёрдамида функцияларни яқинлаштириш жараёнлари амалга оширилди. Яна шуни айтишимиз мумкинки кубик сплайн моделлари сигналларга рақамли ишлов беришда яхши натижалар беради, бу эса сигналларни рақамли ишлаш натижасида мутахасисларнинг тўғри қарор қабул қилишини таъминлайди. Мисол тариқасида ЭКГ сигналининг дастлабки қийматлари асосида математик модел қурилди ва сигналларга рақамли ишлов берилди ва хатолик натижалари олинди.

Ушбу муаммони ҳал қилиш мақсадида мақолада аниқлиги юқори ҳисобланган сплайн модел орқали сигналларни рақамли ишлаш жараёни амалга оширилди. Дастлаб ушбу ишда қаралаётган моделни умумий кўриниши қуйидагича

$$S(x) = \sum_{j=1}^{4} \psi_j(t) f_{i-2+j}$$

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3 \\ \psi_2(t) = \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4) \\ \psi_3(t) = \frac{1}{6}(1 + 3t + 3t^2 + 3t^3) \\ \psi_4(t) = \frac{1}{6}t^3 \end{cases}$$

$$t = (x - x_i)/h, h = x_{i+1} - x_i,\ x \in [x_i, x_{i+1}], t \in [0,\ 1]$$

берилган. Ушбу ишда қаралаётган моделнинг яқинлашиш даражасини ошиши тенгламалар системасининг тартибини ошишига боғлиқ бўлмайди (1-2).

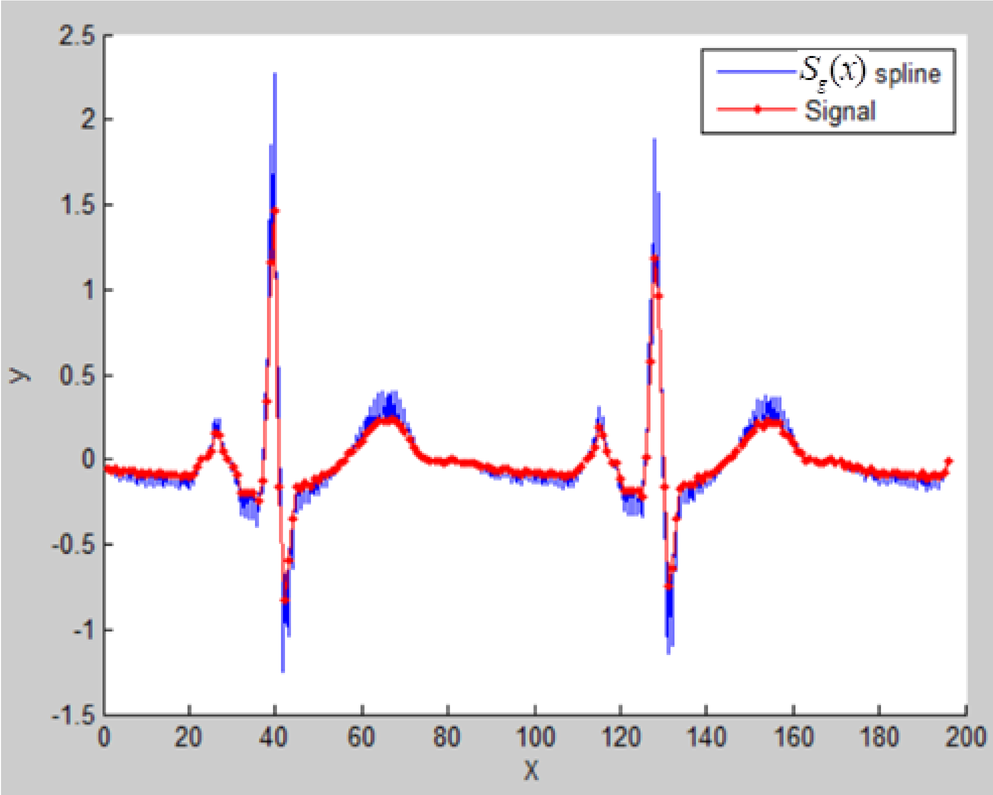
### Ушбу ишда қаралган алгоритмлар асосида сигналларни рақамли ишлаш

Ушбу ишда қаралган кубик сплайн модел орқали 1-жадвалда келтирилган ЭКГ сигнални тиклаш кўриб чиқилди. Юқоридаги кетма-кетлик асосида MATLAB дастури муҳитида учинчи даражали сплайн модел дастури ишлаб чиқилди ва сигналга ишлов беришда қўлланилди.

ЭКГ сигналнинг қийматлари. 1-жадвал.

| № | Вақт, секунд | Амплитуда | № | Вақт, секунд | Амплитуда |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 1 | -0,060 | 14. | 14 | -0,095 |
| 2. | 2 | -0,065 | 15. | 15 | -0,085 |
| 3. | 3 | -0,060 | 16. | 16 | -0,090 |
| 4. | 4 | -0,075 | 17. | 17 | -0,090 |
| 5. | 5 | -0,065 | 18. | 18 | -0,100 |
| 6. | 6 | -0,070 | 19. | 19 | -0,085 |
| 7. | 7 | -0,070 | 20. | 20 | -0,105 |
| 8. | 8 | -0,090 | 21. | 21 | -0,090 |
| 9. | 9 | -0,080 | 22. | 22 | -0,045 |
| 10. | 10 | -0,095 | 23. | 23 | 0,005 |
| 11. | 11 | -0,080 | 24. | 24 | 0,015 |
| 12. | 12 | -0,095 | 25. | 25 | 0,045 |
| 13. | 13 | -0,080 | 26. | 26 | 0,155 |

ЭКГ сигнални рақамли ишлаш жараёнидаги хатолик натижалари.




ЭКГ сигнални тиклаш натижаси.

| $x_i$ | $f(x)$ | $S_g(x)$ | $\|S_g(x)-f(x)\|$ | $x_i$ | $f(x)$ | $S_g(x)$ | $\|S_g(x)-f(x)\|$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | -0,0650 | -0,0633 | 0,0017 | 3 | -0,0600 | -0,0633 | 0,0033 |
| 2.1 | -0,0645 | -0,0633 | 0,0012 | 3.1 | -0,0615 | -0,064 | 0,0025 |
| 2.2 | -0,0640 | -0,0637 | 0,0003 | 3.2 | -0,0630 | -0,0653 | 0,0023 |
| 2.3 | -0,0635 | -0,0646 | 0,0011 | 3.3 | -0,0645 | -0,0676 | 0,0031 |
| 2.4 | -0,0630 | -0,0667 | 0,0037 | 3.4 | -0,0660 | -0,0713 | 0,0053 |
| 2.5 | -0,0625 | -0,0702 | 0,0077 | 3.5 | -0,0675 | -0,0768 | 0,0093 |
| 2.6 | -0,0620 | -0,0756 | 0,0136 | 3.6 | -0,0690 | -0,0845 | 0,0155 |
| 2.7 | -0,0615 | -0,0832 | 0,0217 | 3.7 | -0,0705 | -0,0949 | 0,0244 |
| 2.8 | -0,0610 | -0,0934 | 0,0324 | 3.8 | -0,0720 | -0,1083 | 0,0363 |
| 2.9 | -0,0605 | -0,1067 | 0,0462 | 3.9 | -0,0735 | -0,1251 | 0,0516 |
| MAX | | | | | | | 0,0516 |

**Адабиётлар.**


1. *Zaynidinov H.N.,Bakhromov S.A., Azimov B.R, Sadritdinov N.H.* Non-Dependent

Cubic Spline Function and Its use in Digital Processing of Signs.ISSN 1815-4840, E-ISSN 2181-1105. Chemical technology Control and Management 2020, № 5-6 p. (95-96) .Internationalscientific and technical journal. P. 89-94.

2. *Zaynidinov H.,Bakhromov S.,Azimov B., Makhmudjanov S.* Comparative Analysis Spline Methods in Digital Processing of Signals. Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal Vol. 5, №. 6, p.1499-1510.

3. *Singh D., Singh M., Hakimjon Z.,* Parabolic Splines based One-Dimensional Polynomial. In SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology (pp. 1–11). Springer Verlag. (2019).https://doi.org/10.1007/978-981-13-2239-6_1.

# Kompakt to'plamda parallel va konsentrik aylanalar bo'ylab quvish masalalarining sonli tahlili

**Zunnunov A.O**

*Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston;*

zizu.zunnunov@gmail.com

Differensial o'yinlarga juda ko'p tadqiqotchilarning ishlari bag'ishlangan [1-11]. Differensial o'yinlar nazariyasini rivojlanishiga R.Rado tomonidan taqdim etilgan "Sher va odam" nomli masalasining o'rni beqiyos. Bu masala taqdim etilgandan so'ng juda ko'plab tadqiqotchilar differensial o'yinlar nazariyasi bilan shug'ullana boshladilar va o'z ishlarini ommaga taqdim etdilar. Masalan [6] ishda kompaktda sodda quvish-qochish masalasi o'rganilgan. Unda quvuvchilar soni fazo o'lchovi $n$ dan bitta kam, $n-1$ ta bo'lsa qochuvchi quvuvvchilardan kompaktdan chiqib ketmasdan istalgancha vaqt qochib yura olishi, agar quvuvchilar soni $n$ ta bo'lsa ular qochuvchini ustma-ust tushish ma'nosida ushlab olishi isbotlangan. $n=2$ bo'lgan holda bu Rado masalasidir. Biz ushbu ishda R.Rado tomonidan qo'yilgan masalani $l$-tutish ma'nosida e'tiboringizga havola qilmoqdamiz. Ya'ni ishda doirada bitta qochuvchi va bitta quvuvchi ishtirokidagi quvish masalasi o'rganildi. Biz ushbu holda $l$- tutish ma'nosida quvuvchi o'yinni turli strategiyalardan foydalangan holda ham chekli vaqtda yakunlay olishini va shu bilan birga ushbu strategiyalar qo'llanilganda o'yinni yakunlash vaqti uchun yuqoridan olingan bahoning samaradorligining tahlili bilan shug'ullanamiz.

Tekislikda $r$ – radiusli $K_{kr}$ doirada bitta qochuvchi - $x_0$ va bitta quvuvchi - $x_1$ ob'yektlardan iborat "quvish-qochish" masalasini qaraylik. Ularning harakati quyidagicha sodda differensial tenglamalar bilan berilgan bo'lsin

$$[\dot{x_0} = u_0,\ x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix},\ u_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{pmatrix};\ \ \dot{x}_1 = u_1, x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix},\ \ u_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Bu yerda $u_0$ va $u_1$ lar boshqariluvchi parametrlar bo'lib, $u_0-$qochuvchi, $u_1-$quvuvchi ob'yektlarini boshqaruv parametrlari va ular $u_0 \equiv u_0(t),\ \ u_1 \equiv u_1(t)$ - o'lchovli funksiya ko'rinishida tanlanadi. Ularning qiymatlari deyarli barcha $t \geq 0$ larda quyidagi cheklovlarni qanoatlantiradi

$$||u_0|| \leq 1,\ \ ||u_1|| \leq 1 \tag{2}$$

Bu yerda $||z|| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$ - $z \in R^2$ dagi oddiy norma, $\langle z, z\rangle$ - skalyar ko'paytma.

$x_1$ nuqta $r$-radiusli $K_{kr}$ doirada $x_0$ nuqtani quvlamoqda. Agar qandaydir chekli vaqt mobaynida ushbu $\|x_1(T) - x_0(T)\| \leq l, \quad l > 0$ (bu yerda $l$ oldindan berilgan musbat son) shart bajarilsa, quvish nihoyasiga yetgan hisoblanadi. Quvuvchi- $x_1$ o'z boshqaruvi yordamida tezroq $\|x_1(T)-x_0(T)\| \leq l$ shart bajarilishini ta'minlashga harakat qiladi, qochuvchi- $x_0$ esa o'z boshqaruvi yordamida iloji boricha ko'proq vaqt ushbu shart bajarilmasligini ta'minlashga harakat qiladi.

Agar $r$-radiusli $K_{kr}$ doirada $x_1$ nuqta $x_0$ nuqtani tutish maqsadida parallel quvishga asoslangan strategiyani qo'llagan holda quvishni amalga oshirsa, u holda quyidagi 1-teorema o'rinli bo'ladi.

**1-Teorema.** Aytaylik tekislikda $K_{kr} = \left\{(x^1, x^2): \ (x^1)^2 + (x^2)^2 \leq r^2, r > 0\right\}$ $r$ radiuslio doirada (1), (2) ko'rinishidagi "quvish-qochish" masalasi qaralayotgan bo'lsin. U holda quvuvchi o'yinni

$$T(l) = \left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right] + 1\right) \cdot \frac{l}{4} + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{r^2 - \left(\frac{i\,l}{4}\right)^2} + 2r\right) \tag{3}$$

vaqt oralig'ida nihoyasiga yetkazadi.

Bu yerda $n = \left[\frac{4(r-l)}{l}\right] + 1$, $r$ - doira radiusi, $l$-masala shartida berilgan musbat son, $[m]$ - $m$ sonining butun qismi.

Agar $r$-radiusli $K_{kr}$ doirada $x_1$ nuqta $x_0$ nuqtani tutish maqsadida konsentrik aylanalar bo'ylab quvishga asoslangan strategiyani qo'llagan holda quvishni amalga oshirsa, u holda quyidagi 2-teorema o'rinli bo'ladi.

**2-Teorema.** Aytaylik tekislikdagi $K_{kr} = \left\{(x^1, x^2): \ (x^1)^2 + (x^2)^2 \leq r^2, \quad r > 0\right\}$, $r$ radiusli doirada (1), (2) ko'rinishidagi "quvish-qochish" masalasi qaralayotgan bo'lsin. U holda quvuvchi o'yinni

$$T(l) = \left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right] + 1\right) \cdot \frac{l}{4} + 2\pi \sum_{i=1}^{n} i\frac{l}{4} + r \tag{4}$$

vaqt oralig'ida nihoyasiga yetkazadi.

Bu yerda $n = \left[\frac{4(r-l)}{l}\right] + 1$, $r$ - doira radiusi, $l$-masala shartida berilgan musbat son, $[m]$ - $m$ sonining butun qismi.

Quvish va qochish o'yinida kompakt to'plamning berilishi juda muhim. Masalan shunday kompakt to'plamlar borki, u to'plamlarda 1-teoremada keltirilgan parallel quvishga asoslangan strategiya orqali ijobiy natijaga erishib bo'lmaydi. Bunday hollarda quvuvchi 2-teoremada keltirilgan konsentrik aylanalar bo'ylab quvishga asoslangan strategiyani qo'llash orqali natijaga erishishi mumkin. Shu bilan birga quvuvchi qo'llaydigan strategiya orqali o'yinni iloji boricha tezroq nihoyasiga yetkazish muhimdir. Parallel quvish strategiyasi ham va konsentrik aylanalar bo'ylab quvish strategiyalari ham birdek amal qilaveradigan kompakt to'plamlarda quvuvchiga o'yinni tezroq nihoyasiga yetkazish talabi qo'yiladi. Bunday hollarda quvuvchi qo'llaydigan strategiyani to'g'ri tanlash zarur. Buni quyidagi misollar yordamida ko'rsatamiz.

**1-misol.** Aytaylik $K_{kr} = \left\{(x^1, x^2): \ (x^1)^2 + (x^2)^2 \leq 144\right\}$ doirada (1), (2) ko'rinishidagi "quvish-qochish" masalasi berilgan bo'lsin. $l$ atrof $l$=7 ko'rinishida bo'lsa, quvuvchi o'yinni qancha vaqtda nihoyasiga yetkazadi?

**Yechish: 1)** agar quvuvchi parallel quvishga asoslangan strategiyani qo'llasa

$T_1(l) = \left(\left[\frac{4(12-7)}{7}\right] + 1\right) \cdot \frac{7}{4} + 2\left(\sum_{i=1}^{3} \sqrt{12^2 - \left(\frac{7i}{4}\right)^2} + 24\right) = 121.53$ birlik vaqt ichida o'yinni nihoyasiga yetkazadi.

2) agar quvuvchi konsentrik aylanalar bo'ylab quvishga asoslangan strategiyani qo'llasa

$T_2(l) = \left(\left[\frac{4(12-7)}{7}\right] + 1\right) \cdot \frac{7}{4} + 2\pi \sum_{i=1}^{3} i\frac{7}{4} + 12 = 83.222$ birlik vaqt ichida o'yinni nihoyasiga yetkazadi ($\pi = 3.1415$). Demak $T_1(l) > T_2(l)$, quvuvchi quvishni konsentrik aylanalar bo'ylab quvishga asoslangan strategiya orqali amalga oshirsa o'yinni tezroq nihoyasiga yetkazar ekan.

**2-misol.** Aytaylik $K_{kr} = \left\{(x^1, x^2): \ (x^1)^2 + (x^2)^2 \leq 64\right\}$ doirada (1), (2) ko'rinishidagi "quvish-qochish" masalasi berilgan bo'lsin. $l$ atrof *l=3* ko'rinishida bo'lsa, quvuvchi o'yinni qancha vaqtda nihoyasiga yetkazadi?

**Yechish: 1)** agar quvuvchi parallel quvishga asoslangan strategiyani qo'llasa

$T_1(l) = \left(\left[\frac{4(8-3)}{3}\right] + 1\right) \cdot \frac{3}{4} + 2\left(\sum_{i=1}^{7} \sqrt{8^2 - \left(\frac{3i}{4}\right)^2} + 16\right) = 138.52$ birlik vaqt ichida o'yinni nihoyasiga yetkazadi.

**2)** agar quvuvchi konsentrik aylanalar bo'ylab quvishga asoslangan strategiyani qo'llasa

$T_2(l) = \left(\left[\frac{4(8-3)}{3}\right] + 1\right) \cdot \frac{3}{4} + 2\pi \sum_{i=1}^{7} i\frac{3}{4} + 8 = 145.19$ birlik vaqt ichida o'yinni nihoyasiga yetkazadi ($\pi = 3.1415$). Demak $T_1(l) < T_2(l)$, quvuvchi quvishni parallel quvishga asoslangan strategiya orqali amalga oshirsa o'yinni tezroq nihoyasiga yetkazar ekan.

Yuqorida keltirilgan 1-2-misollardan ko'rdikki $K_{kr}$ doiradagi quvish o'yinida quvishni har doim 1-strategiya orqali amalga oshirsak yoki har doim ham 2-strategiya orqali amalga oshirsak o'yinni tezroq nihoyasiga yetkazamiz degan xulosa chiqarib bo'lmaydi. Quvuvchi tanlagan strategiya orqali quvishni amalga oshirilgandagi o'yinni nihoyasiga yetkazish vaqtlarning $T_1(l) > T_2(l)$ yoki $T_1(l) < T_2(l)$ bo'lishi $K_{kr}$ doiraning $r$ radiusiga va avvaldan berilgan musbat son $l$ ning qiymatiga bog'liq ekan. Shu sababli bu strategiyalarning ikkalasini ham o'rganishimiz muhim ahamiyat kasb etadi.

## Adabiyotlar.


1. *Айзекс Р* Дифференциальные игры.-М.: МИР, 1967. 480с.

2. *Понтрягин Л.С.* Линейное дифференциальные игры преследования // Мат. сборник.- Москва.1980.- Т.112. N 3.-С. 307-330.

3. *Littlewood J.E.* A mathematician's miscellany. London: Methuen, 1953.

4. *Сатимов Н.Ю.* Задачи преследования и убегания для одного класса линейных дифференциальных игр многих лиц. Труды Таш ГУ. -Ташкент. 1981.- N 670.-С. 54-64.

5. *Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш.* Об одном классе линейных дифференциальных игр преследования и убегания. Труды Таш ГУ. -Ташкент. 1981.- N 670.-С. 64-75.

6. *Иванов Р.П.* Простое преследование - убегание на компакте//Докл. АН СССР.1980. Т.254. N 6. С. 1318-1321.

7. *Маматов М.Ш., Зуннунов А.О.* О задаче простое преследование - убегание на компакте//Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наука. -М.: Наука, 2016. - N 1. -С.15-18.

8. *Маматов М.Ш., Зуннунов А.О.* Квадратдаги содда дифференциал уйинларда кувиш масаласи//Научный вестник. -СамДУ.: 2019. -N 1. -С.20-26.

9. *Зуннунов А.О.* Доирадаги содда дифференциал уйинларда кувиш масаласи//Научный вестник. -БухДУ.: 2019. N 3. -С.188-196.

10. *Mamatov, M., Zunnunov, A. and Esonov, E* Quantitative Analysis of the Problem of Lion and Man in the Presence of a Circular Obstacle. Journal of Automation and Information, 2020 N 52, 42-52.

11. *Zunnunov A.O.* Yopiq arenada sher va odam o'rtasida quvish masalasi/Matematika Instituti Byulleteni-2020. N 6. 4-8 b.

# Chiziqli rekurrent differensial o'yinlarda bir guruh koordinatalashgan qochuvchilarni tutib olish

**Ibroximov B.**

*Андижанский государственный университет,*
ibrohimovbahtiyor1@gmal.com

$R^k\,(k \geq 2)$ fazoda $n + m$ ishtirokchili differensial o'yinni qaraymiz: $P_1,\ \dots,\ P_n$ quvuvchilar va $E_1,\ \dots,\ E_m$ qochuvchilar.

Har bir $P_i$ quvuvchining harakat qonuni

$$\dot{x}_i = A\,(t)\,x_i + u_i, \quad u_i \in V \tag{1}$$

ko'rinishga ega. Har bir $E_j$ qochuvchining harakat qonuni esa

$$\dot{y}_j = A\,(t)\,y_j + v, \quad v \in V \tag{2}$$

ko'rinishga ega. Bu yerda va bundan keyin $x_I,\ y_j,\ u_i,\ v \in R^k,\ \ i \in I = \{1, \dots, n\},\ \ j \in J = \{1, \dots, m\},\ \ A\,(t) -\ [t_0,\ \infty)$oraliqda uzluksiz bo'lgan $k$-tartibli matritsa, $V \subset R^k$ silliq chegarali qatiy qavariq kompakt to'plam. $t = t_0$ da boshlang'ich shart berilgan

$$x_i\,(t_0) = x_i^0, \quad y_j\,(t_0) = y_j^0, \tag{3}$$

bunda barcha $i,\ j$ larda $x_i^0 \neq y_j^0$.

(2), (**??**), (**??**) sistemalar bilan birga boshlang'ich shartlar bilan berilgan quyidagi sistemani qaraymiz:

$$\dot{z}_{ij} = A\,(t)\,z_{ij} + u_i - v, \quad u_i,\ v \in V, \quad z_{ij}\,(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0 \tag{4}$$

Ravshanki, $z_{ij}^0 \neq 0$.

Ta'kidlash joizki, barcha $E_j$ qochuvchilar bir hil $v$ boshqaruvni tanlaydi.

**1-ta'rif.** Agar $z^0 = (z_1^0, \dots,\ z_n^0)$ boshlang'ich holat, $t$ moment va $E_1,\ \dots,\ E_m$ qochuvchilar qo'llagan ixtiyoriy $v_t\,(\cdot)$ boshqaruvni $V$ to'plamdan qiymat qabul qiluvchi $u_i\,(t) = U_i\,(t,\ z^0, v_t\,(\cdot))$ o'lchovli funksiyaga mos qo'yuvchi $U_i\,(t, z^0,\ v_t\,(\cdot))$ akslantirish aniqlangan bo'lsa $P_i$ quvuvchining $U_i$ kvazistrategiyasi berilgan deyiladi.

Bu o'yinni  orqali belgilaymiz.

