М.М. АБЕНОВ

ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА: МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Монография

Алматы
2019

УДК 517
ББК 22.161.5
А 14

Рецензенты:
Мартынов Николай Иванович – доктор физ.-мат. наук
Габбасов Марс Беккалиевич – кандидат физ.-мат. наук

Автор:
Абенов Махсут Мнайдарович – кандидат физ.-мат. наук

Абенов М.М.
А 14 Четырехмерная математика: Методы и приложения: монография / М.М. Абенов. – Алматы: Қазақ университеті, 2019. – 176 с.
ISBN 978-601-332-450-0

Монография содержит сжатое изложение основ четырехмерного анализа. В ней приведены основные понятия теории функций четырехмерного переменного числа. Показано, что ее методы дают перспективный математический аппарат исследования прикладных задач механики и теоретической физики.

Для научных работников в области математики, механики (теоретической физики) и в смежных с ними областях естествознания.

Библиогр.25 назв.
УДК 517
ББК 22.161.5

ISBN 978-601-332-450-0

Оглавление

0.1 Введение

Монография содержит сжатое изложение основ четырехмерного анализа и его методов, как перспективного математического аппарата исследования прикладных задач механики (теоретической физики).

Известно, что ключевые математические модели физики (механики) задаются в виде систем уравнений, содержащих неизвестные функции от четырех действительных переменных: от временной переменной t и пространственных переменных – x, y, z [19],[20].

То есть, базовые прикладные модели (априори) содержат неизвестные 4 – векторы, специфическим образом зависящие от одного неделимого, четырехмерного переменного числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

При этом, отдельная компонента любого 4 – вектора – суть обычная действительная функция от четырех действительных переменных x_1, x_2, x_3, x_4, заданная в некоторой области $G \subset R^4$.

Для исследования прикладных задач, именно в таком контексте, применяется четырехмерный анализ – теория функций четырехмерного переменного числа (ТФЧП) и ее методы.

ТФЧП строится на принципах общности ее ключевых понятий с аналогичными категориями одномерного и двумерного анализа: ТФДП – теории функций действительного переменного и ТФКП – теории функций комплексного переменного (числа).

Такой подход обосновывается тем, что линейные пространства одномерных (обычных действительных) и двумерных (обычных комплексных) чисел изначально можно рассматривать как собственные подпространства более общего пространства четырехмерных чисел. Это приводит к изучению этих чисел (одномерных, двумерных и четырехмерных) как элементов триединой системы, что позволяет единообразно задавать ключевые понятия в теории этих чисел (например арифметические операции на множествах этих чисел).

Действительно, записав одномерное (действительное) число как $X = (x_1, 0, 0, 0)$, а двумерное (комплексное) — $X = (x_1, x_2, 0, 0)$ мы видим, что они являются частными видами четырехмерных чисел.

Отметим, что ранее схожий подход был использован выдающимся физиком У.Гамильтоном, при построении им алгебры кватернионов (как некоторой системы четырехмерных чисел). В алгебре кватернионов он определил некоммутативную операцию умножения элементов, что позволило избежать появления делителей нуля (относительно умножения). С другой стороны, такое умножение не способствовало созданию стройной теории функций от кватерниона.

Простейший пример: операция умножения одномерных чисел связывается с измерением меры некоторого реального объекта (например площади прямоугольника). Понятно, что задав абстрактную, некоммутативную операцию умножения на множестве действительных чисел (что вполне возможно), мы неизбежно приходили бы к казусам, далеким от реалии.

В связи с этим, у нас операция умножения (четырехмерных чисел) априори предполагается коммутативной. Но тогда неизбежно появление делителей нуля (теорема Фробениуса)[15], что вызывает опасения, связанные с возможностью получения каких –либо приемлемых результатов. Тем не менее, все делители нуля легко идентифицируются с помощью спектра четырехмерного числа. Спектральный анализ устраняет трудности, связанные с введением элементов теории функций на коммутативной алгебре четырехмерных чисел.

В итоге мы приходим к обоснованному определению линейного пространства $C[M(G)]$ четырехмерных непрерывных функций (всевозможных 4–векторов функций, с точки зрения приложений) и самое главное –получим полное описание плотного в нем подпространства четырехмерных регулярных функций: $M_A(G) \subset C[M(G)]$.

Ключевым моментом здесь является то, что каждый элемент бесконечномерного пространства $M_A(G)$ служит прямым, четырехмерным обобщением своих типовых аналогов – элементарных функций из одномерного и двумерного анализа. Это позволяет использовать аналитическую форму записи четырехмерных функций и легко оперировать ими, как в одномерном (двумерном) анализе.

Весьма примечательно то, что регулярная функция имеет составной тип. То есть, ее компоненты (по различным парам независимых переменных) являются решениями уравнений как гиперболического, так и эллиптического типов. Более того, многие регулярные функции имеют по три основных периода – это возможность изучения сложных колебательных процессов (единовременные продольные и поперечные колебания). Отметим, что такие факты хорошо согласуются с одним из ключевых принципов теоретической физики: корпускулярно – волновым дуализмом физических явлений.

В рамках ТФЧП определено невырожденное ортогональное преобразование пространства, априори сохраняющее форминвариантность основных уравнений механики (теоретической физики).

Далее, установлена корневая связь пространства $M_A(G)$ с ключевым уравнением естествознания – уравнением неразрывности (с уравнением баланса массы) а именно: произвольной регулярной функции соответствует ровно одно решение этого уравнения. В итоге получен континуум гладких решений (общее решение, с точки зрения принципа детерминированности) уравнения неразрывности.

Кстати, из уравнения неразрывности следует, что 4 – вектор скорости – это обязательный атрибут гидродинамики и ряда других разделов физики, где ранее обходились только трех – векторами.

Это, в свою очередь, приводит к получению новых методов исследования задач гидродинамики, теории упругости, небесной механики, квантовой механики, электродинамики и др. Так, четырехмерный анализ дает описание классов единственности решений различных начально–краевых задач, на основе одного лишь принципа детерминированности. После этого остается доказать существование решения задачи в найденном классе единственности.

Ряд примеров приложения методов ТФЧП к достаточно сложным задачам приведен в главе "Приложения"данной книги.

Эти примеры указывают на то, что имеется перспектива широкого применения ее методов в теоретической физике, механике и других разделах естествознания. Физическим (математическим) обоснованием такого утверждения является, указанное выше, наличие прямой (корневой) связи всего пространства четырехмерных функций $C[M(G)]$ с уравнением неразрывности (баланса массы). А последнее уравнение присутствует (явно или неявно) во всех разделах теоретической физики (механики) [19], химии, математической биологии и т.д., а потому является базовым уравнением естествознания.

К слову, имеются примеры приложения методов ТФЧП к прикладным задачам из других разделов современного естествознания (математическая биология, химия, мат методы в экономике и т.д.).

Поэтому автор надеется, что данная работа вызовет соответствующий интерес у специалистов разного профиля.

При этом необходимо учесть то, что основы ТФЧП разработаны сравнительно недавно. Поэтому, теория далека от завершенности и полноты (в отличие от ТФДП и ТФКП). Естественно, как это происходит в любой области науки, для получения новых результатов потребуются коллективные усилия многих ученых – исследователей. Это – объективная реальность.

Результаты раздела 7.7 монографии получены совместно с талантливым ученым – физиком, к.ф.–м.н. Н.Б.Шалтыковым, безвременно ушедшим из жизни в 2019 году.

В книге применяется метод сквозной нумерации (m,n,k) лемм, теорем, определений и примеров. Здесь: m – номер главы, n –номер раздела, k –номер утверждения.

Так ссылка на Теорему 1.2.2. в тексте означает, что такая теорема изложена в разделе 2, Главы 1 этой книги.

Отзывы и пожелания можно направлять на электронную почту автора: abenov.m.m@gmail.com

Глава 1

Основные понятия четырехмерного анализа

1.1 Вспомогательные сведения

По канонам современной математики, действительное число x_1 воспринимается как элемент одномерного линейного пространства R^1, а комплексное число – как элемент двумерного линейного пространства $R^2 \equiv C$ (с точки зрения изоморфизма).

То есть, общепринятая ныне запись комплексного числа в виде: $z = x_1 + ix_2 \in C$, есть не что иное, как более удобная, эквивалентная форма записи двумерного числа (вектора) $X = (x_1, x_2) \in R^2$, с двумя действительными компонентами.

Далее, рассматривая двумерные числа вида $X = (x_1, 0) \in R^2$ можно говорить о том, что это – эквивалентная, двумерная форма записи одномерного действительного числа.

В таком контексте, теория функций комплексного переменного (двумерного переменного числа) ТФКП, основанная на системе комплексных чисел, является прямым двумерным обобщением теории функций одномерного действительного переменного ТФДП.

То есть, априори обеспечивается общность (единые принципы изложения ключевых понятий) в этих, развитых теориях.

При этом особенно важен учет того факта, что умножение комплексных чисел – это не умножение скаляров, а своеобразное, векторное произведение двумерных чисел (векторов), обобщающее понятие умножения действительных чисел (одномерных числовых векторов).

Действительно, рассмотрим линейное пространство R^2 с элементами вида $X = (x_1, x_2)$, где двумерное число X (по другому называемое комплексным числом) имеет действительные компоненты. Известно, что в этом двумерном пространстве имеется ортонормированный базис, состоящий из чисел вида: $J_1 = (1, 0)$, $J_2 = (0, 1)$ и, произвольный элемент $X = (x_1, x_2) \in R^2$ представим в виде:

$$X = x_1 J_1 + x_2 J_2. \tag{1.1}$$

Вообще говоря, произведение (векторное) элементов в R^2 вводится так [10]. Рассмотрим биекцию между R^2 и некоторым множеством матриц $M(2, R)$ следующего вида:

$$X = (x_1, x_2) \in R^2 \Leftrightarrow A_X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in M(2, R). \tag{1.2}$$

Можно показать, что множество матриц $M(2, R)$ образует поле. Действительно, оно замкнуто относительно всех операции матричного анализа, в том числе транспонированная и обратная матрицы имеют такой же, форминвариантный вид. Единственная вырожденная матрица — нулевая матрица. Определители всех матриц, кроме нулевой, положительны и вычисляются единообразно:

$$det A_X = x_1^2 + x_2^2.$$

Легко видеть, что существует изометрия между множествами R^2 и $M(2, R)$. Но тогда произведение двух разных комплексных чисел $X = (x_1, x_2)$ и $Y = (y_1, y_2)$ должно быть двумерным числом вида $W = (w_1, w_2)$, соответствующим произведению матриц A_X и A_Y. С другой стороны:

$$A_X \times A_Y = \begin{pmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_1y_2 - x_2y_1 & x_1y_1 - x_2y_2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, абстрактная операция $(*)$ коммутативного умножения двух комплексных чисел (в ТФКП) обоснованно задается формулой вида:

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Относительно такого умножения, базисные двумерные числа приобретают следующие свойства:

$$J_1 * J_1 = J_1; J_1 * J_2 = J_2; J_2 * J_2 = -J_1.$$

Далее, двумерное число $J_1 = (1, 0)$ отождествляется с действительной единицей,то есть: $J_1 = 1$, тогда из предыдущей формулы имеем:

$$J_2^2 = -J_1 = -1 \Rightarrow J_2 = \sqrt{-1} = i.$$

Отметим, что только теперь разложение (1.1) запишется в привычной нам форме, обозначающей комплексное число:

$$X = z = x_1 + ix_2.$$

Ключевым моментом здесь является то, что изометрия между множествами R^2 и $M(2, R)$ позволяет определить модуль (длину) комплексного числа как:

$$\mid X \mid = \sqrt{detA_X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{1.3}$$

Далее отметим, что подход использования изоморфизма, сходного с (1.2), нередко применялся при различных попытках расширения поля комплексных (двумерных) чисел.

В частности, знаменитый ирландский ученый У.Гамильтон фактически использовал такую же схему для определения алгебры кватернионов (своеобразных четырехмерных чисел) [15].

Так, задав линейное пространство кватернионов H, изоморфное пространству R^4, можно рассматривать соотношение, сходное с (1.2), то есть, биекцию следующего вида:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in H \Leftrightarrow A_X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Детерминант матрицы A_X легко вычисляется и равен:

$$detA_X = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2.$$

Это позволяет однозначно определить модуль кватерниона, как обычную Евклидову длину:

$$\mid X \mid = \sqrt[4]{detA_X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}. \tag{1.5}$$

Таким путем Гамильтону удалось избежать появления делителей нуля, но операция умножения в множестве матриц вида (1.4) оказалась некоммутативной. Это привело к необходимости определения правого и левого произведения кватернионов. Необходимо признать, что такие казусы не позволяют создать стройную теорию функций (заданной на алгебре кватернионов), в отличие от ТФДП и ТФКП.

Для нас ключевое значение подхода Гамильтона состоит в том, что он первым обосновал принцип общности основных понятий (категорий) одномерного, двумерного и четырехмерного анализа.

В связи с этим отметим, что более или менее значимые результаты, полученные разными исследователями на пути расширения поля комплексных чисел, основаны на выборе различных классов матриц вида (1.4), для определения соответствующей операции умножения.

Известно также, что выбрав тот или иной класс матриц с коммутативным умножением, мы неизбежно столкнемся с проблемой делителей нуля (теорема Фробениуса)[15].

1.2 Четырехмерные числа. Простейшие операции.

Материалы предыдущего раздела приводят нас, к такому определению логически обоснованного понятия четырехмерного числа.

Определение 1.2.1.

Объект вида $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $x_k \in R; k = 1,4$, назовем четырехмерным числом, а все их множество обозначим как R^4.

При этом, четырехмерное число $X = (x_1, 0, 0, 0)$ отождествляется с обычным действительным числом x_1, а четырехмерное число вида $X = (x_1, x_2, 0, 0)$ – с обычным (комплексным) числом: $z = x_1 + ix_2$.

Это позволяет вводить арифметические операции сложения (вычитания) чисел единообразно на всех трех системах чисел.

Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in R^4$ – четырехмерные числа, тогда:

$$X \pm Y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3, x_4 \pm y_4).$$

Легко проверить, что такая операция удовлетворяет всем законам арифметики. Причем существует единственный нулевой элемент, вида: $\theta = (0, 0, 0, 0) \in R^4$, такой что:

$$X + \theta = \theta + X = X.$$

Далее, известен основной базис линейного пространства R^4, состоящий из четырех элементов вида:

$$J_1 = (1, 0, 0, 0); J_2 = (0, 1, 0, 0); J_3 = (0, 0, 1, 0); J_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Тогда, четырехмерное число $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ запишется в векторной форме (в виде разложения по данному базису) :

$$X = x_1J_1 + x_2J_2 + x_3J_3 + x_4J_4.$$

Ключевым моментом является задание алгебры четырехмерных чисел. Для этого мы должны определить абстрактную операцию умножения в линейном пространстве четырехмерных чисел.

Это должно быть векторным, коммутативным умножением элементов. Теоретически, существуют различные варианты введения такой операции, то есть, вроде – бы имеет место некий произвол.

Но, при строгом соблюдении некоторых базовых принципов и ограничений, произвол полностью исключается.

Во–первых, мы будем учитывать современные воззрения теоретической физики об однородности и изотропности пространства (нет выделенных направлений движения) и, однородности времени. По другому говоря, алгебра пространства четырехмерных чисел должна соответствовать этим базовым принципам.

Во – вторых, мы должны следовать принципу общности создаваемой ТФЧП с ключевыми понятиями ТФКП. Тогда и вид матрицы типа (1.4), используемой для определения некоторой абстрактной операции умножения (векторного произведения) четырехмерных чисел, не может быть произвольным.

Следуя этим базовым ограничениям, мы приходим к необходимости рассмотрения линейного пространства $M(4, R)$ всех действительных матриц порядка (4×4), с элементами вида:

$$A_X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \; x_k \in R, k = \overline{1, 4}. \qquad (1.6)$$

Отметим, что вид матрицы (1.6) полностью соответствует вышеприведенным принципам, а именно:

1. Форминвариантный вид 4-х главных блоков матрицы, размерностей (2×2), как бы символизирует принцип однородности и изотропности четырехмерного пространства;

2. Вид отдельного блока размерности (2×2) символизирует общность двумерного и четырехмерного анализа, то есть, полностью со-

ответствует виду матрицы (1.2).

Далее, нам необходимо выявить ключевые свойства элементов линейного пространства матриц – $M(4, R)$.

Теорема 1.2.2. Множество $M(4, R)$ является коммутативным кольцом. Относительно операции матричного анализа оно является замкнутым множеством,с форминвариантными операциями взятия суммы и произведения матриц, транспонирования и определения обратной матрицы (для невырожденных). При этом, все матрицы имеют неотрицательные определители.

Доказательство: Во - первых покажем, что определители всех матриц из $M(4, R)$ определяются единообразной формулой вида:

$$detA_X = [(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2][(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2] \geq 0. \quad (1.7)$$

Определитель матрицы (1.6) вычисляется так. На первом шаге из элементов первой строки вычитаются элементы третьей, а из элементов второй строки – элементы четвертой строки.

$$detA_X = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_4 & x_3 - x_1 & x_4 - x_2 \\ -x_2 + x_4 & x_1 - x_3 & -x_4 + x_2 & x_3 - x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$$

Теперь в полученном справа определителе, к элементам третьего столбца прибавляются элементы первого столбца, а к элементам четвертого – элементы второго столбца. Тогда определитель приведется к следующему виду:

$$detA_X = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_4 & 0 & 0 \\ -x_2 + x_4 & x_1 - x_3 & 0 & 0 \\ x_3 & x_4 & x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 - x_4 & x_1 + x_3 \end{vmatrix}$$

Теперь очевидно, что величина последнего определителя, как простого определителя блочного вида, выражается формулой (1.7).

Далее, если дан другой элемент $M(4, R)$:

$$A_Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ -y_2 & y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & y_1 & y_2 \\ -y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 \end{pmatrix} \; y_k \in R, k = \overline{1, 4},$$

то легко проверить коммутативность умножения матриц в $M(4, R)$:

$$A_X \times A_Y = A_Y \times A_X = A_Z,$$

причем:

$$z_1 = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4,$$
$$z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 + x_4y_3,$$
$$z_3 = x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2,$$
$$z_4 = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1. \tag{1.8}$$

И наконец, определим вид обратной матрицы. Пусть A_X – невырожденная матрица, то есть, ее определитель (1.7) не равен нулю. Тогда, используя известные методы, легко получим:

$$A_X^{-1} = A_W,$$

где:

$$w_1 = \frac{1}{2}[\frac{x_1 + x_3}{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2} + \frac{x_1 - x_3}{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}]$$

$$w_2 = -\frac{1}{2}[\frac{x_2 + x_4}{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2} + \frac{x_2 - x_4}{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}]$$

$$w_3 = \frac{1}{2}[\frac{x_1 + x_3}{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2} - \frac{x_1 - x_3}{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}]$$

$$w_4 = -\frac{1}{2}[\frac{x_2 + x_4}{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2} - \frac{x_2 - x_4}{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}]. \tag{1.9}$$

Последняя означает, что матрица, обратная к невырожденной матрице, сохраняет форму (1.6), то есть, операция нахождения обратной матрицы форминвариантна, как и операции сложения и умножения матриц. Вид транспонированной матрицы покажет, что такое утверждение верно и относительно нее. **Теорема доказана.**

Далее, выявим существующие связи между элементами линейных пространств R^4 и $M(4,R)$.

Теорема 1.2.3. Линейные пространства R^4 и $M(4,R)$ изоморфны между собой.

Доказательство: Во – первых, биекция между этими множествами легко задается правилом:

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4 \Leftrightarrow A_X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Отсюда, наличие изоморфизма между этими множествами, как линейными пространствами над полем действительных чисел, автоматически следует из соответствия вида:

$$\lambda X+\mu Y\in R^4 \Leftrightarrow A_{\lambda X+\mu Y}=\lambda A_X+\mu A_Y\in M(4,R).$$

Теорема доказана.

Наличие изоморфизма показывает, что алгебра пространства четырехмерных чисел должна полностью соответствовать алгебре множества $M(4,R)$, ибо именно такая структура будет отвечать обозначенным выше принципам.

Учитывая это, абстрактную операцию умножения $(*)$ четырехмерных чисел мы обязаны задать следующим путем:

$$X*Y=Z\Leftrightarrow A_Z=A_{X*Y}=A_X\times A_Y.$$

Отсюда мы получим искомую формулу умножения, вида:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)*(y_1,y_2,y_3,y_4)=(z_1,z_2,z_3,z_4),$$

где компоненты произведения справа даются формулами (1.8).

Легко проверить, что введенная операция умножения является коммутативной и, служит прямым четырехмерным обобщением аналогичных операций, принятых в действительном и комплексном анализе. К примеру, применяя формулы умножения (1.8) к комплексным числам $X = (x_1, x_2, 0, 0)$ и $Y = (y_1, y_2, 0, 0)$, мы получим:

$$(x_1, x_2, 0, 0) * (y_1, y_2, 0, 0) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1, 0, 0).$$

Последнее – суть умножение, принятое в комплексном анализе.

Таким образом, мы определили требуемую, коммутативную операцию векторного умножения элементов R^4, полностью следуя принципам общности. Естественно, тут неизбежно появляются, так называемые делители нуля (относительно операции умножения), о которых речь пойдет ниже.

Попутно, получим правила умножения базисных элементов пространства четырехмерных чисел:

$$J_1 = (1, 0, 0, 0); J_2 = (0, 1, 0, 0); J_3 = (0, 0, 1, 0); J_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Так, используя формулы умножения (1.8), мы легко получим:

$$J_1^2 = J_3^2 = J_1; J_2^2 = J_4^2 = -J_1; J_1 * J_k = J_k; k = \overline{1, 4},$$

$$J_2 * J_3 = J_4; J_2 * J_4 = -J_3; J_3 * J_4 = J_2. \qquad (1.11)$$

Далее, легко доказывается тот факт, что четырехмерное число $J_1 = (1, 0, 0, 0)$ является единственной единицей R^4, относительно введенной операции умножения, то есть:

$$J_1 * X = X * J_1 = X; \forall X \in R^4.$$

Итак, мы определили алгебру (кольцо элементов) $\{R^4; (+); (*)\}$ четырехмерных чисел с двумя коммутативными операциями. Третья операция (вычитание) задается тривиально.Как мы увидим позже, операция деления определяется только для невырожденных чисел. Теперь приступаем к более подробному изучению четырехмерных чисел.

1.3 Классификация чисел. Деление.

Из формулы (1.7) легко понять то, что множество матриц $M(4, R)$, а вместе ним и изоморфное ему множество R^4, разбивается на три основных класса.

Определение 1.3.1. Четырехмерное число $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ есть вырожденное число 1-го типа, если его компоненты удовлетворяют уравнению:

$$(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3; x_2 = x_4.$$

Очевидно, что такие числа соответствуют вырожденным матрицам 1-го типа из $M(4, R)$. У таких чисел первая компонента совпадает с третьей, а вторая – с четвертой.

Определение 1.3.2. Четырехмерное число $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ есть вырожденное число 2-го типа, если его компоненты удовлетворяют уравнению:

$$(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3; x_2 = -x_4.$$

Ясно, что такие числа соответствуют другому классу вырожденных матриц 2-го типа из $M(4, R)$. Легко понять, что у таких чисел первая компонента противоположна третьей, а вторая – четвертой.

Далее, как видно из (1.7), все остальные матрицы, кроме этих двух классов, имеют положительные определители и, согласно биекции (1.10), мы можем сопоставлять им, так называемые, невырожденные (нормальные) числа:

Определение 1.3.3. Четырехмерное число $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ назовем невырожденным (нормальным) числом, если :

$$[(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2][(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2] > 0.$$

Пример 1.3.4. Число $X = (1, -2, 1, -2)$ - есть вырожденное число 1-го типа, а число $Y = (10, 1, -10, -1)$ – 2-го типа. Ясно, что $Z = (3, 5, 3, 8)$ является невырожденным числом.

Если обозначить множество всех вырожденных чисел 1-го типа как R_1^4, множество вырожденных чисел 2-го типа – R_2^4, а множество всех остальных, нормальных чисел как NS (normal subset), то получится теоретико –множественная формула вида:

$$R^4 = R_1^4 \cup R_2^4 \cup NS$$

Нетрудно понять, что четырехмерный нуль $\theta = (0,0,0,0) \in R^4$ является единственным элементом, принадлежащим как R_1^4, так и подмножеству R_2^4.