**2-ta'rif.** Agar shunday $T_0 = T\,(z^0)$ moment, $P_1,\ \dots,\ P_n$ quvuvchilarning shunday $U_1,\ \dots, U_n$ kvazistrategiyalari mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy o'lchovli $v\,(\cdot),\ v\,(t) \in V,\ t \in [0,\ T_0]$ funksiya uchun $z_{qp}\,(\tau) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladigan $q \in \{1,\ \dots,\ n\},\ p \in \{1, \dots, m\}$ nomerlar va $\tau \leq T_0$ moment topilsa  o'yinda tutib olish mumkin deyiladi.

$(t)$ orqali

$$\dot{\omega} = A\,(t)\,\omega,$$

sistemaning fundamental matritsasini belgilaymiz, bu yerda $(t_0) = E, \quad E-$ birlik matritsa.

**3-ta'rif.** $R^k$ fazoning $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ vektorlari berilgan. Agar ixtiyoriy $x \in R^k$ uchun

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ \cdots + \alpha_s a_s$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$ musbat haqiqiy sonlar mavjud bo'lsa, u xolda $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ vektorlar $R^k$ fazonda musbat basis tashkil etadi deymiz.

**1-lemma.** Faraz qilaylik $b_1,\ \ldots,\ b_n \in R^k$ va $V$ – silliq chegarali qatiy qavariq kompakt bo'lsin. U xolda quyidagi 3 ta tasdiq o'zaro teng kuchlidir.

**1-tasdiq.**

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{i} \lambda\,(v, b_i) \quad > 0$$

bu yerda $\lambda\,(v, b_i) = \sup\{\lambda : \quad \lambda \geq 0,\ -\lambda b_i \in V - v\}$ .

**2-tasdiq.** $b_1,\ \ldots,\ b_n$ vektorlar $R^k$ da musbat bazis tashkil etadi.

**3-tasdiq.** $0 \in \mathrm{Intco}\,\{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n\}$ .

Bu yerdan boshlab $x_i^0,\ \ y_j^0$ boshlang'ich pozitsiyalarni quyidagicha deb faraz qilamiz

1. Agar $n > k$ bo'lsa, u xolda ixtiyoriy $I \subset \{1,\ \ldots,\ n\}$ , $\ |I| \geq k+1$ indekslar to'plami uchun $\mathrm{Intco}\,\{x_i^0, \ \ i \in I\} \ \neq \emptyset$ munosabat o'rinli.

2. $\left\{x_i^0, y_j^0\ \right\}$ to'plamdagi ixtiyoriy $k+1$ ta nuqta affin erkli.

**Eslatma.** Bizga $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ vektorlar va $\alpha_1 + \alpha_1 + \ \cdots + \alpha_n = 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi o'zgarmas sonlar berilgan. Agar $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, u xolda $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ affin bo'g'liq deyiladi. Affin bog'liq bo'lmagan vektorlar affin erkli deyiladi.

**Teorema.** Quyidagi shartlar o'rinli bo'lsin:

1. $(t)$ matritsa $[t_0,\ \infty)$ oraliqda rekurrent va uning birinchi tartibli xosilasi shu oraliqda tekis chegaralangan;

$$2.\mathrm{Intco}\left\{x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\right\} \ \cap \mathrm{co}\left\{y_1^0,\ \ldots,\ y_m^0\right\} \ \neq \emptyset$$

U xolda  o'yinda tutib olish mumkin.

## Adabiyotlar


1.*Благодатских, А.И.* Почти периодические конфликтно управляемые про-цессы со многими участниками/А.И. Благодатских//Известия РАН. Тео-рия и системы управления. — 2007. — № 2. — С. 83–86.

2. *Благодатских, А.И.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объек-тов/А. И. Благодатских, Н. Н. Петров. — Ижевск: Изд-во «Удмурт-ский университет», 2009. — 266 с.

3. *Чикрий, А.А.* Конфликтно управляемые процессы/А.А. Чикрий. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.

# Хорижий валюта алмашув курсини чизиқсиз моделлаштириш

**Турсунов Р.Т.,**[1] **Алимов А.А.**[2].

[1] *Candidate of physical and mathematical Sciences, Associate Professor, Tashkent Branch of Plekhanov Russian University of Economics,*
[2] *PhD in National university of Uzbekistan, Tashkent Branch of Plekhanov Russian University of Economics.*

rasul_tursunov@yahoo.com, akram_alimov@mail.ru

Мақолада Лотин Америка давлатларининг валюталарини АҚШ долларига нисбатан алмашув курс ларини тадкиқот қилишда вактли чизиқсиз қаторларни қўллаш масаласини кўриб чиқамиз. С.Ғуломов, Р.Турсунов (1) Осиё мамлакатлари валюталарини алмашув курсларини чизиқсиз моделлар ёрдамида ўрганишган. Бундай тадқиқодларни хорижий олимлар ҳам олиб борганлар. Хусусан, Iannizzotto (2), McMillan and Speight (3), Sarno (7), Sarantis (5,6), Parsley D. and H. Popper (4), саноати ривожланган давлатларнинг қимматли қоғозларнинг нархини ва валюталарининг алмашув курсини моделлаштириш- да бир холатдан иккинчи холатга текис ўтувчи авторегрессив (STAR-smooth transition autoregressive) моделлар қўлланилган ва кўп холларда бу моделларнинг тўғрилиги хақидаги тахмин исботланган.

Мазкур тадқиқоднинг мақсади Лотин Америка давлатлари валюта алмашув курсини ўрганишда биринчилар қаторида чизиқсиз моделларни қўллаш ва валюта курсини ўзгаришини чизиқсиз моделлар қанчалик аниқ акс этиришини эвристик исботлаш мумкинлигини кўрсата билишдан иборат. С.Ғуломов, Р.Турсунов (1) тўқиста Осиё мамлакатларининг еттитасининг валюта алмашув курслари чизиқсиз моделлар билан аниқ акс этирилишини кўрсатиб бердилар. While Sarno (7) турк валютасини алмащув курсининг ўзгариши чизиқсиз моделга мос келишини таъкидлаб ва бу мослик А ҚШ доллари, Британия фунт стерлинги, Германия ва Франция маркалари билан маълум бир муносибатда ёки боғлиғликда бўлганлиги туфайли табиатдан ҳам чизиқсиз модел орқали аниқроқ акс этириш мумкинлиги хақидаги ғояни илгари сурган.

Маълумки валюта алмашув курслари ҳар қандай давлат иқтисодиётининг ташқи рақобатбардошли- гига тўғридан тўғри таъсир этади. Ҳар қандай давлатнинг иқтисодий ўсишини узоқ муддат давомида қарайдиган бўлсак, унда ўсиш, пасайиш, сакрашлар ёки шоклар мавжуд. STAR модели методологик жихатдан бундай сакраш ва шокларни силиқлаб бошқара олиш қобилиятига эга. Аниқроғи юкорида таъкидланганидек бир холатдан иккинчи холатга, масалан валютанинг паст курсидан юқори курсига текис ўтувчи функция орқали бошқарилади. Бундай ўтиш ёки сакраш узлуксиз (текис) амалга ошири- лади. Иккинчи томондан катта сакраш ёки шоклар иқтисодиётга бир мунча зарар етказиб, валюта курсларини бир холатдан иккинчи холатга олиб келишига сабаб бўлади. Тажриба асосида бундай холатларни олдиндан кўра билиш давлат раҳбарларини валют курсларида бўладиган шокларни олдини олишга ёрдам беради.

STAR модели холатларга ўтувчи модел сифатида талқин этилади, бунда бир холатдан иккинчисига ўтказувчи функция қиймати $G(y_t; \gamma, c) = 0$ ва $G(y_t; \gamma, c) = 1$ оркали амалга оширилади. Бир холатдан иккинчи холатга ўтишининг рўй бериши кузатилаётган ўзгарувчи $y_t$ оркали аниқланади ва $G(y_t;\gamma,c)$ қиймати орқали амалга ошади. Агар G(.) логарифмик функция бўлса унда бундай моделга логистик текис ўтувчи авторегрессиион модел (LSTAR-logistic smooth transition autoregression) ва агар $G(.)$ экспоненциал функция бўлса экспоненциал текис ўтувчи авторегрессиион модел деб аталади (ESTAR).

$y_t,\ t=l,2,...T.$ маълум давлатнинг валюта курсининг биринчи ва иккинчи ойдаги валюта курслари- нинг логарифмлар айирмаси бўлсин. Валюта курсига чизиқсиз авторегрессион моделни қўллаш ва қайси модел (LSTAR, ESTAR) аниқроқ мос келишини аниқлаш уч боскичда амалга оширилади. Бирин- чи босқичда чизикли авторегрессион модели лагининг (lag-отставание, запаздование, орқада қолиш) узунлигини ёки тартибини аникланилади ($p$). Авторегресион модел лагининг узунлики $p$ Akaika Information Criteria (AIC) ва Ljung-Box статистикалари орқали аниқланилади.

Иккинчи босқичда чизиқсиз авторегресияни мавжудлиги текширилади. Унинг учун қуйидаги

$$V_t=\beta_0+\beta_1x_t+\beta_2x_ty_{t-d}+\beta_3x_ty_{t-d}^2+\beta_4x_ty_{t-d}^3+e_t,$$

тенглама баҳоланади ва $H_0:\ \beta_2=\beta_3=\beta_4=0$ гипотеза текширилади, бу ерда $v$ биринчи босқичда танланган AR модел билан баҳолангандан сўнг бошлангич $y_t$ дан фарки (қолдиқ), $d-$ кеч қолиш параметри (delay). $d$ни шундай танланадики бунда $H_0$ гипотезани текишираётганда $p-$қийматни мини- маллаштирадиган қиймати танлаб олинади $1<d<8$.

Учинчи боскичда эса чизиқсиз моделларнинг қайси бири логистик текис ўтувчи авторегрессиион (LSTAR) ёки экспоненциал текис ўтувчи авторегрессиион (ESTAR) модел валюта алмаштириш курс- ларга аниқроқ мос келиши текширилади. Бунинг учун қуйидаги гипотезалар текширилади:

$$H_{04}:\beta_4=0;\quad H_{03}:\beta_3=0|\beta_4=0;\quad H_{02}:\beta_2=0|\beta_4=\beta_3=0.$$

Бу гипотезаларни бир бирига жойлашган кетме-кет гипотезалар (sequence of nested test) дейилади. Агар $H_{04}$ гипотеза рад этилса, у холда LSTAR модел танланади. Агар $H_{04}$ гипотеза қабул қилинса, лекин $H_{03}$ гипотеза рад этилса ESTAR модел танланади. Агар $H_{04}$ ва $H_{03}$ гипотезалар қабул қилиниб, $H_{02}$ рад этилса LSTAR модел танлаб олинади.

Тадқиқод ўтказиш учун Лотин Америкасининг ўн битта давлати олинди. Бу давлатларнинг январ 1971 йилдан декабрь 2016 йилгача валюталарининг америка долларига алмашиш курсларининг маълу- мотлари халқаро молиявий статистика веб сайтининг маълумотлар базасидан олинган (International Financial Statistics).

1-жадвалда авторегресион моделнинг чизиқли бўлиш гипотезасининг ($H_0$) текшириш натижалари келтирилган. Бу ерда AR моделнинг тартиби $p=8$ (лаг узунлиги) Akaika Information Criteria (AIC) and Ljung-Box статистикалари ёрдамида аниқланган. Жадвалда $p-$қийматни минималлаштирадиган $d$ нинг қийматлари келтирилган. Жадвалдан кўриниб турибдики Бразилия, Чили, Колумбия, Косте Рика, Эквадор, Эл Сальвадор, Гондурас, Мексика ва Уругвай мамлакатларининг 1%дан хам камроқ мухимлилик даражаси билан $H_0$ гипотеза, яъни моделнинг чизиқли бўлишлиги рад этилган. Бу жуда хам катта курсаткич. Жадвалдан шуни хам кўриш мумкинки Гватемала учун бу кўрсаткич 1,7% ва Венесуэла мамлакатининг хорижий валюта алмаштириш курси авторегрессион моделнинг чизиқли бўлиш гипотезасини рад этмайди. Бу давлатлар учун мухумлилик даражаси мос равишда 40,3% бу эса этарли эмас. Аниқроғи чизиқсиз моделни танласангиз сизнинг хатоингиз Гватемала учун 40,3%ни ташкил этади.

1- жадвал

Чизиқсиз моделга текшириш натижалари

| Давлатнинг номи | $d$ нинг қиймати | $p$-қиймат |
|---|---|---|
| Бразилия | 1 | 3.413E-09 |
| Чили | 8 | 3.442E-25 |
| Колумбия | 4 | 9.570E-35 |
| Косте Рика | 1 | 7.058E-10 |
| Эквадор | 7 | 3.242E-08 |
| Эл Сальвадор | 1 | 5.411E-22 |
| Гватемала | 1 | 0.40358 |
| Гондурас | 1 | 6.377E-41 |
| Мексика | 1 | 0.005546 |
| Уругвай | 1 | 2.089E-34 |
| Венесуэла | 4 | 0.01683 |

Қуйидаги 2-жадвалда чизиқсиз моделнинг аниқ бир кўринишини танлаш бўйича ўтказилган тадқи- қод ва текширишларнинг натижаси келтирилган. Тадқиқод натижалари шуни кўрсатадики, қурилаёт- ган мамлакатларнинг аксарият учун логистик текис ўтувчи авторегрессиион (LSTAR) модели катта аниклиқда мос келади. Фақатгина Косте Рика ва Эль Сальвадор учун экспоненциал текис ўтувчи авторегрессиион (ESTAR) модели мос келади.

2-жадвал

Чизиқсиз моделни турини танлашга доир текшириш натижалари

| Давлат номи | $H_{04}$ | $H_{03}$ | $H_{02}$ | Моделнинг тури |
|---|---|---|---|---|
| Бразилия | 9.797E-05 | 0.0021863 | 3.031E-05 | LSTAR |
| Чили | 6.107E-18 | 5.543E-11 | 5.632E-11 | LSTAR |
| Колумбия | 2.993E-05 | 0.0009164 | 2.058E-08 | LSTAR |
| Косте Рика | 0.8930962 | 1.110E-05 | 3.743E-61 | ESTAR |
| Эквадор | 7.985E-06 | 0.0264282 | 1.047E-04 | LSTAR |
| Эл Сальвадор | 0.8398716 | 6.008E-22 | 1.482E-13 | ESTAR |
| Гондурас | 0.9996339 | 0.7275192 | 2.597E-95 | LSTAR |
| Мексика | 0.8701506 | 0.802655 | 0.0011093 | LSTAR |
| Уругвай | 2.059E-05 | 1.508E-31 | 2.894E-40 | LSTAR |

3- жадвалда ўтиш (transition) параметри ва икки холат орасидаги остона (парог thresholds) парметри Сни баҳолаш натижалари келтирилган. Бу баҳолар STAR моделини чизиқсиз энг кичик квадратлар усули билан Ньютон-Маргуард (Marguardt) алгоритмини қўллаш ёрдамида топилган. Бу ҳисоб китоб- ларни қўлда бажариш мумкин эмас. Шунинг учун барча ҳисоб китоблар SAS статистик дастурда амалга оширилган. Бу ҳисоб китоб тантижаларидан шуни кўриш мумкинки Колумбия, Эль Сальвадор ва Уругвай давлатларининг ўтиш параметрлари кичик бу эса бир холатдан иккинчи холатга ўтиш жуда хам текис амалга оширилади. Бразилия, Чили ва Гондурас ўтиш параметрининг қиймати катта бу эса бир холатдан иккинчи холатга ўтиши вертикал чизиқга ўхшаш холда амалга оширилади.

3-жадвал

Ўтказувчи функция параметрларининг баҳолаш натижалари

| Давлатнинг номи | $\gamma$ | C |
|---|---|---|
| Бразилия | -107.71 | 0.3834 |
| Чили | 23.41 | 0.0193 |
| Колумбия | 1.66 | 0.0241 |
| Косте Рика | 4.66 | 0.0264 |
| Эквадор | 7.59 | 0.0711 |
| Эль Сальвадор | 2.18 | 0.0098 |
| Гондурас | 14.62 | -0.0051 |
| Мексика | 8.85 | 0.0427 |
| Уругвай | 0.97 | 0.0149 |

Тадқиқод натижаларига кўра кўрилган ўн битта Лотин Америка давлатларини тўқизтасининг валюта алмашув курслари чизиқли моделга тўгри келиш тахмини жуда юқори эҳтимоллик билан рад этилди. Бу тўқизта мамлакатлар валюта алмашув курслари чизиқсиз моделлар билан акс эттирилиши эвристик исбот қилинди. Изланишлар натижаси шуни кўрсатадики, бу мамлакатларнинг аксарият учун логистик текис ўтувчи авторегрессиион (LSTAR) модели катта аниклиқда мос келди. Фақатгина Косте Рика ва Эль Сальвадор учун экспоненциал текис ўтувчи авторегрессиион (ESTAR) модели мос келди. Олинган натижалардан шуни хулоса қилиш мумкинки нафақат хорижий валюталар алмашув курсини балки қимматли қоғозлар бозорини ўрганиш, моделлаштиришда чизиқсиз моделлар юқори кўрсаткичлар беради.

**Адабиётлар.**


1. *Gulyamov S.S., Tursunov R.T.* Modeling exchange rates of Asian countries: a smooth transition approach // Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения. Ташкент, 2005, с. 25-29.

2. *Iannizzotto M.* Exchange Rate Misalignment and Nonlinear Convergence to Purchasing Power Parity in European Exchange Rate Mechanism // Applied Financial Economics, 2001, 11, p.511-26.

3. *McMillan D. and Speight A.* Non-linearities in the Black Market Zloty-Dollar Exchange Rate: Some Further Evidence // Scottish Journal of Political Economy, 2001, 11, 2, p.209-220.

4. *Parsley D. and Popper H.* Official exchange rate arrangements and real exchange rate behavior // Journal of Money, Credit and Banking, 33, 2001, p.976-993.

5. *Sarantis N.* Nonlinearities, cyclical behaviour and predictability in stock markets: international evidence // International Journal of Forecasting, vol., 17, 2001, p.459-482.

6. *Sarantis N.* Modeling non-linearities in real effective exchange rates // Journal of International Money and Finance, 1999, v. 18, p.17-45.

7. *Sarno L.* Real Exchange Rate Behavior in High Inflation Countries: Empirical Evidence from Turkey, 1980-97 // Applied Economics Letters, 7, 2000, p. 285-291.

# Марков занжирини қишлоқ хўжалик масалаларини ечишга қўлланилиши

**Файзиев А.А.**

*Тошкент Давлат аграр университети*

fayziev.ахтам@вк.ru

Мақолада, йиллар давомида тупроқнинг унимдорлик ҳолатининг ўзгариши, фақат ўтган йилдаги ҳолатига боғлиқ $\Omega = \{1, 2, 3\}$ бўлган, уч ҳолатли бир жинсли оддий Марков занжири ташкил қилувчи тасодифий жараён шаклида ўрганилиб, фермерни қандай стратегияни қўллаганида, юқори рентабеллика эришиши ўрганилган([1]-[5]).

Маълумки, тупроқнинг ҳолати 3-хил: 1-яхши (унимдор), 2- қониқарли (ўртача ҳосилдор) ва 3-ёмон (унимдорлиги паст) ҳолатларга $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ажратиш мумкин. Фермер хўжалигини деҳқончилик қилаётган ер майдонининг тупроғини йиллар давомида ўзгариши қуйидагича оддий бир жинсли Марков занжири матрицасига эга бўлсин:

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{bmatrix} = (p_{ij})$$

Бу ерда $p_{11} = 0,5$ ўтган хўжалик йилида тупроқнинг унимдорлиги яхши бўлган бўлса, мазкур хўжалик йилида ҳам яхши бўлиш эҳтимоли, $p_{12} = 0,4$ ўтган хўжалик йилида тупроқнинг унимдорлиги яхши бўлган бўлса, мазкур хўжалик йилида қониқарли, $p_{13} = 0$, ўтган хўжалик йилида тупроқнинг унимдорлиги яхши бўлган бўлса, мазкур хўжалик йилида ёмон ҳолатда бўлиш эҳтимолини билдиради.

Тупроқ унимдорлигини имкон қадар турғун сақлаш учун, фермер минерал ва маҳалий ўғитлардан фойдаланади. Қандай стратегияни фермер қўлласа, юқори ҳосил олади, даромади максимум бўлади?

Тупроқнинг унимдорлиги $i = 1, 2, 3$ ҳолатларда бўлганда, қуйидаги формулага асосан $\overline{\pi}_1(n) = \pi(0)P^n$ унга $n = 1, 2, 3, \dots$ қийматларни қўйиб уларни 3-4 йилдан кейин, тупроқ бошланғич қандай ҳолатда бўлмасин, бир хил ҳолатга келишини кўрамиз (финал эҳтимолликлар).

Фараз қилайлик, бу оддий бир жинсли Марков занжири ташкил этувчи тасодифий жараённи $i$ ҳолатдан $j$ ҳолатга ўтишидан келадиган даромади $r_{ij}$ ва барча қилинган даромадлари матрицаси $R = ||r_{ij}||$ бўлса, фермер хўжалигининг жами даромади $v_i(n)$ , қуйидаги формула билан аниқланади([1],[3]):

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{s} p_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^{s} p_{ij} v_j(n-1). \qquad (1)$$

Мақсад, даромаднинг максимум қийматини аниқлашдан иборат:

$$\max v_i(n+1) = \max \left( \sum_{j=1}^{s} p_{ij}^k r_{ij}^k + \sum_{j=1}^{s} p_{ij}^k v_j(n) \right)$$

$$\nu_i^k(n+1) = \max \left( \nu_i^k + \sum_{j+1}^{s} p_{ij} v_j(n) \right), \text{ бу ерда } \nu_i^k = \sum_{j=1}^{s} p_{ij}^k r_{ij}^k,$$

$i$ ҳолатда $k$ стратегияни қўллашдан келган даромад миқдори.

Фермер хўжалиги қуйидаги стратегиялардан қайси бирини қўллаганида энг юқори даромад олишга эришади?

a) Тупроққа минерал ва маҳаллий ўғит солмаган ҳолда, бир қадамга ўтиш матрицаси $P_1$ ва 1 га майдондан олган даромади $R_1$ бўлгандами?

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Минерал ва маҳаллий ўғитлардан фойдаланиб, бир қадамга ўтиш матрицаси $P_2$ ва даромади $R_2$ бўлгандами?

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Бу ҳолатларни таҳлил қиламиз. Юқорида келтирилган формулалардан фойдаланиб, фермер ўғитлардан фойдаланмаган $k = 1$ ҳолда, хўжаликни 1 га ердан оладиган даромади қуйидагича бўлади:

$$\nu_1^1 = 0,4 \cdot 5 + 0,5 \cdot 4 + 0,1 \cdot 3 = 4,3\text{млн.сўм},$$
$$\nu_2^1 = 0 \cdot 0 + 0,4 \cdot 3 + 0,6 \cdot 1 = 1,8\text{млн.сўм},$$
$$\nu_3^1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot (-2) = -2\text{млн.сўм}.$$

$k = 2$ бўлганда, яъни фермер ўғитлардан фойдаланган ҳолда, фермер хўжалигини 1 га ердан оладиган даромади қуйидагича бўлади:

$$\nu_1^2 = 0,5 \cdot 7 + 0,4 \cdot 6 + 0,1 \cdot 4 = 6,3\text{млн.сўм},$$
$$\nu_2^2 = 0,3 \cdot 6 + 0,6 \cdot 5 + 0,1 \cdot 1 = 4,9\text{млн.сўм},$$
$$\nu_3^2 = 0,1 \cdot 5 + 0,7 \cdot 4 + 0,2 \cdot (-2) = 2,9\text{млн.сўм}.$$

Натижада, $\nu_i^k(n+1) = \max\left(\nu_i^k + \sum_{j+1}^{s} p_{ij} v_j(n)\right))$ формулага асосан даромад:

| $i$ | K=1 | K=2 | Мукобил ечим | k |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4,3+0,4· 6,3 + 0,5 · 4,9 + +0,1 · 2,9 = 9,56 | 6,3+0,5· 6,3 + 0,4 · 4,9 + 0,1 · 2,9 = 11,7 | 11,7 | 2 |
| 2 | 1,8+0· 6,3 + 0,4 · 4,9 + 0,6 · 2,9 = 5,5 | 4,9+0,3· 6,3 + 0,6 · 4,9 + 0,1 · 2,9 = 10,02 | 10,02 | 2 |
| 3 | -2+0· 6,3 + 0 · 4,9 + 1 · 2,9 = 0,9 | 2,9+0,1· 6,3 + 0,7 · 4,9 + 0,2 · 2,9 = 7,54 | 7,54 | 2 |

Фермер иккинчи стратегия қўллаган ҳолдаги даромади:

| $i$ | K=1 | K=2 | Мукобил ечим | k |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4,3+0,4· 11,7 + 0,5 · 10,02 + +0,1 · 7,54 = 14,844 | 6,3+0,5· 11,7 + 0,4 · 10,02 + +0,1 · 7,54 = 16,912 | 16,912 | 2 |
| 2 | 1,8+0· 11,7 + 0,4 · 10,02 + +0,6 · 7,54 = 10,332 | 4,9+0,3· 11,7 + 0,6 · 10,02 + +0,1 · 7,54 = 15,176 | 15,176 | 2 |
| 3 | -2+0· 11,7 + 0 · 10,02 + +1 · 7,54 = 5,54 | 2,9+0,1· 11,7 + 0,7 · 10,02 + +0,2 · 7,54 = 12,592 | 12,592 | 2 |

Рис. 4.1: Фермер даромадлари

Демак, жадвалларда келтирилган ҳисоблашлардан кўринадики, агар фермер b) стратегияни қўлласа, тупроғнинг унимдорлигини сақлаган ҳолда, яхши даромад олишга эришади.

### Хулоса

Йиллар давомида тупроқнинг ўзгариб боришини, уч ҳолатли $\Omega = 1, 2, 3$ оддий бир жинсли Марков занжири шаклида ўрганиш асосида қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин: 1) фермер тупроқ унимдорлигини сақлаган ҳолда, юқори даромад олиши учун, биринчи ва иккинчи йилларда тупроқнинг ҳолати қандай бўлишидан қатъий назар, минерал ва маҳаллий ўғитлардан фойдаланиши керак; 2) учунчи йилда фақат тупроқнинг ҳолати 2-қониқарли ва 3-ёмон бўлган майдонларда минерал ва маҳалий ўғитлардан фойдаланиш стратегиясини қўлласа, юқори даромадли бўлади.

### Адабиётлар

1. *Ховард Р.А.* Динамическое программирование и Марковские процессы. Москва. "Советское радио 1964,187С.

2. *Таха Х. А.* Operations research an introduction, New York, 1982, 1-2.

3. *Кемени, Дж. Снелл* Конечные цепи Маркова. М."Наука 1970.

4. *Файзиев А.А.* Некоторые статистические задачи для цепей Маркова и их применение. Монография . /01.01.05 - ТВиМС. 2020 г. Свидетельства №21-3540. ТашГАУ "Таҳририят-нашриёт". 7,25 п.л. 116С.

# Яқинлашиши яхшиланган Эйлер - Маклорен типидаги квадратур формула

**Ҳаётов А.Р.[1], Расулов Р.Ғ.[1,2]**

[1] *В.И.Романовский номидаги Математика институти, Университет кўчаси, 4б, Тошкент, 100174, Ўзбекистон*

[2] *Тошкент ирригация ва қишлоқ хўжалигини механизациялаш муҳандислари институти, Қори-Ниёзий кўчаси 39, Тошкент, 100000, Ўзбекистон*

e-mail hayotov@mail.ru[1], r.rasulov1990@mail.ru

Бизга қуйидаги

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\varphi(h\beta) + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^{2j}B_{2j}}{(2j)!}\left(\varphi^{(2j-1)}(0) - \varphi^{(2j-1)}(1)\right), \qquad (1)$$

Эйлер - Маклорен квадратур формуласи берилган бўлсин. Бу ерда $C_0[\beta], (\beta = 0, 1, 2, ..., N)$-умумлашган трапеция формуласи коэффициентлари, яъни

$$\begin{array}{lll} C_0[0] & = & \frac{h}{2}, \\ C_0[\beta] & = & h, \ \beta = 1, 2, ..., N-1, \\ C_0[N] & = & \frac{h}{2}, \end{array} \qquad (2)$$

$B_{2j}$ -Бернулли сонлари, $h = \frac{1}{N}$, $N$ - натурал сон.

Биз интеграл остидаги $\varphi$ функциялар $W_2^{(2k+1,2k)}(0,1)$ фазога тегишли. Бунда $W_2^{(2k+1,2k)}(0,1)$ фазоси сифатида $(2k)$ - тартибли ҳосиласи абсолют узлуксиз ва $(2k+1)$ - тартибли ҳосиласи $L_2(0,1)$ фазосига тегишли барча функциялар синфини оламиз. $W_2^{(2k+1,2k)}(0,1)$ синфи

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{W_2^{(2k+1,2k)}}=\int\limits_0^1\left(\varphi^{(2k+1)}(x)+\varphi^{(2k)}(x)\right)\left(\psi^{(2k+1)}(x)+\psi^{(2k)}(x)\right)dx$$

скаляр кўпайтмага нисбатан Гильберт фазоси бўлади.

Бу скаляр кўпайтма ёрдамида норма қуйидагича аниқланган

$$\|\varphi\|_{W_2^{(2k+1,2k)}}=\left[\int_0^1\left(\varphi^{(2k+1)}(x)+\varphi^{(2k)}(x)\right)^2dx\right]^{1/2}. \qquad (3)$$

Биз бу ищда (1) кўринишидаги Эйлер - Маклорен квадратур формуласини кенгайтириш билан шуғилланамиз.

$W_2^{(2k+1,2k)}(0,1)$ фазосида ушбу квадратур формулани қараймиз

$$\int\limits_0^1\varphi(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^N C_0[\beta]\varphi(h\beta)+\sum_{j=1}^k\frac{h^{2j}B_{2j}}{(2j)!}\left(\varphi^{(2j-1)}(0)-\varphi^{(2j-1)}(1)\right)+\sum_{\beta=0}^N C\,[\beta]\varphi^{(2k)}(h\beta). \qquad (4)$$

Бунда (1) кўринишидаги Эйлер-Маклорен квадратур формуласига $\sum\limits_{\beta=0}^N C\,[\beta]\varphi^{(2k)}(h\beta)$ ҳадни қўшамиз.

(4)-квадратур формуланинг хатолиги деб

$$(\ell,\varphi)=\int\limits_0^1\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^N C_0[\beta]\varphi(h\beta)-$$

$$-\sum_{j=1}^k\frac{h^{2j}B_{2j}}{(2j)!}\left(\varphi^{(2j-1)}(0)-\varphi^{(2j-1)}(1)\right)-\sum_{\beta=0}^N C[\beta]\varphi^{(2k)}(h\beta) \qquad (5)$$

айирмага айтилади ва бу айирмага $W_2^{(2k+1,2k)}(0,1)$ фазосида аниқланган қуйдаги хатолик функционали мос келади

$$\ell(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^N C_0[\beta]\delta(x-h\beta)+$$

$$+\sum_{j=1}^k\frac{h^{2j}B_{2j}}{(2j)!}\left(\delta^{(2j-1)}(x-0)-\delta^{(2j-1)}(x-1)\right)-\sum_{\beta=0}^N C\,[\beta]\delta^{(2k)}(x-h\beta). \qquad (6)$$

Бу ерда $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - [0,1] кесмасининг характеристик функцияси ва $\delta$- Диракнинг дельта-функцияси.

(4) - квадратур формуланинг (5) - хатолиги $W_2^{(2k+1,2k)^*}(0,1)$ фазосидаги чизиқли функционални беради, бунда $W_2^{(2k+1,2k)^*}(0,1)$ бу $W_2^{(2k+1,2k)}(0,1)$ фазосига қўшма фазо.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, $\ell(x)$ хатолик функционалининг $W_2^{(2k+1,2k)}(0,1)$ фазосида аниқланган бўлиши учун қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак

$$(\ell, x^{\alpha}) = 0, \qquad \alpha = 0,1,...,(2k-1), \tag{7}$$

$$(\ell, e^{-x}) = 0. \tag{8}$$

Охирги иккита тенглик (4) - квадратур формуланинг $P_{2k-1}(x)$ ($(2k-1)$ - даражали кўпҳад) ва $e^{-x}$ функцияларга аниқлигини билдиради. Кўришимиз мумкинки, (7) - шарт $C[\beta]$, $\beta = 0,1,...,N$ коэффициентларга боғлик эмас. Демак, биз $C[\beta]$, $\beta = 0,1,...,N$ коэффициентлар учун фақатгина (8)- шартга эга бўламиз.

Коши-Шварц тенгсизлигидан (5) хатоликнинг абсолют қиймати юқоридан қуйидагича баҳоланади

$$\|\ell\|_{W_2^{(2k+1,2k)*}} = \sup_{\varphi, \|\varphi\|_{W_2^{(2k+1,2k)}} \neq 0} \frac{|(\ell,\varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(2k,2k-1)}}}.$$

Бу ердан биз (4) - квадратур формуланинг (5) - хатолиги $\ell(x)$ хатолик функционалининг

$$|(\ell,\varphi)| \leq \|\varphi\|_{W_2^{(2k+1,2k)}} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(2k+1,2k)*}}$$

нормаси орқали баҳоланишини хулоса қиламиз.

Бу ерда $\ell(x)$ хатолик функционалининг нормаси $C[\beta]$, $\beta = 0,1,...,N$ коэффициентларга боғлиқлигини кўриш қийин эмас. Табийки, бутун бир функциялар фазоси $W_2^{(2k+1,2k)}(0,1)$ элементларида (4) - квадратур формула хатолигини юқори чегарасининг энг кичик қийматини топиш муҳим ҳисобланади. Хатолик функционали нормаси $C[\beta]$, $\beta = 0,1,...,N$ коэффициентлар бўйича минимумини топиш масаласи Сард масаласи бўлади.

Бу масалани ечиш натижасида олинган квадратур формула *Сард маъносида оптимал квадратур формула* дейилади.

**1-масала**. Қуйидаги тенгликни

$$\left\|\mathring{\ell}\right\|_{W_2^{(2k+1,2k)*}} = \inf_{C[\beta]} \|\ell\|_{W_2^{(2k+1,2k)*}} \tag{9}$$

қаноатлантирувчи $C[\beta]$ коэффициентларни топиш.

(9) - тенгликни қаноатлантирувчи $C[\beta]$ коэффициент *оптимал коэффициентлар* деб номланади ва $\mathring{C}[\beta]$ кўринишида белгиланади.

1-масалани ечиш давомида қуйидаги асосий натижага эга бўламиз.

**1-теорема**. *(4) - квадратур формуланинг оптимал коэффициентлари қуйдаги кўринишга эга.*

$$\begin{aligned}
\mathring{C}[0] &= \frac{e^h-1}{e^h+1}\left(1-\frac{h(e^h+1)}{2(e^h-1)}+\sum_{j=1}^{k}\frac{h^{2j}B_{2j}}{(2j)!}\right),\\
\mathring{C}[\beta] &= 2\cdot\frac{e^h-1}{e^h+1}\left(1-\frac{h(e^h+1)}{2(e^h-1)}+\sum_{j=1}^{k}\frac{h^{2j}B_{2j}}{(2j)!}\right), \quad \beta=1,2,...,N-1,\\
\mathring{C}[N] &= \frac{e^h-1}{e^h+1}\left(1-\frac{h(e^h+1)}{2(e^h-1)}+\sum_{j=1}^{k}\frac{h^{2j}B_{2j}}{(2j)!}\right).
\end{aligned}$$

Бу ишда [1-3] мақолалардан фойдаланилди.

**Адабиётлар**

1. *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A.* Optimal quadrature formulas of Euler-Maclaurin type, Applied Mathematics and Computation, 2016, 276, p. 340-355.

2. *Hayotov A.R., Rasulov R.G.* The Order of Convergence of an Optimal Quadrature Formula With Derivative in the Space $W_2^{(2,1)}$, Filomat, 2020, 34(11), p. 3835-3844.

3. *Hayotov A.R., Rasulov R.G., Sayfullaeva N.B.* Extension of the Euler-Maclaurin quadrature formula in a Hilbert space, Problems of Computational and Applied Mathematics, 2020, 2(26), p. 12-23.


# Влияние продольной дисперсии на степень преращения реагента в реакторе


**Абдурахимов А.**

*Ташкентский архитектурно строительный институт*

abduraximov1943@mail.ru


Продольное перемешивание в химических реакторах с неоднородным псвдоожиженным слоем существенно влияет на степень превращения реагента, избирательности, выход продукта и другие характеристики. Здесь рассматривается модель проточного реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем, основанную на двухфазной теории течения газа через псевдоожиженный слой. В соответствии рассматриваемой моделью изменение концентрации реагентов в неоднородном пседоожиженном слое в одномерном приближении в случае адиабатического реактора для одностадийной химической реакции можно написать в безразмерном виде:

$$\frac{1}{P_e}\frac{d^2C_1}{dx^2} = u_1\frac{dC_1}{dx} + f(C_1) - A\left(C_1 - C_2\right)$$

$$-u_2\frac{dC_2}{dx} = A\left(C_1 - C_2\right)$$

**Задача.** *Для системы уравнений (1)и (2) граничные условия определяются аналогично условиям Данквертса в случае реактора с продольным перемешиванием :*
при $x = 0$ , $C_1 = C_2$ $\quad \frac{1-\chi}{P_e}\frac{dC_1}{dx} + C_1 = C_f$;
при $x = 1$ , $\frac{dC_1}{dx} = 0$.
где $\chi$-доля объема пузырей;$C_f$ -концентрация смеси на входе реактора. Будим считать, что скорость химической реакции в плотной фазе мала, т.е. $f(C_1) = \varepsilon f(C_1)$(слабая химическая реакция,$\varepsilon \ll 1$ ). Решение задачи (1) и (4) для концентрации реагентов на выходе из реактора с точностью до членов второго порядка малости.

Здесь обозначения принимается как в работе[1]. Зависимость степени превращения реагента как в плотной, так и разбавленной фазе от числа Пекле рассчитанного по параметрам плотной фазы оказалось не монотонной. Найден интервал изменения коэффициента продольного перемешивания, в котором обеспечивается оптимальный режим работы химического реактора с неоднородным кипящим слоем.

**Литература**

1. *Абдурахимов А.* Работа реактора с псевдоожиженном слое. Труды VII международная конференция по математическому моделированию,Якутск: - 2014г. С. 114-116.

# Применение разностной схемы Лакса для численного решения систем уравнений Сен-Венана для канала с прямоугольным поперечным сечением

**Алоев Р.Д.,[1]Акбарова А.А.[2]**

*доктор физико-математических наук, профессор Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека*[1]
*докторант Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека* [2]
aloevr@mail.ru , aziza_aziza_2019@mail.ru

**Аннотация.** Статья посвящена получению экспоненциальной устойчивости численного решения разностной схемы Лакса смешанной задачи, поставленной для систем уравнений Сен-Венана. Квазилинейная система уравнений Сен-Венана была приведена в некоторый специальный канонический вид (1). Далее были приведены численные эксперименты для смешанной задачи для систем уравнений Сен-Венана с помощью разностной схемы Лакса. Получена априорная оценка численного решения краевой разностной задачи. Эта оценка позволяет констатировать экспоненциальную устойчивость численного решения.

**Ключевые слова:** гиперболические системы уравнений, стационарное состояние, система уравнений Сен-Венана, разностная схема..

**Постановка задачи** Нелинейные уравнения Сен-Венана с наклоном и трением задаются следующей системой:

$$\partial_t H + \partial_x(HV) = 0\ eqno(1)$$
$$\partial_t V + \partial_x\left(\frac{V^2}{2} + gH\right) + \left(\frac{kV^2}{H} - gC\right) = 0 \qquad (2)$$

где $H(t,x)$ -глубина воды, $V(t,x)$ - горизонтальная скорость воды. Наклон $C(\bullet) \in C^2([0,L])$ определяется как $C(x) = -\frac{dB}{d1x}$ с $B(x)$ - возвышением дна, g - постоянное ускорение силы тяжести и k - постоянное трение коэффициент.

Систему (1)-(2) как показано в (1) можно привести к виду::

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ b(x) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (3)$$

где

$$\lambda_1(x) = V^* + \sqrt{gH^*} > 0, \qquad \lambda_2(x) = V^* - \sqrt{gH^*} > 0.$$

$$a(x) = \varphi(x)\delta_1(x), \qquad b(x) = \varphi^{-1}(x)\gamma_2(x).$$

$$\varphi_1(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{\gamma_1(s)}{\lambda_1(s)}ds\right), \quad \varphi_2(x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{\delta_2(s)}{\lambda_2(s)}ds\right), \quad \varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$

$$\gamma_1(x) = -\frac{3\left(\frac{kV^{*2}}{H^*} - gC\right)}{4\left(\sqrt{gH^*} + V^*\right)} + \frac{kV^*}{H^*} - \frac{kV^{*2}}{2H^*\sqrt{gH^*}},$$

$$\delta_1(x) = -\frac{\left(\frac{kV^{*2}}{H^*} - gC\right)}{4\left(\sqrt{gH^*} + V^*\right)} + \frac{kV^*}{H^*} + \frac{kV^{*2}}{2H^*\sqrt{gH^*}},$$

$$\gamma_2(x) = \frac{\left(\frac{kV^{*2}}{H^*} - gC\right)}{4\left(\sqrt{gH^*} - V^*\right)} + \frac{kV^*}{H^*} - \frac{kV^{*2}}{2H^*\sqrt{gH^*},}$$

$$\delta_2(x) = \frac{3\left(\frac{kV^{*2}}{H^*} - gC\right)}{4\left(\sqrt{gH^*} - V^*\right)} + \frac{kV^*}{H^*} + \frac{kV^{*2}}{2H^*\sqrt{gH^*}}.$$

$H(x,t) = H^*(x), V(x,t) = V^*(x)$

Для системы уравнений (3) граничные условия при $= 0, L$ будут соответственно

$$y_1(t,0) = k_0\frac{\varphi_1(0)}{\varphi_2(0)}y_2(t,0), \qquad y_2(t,L) = k_1\frac{\varphi_1(L)}{\varphi_2(L)}y_1(t,L), \tag{4}$$

где

$$k_0 = \frac{\sqrt{gH^*(0)} + b_0H^*(0)}{-\sqrt{gH^*(0)} + b_0H^*(0)}, \qquad k_1 = \frac{-\sqrt{gH^*(L)} + b_1H^*(L)}{\sqrt{gH^*(L)} + b_1H^*(L)}.$$

Начальные условия при $t = 0$ даны как

$$y_1(0,x) = y_{10}(x) \qquad y_2(0,x) = y_{20}(x), \tag{5}$$

**Разностная схема Лакса для системы уравнений Сен-Венана**

В области $G$ построим разностную сетку:

$$G = \{(t_j, x_i): \ 0 \le t_j \le T, \ 0 \le x_i \le L\}$$

где

$$t_j = j\tau, \ \ j = 0, \ldots, N; \quad N\tau = T, \ \ T = 1, \ N = 500$$

$$x_i = ih; \quad i = 0, \ldots, M; \ \ Mh = L. M = 2200, \ L = 2000$$

Разностная схема Лакса для смешанной задачи (3)-(5) формулируется так:

$$\frac{(y_1)_i^{j+1} - \frac{(y_1)_{i+1}^j + (y_1)_{i-1}^j}{2}}{\tau} + \lambda\frac{(y_1)_{i+1}^j + (y_1)_{i-1}^j}{2h} + a_i(y_2)_i^j = 0$$

$$\frac{(y_2)_i^j - \frac{(y_2)_{i+1}^j + (y_2)_{i-1}^j}{2}}{\tau} - \lambda_2\frac{(y_2)_{i+1}^j + (y_2)_{i-1}^j}{2h} + b_i(y_1)_i^j = 0$$

Граничные условия аппроксимируются как

$$(y_1)_0^j = r(y_2)_0^j \qquad (y_2)_M^j = s(y_1)_M^j,$$

Начальные условия (5) аппроксимируются следующим образом:

$$(y_1)_i^0 = (y_{10})_i \qquad (y_2)_i^0 = (y_{20})_i,$$

Численное решение уравнений Сен-Венана требует больших вычислительных ресурсов и затрат. Проблемы в численных методах для уравнений Сен-Венана включают расчет глубины воды и горизонтальной скорости воды, если канал имеет большую длину. Проблема заключается в том, что численные решения должны удовлетворять линейной зависимости (между максимальным шагом по времени и размером ячейки), определяемой условием Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ). Мы рассмотрели, как $L^2$ -норма будет вести себя в различных случаях, например, когда выполняется условие КФЛ и выполняются граничные условия, а также в случае, когда не выполняются граничные условия или условия КФЛ. Мы добились экспоненциальной устойчивости численного решения, выбрав наилучшее значения коэффициентов граничных условий. Многочисленные численные эксперименты демонстрируют надежность предложенного численного решения.

**Литература**


1. *S.K.Godunov,* Equations of mathematical physics, Nauka, 1979
2. *G.Bastin and J.M.Coron,* Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhauser Basel press, 2016.
3. *A. Hayat and P. Shang,* A quadratic lyapunov function for saint-venant equations with arbitrary friction and space-varying slope, hal 01704710. (2018)
4. *R.D.Aloev and M.U.Khudoyberganov,* A discrete analogue of the lyapunov function for hyperbolic systems, Contemporary Mathematics.Fundamental Directions 64, 591-602 (2018).


# Устойчивость по Ляпунову противопоточной разностной схемы для линейных уравнений Сен-Венана


**Алоев Р.Д.,[1] Акбарова А.А.,[2] Жураев Ш.Б.[3]**

[1] *доктор физико-математических наук, профессор Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека*

[2] *докторант Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека*

[3] *преподаватель Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека*

aloevr@mail.ru , aziza_aziza_2019@mail.ru,



**Аннотация.** В этой статье доказана экспоненциальная устойчивость противопоточной разностной схемы расщепления по младшим членам для линейных уравнений Сен-Венана. Рассмотрен общий случай, когда произвольное трение и изменяющийся в пространстве наклон включены в систему, что приводит к неоднородным установившимся состояниям. Построена явная дискретная квадратичная функция Ляпунова. Найдено условие для граничных условий, при выполнение которых доказана устойчивость экспоненциальной устойчивости разностной схемы расщепления по младшим членам для линейных уравнений Сен-Венана для $L^2$-нормы.



**Ключевые слова:** Уравнения Сен-Венана, гиперболическая система, схема расщепления, противопоточная разностная схема, устойчивость.