Действительно, предположив существование некоторого другого числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, одновременно принадлежащего подмножествам вырожденных чисел, мы получим:

$$x_1 = \pm x_3; x_2 = \pm x_4 \Rightarrow x_k = 0, k = \overline{1,4}.$$

Лемма 1.3.5. Относительно элементов R^4 справедливы следующие утверждения:

1. Сумма (разность) и произведение вырожденных чисел 1-го типа есть вырожденное число того же типа;

2. Сумма (разность) и произведение вырожденных чисел 2-го типа есть вырожденное число того же типа;

3. Произведение вырожденного числа на невырожденное есть вырожденное число того же типа;

4. Произведение двух невырожденных чисел есть число невырожденное;

5. Произведение двух вырожденных чисел разного типа равно четырехмерному нулю $\theta = (0,0,0,0)$.

Лемма легко доказывается на основе данных выше определений. К примеру, покажем справедливость последнего утверждения данной леммы.

Пусть $X = (a,b,a,b) \in R_1^4$; $Y = (c,d,-c,-d) \in R_2^4$ – произвольные вырожденные числа разных типов. Тогда, используя формулы умножения (1.8) , мы легко получим:

$$(a,b,a,b) * (c,d,-c,-d) = \theta = (0,0,0,0). \tag{1.12}$$

Остальные утверждения леммы также доказываются простой (арифметической) проверкой.

Важность последней леммы заключается в том, что нами определены, так называемые, делители нуля. В одномерном или двумерном анализе их нет, ибо из уравнения вида $XY = 0$ всегда следует: либо $X = 0$, либо $Y = 0$, в крайнем случае, оба сомножителя нули.

В пространстве четырехмерных чисел дело обстоит иначе. Здесь мы выяснили следующий факт:

$$X * Y = \theta \Rightarrow X = (a, b, a, b); Y = (c, d, -c, -d); a, b, c, d \in R \quad (1.13)$$

или:

$$X * Y = \theta \Rightarrow X = (e, f, -e, -f); Y = (u, w, u, w); e, f, u, w \in R. \quad (1.14)$$

То есть, четырехмерное уравнение $X * Y = \theta$ имеет бесчисленное множество решений, состоящих из ненулевых делителей нуля.

Утверждения знаменитой теоремы Фробениуса [15] говорят именно об этом: любая попытка расширения поля комплексных чисел с заданием коммутативного умножения, неизбежно приводит к системам чисел с делителями нуля.

На первый взгляд кажется, что делители нуля будут непреодолимым препятствием на пути получения приемлемой теории функций на алгебре четырехмерных чисел. На деле оказалось, что это не так.

Так, в следующей главе будет показан метод идентификации делителей нуля через спектры четырехмерных чисел. Спектральный подход и поможет преодолеть трудности, связанные с определением основных понятий теории функций.

В частности, такой путь способствует элементарному изложению теории числовых последовательностей и числовых рядов. В заключение приводим дополнительные утверждения, уточняющие множественную структуру пространства четырехмерных чисел.

Лемма 1.3.6. Подмножества R^4_1, R^4_2 вырожденных чисел являются собственными линейными подпространствами R^4, имеющими только один общий элемент: $R^4_1 \cap R^4_2 = \theta$.

Доказательство леммы очевидно. Так, если $X, Y \in R_1^4$, то легко понять, что:

$$\forall \lambda, \mu \in R \Longrightarrow \lambda X + \mu Y \in R_1^4.$$

Аналогично, $R_2^4 \subset R^4$ также является собственным линейным подпространством. Более того выше (Лемма.1.3.4) мы выяснили, что оба эти подпространства замкнуты относительно трех арифметических операции: сложения, вычитания и умножения четырехмерных чисел.

По другому обстоит дело с подмножеством невырожденных (нормальных) чисел $-NS \subset R^4$.

Во –первых, NS не является линейным подпространством R^4, что показывает следующий пример:

$$X = (1, 2, 3, 4) \in NS; Y = (4, -2, 2, -4) \in NS; X + Y = (5, 0, 5, 0) \in R_1^4.$$

Лемма 1.3.7. Множество $NS \subset R^4$ является коммутативной, абелевой группой с единицей $J_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Доказательство: Если $X \in NS; Y \in NS$, то из формул умножения (1.8) легко следует, что: $Z = X * Y \in NS$. Такая операция умножения коммутативна и $J_1 = (1, 0, 0, 0) \in NS$.

Теперь покажем, что только на элементах NS можно определить еще одну арифметическую операцию в R^4 – операцию деления на невырожденное число.

Так, формулой (1.9) ранее мы определили вид матрицы $A_{X^{-1}}$, обратной невырожденной матрице A_X. Далее, изоморфизм (фактически, это изометрия) между множествами R^4 и $M(4, R)$ предопределяет, что имеет место соответствие:

$$X^{-1} \in NS \Leftrightarrow A_{X^{-1}} \in M(4, R).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.3.8. Пусть $X \in NS$–невырожденное число, тогда существует единственное число $X^{-1} \in NS$ такое, что $X * X^{-1} = X^{-1} * X = J_1 = (1, 0, 0, 0)$, при этом:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow X^{-1} = (w_1, w_2, w_3, w_4),$$

где компоненты обратного элемента справа даются формулами (1.9).

Лемма доказывается простой проверкой, на основе формулы умножения четырехмерных чисел.

1.4 Понятие спектра четырехмерного числа

Здесь мы дадим одно из ключевых понятий четырехмерного анализа – понятие о спектре четырехмерного числа.

Во – первых, это приводит к идентификации делителей нуля. Причем, для всех типов чисел станет возможным определение понятия спектральной нормы (спектральной длины). Таким образом, все числа, кроме четырехмерного нуля, приобретут положительную спектральную длину. В дальнейшем, это позволяет безболезненно вводить элементы теории функции на R^4.

Во – вторых, на основе спектрального анализа можно будет судить о контурах достаточно сложной, неевклидовой в целом, топологии и геометрии пространства четырехмерных чисел.

Пусть $X \in R^4$ – произвольное четырехмерное число. Тогда, ему можно сопоставить единственную матрицу с действительными элементами $A_X \in M(4, R)$, определяемую формулой (1.10).

Определение 1.4.1.

Спектром четырехмерного числа $X \in R^4$ называется совокупность собственных чисел соответствующей ему матрицы $A_X \in M(4, R)$.

Перейдем к определению собственных чисел матрицы A_X. Отметим, что класс $M(4, R)$ обладает удивительными свойствами. Так, собственные числа матриц этого множества определяются легко и, что примечательно, единообразной формулой.

Как это и принято в матричном анализе, рассмотрим уравнение $det(A_X - \lambda E) = 0$, где $E \in M(4, R)$ – единичная матрица.

Вычислив определитель способом,указанным в предыдущем разделе, мы легко получим характеристическое уравнение для определения собственных чисел:

$$[(\lambda - x_1 + x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2][(\lambda - x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2] = 0.$$

Последнее уравнение, в общем случае, имеет четыре, попарно – сопряженных, комплексных корня:

$$\lambda_1(X) = x_1 + x_3 + i(x_2 + x_4); \lambda_2(X) = x_1 + x_3 - i(x_2 + x_4);$$
$$\lambda_3(X) = x_1 - x_3 + i(x_2 - x_4); \lambda_4(X) = x_1 - x_3 - i(x_2 - x_4). \quad (1.15)$$

Таким образом, спектр четырехмерного числа есть объект, состоящий из четырех комплексных чисел. В дальнейшем мы будем использовать специфическую форму записи спектра, сохраняющую упорядоченный порядок следования его компонент :

$$\Lambda_X = [\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)] \equiv [\lambda_1^x, \lambda_2^x, \lambda_3^x, \lambda_4^x] .$$

При этом, компоненты спектра будем называть спектральными элементами четырехмерного числа. Мы видим, что каждому четырехмерному числу сопоставляется его (собственный) спектр, состоящий из четырех спектральных элементов – комплексных чисел.

Далее, множество спектров всех четырехмерных чисел обозначим как $\Lambda(R^4)$. Имеет место следующее, ключевое утверждение в спектральной теории.

Лемма 1.4.2. Между множествами R^4 и $\Lambda(R^4)$ существует биекция.

Доказательство: Легко понять, что схематически мы можем задать искомое соответствие так:

$$X \in R^4 \Leftrightarrow \Lambda_X = [\lambda_1(X), \lambda_2(X), \lambda_3(X), \lambda_4(X)] \in \Lambda(R^4).$$

Далее покажем, что из $X \neq Y \Rightarrow \Lambda_X \neq \Lambda_Y$. Действительно, допустив обратное: $\Lambda_X \equiv \Lambda_Y$, мы получим :

$$\lambda_k(X) = \lambda_k(Y) \Rightarrow x_k = y_k; k = \overline{1,4}.$$

Это противоречит исходному $X \neq Y$. Обратно, пусть имеется некоторый элемент: $\Lambda_X = (a+ib, a-ib, c+id, c-id) \in \Lambda(R^4)$. Очевидно, этому спектру может соответствовать единственное четырехмерное число, с компонентами вида:

$$x_1 = \frac{a+c}{2}; x_2 = \frac{b+d}{2}; x_3 = \frac{a-c}{2}; x_4 = \frac{b-d}{2}.$$

Лемма доказана. Ее важность заключается в том, что теперь мы можем идентифицировать четырехмерные числа по их спектрам. Так, по определению спектра, имеем следующие соответствия:

1. $\theta = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \Lambda_\theta = (0,0,0,0)$;

2. $X = (a,b,a,b) \Leftrightarrow \Lambda_X = (2a+2ib, 2a-2ib, 0, 0)$;

3.$X = (c,d,-c,-d) \Leftrightarrow \Lambda_X = (0,0,2c+2id, 2c-2id)$;

4.$X = (x_1,0,0,0) \Leftrightarrow \Lambda_X = (x_1,x_1,x_1,x_1)$;

5.$X = (x_1,x_2,0,0) \Leftrightarrow \Lambda_X = (x_1+ix_2, x_1-ix_2, x_1+ix_2, x_1-ix_2)$.

Отсюда ясно, что все вырожденные четырехмерные числа, отличные от четырехмерного нуля, имеют по два ненулевых спектральных элемента в составе своих спектров.

Очевидно и то, что все спектральные элементы невырожденного числа отличны от нуля. С этой точки зрения, все действительные и комплексные числа, отличные от нуля, являются невырожденными (нормальными) четырехмерными числами. В заключение этого раздела приведем теорему, выражающую ключевые свойства спектра.

Теорема 1.4.3.

$\forall X, Y \in R^4$ справедливы следующие, спектральные равенства:

$$\Lambda_{X\pm Y} = \Lambda_X \pm \Lambda_Y = \left[\lambda_1^x \pm \lambda_1^y; \lambda_2^x \pm \lambda_2^y; \lambda_3^x \pm \lambda_3^y; \lambda_4^x \pm \lambda_4^y\right],$$

$$\Lambda_{X*Y} = \left[\lambda_1^x\lambda_1^y; \lambda_2^x\lambda_2^y; \lambda_3^x\lambda_3^y; \lambda_4^x\lambda_4^y\right],$$

$$\Lambda_{X^{-1}} = \left[\frac{1}{\lambda_1^x}; \frac{1}{\lambda_2^x}; \frac{1}{\lambda_3^x}; \frac{1}{\lambda_4^x}\right], X \in NS.$$

Доказательство:

Первое утверждение очевидно, а другие доказываются простым вычислением их левых частей. Например, из (1.9) по определению имеем:

$$\lambda_1(X^{-1}) = \frac{x_1 + x_3}{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2} - i\frac{x_2 + x_4}{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2}.$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{\lambda_1^x} = \frac{1}{x_1 + x_3 + i(x_2 + x_4)} = \frac{x_1 + x_3 - i(x_2 + x_4)}{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2} = \lambda_1(X^{-1}).$$

Аналогично:

$$\lambda_2(X^{-1}) = \frac{x_1 + x_3}{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2} + i\frac{x_2 + x_4}{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2}.$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{\lambda_2^x} = \frac{1}{x_1 + x_3 - i(x_2 + x_4)} = \frac{x_1 + x_3 + i(x_2 + x_4)}{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2} = \lambda_2(X^{-1}).$$

Для всех остальных спектральных элементов получаем такие же результаты. Это и доказывает справедливость последнего соотношения .

Доказанная лемма позволяет однозначно восстанавливать число через его спектральные элементы и наоборот. Например, спектральные элементы спектра $\Lambda(X^n)$ легко определяются через элементы спектра $\Lambda(X)$. Отсюда легко вывести рекуррентные формулы, определяющие компоненты любой степени $u = X^n$. Более подробно о спектре изложено в работе [21].

Глава 2

Топология и геометрия четырехмерного пространства

2.1 Спектральная норма в R^4

С помощью спектра, естественным путем определяется норма элемента R^4. Вообще говоря, она будет неевклидовой, ее нельзя будеть определить посредством какого –либо скалярного произведения.

Так, из предыдущего раздела известна биекция вида:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow \Lambda_X = (\lambda_1^x, \lambda_2^x, \lambda_3^x, \lambda_4^x).$$

Это дает обоснованное понятие нормы четырехмерного числа.

Определение 2.1.1. Спектральной нормой элемента $X \in R^4$ называется неотрицательное число:

$$\|X\|_\Lambda = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} |\lambda_k^x|, \tag{2.1}$$

или в развернутой форме, на основе (1.15):

$$\|X\|_\Lambda = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2} + \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}\right). \tag{2.2}$$

В формуле (2.2), справа рассматриваются только арифметические значения квадратных корней. Покажем, что такое определение соответствует всем свойствам нормы. Используем вид нормы (2.1).

1. Пусть $\|X\|_\Lambda = 0$, тогда: $\lambda_k^x = 0; k = \overline{1,4}$. Теперь из (1.15) следует, что:$x_k = 0; k = \overline{1,4} \Rightarrow X = (0,0,0,0)$.

2.$\forall \mu \in R \Rightarrow \|\mu X\|_\Lambda = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}|\mu\lambda_k^x| = |\mu|\|X\|_\Lambda$.

3.$\|X+Y\|_\Lambda = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}|\lambda_k^x + \lambda_k^y|$; отсюда легко получим: $\|X+Y\|_\Lambda \leq \|X\|_\Lambda + \|Y\|_\Lambda$.

Мы доказали, что (2.2) действительно соответствует общеизвестному понятию нормы. Тогда, между элементами R^4 автоматически определяется расстояние, равное:

$$\rho(X,Y) = \|X - Y\|_\Lambda. \tag{2.3}$$

То есть, множество четырехмерных чисел R^4 является не только нормированным, но и метрическим пространством, с метрикой (2.3).

Покажем, что введенная норма (2.2) является четырехмерным обобщением обычных евклидовых норм в R^1 и R^2.

Так, для действительного числа $X = (x_1, 0, 0, 0)$ формула (2.2) дает:

$$\|X\|_\Lambda = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_1^2}\right) = \sqrt{x_1^2} = |x_1|.$$

Для комплексного числа $X = (x_1, x_2, 0, 0)$ мы имеем:

$$\|X\|_\Lambda = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Таким образом, как спектральная норма $\|X\|_\Lambda$, так и соответствующая ей метрика (2.3), вполне согласуются со схожими понятиями одномерного и двумерного анализа.

Это обстоятельство позволяет нам излагать ключевые понятия (категории) четырехмерного анализа, на принципах общности (единообразия) с известными категориями одномерного и двумерного анализа (ТФДП и ТФКП). Элементы топологии нормированных (метрических) пространств, как известно, можно излагать по единому шаблону.

При этом мы понимаем, что в четырехмерном анализе будут свои, отличительные особенности. С одной из них мы уже столкнулись, это — наличие ненулевых делителей у четырехмерного нуля.

Пример 2.1.2. Найти нормы чисел: $X = (1, 2, 3, 4); Y = (1, 3, 1, 3)$.

$$\|X\|_\Lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{52} + \sqrt{8}) = \sqrt{13} + \sqrt{2}; \|Y\|_\Lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{40} + \sqrt{0}) = \sqrt{10}.$$

2.2 Симплектический модуль четырехмерного числа

Дополнительно к понятию спектральной нормы (длины), мы здесь даем понятие симплектического модуля четырехмерного числа, имеющего важное значение для определения ключевых понятий ТФЧП.

В дальнейшем, совместное рассмотрение этих двух величин приводит нас к пониманию смешанной, евклидово - симплектической структуры четырехмерного пространства.

Из теории матриц известно, что определитель матрицы A_X равен произведению ее собственных чисел:

$$detA_X = \prod_{k=1}^{4} \lambda_k. \tag{2.4}$$

Теперь, учитывая (1.3) и (1.5), мы приходим к следующему, вполне обоснованному с точки зрения принципов общности, понятию симплектического модуля четырехмерного числа.

Определение 2.2.1. Симплектическим модулем $X \in R^4$ называется неотрицательное число вида:

$$S(X) = \sqrt[4]{detA_X} = \sqrt[4]{\prod_{k=1}^{4} \lambda_k^x},$$

или с учетом формул (1.15):

$$S(X) = \sqrt[4]{[(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2][(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2]}. \qquad (2.5)$$

Из последней формулы, для действительного $X = (x_1, 0, 0, 0)$ имеем:

$$S(X) = \sqrt[4]{x_1^4} = |x_1|.$$

Это – общеизвестное определение модуля действительного числа, принятого в одномерном анализе.

Для комплексного (двумерного) числа $X = (x_1, x_2, 0, 0)$, симплектический модуль также будет соответствовать обычному (евклидовому) модулю этого числа:

$$S(X) = \sqrt[4]{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Легко понять, что симплектический модуль невырожденного числа всегда будет положительным числом, а все вырожденные числа имеют нулевые симплектические модули.

Таким образом, каждому элементу $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ приписываются две характеристики: спектральная норма элемента $-\|X\|_\Lambda$ и симплектический модуль элемента $-S(X)$. Для действительных или комплексных чисел эти понятия совпадают.

Как следствие, мы можем указать следующие признаки определения типа четырехмерного числа:

$$S(X) = 0; \|X\|_\Lambda = 0 \Leftrightarrow X = (0, 0, 0, 0),$$

$$S(X) > 0; \|X\|_\Lambda > 0 \Leftrightarrow X \in NS,$$

$$S(X) = 0; \|X\|_\Lambda > 0 \Leftrightarrow X \in R_k^4; k = 1, 2; X \neq (0, 0, 0, 0).$$

Далее, справедливо следующее важное утверждение.

Теорема 2.2.2. Гиперповерхность $H_0 : x_1x_3 + x_2x_4 = 0$ четырехмерного пространства состоит, кроме четырехмерного нуля, только из невырожденных точек и на ней имеет место: $S(X) = \|X\|_\Lambda$.

Доказательство: То что точка $\theta = (0,0,0,0) \in H_0$ очевидно, ибо ее координаты удовлетворяют уравнению гиперповерхности. Далее, если: $X = (a,b,a,b) \in H_0$, то: $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0; b = 0$. Аналогичное утверждение верно и для вырожденных чисел 2-го типа.

Поэтому, гиперповерхность состоит только из невырожденных точек (чисел) и четырехмерного нуля. Теперь вычислим симплектический модуль произвольного элемента $X \in H_0$. Для этого перепишем формулу (2.5) в следующей форме:

$$S(X) = \sqrt[4]{\left(\sum x_k^2\right)^2 - 4(x_1x_3 + x_2x_4)^2}.$$

Отсюда легко понять, что для произвольной точки гиперповерхности $H_0 : x_1x_3 + x_2x_4 = 0$ имеем:

$$S(X) = \sqrt[4]{\left(\sum x_k^2\right)^2} = \sqrt{\sum x_k^2}.$$

Далее, перепишем формулу спектральной нормы (2.2) так:

$$\|X\|_\Lambda = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sum x_k^2 + 2(x_1x_3 + x_2x_4)} + \sqrt{\sum x_k^2 - 2(x_1x_3 + x_2x_4)}\right).$$

Отсюда ясно, что в точках гиперповерхности $H_0 : x_1x_3 + x_2x_4 = 0$ мы получим:

$$\|X\|_\Lambda = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sum x_k^2} + \sqrt{\sum x_k^2}\right) = \sqrt{\sum x_k^2}.$$

Последняя формула показывает, что для каждого элемента гиперповерхности $X \in H_0$, его симплектический модуль совпадает со спектральной нормой. Они представляют собой обычную Евклидову длину.Таким образом, полноценная евклидова структура вводится только на $H_0 \in R^4$, а целиком в пространстве этого нет.

Теорема доказана.

2.3 Открытые и замкнутые множества

Топология (структура открытых и замкнутых множеств) R^4 может быть весьма сложной. Ведь известно, что даже для двумерной плоскости, исчерпывающее описание всех ее открытых множеств (а следовательно, и всех замкнутых) является трудной задачей.[16]

Далее, любая норма в конечномерном пространстве эквивалентна евклидовой норме. Поэтому, пространство R^4 является полным метрическим пространством, с метрикой:

$$\rho(X,Y) = \|X - Y\|_\Lambda.$$

Тогда, стандартным путем определяются открытые и замкнутые шары пространства R^4.

Определение 2.3.1.

Открытым шаром, с центром в точке $X_0 \in R^4$ и радиуса r, называется множество $B(X_0, r) \subset R^4$ следующего вида :

$$B(X_0, r) = \{X \in R^4 \mid \rho(X, X_0) < r\}.$$

Определение 2.3.2.

Замкнутым шаром, с центром в точке $X_0 \in R^4$ и радиуса r, называется множество $B[X_0, r] \subset R^4$ следующего вида:

$$B[X_0, r] = \{X \in R^4 \mid \rho(X, X_0) \leq r\}.$$

Определение 2.3.3.

Открытый шар с центром в точке $X_0 \in R^4$ и радиуса ε обозначается как $O_\varepsilon(X_0)$ и, называется ε – окрестностью точки X_0.

$$O_\varepsilon(X_0) = \{X \in R^4 \mid \rho(X, X_0) < \varepsilon\}.$$

Общеизвестно, что любой открытый шар метрического пространства является открытым связным множеством, то есть, областью.

При этом, сумма любого (конечного или бесконечного) числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств суть открытые множества. Если $M \subset R^4$ – открытое множество, то его дополнение до всего пространства будет замкнутым множеством.

Конечно, все это известные факты из общей теории метрических пространств [16]. Но они не дают нам методов исчерпывающего описания всех открытых (замкнутых) множеств. Не говоря о том, что мы не имеем явных геометрических представлений (образов) о каких – либо объектах четырехмерного пространства.

Тем не менее, метрическое пространство R^4 имеет специфические особенности. И это позволяет описать некоторые замкнутые и открытые подмножества. Так мы знаем, что оно является объединением трех ключевых подмножеств:

$$R^4 = R_1^4 \cup R_2^4 \cup NS.$$

Здесь : R_1^4 – подмножество всех вырожденных чисел 1-го типа, R_2^4 – подмножество всех вырожденных чисел 2-го типа, а NS – подмножество всех невырожденных чисел.

Теорема 2.3.4.

R_1^4 и R_2^4 являются замкнутыми подмножествами, а NS открытым подмножеством R^4.

Доказательство:

Действительно, пусть $X^n = (x_1^n, x_2^n, x_1^n, x_2^n) \in R_1^4; n = \overline{1, \infty}$ – последовательность точек R_1^4, которая сходится в смысле покомпонентной сходимости. Тогда, очевидно, предел этой последовательности может иметь только такой вид:

$$lim_{n \to \infty} X^n = A = (a_1, a_2, a_1, a_2) \in R_1^4.$$

Таким образом, множество R_1^4 содержит все свои предельные точки. По определению, оно является замкнутым множеством. Аналогично обстоит дело и с R_2^4 – оно замкнутое множество.Тогда, из (2.3) следует, что множество NS открытое, ибо оно является дополнением замкнутого множества до всего пространства.

Теорема доказана.

Далее, введенная нами норма (2.2) не является евклидовой. Это дает основание утверждать, что и геометрия четырехмерного пространства неевклидова в целом.

С другой стороны, всякая норма в конечномерном пространстве эквивалентна евклидовой норме. Это указывает на существование частей R^4, с чисто евклидовой структурой. Справедливость такого предположения подтверждается следующими утверждениями.

Теорема 2.3.5. Подпространства $R_1^4; R_2^4$ четырехмерного пространства, относительно спектральной нормы (2.2), превращаются в (самостоятельные) Евклидовы пространства.

Доказательство: Каждое из этих подмножеств является замкнутым линейным подпространством R^4. Поэтому, относительно любой нормы, они также являются нормированными пространствами.