**1. Постановка задачи** Рассмотрим гиперболическую систему с переменными коэффициентами и с младшими членами

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ b(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

и с граничными условиями при $x = 0, L$ соотвественно:

$$\begin{cases} y_1(t,0) = ry_2(t,0), \\ y_2(t,L) = sy_1(t,L), \end{cases} \qquad \forall t > 0 \tag{2}$$

и с начальными данными при $t = 0$:

$$\begin{cases} y_1(0,x) = y_{10}(x), \\ y_2(0,x) = y_{20}(x), \end{cases} \quad 0 \le x \le L. \tag{3}$$

Здесь

$$\lambda_1(x) = \sqrt{gH^*} + V^* > 0, \quad \lambda_2(x) = \sqrt{gH^*} - V^* > 0,$$

$$a(x) = \varphi(x)\delta_1(x), \quad b(x) = \varphi^{-1}(x)\gamma_2(x),$$

$$\varphi_1(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{\gamma_1(s)}{\lambda_1(s)} ds\right), \quad \varphi_2(x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{\delta_2(s)}{\lambda_2(s)} ds\right), \quad \varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$

$$\gamma_1(x) = -\frac{3f(H*,V*)}{4\left(\sqrt{gH*} + V*\right)} + \frac{kV*}{H*} - \frac{kV*^2}{2H*\sqrt{gH*}},$$

$$\delta_1(x) = -\frac{f(H*,V*)}{4\left(\sqrt{gH*} + V*\right)} + \frac{kV*}{H*} + \frac{kV*^2}{2H*\sqrt{gH*}},$$

$$\gamma_2(x) = \frac{f(H*,V*)}{4\left(\sqrt{gH*} + V*\right)} + \frac{kV*}{H*} - \frac{kV*^2}{2H*\sqrt{gH*}},$$

$$\delta_2(x) = \frac{3f(H*,V*)}{4\left(\sqrt{gH*} + V*\right)} + \frac{kV*}{H*} + \frac{kV*^2}{2H*\sqrt{gH*}},$$

$$f(H*,V*) = \frac{kV*^2}{H*} - gC,$$

$$k_0 = \frac{b_0 H^*(0) + \sqrt{gH^*(0)}}{b_0 H^*(0) - \sqrt{gH^*(0)}}, \quad k_1 = \frac{b_1 H^*(L) - \sqrt{gH^*(L)}}{b_1 H^*(L) + \sqrt{gH^*(L)}},$$

$$r = k_0 \frac{\varphi_1(0)}{\varphi_2(0)}, \; s = k_1 \frac{\varphi_2(L)}{\varphi_1(L)},$$

$$(y_{10}, y_{20})^T \in L^2\left((0,L); \mathrm{R}^2\right),$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t,x) \\ y_2(t,x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{g}{H*}} & 1 \\ -\sqrt{\frac{g}{H*}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(t,x) \\ V(t,x) \end{pmatrix}$$

$H(t,x) = H^*(x)$ $V(t,x) = V^*(x)$- стационарное решение системы уравнений Сан-Венана;

$H(t,x)$ - глубина воды,, $V(t,x)$ - - горизонтальная скорость воды являются неизвестными функциями двух переменных $(t,x)$; $C(x) \in C^2([0,L])$- -наклон дна канала; $g$ - постоянное ускорение силы тяжести и $k$ - постоянный коэффициент трения.

**2. Разностная схема расщепления по младшим членам.**

В области $G = \{(t,x) : 0 \le t \le T, 0 \le x \le L\}$ построим разностную сетку с шагами $\Delta t$ по направлению $t$ и $\Delta x$ по направлению $x$. Узловые точки разностной сетки (означающие пересечению прямых линий $t = t^\kappa \triangleq \kappa \Delta t$ и $x = x_j \triangleq j\Delta x$ ) обозначим через $(t^\kappa, x_j)$ . Множество узловых точек разностной сетки обозначим через $G_h$ , где

$$G_h \triangleq \{(t^\kappa,\ x_j) : \quad \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K};\ j = 0, \ldots, J\}.$$

И значения численного решения в узловых точках обозначим через

$$(y_i)_j^\kappa = y_i(t^\kappa, x_j), \quad i = 1, 2;\ \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K};\ \ j = 0, \ldots, J.$$

Шаги разностной сетки $\Delta t$, $\Delta x$ подберем таким образом, чтобы выполнялись равенства $\mathrm{K}\,\Delta t = T$ и $J\Delta x = L$. . Для нахождения численного решения смешанной задачи (1-3) над разностной сеткой $G_h$,, предлагаем следующую противопоточную разностную схему расщепления по младшим членам

$$\left\{ \begin{array}{ll} (z_1)_j^\kappa = (y_1)_j^\kappa - (\lambda_1)_j \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(y_1)_j^\kappa - (y_1)_{j-1}^\kappa\right], & j = 1, \ldots, J; \\ (z_2)_j^\kappa = (y_2)_j^\kappa - (\lambda_2)_j \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(y_2)_j^\kappa - (y_2)_{j+1}^\kappa\right], & j = 0, \ldots, J-1; \end{array} \right. \quad \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K} - 1, \qquad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (y_1)_j^{\kappa+1} = (z_1)_j^\kappa - \Delta t a_j\,(z_2)_{j-1}^\kappa, & j = 1, \ldots, J; \\ (y_2)_j^{\kappa+1} = (z_2)_j^\kappa - \Delta t b_j\,(z_1)_{j+1}^\kappa, & j = 0, \ldots, J-1; \end{array} \right. \quad \kappa = 0, \ldots, \mathrm{K} - 1. \qquad (5)$$

Граничные условия (2) аппроксимируются следующим способом:

$$\left\{ \begin{array}{l} (y_1)_0^\kappa = s\,(y_2)_0^\kappa, \\ (y_2)_J^\kappa = r\,(y_1)_J^\kappa, \end{array} \right. \qquad \kappa = 1, \ldots, \mathrm{K}. \qquad (6)$$

Начальные условия (3) аппроксимируются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} (y_1)_j^0 = (y_{10})_j, \\ (y_2)_j^0 = (y_{20})_j, \end{array} \right. \qquad j = 0, \ldots, J. \qquad (7)$$

Предположим, что шаги разностной сетки удовлетворяют условию Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{\substack{1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le J}} \left|(\lambda_i)_j\right| \le 1. \qquad (8)$$

А теперь исследуем вопрос об экспоненциальной устойчивости численного решения разностной задачи (4-7). Сперва дадим определение экспоненциальной устойчивости численного решения разностной задачи (4-7).

**Определение 1.** Решение разностной схемы (4-5) удовлетворяющий граничным условиям (6) называется экспоненциально устойчивым, если существуют такие положительные константы $\eta > 0$ и $A > 0$ что для любого начального условия $\left((y_0)_j\right) \triangleq \begin{pmatrix} (y_{10})_j \\ (y_{20})_j \end{pmatrix} \in \mathrm{L}^2\left(\{x_j\},\ \ j = 0, \cdots J; \mathrm{R}^2\right)$, решение разностной начально-краевой задачи (4-7) удовлетворяет неравенству

$$\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left[(y_1)_j^\kappa\right]^2+\Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left[(y_2)_j^\kappa\right]^2\leq$$
$$\leq Ae^{-\eta t_\kappa}\left\{\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left[(y_{10})_j\right]^2+\Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left[(y_{20})_j\right]^2\right\},\quad \kappa=1,\ldots,\mathrm{K}.$$

Здесь $\mathrm{L}^2\left(\{x_j\},\ \ j=0,\cdots J;\mathrm{R}^2\right)$ дискретное пространство $\mathrm{L}^2$, норма в котором определяется равенством

$$\left\|(y_0)_j\right\|_{\mathrm{L}^2(\{x_j\},\ j=0,\cdots J;\mathrm{R}^2)}=\sqrt{\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left[(y_{10})_j\right]^2+\Delta x\sum_{j=0}^{J-1}\left[(y_{20})_j\right]^2}$$

и она является ограниченной.

Рассмотрим разностную краевую задачу (4-6) со стационарным решением

$$y_j^\kappa\triangleq\begin{pmatrix}[y_1]_j^\kappa\\ [y_2]_j^\kappa\end{pmatrix}=0,\quad \kappa=0,\ldots,\mathrm{K};\quad j=0,\ldots,J$$

Для того, чтобы доказать экспоненциальной устойчивости разностной начально-краевой задачи (4-7), предлагаем в качестве кандидатуры дискретной функции Ляпунова следующую функцию $V^\kappa$

$$V(\kappa\Delta)=V^\kappa=V_1^\kappa+V_2^\kappa,\qquad U(\kappa\Delta)=U^\kappa=U_1^\kappa+U_2^\kappa,$$

где

$$\left\{\begin{array}{l}V_1^\kappa\triangleq\Delta x\sum_{j=1}^{J}f_1(x_j)\left[(y_1)_j^\kappa\right]^2\exp\left(-\frac{\mu}{(\lambda_1)_j}x_j\right),\\ V_2^\kappa\triangleq\Delta x\sum_{j=0}^{J-1}f_2(x_j)\left[(y_2)_j^\kappa\right]^2\exp\left(\frac{\mu}{(\lambda_2)_j}x_j\right),\end{array}\right.\tag{9}$$

$$\left\{\begin{array}{l}U_1^\kappa\triangleq\Delta x\sum_{j=1}^{J}f_1(x_j)\left[(z_1)_j^\kappa\right]^2\exp\left(-\frac{\mu}{(\lambda_1)_j}x_j\right),\\ U_2^\kappa\triangleq\Delta x\sum_{j=0}^{J-1}f_2(x_j)\left[(z_2)_j^\kappa\right]^2\exp\left(\frac{\mu}{(\lambda_2)_j}x_j\right),\end{array}\right.\tag{10}$$

а параметр $\mu>0$ и две функции $f_1\in C^1([0,L];(0,+\infty))$, $f_2\in C^1([0,L];(0,+\infty))$ подлежать определению.

**Теорема 1.** Пусть $T>0$ и дискретная функция Ляпунова определена с помощью формулы (9-10). Если шаги разностной сетки удовлетворяют условию КФЛ (8) и параметры граничных условий (2) $b_0,b_1$ подчиняются неравенству

$$b_0\in-\left(\frac{g}{V^*(0)},-\frac{V^*(0)}{H^*(0)}\right),\ b_1\in\mathrm{R}\backslash\left[-\frac{g}{V^*(L)},-\frac{V^*(L)}{H^*(L)}\right].\tag{11}$$

тогда численное решение $y_j^\kappa$ разностной начально краевой задачи (1-4) экспоненциально устойчиво в $\mathrm{L}^2$-норме.

## Литература


1. *Godunov S.K.* Equations of mathematical physics, Nauka, 1979

2. *Bastin and G., Coron J.M.* Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhauser Basel press, 2016.

3. *A. Hayat and P. Shang,* A quadratic lyapunov function for saint-venant equations with arbitrary friction and space-varying slope, hal 01704710. (2018)
4. *R.D.Aloev and M.U.Khudoyberganov,* A discrete analogue of the lyapunov function for hyperbolic systems, Contemporary Mathematics.Fundamental Directions 64, 591-602 (2018).

# Математический модель и метод решения колебания вязкоупругого стержня при учете связанности полей деформаций и температуры

**Акбаров У., Солиев Ш.**

*Кокандский государственный педагогический институт*
uakbarov1961@mail.ru

Всем известно, что стержневые элементы очень широко используется в самых различных областях технике и в строительстве. В реальных условиях на стержни могут действовать различные механические нагрузки, которые приводит к возникновению колебаний. Возникающие колебания могут существенно влиять на надежность стержневых элементов и тем самым на надежность конструкции в целом.

В последнее время в современной технике широко применяются полимеры и композиты на их основе, обладающие ярко выраженными вязкоупругими свойствами. Кроме того, при достижении определённого уровня температуры или в зависимости от других факторов вязкоупругими свойствами обладают и традиционные упругие материалы. Поэтому рассмотрение задач о колебаниях и устойчивости вязкоупругих элементов тонкостенных конструкций с учетом температурных воздействий является актуальной.

Математическое моделирование динамических задач о колебаниях и устойчивости вязкоупругих систем является также весьма актуальным. Об этом свидетельствуют выход в свет ранее и за последнее годы ряда научных работ (1-3, 7-10).

Решение задач вязкоупругих систем при динамических воздействиях вызывает большие трудности, поскольку связан с рассмотрением интегро-дифференциальных уравнений.

Решение интегро-дифференциальных уравнений задач вязкоупругих систем еще усложняется при учете связанности полей деформаций и температуры, за счет появление связанное уравнение теплопроводности. Постановка задач учета связанности полей деформаций и температуры и получение связанное уравнение теплопроводности можно найти в работах (4-6).

В работе [2] для решения нелинейные интегро-дифференциальные уравнения предложен численный метод, основанным на использовании квадратурных формул и показаны эффективности этого метода, с точки зрения простаты использование и точности, с помощью тестовыми примерами. После этого с этим методом решены задачи о динамической устойчивости вязкоупругих стержней и пластин при быстровозрастающих нагрузках во времени (1,9) и до настоящего времени продолжаются использовать для решения различных задач (10).

Рассмотрим на основе связанных уравнении термовязкоупругости поперечные колебания прямолинейного вязкоупругого стержня. Ось стержня направлена вдоль оси

$x$. Предположим, что стержень имеет начальный прогиб $u_0 = u_0(x)$ и его сечения является постоянным по длине.

Связь между напряжением $\sigma$ и деформацией $\varepsilon$ примем в виде

$$\sigma_x = E(1 - R^*)(\varepsilon_x - \alpha_T T), \tag{1}$$

а геометрическую зависимость зададим уравнением

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 (u - u_0)}{\partial x^2}, \tag{2}$$

здесь $u = u(x,\ t)$ – поперечный прогиб стержня; $z$ – расстояние от точки поперечного сечения стержня до нейтральной оси.

Подставляя (1) и (2) в уравнения

$$m_c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + q, \qquad M_x = \iint_F z\sigma_x dF,$$

получим

$$EJ\left(1 - R^*\right)\frac{\partial^4\left(u - u_0\right)}{\partial x^4} + m_c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q - E\alpha_T(1 - R^*)\frac{\partial^2}{\partial x^2}M_\theta; \tag{3}$$

здесь $EJ$ – жесткость стержня при изгибе; $m_c$ – масса стержня, отнесенная к единице длины; $\alpha_T$ – коэффициент линейного теплового расширения; $M_\theta = \iint_F z\Theta dF$; $\Theta = T - T_0$ – приращение температуры, $T_0$ – начальная абсолютная температура; $q$ – дополнительная статическая нагрузка; $F$ – площадь поперечного сечения стержня; $R^*$ – интегральный оператор с ядром релаксации $R\left(t\right)$ : $R^*\varphi = \int\limits_0^t R(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau$.

Уравнение (3) рассмотрим совместно со связанным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = a_T\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right) - -\frac{E\alpha_T T_0}{\left(1 - 2\nu\right)C_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(1 - R^*\right)e, \tag{4}$$

где $a_T = \frac{\lambda_T}{C_T}$ – коэффициент температурапроводности; $\lambda_T$ – коэффициент теплопроводности; $C_T$ – удельная теплоемкость при отсутствии деформаций; $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – объемное расширение.

Если рассмотрим задачу о поперечных колебаниях прямолинейного вязкоупругого стержня, нагруженного продольной силой $P(t)$, то уравнение (3) примет вид

$$EJ\left(1 - R^*\right)\frac{\partial^4\left(u - u_0\right)}{\partial x^4} + P\left(t\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m_c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q - E\alpha_T\left(1 - R^*\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}M_\theta\ .$$

Если предположим, что стержень прямоугольного поперечного сечения имеет высоту $h$, ширину $b$ и длину $l$, то $J,\ M_x\ \ M_\theta$ приобретает вид

$$J = \frac{bh^3}{12}, \quad M_x = \int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_x\, zdz = -E\left(1 - R^*\right)\left[J\frac{\partial^2 (u - u_0}{\partial x^2} + a_T M_\theta\right]\ ,$$

$$M_\theta = \int\limits_{-b/2}^{b/2}\ \int\limits_{-h/2}^{h/2} z\Theta dydz.$$

Перейдем к решению конкретных задач.

Рассмотрим поперечные колебания свободно опертой на две опоры вязкоупругой балки под действием внезапно подведенного, к поверхности балки теплового потока. Балка прямоугольного поперечного сечения имеет высоту $h$, ширину $b$ и длину $l$. Тепловой поток плотности $q$, подводится к поверхности балки $z = h/2$. Поверхность балки $z = -h/2$ тепло изолирована, а ее концы $x = 0$ и $x = l$ поддерживаются при постоянной температуры $\Theta = 0$.

Математическая модель этой задачи описывается уравнением (3) и уравнением теплопроводности [6]

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = a_T \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) - - \frac{E \alpha_T T_0}{(1-2\nu) C_T} \frac{\partial}{\partial t} (1 - R^*) e \tag{5}$$

Входящее в это уравнение объемное расширение определено для балки в работе [3] в следующим виде

$$e = -(1-2\nu) z \frac{\partial^2 (u - u_0)}{\partial x^2} - 2(1+\nu) \alpha_T \Theta. \tag{6}$$

Для описания рассматриваемой задачи к системе уравнений (3) и (6) присоединяем начальные и граничные условия.

Переход к безразмерным величинам, присоединения начальные и граничные условия и решение уравнение теплопроводности показаны в работе (3) и написано в виде

$$[1 + 2\varepsilon (1-\nu)(1 - R^*)] \Theta^{**} + \delta_{mk}^2 \int_0^t \Theta^{**}(\tau) d\tau = \frac{2(-1)^k}{m\pi} t +$$

$$+ \varepsilon_1 \omega_m^2 \frac{\left[1 - (-1)^k\right]}{k^2 \pi^2} (1 - R^*)(u^* - u_0^*) \tag{7}$$

где $\varepsilon = \frac{(1+\nu)\alpha_T^2 E T_0}{(1-\nu)(1-2\nu)c_T}$ , $\varepsilon_1 = \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{1+\nu} \varepsilon$.

Решение безразмерное уравнение

$$(1 - R^*) \frac{\partial^4 (u - u_0)}{\partial x^4} + \frac{1}{B^4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (1 - R^*) \frac{\partial^2 \chi_T}{\partial x^2} = q, \tag{8}$$

представляем в виде

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \varphi_m(x), \quad u_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{0m} \varphi_m(x), \tag{9}$$

где $\varphi_m(x) = \sin m\pi x$ - собственные формы колебаний свободно опертой балки.

Подставляя выражение (9) в уравнение (8) и выполняя процедуру Бубнова– Галеркина, получим для функции $u_m(t)$ уравнение (3)

$$\ddot{u}_m + (m\pi)^4 B^4 (1 - R^*)(u_m - u_{0m}) + 96 m^2 \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^2} (1 - R^*) \Theta^{**} = q^* \tag{10}$$

Для решения уравнения решения (10) применим численный метод, основанный на использовании квадратурных формул (2,3). Согласно этому методу дважды интегрируя уравнение (10) по $t$ и заменяя интегралы конечной суммой по некоторой квадратурной формуле при ядрах Колтунова – Ржаницина $R(t) = At^{\alpha-1}e^{-\beta t},\ A,\ \beta > 0,\ 0 < \alpha < 1$, будем иметь

$$u_{nm} = u_{0m} + \dot{u}_{0m}t_n +$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1} A_j(t_n - t_j)\left\{q_j^* - (m\pi)^4 B^4 \left[u_{jm} - u_{0m} - \frac{A}{\alpha}\sum_{i=1}^{j} B_i e^{-\beta t_i}\left(u_{j-i,m} - u_{0m}\right)\right] -\right.$$
$$\left. -96m^2 \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left[\Theta_j^{**} - \frac{A}{\alpha}\sum_{i=1}^{j} B_i e^{-\beta t_i}\Theta_{j-i}^{**}\right]\right\}. \qquad (11)$$

Значение $\Theta_j^{**} = \Theta^{**}(t_j)$ также определяется из (7) при замене интегралов некоторыми квадратурными формулами

$$\Theta_j^{**} = \frac{1}{1 + 2\varepsilon(1-\nu)\left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) + \delta_{mk}^2 C_0}\left\{2\varepsilon(1-\nu)\frac{A}{\alpha}\sum_{i=1}^{j-1} B_i e^{-\beta t_i}\Theta_{j-i}^{**} - \delta_{mk}^2 \sum_{i=1}^{j-i} C_i \Theta_i^{**} +\right.$$
$$\left. +\frac{2(-1)^k}{m\pi}t_j + \frac{1}{2}\varepsilon_1\omega_m^2\frac{\left[1-(-1)^k\right]}{k^2\pi^2}\left[u_{jm} - u_{0m} - \frac{A}{\alpha}\sum_{i-1}^{j} B_i e^{-\beta t_i}\left(u_{j-i,m} - u_{0m}\right)\right]\right\}, \qquad (12)$$

$A_j,\ B_i,\ C_{\mathrm{i}}$ - числовые коэффициенты принимающие различные значения в зависимости от использования квадратурных формул.

## Литература


1. *Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Акбаров У.Й.* Устойчивость вязкоупругой пластины при динамическом нагружении. //Прикладная механика. 1991. Т.27. N 9. С.78-87.

2. *Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М.* О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости //Прикладная математика и механика. –Т.51. –1987. N 5. –с.867-871.

3. *Акбаров У.Й.* Колебания вязкоупругого стержня при учете связанности полей деформации и температуры //Узб. журнал Проблемы механикии. -1997, N 1, -С.10-17

4. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. –М.: Наука, 1970, -280 с.

5. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. –Киев: Наука. думка, 1982. –260 с.

6. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. –Киев: Вища школа. –1975.

7. *Акбаров У.Й., Абдуллаев З.С.* Устойчивость вязкоупругой пластины, нагреваемой потоком тепла //Журнал Доклады АН РУ. N 11. 1996 г.

8. *Абдуллаев З.С., Эшматов Х.* Колебания прямоугольной вязкоупругой пластины в температурном поле //Узбекский журнал проблемы механики. N 5-6. –1995. –с.3-7.

9. *Акбаров У.Й., Бадалов Ф.Б., Эшматов Х.* Устойчивость вязкоупругих стержней при динамическом нагружении//ПМТФ. -1992. N 4, -С.153-157.

10. *Абдикаримов Р.А., Мансуров М.М., Акбаров У.Й.* Численное исследование флаттера вязкоупругого жестко-защемленного стержня с учетом физической и аэродинамической нелинейностей.//Вестник РГГУ. Информатика. Информационная безопасность. Математика. Научный журнал. М., 3/2019, 94-106 с.

# Оптимизация методов для вычисления весовых сингулярных интегралов типа Коши

**Ахмедов Д.М.**

*Институт математики имени В.И.Романовского*
e-mail d.akhmedov@mathinst.uz

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} \omega_i(x)\frac{\varphi(x)}{x-t}dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C^{(i)}[\beta]\varphi([\beta]-1), \tag{1}$$

где $i = 1,2,3,4$;

$$\begin{array}{rclrcl} \omega_1(x) & = & (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, & \omega_2(x) & = & (1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \\ \omega_3(x) & = & \omega_2^{-1}(x), & \omega_4(x) & = & \omega_1^{-1}(x), \end{array}$$

$-1 < t < 1$, $\varphi(x)$ - подынтегральная функция, $C_\beta^{(i)}$ - коэффициенты, $x_\beta - 1$ - узлы, $N = 2,3,4....$

Приближенным вычислением сингулярного интеграла типа Коши занимались многие авторы (см., например, (1-5) и литературы в них).

Из (4) при $m = 2$ для оптимальных коэффициентов квадратурных формул виде (1) в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$ получим следующую систему линейных уравнений.

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C^{(i)}([\gamma],t)\cdot\frac{|h\beta-h\gamma|^3}{12} + p_1^{(i)}\cdot([\beta]-1) + p_0^{(i)} = f^{(i)}([\beta]-1,t), \tag{2}$$

$$\beta = 0,1,2,...,N,$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C^{(i)}([\gamma],t) = g_0^{(i)}, \tag{3}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C^{(i)}([\gamma],t)\cdot([\gamma]-1) = g_1^{(i)}. \tag{4}$$

Здесь

$$f^{(i)}(h\beta-1,t) = \frac{1}{12}\int_{-1}^{1}\omega_i(x)\frac{|x-(h\beta-1)|^3}{x-t}dx, \tag{5}$$

$$g_0^{(i)} = \int_{-1}^{1}\frac{\omega_i(x)dx}{x-t}, \tag{6}$$

$$g_1^{(i)} = \int_{-1}^{1}\frac{\omega_i(x)x}{x-t}dx, \tag{7}$$

$C^{(i)}([\gamma],t)$, $\gamma=\overline{0,N}$ и $p_1^{(i)}$, $p_0^{(i)}$ - неизвестные.
Интегралы (5)-(7) вычисляются используя соответствующие формулы из (6).