Далее, произвольный элемент R_1^4 имеет вид: $X = (x_1, x_2, x_1, x_2)$. Вычисляя норму этого элемента, на основе формулы (2.2), получим:

$$\|X\|_\Lambda = \frac{1}{2}(2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Ясно, что последняя формула описывает Евклидову норму. Аналогичное утверждение верно и для R_2^4.

Теорема доказана.

Теперь покажем, что существуют и части R^4, имеющие неевклидову структуру. Так, на элементах подмножества невырожденных чисел $NS \subset R^4$, спектральная норма не превращается в евклидову. Не говоря о том, что это подмножество не является подпространством R^4.

Вышеизложенное означает следующее. Нормированное (метрическое) пространство R^4 в целом имеет смешанную, евклидово – симплектическую структуру. Соответственно, геометрия этого пространства не может быть евклидовой в целом. Единственный объект R^4, где возможна евклидовая структура – это гиперповерхность $H_0 \in R^4$.

2.4 О движениях пространства R^4

Особенности топологии и соответствующей ей геометрии пространства, можно уточнить на основе изучения группы движений четырехмерного пространства R^4.

Мы рассмотрим движения, соответствующие линейным, ортогональным преобразованиям $R^4 \to R^4$, однозначно допускающим обратные преобразования.

Ясно, что матрицей такого линейного преобразования может быть только невырожденная, ортогональная матрица $A \in M(4, R)$. Действительно, это диктуется изометрией между R^4 и $M(4, R)$.

Таким образом, матрица линейного преобразования имеет следующий вид:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & -\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_4 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \varepsilon_k \in R, k = \overline{1, 4}. \tag{2.6}$$

Невырожденность и ортогональность матрицы преобразования означает следующее:

$$detA_\varepsilon = [(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)^2][(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)^2] = 1,$$

$$A_\varepsilon^{-1} = A_\varepsilon^T.$$

Легко проверить, что последнее возможно только при:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{4} \varepsilon_k^2 = 1 \\ \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечно много решений. Одно из частных решений:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{2}; \varepsilon_4 = -\frac{1}{2}.$$

.

Пусть: $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in R^4$, $X' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)^T \in R^4$ – четырехмерные числа, переходящие друг в друга, при ортогональном преобразовании R^4 в себя. Тогда, формулы прямого и обратного преобразований запишутся в матричном виде так :

$$X' = A_\varepsilon X \Leftrightarrow X = A_\varepsilon^T X'.$$

Запишем формулу прямого преобразования в развернутой форме:

$$x'_1 = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 + \varepsilon_4 x_4,$$

$$x'_2 = -\varepsilon_2 x_1 + \varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_4 x_3 + \varepsilon_3 x_4,$$

$$x'_3 = \varepsilon_3 x_1 + \varepsilon_4 x_2 + \varepsilon_1 x_3 + \varepsilon_2 x_4,$$

$$x'_4 = -\varepsilon_4 x_1 + \varepsilon_3 x_2 - \varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_1 x_4. \tag{2.7}$$

Соответствующие формулы обратного преобразования запишутся с помощью транспонированной матрицы A_ε^T:

$$x_1 = \varepsilon_1 x'_1 - \varepsilon_2 x'_2 + \varepsilon_3 x'_3 - \varepsilon_4 x'_4,$$

$$x_2 = \varepsilon_2 x'_1 + \varepsilon_1 x'_2 + \varepsilon_4 x'_3 + \varepsilon_3 x'_4,$$

$$x_3 = \varepsilon_3 x'_1 - \varepsilon_4 x'_2 + \varepsilon_1 x'_3 - \varepsilon_2 x'_4,$$

$$x_4 = \varepsilon_4 x'_1 + \varepsilon_3 x'_2 + \varepsilon_2 x'_3 + \varepsilon_1 x'_4. \tag{2.8}$$

Последние формулы показывают, что в пространстве четырехмерных чисел определена группа движений. То есть, два последовательных прямых преобразования пространства, заданные с помощью двух различных невырожденных матриц, эквивалентно одному прямому преобразованию:

$$X' = A_\varepsilon X; X'' = A_\eta X' \Rightarrow X'' = A_\eta A_\varepsilon X.$$

Ясно, что группа движений пространства R^4 определена множеством ортогональных матриц вида (2.6), которые образуют коммутативную (абелеву) группу элементов из $M(4,R)$. Очевидно и то, что группа имеет единицу вида:

$$A_{J_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь, определим некоторые закономерности, свойственные движениям R^4 (при ортогональных, линейных преобразованиях пространства в самого себя). Так, из формул (2.7) мы легко получим:

$$(x_1' - x_3')^2 + (x_2' - x_4')^2 = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2. \tag{2.9}$$

Полученная формула доказывает, что при любых движениях R^4, вырожденные числа 1-го типа переходят в вырожденные числа такого же типа, то есть, R_1^4 переходит в R_1^4.

Аналогично:

$$(x_1' + x_3')^2 + (x_2' + x_4')^2 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2. \tag{2.10}$$

Это означает, что при всех движениях, R_2^4 переходит в R_2^4.

Отсюда:

$$\begin{multline} [(x_1' + x_3')^2 + (x_2' + x_4')^2][(x_1' - x_3')^2 + (x_2' - x_4')^2] = \\ [(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2][(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2]. \end{multline} \tag{2.11}$$

Из последней формулы следует, что невырожденные (нормальные) числа переходят в такие же невырожденные числа. То есть, при любых движениях пространства, NS переходит в NS.

Итак, определив свойства движения пространства, мы приходим к такому ключевому выводу.

Теорема 2.4.1. Любые ортогональные движения R^4 происходят с сохранением двух величин – инвариантов движения:

1. Спектральной нормы элемента $-\|X\|_\Lambda$;

2. Симплектического модуля элемента – $S(X)$.

Доказательство:

Из формул (2.9) и (2.10) следует:$\|X'\|_\Lambda = \|X\|_\Lambda$, второе утверждение следует из (2.11) $\Rightarrow S(X') = S(X)$.

Замечание 2.4.2. Из теоремы не следует напрашивающийся вывод о сохранении четырехмерной евклидовой длины числа, оно имеет место только на гиперповерхности $H_0 \in R^4$.

Теорема доказана.

2.5 О геометрии пространства R^4

Результаты предыдущих разделов, где были определены особенности топологии и ортогональных движений в R^4, позволяют изложить некоторые суждения о геометрии этого пространства.

Так было выявлено, что в целом его геометрия не является Евклидовой. Ясно, что она весьма сложна для прямого обозрения. Здесь мы имеем ввиду то, что геометрические объекты, рассматриваемые в Евклидовых пространствах R^1,R^2,R^3, можно было лицезреть воочию. Здесь такой возможности нет.

В итоге, выявленные факты приводят нас к пониманию того, что геометрия R^4 имеет смешанную, евклидово – симплектическую структуру. То есть, наряду со скалярным произведением (X, Y), которое определено только на элементах некоторых подмножеств, таких как: R_1^4 и R_2^4, мы должны рассматривать и кососкалярное произведение $\langle X, Y\rangle$, уже определяемое для всех элементов R^4.

Далее, из симплектической геометрии известно [13], что кососкалярное произведение в R^4 можно задать так:

$$\langle X, Y\rangle = XAY^T,$$

где:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда, для двух произвольных элементов $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ и $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in R^4$, кососкалярное произведение запишется как:

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3. \tag{2.12}$$

Последнее соотношение действительно определяет кососкалярное произведение элементов R^4, с известным свойством:

$$\langle X, Y \rangle = -\langle Y, X \rangle \Rightarrow \langle X, X \rangle = 0.$$

Известно [13], что такая специфическая операция привносит в R^4, полноценную структуру алгебры Ли.

Далее, для уточнения геометрической структуры R^4, важно знать следующую особенность строения этого пространства.

Теорема 2.5.1.Собственные подпространства $R^4_1 \subset R^4$ и $R^4_2 \subset R^4$ взаимно –ортогональны, как в смысле Евклидовой, так и в смысле симплектической геометрии.

Доказательство:

Пусть $X = (x_1, x_2, x_1, x_2) \in R^4_1$ и $Y = (y_1, y_2, -y_1, -y_2) \in R^4_2$ – произвольные элементы этих подпространств. Тогда:

$$\begin{cases} (X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0, \\ \langle X, Y \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0. \end{cases}$$

Теорема доказана.

И наконец, ключевое значение для понимания геометрического строения R^4 имеет следующее утверждение.

Теорема 2.5.2. Пространство R^4 представимо в виде прямой суммы взаимно–ортогональных, двумерных лагранжевых многообразий R^4_1 и R^4_2, то есть:

$$R^4 = R^4_1 \oplus R^4_2.$$

Доказательство: Как видно из нижеследующего представления, произвольное $X \in R^4$ всегда можно записать в виде суммы двух вырожденных чисел разных типов:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}; \frac{x_2 + x_4}{2}; \frac{x_1 + x_3}{2}; \frac{x_2 + x_4}{2}\right) + \\ + \left(\frac{x_1 - x_3}{2}; \frac{x_2 - x_4}{2}; -\frac{x_1 - x_3}{2}; -\frac{x_2 - x_4}{2}\right).$$

Покажем, что такое представление единственно. Допустим, что существуют и другие варианты, то есть:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, b, a, b) + (c, d, -c, -d)$$

Тогда, мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a + c = x_1, \\ a - c = x_3, \\ b + d = x_2, \\ b - d = x_4. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение вида:

$$a = \frac{x_1 + x_3}{2}; b = \frac{x_2 + x_4}{2}; c = \frac{x_1 - x_3}{2}; d = \frac{x_2 - x_4}{2}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, первые очертания геометрического образа R^4 предстают перед нами в виде взаимно – ортогональных гиперповерхностей, имеющих следующие уравнения :

$$\begin{cases} R_1^4 : (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 = 0 \\ R_2^4 : (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 = 0 \end{cases}$$

Известно, что эти гиперповерхности имеют единственную общую точку $\theta = (0, 0, 0, 0)$.

Далее, вторая часть геометрического образа R^4 связана, с ранее рассмотренной гиперповерхностью

$$H_0 : x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0.$$

Мы знаем, что она содержит только одну невырожденную точку $\theta = (0, 0, 0, 0)$. Остальные ее элементы – невырожденные числа. Но ей принадлежат не всякие невырожденные числа. К примеру, невырожденное число $X = (1, 2, 3, 4)$ ей не принадлежит, ибо его компоненты не удовлетворяют уравнению гиперповерхности.

Для описания других гиперповерхностей, мы рассмотрим разбиение множества всех невырожденных чисел на непересекающиеся между собой классы. Такое разбиение можно осуществить на основе понятия симплектического модуля. Итак, в один класс мы будем отводить невырожденные числа, имеющие одинаковый симплектический модуль, равный некоторому числу $q \in (0, +\infty)$. Таким путем мы задаем континуальное множество гиперповерхностей вида:

$$H_q : \sqrt[4]{[(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2][(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2]} = q. \qquad (2.13)$$

Очевидно, что эти гиперповерхности попарно не пересекаются между собой. При этом, каждая гиперповерхность состоит только из невырожденных чисел одного спектрального модуля.

Подводя итоги, мы можем констатировать следующее.

Геометрия пространства R^4 очень сложна и в корне отличается от наших представлений, связанных с R^1, R^2 и R^3, где имеются явные геометрические образы.

Мы выявили, что R^4 представляется как объединение следующих гиперповерхностей:

1. Континуума гиперповерхностей H_q, состоящих из невырожденных точек одинакового спектрального модуля: $q \in (0, +\infty)$;

2. Двумерной гиперповерхности R^4_1, состоящей из вырожденных точек 1-го типа;

3. Двумерной гиперповерхности R^4_2, состоящей из вырожденных точек 2-го типа.

При этом, выявлена одна, особая гиперповерхность H_0, состоящая из четырехмерного нуля и различных точек гиперповерхностей H_q, то есть, она пересекает всю серию этих гиперповерхностей.

Важнейшими являются выводы, связанные с изучением группы ортогональных движений R^4. Так, материалы раздела 2.4 дают следующие умозаключения:

4. Каждая из ключевых гиперповерхностей : H_q, R_1^4, R_2^4 ведет себя автономно, при любых движениях пространства R^4 в целом. А это означает, что геометрически они предстают в виде различных и неизменных частей одного (твердого) четырехмерного континуума.

Мы можем представить себе следующую абстрактную картину геометрии пространства R^4. Три гиперповерхности H_0, R_1^4, R_2^4 как –бы соприкасаются между собой, в одной точке $\theta = (0, 0, 0, 0)$.

Между ними располагается целый клубок гиперповерхностей H_q, состоящих только из невырожденных точек. Как множества точек, их объединение является открытым множеством R^4.

Но тогда, из теории метрических пространств следует, что для любой точки $X \in H_q$ найдется ее ε окрестность $O_\varepsilon(X) \subset NS$.

То есть, ε окрестность точки может состоять, сплошь из невырожденных точек. Это – одна из ключевых особенностей геометрии пространства R^4.

Этот факт будет иметь существенное значение для определения производной четырехмерной функции четырехмерного переменного числа. Для определения производной, в дальнейшем нам придется использовать понятие четырехмерного пути, состоящего только из невырожденных точек.

Глава 3

Четырехмерные функции

В качестве введения, мы вкратце изложим теорию числовых последовательностей (функции натурального аргумента) и родственную ей теорию числовых рядов. Здесь мы увидим полную аналогию с соответствующими понятиями действительного анализа.

Определение 3.0.1.

Если каждому натуральному $n \in N$ ставится в соответствие некоторое четырехмерное число $A^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, a_4^{(n)})$, то говорят, что задана последовательность четырехмерных чисел $A^{(n)}$.

Очевидно, что задание бесконечной последовательности четырехмерных чисел $A^{(n)}$ эквивалентно определению четырех, составляющих последовательностей действительных чисел $a_k^{(n)}; k = \overline{1,4}$.

Определение 3.0.2. Если $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ такой номер, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется $\rho(A^{(n)}, A) < \varepsilon$, то говорят, что числовая последовательность сходится к четырехмерному числу A. Этот факт записывается в виде: $\lim_{n\to\infty} A^{(n)} = A$.

Легко понять, что сходимость $A^{(n)}$ эквивалентна сходимости четырех, обычных числовых последовательностей $a_k^{(n)}; k = \overline{1,4}$.

Если расходится хотя бы одна из этих, составляющих последовательностей, то расходится и исходная последовательность.

То есть, почти все положения теории числовых последовательностей автоматически переносятся на четырехмерный случай. Ввиду отсутствия новых моментов, на этом завершаем изложение.

Пример 3.0.3. Пусть $A^{(n)} = \left(\frac{1}{n}; \frac{2}{n+2}; \frac{3n-1}{n+5}; \frac{n^2}{5^n}\right)$, эта последовательность сходится: $\lim_{n\to\infty} A^{(n)} = A = (0, 0, 3, 0)$.

Пример 3.0.4. Пусть $A^{(n)} = \left((-1)^n; \frac{1}{3n+2}; \frac{1}{n^2+5}; \frac{4}{n^3}\right)$. Эта последовательность расходится, ибо расходится первая составляющая последовательность: $a_1^{(n)} = (-1)^n$.

Далее, теория четырехмерных числовых рядов излагается аналогично теории обычных числовых рядов.

Пусть: $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}...A^{(n)}...$ –некоторая последовательность четырехмерных чисел.

Определение 3.0.5. Бесконечная сумма четырехмерных чисел называется четырехмерным рядом и обозначается как:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(n)}.$$

Это определение эквивалентно заданию четырех рядов из действительных чисел. Так, если: $A^{(n)} = [a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, a_4^{(n)}]$, то ряд перепишется так:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(n)} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_1^{(n)}, \sum_{k=1}^{\infty} a_2^{(n)}, \sum_{k=1}^{\infty} a_3^{(n)}, \sum_{k=1}^{\infty} a_4^{(n)}\right].$$

Отсюда ясно, что вся теория действительных числовых рядов, без особых изменений переносится на четырехмерный случай.

Определение 3.0.6. Четырехмерный ряд назовем сходящимся, если сходятся все четыре составляющих ряда . Ряд расходится, если расходится хотя бы один из составляющих рядов.

Далее, легко понять, что необходимое условие сходимости ряда запишется так:

$$\lim_{n\to\infty} A^{(n)} = \theta = (0, 0, 0, 0).$$

Таким образом, исследование сходимости четырехмерного ряда сводится к исследованию сходимостей четырех обычных числовых рядов. При этом используются все методы, заложенные в одномерном анализе.

Пример 3.0.7. Исследовать на сходимость ряд следующего вида:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n+1}, \frac{n}{n^3+1}, 3^{-n}, \frac{\sin n}{n^2} \right).$$

Этот ряд расходится, ибо расходится первый составляющий ряд, подобный гармоническому ряду: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} = +\infty$.

3.1 Простейшие функции.Предел функции в точке и непрерывность.

Здесь излагается ключевое понятие о четырехмерной функции, зависящей от четырехмерного аргумента (составного числа X).

При этом, степенные функции определяются автоматически, на основе одного лишь правила умножения четырехмерных чисел.

Другие элементарные функции можно определить на основе метода замыкания на спектре, как и в теории функции от матриц [14].

Но, метод замыкания дает элементарные функции в виде бесконечных рядов, что не совсем удобно для использования.

Поэтому, удобный вид четырехмерной экспоненты будет получен на основе решения некоторой задачи Коши, после введения понятия дифференцируемости четырехмерных функций.

Это, в свою очередь, дает возможность определения более удобных формул для основных тригонометрических и ряда других элементарных функций.

Пусть: $M \in R^4$, $N \in R^4$ – некоторые области (открытые, связные множества). Дадим стандартное определение функции.

Определение 3.1.1. Если известно отображение вида:

$$U : \forall X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M \to \exists! U = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in N,$$

то будем говорить, что задана четырехмерная функция $U = U(X)$ от четырехмерного аргумента X. При этом M – область определения функции, а N – область значений функции.

Очевидно, что образ U состоит из четырех компонент, причем каждая из них является действительной функцией от четырех действительных переменных, заданной в области M, то есть:

$$u_k = u_k(x_1, x_2, x_3, x_4); k = \overline{1,4}.$$

Функция $U(X) = C = (c_1, c_2, c_3, c_4); c_k \in R$, равная четырехмерной константе, является простейшей из всех четырехмерных функций. Среди элементарных отметим также функцию $U(X) = X$, дающую тождественное отображение R^4 в себя.

Далее, на основе формулы умножения (1.8), нетрудно определить степенные функции. Сперва, последовательно определяются различные степени независимой переменной $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$X^0, X, X^2, X^3, ...X^n, ...$$

где: $X^0 = J_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Теперь, пусть: $A_0, A_1, A_2, ...A_n \in R^4; A_n \neq (0, 0, 0, 0)$ – произвольные четырехмерные числа.

Определение 3.1.2. Многочленом степени $n \in N$ назовем функцию вида:

$$P_n(X) = A_0 + A_1X + A_2X^2 + ... + A_nX^n.$$

Такие многочлены произвольной степени (степенные функции) легко определяются на основе одного лишь правила умножения (1.8). Каждая степенная функция дает отображение R^4 в себя. Кроме линейной функции, такое отображение не является биекцией, что будет ясно из дальнейшего изложения.

Найдем явную, аналитическую формулу для четырехмерной функции: $U(X) = X^2 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. На основе (1.8), компоненты этой функции определяются так:

$$u_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2,$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(x_1x_2 + x_3x_4),$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(x_1x_3 - x_2x_4),$$

$$u_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(x_1x_4 + x_2x_3). \qquad (3.1)$$

Нетрудно понять, что (3.1) дает четырехмерное обобщение типовой функции одномерного анализа: $U = x_1^2$ и, аналогичной функции из двумерного анализа: $U = (x_1 + ix_2)^2 = (x_1^2 - x_2^2; 2x_1x_2)$.

Действительно, для $X = (x_1, 0, 0, 0)$, формула (3.1) перепишется как: $X^2 = (x_1^2, 0, 0, 0)$. Аналогично, в точках $X = (x_1, x_2, 0, 0)$ имеем: $X^2 = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2, 0, 0)$.

Далее, для определения ряда элементарных функций, мы можем использовать метод замыкания на спектре, хорошо известный в теории функций от матриц [14]. Так, изометрия между R^4 и множеством матриц $M(4, R)$ означает, что аналитический вид любой функции от четырехмерного числа, один в один совпадет с видом такой же функции от матрицы.

Поэтому, метод замыкания применяется и в четырехмерном анализе. Суть метода заключается в следующем [14]. Рассмотрим некоторые формулы, тождества, соотношения и т.д., справедливые в комплексном анализе. Независимую переменную из комплексной плоскости обозначим как λ.

Определение 3.1.3. Будем говорить, что функциональные соотношения от комплексной переменной λ определены на спектре четырехмерного числа X, если область комплексной плоскости, где справедливы эти утверждения, содержит все спектральные элементы $\lambda_1^x, \lambda_2^x, \lambda_3^x, \lambda_4^x$, в качестве обычных точек комплексной плоскости.

К примеру, соотношение $\sin^2\lambda + \cos^2\lambda = 1$ справедливо для всей комплексной плоскости. Тогда, очевидно, это соотношение определено на спектре любого четырехмерного числа $X \in R^4$.

Далее, метод (замыкания на спектре) утверждает о следующем: Любое соотношение комплексного анализа, определенное на спектре четырехмерного числа, позволяет записать абсолютно идентичный аналог этого соотношения в четырехмерном анализе. Этот процесс называется замыканием на спектре.

Так, замыкая на спектре вышеприведенную формулу комплексного анализа, мы можем записать ее четырехмерный аналог в форме:

$$\sin^2 X + \cos^2 X = J_1.$$

Далее, рассмотрим известные разложения в виде рядов, справедливые для всей комплексной плоскости:

$$e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}; \cos\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{2n!}; \sin\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Все эти соотношения определены на спектре любого четырехмерного числа. Поэтому, замыкая на спектре, мы легко определяем соответствующие функции четырехмерного анализа, а именно:

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{1n}}{n!}; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{2n}}{n!}; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{3n}}{n!}; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{4n}}{n!} \right), \tag{3.2}$$

где: $(w_{1n}, w_{2n}, w_{3n}, w_{4n})$ – компоненты X^n.

Аналогичные формула верна и для четырехмерного косинуса:

$$\cos X = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q_{1n}}{2n!}; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q_{2n}}{2n!}; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q_{3n}}{2n!}; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q_{4n}}{2n!} \right),$$

где: $(q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}, q_{4n})$ – компоненты X^{2n}.

В принципе, с помощью формул типа (3.2), можно определить различные элементарные функции, такие как : $\ln X$, $\arccos X$ и т.д. Но их аналитические формы в виде бесконечных рядов, не всегда удобны для использования.

В дальнейшем, мы будем искать более оптимальные формы их записи. Об этом речь пойдет ниже.

Теперь приведем интересный пример замыкания на спектре. Рассмотрим известную формулу Эйлера из комплексного анализа:

$$e^{i\lambda} = \cos\lambda + i\sin\lambda.$$

Данная формула верна для всей комплексной плоскости.То есть, она определена на спектре любого четырехмерного числа. Это позволяет записать ее четырехмерный аналог в виде:

$$e^{J_2 X} = J_1 \cos X + J_2 \sin X.$$

Далее, кратко рассмотрим вопрос о пределе четырехмерной функции в точке и понятие о непрерывности четырехмерной функции.

Пусть четырехмерная функция $u(X) = [u_1(x_1, x_2, x_3, x_4), u_2, u_3, u_4]$ определена в некоторой окрестности $O_\varepsilon(X_0)$ за исключением, быть может, самой точки X_0.

Определение 3.1.4. Если для любой последовательности четырехмерных чисел $X^{(n)} \to X_0$, соответствующая последовательность значений $u[X^{(n)}] \to A$, то говорят, что функция имеет предел в точке X_0, равный числу А. Символически это записывают в виде:

$$\lim_{X \to X_0} u(X) = A.$$

Если $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, то последнее эквивалентно существованию предела действительной функции от четырех переменных в точке, то есть:

$$\lim_{X \to X_0} u_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_k; k = \overline{1,4}.$$

Пусть теперь функция $u(X)$ определена всюду в $O_\varepsilon(X_0)$, включая саму точку X_0.

Определение 3.1.5. Если $\lim_{X \to X_0} u(X) = u(X_0)$, то говорят что четырехмерная функция непрерывна в точке X_0.

Пример 3.1.6. Четырехмерная функция $u = X^2$ непрерывна во всем R^4. Используя явный вид (3.1) ее компонент, легко находим:

$$\lim_{X \to J_1} X^2 = (1, 0, 0, 0).$$

Очевидно, непрерывность четырехмерной функции в точке эквивалентна непрерывности всех четырех ее компонент – обычных действительных функции многих переменных, в той же точке.

3.2 Дифференцируемость. Понятие о регулярных функциях.

Здесь мы изложим ключевое понятие ТФЧП – понятие о дифференцируемости четырехмерной функции в точке.

Пусть четырехмерная функция $u(X) = [u_1(x_1, x_2, x_3, x_4), u_2, u_3, u_4]$ определена и непрерывна в некоторой окрестности $O_\varepsilon(X)$.

Дадим приращение ΔX аргументу так, чтобы $X + \Delta X \in O_\varepsilon(X)$.

Определение 3.2.1. Четырехмерная функция называется дифференцируемой в точке X, если существует предел вида:

$$u'(X) = \lim_{\Delta X \to \theta} \frac{u(X + \Delta X) - u(X)}{\Delta X} \tag{3.3}$$

и этот предел называется производной функции в точке X.

Естественно, в этом определении предполагается, что

$$\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4) \to \theta = (0, 0, 0, 0).$$

по любому пути, состоящему только из невырожденных чисел. Иначе определение дифференцируемости теряет смысл, так как обратная величина существует лишь для невырожденных чисел.

Это всегда достижимо. Например, имеется невырожденный путь устремления к нулю, следующего вида :

$$\Delta X^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right) \to (0, 0, 0, 0); n = \overline{1, \infty}$$

Далее, условия дифференцируемости четырехмерной функции даются следующей теоремой, обобщающей известную теорему из комплексного анализа.

Теорема 3.2.2. Пусть все компоненты четырехмерной функции $u(X) = [u_1(x_1, x_2, x_3, x_4), u_2, u_3, u_4]$ имеют непрерывные производные, в окрестности $O_\varepsilon(X)$, как обычные скалярные функции от четырех независимых переменных. Тогда, для дифференцируемости функции $u(X)$ в точке X, необходимо и достаточно, выполнение обобщенных условий Коши –Римана (Эйлера – Даламбера):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_4}{\partial x_4}, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_4} = -\dfrac{\partial u_4}{\partial x_3}, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_4} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_4}{\partial x_2}, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_4} = -\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial u_4}{\partial x_1}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Доказательство. Необходимость: Пусть предел (3.3) существует. Тогда он не должен зависеть от способа устремления $\Delta X \to \theta$, лишь бы путь состоял из невырожденных точек.

Мы рассмотрим следующие четыре, удобных для нас способа приближения $(X + \Delta X)$ к точке X.

1.$\Delta X = (\Delta x_1, 0, 0, 0) \to \theta$, то есть, $\Delta X = J_1 x_1 \to \theta \Leftrightarrow x_1 \to 0$.

В этом случае, используя разложение по базисным числам, получим эквивалентную (3.3) запись вида:

$$u'(X) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{4}[u(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, x_4) - u(x_1, x_2, x_3, x_4)]J_k}{J_1 \Delta x_1} = \\ = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} J_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} J_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} J_3 + \frac{\partial u_4}{\partial x_1} J_4.$$

2.$\Delta X = (0, \Delta x_2, 0, 0) \to \theta$, то есть, $\Delta X = J_2 x_2 \to \theta \Leftrightarrow x_2 \to 0$.

В этом случае, эквивалентная (3.3) запись будет такой:

$$u'(X) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{4}[u(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3, x_4) - u(x_1, x_2, x_3, x_4)]J_k}{J_2 \Delta x_2} =$$
$$= \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{4}[u(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3, x_4) - u(x_1, x_2, x_3, x_4)]J_k(-J_2)}{\Delta x_2} =$$
$$= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} J_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} J_2 + \frac{\partial u_4}{\partial x_2} J_3 - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} J_4.$$

Здесь использованы формулы (1.11) перемножения базисных чисел.

3. $\Delta X = (0, 0, \Delta x_3, 0) \to \theta$, то есть, $\Delta X = J_3 x_3 \to \theta \Leftrightarrow x_3 \to 0$.

$$u'(X) = \lim_{\Delta x_3 \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{4}[u(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, x_4) - u(x_1, x_2, x_3, x_4)]J_k}{J_3 \Delta x_3} =$$
$$= \lim_{\Delta x_3 \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{4}[u(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, x_4) - u(x_1, x_2, x_3, x_4)]J_k J_3}{\Delta x_3} =$$
$$= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} J_1 + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} J_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} J_3 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} J_4.$$

4. $\Delta X = (0, 0, 0, \Delta x_4) \to \theta$, то есть, $\Delta X = J_4 x_4 \to \theta \Leftrightarrow x_4 \to 0$.

$$u'(X) = \lim_{\Delta x_4 \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{4}[u(x_1, x_2, x_3, x_4 + \Delta x_4) - u(x_1, x_2, x_3, x_4)]J_k}{J_4 \Delta x_4} =$$
$$= \lim_{\Delta x_4 \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{4}[u(x_1, x_2, x_3, x_4 + \Delta x_4) - u(x_1, x_2, x_3, x_4)]J_k(-J_4)}{\Delta x_4} =$$
$$= \frac{\partial u_4}{\partial x_4} J_1 - \frac{\partial u_3}{\partial x_4} J_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_4} J_3 - \frac{\partial u_1}{\partial x_4} J_4.$$

Теперь, сравнивая попарно правые части последних формул, мы получим условия (3.4).

Достаточность. Пусть выполнены (3.4). По определению дифференциала действительной функции от четырех переменных, для каждой компоненты четырехмерной функции можем записать :

$$u_k(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3, x_4+\Delta x_4) - u_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ = \frac{\partial u_k}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u_k}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial u_k}{\partial x_3}\Delta x_3 + \frac{\partial u_k}{\partial x_4}\Delta x_4 + \alpha_k|h|; k = \overline{1,4}. \quad (3.5)$$

Здесь: α_k стремятся к нулю вместе с $|h| = \sqrt{\sum(\Delta x_k)^2}$.

Тогда из (3.5), попутно используя (3.4), легко получим:

$$u(X+\Delta X)-u(X) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}J_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}J_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}J_3 + \frac{\partial u_4}{\partial x_1}J_4\right)\Delta X + \eta(\Delta X). \quad (3.6)$$

где: $\eta(\Delta X) = o(\Delta X), \Delta X \to \theta$. Теперь из (3.6) следует существование предела (3.3). **Теорема доказана.**

Доказанная теорема является одной из основных и ключевых теорем четырехмерного анализа.

Определение 3.2.3. Четырехмерная функция $u(X)$, имеющая производную во всех точках некоторой области $G \subset R^4$, называется регулярной в этой области. Функция, регулярная во всем пространстве, называется целой функцией.

В дальнейшем, для обозначения производной регулярной функции, мы будем использовать одну из двух форм записи :

$$u'(X) \equiv \frac{du}{dX}.$$

Из основной теоремы следует, что можно использовать четыре, эквивалентные формулы определения производной:

$$\frac{du}{dX} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_4}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}, -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_4}{\partial x_2}, -\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = \\ = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \frac{\partial u_4}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = \left(\frac{\partial u_4}{\partial x_4}, -\frac{\partial u_3}{\partial x_4}, \frac{\partial u_2}{\partial x_4}, -\frac{\partial u_1}{\partial x_4}\right). \quad (3.7)$$

Пример 3.2.4. Найдем производную функции $u(X) = X^2$. Используя компоненты (3.1), по первой из формул (3.7) находим:

$$\frac{du}{dX} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_4}{\partial x_1}\right) = (2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4) = 2X.$$

То есть: $(X^2)' = 2X$ – получили полный аналог формулы табличного дифференцирования из одномерного анализа.

Такое положение дел справедливо для любой регулярной функции. В четырехмерном анализе, как и в одномерном, можно записать таблицу производных от элементарных функций. Это будет сделано после установления точных формул, определяющих эти функции.

3.3 Формулы элементарных функций

В этом разделе мы найдем явные формулы, дающие аналитическую форму записи ряда четырехмерных регулярных функций.

Так, одной из важнейших функций является четырехмерная экспонента. Ранее мы записывали ее в виде (3.2). Но бесконечный ряд неудобен для использования. Поэтому сейчас подойдем к вопросу определения экспоненты с другой точки зрения.

Теорема 3.3.1. Существует единственная регулярная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению:

$$\frac{du}{dX} = u \tag{3.8}$$

и начальному условию:

$$u(0,0,0,0) = (1,0,0,0). \tag{3.9}$$

Доказательство.

Пусть $u(X) = [u_1(x_1,x_2,x_3,x_4), u_2(...), u_3(...), u_4(...)]$ –решение задачи Коши. Тогда ее компоненты удовлетворяют обобщенным условиям Коши – Римана, вида:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = u_1,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_3} = -u_2,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_4} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = u_3,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_1} = -u_4.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_1} = u_k; k = \overline{1,4}.$$

Общие решения этих уравнений запишутся так:

$$u_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = w_k(x_2, x_3, x_4)e^{x_1}; k = \overline{1,4}.$$

Теперь, относительно новых неизвестных функции w_k, условия Коши –Римана перепишутся в виде:

$$w_1(x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \frac{\partial w_4}{\partial x_4},$$

$$w_2(x_2, x_3, x_4) = -\frac{\partial w_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial w_3}{\partial x_4} = \frac{\partial w_4}{\partial x_3},$$

$$w_3(x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial w_1}{\partial x_3} = \frac{\partial w_2}{\partial x_4} = \frac{\partial w_4}{\partial x_2},$$

$$w_4(x_2, x_3, x_4) = -\frac{\partial w_1}{\partial x_4} = \frac{\partial w_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial w_3}{\partial x_2}.$$

Эту систему будем называть основной системой.Из первого и третьего уравнений основной системы получим:

$$w_1(x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_3^2}.$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения, относительно неизвестной функции w_1, имеет вид:

$$w_1(x_2, x_3, x_4) = A(x_2, x_4)e^{x_3} + B(x_2, x_4)e^{-x_3}.$$

Тогда, из третьего уравнения основной системы легко находим:

$$w_3(x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial w_1}{\partial x_3} = A(x_2, x_4)e^{x_3} - B(x_2, x_4)e^{-x_3}.$$

Далее, из основной системы выберем условия вида:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_2} = \frac{\partial w_3}{\partial x_4}; \frac{\partial w_1}{\partial x_4} = \frac{\partial w_3}{\partial x_2}.$$

Эти условия означают следующее:

$$A(x_2, x_4) = H(x_2 + x_4) = H(\xi); B(x_2, x_4) = G(x_2 - x_4) = G(\eta).$$

Наконец, учтем следующую цепочку из основной системы:

$$w_1(x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2}.$$

Тогда:

$$H(\xi) = -\frac{d^2 H(\xi)}{d\xi^2}; G(\eta) = -\frac{d^2 G(\eta)}{d\eta^2}.$$

Отсюда:

$$H(\xi) = A\cos\xi + B\sin\xi; G(\eta) = C\cos\eta + D\sin\eta.$$

Здесь: A, B, C, D – неизвестные постоянные. Таким образом, окончательно имеем:

$$w_1(x_2, x_3, x_4) = [A\cos(x_2 + x_4) + B\sin(x_2 + x_4)]e^{x_3} + \\ + [C\cos(x_2 - x_4) + D\sin(x_2 - x_4)]e^{-x_3},$$

$$w_2(x_2, x_3, x_4) = [A\sin(x_2 + x_4) - B\cos(x_2 + x_4)]e^{x_3} +$$
$$+ [C\sin(x_2 - x_4) - D\cos(x_2 - x_4)]e^{-x_3},$$

$$w_3(x_2, x_3, x_4) = [A\cos(x_2 + x_4) + B\sin(x_2 + x_4)]e^{x_3} -$$
$$- [C\cos(x_2 - x_4) + D\sin(x_2 - x_4)]e^{-x_3},$$

$$w_4(x_2, x_3, x_4) = [A\sin(x_2 + x_4) - B\cos(x_2 + x_4)]e^{x_3} -$$
$$- [C\sin(x_2 - x_4) - D\cos(x_2 - x_4)]e^{-x_3}.$$

Отсюда, используя начальное условие (3.9), элементарно получим
:

$$A + C = 1; A - C = 0; B + D = 0; B - D = 0 \Rightarrow A = C = \frac{1}{2}; B = D = 0.$$

Окончательно, компоненты искомой функции $u(X) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ запишутся в следующей форме:

$$u_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left[e^{x_1+x_3}\cos(x_2 + x_4) + e^{x_1-x_3}\cos(x_2 - x_4)\right],$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left[e^{x_1+x_3}\sin(x_2 + x_4) + e^{x_1-x_3}\sin(x_2 - x_4)\right],$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left[e^{x_1+x_3}\cos(x_2 + x_4) - e^{x_1-x_3}\cos(x_2 - x_4)\right],$$

$$u_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left[e^{x_1+x_3}\sin(x_2 + x_4) - e^{x_1-x_3}\sin(x_2 - x_4)\right]. \quad (3.10)$$

Теорема доказана.

Найденную функцию, по аналогии с действительным и комплексным анализом, обозначим символом экспоненты:

$$u(X) = e^X = (u_1, u_2, u_3, u_4). \quad (3.11)$$

Теперь мы сможем найти явные формулы для четырехмерного косинуса и синуса. Для этого рассмотрим известные скалярные соотношения двумерного анализа:

$$\cos\lambda = \frac{e^{i\lambda} + e^{i\lambda}}{2}; \sin\lambda = \frac{e^{i\lambda} - e^{i\lambda}}{2}.$$

Эти соотношения справедливы всюду на комплексной плоскости. То есть, они определены на спектрах всех четырехмерных чисел. Поэтому, замыкая их на спектре, получаем следующие формулы четырехмерного анализа:

$$\cos X = \frac{e^{J_2 X} + e^{-J_2 X}}{2}; \sin X = \frac{e^{J_2 X} - e^{-J_2 X}}{2}.$$

Далее, запишем числа $J_2 X$ и $(-J_2 X)$ в развернутом виде:

$$J_2 X = (0, 1, 0, 0) * (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3),$$

$$-J_2 X = (0, -1, 0, 0) * (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3).$$

Теперь, легко найти компоненты четырехмерных функций: $e^{J_2 X}$, $e^{-J_2 X}$. Для этого в формулах (3.10) необходимо провести простую замену аргументов, например, для $e^{J_2 X}$ так:

$$x_1 \to (-x_2); x_2 \to x_1; x_3 \to (-x_4); x_4 \to x_3.$$

Затем, полученные компоненты подставляются в формулы косинуса и синуса. Окончательно, получим следующие формулы для четырехмерной, тригонометрической функции $u(X) = \sin X = (u_1, u_2, u_3, u_4)$:

$$u_1 = \frac{1}{2}\left[\sin(x_1 + x_3)\cosh(x_2 + x_4) + \sin(x_1 - x_3)\cosh(x_2 - x_4)\right],$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(x_1 + x_3)\sinh(x_2 + x_4) + \cos(x_1 - x_3)\sinh(x_2 - x_4)\right],$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left[\sin(x_1 + x_3)\cosh(x_2 + x_4) - \sin(x_1 - x_3)\cosh(x_2 - x_4)\right],$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\left[\cos(x_1+x_3)\sinh(x_2+x_4) - \cos(x_1-x_3)\sinh(x_2-x_4)\right]. \quad (3.12)$$

Аналогично, для $W(X) = \cos X = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ мы получим:

$$w_1 = \frac{1}{2}\left[\cos(x_1+x_3)\cosh(x_2+x_4) + \cos(x_1-x_3)\cosh(x_2-x_4)\right],$$

$$w_2 = -\frac{1}{2}\left[\sin(x_1+x_3)\sinh(x_2+x_4) + \sin(x_1-x_3)\sinh(x_2-x_4)\right],$$

$$w_3 = \frac{1}{2}\left[\cos(x_1+x_3)\cosh(x_2+x_4) - \cos(x_1-x_3)\cosh(x_2-x_4)\right],$$

$$w_4 = -\frac{1}{2}\left[\sin(x_1+x_3)\sinh(x_2+x_4) - \sin(x_1-x_3)\sinh(x_2-x_4)\right]. \quad (3.13)$$

Полученные тригонометрические функции – суть четырехмерные обобщения своих типовых аналогов из действительного и комплексного анализа. Это легко проверяется, как и в случае с четырехмерной экспонентой.

Далее, можно записать явные формулы для гиперболического косинуса и синуса , используя соотношения:

$$\cosh X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}; \sinh X = \frac{e^X - e^{-X}}{2}.$$

Здесь в эти формулы просто подставляются известные компоненты экспоненты (3.10), с небольшими изменениями.

Мы видим ключевую роль экспоненты для определения элементарных функции четырехмерного анализа.

К примеру, определим явный вид четырехмерной показательной функции $H(X) = a^X = (h_1, h_2, h_3, h_3)$ с положительным, действительным основанием $a > 0$. Для этого достаточно представить ее в другой форме и заменить аргументы в формулах (3.10) соответствующим образом:

$$a^X = e^{Xlna}$$

;

$$x_k \to x_k lna; k = \overline{1,4}.$$

Тогда:

$$h_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}\left[a^{x_1+x_3}\cos lna(x_2+x_4) + a^{x_1-x_3}\cos lna(x_2-x_4)\right],$$

$$h_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}\left[a^{x_1+x_3}\sin lna(x_2+x_4) + a^{x_1-x_3}\sin lna(x_2-x_4)\right],$$

$$h_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}\left[a^{x_1+x_3}\cos lna(x_2+x_4) - a^{x_1-x_3}\cos lna(x_2-x_4)\right],$$

$$h_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}\left[a^{x_1+x_3}\sin lna(x_2+x_4) - a^{x_1-x_3}\sin lna(x_2-x_4)\right]. \tag{3.14}$$

В заключение, дадим явную формулу для компонент четырехмерной логарифмической функции: $u(X) = LnX$.

Как и в комплексном анализе, она является многозначной функцией. Мы определим главную ветвь этой функции. Ясно, что для главной ветви можно записать $X = e^u$, но тогда:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[e^{u_1+u_3}\cos(u_2+u_4) + e^{u_1-u_3}\cos(u_2-u_4)\right],$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[e^{u_1+u_3}\sin(u_2+u_4) + e^{u_1-u_3}\sin(u_2-u_4)\right],$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left[e^{u_1+u_3}\cos(u_2+u_4) - e^{u_1-u_3}\cos(u_2-u_4)\right],$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left[e^{u_1+u_3}\sin(u_2+u_4) - e^{u_1-u_3}\sin(u_2-u_4)\right].$$

Отсюда, простыми вычислениями получим:

$$x_1 + x_3 = e^{u_1+u_3}\cos(u_2+u_4); x_2 + x_4 = e^{u_1+u_3}\sin(u_2+u_4),$$

$$x_1 - x_3 = e^{u_1-u_3}\cos(u_2-u_4); x_2 - x_4 = e^{u_1-u_3}\sin(u_2-u_4),$$

$$(x_1+x_3)^2+(x_2+x_4)^2=e^{2(u_1+u_3)};(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2=e^{2(u_1-u_3)}.$$

Теперь, простыми преобразованиями вышеприведенных соотношений, определяются искомые компоненты $u(X)=lnX=(u_1,u_2,u_3,u_4)$:

$$u_1=\ln S(X),$$

$$u_2=\frac{1}{2}(\arctan\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3}+\arctan\frac{x_2-x_4}{x_1-x_3}),$$

$$u_3=\frac{1}{4}\ln\frac{(x_1+x_3)^2+(x_2+x_4)^2}{(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2},$$

$$u_4=\frac{1}{2}(\arctan\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3}-\arctan\frac{x_2-x_4}{x_1-x_3}). \tag{3.15}$$

Здесь: $S(X)$ – симплектический модуль элемента, определяемый формулой (2.5). Первая из формул (3.15) указывает на то, что компоненты логарифмической функции определяются только при $S(X)>0$.

Таким образом, логарифмическая функция задана только для невырожденных чисел. Это означает, что она существует в точках гиперповерхностей $H_q\subset R^4$, состоящих только из невырожденных точек.

Теперь появляется возможность определения различных рациональных степеней от переменной X , записав их так:

$$X^{\frac{m}{n}}=e^{\frac{m}{n}\ln X};m\in Z;n\in N.$$

Очевидно, что таким путем найдутся главные ветви этих многозначных функции.

Резюмируя можно говорить о том что, в принципе, определяются явные формулы всех, основных элементарных функции от четырехмерного, составного переменного числа $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

При этом ясно, что все определяемые четырехмерные функции являются прямыми, четырехмерными обобщениями своих типовых аналогов из одномерного и двумерного анализа.

3.4 Четырехмерная формула Муавра. Извлечение корня.

Здесь мы даем четырехмерные обобщения двух известных формул комплексного анализа. Так, тригонометрическая форма комплексного числа $z = x_1 + ix_2$ дается следующей формулой:

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha},$$

где: r –модуль комплексного числа, α – аргумент числа.

Далее, в комплексном анализе справедлива формула Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r^n e^{in\alpha}; n \in Z.$$

Мы хотим вывести четырехмерные аналоги этих формул.

Сперва перепишем формулы, использованные при выводе (3.15), так:

$$x_1 = \frac{1}{2}e^{u_1}\left[e^{\beta}\cos(\alpha+\gamma) + e^{-\beta}\cos(\alpha-\gamma)\right] = S(X)K_1(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}e^{u_1}\left[e^{\beta}\sin(\alpha+\gamma) + e^{-\beta}\sin(\alpha-\gamma)\right] = S(X)K_2(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}e^{u_1}\left[e^{\beta}\cos(\alpha+\gamma) - e^{-\beta}\cos(\alpha-\gamma)\right] = S(X)K_3(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$x_4 = \frac{1}{2}e^{u_1}\left[e^{\beta}\sin(\alpha+\gamma) - e^{-\beta}\sin(\alpha-\gamma)\right] = S(X)K_4(\alpha,\beta,\gamma).$$

Здесь использованы переобозначения:

$$\alpha = u_2 = \frac{1}{2}(\arctan\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3} + \arctan\frac{x_2-x_4}{x_1-x_3}),$$

$$\beta = u_3 = \frac{1}{4}\ln\frac{(x_1+x_3)^2+(x_2+x_4)^2}{(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2},$$

$$\gamma = u_4 = \frac{1}{2}(\arctan\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3} - \arctan\frac{x_2-x_4}{x_1-x_3}).$$

В итоге, мы получили тригонометрическую форму невырожденного числа, в виде четырехмерного обобщения двумерной формулы:

$$X = S(X)K(\alpha,\beta,\gamma) = S(X)[K_1(\alpha,\beta,\gamma), K_2(\alpha,\beta,\gamma), K_3(\alpha,\beta,\gamma), K_4(\alpha,\beta,\gamma)]. \tag{3.16}$$

$$K_1(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{2}\left[e^{\beta}\cos(\alpha+\gamma) + e^{-\beta}\cos(\alpha-\gamma)\right],$$

$$K_2(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{2}\left[e^{\beta}\sin(\alpha+\gamma) + e^{-\beta}\sin(\alpha-\gamma)\right],$$

$$K_3(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{2}\left[e^{\beta}\cos(\alpha+\gamma) - e^{-\beta}\cos(\alpha-\gamma)\right],$$

$$K_4(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{2}\left[e^{\beta}\sin(\alpha+\gamma) - e^{-\beta}\sin(\alpha-\gamma)\right], \tag{3.17}$$

где: $S(X)$ –симплектический модуль числа X, тройка (α,β,γ) определяется формулами выше.

Определение 3.4.1. Тройку (α,β,γ) назовем аргументом четырехмерного, невырожденного числа X.

Легко видеть, что аргумент невырожденного числа определяется с точностью до слагаемого:

$$[k\pi, 0, (k+2m)\pi]; k, m \in Z. \tag{3.18}$$

Действительно, такое утверждение следует из легко проверяемых свойств $K_i(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$K_i[\alpha + k\pi, \beta, \gamma + (k+2m)\pi] = K_i(\alpha,\beta,\gamma); k, m \in Z; i = \overline{1,4}.$$

Для получения четырехмерного аналога формулы Муавра, используем следующее утверждение.