Целью настоящей работы является нахождение оптимальных коэффициентов $C^{(i)}([\gamma],t)$, $\gamma=\overline{0,N}$, и неизвестных $p_1^{(i)}$, $p_0^{(i)}$, которые являются решением системы (2)-(4) при $h\beta-1\neq t$.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Среди всех квадратурных формул вида (1) в пространстве* $L_2^{(2)}(-1,1)$ *существуют единственная оптимальная квадратурная формула, коэффициенты определяются равенствами*

$$
\begin{aligned}
C^{(i)}[0] \;&=\; \tfrac{6}{h^3}\Bigg[\tfrac{g_0^{(i)}}{12}h^3+a_1^{(i)-}h(q+1)+f^{(i)}(-1,t)(3q+2)-f^{(i)}(h-1,t)\times\\
&\times(12q+5)+q^N\Bigg(-3f^{(i)}(1,t)(q+1)-a_1^{(i)+}h(q+2)-\tfrac{g_0^{(i)}}{4}h^2+\\
&+\tfrac{g_1^{(i)}}{4}(h^2+4h(q+2))\Bigg)+6(q+2)\sum_{\gamma=2}^{N}q^{\gamma}f^{(i)}(h\gamma-1,t)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^{(i)}[\beta] \;&=\; \tfrac{6}{h^3}\Bigg[6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{\beta-2}q^{\beta-\gamma}f^{(i)}(h\gamma-1,t)+(6q+4)f^{(i)}(h\beta-1,t)-\\
&-(12q+5)\Bigg(f^{(i)}(h(\beta-1)-1,t)+f^{(i)}(h(\beta+1)-1,t)\Bigg)+\\
&6(q+2)\sum_{\gamma=\beta+2}^{N}q^{\gamma-\beta}f^{(i)}(h\gamma-1,t)+q^{\beta}\Bigg(-\tfrac{g_1^{(i)}+g_0^{(i)}}{4}h^2+a_1^{(i)-}\times\\
&\times h(q+2)-3(q+1)f^{(i)}(-1,t)\Bigg)-q^{N-\beta}\Bigg(3(q+1)f^{(i)}(1,t)+a_1^{(i)+}\times\\
&\times h(q+2)+\tfrac{g_0^{(i)}}{4}h^2-\tfrac{g_1^{(i)}}{4}(4h(q+2)+h^2)\Bigg)\Bigg],\ \beta=\overline{1,N-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^{(i)}[N] \;&=\; \tfrac{6}{h^3}\Bigg[6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{N-2}q^{N-\gamma}f^{(i)}(h\gamma-1,t)-f^{(i)}(1-h,t)(12q+5)+\\
&+f^{(i)}(1,t)(3q+2)+\tfrac{g_0^{(i)}}{12}h^3+h(q+1)(g_1^{(i)}-a_1^{(i)+})+\\
&+q^N\Bigg(-\tfrac{g_1^{(i)}+g_0^{(i)}}{4}h^2+a_1^{(i)-}h(q+2)-3(q+1)f^{(i)}(-1,t)\Bigg)\Bigg].
\end{aligned}
$$

где $f^{(i)}(h\beta-1,t)$, $g_0^{(i)}$, $g_1^{(i)}$, $a_1^{(i)-}$ и $a_1^{(i)+}$—неизвестные, $i=1,2,3,4$.

## Литература


1. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных уравнений и численный экспримент. (в математической физике, теории упругости и дифракции волк).-М.: ТОО "Янус 1995. -520с.

2. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. -М.: Наука, 1985. -256с.

3.*Габдулхаев Б.Г.* Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов I // Известия вузов. Математика. 1975. N 4. -С.3-13.

4.*Исраилов М.И., Шадиметов Х.М.* Весовые оптимальные квадратурные формул для сингулярных интегралов типа Коши. ДАН Узбекистан -1991, N 8, -С.10-11.

5. *Шадиметов Х.М.* Оптимальные квадратурные формул для сингулярных интегралов типа Коши. ДАН Узбекистан -1987, N 6, -С.9-11.

6. *Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П.* Таблицы неопределенных интегралов. -М.: Наука, 1986, -191с

# Оптимальная квадратурная формула в смысле Сарда для вычисления коэффициентов Фурье в $K_{2,\omega}(P_2)$

**Ахмадалиев Г.Н.**

*Ташкентский Государственный Транспортный Унверситет, Ташкент, Узбекистан*

e-mail ahmadaliyev78@mail.ru

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta). \tag{1}$$

Здесь $C_\beta$ - коэффициенты формулы (1), $h = 1/N$, $N$ – натуральное число. Функции $\varphi$ принадлежат в пространству $K_{2,\omega}(P_2)$: – гильбертово пространство функций и скалярное произведение в этом пространстве определяется следующим образом

$$\langle \psi_\ell, \varphi \rangle = \int\limits_0^1 \left( \psi_\ell^{(4)}(x) - 2\omega^2 \psi_\ell{}''(x) + \omega^4 \psi_\ell \right) \varphi(x)dx.$$

В этом пространстве норма определяется следующим равенством

$$\|\varphi(x)|K_2(P_2)| = \left\{ \int\limits_0^1 \left( \varphi''(x) - \omega^2 \varphi(x) \right)^2 dx \right\}^{1/2}, \text{ здесь } \omega > 0.$$

Основной целью настоящей работы является решить задачу Сарда для квадратурных формул вида (1) в пространстве $K_{2,\omega}(P_2)$, т.е. найти коэффициенты $C_\beta$, которые дают наименьшее значение нормы функционала погрешности, т.е.

$$\|\mathring{\ell}|K_2^*(P_2)\| = \inf_{C_\beta} \|\ell|K_2^*(P_2)\|. \tag{2}$$

Таким образом, чтобы построить оптимальные квадратурные формулы вида (1) в смысле Сарда нам следует последовательно решить следующие задачи.

**Задача 1.** Найти норму функционала погрешности квадратурных формул вида (1) в пространстве $K_{2,\omega}(P_2)$.

**Задача 2.** Найти коэффициенты $C_\beta$ , которые удовлетворяют равенство (2).

Следует отметить, что работы [1,2,3] посвящены построению квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов Фурье в пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

В настоящей работе получены явные формулы оптимальных квадратурных формул вида (1) пространстве $K_{2,\omega}(P_2)$.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда в пространстве $K_{2,\omega}(P_2)$ выражаются формулами

$$C_\beta = \begin{cases} \dfrac{(\omega h + sinh(\omega h))cosh(\omega h) - 2sinh(\omega h)}{\omega sin(\omega h)(\omega h + sinh(\omega h))} - \\ \quad -\frac{(\omega h - sinh(\omega h))(\lambda_1^{N-1}+\lambda_1)}{\omega sinh(\omega h)(\omega h + sinh(\omega h))(\lambda_1^N+1)}), & \beta = 0, \\ T + m(\lambda_1^\beta + \lambda_1^{N-\beta}), & \beta = \overline{1, N-1}, \\ \dfrac{(\omega h + sinh(\omega h))cosh(\omega h) - 2sinh(\omega h)}{\omega sin(\omega h)(\omega h + sinh(\omega h))} - \\ \quad -\frac{(\omega h - sinh(\omega h))(\lambda_1^{N-1}+\lambda_1)}{\omega sinh(\omega h)(\omega h + sinh(\omega h))(\lambda_1^N+1)}), & \beta = N, \end{cases}$$

Здесь T известный величены, $\lambda_1$ и m определено следующим равенство

$$m = \frac{(sinh(\omega h) - (\omega h))(\lambda_1^2 - 2\lambda_1 cosh(\omega h) + 1)}{\omega sinh(\omega h)((\omega h) + sinh(\omega h))(\lambda_1^{N+1} + \lambda_1^N)}$$

$$\lambda_1 = \frac{2\omega h - \sinh(2\omega h) + 2\sinh(\omega h)\sqrt{\sinh^2(\omega h) - (\omega h)^2}}{2(\omega h \cdot \cosh(\omega h) - \sinh(\omega h))}, \ \ |\lambda_1| < 1.$$

### Литература


1. *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Khudayberganov M.* Optimal quadrature formula for approximate calculation of Fourier coefficients in $W_2^{(1,0)}$ space - Проблемы вычислительной и прикладной математики . Num. 1, 2015,p. 71-77.

2. *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G.V.* Optimal quadrature formulas coefficients in $W_2^{(m,m-1)}$ space Journal of Applied Mathematics and Computation. v.7. Num. 4, 2017, p. 1233-1266.

3. *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M.* Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ Numer Algor. Num. 74, 2017, p. 307-336.


# Об экстремальной функции одной оптимальной интерполяционной формулы


**Болтаев А.К.**

*Институт математики имена В.И. Романовского АН РУз*

aziz_boltayev@mail.ru


Рассмотрим следующую интерполяционную формулу:

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(x)\varphi(x_\beta) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x,z)=\delta(x-z)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\delta(x-x_\beta), \tag{2}$$

где $C_\beta(x)$ – коэффициенты $x_\beta(\in[0,1])$ – узлы формулы (1), $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $W_2^{(3,0)}$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\left\|\varphi(x)|W_2^{(3,0)}(0,1)\right\|=\left[\int_0^1\left(\varphi^{(3)}(x)+\varphi(x)\right)^2dx\right]^{1/2}, \tag{3}$$

*Погрешностью* интерполяционной формулы (1) называется разность

$$(\ell,\varphi)=\varphi(z)-P_\varphi(z)=\varphi(z)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\varphi(x_\beta)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta(x-z)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\delta(x-x_\beta)\right)\varphi(x)dx. \tag{4}$$

Задача построения оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(3,0)}$ - это вычисление следующей величины:

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}|W_2^{(3,0)*}\right\|=\inf_{C_\beta(z),x_\beta}\sup_{\|\varphi\|\neq0}\frac{|(\ell,\varphi)|}{\left\|\ell\,|W_2^{(3,0)*}\right\|}. \tag{5}$$

Погрешность формулы (1) является линейным функционалом в $W_2^{(3,0)*}$, где $W_2^{(3,0)*}$ - сопряженное пространство к пространству $W_2^{(3,0)}$.

Эта задача состоит из двух частей: сначала мы должны вычислить норму $\left\|\ell(x)|W_2^{(3,0)*}\right\|$ функционала погрешности $\ell$ в пространстве $W_2^{(3,0)*}$, а потом минимизировать его по коэффициентам $C_\beta(z)$ и узлам $x_\beta$.

Теперь мы занимаемся решением первой части этой задачи, т.е. вычислением нормы $\left\|\ell(x)|W_2^{(3,0)*}\right\|$ функционала погрешности $\ell$. Для этого мы пользуемся понятием экстремальной функции функционала погрешности $\ell$, введенным С.Л.Соболевым [1, 2].

Функция $\psi$, для которой выполняется равенство

$$(\ell,\psi)=\|\ell\|\cdot\|\psi\|, \tag{6}$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности $\ell(x)$.

Имеет место

**Теорема 1.** *Экстремальная функция $\psi$ функционала погрешности $\ell$ интерполяционной формулы (1) и имеет вид:*

$$\psi(x)=(-1)^3\cdot(G*\ell)(x)+d_1e^{-x}+d_2\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+d_3\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

*где $d_1$, $d_2$ и $d_3$ – произвольные действительные числа,*

$$G(x) = \frac{1}{6}\, signx \left( \mathrm{sh(x)} + e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

Кроме того, функционал погрешности (2), как показано в [3], удовлетворяет следующим условиям

$$\left(\ell, e^{-x}\right) = 0, \quad \left(\ell, e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) = 0, \quad \left(\ell, e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) = 0. \tag{7}$$

Как было сказано выше, для того чтобы вычислить квадрат нормы $\|\ell\|^2$ функционала погрешности, нам достаточно вычислить скалярное произведение $(\ell, \psi)$ с учетом условий ортогональности (7). Таким образом,

$$\left\| \ell | W_2^{(3,0)*} \right\|^2 = (-1) \left[ \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta(z) C_\gamma(z)\, G(x_\beta - x_\gamma) - 2 \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z) G(z - x_\beta) \right]. \tag{8}$$

**Литература**


1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974,- 808 с.
2. *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. - Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН, 1996. - 484 с.
3. *Болтаев А. К.,* Об экстремальной функции одной оптимальной квадратурной формулы. Вопросы вычислительной и прикладной математики. - Ташкент, 2011, N 125, -С. 32 - 42


# Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления интегралов от сильно осциллирующих функций в пространстве $K_2(P_3)$


**Болтаев Н.Д.**

*Ташкентский Государственный Транспортный Унверситет, Ташкент, Узбекистан*

e-mail nboltayev@list.ru


Вычисление интегралов от сильно осциллирующих функций является одним из важных задач численного анализа, потому что такие интегралы встречаются в большом количестве в применениях во многих разделах математики также как и в других науках, такие как квантовая физика, механика жидкости и электромагнетизме. Основные примеры сильно осциллирующих подынтегральных функций встречаются в различных преобразованиях, например, преобразование Фурье и преобразование Фурье-Бесселя. Стандартные методы численного интегрирования часто требуют очень большое количество вычислительных работ и не могут быть применены успешно. Поэтому, для интегралов со сильно осциллирующими функциями разрабатывались многочисленные специальные подходы, которые являются эффективными

[1]. Самые ранние формулы для численного интегрирования сильно осциллирующих функций был дан Файлоном [2] в 1928 году. Подход Файлона для интегралов Фурье

$$I[f;\omega] = \int_a^b f(x)e^{i\omega x}dx,$$

основывается на кусочном аппроксимации $f(x)$ с помощью дуг параболы на интервале интегрирования. Конечные интегралы над подинтервaламы тогда интегрируются точно. Подход Файлона модифицировался многими математиками. В работе [3] приведен обзор некоторых специальных квадратурных методов для различных типов сильно осциллирующих подынтегралов.

Как отмечалось выше, имеются несколько методов в теории квадратурных формул, которые позволяют приближенно вычислить интегралы от сильно осциллирующих функций. Настоящая работа также посвящена одному из таких методов, т.е. построению оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда для приближенного вычисления интегралов Фурье.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 e^{2\pi ipx}\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta). \tag{1}$$

Здесь $C_\beta$ - коэффициенты формулы (1), $h = 1/N$, $i^2 = -1$, $N$ – натуральное число, $p \in Z$, $p \neq 0$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – индикатор отрезка $[0,1]$. Функции $\varphi$ принадлежат в пространству $K_2(P_3)$:
Основной целью настоящей работы является решить задачу Сарда для квадратурных формул вида (1) в пространстве $K_2(P_3)$, т.е. найти коэффициенты $C_\beta$, которые дают наименьшее значение нормы функционала погрешности, т.е.

$$\|\mathring{\ell}|K_2^*(P_3)\| = \inf_{C_\beta} \|\ell|K_2^*(P_3)\|. \tag{2}$$

Таким образом, чтобы построить оптимальные квадратурные формулы вида (1) в смысле Сарда нам следует последовательно решить следующие задачи.

**Задача 1.** Найти норму функционала погрешности квадратурных формул вида (1) в пространстве $K_2^*(P_3)$.

**Задача 2.** Найти коэффициенты $C_\beta$ , которые удовлетворяют равенство (2).

Таким образом,получим следующий оснавной результат.

**Теорема .** Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда в пространстве $K_2(P_3)$ ($p \in Z, \quad p \neq 0$) выражаются формулами

$$\begin{aligned}
C_0 \;&=\; \sum_{k=1}^{2}\left(\tfrac{\lambda_k \sin(\omega h-\omega)-\lambda_k^{N+1}\sin(\omega h)+\lambda_k^2\sin\omega}{\sin\omega(1+\lambda_k^2-2\lambda_k\cos(\omega h))}a_k + \tfrac{\lambda_k^{N+1}\sin(\omega h-\omega)-\lambda_k\sin(\omega h)+\lambda_k^N\sin\omega}{\sin\omega(1+\lambda_k^2-2\lambda_k\cos(\omega h))}b_k\right)+\\
&+K\tfrac{e^{2\pi iph}\sin(\omega h-\omega)-e^{2\pi iph}\sin(\omega h)+e^{4\pi iph}\sin\omega}{\sin\omega(1+e^{4\pi iph}-2e^{2piiph}\cos(\omega h))}+\tfrac{\omega-\omega\cos\omega-2\pi ip\sin\omega}{\sin\omega((2\pi ip)^2+\omega^2)},\\
C_\beta \;&=\; Ke^{2\pi iph\beta}+\sum_{k=1}^{2}\left(a_k\lambda_k^\beta+b_k\lambda_k^{N-\beta}\right), \beta=\overline{1,N-1},\\
C_N \;&=\; \sum_{k=1}^{2}\left(\tfrac{\lambda_k^{N+1}\sin(\omega h-\omega)-\lambda_k\sin(\omega h)+\lambda_k^N\sin\omega}{\sin\omega(1+\lambda_k^2-2\lambda_k\cos(\omega h))}a_k + \tfrac{\lambda_k\sin(\omega h-\omega)-\lambda_k^{N+1}\sin(\omega h)+\lambda_k^2\sin\omega}{\sin\omega(1+\lambda_k^2-2\lambda_k\cos(\omega h))}b_k\right)+\\
&+K\tfrac{e^{2\pi iph}\sin(\omega h-\omega)-e^{2\pi iph}\sin(\omega h)+\sin\omega}{\sin\omega(1+e^{4\pi iph}-2e^{2\pi iph}\cos(\omega h))}+\tfrac{\omega-\cos\omega-2\pi ip\sin\omega}{\sin\omega((2\pi ip)^2+\omega^2)},
\end{aligned}$$

где K,$a_k$ , $b_k$ и $\lambda_k$ известные величены.


**Литература**

1. *Milovanović G.V., Stanić M.P.* Numerical integration of highly oscillating functions. Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions, Springer. 2014, p. 613-649.
2. *Filon L.N.G.* On a quadrature formula trigonometric integrals, Edinburgh. Num. 49, 1928, p. 38-47.
3. *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M.* Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ Numer Algor. Num. 74, 2017, p. 307-336.


# Оптимальная квадратурная формула для приближенного решения интегрального уравнения Абеля


**Далиев Б.С.**

*Ферганский политехнический иститут, Фергана, Узбекистан*

e-mail bahtiyorjon@inbox.ru


В основном задачи механики и математической физики сводятся к решению интегральных уравнений. Например, задача Абеля относится к таким типам задач. В этой работе мы получим приближенное решения интегрального уравнения Абеля в пространстве Соболева с оптимальной квадратурной формулой. Известно, что уравнением Абеля называется уравнения[1]

$$f(x)=\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}}. \tag{1}$$

где $f(x)$ известная функция, $t$ - независимая переменная, $\varphi(t)$ - неизвестная функция.

Также нам известно, что решение уравнения Абеля

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(x)dx}{\sqrt{t-x}}. \tag{2}$$

Наша цель является с большой точностью вычислить интеграл

$$\int_0^t \frac{f'(x)dx}{\sqrt{t-x}}.$$

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int\limits_0^t \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{t-x}} \cong \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho} C^{(\nu)}[\beta]\varphi^{(\nu)}[\beta] \tag{3}$$

в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,t)$. Здесь $\varphi(x)\in L_2^{(m)}(0,t)$, $\quad t>0$ произвольное конечное число, $N\geq m$-натуральное число, $[\beta]=h\beta, \quad h=\frac{t}{N}, \quad C^{(\nu)}[\beta]$-коэффициенты квадатурных формул [2].

Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (3), при $\rho = 0$ в пространстве $L_2^{(1)}(0,t)$ определяются формулами [3]:

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[0] = \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\left((t-h)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right), \tag{4}$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[\beta] =$$

$$= \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1} - 2(t-h\beta)^{\alpha+1} + (t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\right], \quad \beta = 1,2,...,N-1. \tag{5}$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[N] = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}. \tag{6}$$

А при $\rho = 1$ в пространстве $L_2^{(2)}(0,t)$ определяются формулами [4]:

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[0] = \frac{1}{h\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[(t-h)^{\alpha+2} - t^{\alpha+2}\right] + \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}\left[(t-h)^{\alpha+1} + t^{\alpha+1}\right], \tag{7}$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta] = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1} - (t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\right]$$

$$+\frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+2} - 2(t-h\beta)^{\alpha+2} + (t-h(\beta-1))^{\alpha+2}\right], \tag{8}$$

$\beta = 1,2,...,N-1.$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[N] = -\frac{h^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}, \tag{9}$$

Численные результаты.

При $N = 10,\ t = 1$

| $f(x)$ | Точное решение | Решение квадратурой | | Погрешность | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $m=1$ | $m=2$ | $m=1$ | $m=2$ |
| $x$ | 0.6366197722 | 0.6366197697 | 0.6366197697 | 2.5(-9) | 2.5(-9) |
| $x^2$ | 0.8488263630 | 0.8488263605 | 0.8488263630 | 2.5(-9) | 0 |
| $x^3$ | 1.018591636 | 1.021569642 | 1.018591637 | 2.9(-3) | 1.0(-9) |
| $x^4$ | 1.164104726 | 1.171747842 | 1.164114640 | 7.6(-3) | 9.9(-6) |
| $\sin x$ | 0.4773364258 | 0.4769562737 | 0.4773366779 | 3.8(-4) | 2.5(-7) |
| $e^x$ | 1.292388093 | 1.293369512 | 1.292388944 | 9.8(-4) | 8.5(-7) |

При $N = 50,\ t = 1$

| $f(x)$ | Точное решение | Решение квадратурой | | Погрешность | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $m=1$ | $m=2$ | $m=1$ | $m=2$ |
| $x$ | 0.6366197722 | 0.6366197722 | 0.6366197722 | 0 | 0 |
| $x^2$ | 0.8488263630 | 0.8488263630 | 0.8488263630 | 0 | 0 |
| $x^3$ | 1.018591636 | 1.018715289 | 1.018591636 | 1.2(-4) | 0 |
| $x^4$ | 1.164104726 | 1.164429480 | 1.164104760 | 3.2(-4) | 3.4(-8) |
| $\sin x$ | 0.4773364258 | 0.4773208350 | 0.4773364220 | 1.5(-5) | 3.8(-9) |
| $e^x$ | 1.292388093 | 1.292429493 | 1.292388082 | 4.1(-5) | 1.1(-8) |

Из численных результатов видно, что приближенное решение интегрального уравнения Абеля с помощью оптимальных квадратурных формул приближается к точному решению при возрасстании $N$ и $m$.

**Литература**


1. *Шадиметов Х.М., Далиев Б.С.* Экстремальная функция квадратурных формул для приближенного решения обобщенного интегрального уравнения Абеля. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. №2(20), 2019, с. 88-95.

2. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. 1974. 808с

3. *Шадиметов Х.М., Далиев Б.С.* Коэффициенты оптимальных квадратурных формул для приближенного решения общего интегрального уравнения Абеля. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. №2(26) 2020, с. 24-32.

4. *Kh.Shadimetov, B.Daliyev* Composite optimal formulas for approximate integration of weight integrals // AIP Conference Proceedings. 2020, 20p.


# Разработка алгоритма решения задачи Коши для стационарной системы уравнений пороупругости для аналитической функции


**Жабборов Н.М., Бобохонов Ш.С., Мансурова М.М.**

*Национальный университет Узбекистана*

jabborov61@mail.ru


В этой работе на основе полученных формул типа Карлемана решена задача Коши для стационарной системы уравнений пороупругости в произвольных ограниченных областях с гладкими границами на плоскости.