Лемма 3.4.2. Четырехмерное число (3.17) имеет следующее свойство:

$$K(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) * K(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) = K(\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2, \gamma_1+\gamma_2).$$

Лемма доказывается простым умножением четырехмерных чисел. Далее, рассмотрим два невырожденных числа, записанные в тригонометрической форме:

$$X = S(X)K(\alpha_x, \beta_x, \gamma_x); Y = S(Y)K(\alpha_y, \beta_y, \gamma_y).$$

Тогда, с учетом предыдущей леммы, получим:

$$XY = S(X)S(Y)K(\alpha_x + \alpha_y, \beta_x + \beta_y, \gamma_x + \gamma_y).$$

То есть, при умножении невырожденных чисел их спектральные модули перемножаются, а аргументы складывается. Теперь, умножая невырожденное число X много раз на самого себя, получим:

$$X^n = S^n(X)K(n\alpha_x, n\beta_x, n\gamma_x). \tag{3.19}$$

Формулу (3.19) назовем четырехмерной формулой Муавра. Действительно из нее обычная формула Муавра получится легко, при значениях: $x_3 = x_4 = 0$. Далее, без доказательства укажем формулу извлечения корня из невырожденного числа. Она получится тем же путем, что и в комплексном анализе.

$$\sqrt[n]{X} = \sqrt[n]{S(X)}K(\frac{\alpha + k\pi}{n}, \frac{\beta}{n}, \frac{\gamma + k\pi + 2m\pi}{n}). \tag{3.20}$$

Здесь: $k = \overline{0, n-1}; m = \overline{0, n-1}$, причем независимо друг от друга.

Поэтому, в отличие от комплексного анализа, корень n–ой степени из четырехмерного невырожденного числа имеет n^2 значений.

Выведем формулу корня n–ой степени из единицы $J_1 = (1, 0, 0, 0)$. Для него $\alpha = \beta = \gamma = 0$, тогда:

$$\sqrt[n]{J_1} = \left[K_1(\frac{k\pi}{n}, 0, \frac{(k+2m)\pi}{n}), K_2(...), K_3(...), K_4(...)\right]. \tag{3.21}$$

$$K_1 = \frac{1}{2}[\cos\frac{2(k+m)\pi}{n} + \cos\frac{2m\pi}{n}]; K_2 = \frac{1}{2}[\sin\frac{2(k+m)\pi}{n} - \sin\frac{2m\pi}{n}];$$

$$K_3 = \frac{1}{2}[\cos\frac{2(k+m)\pi}{n} - \cos\frac{2m\pi}{n}];\, K_4 = \frac{1}{2}[\sin\frac{2(k+m)\pi}{n} + \sin\frac{2m\pi}{n}].$$

Здесь: $k = \overline{0, n-1}; m = \overline{0, n-1}$, причем, независимо друг от друга.

Пример 3.4.3. Найти все квадратные корни из $J_1 = (1, 0, 0, 0)$.

При: $k = 0; m = 0$ из (3.21) получим: $\sqrt[2]{J_1} = J_1$,

При: $k = 0; m = 1$ из (3.21) получим: $\sqrt[2]{J_1} = -J_1$,

При: $k = 1; m = 0$ из (3.21) получим: $\sqrt[2]{J_1} = -J_3$,

При: $k = 1; m = 1$ из (3.21) получим: $\sqrt[2]{J_1} = J_3$.

Более подробно о корнях из четырехмерных чисел (в том числе из вырожденных), изложено в совместной работе [21].

3.5 Основные пространства четырехмерных функций

Теперь мы подготовлены к описанию ряда пространств гладких четырехмерных функций. Пусть $G \subset R^4$ – некоторая область.

Определение 3.4.1. Множество всех четырехмерных функций, непрерывных в области G, называется основным пространством и обозначается как $C[M(G)]$.

Очевидно, $C[M(G)]$ – это линейное векторное пространство над полем действительных чисел. Далее, в основном пространстве можно определить четыре арифметические операции.

1. Суммой (разностью) двух, непрерывных четырехмерных функции $U(X), V(X) \in C[M(G)]$ называется функция с компонентами:

$$W(X) = (U_1 \pm V_1, U_2 \pm V_2, U_3 \pm V_3, U_4 \pm V_4).$$

2. Произведением этих функции называется функция $Q(X)$, с компонентами следующего вида:

$$Q_1 = U_1V_1 - U_2V_2 + U_3V_3 - U_4V_4; Q_2 = U_1V_2 + U_2V_1 + U_3V_4 + U_4V_3;$$

$$Q_3 = U_1V_3 - U_2V_4 + U_3V_1 - U_4V_2; Q_4 = U_1V_4 + U_2V_3 + U_3V_2 + U_4V_1.$$

3. Во всех точках $X \in R^4$, где значение функции $V(X) \in C[M(G)]$ является невырожденным числом, определяется операция деления:

$$\frac{U(X)}{V(X)} = U(X) * \frac{1}{V(X)}.$$

Здесь, компоненты обратной функции справа определяются формулой вида (1.9), с использованием ее компонент.

Очевидно, что все гладкие 4 – векторы теоретической физики, механики и т.д., встречающиеся в прикладных задачах, априори являются элементами пространства $C[M(G)]$. Поэтому важно знать структуру и свойства элементов данного пространства. По крайней мере, необходимо иметь полное описание какого – либо плотного в нем подмножества четырехмерных функций. Одно из таких подмножеств нам известно.

Определение 3.4.2. Множество всех регулярных в G функций назовем базовым пространством и обозначим как $M_A(G)$.

Очевидно, $M_A(G) \subset C[M(G)]$ –собственное подмножество основного пространства.

Лемма 3.4.3. $M_A(G)$ является линейным, бесконечномерным пространством.

Доказательство: Пусть $u(X) \in M_A(G)$, $v(X) \in M_A(G)$ – регулярные функции. Тогда их компоненты удовлетворяют обобщенным условиям Коши –Римана (3.11).

Далее, легко понять, что $\forall \lambda, \mu \in R$ компоненты четырехмерной функции $\lambda u(X) + \mu v(X)$ также удовлетворяют (3.11).

Поэтому, $[\lambda u(X) + \mu v(X)] \in M_A(G)$. Это пространство бесконечномерно ввиду того, что оно содержит счетно –бесконечное подмножество линейно –независимых элементов вида:

$$J_1, X, X^2, X^3, ..., X^n, ... \tag{3.22}$$

Действительно,рассмотрим конечную, линейную комбинацию элементов (3.22), обращающуюся в нуль в области G. Без ограничения общности примем: $X_0 = (0,0,0,0) \in G$. Теперь рассмотрим нулевую линейную комбинацию вида:

$$\alpha_0 J_1 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + ... + \alpha_m X^m = \theta. \tag{3.23}$$

Положим в (3.23) $X = X_0$, $\Rightarrow \alpha_0 = 0$. Теперь, последовательно дифференцируя обе части (3.23) по переменной X и, каждый раз приравнивая $X = X_0$, $\Rightarrow \alpha_k = 0; k = \overline{1,m}$.

Лемма доказана.

Определение 3.4.4 Если компоненты четырехмерной функции $U_k(x_1, x_2, x_3, x_4) \in C^m(G); k = \overline{1,4}$, то множество таких четырехмерных функции обозначается как $C^m[M(G)]$.

Очевидно включение:

$$C^m[M(G)] \subset C^{m-1}[M(G)] ... \subset C^1[M(G)] \subset C[M(G)].$$

.

Легко показать, что все множества $C^m[M(G)]$ являются линейными подпространствами основного пространства $C[M(G)]$.

Далее, пусть $G \subset R^4$ –компакт. Тогда $C[M(G)]$ является полным нормированным пространством, относительно равномерной нормы:

$$\|U(X)\| = max_{1 \le k \le 4}[sup_{X \in G}|U_k|]. \tag{3.24}$$

Остальные пространства $C^m[M(G)]$ также превращаются в полные, нормированные пространства относительно схожих норм. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ – мультииндекс с неотрицательными целыми компонентами, $|\alpha| = \sum \alpha_k$. Введем обозначение:

$$D^{|\alpha|} F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \partial x_4^{\alpha_4}}. \tag{3.25}$$

Теперь в пространстве $C^m[M(G)]$ норма вводится так:

$$\|U(X)\| = max_{1 \le k \le 4}[sup_{X \in G} \sum_{|\alpha|=0}^{m} \sum_{\alpha} |D^{|\alpha|} U_k|]. \tag{3.26}$$

Далее, согласно теореме Стоуна –Вейерштрасса [11], множество всех многочленов является всюду плотным множеством в основном пространстве $C[M(G)]$ с нормой (3.24). Но все эти многочлены регулярны и, автоматически принадлежат пространству $M_A(G)$.

Таким образом, $M_A(G)$ является всюду плотным множеством основного пространства $C[M(G)]$, относительно нормы (3.24). Более того, $M_A(G)$ является всюду плотным подмножеством любого из пространств $C^m[M(G)]$, относительно норм (3.26).

Отсюда ключевой вывод: Любой, сколь –угодно гладкий 4 – вектор прикладного значения, может быть приближен, с любой наперед заданной точностью, какой -то регулярной функцией из $M_A(G)$.

При исследованиях различных математических моделей теоретической физики (механики), этот факт имеет определяющее значение.

В принципе, все задачи можно исследовать при помощи регулярных функций. Благо, аналитическая форма записи регулярной функции абсолютно идентична форме ее одномерного и двумерного аналогов и, легко поддается различным преобразованиям.

Легко понять, что любая гладкая четырехмерная функция на компакте является либо регулярной функцией, либо она равна пределу последовательности регулярных функций, относительно равномерных норм (3.24) и (3.26). Здесь мы имеем ввиду покомпонентную сходимость последовательности регулярных функции на основе этих норм.

Но тогда, доказав некое математическое утверждение для функции из множества $M_A(G)$, на основе замыкания в соответствующих нормах, мы можем считать утверждение верным и для четырехмерных функций из основных классов. Это обстоятельство подчеркивает ключевую роль базового пространства для прикладных задач. Поэтому в следующих главах уточняются дополнительные свойства регулярных функций.

Глава 4

Дифференциальные свойства четырехмерных функций

4.1 Производные от регулярной функций

Ранее мы определили, что среди четырехмерных функций дифференцируемы (имеют производную) только регулярные функции.

Пусть $u(X), v(X) \in M_A(G)$ – произвольные регулярные функции, то есть, их компоненты удовлетворяют условиям (3.11). Тогда, непосредственно из определения производной (3.10), получим следующее свойство производных:

$$[Au(X) \pm Bv(X)]' = Au'(X) + Bv'(X); \forall A, B \in R^4.$$

Далее докажем следующее утверждение.

Лемма 4.1.1. Множество $M_A(G)$ замкнуто относительно операции четырехмерного умножения (1.8).

Доказательство: Пусть $w(X) = u(X) * v(X)$, тогда ее компоненты имеют следующий вид:

$$w_1 = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3 - u_4v_4,$$

$$w_2 = u_1v_2 + u_2v_1 + u_3v_4 + u_4v_3,$$

$$w_3 = u_1v_3 - u_2v_4 + u_3v_1 - u_4v_2,$$
$$w_4 = u_1v_4 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_1. \tag{4.1}$$

Теперь, из (4.1) получим:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}v_1 + u_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}v_2 - u_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \\ + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}v_3 + u_3\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_1}v_4 - u_4\frac{\partial v_4}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}v_2 + u_1\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}v_1 + u_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \\ + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}v_4 + u_3\frac{\partial v_4}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_2}v_3 + u_4\frac{\partial v_3}{\partial x_2}.$$

Далее, компоненты обеих регулярных функции $u(X), v(X) \in M_A(G)$ удовлетворяют условиям (3.4). С учетом этого, сравнение правых частей последних формул, приводит к равенству:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}.$$

Таким путем мы легко покажем, что компоненты $w(X)$ удовлетворяют всем условиям из (3.4), то есть, она действительно является регулярной функцией.

Лемма доказана.

После этого, непосредственной проверкой доказывается выполнение следующего свойства производных:

$$[u(X) * v(X)]' = u'(X) * v(X) + u(X) * v'(X).$$

Далее, если все значения $v(X) \in M_A(G)$ являются невырожденными числами, то непосредственной проверкой доказывается свойство производных вида:

$$\left[\frac{u(X)}{v(X)}\right]' = \frac{u'(X) * v(X) - u(X) * v'(X)}{V^2}.$$

Доказанные свойства – это четырехмерные обобщения аналогичных формул из действительного (комплексного) анализа. Теперь мы можем записать таблицу производных от основных элементарных функций, как в действительном анализе:

$$1.C' = \theta = (0,0,0,0); 2.(X^n)' = nX^{n-1}; 3.(e^X)' = e^X;$$

$$4.(LnX)' = \frac{J_1}{X}; 5.(a^X)' = a^X \ln a; 6.(\sin X)' = \cos X;$$

$$7.(\cos X)' = -\sin X; 8.(\tan X)' = \frac{J_1}{\cos^2 X}; 9.(\arcsin X)' = \frac{J_1}{\sqrt{J_1 - X^2}};$$

$$10.(\arctan X)' = \frac{J_1}{J_1 + X^2}; 11.(\cosh X)' = \sinh X; 12.(\sinh X)' = \cosh X.$$

Отсюда легко понять, что производные сложных четырехмерных функций вычисляются на основе этой же таблицы, абсолютно идентично одномерному анализу.

Пример 4.1.2 Найти производную сложной четырехмерной функции: $u(X) = \arctan^2(X^3 + 2)$.

Решение:

$$u'(X) = 2\arctan(X^3 + 2) * [\arctan(X^3 + 2)]' = \frac{6X^2 * \arctan(X^3 + 2)}{J_1 + (X^3 + 2)^2}.$$

4.2 Функция составного типа. Понятие периода

Регулярные функции сохраняют все свойства своих аналогов меньшей размерности – однотипных функций из действительного и комплексного анализа. Вместе с тем, они обладают и рядом дополнительных свойств, присущих только им. Типовые функции из действительного (комплексного) анализа уже не имеют подобных свойств. В данном разделе мы будем излагать именно эти, отличительные свойства регулярных функций.

Пусть $u(X) \in M_A(G)$ – произвольная регулярная функция. Тогда ее компоненты удовлетворяют обобщенным условиям Коши –Римана в области $G \subset R^4$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_4}{\partial x_4},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_4} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_4}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_1}. \tag{4.2}$$

Далее, замыкая на спектре соответствующие теоремы комплексного анализа легко показать, что регулярная функция бесконечно дифференцируема по составной переменной X. Поэтому, ее компоненты являются обычными, бесконечно – дифференцируемыми функциями от четырех действительных переменных в области $G \subset R^4$.

Теперь, из первого и второго уравнений (4.2) выберем следующие попарные равенства:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

Отсюда легко получим:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0.$$

Теперь, выберем другие попарные равенства:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_4}; \frac{\partial u_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_3}.$$

Отсюда:
$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_4^2}=0.$$
И наконец, рассмотрим следующую пару равенств:
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3};\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}.$$
Отсюда:
$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}=0.$$
Аналогичным путем убеждаемся в том, что идентичные соотношения верны для всех остальных компонент регулярной функции, то есть, мы получим цепочку равенств вида:
$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}=-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_3^2}=-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_4^2};k=\overline{1,4}. \tag{4.3}$$
Используя соотношения (4.3), докажем справедливость нижеследующих утверждений.

Теорема 4.2.1. Регулярная функция $u(X)\in M_A(G)$ является функцией составного типа в области $G\subset R^4$, то есть, ее компоненты удовлетворяют различным уравнениям эллиптического и гиперболического типов:

1. Относительно всех независимых переменных, четырехмерному, эллиптическому уравнению Лапласа
$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_4^2}=0;k=\overline{1,4}. \tag{4.4}$$
2. По различным парам независимых переменных, двумерным эллиптическим уравнениям вида:
$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}=0;\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_4^2}=0;k=\overline{1,4}. \tag{4.5}$$

3. По некоторым парам независимых переменных, двумерным гиперболическим уравнения вида:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_3^2} = 0; \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_4^2} = 0; k = \overline{1,4}. \tag{4.6}$$

Доказательство: (4.4) получится из (4.3) сложением элементов цепочки равенств, а (4.5) и (4.6) – выбором различных пар из этой цепочки.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что компоненты регулярной функции являются гармоническими функциями четырех переменных. Кроме того, они обладают дополнительными свойствами вида (4.5) и (4.6). Таких свойств нет у двумерных (регулярных) функции из комплексного анализа, они не являются функциями составного типа.

Далее, в четырехмерном анализе понятие периодичности (функции) приобретает новые очертания.

Определение 4.2.2. Четырехмерное число $T = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in R^4$ назовем периодом регулярной функции $u(X) \in M_A(G)$, если:

$$u(X+T) = u(X) \Rightarrow u_k(x_1+t_1, x_2+t_2, x_3+t_3, x_4+t_4) = \\ = u_k(x_1, x_2, x_3, x_4); k = \overline{1,4}.$$

Определим периоды ряда элементарных функций, определенных нами в третьей главе. Особую роль в четырехмерном анализе, как мы уже убеждались в этом, играет четырехмерная экспонента. Исследование периодичности начнем с нее.

Известно, что компоненты экспоненты $u(X) = e^X$ задаются так:

$$u_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left[e^{x_1+x_3}\cos(x_2+x_4) + e^{x_1-x_3}\cos(x_2-x_4)\right],$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left[e^{x_1+x_3}\sin(x_2+x_4) + e^{x_1-x_3}\sin(x_2-x_4)\right],$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left[e^{x_1+x_3}\cos(x_2+x_4) - e^{x_1-x_3}\cos(x_2-x_4)\right],$$

$$u_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}\left[e^{x_1+x_3}\sin(x_2+x_4) - e^{x_1-x_3}\sin(x_2-x_4)\right].$$

Отсюда легко видно, что четырехмерная экспонента имеет три, различающиеся между собой, основных периода:

$$T_1 = (0, 2\pi, 0, 0); T_2 = (0, \pi, 0, \pi); T_3 = (0, 0, 0, 2\pi).$$

Таким образом, мы видим первый пример трех-периодической функции, чего нет в действительном (или комплексном) анализе. Очевидно, всевозможные периоды экспоненты выражаются через основные три периода и, в общем виде запишутся так:

$$T_{mnk} = [0, (2m+n)\pi, 0, (n+2k)\pi]; m, n, k \in Z \tag{4.7}$$

Схожие свойства периодичности имеет и четырехмерный синус $u(X) = sinX$, с компонентами вида:

$$u_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}\left[\sin(x_1+x_3)\cosh(x_2+x_4) + \sin(x_1-x_3)\cosh(x_2-x_4)\right],$$

$$u_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}\left[\cos(x_1+x_3)\sinh(x_2+x_4) + \cos(x_1-x_3)\sinh(x_2-x_4)\right],$$

$$u_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}\left[\sin(x_1+x_3)\cosh(x_2+x_4) - \sin(x_1-x_3)\cosh(x_2-x_4)\right],$$

$$u_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}\left[\cos(x_1+x_3)\sinh(x_2+x_4) - \cos(x_1-x_3)\sinh(x_2-x_4)\right].$$

Из формул видно, что четырехмерный синус также является трехпериодической функцией, с основными периодами:

$$T_1 = (2\pi, 0, 0, 0); T_2 = (\pi, 0, \pi, 0); T_3 = (0, 0, 2\pi, 0).$$

При этом известно, что четырехмерный синус сохраняет все основные свойства одномерного или двумерного синусов, например:

$$\sin 2X = 2\sin X\cos X; 2\sin^2 X = J_1 - \cos 2X.$$

Теперь найдем формулу для логарифмической функции $u(X) = LnX$ общего вида. Она определяется только для $X \in NS$. При этом, такая функция имеет бесконечное количество ветвей.

Ранее в виде (3.15) мы нашли ее главное значение $u(X) = \ln X$ для невырожденных $X \in NS$. Запишем тригонометрическую форму невырожденного числа (3.16) в форме, учитывающей периоды (4.7) экспоненты.

$$X = e^{[\ln S(X), \alpha_x + (2m+n)\pi, \beta_x, \gamma_x + (n+2k)\pi]}; m, n, k \in Z.$$

Отсюда получим следующий вид искомой многозначной функции:

$$LnX = (u_1, u_2, u_3, u_4),$$
$$u_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \ln \sqrt[4]{[(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2][(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2]},$$
$$u_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left(\arctan \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} + \arctan \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_3}\right) + (2m + n)\pi,$$
$$u_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4} \ln \frac{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2}{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2},$$
$$u_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left(\arctan \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} - \arctan \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_3}\right) + (n + 2k)\pi. \tag{4.8}$$

Здесь: $m, n, k \in Z$ –независимо меняющиеся целые числа. Формула (4.8) дает все многообразие (бесконечное количество) ветвей общей логарифмической функции. Из нее главная ветвь $u(X) = \ln X$ получится при значениях: $m = n = k = 0$.

Конечно, невозможно дать описание отличительных свойств всего континуума регулярных функций. Понятно, что выявление специфических свойств различных регулярных функций, как раз и является предметом исследований ТФЧП.

В заключение этого раздела изложим еще одну из особенностей четырехмерного анализа. Как известно, линейные уравнения одномерного или двумерного анализа вида:

$$ax + b = 0; a, b \in R; cz + d = 0; c, d \in C; a \neq 0; c \neq 0.$$

всегда имеют решение. В четырехмерном анализе выявлены особенности, даже в таком, казалось –бы простейшем вопросе.

Лемма 4.2.3. Линейная функция $u(X) = AX + B$, где коэффициент A–вырожденное, B –невырожденное число, нигде в R^4 не обращается в нуль.

Доказательство: Из уже известных свойств произведения следует, что $\forall X \in R^4$ число (AX) является вырожденным числом, того или иного типа. Но тогда, четырехмерное число $(AX + B)$ является невырожденным числом, поэтому $AX + B \neq \theta = (0, 0, 0, 0)$.

Лемма доказана.

Мы выяснили, что в четырехмерном анализе разрешимо не всякое линейное уравнение первого порядка. Очевидно, линейное уравнение $AX + B = \theta$ всегда разрешимо , когда $A \in NS$ – невырожденное число.

4.3 Поле четырехмерной функции

Пусть: $U(X) = (U_1, U_2, U_3, U_4) \in CM(G)$ – произвольная четырехмерная функция из основного класса.

Ясно, что значением такой функции в конкретной точке области $X_0 \in G \subset R^4$, является четырехмерное число (четырехмерный числовой вектор). Говоря по другому, четырехмерная функция задает, в точках области $G \subset R^4$, некоторое векторное поле.

Далее, если $U(X) \in CM(R^4)$, то она задает векторное поле во всем пространстве R^4. Теперь определим четырехмерные обобщения некоторых понятий, используемых в трехмерном векторном анализе, таких как: градиент скалярной функции, дивергенция, ротор.

Сперва введем четырехмерный оператор –набла вида:

$$\nabla_4 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right).$$

В четырехмерном анализе этот оператор может применяться к любой скалярной функции $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, являющейся какой – либо компонентой произвольной четырехмерной функции $U(X) \in C^1M(G)$ по такому же правилу, что и в трехмерном векторном анализе:

$$\nabla_4\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_4}\right). \tag{4.9}$$

Полученная четырехмерная функция $\nabla_4\Phi \in CM(G)$ называется четырехмерным градиентом скалярной функции $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Далее, четырехмерная дивергенция вводится аналогично трехмерному случаю, как формальное скалярное произведение векторов.

Определение 4.3.1. Четырехмерной дивергенцией векторного поля, заданного функцией $U(X) \in C^1M(G)$, называется скалярная функция:

$$Div_4U = (\nabla_4, U) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} + \frac{\partial U_4}{\partial x_4}. \tag{4.10}$$

Нетрудно понять, что дивергенция любого поля будет скалярной функцией ,то есть, является одной из компонент некоторой четырехмерной функции из основного класса $C[M(G)]$.

Понятие четырехмерного ротора существенно отличается от понятия трехмерного ротора.

Определение 4.3.2. Четырехмерным ротором векторного поля, определяемого функцией $U(X) \in C^1M(G)$, называется четырехмерная функция вида:

$$Rot_4U = \nabla_4 * U = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) \tag{4.11}$$

В формуле (4.11), ротор определяется как символическое, четырехмерное умножение ∇_4 на $U(X)$. По формуле четырехмерного умножения (1.8), компоненты такого произведения определяются так:

$$Q_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} - \frac{\partial U_4}{\partial x_4},$$

$$Q_2 = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_4} + \frac{\partial U_4}{\partial x_3},$$

$$Q_3 = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_2}{\partial x_4} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} - \frac{\partial U_4}{\partial x_2},$$

$$Q_4 = \frac{\partial U_1}{\partial x_4} + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + \frac{\partial U_4}{\partial x_1}. \qquad (4.12)$$

Очевидно, $Rot_4 U \in CM(G)$ – некоторый элемент основного пространства четырехмерных функций.

В дальнейшем, введенные понятия используются для исследования различных уравнений движения теоретической физики, механики и других прикладных задач. Отметим, что ряд формул четырехмерного векторного анализа отличается от привычных формул, используемых в трехмерном случае. Так, легко проверить справедливость формулы вида:

$$Div_4(\nabla_4 \Phi) = \Delta_4 \Phi, \qquad (4.13)$$

где справа получен обычный, четырехмерный оператор Лапласа:

$$\Delta_4 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}.$$

Здесь мы получили полный аналог формулы трехмерного векторного анализа. С другой стороны, кроме тривиальных случаев, мы всегда получим:

$$Div_4(Rot_4 U) \neq 0; Rot_4(\nabla_4 \Phi) \neq \theta = (0, 0, 0, 0). \qquad (4.14)$$

Таким образом, в четырехмерном векторном анализе есть свои особенности, отличающие его от трехмерного случая. Это мы будем учитывать при решении различных задач.

Определение 4.3.3. Поле, определяемое четырехмерной функцией $U(X) \in C^1 M(G)$, назовем соленоидальным полем, если четырехмерная дивергенция этого поля равна нулю, то есть:

$$Div_4 U = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} + \frac{\partial U_4}{\partial x_4} = 0. \qquad (4.15)$$

Определение 4.3.4. Поле, определяемое четырехмерной функцией $U(X) \in C^1M(G)$, назовем потенциальным (безвихревым) полем, если четырехмерный ротор этого поля равен нулевой функции, то есть:

$$Rot_4 U = \nabla_4 * U = (0,0,0,0). \tag{4.16}$$

Компоненты функции, определяющей потенциальное поле, удовлетворяют таким соотношениям:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} - \frac{\partial U_4}{\partial x_4} = 0,$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_4} + \frac{\partial U_4}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_2}{\partial x_4} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} - \frac{\partial U_4}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_4} + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + \frac{\partial U_4}{\partial x_1} = 0. \tag{4.17}$$

Укажем один, легко определяемый класс потенциальных полей.

Теорема 4.3.5. Векторное поле, определяемое любой регулярной функцией $u(X) \in M_A(G)$, является потенциальным (безвихревым) полем.

Доказательство: Компоненты регулярной функции удовлетворяют обобщенным условиям Коши – Римана (4.2). Легко понять, что эти условия можно переписать в виде односторонних следствий:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_4}{\partial x_4} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_3} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_4} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_4} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_4}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_4} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_4} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0.$$

Отсюда видно, что компоненты любой регулярной функции удовлетворяют условиям (4.17). **Теорема доказана.**

При этом можно показать, что ни одна регулярная функция, отличная от четырехмерной постоянной, не может задавать соленоидального поля в R^4.

Теорема 4.3.6. Поля, задаваемые нетривиальными регулярными функциями, не могут быть соленоидальными вообще.

Доказательство: Пусть $u(X) \in M_A(G)$ отлична от четырехмерной постоянной. Тогда, из условий Коши –Римана получим:

$$Div_4 u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = 4\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 4\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 4\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 4\frac{\partial u_4}{\partial x_4} \neq 0.$$

Теорема доказана.

4.4 Обобщенная теорема Гельмгольца

В данном разделе мы получим четырехмерный аналог известной теоремы Гельмгольца. В трехмерном векторном анализе, такая теорема определяет разложение произвольного, гладкого векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей.

В трехмерном случае, теорему можно сформулировать так. Пусть $\vec{F}(t, x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ – произвольное гладкое векторное поле, заданное в некоторой области $\Omega \subset R^3$. Здесь время t рассматривается как параметр. Тогда справедливо разложение вида:

$$\vec{F} = \vec{\Psi} + \vec{\Omega} \tag{4.18}$$

при этом:

$$div\vec{\Psi} = 0; rot\vec{\Omega} = \theta = (0, 0, 0); \tag{4.19}$$

В формуле (4.19) операторы дивергенции и ротора являются трехмерными. Вообще говоря, разложение (4.18) определяется с точностью до векторного поля $\vec{Q}(t, x, y, z)$ такого, что: $div\vec{Q} = 0, rot\vec{Q} = \theta$.

Это обстоятельство приводит к большим трудностям при исследованиях различных задач физики и механики, с точки зрения теории поля. Класс трехмерных векторов – функции, содержащий калибровочный вектор $\vec{Q}(t,x,y,z)$ достаточно широк, он состоит из градиентов всех решений трехмерного уравнения Лапласа. Поэтому, однозначное определение этого вектора сопряжено с большими трудностями.

В четырехмерном анализе также имеется аналогичное разложение, причем калибровочный вектор определяется достаточно просто. Мы получим четырехмерный аналог теоремы Гельмгольца, исходя из таких соображений.

Так, материалы предыдущих разделов приводят нас к пониманию того, что на любом компакте произвольную четырехмерную функцию $U(X) \in C^1M(G)$ можно определить, как предельную точку множества регулярных функций $M_A(G)$, относительно нормы (3.26).

То есть, существует сходящаяся последовательность регулярных функций: $u^{(1)}(X), u^{(2)}(X), u^{(3)}(X)..., u^{(n)}(X)...$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} u^{(n)}(X) = U(X).$$

Легко понять, что если отсечь функций –константы, то $C^1M(G)$ состоит из четырех типов функций (точек):

1) Предельные точки, принадлежащие множеству $M_A(G)$ – это подмножество $\Gamma_1 = M_A(G) \subset C^1M(G)$, при этом (теоремы 4.3.5 и 4.3.6):

$$\forall U \in \Gamma_1 \Rightarrow Rot_4 U = \theta; Div_4 U \neq 0.$$

2) Предельные точки 1-го типа, не принадлежащие множеству $M_A(G)$ – это подмножество $\Gamma_2 \subset C^1M(G)$, такое что:

$$\forall V \in \Gamma_2 \Rightarrow Rot_4 V \neq \theta; Div_4 V = \theta.$$

3) Предельные точки 2-го типа, не принадлежащие множеству $M_A(G)$ – это подмножество $\Gamma_3 \subset C^1M(G)$, такое что:

$$\forall W \in \Gamma_3 \Rightarrow Rot_4 W \neq \theta; Div_4 W \neq 0.$$

4) Предельные точки 3-го типа, не принадлежащие множеству $M_A(G)$ – это подмножество $\Gamma_4 \subset C^1M(G)$, такое что:

$$\forall Q \in \Gamma_4 \Rightarrow Rot_4 Q = \theta; Div_4 Q = 0.$$

Очевидно, что подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ – подпространства линейного пространства $C^1M(G)$, причем третье является прямой суммой первых двух:

$$\Gamma_3 = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$$

Таким образом, для всех видов точек (функции) из $C^1M(G)$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.4.1. Обобщенная теорема Гельмгольца.

Векторное поле любой нетривиальной четырехмерной функции $U(X) \in C^1M(G)$ разлагается на сумму потенциального и соленоидального полей, то есть:

$$U(X) = Q(X) + W(X) \Longrightarrow Rot_4 Q = \theta; Div_4 W = 0. \qquad (4.20)$$

Теорема доказана на компакте. Распространение на все пространство не составит труда. Доказанная теорема используется в различных приложениях.

4.5 Описание соленоидальных полей

Пусть четырехмерная функция $U(X) \in C^1M(G)$ определяет соленоидальное поле на компакте. Тогда четырехмерная дивергенция этого поля равна нулю, то есть:

$$Div_4 U = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} + \frac{\partial U_4}{\partial x_4} = 0. \qquad (4.21)$$

Из материалов предыдущего раздела следует, что искомая функция $U(X) \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \subset C^1M(G)$ –это линейное подпространство, содержащее весь континуум всевозможных соленоидальных четырехмерных функций. Мы знаем, что любая соленоидальная функция есть предельная точка $M_A(G) \subset C^1M(G)$, не принадлежащая этому множеству.

Отсюда легко понять, что описание соленоидальных полей необходимо дать, так сказать, в терминах регулярных функций. Мы докажем, что каждой регулярной функции $u(X) \in M_A(G)$ соответствует ровно один элемент $U(X) \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_4)$.

Итак, рассмотрим первый ряд условий Коши –Римана для произвольной функции $u(X) \in M_A(G)$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_4}{\partial x_4}.$$

Анализируя эти условия можно заметить, что для компонент произвольной регулярной функции выполняются специфические соотношения, например, такого вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial(-u_2)}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} + \dfrac{\partial(-u_4)}{\partial x_4} = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial(-u_3)}{\partial x_3} + \dfrac{\partial(-u_4)}{\partial x_4} = 0, \\ \dfrac{\partial(-u_1)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial(-u_2)}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_4}{\partial x_4} = 0, \\ \dfrac{\partial(-u_1)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} + \dfrac{\partial(-u_4)}{\partial x_4} = 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

Тогда, сопоставляя (4.22) с (4.21) мы легко поймем, что последнее уравнение имеет такие (частные) решения:

$$\begin{cases} U_1 = u_1; U_2 = -u_2; U_3 = u_3; U_4 = -u_4, \\ U_1 = u_1; U_2 = u_2; U_3 = -u_3; U_4 = -u_4, \\ U_1 = -u_1; U_2 = -u_2; U_3 = u_3; U_4 = u_4, \\ U_1 = -u_1; U_2 = u_2; U_3 = u_3; U_4 = -u_4. \end{cases} \tag{4.23}$$

Ясно, что подставляя в (4.23) компоненты произвольной регулярной функции $u(X) \in M_A(G)$, мы легко получим бесконечное множество (континуум) точных решений уравнения (4.21).

Но этого будет недостаточно,так как мы еще не нашли общий вид соотношений типа (4.22), справедливых для произвольной регулярной функции. Этот пробел восполним следующей леммой.

Лемма 4.5.1. Пусть $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1$ –произвольные, действительные или комплексные скаляры, удовлетворяющие условию:

$$\delta\delta_1 + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0.$$

Тогда, компоненты произвольной регулярной функции удовлетворяют следующему соотношению:

$$J = \alpha_1 \frac{\partial u_1(\alpha x_1, \beta x_2, \delta x_3, \gamma x_4)}{\partial x_1} - \beta_1 \frac{\partial u_2(\alpha x_1, \beta x_2, \delta x_3, \gamma x_4)}{\partial x_2} + \\ + \delta_1 \frac{\partial u_3(\alpha x_1, \beta x_2, \delta x_3, \gamma x_4)}{\partial x_3} - \gamma_1 \frac{\partial u_4(\alpha x_1, \beta x_2, \delta x_3, \gamma x_4)}{\partial x_4} = 0. \quad (4.24)$$

Доказательство:

Введем обозначения: $\alpha x_1 = x_1^*; \beta x_2 = x_2^*; \delta x_3 = x_3^*; \gamma x_4 = x_4^*$. Тогда левая часть равенства (4.24) запишется так:

$$J = \alpha\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1^*} - \beta\beta_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2^*} + \delta\delta_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_3^*} - \gamma\gamma_1 \frac{\partial u_4}{\partial x_4^*} = (\delta\delta_1 + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_1^*} = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма показывает, что все соотношения вида (4.22) выводятся, из более общего свойства компонентов регулярной функции (4.24). Например, первое из соотношений (4.22) получено из (4.24) при:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 1.$$

Таким образом, (4.24) является основным соотношением, описывающим ключевое свойство регулярных функций из $M_A(G)$.

Определение 4.5.2.

Произвольные восемь скаляров $(\alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1)$ называются разрешающими параметрами уравнения (4.21), если выполняется соотношение:

$$\delta\delta_1 + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0. \quad (4.25)$$

Таким образом, предыдущие рассуждения показывают справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.5.3. Общее решение уравнения (4.21) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} U_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \alpha_1 u_1(\alpha x_1, \beta x_2, \delta x_3, \gamma x_4) \\ U_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\beta_1 u_2(\alpha x_1, \beta x_2, \delta x_3, \gamma x_4) \\ U_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = \delta_1 u_3(\alpha x_1, \beta x_2, \delta x_3, \gamma x_4) \\ U_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\gamma_1 u_4(\alpha x_1, \beta x_2, \delta x_3, \gamma x_4) \end{cases} \tag{4.26}$$

где: $(\alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1)$–произвольный набор разрешающих параметров, $u(X) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in M_A(G)$ – произвольная регулярная функция.

Доказательство: Утверждение доказывается тем же путем, что использовано при доказательстве Леммы 4.5.1.

В дальнейшем, SP (solving parametres) – набор разрешающих параметров уравнения (4.21), будем записывать в форме:

$$SP = (\alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1).$$

Теорема 4.5.3 показывает, что для любого, фиксированного набора SP, каждой регулярной функции соответствует ровно одна соленоидальная четырехмерная функция, определяемая формулами (4.26).

Легко проверить, что множество соленоидальных четырехмерных функций вида (4.26) образует линейное пространство для любых наборов SP, удовлетворяющих условию (4.25). Эти компоненты, при надлежащем выборе $u(X) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in M_A(G)$ и SP, будут обладать требуемыми свойствами ограниченности, периодичности т.д.

Глава 5

Прочие свойства регулярных функций

5.1 Понятия дифференциала и неопределенного интеграла

В теории регулярных функций можно вводить понятия, идентичные одномерному анализу. Но в отличие от одномерного анализа, здесь не даются пояснения о геометрических, физических и других смыслах определяемых понятий, ибо у нас нет явных представлений о четырехмерных геометрических объектах.

Итак, пусть $X = (x_1, x_2, x_3 x_4) \in R^4$ – составное, независимое переменное число. В регулярном анализе символ независимой переменной X используется в таком же контексте, как в действительном анализе – символ независимой переменной x. Так, для преобразования различных математических формул, содержащих регулярные функции, мы действуем по правилам одномерного анализа. К примеру, рассмотрим простейшее преобразование:

$$\frac{C}{X-A} + \frac{D}{X-B} = \frac{(C+D)*X-(C*B+A*D)}{(X-A)*(X-B)}.$$

Здесь: A, B, C, D –четырехмерные числа. В правой, уже преобразованной части соотношения мы учитываем то, что все арифметические операции четырехмерные. Развернутая запись результата преобразования, будет состоять из четырех компонент, определяемых с учетом четырехмерных операции.

Далее, пусть $u = F(X) \in M_A(G)$–некоторая, регулярная в области $G \subset R^4$ функция. Тогда она бесконечно дифференцируема в этой области по четырехмерной переменной X.

Определение 5.1.1. Первообразной произвольной регулярной функции $u = F(X)$ называется регулярная функция $u = W(X)$, такая, что: $\frac{dW}{dX} = F(X)$.

Как и в одномерном анализе легко понять, что первообразная определяется неоднозначно, а лишь с точностью до постоянного четырехмерного числа $C = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in R^4$.

Пример 5.1.2. Найдем первообразную регулярной функции вида: $u = F(X) = X^2 - \cosh 2X$. Легко понять, что она имеет следующий вид:

$$W(X) = \frac{X^3}{3} - \frac{1}{2}\sinh 2X + C.$$

Далее, как и в одномерном анализе, дадим понятие дифференциала аргумента.

Определение 5.1.3. Дифференциалом независимой переменной называется приращение этой переменной, то есть:

$$dX = (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) = \triangle X = (\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3, \triangle x_4).$$

Теперь, пока формально, дадим определение дифференциала регулярной функции .

Определение 5.1.4. Дифференциалом произвольной регулярной функции $u = F(X)$ называется четырехмерная величина вида:

$$dF(X) = F'(X) * dX. \tag{5.1}$$

Выясним смысл введенного понятия, записав в развернутом виде правую часть формулы (5.1). Из формулы (3.7) имеем:

$$F'(X) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right).$$

Тогда, если обозначить $dF(X) = (D_1, D_2, D_3, D_4)$, то по правилу четырехмерного умножения (1.8) и, с учетом условий Коши –Римана (3.4), получим:

$$D_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}dx_3 - \frac{\partial f_4}{\partial x_1} =$$
$$= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4}dx_4.$$

Отсюда видно, что $D_1 = df_1$, где $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ –первая компонента четырехмерной функции $F(X) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$. Аналогичным путем легко показать, что: $D_k = df_k; k = \overline{1,3}$.

Таким образом, мы выяснили смысл четырехмерного дифференциала от регулярной функции. Он состоит из полных дифференциалов своих компонент – обычных функций от четырех переменных.

$$F(X) = (f_1, f_2, f_3, f_4) \Rightarrow dF = (df_1, df_2, df_3, df_4).$$

Очевидно, четырехмерный дифференциал имеет свойства, аналогичные одномерному случаю:

$$1.dC = \theta = (0,0,0,0); 2.d[AF(X) \pm BQ(X)] = AdF \pm BdQ;$$

$$3.d(F * Q) = F * dQ + Q * dF; 4.d\left(\frac{F}{Q}\right) = \frac{Q * dF - F * dQ}{Q^2}.$$

Такое положение дел позволяет ввести понятие неопределенного интеграла от регулярной функций.

Определение 5.1.5. Интегрированием регулярной функции называется операция нахождения первообразной от этой функции. При этом, множество ее первообразных записывается в символической форме неопределенного интеграла, как:

$$\int F(X) * dX = W(X) + C. \tag{5.2}$$

Здесь: $W(X)$ –любая из первообразных, $C = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ – четырехмерная постоянная.

Легко понять, что основные свойства неопределенного интеграла будут такими же, как в одномерном анализе:

$$1. \int [AF(X) \pm BQ(X)] * dX = A \int F(X) * dX \pm B \int Q(X) * dX;$$

$$2. d\left(\int F(X) * dX\right) = F(X) * dX; 3. \int dF(X) = F(X) + C.$$

Теперь, на основе таблицы производных от регулярных функций, легко создается таблица неопределенных интегралов от регулярных функций:

$$1. \int \theta * dX = C; 2. \int X^n * dX = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C; (n \neq -1)$$

$$3. \int \frac{dX}{X} = LnX + C; 4. \int a^X * dX = \frac{a^X}{\ln a} + C;$$

$$5. \int \sin X * dX = -\cos X + C; 6. \int \cos X * dX = \sin X + C;$$

$$7. \int e^X * dX = e^X + C; 8. \int \frac{dX}{\cos^2 X} = \tan X + C;$$

$$9. \int \frac{dX}{\sqrt{J_1 - X^2}} = \arcsin X + C; ; 10. \int \frac{dX}{J_1 + X^2} = \arctan X + C.$$

5.2 О независимости систем функций

Нахождение функционально независимых между собой интегралов дифференциальных уравнений в частных производных является одной из важных задач прикладного анализа. Здесь мы покажем, что симплектический модуль регулярной функций тесно связан с вопросом о функциональной независимости ее компонент.

Пусть : $W = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in M_A(G)$ – регулярная функция, отличная от постоянной. Легко видеть, что ее компоненты представляют собой систему действительных функций, заданных в области $G \subset R^4$:

$$\begin{cases} w_1 = w_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ w_2 = w_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ w_3 = w_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ w_4 = w_4(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{cases} \tag{5.3}$$

Как правило, функциональная независимость систем действительных функций в области $G \subset R^4$ исследуется с помощью определителя Якоби (якобиана) системы (5.3).

$$\frac{D(w_1, w_2, w_3, w_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \frac{\partial w_1}{\partial x_3} & \frac{\partial w_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \frac{\partial w_2}{\partial x_3} & \frac{\partial w_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial w_3}{\partial x_1} & \frac{\partial w_3}{\partial x_2} & \frac{\partial w_3}{\partial x_3} & \frac{\partial w_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial w_4}{\partial x_1} & \frac{\partial w_4}{\partial x_2} & \frac{\partial w_4}{\partial x_3} & \frac{\partial w_4}{\partial x_4} \end{vmatrix} \tag{5.4}$$

Так, если этот определитель отличен от нуля в точках некоторой области, то в ней система функции является независимой.

Далее, пусть $\frac{dW}{dX} = F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$. Тогда (5.4), на основе условий Коши –Римана, перепишется так:

$$\frac{D(w_1, w_2, w_3, w_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \begin{vmatrix} f_1 & -f_2 & f_3 & -f_4 \\ f_2 & f_1 & f_4 & f_3 \\ f_3 & -f_4 & f_1 & -f_2 \\ f_4 & f_3 & f_2 & f_1 \end{vmatrix} = S^4(F). \tag{5.5}$$

Таким образом, вопрос независимости компонентов регулярной функции сводится к вычислению симплектического модуля ее производной.

Пример 5.2.1. Компоненты простейшей регулярной функции $W = X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ независимы во всем пространстве. Ее производная равна J_1, тогда $S^4(F) = S^4(J_1) = 1$.

Пример 5.2.2. Компоненты четырехмерной экспоненты, определяемые формулами (3.11), также независимы во всем пространстве, как некоторая система из четырех действительных функций. Действительно, $(e^X)' = e^X \Rightarrow S^4(F) = e^{4x_1} \neq 0$ во всем R^4.

Пример 5.2.3. Компоненты функции $W = \frac{1}{2}X^2$ независимы, как некоторая система из четырех действительных функций, только в областях, не содержащих вырожденные точки. Действительно, $W' = X \Rightarrow S^4(F) = S^4(X)$. Как известно, симплектический модуль вырожденного числа равен нулю.

Отметим, что задача определения независимости систем функций является непростой задачей анализа.

Этот вопрос очень важен, с точки зрения определения независимых интегралов движения в различных прикладных задачах теоретической физики и механики.

Мы видим, что в теории регулярных функций имеется удобный и достаточно простой признак определения независимости систем функций.

5.3 Восстановление регулярной функции по известной компоненте

Пусть известна только одна из компонент – к примеру, первая компонента некоторой регулярной функции $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in M_A(G)$.

Встает вопрос восстановления этой функции в целом, то есть, вопрос определения остальных трех неизвестных компонент.

Для решения такой задачи рассмотрим условия регулярности Коши –Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_4}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_4} = -\dfrac{\partial u_4}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_4} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_4}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_4} = -\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial u_4}{\partial x_1} \end{cases} \tag{5.6}$$

Без ограничения общности будем считать, что $\theta = (0,0,0,0) \in G$. Теперь из (5.6) выпишем соотношения, связывающие вторую компоненту с первой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = f_1, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = f_2, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_4} = f_3, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_4} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = f_4. \end{cases}$$

Отсюда сразу получим:

$$u_2 = \int_0^{x_1} f_1(\xi, x_2, x_3, x_4)d\xi + \int_0^{x_2} f_2(0, \eta, x_3, x_4)d\eta + \\ + \int_0^{x_3} f_3(0,0,\zeta,x_4)d\zeta + \int_0^{x_4} f_4(0,0,0,\omega)d\omega + C_2.$$

Выпишем из (5.6) соотношения, связывающие третью компоненту с первой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = g_1, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_4} = g_2, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = g_3, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_4} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = g_4. \end{cases}$$

Отсюда получим:

$$u_3 = \int_0^{x_1} g_1(\xi, x_2, x_3, x_4) d\xi + \int_0^{x_2} g_2(0, \eta, x_3, x_4) d\eta + \\ + \int_0^{x_3} g_3(0, 0, \zeta, x_4) d\zeta + \int_0^{x_4} g_4(0, 0, 0, \omega) d\omega + C_3.$$

И наконец, рассмотрим соотношения, связывающие четвертую компоненту с первой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_4}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_4} = h_1, \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = h_2, \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial x_3} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = h_3, \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial x_4} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = h_4. \end{cases}$$

Тогда:

$$u_4 = \int_0^{x_1} h_1(\xi, x_2, x_3, x_4) d\xi + \int_0^{x_2} h_2(0, \eta, x_3, x_4) d\eta + \\ + \int_0^{x_3} h_3(0, 0, \zeta, x_4) d\zeta + \int_0^{x_4} h_4(0, 0, 0, \omega) d\omega + C_4.$$

Таким образом, регулярная функция всегда определяется через одну из своих компонент, с точностью до трех действительных констант.

Далее, рассмотрим еще один немаловажный вопрос.

Условия (5.6) указывают на то, что наряду с основной регулярной функцией $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, удовлетворяющей этим условиям, существуют еще три, так называемые сопряженные регулярные функции, удовлетворяющие той же системе Коши –Римана.

Эти функции определяются, через основную функцию, в следующих формах:

$$\begin{cases} u^{(2)} = J_2 * u = (-u_2, u_1, -u_4, u_3), \\ u^{(3)} = J_3 * u = (u_3, u_4, u_1, u_2), \\ u^{(4)} = J_4 * u = (-u_4, u_3, -u_2, u_1). \end{cases} \tag{5.7}$$

Легко проверить, что компоненты всех трех функции из (5.7) удовлетворяют (5.6).

Таким образом, определив одну регулярную функцию, мы получим еще три, сопряженные с ней функции.

Это –четырехмерное обобщение известного факта из комплексного анализа: там определив какую–то аналитическую функцию, мы автоматически получаем еще одну – сопряженную аналитическую функцию.