Рассмотрим задачу Коши для стационарной системы уравнений попроупугости в терминах $(U, P)$ формулировке, описывающей состояние плоской изотропной упруго-деформируемой среды в некоторой области $\Omega \subset C$ :пусть на множестве $M \subset \partial\Omega$ заданы вектор смещений упругого пористого тела $u\,|_M = G\,(x)$, тензор напряжений $\widetilde{T}_\partial(u,v)\,|_M = \widetilde{H}\,(x)$ и поровое давление $\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} P\,|_M = P_0\,(x)$. Требуется определить функции $u(x,y) \in C^3(\Omega; R^2) \bigcap C^2(\Omega; R^2)$ и $P(x,y) \in C^2(\Omega; R^n) \bigcap C^1(\Omega; R^n)$. Здесь оператор напряжений для всего континиума $\widetilde{T}_\partial(U,V) = \left(\widetilde{T}_{1\partial}(U,V), \widetilde{T}_{2\partial}(U,V)\right)$, для $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектора внешней нормали.

Исходная задача разбивается на две задачи Коши: для системы уравнений упругости (системы Ламе) — при определении вектора смещения $V = u$, и для уравнения Лапласа — при определении пористого давления $P$:

$$\mu\Delta V + (\lambda + \mu)\,\nabla div V = 0 \tag{1}$$

$$V\,|_M = G\,(x) \tag{2}$$

$$T_\partial V\,|_M = H\,(x) \tag{3}$$

$$\Delta P = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} P\,|_M = P_0\,(x) \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \nu}\right|_M = 0 \qquad (6)$$

где $\lambda = \widetilde{\lambda} - \frac{K^2}{\alpha}$, $H_j\left(x\right) = \widetilde{H}_j\left(x\right) - \nu_j \frac{\rho_0 K - \rho_{0,s}\alpha}{\rho_{0,s}\alpha} P_0(x)$, $j = 1, 2$, оператор напряжений

$$T_\partial = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\,\upsilon_1 & \mu\upsilon_2 \\ \lambda\upsilon_2 & \mu\upsilon_1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} \mu\upsilon_2 & \lambda\upsilon_1 \\ \mu\upsilon_1 & (\lambda + 2\mu)\,\upsilon_2 \end{pmatrix} \partial_y,$$

определяемый равенством

$$T_\partial V\left|_M\right. = \sigma\upsilon\left|_m\right.,$$

где $\sigma$ — тензор напряжения, элементы которого связаны с вектором смещения $V$ соотношениями Гука:

$$\sigma_{xx} = \lambda\left(\partial_x V_1 + \partial_y V_2\right) + 2\mu\partial_x V_1$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\left(\partial_x V_1 + \partial_y V_2\right) + 2\mu\partial_y V_2$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu\left(\partial_y V_1 + \partial_x V_2\right) + 2\mu\partial_x V_1$$

Легко показать, что

$$T_\partial = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\,\upsilon_1 & \mu\upsilon_2 \\ \lambda\upsilon_2 & \mu\upsilon_1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} \mu\upsilon_2 & \lambda\upsilon_1 \\ \mu\upsilon_1 & (\lambda + 2\mu)\,\upsilon_2 \end{pmatrix} \partial_y$$

Переходя от вектора нормали к вектору касательного направления $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, оператор $T_\partial$ можно записать в виде

$$T_\partial = \tau_1 \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \tau_1 \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) \end{pmatrix} \partial_y + \tau_2 \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \partial_x +$$

$$+ \tau_2 \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \partial_y = T_{11}\tau_1\partial_x + T_{12}\tau_1\partial_y + T_{21}\tau_2\partial_x + T_{22}\tau_2\partial_y$$

Справедливо следующее утверждение

**Теорема.** *Пусть функция* $V\left(x, y\right) \in C^2\left(\Omega; \mathbf{R}^2\right) \cap C^1\left(\bar{\Omega}; \mathbf{R}^2\right)$, $P(x, y) \in C^2\left(\Omega; \mathbf{R}^2\right) \cap C^1\left(\bar{\Omega}; \mathbf{R}^2\right)$ *является решением задачи (1)—(6). Тогда* $V\left(x, y\right)$, $P(x, y)$ *находится по формуле*

$$V = Re\Theta u, \quad P = Re\widetilde{P}$$

*где*

$$\Theta = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2k - 1 \end{pmatrix}, \qquad k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu},$$

*а* $\widetilde{P}(z)$ *есть аналитическая функция,* $u\left(z\right)$ *есть* $A$*-аналитическая функция для* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *принимающая на множестве* $M$ *значения* $u\left|_M\right. = f = g + ih$, *где функции* $g\left(z\right)$, $h\left(z\right)$ *определяются из системы*

$$\begin{pmatrix} Re\Theta & -Im\Theta \\ Re\Theta' & -Im\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\left(x\right) \\ h\left(x\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G\left(x\right) \\ \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} H\left(x, y\right) ds \end{pmatrix},$$

*где*

$$\Theta' = 2\mu \begin{pmatrix} 1 & 2 - k \\ i & -ik \end{pmatrix}.$$

*Значения функции $u(z)$, $z = x + iy \in \Omega$ находятся по формулам типа Карлемана:*

$$u(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_M \left(e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(\zeta) + \left(N\left(\partial\phi_0(\zeta)\bar{\zeta} - \partial\phi_0(z)\bar{z}\right) + \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}\right)\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta)\right)\frac{d\zeta}{\zeta - z} -\right.$$

$$\left. - \int_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z}\right),$$

$$\widetilde{P}(z) = \frac{\rho}{2\phi_l i}\lim_{N\to\infty}\int\limits_M P_0(\tau)\left[\frac{(\zeta - z_2)(z - z_1)}{(\zeta - z_1)(z - z_2)}\right]^{\frac{N}{\phi i}}\frac{d\tau}{\zeta - z}.$$

**Литератур**


1. *Ahlfors L.*, Lectures on quasiconformal mappings, Toronto-New York-London 1966. 133 pp.

2. *Берс Л.*, Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, М., ИЛ, 1961.

3. *Bojarski B.*, Generalized solutions of a system of differential equations of the first order ofthe elliptic type with discontinuous coefficients. Мат. Сб., 1957, Т. 43(85), стр.451–503.

4. *Бицадзе А. В.*, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.

5. *Бухгейм А. Л.*, Формулы обращения в обратных задачах. Дополнение к книге Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. М.:Наука, 1991.

6. *Бухгейм А. Л., Казанцев С. Г.*, Эллиптические системы типа Бельтрами и задачи томографии. // Докл. АН СССР, 1990. т. 315. № 1, с. 15—19.

7. *Векуа И. Н.*, Обобщенные аналитические функции, М., «Наука», 1988, 512 с.

8. *Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х.*, Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, Изд-во НУУз им. Мирзо Улугбека, 2012, 212с.

9. *Грачев Е. В., Жабборов Н. М.*, Имомназаров Х.Х. Сосредоточенная сила в упруго-пористом полупространстве // Доклады РАН, 2003, т. 391, No. 3, с. 331-333.

# Методы решения задачи Коши для эллиптической системы на плоскости с помощью А-аналитических функций

**Жабборов Н.М., Бобохонов Ш.С., Мансурова М.М., Омонова Н.Р.**

*Национальный университет Узбекистана*

jabborov61@mail.ru.

Пусть $\Omega$ - произвольная ограниченная односвязная область в комплексной плоскости $C$ с границей класса $C^{\infty}$, $M \subset \partial\Omega$- объединение конечного числа замкнутых дуг. Рассмотрим задачу Коши для эллиптической системы второго порядка в $\Omega$:

$$\mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + 2\mathcal{B}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}V + \mathcal{C}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V = 0, \qquad V : \Omega \to R^n, \tag{1}$$

$$V\left(x,y\right)|_M = G\left(x,y\right), P_{\partial}V\left(x,y\right)|_M = H\left(x,y\right),$$

где $G(x,y)$, $F(x,y) \in C(\Omega; R^n)$ — заданные функции, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ постоянные матрицы размерности $n \times n$, $P_{\partial}$ является некоторым дифференциальным оператором первого порядка (например, оператором напряжения для системы уравнений Ламе или производной по нормали). Система является эллиптической, т.е. матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ являются обратимыми, и характеристический полином

$$\det\left\|\mathcal{A} + 2\mathcal{B}\lambda + \mathcal{C}\lambda^2\right\| = 0$$

не имеет вещественных корней.

Известны два классических способа подобной редукции для эллиптических краевых задач: метод потенциала и теоретико-функциональный метод. Фундаментальные результаты по решению общих эллиптических задач методом потенциала получены Ж. Жиро.

Второй метод основывается на представлении решений эллиптических уравнений через аналитические функции, которое позволяет свести дело к исследованию краевых задач теории функций. Для эллиптических уравнений на плоскости с вещественно аналитическими коэффициентами этот метод был развит И. Н. Векуа(см. (7)), для эллиптических систем с постоянными старшими коэффициентами — А. В. Бицадзе (4).

Для регулярных решений системы (1) известно представление А. В. Бицадзе через аналитические векторнозначные функции и их производные до определенного порядка. Это представление значительно упрощается, если аналитические функции заменить решениями канонических эллиптических систем 1-го порядка.

В случае теория эллиптических систем первого порядка получила законченный вид в трудах И. Н. Векуа (4) и Л. Берса (2) и известна под названием *теории обобщенных аналитических функций.* В свою очередь, А. П. Солдатовым в работе (10) было показано, что это представление может быть записано в следующем виде:

$$V = Re\Theta u \tag{2}$$

где $u : \Omega \to C^n$ является $A$-аналитической функцией (от переменной $z_{\lambda} = x + \lambda y$ для $\lambda$-корня характеристического полинома), матрицы $A$ и $\Theta$ выражаются через коэффициенты системы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и матрица $A$ является нильпотентной: $A^n = 0$.

**Определение.** *Пусть $A$-квадратная матрица размерности $n$. Вектор-функция $u(z) \in C^1(\Omega, C^n)$ называется $A$- аналитической в $\Omega$ если*

$$\bar{\partial}_A u(z) := \partial_{\bar{z}} u(z) - A\partial_z u(z) = 0, \; z = x + iy \in \Omega \tag{3}$$

Таким образом, задача (1) становится эквивалентной задаче определения $A$-аналитической функции, заданной на участке границы.

В (10) для определения матрицы $\Theta$ система (1) представлялась в виде эквивалентной ей системы дифференциальных уравнений первого порядка, а затем матрица полученной системы приводилась к жордановой форме.

В (10) было показано для случая $n = 2$ этот же результат получается с использованием свойств $A$-аналитических функций (см.(8-9)).

**Теорема 1.** *Пусть $\lambda_1$, $\lambda_2$ — корни характеристического полинома с $Im\ \ \lambda_i > 0$. Тогда решение системы (1) находится по формуле*

$$V(x, y) = Re\Theta u$$

*где матрица* $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$, $(\Theta_i -$ *ее* столбцы) *и функция* $u(z) = (u_1(z), u_2(z))$ *определяются следующим образом:*

*a) если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то столбцы $\Theta_1, \Theta_2$ находятся из следующей системы уравнений*

$$\begin{gathered}\mathcal{A}\Theta_1 + 2\mathcal{B}\lambda\Theta_1 + \mathcal{C}\lambda^2\Theta_1 = 0,\\ \mathcal{A}\Theta_2 + 2\mathcal{B}\lambda\Theta_2 + \mathcal{C}\lambda^2\Theta_2 + 2\left(\mathcal{A} + \mathcal{B}\left(\overline{\lambda} + \lambda\right) + \mathcal{C}\overline{\lambda}\lambda\right)\Theta_1 = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

*а функция $u(z) = (u_1(z), u_2(z))$ является решением уравнения*

$$\left(\partial_x - \frac{1}{\lambda}\partial_y\right) u(z) - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\partial_x + \frac{1}{\lambda}\partial_y\right) u(z) = 0, \qquad \alpha = \bar{\lambda} - \lambda; \tag{5}$$

*b) если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то столбцы $\Theta_1, \Theta_2$ находятся из уравнений*

$$\mathcal{A}\Theta_i + 2\mathcal{B}\lambda\Theta_i + \mathcal{C}\lambda^2\Theta_i = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{6}$$

*а компоненты функции $u(z) = (u_1(z), u_2(z))$ являются решениями уравнений*

$$\partial_x u_i - \frac{1}{\lambda_i}\partial_y u_i = 0, i = 1, 2.$$

*Замечание.* Матрица $\Theta$ находится из той же системы уравнений (4), что и где $\left(\bar{\partial}_\zeta - A\partial_\zeta\right)\tilde{u} = 0$, с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{\lambda}-\lambda}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, и $A = 0$,

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В частном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, функция $u(z)$ является обычной $A$-аналитической функцией по переменной $z = x + iy$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Связь между граничными условиями задач (1) и (2) дается в следующем утверждении.

**Теорема 2.** Пусть $V = Re\Theta u$, решение системы (1) и

$$V|_M = g(x, y) \in C^1\left(M, \mathbf{R}^2\right), \frac{\partial}{\partial \upsilon} V|_M = h(x, y) \in C\left(M, \mathbf{R}^2\right)$$

*$f = v + iw$—граничные значения функции $u(z)$ :*

$$u\,|_M = f.$$

*Пусть матрицы $\Theta', T_{i,j,}\,(i,j = 1,2)$, такие, что*

1) $\det\begin{pmatrix} Re\Theta & -Im\Theta \\ Re\Theta' & -Im\Theta' \end{pmatrix} \neq 0$

2) $T_{11}\Theta + T_{12}\Theta A_0 = T_{21}\Theta A_0^{-1} + T_{22}\Theta = \Theta'$,

*где $A_0 = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ или $A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ в зависимости от краткости корней характеристического полинома $\lambda$.*

*Тогда, граничные условия $V(x,y)$ и $u(z)$ связаны следующими соотношениями:*

$$\begin{pmatrix} Re\Theta & -Im\Theta \\ Re\Theta' & -Im\Theta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ \widetilde{h} \end{pmatrix},$$

*где*

$$\widetilde{h}(x,y)\,|_M = Re\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} h'(\xi,\eta)\,ds, h'(x,y) =$$

$$= (\tau_1(T_{11}\partial_x + T_{12}\partial_y)) + (\tau_2(T_{21}\partial_x + T_{22}\partial_y))\,V(x,y).$$

Если $\lambda = i$ — корень кратности 2, то решение задачи Коши (1) сводится к задаче $A$-аналитического продолжения с участка границы:

$$\bar{\partial}_A u(z) = 0, \quad z \in \Omega, u(z)\,|_M = f(z) \tag{7}$$

где функция $f(z) = g(z) + ih(z)$ определяется из данных Коши для системы (1) и $A$есть нильпотентная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение всех этих задач находится по методу, предложенному Т. Карлеманом (8) и обобщенному в работах [5–6], через построение функций со специальными свойствами на границе области.

**Теорема 3.** *Пусть $\phi(\xi,\eta)$— аналитическая функция по переменной $z_\lambda$ в области $\Omega_\lambda$:*

$$\bar{\partial}_{z\lambda}\phi(z_\lambda) = 0, Re\phi(z_\lambda)\,|_{M_\lambda} = 1, Re\phi(z_\lambda)\,\big|_{\partial\Omega\setminus M_\lambda} = 0,$$

*функция*

$$\Phi(z) = \phi(z_\lambda) + \partial_{z_\lambda}\phi(z_\lambda)\,A' z_{-\lambda},\ A' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Тогда для решения задачи*

$$\partial_x u_i - \frac{1}{\lambda_i}\partial_y u_i = 0, \quad u_i(z)\,|_M = f_i(z) \qquad i = 1,2 \tag{8}$$

*справедлива формула*

$$u(z) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_M \left(d\zeta + Ad\bar{\zeta}\right)\left(\zeta - z + \left(\overline{\zeta - z}\right)A\right)^{-1}\Phi_N(z)^{-1}\Phi_N(\zeta)\,f(\zeta),$$

*где $k = 0$, при $|a| < 1$ и $k = 1$, при $|a| > 1$, $a = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$..*

Когда кратность корней характеристического полинома равна 1, исходная задача сводится к определению двух скалярных аналитических функций от переменных $z_{\lambda_i}$, т. е. в данном случае необходимо применить классическую формулу Карлемана с последующей заменой переменных для каждого корня $\lambda_i$.

**Теорема 4.** *Пусть*

$$\left(\partial_x - \frac{1}{\lambda}\partial y\right) u\left(z\right) - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\partial_x + \frac{1}{\lambda}\partial_y\right) u\left(z\right) = 0, \qquad \alpha{=}\bar{\lambda}{-}\lambda$$

*Тогда* $\bar{\partial}_A u = 0$ *при*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda} & -\frac{2i\alpha}{(1-i\lambda)^2} \\ 0 & \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

*и*

$$u\left(z\right) = \frac{\left(-1\right)^k}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \left(d\zeta + Ad\bar{\zeta}\right) \left(\zeta - z + \left(\overline{\zeta - z}\right) A\right)^{-1} u\left(\zeta\right),$$

*где* $k = 0$*, при* $|a| < 1$ *и,* $k = 1$*, при* $|a| > 1$*.*

В итоге, используя полученную в теореме-3 формулу Коши, для определения функции $u\left(z\right)$, которая является решением уравнения (7), приходим к формуле типа Карлемана

$$u\left(z\right) = \frac{\left(-1\right)^k}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \int_M \left(d\zeta + Ad\zeta\right) \left(\zeta - z + \overline{\left(\zeta - z\right)} A\right)^{-1} e^{N(\Phi(\zeta)-\Phi(z))} f\left(\zeta\right)$$

где матрица $A$ и число k определены в условиях теоремы.

**Теорема 5.** *Пусть* $\Omega_\lambda$ *— образ области* $\Omega$ *при отображении* $(x, y) \to (\xi, \eta)$*, функция* $\phi\left(\xi + i\eta\right) = \phi\left(\zeta\right)$*— аналитическая по переменной* $\zeta = z_\lambda$*:*

$$\bar{\partial}_{z_\lambda}\phi\left(z_\lambda\right) = 0, Re\phi\left(z_\lambda\right)|_{M_\lambda} = 1, Re\phi\left(z_\lambda\right)\big|_{\partial\Omega\setminus M_\lambda} = 0.$$

*Тогда, справедлива формула*

$$u\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \int_{M_\lambda} \frac{\tilde{u}\left(\zeta\right)}{\zeta - z_\lambda} e^{N(\phi(\zeta)-\phi(z_\lambda))} d\zeta,$$

*где* $\tilde{u}\left(\zeta\right) = \tilde{u}\left(x + \lambda y\right) = u\left(z\right)$.

Применяя эту формулу для каждого из корней характеристического полинома $\lambda_i$, получим вектор-функцию $u\left(z\right) = \left(u_1\left(z\right), u_2\left(z\right)\right)$, которая является решением задачи (8).

## Литература


1. *Ahlfors L.*, Lectures on quasiconformal mappings, Toronto-New York-London 1966. 133 pp.

2. *Берс Л.*, Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, М., ИЛ, 1961.

3. *Bojarski B.*, Generalized solutions of a system of differential equations of the first order ofthe elliptic type with discontinuous coefficients. Мат. Сб., 1957, Т. 43(85), стр.451–503.

4. *Бицадзе А. В.*, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.

5. *Бухгейм А. Л.*, Формулы обращения в обратных задачах. Дополнение к книге Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. М.:Наука, 1991.

6. *Бухгейм А. Л., Казанцев С. Г.*, Эллиптические системы типа Бельтрами и задачи томографии. // Докл. АН СССР, 1990. т. 315. № 1, с. 15—19.

7. *Векуа И. Н.*, Обобщенные аналитические функции, М., «Наука», 1988, 512 с.

8. *Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х.*, Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, Изд-во НУУз им. Мирзо Улугбека, 2012, 212с.

9. *Грачев Е. В., Жабборов Н. М.*, Имомназаров Х.Х. Сосредоточенная сила в упруго-пористом полупространстве // Доклады РАН, 2003, т. 391, No. 3, с. 331-333.

10. *Солдатов А. П.*, Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: «Высшая школа», 1991.

# Преобразование Фурье функции $\overline{\nu}_m(x)$ для определении дискретного аналога одного дифференциального оператора

**Жалолов И.И.**

*Ташкентский государственный транспортный университет*

o-jalolov@mail.ru

В настоящей работе находим преобразование Фурье $\overline{\nu}_m\left(x\right)$ боронообразной функции , где

$$\overline{\nu}_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu_m(hk)\delta(x-hk),$$

который используется при построении оптимальных квадратурных формул в пространстве Хермандера $H_2^{\mu}(R)$.

**Определение.** Пространство $H_2^{\mu}(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в $R$ и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме (1)

$$\| f|\, W_2^m(R)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}\left[ \left(1+y^2\right)^{m/2} \cdot F\left[f(x)\right](y) \right] \right|^2 dx \right\}^{1/2}. \qquad (1)$$

**Теорема.** Преобразование Фурье функции $\overline{\nu}_m\left(x\right)$ для определении дискретного аналога дифференциального оператора

$$\left[1 - \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]^m$$

удовлетворяющий равенству $D_m\left[\beta\right] * \nu_m\left[\beta\right] = \delta\left[\beta\right]$, имеет вид

$$F\left[\bar{\nu}_m\left(x\right)\right](p) = \frac{\pi\left(2m-2\right)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}\left[\frac{\lambda\left(e^{4\pi h}-1\right)}{-\lambda^2 e^{2\pi h} + \lambda\left(e^{4\pi h}+1\right) - e^{2\pi h}}\right] +$$

$$+\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\frac{e^{2\pi h}}{e^{2\pi h}-\lambda}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi h}-\lambda}\right)^i\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{i!}{\rho!\,(i-\rho)!}\rho^k+\frac{\lambda e^{2\pi h}}{\lambda e^{2\pi h}-1}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi h}-1}\right)^i\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\frac{i!}{\rho!\,(i-\rho)!}\rho^k\right].$$

**Литература**


1. *С.Л.Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука 1974. - 808 с.


# Экстремальная функция и норма функционала погрешности квадратурной формулы типа Фурье в пространстве $H_2^{\mu}(R)$


**Жалолов О.И.**

*к.ф.-м.н.,доцент, заведующий кафедры Информационной технологии Бухарского государственного университета*

o-jalolov@mail.ru


В настоящей работе рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \ell^{2\pi i\sigma x}f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)\ell^{2\pi i\sigma x}-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\delta(x-x_\beta) \tag{2}$$

где соответственно, $C_\beta$ и $x_\beta$ называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x)$ является элементом гильбертова пространства Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)(2)$ и назовем ее квадратурную формулу типа Фурье.

**Определение.** Пространство $H_2^{\mu}(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в $R$ и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме (1)

$$\|\,f|\,W_2^m(R)\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|F^{-1}\left[(1+y^2)^{m/2}\cdot F\left[f(x)\right](y)\right]\right|^2dx\right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Справедлива следующая

**Теорема.** Экстремальная функция функционала погрешности (2) квадратурной формулы (1) имеет вид

$$\psi_e(x) = [\ell^{2\pi i\sigma x} \cdot \varepsilon_{[0],1}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x - h\beta),$$

квадрат нормы функционала погрешности $\ell_N\,(x)$ в пространстве Хермандера $H_2^\mu(R)$ имеет следующий вид

$$\|\ell_N\,|H_2^{\mu*}(R)\,\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| [\ell^{2\pi i\sigma x} \cdot \varepsilon_{[0],1}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x - h\beta) \right|^2 dx. \qquad (4)$$


**Литература**

1. *С.Л.Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука 1974. - 808 с.
2. *Валевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. УМН. XX,1(121),165,3.


# Математическое моделирование неньютоновских и структурированых флюдов в многослойной среде


**Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О.**

*Ташкентский государственный технический университет*
kayumovmatemic@gmail.com, apardayevich@mail.ru, tojiboyxaitov77@gmail.ru


Изучение многослойных подземных пористых сред показывает, что по своему строению их можно классифицировать как изолированные и гидродинамически несвязанные слоистые среды так и неизолированной среды. В неизолированных слоистых средах пласты гидродинамически связанные происходит обмены процессы. Изолированных средах подземный резервуар, содержащей нефть, газ, воды, газоконденсат и т.д. можно смоделировать как отдельная область с краевыми подпитками или без них. В гидродинамически связанных областях среда рассматривается как многослойный пласт с перетеками из одного пласта в другую.

При фильтрации в этих пластах происходит физические, химические молекулярные изменения как в самой флюиде так на скелета пористой среды и она воздействует на их структуру. Поэтому с этой точки зрения почти все месторождения представит можно как многослойный пласт с четко начертанными прямолинейными или криволинейными (иногда произвольными) границами (1). Самых флюидов в этих средах можно рассматривать как структурные флюиды. Пористую среду также можно рассматривать как структурные, где под воздействием движущего агрегата на скелет породы происходить изменение мелкодисперсионных частиц грунта породы. Для структурных флюидов характерно существование трех зон фильтрации (2,3), а именно: зона ползучести где градиент давления малый, зона аномальной подвижности где связь между скоростью фильтрации с градиентом давление нелинейно и зона сильной подвижности где коэффициент при градиента давления увеличивается. Математические модели процесса фильтрации газа, нефти и воды в многослойных пластах для ньютоновских флюидов изучались в работах Мятиева–Гиринского (4,5), Щелкачева–Гусейнзаде (6,7), Хантуша (8,9,10). Процессу фильтрации структурированных флюидов в многослойных пластах посвящены работы (11,12), где сформулирована математическая модель, содержащий одномерный дифференциально краевой задачи и для перемычки и для продуктивных пластов. При этом в продуктивным пласте рассмотрен структурированной а в перемычках линейный закон и нелинейный закон (13). Рассмотрим трехслойный пласт состоящей из хорошопроницаемого (область $D_2$) и соседствующей с ним сверху (область $D_3$) и снизу (область $D_1$) с двумя плохо проницаемыми пластями. Считаем в $D_2$ горизонтальная проницаемость преобладает над вертикальными и следовательно можно считать движения флюида в нем будет происходить горизонтально, а в $D_1$ и $D_3$ вертикальные проницаемости преобладает над горизонтальными, поэтому можно предположить что движения флюида в них происходить по вертикали.

Предположим что содержимая хорошо проницаемого пласта имеет такие характеристики, что его можно рассматривать как структурированный флюид, а две соседние плохопроницаемые пласты пусть содержит неньютоновские флюиды.

Физические задачи такого типа математически сформулируется так:

Необходимо найти непрерывные функции $u_1(\bar{x},z,t)$, $u_2(\bar{x},t)$ $u_3(\bar{x},z,t)$ а также положение границы возмущений $L_1(\bar{x},t)$, $L_3(\bar{x},t)$, границы подвижных зон $R_1(\bar{x},t)$, $R_2(\bar{x},t)$, $R_3(\bar{x},t)$ из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi_e\left(\left|\nabla u\right|,\bar{\beta}_e\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\chi_1\left(\left|\nabla v\right|,\beta_1\right)\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=H_1}-\chi_3\left(\left|\nabla v\right|,\beta_3\right)\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=H_2}=\\&=M_e\frac{\partial u}{\partial z}\,,\quad x\in D,\;\; z\in\left(H_1;H_2\right),\;\; t>0,\quad l=\overline{1,3}.\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_{2\gamma-1}\left(\left|\nabla v\right|,\beta\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\\=M_{2\gamma-1}\frac{\partial v}{\partial t}\,,\;\; z\in\left(D_1;D_2\right),\;\bar{x}\in\left(\bar{x}_0,\Gamma\right),\;\; t>0,\quad\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|>\beta_{2\gamma-1},\quad\gamma=\overline{1,2}.\end{gathered}\tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}({}_{2\gamma-1}(\left|\nabla v\right|)\frac{\partial v}{\partial z})=M_{2\gamma-1}\frac{\partial v}{\partial t},\quad\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|<\beta_{2\gamma-1},\quad t>0,\tag{3}$$

с начальными

$$u(\bar{x},0)=u_0(\bar{x}),\;\; v(\bar{x},z,0)=v_0(\bar{x},z)\tag{4}$$

и граничными

$$b_1\,U|_{\bar{x}=\bar{x}_0}+\alpha_1\varphi_1\left(\left|\nabla u\right|,\tilde{\beta}_1\right)\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\bar{x}=\bar{x}_0}=\psi_0(t),\quad\alpha_2\varphi_3\left(\left|\nabla u\right|,\tilde{\beta}_3\right)\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=\Gamma}=0,\tag{6}$$

$$\bar{\alpha}_1A_1(\nabla v)\,\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0,\quad\alpha_2A_3(\nabla v)\,\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=H_2}=0,$$

условиями на границах возмущений

$$\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\bigg|_{z=L_1-0}=\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\bigg|_{z=L_1+0}=\beta_1,\qquad\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\bigg|_{z=L_3-0}=\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\bigg|_{z=L_3+0}=\beta_3,\tag{7}$$

$$v\left(\bar{x},z,t\right)|_{z=L_1-0}=v\left(\bar{x},z,t\right)|_{z=L_1+0}\,,\;\; v\left(\bar{x},z,t\right)|_{z=L_3-0}=v\left(\bar{x},z,t\right)|_{z=L_3+0}\tag{8}$$

а также условиями на границах зоны:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\bigg|_{\bar{x}=R_e-0} = \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\bigg|_{\bar{x}=R_e+0} = \tilde{\beta}_e,\ \ u(\bar{x},t)|_{\bar{x}=R_e-0} = u(\bar{x},t)|_{\bar{x}=R_e+0},\quad l=\overline{1,3} \qquad (9)$$

здесь

$$\varphi_e\left(|\nabla u|, \bar{\beta}_e\right) = \begin{cases} \frac{k}{\mu_1}, & \bar{x}_0 < \bar{x} < R_1 - 0 \\ \frac{k}{\mu_2}\,\frac{|\nabla u|}{\beta_2+\nabla u}, & R_1+0 < \bar{x} < R_2 - 0, \\ \frac{k}{\mu_3}, & R_2+0 < \bar{x} < L \end{cases}$$

$$\chi_{2\gamma-1}\left(|\nabla v|, \beta\right) = \frac{k_{2\gamma-1}}{\mu}\cdot\left(1-\frac{\beta_{2\gamma-1}\gamma_0}{|\nabla v|}\right),\quad z\in(\bar{z}_0, L_{2\gamma-1}), \bar{x}=(x_1,x_2)$$

$$A_{2\gamma-1}\left(|\nabla v|, \beta\right) = \frac{k_{2\gamma-1}}{\bar{\nu}}\,\frac{|\nabla v|}{\beta_{2\gamma-1}+|\nabla v|},\quad z\in(L_{2\gamma-1}; H),\ \gamma=\overline{1,2},$$

$$H=\{0;\ H_2\ \ \gamma=(1;2)\}$$

коэффициенты и параметры $k, k_{2\gamma-1}, \mu, \bar{\nu}, \beta_{2\gamma-1}, \bar{\beta}_e$ аналогично с [7, 9, 13], $\alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \beta_1$ константы регулирующие граничных условий и размерности.

Задача (1)–(9) является нелинейной и квазитрехмерной задачей и построить аналитические решение почти невозможно. Для решения задачи (1)–(9) применяется потоковой вариант итерационно-разностной прогонки (8,13-15). При этом сначала применяется метод итерации, позволяющее линеаризовать нелинейны члены в уравнениях. Двумерные операторы второго порядка расщепляются на одномерные (15,16) с применением физического расщепления и метода переменных направлений. Вводится три разновидности потока относительно направлений $x_1$, $x_2$ и $z$. Полученные поточные уравнения интегрируются по каждому направлению переменных на отрезках. Используя разностной вариант дифференциальной прогонки и учитывая соответствующее сеточные условия на краях границах возмущений получены формулы, позволяющие найти прогоночные коэффициенты, а также соотношений с помощью которых вычисляются сеточные значения искомых функций и потока в сеточных узлах области. Для подвижных границ возмущений строится итерационный процесс. Построенные вычислительные алгоритмы позволяют провести численные эксперименты на реальных данных месторождений флюидов, обладающие аналогичными характеристиками, а также, можно определить технико-экономические показатели разработки месторождений.

## Литература


1. *Сигунов Ю. А., Усманова Г.Р.* Численное исследования влияния послойной неоднородности пласта на полноту извлечение нефти. Тезисы докладов всероссийской конференции. Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва. Новосибирск. 2007. с. 153.

2. *Каюмов Ш., Аванесов С.* Структурирование флюиды. Сб. докладов республиканское конф. Молодёжь в развитии науки техники. Ташкент, 2006 г. с. 29-30.

3. *Каюмов Ш.* К вопросу о математическом моделировании структурированных флюидов. Труды международной конференции RДААМ-2001. т. 6., ч. 2. 2001 г. Новосибирск. с. 183-190.

4. *Мятиев А. Н.* Действие колодца в напорном бассейне подземных вод. Ашхабад. Издательство «Туркмен. фил. Ан СССР». 1946. № 3-4.

5. *Гиринский Н. К.* Некоторые вопросы динамики подземных вод. «Вопросы гидрогеологии и инженерной геологии», 1947, № 9. С.6-8.

6. *Шелкачев В. Н., Гусейнзаде М. А.* Влияние проницаемости кровли и подошвы пласта на движение в нем жидкости. «Нефтяное хозяйство», 1953. № 12. С.15-19.

7. *Гусейнзаде М. А., Колосовская А. К.* Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах. М. «Недра». 1972. 291 с.

8. *Хантуш М. С.* Новое в теории перетекания. Сб.: «Вопросы гидрогеологических расчетов». М. «Мир». 1964. С.25-32.

9. *Мухидинов Н. М.* Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Издательство «Фан», Ташкент, 1978. 117 с.

10. *Мухидинов Н. М., Мукимов Н.* Об одной приближенной модели теории линейной и нелинейной фильтрации в многослойных пластах. Численные методы механики сплошной среды. Т.9, 1, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1978, с. 125-130.

11. *Каюмов Ш.* Об особенностях фильтрации структурированных флюидов в двухслойном пласте. Сборник докладов республиканской научно-практической конференции Интеграция науки и образования-производства. ч. 1. Ташкент. 2005 г. с. 309-312.

12. *Каюмов Ш., Исканаджиев И.* Математическое моделирование структурированных флюидов в многослойных средах. Тезисы докладов Всероссийский конференции Проблемы механики сплошных сред и физика взрыва. Новосибирск. 2007 г. с. 98-99.

13. *Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б.* Математическая модель структурированных флюидов в трехслойной среде. Международной научно-практический журнал Глобальная наука и инновация 2020. Центральная Азия. Серия физико-математические наука с.86-90. Нурсултан-2020.

14. *Каюмов Ш.* Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами. Ташкент. ТГТУ, 2017 г. 274 с.

15. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. Москва. Наука. 1989. 484 с.

16. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. Москва. Наука. 536 с.

# О представление оптимальных коэффициентов разностных формул

**Мирзакабилов Р.Н.**

*Институт математики им. В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан*

e-mail ravshan.m.n@mail.ru,

Всюду в дальнейшем под разностной формулой мы будем понимать приближенное равенство

$$\sum_{\beta=0}^{K} C\left[\beta\right]\varphi\left[\beta\right] - h\sum_{\beta=0}^{K} C^{(1)}\left[\beta\right]\varphi'\left[\beta\right] \cong 0 \tag{1}$$

Здесь $[\beta] = h\beta$, $\beta = 0, 1, ..., k$, $C\left[k\right] \neq 0$,$C\left[\beta\right]$ и $C^{(1)}\left[\beta\right]$ коэффициенты разностной формулы. $h = \frac{1}{N}$, $N = 1, 2, ....$ Будем рассматривать функции $\varphi\left(x\right)$, принадлежащие гильбертову пространству Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$. Гильбертово пространство $L_2^{(m)}(0,1)$- класс вещественных функций $\varphi(x)$, отличающихся на полином степени $m-1$ с производными ( в смысле обобщенных функций) порядка $m$, квадратично интегрируемыми на интервале $[0,1]$ и скалярным произведением

$$(f,\varphi)=\int_0^1\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right)\left(\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}\right)dx. \tag{2}$$

Полунорма в пространсве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ задается формулой

$$\left\|\varphi|\, L_2^{(m)}(0,1)\right\|=\left(\int_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Известно [1], что пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ вложено в пространство $(0,1)$ непрерывных функций, то линейным будет и функционал погрешности разностной формулы

$$(\ell,\varphi)=\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\varphi[\beta]-h\sum_{\beta=0}^{N}C^{(1)}[\beta]\varphi'[\beta] \tag{4}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{\beta=0}^{K}C[\beta]\delta(x-h\beta)+h\sum_{\beta=0}^{N}C^{(1)}[\beta]\delta'(x-h\beta)\right]\varphi(x)\,dx,$$

где $\delta(x)$-дельта функция Дирака. Задача о построении разностной формулы вида (1) в функциональной постановке состоит в нахождении такого функционала (4), норма которого в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$ минимальна. Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности $\ell$ мы будем пользоваться часто так называемой экстремальной функцией данного функционала, т.е такой функцией $\psi_\ell$ для которой

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell|\, L_2^{(m)*}(0,1)\right\|\left\|\psi_\ell|\, L_2^{(m)}(0,1)\right\|.$$

Известно, что в работе И.Бабушка и др нахождение экстремальной функции $\psi_\ell(x)$ сведена к решению краевых задач для дифференциального уравнения $2m$-го порядка, но там решение не приводится.

В работе (2) явно найдена экстремальная функция.

В настоящей работе пользуяс экстремальной функции вычеслена норма функционала погрешности формулы (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Минимизируя эту норму по коэффициентам $C^{(1)}[\beta]$ при заданных $C[\beta]$ получены системы для нахождения коэффициентов $C^{(1)}[\beta], \beta=0,1,...,k$. Доказаны существования и единственность решений этой системы. С помошью дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ полученна представления оптимальных коэффициентов $C^{(1)}[\beta]$ разностных формул вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

**Литература**

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул, М: Наука, 1974. 808с.

2. *Шадиметов Х. М.* Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространсвах Соболева, Ташкент, Фан ва технология, 2019, 224с.

# Математическая модель распространения COVID-19 в Узбекистане

**Раимова Гульнора Мирвалиевна**

*Университет Мировой Экономики и Дипломатии*

e-mail: raimova27@gmail.com

Математические модели помогают спрогнозировать развитие инфекционных заболеваний, чтобы показать вероятный исход эпидемии и на основе этой информации выработать эффективную стратегию для организации мероприятий, направленных на борьбу с заболеванием. В моделях используются базовые допущения, а так же собранная статистическая информация для определения параметров различных инфекционных заболеваний, далее эти параметры используются для расчета эффектов различных мер воздействия, таких как карантинные мероприятия, программы массовой вакцинации и многое другое. Моделирование может помочь решить, каких вмешательств следует избегать, а какие необходимо опробовать, или может предсказать будущие развитие распространения заболевания и т.д.

Теория Кермака-МакКендрика (Kermack-McKendrick) представляет собой гипотезу о распространении инфекционного заболевания среди населения. В 1927 году W.O.Kermack и A.G.McKendrick опубликовали свою теорию в статье [1] и она стала источником SIR-модели. Модель SIR (Susceptible, Infected, Recovered) является базовой для описания распро- странения инфекционных заболеваний и была предложена в 1920-х годах шотландскими эпидемиологами Андерсоном Кермаком и Уильямом Маккендриком. Согласно SIR, население делится на три группы: восприимчивые ($S$), инфицированные (зараженные) ($I$) и выздоровевшие ($R$). С течением времени возможны переходы $S \to$ I (заражение) и $I \to R$ (выздоровление или смерть). Согласно модели система дифференциальных уравнений, описывающая распространение заболевания имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI, \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I, \\ \\ N = S(t) + I(t) + R(t) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь через $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ обозначены количество восприимчивых к заболеванию, количество инфицированных и количество выздоровевших к моменту времени $t$ индивидумов соответственно. Параметр $beta$ называется частотой контактов и характеризует возможность передачи болезни при контакте между зараженным и восприимчивым индивидами, другой параметр $\gamma$ - частота выздоровлений. Размер популяции $N$ считается фиксированным. Следующая диаграмма иллюстрирует переходы между состояниями (рис.1):

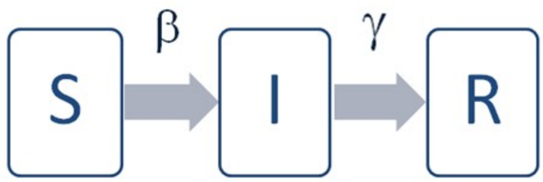



**Рис.1.** *Диаграмма переходов между состояниями*

В настоящее время существует целое семейство моделей, разработанных на базе **SIR-моделей**:

- **SIRS**: «Восприимчивые → инфицированные → выздоровевшие → восприимчивые». Модель для описания динамики заболеваний с временным иммунитетом.
- **SIRS**: «Восприимчивые → инфицированные → выздоровевшие → восприимчивые». Модель для описания динамики заболеваний с временным иммунитетом.
- **SEIR**: «Восприимчивые → контактировавшие с инфекцией → инфицированные → выздоровевшие». Модель для описания распространения заболеваний с инкубационным периодом.
- **SIS**: «Восприимчивые → инфицированные → восприимчивые». Модель для распространения заболевания, к которому не вырабатывается иммунитет.
- **SEIR-D**: «Восприимчивые → контактировавшие с инфекцией → инфицированные → выздоровевшие либо умершие». В популяция делится на пять групп. К четырем традиционным SEIR добавляется D-умершие. В модели рассматривается ситуация, когда человек уже инфицирован, но заболевание находится в латентном периоде.
- **MSEIR**: «Наделенные иммунитетом от рождения → восприимчивые → контактировавшие с инфекцией → инфицированные → выздоровевшие». Модель, учитывающая иммунитет детей, приобретенный внутриутробно.
- **SEIHFR**: «Восприимчивые → латентные → инфицированные → госпитализированные → непохороненные либо невосприимчивые». Модель точно описывает распространение эпидемии лихорадки Эбола, так как в данную модель включены все группы людей, участвующие в эпидемии.
- **SEIR-HCD**: Популяция делится на семь групп. К четырем традиционным SEIR, добавляются H - госпитализированные, C - критические (подключенные к аппарату вентиляции легких), D - умершие.

Используя как основу классическую модель распространения эпидемии, внеся в нее несколько факторов и допущений, специфических для COVID-19, можно демонстрировать и влияние внешних факторов: например, показать, как карантин и соблюдение дистанции снижают число заразившихся. В зависимости от политики по стабилизации распространения и проводимых мероприятий, можно разработать группу моделей, наиболее достоверно описывающие различные этапы распространения заболевания. В качестве примера рассмотрим начальный этап, т.е. период времени апрель-май 2020 года. Перечислим некоторые особенности того периода:

- Система строгого карантина;
- Закрытие школ, ВУЗов, многих государственных и частных предприятий на карантин;
- Строгая изоляция всех прибывших из-за рубежа;
- Закрытие границ: государственных и внутренних;
- Строительство контейнерных карантинных зон;

- Ограничение передвижения частного и пассажирского автотранспорта;
- Обязательная изоляция и стационарное лечение инфицированных;
- Обязательное стационарное лечение всех форм заболевания;
- Карантинные мероприятия для излечившихся;
- Отслеживание контактов зарегистрированных больных и их изоляция
- Отсутствие программы тестирования населения.

Для описания распространения заболевания в стране в этот период можно предложить следующую модель. Введем следующие обозначения. Пусть $t$ момент времени. $S(t)$ - здоровая популяция, $I(t)$ - инфицированные в момент времени $t$, $K(t)$ - число охваченных карантином из числа контактировавших с инфицированными контактировавших, аналогично $\overline{K}(t)$ - неохваченные карантином, $R(t)$ - количество исцелившихся к моменту $t$, $D(t)$ - количество умерших к этому моменту. Система дифференциальных уравнений, описывающая распростронение болезни имеет следующих вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta_1 I(t) - \beta_2 I(t) \\[2ex] \dfrac{dK}{dt} = \beta_1 I(t) - \delta_1 K(t) \\[2ex] \dfrac{d\overline{K}}{dt} c d\overline{K} dt = \beta_2 I(t) - \delta_2 \overline{K}(t) \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \delta_1 K(t) + \delta_2 \overline{K}(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = \gamma I(t) \\[2ex] \dfrac{dD}{dt} = \mu I(t) \end{cases} \tag{2}$$

**Параметры модели:**

$\beta$ - параметр, характеризующих скорость передачи инфекции. Рассмотрим следующие две группы: группа G1 – контактировавшие с инфицированными лицами, которые охвачены карантином (помещены на карантин), группа G2 – контактировавшие с инфицированными лицами, которые не охвачены карантином. Для нашей модели скорость передачи инфекции определяется различно для этих двух групп.$\beta_1$ - скорость передачи для группы G1: $\beta_1 = \beta \cdot (1 - p_k)$, и для группы G2 $\beta_2 = \beta \cdot p_k$, здесь $p_k$ - доля охваченных карантином лиц, имевщих контакт. Далее $\delta$ - скорость перехода болезни из инкубационной стадии в открытую: $\delta = 1/t_l$, где $t_l$ - среднее время в днях латентного периода течения болезни. $\delta_1$, $\delta_2$ - параметры, характеризующие интенсивность заболевания по группам G1 и G2 соответственно. $\delta_1 = K_k \cdot \delta/(K_k + K_c)$, $\delta_2 = K_c \cdot \delta/(K_k + K_c)$, здесь $K_k$ - среднее число контактов лиц, контактировавщих и охваченных карантином (G1); $K_c$ - аналогичное число для неохваченных карантином (G2). Параметр $\gamma$ характеризует скорость выздоровления и определяется как $\gamma = (1 - p_d)/t_{lc}$, где $p_d$ - показатель смертности (%), $t_{lc}$ - среднее время в днях от начала заболевания до исцеления. Параметр $\mu$ в модели характеризует интенсивность смерности и определяется как $\mu = p_d/t_c$, $t_c$ где среднее время в днях от начала заболевания до смерти. В модели значения параметров $\beta$, $t_l$, $p_d$, $t_{lc}$, $t_c$ определены на основе официальной мировой медицинской статистики; значения $p_k$, $K_k$, $K_c$ оценены на основе данных по Республике, последние показатели являются чувствительными к мерам по борьбе с короновирусной инфекцией.

Начальные условия (значения к моменту оценивания): количество инфицированных $I(0) = I_0$, количество исцелившихся $R(0) = R_0$, количество умерших $D(0) = D_0$, количество помещенных на карантин $K(0) = K_0$.

Система дифференциальных уравнений (1), которой описывается распространение заболевания, не является линейной и не разрешима аналитически. Рассматриваются некоторые численные методы для решения данной системы дифференциальных уравнений.