С учетом вышеизложенного, запишем систему (5.7) в полной форме, включив туда основную функцию:

$$\begin{cases} u^{(1)} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \\ u^{(2)} = (-u_2, u_1, -u_4, u_3), \\ u^{(3)} = (u_3, u_4, u_1, u_2), \\ u^{(4)} = (-u_4, u_3, -u_2, u_1). \end{cases} \tag{5.8}$$

Таким образом, говоря о какой – нибудь регулярной функции, мы автоматически учитываем еще три функции, определяемые из соотношения (5.8). Ясно, что вся четверка принадлежит пространству регулярных функций – $M_A(G)$.

5.4 Разложение регулярной функции.

Очевидно, в любой фиксированной точке $X_0 \in R^4$, значение регулярной функции $u(X_0)$ является четырехмерным числом. Из Теоремы 2.5.2. следует, что это число представимо в виде суммы двух вырожденных чисел. Таким образом справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.4.1.

Произвольная регулярная функция $u(X) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ единственным путем представима в виде суммы двух вырожденных регулярных функции:

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4) = u^+ + u^- = \left(\frac{u_1 + u_3}{2}, \frac{u_2 + u_4}{2}, \frac{u_1 + u_3}{2}, \frac{u_2 + u_4}{2}\right) + \\ + \left(\frac{u_1 - u_3}{2}, \frac{u_2 - u_4}{2}, -\frac{u_1 - u_3}{2}, -\frac{u_2 - u_4}{2}\right). \quad (5.9)$$

Доказательство: Это утверждение доказывается аналогично Теореме 2.5.2.

Пример 5.4.2. Представить регулярную функцию $u(X) = X^2$ в виде суммы двух вырожденных функции.

Подставляя в (5.9) компоненты $u(X) = X^2$ из (3.1), легко найдем искомые вырожденные функций:

$$u^+ = [\frac{(x_1 + x_3)^2 - (x_2 + x_4)^2}{2}; (x_1 + x_3)(x_2 + x_4); \\ \frac{(x_1 + x_3)^2 - (x_2 + x_4)^2}{2}; (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)].$$

$$u^- = [\frac{(x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_4)^2}{2}; (x_1 - x_3)(x_2 - x_4); \\ -\frac{(x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_4)^2}{2}; -(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)].$$

Вырожденная функция принимает только вырожденные значения в точках R^4. Причем, они обе удовлетворяют условиям Коши –Римана, оставаясь регулярными функциями.

Глава 6

Приложения в математике

6.1 Системы нелинейных уравнений

Четырехмерный анализ применим для описания некоторых классов систем нелинейных алгебраических уравнений, разрешимых в замкнутом виде. Так, рассмотрим четырехмерное алгебраическое уравнение вида:

$$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + ... + A_{n-1} X^{n-1} + A_n X^n = \theta = (0,0,0,0). \quad (6.1)$$

Здесь: $A_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k) \in R^4; k = \overline{1,n}$ – заданные четырехмерные числа, а $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ –четырехмерное неизвестное число.

Определение 6.1.1. При $A_n \neq \theta$ уравнение (6.1) называется четырехмерным алгебраическим уравнением n –й степени.

Нетрудно понять, что при $n \geq 2$ такое уравнение будет эквивалентным некоторой нелинейной системе из четырех уравнений n –й степени, от четырех действительных неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4.

Например, при $n = 2$ развернутый вид (6.1) будет таким:

$$\begin{cases} \alpha_2(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) - 2\beta_2(x_1x_2 + x_3x_4) + 2\gamma_2(x_1x_3 - x_2x_4) + \\ \qquad -2\delta_2(x_1x_4 + x_2x_3) + \alpha_1x_1 - \beta_1x_2 + \gamma_1x_3 - \delta_1x_4 + \alpha_0 = 0; \\ \beta_2(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) + 2\alpha_2(x_1x_2 + x_3x_4) + 2\delta_2(x_1x_3 - x_2x_4) + \\ \qquad +2\gamma_2(x_1x_4 + x_2x_3) + \beta_1x_1 + \alpha_1x_2 + \delta_1x_3 + \gamma_1x_4 + \beta_0 = 0; \\ \gamma_2(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) - 2\delta_2(x_1x_2 + x_3x_4) + 2\alpha_2(x_1x_3 - x_2x_4) + \\ \qquad -2\gamma_2(x_1x_4 + x_2x_3) + \gamma_1x_1 - \delta_1x_2 + \alpha_1x_3 - \gamma_1x_4 + \gamma_0 = 0; \\ \delta_2(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) + 2\gamma_2(x_1x_2 + x_3x_4) + 2\beta_2(x_1x_3 - x_2x_4) + \\ \qquad +2\alpha_2(x_1x_4 + x_2x_3) + \delta_1x_1 + \gamma_1x_2 + \beta_1x_3 + \alpha_1x_4 + \delta_0 = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Соотношения (6.2) – это общий вид некоторого класса систем нелинейных алгебраических уравнений второй степени. Условия разрешимости такого класса систем мы можем получить на основе решения четырехмерного квадратного уравнения вида:

$$A_2X^2 + A_1X + A_0 = \theta = (0, 0, 0, 0). \tag{6.3}$$

Пусть A_2 –невырожденное число.Тогда, замыкая на спектре известные формулы Виета, получим четырехмерный вид решения этого уравнения:

$$X = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2A_0}}{2A_2}. \tag{6.4}$$

Из формулы (3.20) следует, что $\sqrt{A_1^2 - 4A_2A_0}$ имеет четыре значения, если под корнем невырожденное число. Тогда, формулой (6.4) определяются все четыре корня уравнения (6.3) .

Пример 6.1.2. Решим квадратное уравнение $X^2 - 3X + 2J_1 = 0$. Дискриминант этого уравнения $D = 9J_1^2 - 8J_1^2 = J_1^2 = J_1$, тогда:

$$X = \frac{3J_1 + \sqrt{J_1}}{2}.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} X^{(1)} = \dfrac{3J_1 + J_1}{2} = 2J_1 = (2, 0, 0, 0), \\ X^{(2)} = \dfrac{3J_1 - J_1}{2} = J_1 = (1, 0, 0, 0), \\ X^{(3)} = \dfrac{3J_1 + J_3}{2} = \dfrac{3}{2}J_1 + \dfrac{1}{2}J_3 = (\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 0), \\ X^{(4)} = \dfrac{3J_1 - J_3}{2} = \dfrac{3}{2}J_1 - \dfrac{1}{2}J_3 = (\dfrac{3}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}, 0). \end{cases} \tag{6.5}$$

После этого, становится очевидной справедливость следующего утверждения.

Лемма 6.1.3. Нелинейная система уравнений вида (6.2) разрешима тогда и только тогда, когда:

$$[(\alpha_2 + \gamma_2)^2 + (\beta_2 + \delta_2)^2][(\alpha_2 - \gamma_2)^2 + (\beta_2 - \delta_2)^2] \neq 0.$$

При выполнении этого условия, все ее действительные решения определяются из четырехмерной формулы (6.4).

Далее, замыкая на спектре формулы Кардано, можно описать некоторые классы систем нелинейных алгебраических уравнений третьей степени, разрешимых в замкнутой форме. В общем случае, приложение четырехмерного анализа к исследованию разрешимости систем нелинейных алгебраических уравнений будет связано с таким четырехмерным уравнением:

$$AX^n = B; A, B \in NS \subset R^4. \tag{6.6}$$

Лемма 6.1.4. Четырехмерное уравнение (6.6), а значит и соответствующая ему система из четырех нелинейных уравнений n –й степени, имеет ровно n^2 действительных решений.

Доказательство: Из (6.6) сразу получим: $X = \sqrt[n]{\frac{B}{A}}$, а корень из невырожденного числа имеет, согласно (3.20), ровно n^2 значений.

Лемма доказана.

Пример 6.1.5. Найти все действительные решения следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 3x_1x_3^2 - 3x_1x_4^2 - 6x_2x_3x_4 = 1 \\ x_2^3 - 3x_2x_1^2 - 3x_2x_3^2 + 3x_2x_4^2 - 6x_1x_3x_4 = 0 \\ x_3^3 + 3x_3x_1^2 - 3x_3x_2^2 - 3x_3x_4^2 - 6x_1x_2x_4 = 0 \\ x_4^3 - 3x_4x_1^2 + 3x_4x_2^2 - 3x_4x_3^2 - 6x_1x_2x_3 = 0 \end{cases} \tag{6.7}$$

Решение: Система имеет ровно девять действительных решений. Действительно, четырехмерная форма нелинейной системы (6.7) имеет очень простой вид: $X^3 = J_1$, поэтому из формулы кубического корня (3.21) получим следующие девять решений системы:

$$\begin{cases} (1,0,0,0)\,; \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right); \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right); \\ \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right); \\ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right); \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right); \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right). \end{cases}$$

6.2 Дополнения к таблицам сумм, рядов и произведений

Метод замыкания (на спектре четырехмерного числа) позволяет получать четырехмерные аналоги известных сумм, рядов и произведений. То есть, можно дополнить известные таблицы новыми, ранее неизвестными формулами.

Так, рассмотрим известную формулу из комплексного анализа, вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda};\, |\lambda| < 1. \tag{6.8}$$

Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ –невырожденное четырехмерное число, у которого все спектральные элементы находятся внутри круга $|\lambda| < 1$, то есть:

$$0 < (x_1+x_3)^2+(x_2+x_4)^2 < 1; 0 < (x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < S(X) < 1.$$

Для таких невырожденных чисел, замыкание формулы (6.8) на спектре дает ее четырехмерный аналог:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{J_1}{J_1 - X}; 0 < S(X) < 1. \tag{6.9}$$

Теперь подставив в обе части (6.9) тригонометрическую форму числа (3.16) можно получить четыре новые, ранее неизвестные суммы. Первая из них имеет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n [e^{n\beta} \cos n(\alpha+\gamma) + e^{-n\beta} \cos n(\alpha-\gamma)] =$$
$$= \frac{1 - Se^{\beta}\cos(\alpha+\gamma)}{[1 - Se^{\beta}\cos(\alpha+\gamma)]^2 + S^2 e^{2\beta}\sin^2(\alpha+\gamma)} +$$
$$+ \frac{1 - Se^{-\beta}\cos(\alpha-\gamma)}{[1 - Se^{-\beta}\cos(\alpha-\gamma)]^2 + S^2 e^{-2\beta}\sin^2(\alpha-\gamma)}. \tag{6.10}$$

Здесь все величины определены формулой (3.17). Легко показать, что (6.10) является обобщением известной суммы

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\alpha = \frac{1 - r\cos\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}. \tag{6.11}$$

Действительно, если $\beta = \gamma = 0 \Rightarrow S = r$, и (6.10) превращается в формулу (6.11).

Далее, рассмотрим известное бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4\lambda^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) = \cos\lambda. \tag{6.12}$$

Замыкая на спектре, получим его четырехмерный аналог:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(J_1 - \frac{4X^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) = \cos X. \tag{6.13}$$

Формула (6.13) дает четыре, ранее неизвестные бесконечные произведения. Первое из них выглядит так:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)}{(2n-1)^2\pi^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(x_1+x_3)\cosh(x_2+x_4) + \cos(x_1-x_3)\cosh(x_2-x_4)\right]. \tag{6.14}$$

Это – четырехмерное обобщение (6.12). Действительно, приняв в последней формуле $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, мы получим предыдущую.

Таким путем можно получить большое количество новых формул, дополняющих известные таблицы интегралов, рядов и произведений.

6.3 Точные решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим в некоторой области $G \subset R^4$ четырехмерное уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_4^2} = 0. \tag{6.15}$$

В классической математике, различные решения этого уравнения ищутся в виде объемного или поверхностных потенциалов, где ядром многомерного интеграла служит фундаментальное решение этого уравнения:

$$E(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}. \tag{6.16}$$

То есть, решения основных задач для уравнения Лапласа пишутся в виде интегралов достаточно сложного вида. Весьма существенным здесь является и тот факт, что фундаментальное решение (6.16) получено на основе чисто евклидовых воззрений на структуру пространства R^4. А нам известно, что геометрия четырехмерного пространства в целом не евклидова.

Четырехмерный анализ дает нам новые возможности. Ранее выявлено, что любая из компонент регулярной функции $u(X) \in M_A(G)$ удовлетворяет уравнению (6.15) в этой области. То есть, сейчас мы получили возможность изучения дифференциальных свойств целого континуума точных решений уравнения Лапласа.

Рассмотрим к примеру, первую компоненту четырехмерной экспоненты.

$$u_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left[e^{x_1+x_3}\cos(x_2+x_4) + e^{x_1-x_3}\cos(x_2-x_4)\right]. \quad (6.17)$$

Гармоническая функция (6.17) имеет замечательные свойства, выгодно отличающие ее от привычных нам гармонических функций, в виде различных интегралов с ядром (6.16). Во –первых (6.17) функция составного типа, кроме уравнения Лапласа она удовлетворяет различным гиперболическим и эллиптическим уравнениям.

Как мы уже говорили, этим можно охватить дуальные, корпускулярно –волновые свойства физических явлений. Во –вторых, мы знаем о свойствах периодичности этой функции.

Вообще говоря, любое решение уравнения (6.15) априори является компонентой какой–то четырехмерной функции $U(X) \in C^2M(G)$. Но такая функция является пределом некоторой последовательности регулярных функций. Таким образом, любая гармоническая на компакте функция является пределом некоторой последовательности, состоящей из компонент регулярных функций.

Далее, из условий Коши –Римана можно получить следующие свойства произвольной регулярной функции:

$$\frac{\partial^4 u_k}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u_k}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_k}{\partial x_2^4} = 0; k = \overline{1,4}. \quad (6.18)$$

Это – бигармоническое уравнение, часто встречающееся в задачах теории упругости. Теперь мы можем указать континуум точных решений и этого уравнения, имеющих простой аналитический вид.

И наконец, можно применять и свойство гиперболичности компонент регулярной функций по различным парам переменных:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_3^2}; k = \overline{1,4}. \tag{6.19}$$

При решении задач гидродинамики, теории упругости и т.д., это свойство с успехом может быть использовано, вкупе с другими свойствами, подчеркивающими составной тип четырехмерной регулярной функции.

Резюмируя можно констатировать следующее: регулярные функции четырехмерного аргумента, по своей сути являясь составными функциями, напрямую применимы к изучению различных систем дифференциальных уравнений составного типа.

Действительно, в следующей главе книги мы увидим приложение методов ТФЧП к решению сложных, нелинейных систем дифференциальных уравнений гидродинамики, имеющих составной тип. Причем, в некоторых случаях удается получить явные аналитические решения начально – краевых задач.

6.4 Четырехмерная сфера Римана

В комплексном анализе используется понятие сферы Римана конечного радиуса, расположенной в R^3. Между множеством точек этой сферы и множеством точек всей расширенной комплексной плоскости устанавливается взаимно – однозначное соответствие (стереографическая проекция) [17]. Эти множества точек эквивалентны.

Мы хотим выяснить вопрос о существовании какой – либо гиперповерхности R^4, множество точек которой биективно сопоставимо с множеством точек всего трехмерного пространства R^3. Если таковая существует, то она и станет четырехмерным аналогом сферы Римана. Здесь, в отличие от комплексного случая, отсутствуют явные геометрические образы. Тем не менее, соответствующий подход имеется.

Материалы разделов 2.4 и 2.5 данной монографии подсказывают, что на такую роль претендует гиперповерхность $H_0 : x_1x_3 + x_2x_4 = 0$. Согласно теореме 2.2.2., она состоит, кроме четырехмерного нуля, только из невырожденных точек и на ней имеет место: $\|X\| = \sum x_k^2$. То есть, полноценную евклидову структуру имеет только она.

Теорема 6.4.1. Между множеством точек особой гиперповерхности $H_0 \in R^4$ и множеством всех точек R^3 существует биекция.

Доказательство: Все точки $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in H_0$, кроме нулевой точки $\theta = (0, 0, 0, 0) \in H_0$, являются невырожденными числами. Поэтому для них справедлива тригонометрическая форма невырожденного числа, вида (3.16)–(3.17). Причем, в точках этой гиперповерхности, эти формулы имеют наиболее простой вид. Так, параметр β равен нулю для всех, невырожденных точек этой гиперповерхности, ибо:

$$\beta = \frac{1}{4} \ln \frac{(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2}{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2} = \frac{1}{4} \ln 1 = 0. \tag{6.20}$$

В (6.20) мы учли уравнение гиперповерхности: $x_1x_3 + x_2x_4 = 0$. Тогда, тригонометрическая форма приозвольной точки этой гиперповерхности (кроме нуля) примет простейший вид:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\sum x_k^2} \cos\alpha \cos\gamma, \\ x_2 = \sqrt{\sum x_k^2} \sin\alpha \cos\gamma, \\ x_3 = -\sqrt{\sum x_k^2} \sin\alpha \sin\gamma, \\ x_4 = \sqrt{\sum x_k^2} \cos\alpha \sin\gamma, \end{cases} \tag{6.21}$$

где:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} + \arctan \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_3} \right),$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\arctan\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3} - \arctan\frac{x_2-x_4}{x_1-x_3}\right).$$

С другой стороны, координаты ненулевой точки $M(x, y, z) \in R^3$, в прикладной сферической системе координат запишутся так:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\cos\theta, \\ z = r\sin\theta, \end{cases} \tag{6.22}$$

где: r – длина радиуса –вектора, φ –угол долготы, θ – угол широты. Теперь ясно, что биекцию между множествами H_0 и R^3 можно задать с помощью следующих соотношений:

$$\begin{cases} \theta = (0,0,0,0) \in H_0 \Leftrightarrow O(0,0,0) \in R^3, \\ \sqrt{\sum x_k^2} \Leftrightarrow r, \\ \alpha \Leftrightarrow \varphi; \gamma \Leftrightarrow \theta. \end{cases} \tag{6.23}$$

Таким образом, любая ненулевая точка $M(r, \varphi, \theta) \in R^3$ переходит в точку $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in H_0$, с координатами:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\cos\theta = x, \\ x_2 = r\sin\varphi\cos\theta = y, \\ x_3 = -r\sin\varphi\sin\theta, \\ x_4 = r\cos\varphi\sin\theta. \end{cases} \tag{6.24}$$

С другой стороны, любая ненулевая точка $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in H_0$ переходит в точку $M(x, y, z) \in R^3$ с координатами:

$$\begin{cases} x = x_1, \\ y = x_2, \\ z = \sqrt{\sum x_k^2}\sin\gamma. \end{cases} \tag{6.25}$$

Этим определяется биекция между множествами H_0 и R^3 . **Теорема доказана.**

Мы доказали, что единственным четырехмерным аналогом сферы Римана является гиперповерхность $H_0 : x_1x_3 + x_2x_4 = 0 \in R^4$.

Пример 6.4.2.

Найти образ обычной трехмерной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ на гиперповерхности $H_0 \in R^4$.

Решение: Используя формулы (6.23) – (6.25) легко найдем, что искомый образ есть множество всех точек $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, компоненты которых удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, \\ \qquad\quad x_1x_3 + x_2x_4 = 0. \end{cases} \tag{6.26}$$

Таким образом, искомое множество есть пересечение четырехмерной евклидовой сферы с гиперповерхностью $H_0 \in R^4$.

Особо подчеркнем следующий факт. Из теоремы (6.4.1) следует, что образ любого множества точек $M \subset R^3$ есть множество $N \subset H_0$. При этом, открытые множества M переходят в открытые множества N, замкнутые – в замкнутые. Очевидно, что ограниченные в смысле евклидовой нормы (в R^3) множества переходят в ограниченные подмножества из H_0 в смысле спектральной нормы (2.2), которая в H_0 совпадает с обычной евклидовой нормой (Теорема 2.2.2).

Далее, выявленная биекция между $H_0 \subset R^4$ и всем R^3 приводит к многочисленным приложениям, с точки зрения теоретической физики (механики). Теперь, любому движению в трехмерном пространстве можно однозначно сопоставить движение в H_0 и, наоборот.

То есть, любые трехмерные уравнения движения теперь можно переписать в четырехмерной форме. Вполне возможно, что четырехмерный вид уравнений проще поддается решению. Этому будут способствовать исключительные свойства симметрии четырехмерного пространства, которых нет в трехмерном евклидовом пространстве.

6.5 Функции Эйлера и Римана

В приложениях ТФКП особую роль играют две специальные функции анализа: гамма – функция Эйлера и дзета – функция Римана. Пусть $z = x_1 + ix_2$ – комплексная переменная.Тогда при $x_1 > 0$ имеет место формула:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{6.27}$$

Функцию $\Gamma(z)$ называют гамма – функцией Эйлера. Известны следующие свойства этой функции [17]:

$$\begin{cases} \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \\ \Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z), \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \end{cases} \tag{6.28}$$

Свойства (6.28) вполне характеризуют функцию $\Gamma(z)$. То есть, любая другая функция комплексного переменного, имеющая такие же свойства, тождественна с гамма –функцией (6.27).

Далее, продолжение функции (6.27) на всю расширенную комплексную плоскость имеет следующий вид:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{6.29}$$

Расширенный аналог гамма – функции (6.29) представляет собой однозначную и аналитическую функцию во всей конечной плоскости, исключая счетное множество точек $z = (0, -1, -2, .., -n, ...)$, в которых она имеет простые полюсы.

Теперь мы определим четырехмерный аналог гамма – функции Эйлера. Это будет регулярной четырехмерной функцией в некоторой области. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ – произвольная точка пространства. Тогда она имеет спектральные элементы вида:

$$\lambda_1(X) = x_1 + x_3 + i(x_2 + x_4); \lambda_2(X) = x_1 + x_3 - i(x_2 + x_4)$$
$$\lambda_3(X) = x_1 - x_3 + i(x_2 - x_4); \lambda_4(X) = x_1 - x_3 - i(x_2 - x_4).$$

Если все эти спектральные элементы попадут в область комплексной плоскости $Rez > 0$, то соотношение (6.27) будет определено на спектре числа $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$. Тогда, замыкая на спектре, получим следующий четырехмерный аналог (6.27):

$$\Gamma(X) = \int_0^\infty e^{-t} t^{X-1} dt \tag{6.30}$$

То есть, в некоторой области $\Omega \subset R^4$ можно определить четырехмерную гамма –функцию Эйлера. Очевидно, Ω – это множество всех четырехмерных точек с компонентами, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_3 > 0; x_1 - x_3 > 0 \\ \quad -\infty < x_2, x_4 < +\infty \end{cases} \tag{6.31}$$

В области $\Omega \subset R^4$ найденная функция $\Gamma(X)$ является регулярной четырехмерной функцией от четырехмерного переменного $X \in \Omega$. Ее компоненты можно получить, используя формулу (3.14) для четырехмерной показательной функции.

Пусть: $\Gamma(X) = [\Gamma_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4]$, тогда:

$$\Gamma_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int_0^\infty e^{-t} h_k(t, x_1, x_2, x_3, x_4) dt; k = \overline{1, 4}, \tag{6.32}$$

где:

$$h_1 = \frac{1}{2}\left[t^{x_1+x_3-1}\cos((x_2 + x_4)lnt) + t^{x_1-x_3-1}\cos((x_2 - x_4)lnt)\right],$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\left[t^{x_1+x_3-1}\sin((x_2+x_4)lnt) + t^{x_1-x_3-1}\sin((x_2-x_4)lnt)\right],$$

$$h_3 = \frac{1}{2}\left[t^{x_1+x_3-1}\cos((x_2+x_4)lnt) - t^{x_1-x_3-1}\cos((x_2-x_4)lnt)\right],$$

$$h_4 = \frac{1}{2}\left[t^{x_1+x_3-1}\sin((x_2+x_4)lnt) - t^{x_1-x_3-1}\sin((x_2-x_4)lnt)\right]. \quad (6.33)$$

Четырехмерная функция, определенная формулами (6.33), является регулярной функцией относительно составной переменной X, дополнительно зависящей от параметра t.

Теперь, замыкая на спектре формулы (6.28), $\forall X \in \Omega \subset R^4$, получим следующие свойства четырехмерной гамма – функции:

$$\begin{cases} \Gamma(X+1) = X\Gamma(X), \\ \Gamma(X)\Gamma(X+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2X-1}}\Gamma(2X), \\ \Gamma(X)\Gamma(1-X) = \frac{\pi}{\sin \pi X}. \end{cases} \quad (6.34)$$

Таким образом, четырехмерная гамма – функция сохраняет все свойства своего двумерного аналога. Вместе с тем, $\Gamma(X)$ обладает массой дополнительных свойств (Теорема 4.2.1), являясь функцией составного типа. Поэтому она чрезвычайно важна, с точки зрения приложений в прикладных задачах анализа, механики и физики.