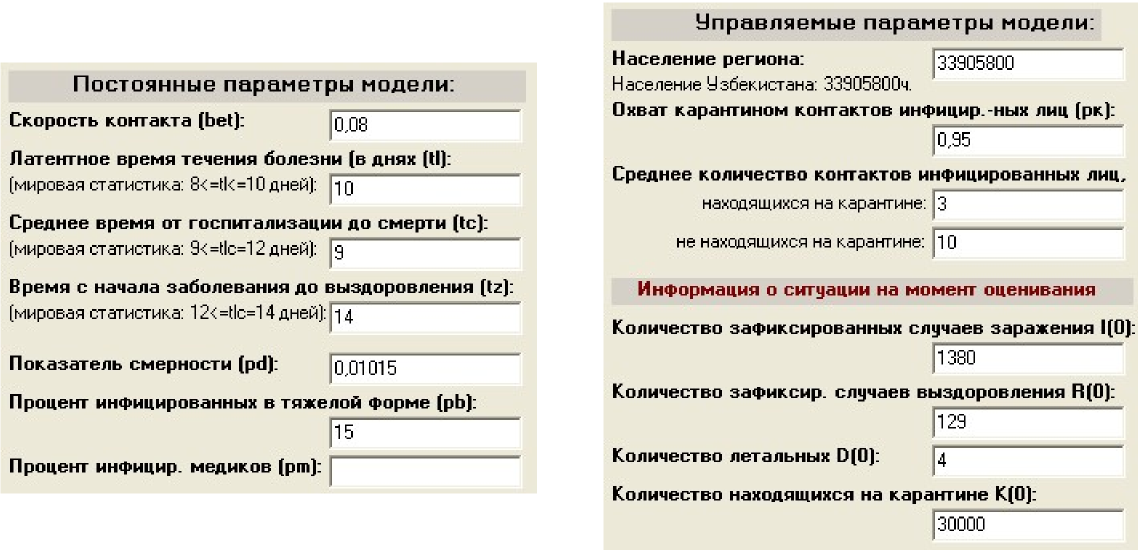



**Рис.2.** *Исходные данные.*

На основе предложенной модели была разработана программа для моделирования распространения заболевания COVID-19 в Республике Узбекистан. Для численного решения системы дифференциальных уравнений использован метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Исходные значения на момент оценивания - 14 апрель 2020 года для модели приведены на рисунке 2.

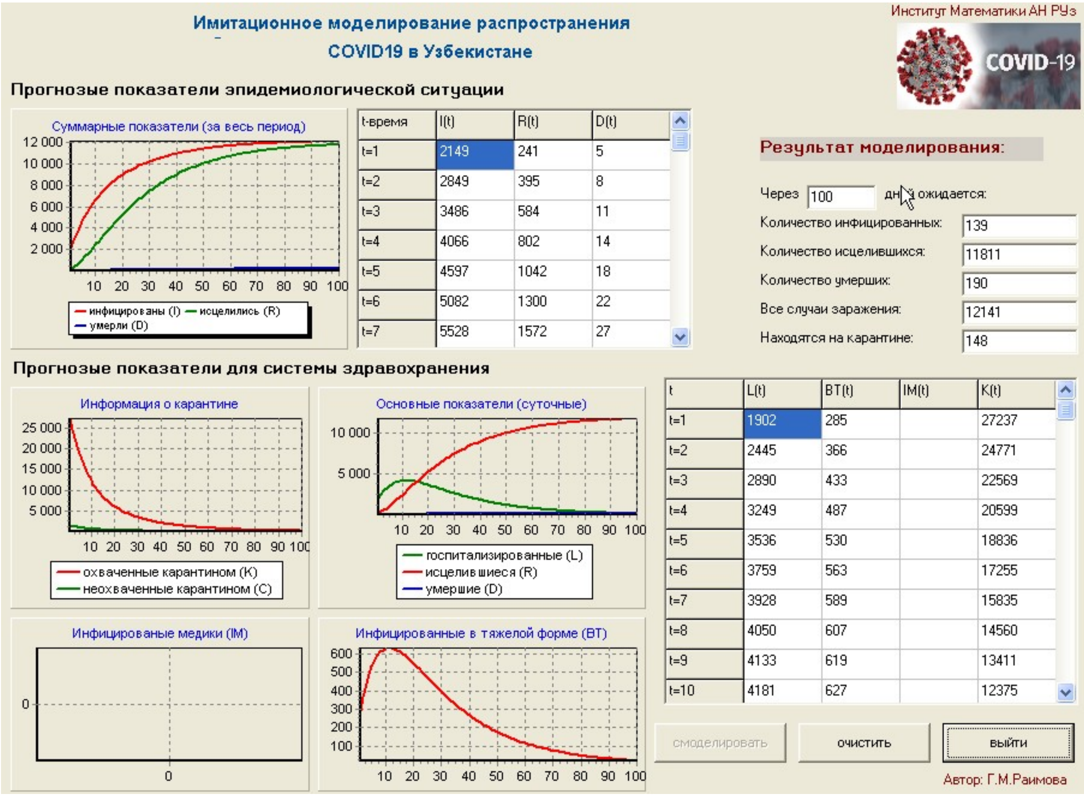



**Рис.3.**. *Результаты моделирования*

Программа позволила на основе данных на момент оценивания получить прогнозные значения по развитию ситуации с распространением короновирусной инфекции, оценить некоторые показатели по системе здравоохранения, такие как загруженность медучреждений, необходимое количество аппаратов ИВЛ, вместимость карантинных зон и другие. На следующем рисунке 3 приведены результаты моделирования.

## Литература:


1. Kermack W.O., McKendrick A.G. (August 1, 1927). "A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics". Proc. R. Soc. Lond. A 115 (772): 700-721.


# Об одном способе решения уравнения изгиба тонких упругих пластин


**Расулов С.И., Куралов Б.А.**

*Ташкентский государственный технический университет, г.Ташкент, Республика Узбекистан*

E-mail: kuralovbekjon@mail.ru



*В статье рассматривается новый способ решения уравнения изгиба тонких упругих пластин с помощью статистического моделирования. Построены несмещенные оценки и проведены численные эксперименты над модельной задачей.*

В последнее время метод Монте-Карло или метод статистического моделирования применяется для решения очень важных задач физики и механики. В данной работе разработан статистический алгоритм для определения нормального прогиба пластины.

Рассмотрим уравнения изгиба тонких упругих пластин

$$\Delta\Delta u(x,y) = f(x,y)/D, \ (1)$$

где $u(x,y)-$ нормальный прогиб пластины, $f(x,y)-$ интенсивность нормальной нагрузки, $D = Eh^3/12(1-\sigma^2)$, где $E-$ модуль Юнга, $\sigma-$ постоянная Пуассона материала пластины, $2h-$ ее толщина (2).

Пусть $G-$ область, которую пластина вырезает из плоскости. Контур этой области обозначим через $\partial G$. В зависимости от характера закрепления края пластины на решение накладываются соответствующие граничные условия. Например, если край пластины свободно оперт, то

$$u|_{\partial G} = 0, \quad \left[\Delta u - \frac{1-\delta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]\Bigg|_{\partial G} = 0 \ (2)$$

Здесь $\nu-$ есть внешняя нормаль к $\partial G$; $\rho-$ радиус кривизны контура $\partial G$.

Рассмотрим теперь случай неоднородного уравнения (1) с правой частью $f/D = g$ (случай,когда $f = 0$ рассмотрен в (1)) и выпишем соотношение о среднем в круге $K(x,r)$ с границей $S(x,d(x))$. Для этого используем тождество (3)

$$u(x) = N_x^r(u) - \frac{r^2}{4}N_x^r(\Delta u) + \int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\int\limits_0^r \frac{r^2 - r_1^2(\ln\frac{r}{r_1}+1)r_1}{4} g(x+r_1\cos\varphi, x+r_1\sin\varphi)\,dr_1 \ (3)$$

$$\Delta u(x) = N_x^r(\Delta u) + \int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\int\limits_0^r \left[-\ln\left(\frac{r}{r_1}\right) r_1 g(x+r_1\cos\varphi, x+r_1\sin\varphi)\right] dr_1$$

где

$$N_x^r(u) = \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}\frac{\Delta^n u(x)}{(n!)^2} + B_x^r(\nu_m\Delta^{m+1}u)$$

$B_x^r(u)-$ оператор усреднения функции $u$ по кругу $K(x,r)$, т.е. $B_x^r = \int\limits_{K(x,r)} u d\sigma_x^r$, а функции $\nu_m$ определяется рекуррентными формулами

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{\rho}, \quad \nu_{m+1} = \int\limits_{r_1}^r \rho\nu_m(\rho)\ln\frac{\rho}{r_1}\,d\rho.$$

Интегралы в правой части (3) в круге можно оценивать по формулам

$$\eta_1 = \frac{r^2 - \rho^2\ln\frac{r}{\rho}}{4}\frac{r^2}{4\ln(r/\rho)}g(x+\rho\omega), \quad \eta_2 = -\frac{r^2}{4}g(x+r\omega), \ (4)$$

где $\omega-$ единичный изотропный вектор. Моделирование случайной величины $\rho$ в каждом круге $K(x,r)$ не представляет труда. Например, можно использовать метод исключения ,выбрав в качестве мажоранты $\frac{4}{er}$, тогда вероятность исключения $P$ будет для всех кругов одной и той же: $P = (4-e)/4$.

Решение системы (3) можно оценить с помощью векторного алгоритма метода Монте-Карло (3), который определяется выражением

$$\vec{\xi} = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon - 1} Q_n \vec{\eta}(\xi_n),$$

где $\{\xi_n\}$– цепь блуждания по сферам, $\{Q_n\}$– матричные веса:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_n = Q_{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{d_T^2}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, дисперсия для рассматриваемого алгоритма конечна. Проведены численные расчеты над модельной задачей. Расчеты показали, что результаты полученные методом Монте-Карло хорошо совпадают с аналитическим решением модельной задачи.

**Литература**


1. *Расулов С.И.* Об одном методе решения задачи теории упругости.//Вестник ТашГТУ,-Т.: 2006 г. -4 с.

2. *Елепов Б.С. и др.* Решение краевых задач методом Монте-Карло.- Новосибирск,:Наука, 1980 г. -146 с.

3. *Сабельфельд К.К.* Статистическое моделирование в задачах математической физики. -Новосибирск,: Издательство Новосибирского университета, 2014 г. -250 с.


# Численное моделирование решение смешанной задачи для симметрической гиперболической системы с двумя уравнениями


**Худойберганов М.У.**

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*

mirzoali@mail.ru


Данная работа посвящена исследованию устойчивости разностное схеме для одного класса симметрыческих t-гиперболических систем уравнений с диссипативными граничными условиями

**1. Дифференциальная задача**

Рассмотрим смешанную задачу для симметрической гиперболической систем уравнений в области: $\Pi = \{(t,x) : 0 \leq t \leq T; 0 \leq x \leq l\}$ :

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + B\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + CU(t,x) = 0,$$

$$0 \leq t \leq T; 0 \leq x \leq l; \tag{1}$$

с граничными условиями при $x = 0$ :

$$U^I = sU^{II}, 0 < t \leq T; \tag{2}$$

и при $x = l$ :

$$U^{II} = rU^{I}, 0 < t \leq T; \tag{3}$$

и начальными данными при $t = 0$ :

$$U(0, x) = U_0(x), 0 \leq x \leq l. \tag{4}$$

Здесь $B = diag(\lambda_1, \lambda_2)$; $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ b(x) & 0 \end{pmatrix}$, вещественные квадратные матрицы ; $U_0(x)-$ заданная вектор - функция; $s, r-$ действительные числа; $U = U(U^I, U^{II})-$ неизвестная вектор; $T, l-$положительные вещественные числа. Следует отметить что многие физические явления может быть описан в виде симметрической $t$-гиперболической системы (1). Корректность рассматриваемой задачи подробно изучено в работе [1]. В настояшей работе предлагается противопточная разностная схема расщепления по младшим членам.

**2.Разностная схема**

В области $\Pi$ строим разностную сетку с шагами $\Delta t, \Delta x$. Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$(z_1)_j^k = (U^I)_j^k - (\lambda_1)_j \frac{\Delta t}{\Delta x}[(U^I)_j^k - (U^I)_{j-1}^k], j = 1, ..., J;$$

$$(z_2)_j^k = (U^{II})_j^k - (\lambda_2)_j \frac{\Delta t}{\Delta x}[(U^{II})_j^k - (U^{II})_{j+1}^k], j = 1, ..., J-1, \tag{5}$$

$$(U^I)_j^{k+1} = (z_1)_j^k - \Delta t a_j (z_2)_{j-1}^k, j = 1, ..., J;$$
$$(U^{II})_j^{k+1} = (z_2)_j^k - \Delta t b_j (z_1)_{j+1}^k, j = 0, ..., J-1; k = 0, ...K-1, \tag{6}$$

Граничные условия (2) аппроксимируются следующим способом:

$$\begin{aligned} (U^I)_0^{k+1} &= s(U^{II})_0^{k+1}, k = 0, ...K-1 \\ (U^{II})_J^{k+1} &= r(U^I)_J^{k+1}, k = 0, ...K-1 \end{aligned} \tag{7}$$

Начальные условия (3) аппроксимируются следующим образом:

$$(U^I)_j^0 = U_0^I(x_j), (U^{II})_j^0 = U_0^{II}(x_j), j = 0, ...J$$

В предположение, что шаги разностной сетки удовлетворяют условию Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} max|(\lambda_i)_j| \leq 1, i = 1, 2, j = 1, 2, ...J \tag{8}$$

проведено вычислительные эксперимент. Проведенное вычисление показали сходимость прыближенного решение к точное решение дифференциальное задачи.

### Литература


1. *Godunov S.K.* Equations of mathematical physics. M.: Nauka, 1979, 372 p.

2. *Blokhin A.M., Aloev R.D.* Energy integrals and their applications to the study of the stability of the difference schemes. Novosibirsk State University Press, 1993, 224 p.

3. *Bastin G., Coron, J.-M.* Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 88. Birkh?user Basel. 2016.

4. *Aloev R.D., Eshkuvatov Z.K., Davlatov Sh.O., Nik Long N.M.A.* Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients. Computers and Mathematics with Applications, 68, 2014, 1194-1204.

5. *Aloev R.D., Blokhin A.M., Hudayberganov M.U.* One Class of Stable Difference Schemes for Hyperbolic System. American Journal of Numerical Analysis. 2(3), 2014, 85-89.

6. *Aloev R.D., Davlatov Sh.O., Eshkuvatov Z. K., Nik Long N.M.A.* Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients. Malaysian Journal of Mathematical Sciences (MJMS), 10(S), 2016, 49-60.

# Кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве периодических функций Соболева

**Шадиметов Х.М.,**[1,2] **Нуралиев Ф.А.,**[1,2] **Маматова Н.Х.**[3]

*Институт математики им. В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан*[1]
*Ташкентский Государственный Транспортный Унверситет, Ташкент, Узбекистан*[2]
*Бухарский Государственный Унверситет, Бухоро, Узбекистан*[3]
*e-mail kholmatshadimetov@mail.ru, e-mail nuraliyev@mail.ru,*

Пространство $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)-$ класс периодических функций $n$ переменных с матрицей периодов $H$ ($\det H = 1$), интегрируемых с квадратами производных порядка $m$.

В работе С.Л.Соболева (1) рассмотрена задача приближенного вычисления интегралов периодических функций из пространства $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$. Также рассмотрено построение оптимальных решетчатых кубатурных формул вида

$$\int_{\Omega_0} p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{hH\beta\in\Omega_0} \overset{\circ}{C}[\beta]\varphi[\beta] \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = p(x)\chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{hH\beta\in\Omega_0} \overset{\circ}{C}[\beta]\delta(x - hH\beta).$$

Здесь $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\varphi(x) \in \widetilde{L_2^{(m)}}(H)$, $p(x)-$весовые функции, $\chi_{\Omega_0}(x)-$индикатор области $\Omega_0$, $h-$ шаг решетки. Под $\Omega_0$ понимают фундаментальный параллелепипед матрицы $H$,т.е. образ при линейном преобразовании $x = Hy$ единичного куба

$$Q = \{y \in R^n : \ 0 \le y_j < 1, \ j = 1, 2, ..., n\} \subset R^n.$$

Там же показано, что на пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических функций, норма в котором инварианта относительно узлов, есть функционал погрешности с равными коэффициентами:

$$\ell(x) = \chi_{\Omega_0}(x) - h^n \sum_{hH\beta\in\Omega_0} \overset{\circ}{C}[\beta]\delta(x - hH\beta).$$

В работах М.Д.Рамазанова (2-3) построены оптимальные кубатурные формулы вида (1). Автор рассматривает пространства функций $W_2^{\mu}$, которые получаются пополнением конечных рядов Фурье $f(x) = \sum_k f_k e^{2\pi ikx}$ в норме:

$$\left\| f \left| \widetilde{W_2^{\mu}} \right\| = \left| \sum_k |f_k \mu(2\pi ik)|^2 \right|^{\frac{1}{2}}.\right.$$

В работах М.Д.Рамазанова и Х.М.Шадиметова (4-5) построены весовые оптимальные кубатурные формулы вида (1) на пространстве Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$.

В настоящей работе в пространстве периодических функций $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ рассматривается построение оптимальной решетчатой кубатурной формулы с производными первого порядка, т.е. кубатурная формула типа Эрмита.

Рассмотрим кубатурную формулу с производными первого порядка вида

$$\int_{\Omega_0} \varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} \left( C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x^{(k)}) \right), \tag{2}$$

где точки $x^{(k)} = (x_1^k, ..., x_n^k) \in \Omega_0$ и параметры $C_k, C_k^{(')}$ называют соответственно узлами и коэффициентами кубатурной формулы $\Omega_0-$фундаментальный параллелепипед $D\varphi(x^{(k)}) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \varphi(x^{(k)})$.

Элементами пространства $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ служат функции, отличающиеся друг от друга на постоянное слагаемое.

Норма в $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ имеет вид

$$||\varphi|\widetilde{L_2^{(m)}}(H)||^2 = \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m}^{m} \frac{m!}{\alpha!} \left( D^{\alpha}\varphi \right)^2 dx.$$

Разность

$$\int_{\Omega_0} \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} \left( C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x_k) \right)$$

называется погрешностью кубатурной формулы (2).

С другой стороны,

$$(\ell, \varphi) = \int_{\Omega_0} \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} \left( C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x_k) \right) =$$

$$\int_{\Omega_0} \left[ \left( \mathcal{X}_{\Omega_0} - \sum_{k=1}^{N} \left( C_k \delta(x - x^{(k)}) - C_k^{(')} \delta'(x - x^{(k)}) \right) \right) * \Phi_0(H^{-1}x) \right] \varphi(x)dx,$$

где

$$\mathcal{X}_{\Omega_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \Omega_0, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin \Omega_0, \end{cases}$$

$\delta(x)-$ известная дельта-функция Дирака,

$$\Phi_0(H^{-1}x) = \sum_{\beta} \delta(x - H\beta), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n),$$

$\beta_i-$ целые числа, т.е. $\beta_i \in Z$;

$$\ell(x) = \left( \mathcal{X}_{\Omega_0}(x) - \sum_{k=1}^{N} \left( C_k \delta(x - x^{(k)}) - C_k^{(')} \delta'(x - x^{(k)}) \right) \right) * \Phi_0(H^{-1}x) \tag{3}$$

$-$ функционал погрешности кубатурной формулы.

Пространство $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ будет состоять из всех периодических функционалов (3), которые ортогональны единице:

$$(\ell, 1) = 0.$$

Неизвестными параметрами кубатурной формулы являются узлы $x^{(k)}$ и коэффициенты $C_k, C_k^{(')}$.

Оптимальной кубатурной формулой называют такую кубатурную формулу, погрешность которой при заданном числе узлов $N$ имеет наименьшую норму в $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$.

Если узлы $x^{(k)}$ являются точками решетки, т.е. расположены в точках вида $x^{(\gamma)} = hH\gamma$, тогда такую кубатурную формулу называют решетчатой. Здесь $h$- малый положительный параметр, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n), \gamma_i \in Z, i = 1, 2, ..., n$.

Далее получена экстремальная функция, вычислен квадрат нормы функционала погрешности рассматриваемой кубатурной формулы в сопряженном пространстве $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$. Путем минимизации этой нормы по коэффициентам получена система линейных алгебраических уравнений, доказаны существование и единственность решения этой системы. Кроме того, найдено решение этой системы, т.е. явно найдены оптимальные коэффициенты кубатурной формулы с производными и вычислена оптимальная норма функционала погрешности.

## Литература


1. *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы, Новосибирск, Изд-во ИМ СО РАН, 1996, с. 484.

2. *Рамазанов М.Д.* Оптимизация нормы функционала погрешности решетчатой кубатурной формулы в шкале винеровских пространств, Доклады РАН. Москва, 1998, Т. 361, 6, с. 743-745.

3. *Рамазанов М.Д., Шадиметов Х.М.* Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева, Доклады РАН. Москва, 1999. - Т. 358, 4, с. 453 - 455.

4. *Рамазанов М.Д.* Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем, Уфа, 2009, с. 178.

5. *Шадиметов Х.М.* Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева, Сиб. журн. вычисл. математики, Новосибирск, РАН. Сиб. отделение, 1999, Т. 2, с. 185-196.

# Оптимальные решетчатые кубатурные формулы типа Эйлера-Маклорена в пространстве Соболева двух переменных функций

**Шадиметов Х.М.,[1,2] Гуломов О.Х.[1]**

*Институт математики им. В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан*[1]
*Ташкентский Государственный Транспортный Унверситет, Ташкент, Узбекистан*[2]
e-mail kholmatshadimetov@mail.ru, e-mail otabek10@mail.ru

В настоящей работе продолжается исследование из работ (1) и рассматривается оптимизация кубатурных формул типа Эйлера-Маклорена вида

$$\int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)dx \cong \sum_{hH\beta\in\Omega_0} C[\beta]\varphi[\beta] + \int\limits_{\partial\Omega_0} \sum_{\substack{|\gamma|\le m-1 \\ |\alpha|+|\gamma|=2m-1}} \Big[C^{(1)}_{\alpha,\gamma} D^\alpha B_{2m}(h^{-1}x) D^\gamma \varphi(x)dx_1 +$$

$$+ C^{(2)}_{\alpha,\gamma} D^\alpha B_{2m}(h^{-1}x) D^\gamma \varphi(x)dx_2\Big] \tag{1}$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in Z^2, h > 0$-малый параметр, т.е. шаг решетки.

$C[\beta], C^{(j)}_{\alpha,\gamma}$ - коэффициенты кубатурной формулы, $H$ - матрица решетки размера $2\times 2$, $detH = 1$, $B_{2m}(x) = (-1)^m \sum\limits_{\beta\neq 0} \frac{exp(-2\pi i H^{*-1}\beta x)}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}$ - функция Бернулли-Соболева.

Наша оптимизационная задача заключается в том, чтобы минимизировать норму-разность левой и правой частями формулы (1), рассмотренную в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega_0)$ по коэффициентам $\{C[\beta], C^{(j)}_{\alpha,\gamma}\}$.

В нашей работе $\Omega_0$ - аффинное преобразование 2-мерного единичного куба, т.е. квадрата:

$$\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2) \in R^2, x = Hy, 0 \le y_j \le 1, j = 1, 2\}.$$

Пространство $L_2^{(m)}(\Omega_0)$ - класс функций, интегрируемых с квадратами производных порядка $m$. Везде с самого начало мы предпологаем, что $m > 1$. При этом теоремы вложения обеспечивают ограниченность функционала погрешности кубатурной формулы (1).

Норма в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega_0)$ определяется формулой (2)

$$||\varphi|L_2^{(m)}(\Omega_0)||^2 = \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}(D^\alpha\varphi)^2 dx.$$

Пространство $L_2^{(m)}(\Omega_0)$ становится Гилбертовым, если на нем ввести скалярное произведение

$$\{\varphi, \psi\}_m = \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha\varphi D^\alpha\psi dx.$$

**Литература**

1. *Шадиметов Х.М.* Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространсвах Соболева, Ташкент, "Фан ва технология 2019, 224 с.
2. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул, -М: Наука, 1974. 808 с.