Далее, формула (6.29) верна всюду на комплексной плоскости. Это означает, что она определена на спектре $\forall X \in R^4$. Поэтому, замыкая (6.29) на спектре, мы получим продолженную на все R^4 четырехмерную гамма – функцию, следующего вида:

$$\Gamma(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(X+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{X-1}dt \quad (6.35)$$

Расширенный аналог гамма – функции представляет собой однозначную и регулярную функцию во всем пространстве R^4, исключая счетное множество точек, в которых она имеет простые полюсы. Легко понять, что простыми полюсами являются следующие точки:

$$X_0 = \theta = (0,0,0,0); X_1 = (-1,0,0,0); ...X_n = (-n,0,0,0); ... \quad (6.36)$$

Отсюда ясно, что она не имеет нулей во всем R^4, бесконечно дифференцируема по составной переменной X во всех точках пространства, кроме полюсов (6.36). Другие свойства $\Gamma(X)$ пока не исследованы.

Теперь перейдем к дзета – функции Римана [24]. В комплексном анализе дзета – функция задается с помощью ряда:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + ..\frac{1}{n^z} + ... \quad (6.37)$$

Ряд (6.37) сходится в полуплоскости $Rez > 1$, являясь там аналитической функцией комплексного переменного z. В области ее аналитичности имеет место формула Эйлера, в виде бесконечного произведения:

$$\zeta(z) = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - p^{-z}}. \quad (6.38)$$

В (6.38) бесконечное произведение берется по всем простым числам:

$$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13...$$

Далее, на полосу $0 < Rez < 1$ дзета – функция распространяется с помощью следующей формулы:

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} + \int_1^{+\infty} \left(t^{\frac{z}{2}-1} + t^{\frac{1-z}{2}-1} \right) \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi k^2 t} dt. \quad (6.39)$$

И наконец, дзета – функция распространяется на левую полуплоскость $Rez < 0$, с помощью следующего соотношения:

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z)\zeta(1-z). \quad (6.40)$$

В итоге, дзета – функция определится во всей комплексной плоскости, кроме одной точки $z = 1$, в которой имеется простой полюс первого порядка. Это видно из формулы (6.39). Известно [24], что в левой полуплоскости $Rez < 0$ продолженная формулой (6.40) дзета функция имеет так называемые тривиальные нули в следующих точках: $z = -2, -4, -6..., -2n, ...$ В правой полуплоскости $Rez > 0$ она не имеет вещественных корней. Доказано, что все нетривиальные комплексные корни находятся в критической полосе $0 < Rez < 1$, симметрично относительно вещественной оси и относительно вертикали $Rez = \frac{1}{2}$.

Теперь мы получим четырехмерное обобщение этой функции. Пусть $\Upsilon \subset R^4$ – это множество таких точек $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, компоненты которых подчинены следующим соотношениям:

$$\Upsilon : \begin{cases} x_1 + x_3 > 1; x_1 - x_3 > 1; \\ -\infty < x_2, x_4 < +\infty. \end{cases} \tag{6.41}$$

Ясно, что формулы (6.37) и (6.38) определены на спектре $\forall X \in \Upsilon$. Поэтому, замыкая их на спектре, получим следующие два определения четырехмерной дзета – функции Римана:

$$\zeta(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^X} = 1 + \frac{1}{2^X} + \frac{1}{3^X} + ..\frac{1}{n^X} + ... \tag{6.42}$$

$$\zeta(X) = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - p^{-X}}. \tag{6.43}$$

Эквивалентные формулы (6.42),(6.43) определяют регулярную в области $\Upsilon \subset R^4$ четырехмерную функцию. Распишем подробно (6.42), используя формулу (3.14) для показательной функции.

Таким образом, $\zeta(X) = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$, где:

$$\begin{cases} \zeta_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{-(x_1+x_3)}\cos((x_2+x_4)lnn) + n^{-(x_1-x_3)}\cos((x_2-x_4)lnn)\right], \\ \zeta_2 = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{-(x_1+x_3)}\sin((x_2+x_4)lnn) + n^{-(x_1-x_3)}\sin((x_2-x_4)lnn)\right], \\ \zeta_3 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{-(x_1+x_3)}\cos((x_2+x_4)lnn) - n^{-(x_1-x_3)}\cos((x_2-x_4)lnn)\right], \\ \zeta_4 = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{-(x_1+x_3)}\sin((x_2+x_4)lnn) - n^{-(x_1-x_3)}\sin((x_2-x_4)lnn)\right]. \end{cases} \tag{6.44}$$

Из формул (6.44) видно, что четырехмерная дзета – функция $\zeta(X)$, как и все регулярные функции, представима в виде суммы двух вырожденных регулярных функции (Теорема 5.4.1), то есть:

$$\begin{cases} \zeta_1 = f(x_1+x_3, x_2+x_4) + f(x_1-x_3, x_2-x_4), \\ \zeta_2 = g(x_1+x_3, x_2+x_4) + g(x_1-x_3, x_2-x_4), \\ \zeta_3 = f(x_1+x_3, x_2+x_4) - f(x_1-x_3, x_2-x_4), \\ \zeta_4 = g(x_1+x_3, x_2+x_4) - g(x_1-x_3, x_2-x_4). \end{cases} \tag{6.45}$$

Далее, мы ничего не можем сказать о периодичности $\zeta(X)$. Хотя видно, что в формуле (6.44) каждый член ряда является периодической функцией. Но сумма бесконечного ряда может и не обладать такими свойствами. Этот вопрос требует более тщательных исследований. Теперь, замыкая на спектре формулу (6.39), можно получить следующее соотношение.

$$\pi^{-\frac{X}{2}}\Gamma(\frac{X}{2})\zeta(X) = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X} + \int_1^{+\infty} \left(t^{\frac{X}{2}-1} + t^{\frac{1-X}{2}-1}\right)\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi k^2 t}dt. \tag{6.46}$$

Эта формула представляет собой распространение четырехмерной дзета – функции на область вида:

$$\Upsilon^+ : \begin{cases} 0 < x_1 + x_3 < 1; 0 < x_1 - x_3 < 1; \\ \qquad\qquad -\infty < x_2, x_4 < +\infty. \end{cases} \tag{6.47}$$

Наконец, рассмотрим следующую область четырехмерного пространства:

$$\Upsilon^- : \begin{cases} x_1 + x_3 < 0; x_1 - x_3 < 0; \\ \qquad -\infty < x_2, x_4 < +\infty. \end{cases}$$

В ней справедлив четырехмерный аналог формулы (6.40):

$$\zeta(X) = 2^X \pi^{X-1} \sin \frac{\pi X}{2} \Gamma(1 - X)\zeta(1 - X). \tag{6.48}$$

Итак, четырехмерная дзета – функция также определена во всем R^4.
Утверждение 6.5.1. В области $\Upsilon^- \subset R^4$ продолженная формулой (6.48) дзета функция $\zeta(X)$ имеет тривиальные нули только в следующих точках: $X = -2, -4, -6..., -2n, ...$

Теперь рассмотрим область $(\Upsilon \bigcup \Upsilon^+) \subset R^4$. Она в спектральном смысле соответствует правой полуплоскости $Rez > 0$ комплексной плоскости. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6.5.2. В области $(\Upsilon \bigcup \Upsilon^+) \subset R^4$ дзета функция $\zeta(X)$ не имеет действительных корней.

На этом завершаем изложение раздела. Необходимо лишь отметить, что четырехмерные функции $\zeta(X)$ и $\Gamma(X)$, сохраняют все свойства своих двумерных аналогов. Вместе с тем, они априори должны обладать рядом дополнительных свойств, которых нет в двумерном случае. Это – предмет дополнительного анализа.

Глава 7

Приложения в механике и теоретической физике

Четырехмерный анализ напрямую применим для исследования математических моделей механики (теоретической физики). И это легко объяснимо. Известно, что искомые функции в наиболее полных, нестационарных моделях – это действительные функции от четырех действительных переменных: плотность $\rho(t, x, y, z)$ и т.д.

Исходя из физического смысла, искомые группируются в виде различных 4 – векторов – функции.Так, имеются определения понятий 4 – вектора скорости, импульса и других физических величин.[19]

Они задают, в точках четырехмерного пространства – времени, ключевые физические (векторные) поля. Нетрудно понять, что с точки зрения четырехмерного анализа, все гладкие 4 –векторы теоретической физики (механики) – это просто элементы какого – то основного пространства четырехмерных функций, изученные нами в разделе 3.4 данной книги.

Этим и объясняется значимость ТФЧП в механике и теоретической физике. Далее мы убедимся, что именно класс регулярных функций $M_A(G)$ окажется ключевым, при исследовании различных физических задач. Важнейшим свойством этого класса является то, что физические величины, определяемые через компоненты регулярной функции, будут автоматически подчинены принципу детерминированности, то есть такие физические величины однозначно определяются через свои начальные значения.

Весьма существенно то, что появляются элементарные способы доказательства форминвариантности законов теоретической физики (механики), на основе четырехмерных подходов.

7.1 Уравнение неразрывности и 4 – векторы физики

Уравнение неразрывности является ключевым уравнением всей теоретической физики (механики). Действительно, оно содержится, явно или неявно, в составах абсолютного большинства математических моделей, являясь математическим выражением физического закона сохранения количества вещества (массы).[19]

Можно показать, что именно это уравнение является ключом к исследованию других, внешне более сложных уравнений движения, одновременно с ним входящих в составы различных моделей гидродинамики, квантовой механики, электродинамики и т.д. Оказалось, что именно оно определяет понятие 4 – вектора скорости физики.

В произвольной области $G \subset R^4$ рассмотрим общее уравнение неразрывности гидродинамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{7.1}$$

Здесь: ρ – искомая плотность, u, v, w – искомые компоненты скорости жидкости (газа).

Сейчас покажем, что уравнение (7.1) естественным путем приводит нас к понятию 4–вектора скорости в гидродинамике. Действительно, пусть $\vec{V} = (u, v, w)$ – обычный трех – вектор скорости, принятый в гидродинамике. Перепишем (7.1) в такой форме [20]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho div \vec{V} = 0. \tag{7.2}$$

Теперь, введем новую неизвестную функцию $\theta(t, x, y, z)$, с помощью соотношения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = \frac{\rho}{c} \frac{\partial \theta}{\partial t}. \tag{7.3}$$

Здесь: c – характерная скорость течения. Из теории размерностей элементарно следует, что $\theta(t, x, y, z)$ имеет размерность скорости. Подставив правую часть (7.3) в уравнение (7.2), мы получим новое уравнение, содержащее четыре скорости:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{7.4}$$

Уравнение (7.4) имеет ключевое значение. Оно явно показывает, что не только в сугубо специфических разделах теоретической физики [19], но и в гидродинамике, совершенно естественным путем появляется понятие 4 – вектора скорости. С точки зрения четырехмерного анализа это – некоторая, гладкая четырехмерная функция $U = (\theta, u, v, w) \in C^1[M(G)]$.

Мы отчетливо видим, что доселе неиспользуемое в гидродинамике понятие 4 – вектора скорости – это естественное следствие (неизбежный атрибут) закона сохранения массы.

Отсюда вывод: При исследованиях нестационарных задач гидродинамики мы имеем дело не только с обычным 3 – вектором скорости $\vec{V} = [u(t, x, y, z), v, w]$. Здесь неизбежно и обоснованно появляется полноценный 4 – вектор скорости вида $\vec{V}_{4d} = [\theta, u, v, w]$. Очевидно, что это естественный порядок вещей, прямо подтверждаемый уравнением неразрывности.

Далее, наличие 4 –вектора скорости указывает на то, что в гидродинамике обоснованно определяется и понятие 4 – ускорения $\vec{a}_{4d}$.

Нетрудно понять, что компоненты 4 – вектора $\vec{a}_{4d} = (a_0, a_x, a_y, a_z)$ определяются как субстанциональные производные от компонент 4 – вектора скорости:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{\partial\theta}{\partial t} + u\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + v\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + w\dfrac{\partial\theta}{\partial z}, \\ a_x = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ a_y = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ a_z = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases} \tag{7.5}$$

Но тогда 4 – вектор силы равен: $\vec{F}_{4d} = (ma_0, ma_x, ma_y, ma_z)$, где m – масса, то есть, мы получим 4 –мерный аналог общеизвестного, второго закона Ньютона в виде:

$$m\vec{a}_{4d} = \vec{F}_{4d}. \tag{7.6}$$

Мы видим, что различные 4 – векторы вполне естественно появляются в гидродинамике. Но тогда они появятся и в других разделах механики (теоретической физики), где каким –то образом (явно или неявно) присутствует уравнение неразрывности.

С точки зрения четырехмерного анализа, любой 4 –вектор физики – суть четырехмерная функция из основного класса $C[M(G)]$. Тогда обычный трех вектор (скорости, силы и т.д) будет воспринимается нами как своеобразная тройка, составленная из компонент соответствующего 4 –вектора физики по какому – то, известному правилу.

При этом, четвертая компонента 4 – вектора остается вне нашего поля зрения. Ясно, что по физическому смыслу изучаемого явления, она присутствует всегда, так сказать, независимо от нашего желания. Это и так понятно, ведь все физические процессы происходят в четырехмерном пространственно – временном континууме.

Рассмотрим это на примере потенциала скорости, используемого в гидродинамике. В нестационарных моделях гидродинамики рассматривается гладкая, скалярная функция $\varphi(t,x,y,z)$ [20]. Затем, с ее помощью определяются компоненты потенциального 3 –х вектора скорости безвихревого течения:

$$\vec{V} = (u,v,w) = \nabla\varphi(t,x,y,z). \tag{7.7}$$

При таком подходе, четвертая компонента $\theta(t,x,y,z)$, истинного 4 – вектора скорости, определяемого из уравнения (7.4), остается неучтенной. Вполне резонно считать, что в этой задаче присутствует полноценный 4 –вектор скорости, определяемый формулой:

$$\vec{V}_{4d} = (\theta,u,v,w) = \nabla_4\varphi(t,x,y,z) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t};\frac{\partial\varphi}{\partial x};\frac{\partial\varphi}{\partial y};\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \tag{7.8}$$

Итак мы выявили, что все разделы теоретической физики (механики), априори будут связаны с понятием 4 –вектора, ибо везде присутствует уравнение неразрывности. То есть, такое понятие присуще не только релятивисткой механике, электродинамике или общей теории относительности. Оно органично связано также с гидродинамикой, небесной механикой и другими разделами физики.

7.2 О форминвариантности законов физики

Интересующие нас 4 –векторы входят в составы различных уравнений (систем уравнений), выводимых из ключевых законов механики (физики). Важнейший вопрос при этом – это доказательство форминвариантности этих уравнений относительно систем отсчета.

Пусть в переменных исходной инерциальной системы отсчета записано некое уравнение, описывающее реальный закон механики (физики). Допустим, что мы осуществили линейное, неособое преобразование четырехмерного пространства, то есть, от исходной перешли к новой системе координат. Тогда в новых, преобразованных переменных, исходное уравнение должно сохранять свою первоначальную форму. Это – принципиальной важности факт, ибо законы физики не зависят от выбора инерциальной системы отсчета.

Данный вопрос напрямую связан с линейными преобразованиями (движениями), описанными в разделе 2.4 данной книги. Мы покажем, что с точки зрения четырехмерного анализа, все законы механики (физики) форминвариантны всегда.

Теорема 7.2.1. Относительно преобразований вида (2.7) и (2.8) все уравнения механики (физики) форминвариантны на всех основных пространствах 4 –векторов из $C^m[M(G)], m = \overline{0, N}$.

Доказательство.

Утверждение докажем для всюду плотного множества. Итак, пусть $u = [u_1(x_1, x_2, x_3, x_4), u_2, u_3, u_4] \in M_A(G)$ – произвольная регулярная функция, используемая в качестве некоего 4 –вектора физики. Тогда $u' = [u'_1(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), u'_2, u'_3, u'_4]$ – это ее преобразованный вид в новой системе координат, который, согласно (2.7), определяется так:

$$u'_1 = \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \varepsilon_4 u_4,$$

$$\begin{aligned} u'_2 &= -\varepsilon_2 u_1 + \varepsilon_1 u_2 - \varepsilon_4 u_3 + \varepsilon_3 u_4, \\ u'_3 &= \varepsilon_3 u_1 + \varepsilon_4 u_2 + \varepsilon_1 u_3 + \varepsilon_2 u_4, \\ u'_4 &= -\varepsilon_4 u_1 + \varepsilon_3 u_2 - \varepsilon_2 u_3 + \varepsilon_1 u_4. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Далее, из формулы (2.8) мы легко получим следующие формулы замены производных:

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} = \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \varepsilon_4 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_2} = -\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \varepsilon_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_3} = \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4'} = -\varepsilon_4\frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon_3\frac{\partial}{\partial x_2} - \varepsilon_2\frac{\partial}{\partial x_3} + \varepsilon_1\frac{\partial}{\partial x_4}. \tag{7.10}$$

Теперь легко вычислим производную в новых переменных:

$$\frac{\partial u_1'}{\partial x_1'} = \varepsilon_1\frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \varepsilon_4 u_4) +$$
$$+ \varepsilon_2\frac{\partial}{\partial x_2}(\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \varepsilon_4 u_4) + \varepsilon_3\frac{\partial}{\partial x_3}(\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \varepsilon_4 u_4) +$$
$$+ \varepsilon_4\frac{\partial}{\partial x_4}(\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \varepsilon_4 u_4) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

При преобразованиях мы учитывали обобщенные условия Коши – Римана (3.4) и соотношения, обеспечивающие невырожденное, ортогональное преобразование R^4 в самого себя:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \varepsilon_k^2 = 1, \\ \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4 = 0. \end{cases} \tag{7.11}$$

Теперь совершенно аналогичным путем доказываются равенства производных любого вида:

$$\frac{\partial u_k'}{\partial x_m'} = \frac{\partial u_k}{\partial x_m}; k, m = \overline{1, 4}. \tag{7.12}$$

Отсюда следует форминвариантность смешанных производных любого порядка для компонентов регулярной функции, при движениях четырехмерного пространства по формулам (2.7) и (2.8).

То есть, какие –бы производные не содержало уравнение механики (физики) в исходной системе координат, его преобразованный вид будет точно таким же, но уже в новых переменных. Теперь, замыкая в нормах вида (3.26), мы убеждаемся в справедливости утверждения теоремы для любого 4 – вектора из основных классов.

Теорема доказана.

В Теореме заложен ключевой смысл. Она говорит о том, что все 4 –векторы, взятые из основных пространств, априори обеспечивают форминвариантность законов физики и механики относительно движений четырехмерного пространства по формулам (2.7) – (2.8). Без разницы, что это уравнение из механики Ньютона, уравнение Шредингера из квантовой механики, уравнения Максвелла из электродинамики и т.д. При этом уравнение может быть и нелинейным.

Пример 7.2.2. Покажем форминвариантность нелинейных уравнений Эйлера в гидродинамике:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} + V_1\dfrac{\partial V_1}{\partial x} + V_2\dfrac{\partial V_1}{\partial y} + V_3\dfrac{\partial V_1}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = F_1(x, y, z) \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + V_1\dfrac{\partial V_2}{\partial x} + V_2\dfrac{\partial V_2}{\partial y} + V_3\dfrac{\partial V_2}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = F_2(x, y, z) \\ \dfrac{\partial V_3}{\partial t} + V_1\dfrac{\partial V_3}{\partial x} + V_2\dfrac{\partial V_3}{\partial y} + V_3\dfrac{\partial V_3}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = F_3(x, y, z) \end{cases}$$

с условием неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_3)}{\partial z} = 0.$$

Все неизвестные скалярные функции, входящие в данную систему уравнений, являются компонентами некоторых четырехмерных функции из класса $C^1[M(G)]$. Но любая четырехмерная функция этого класса сколь –угодно точно аппроксимируется компонентами регулярных функции из класса $M_A(G)$.

То есть, любая из неизвестных функций $(V_1, V_2, V_3, P, \rho, \rho V_1, \rho V_2, \rho V_3)$ сколь – угодно точно аппроксимируется компонентой какой –то регулярной функций, на основе равномерной, покомпонентной нормы (3.26). Теперь, из Теоремы 7.2.1 легко следует форминвариантность системы Эйлера, относительно любых движений пространства по формулам (2.7) и (2.8).

7.3 Принцип детерминированности и общее решение уравнения неразрывности

Ранее мы выявили тот факт, что уравнение (7.1) эквивалентно системе уравнений (7.3) –(7.4). Сперва покажем метод решения уравнения (7.4). Пусть c –характерная скорость, L – характерный размер течения. Введем четырехмерное переменное число $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, следующим путем:

$$x_1 = \frac{x}{L}; x_2 = \frac{y}{L}; x_3 = \frac{ct}{L}; x_4 = \frac{z}{L}. \tag{7.13}$$

Ясно, что (7.13) определяет безразмерное, переменное число из R^4.

Далее, произведем замену четырех неизвестных функции из уравнения (7.4) на одну четырехмерную, безразмерную, неизвестную функцию $U = (U_1, U_2, U_3, U_4) \in C^1[M(G)]$ так:

$$u = cU_1(x_1, x_2, x_3, x_4); v = cU_2; \theta = cU_3; w = cU_4. \tag{7.14}$$

Тогда, формулы дифференцирования сложной функции дают следующие результаты:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{c^2}{L}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c}{L}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}; \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{c}{L}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}; \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{c}{L}\frac{\partial U_4}{\partial x_4}. \tag{7.15}$$

Отсюда нетрудно понять, что уравнение (7.4), относительно новых неизвестных, перепишется в виде одного четырехмерного уравнения:

$$Div_4 U = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} + \frac{\partial U_4}{\partial x_4} = 0. \tag{7.16}$$

Уравнение (7.16) полностью совпадает с уравнением (4.21). Поэтому справедливо следующее утверждение, получаемое автоматически из соотношений (4.26).

Теорема 7.3.1.

Пусть:

1. $SP = (\alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1)$ – набор разрешающих параметров–скаляров, удовлетворяющих условию: $\delta\delta_1 + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$.

2. $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in M_A(G)$ – произвольная регулярная функция. Тогда, общее решение уравнения (7.4) запишется в следующей форме:

$$\begin{cases} \theta(t,x,y,z) = c\delta_1 u_3\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right), \\ u(t,x,y,z) = c\alpha_1 u_1\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right), \\ v(t,x,y,z) = -c\beta_1 u_2\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right), \\ w(t,x,y,z) = -c\gamma_1 u_4\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right). \end{cases} \tag{7.17}$$

Теперь, подставив любое решение вида (7.17) в уравнение (7.3), мы получим дифференциальное уравнение в частных производных, относительно неизвестной функции $\Psi = \ln\rho$, следующего вида:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + u\frac{\partial\Psi}{\partial x} + v\frac{\partial\Psi}{\partial y} + w\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{7.18}$$

Неоднородное уравнение 1–го порядка, с гладкими коэффициентами вида (7.18), всегда разрешимо [23]. Причем, для любого его решения, соответствующая плотность будет положительной функцией, ибо:

$$\rho = \exp\Psi. \tag{7.19}$$

Таким образом, мы нашли способ нахождения общего решения уравнения неразрывности. Важнейшим фактом является то, что формулы (7.17) и (7.19) дают общее решение (7.1), полностью соответствующее принципу детерминированности.

Теорема 7.3.2. Класс 4 –векторов скоростей, определяемый формулой (7.17), подчинен принципу детерминизма. То есть, любой 4 –вектор однозначно определяется, через данные Коши вида:

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x,y,z); u|_{t=0} = u_0(x,y,z); v|_{t=0} = v_0(x,y,z); w|_{t=0} = w_0(x,y,z). \tag{7.20}$$

Доказательство. Используя условия Коши –Римана (4.2), мы из (7.17) получим формулы, связывающие компоненты 4 –вектора скорости:

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta_1\delta c}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_1\alpha}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\beta_1\beta}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma_1\gamma}\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{1}{\delta_1\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{c\alpha_1\delta}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\beta_1\gamma}\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma_1\beta}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{1}{\delta_1\beta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{\alpha_1\gamma}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{c\beta_1\delta}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\gamma_1\alpha}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{1}{\delta_1\gamma}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{\alpha_1\beta}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\beta_1\alpha}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c\gamma_1\delta}\frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases} \tag{7.21}$$

Отсюда мы видим, что на основе начальных данных (7.20), всегда определяются дополнительные данные Коши типа:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\delta_1\delta c}{\alpha_1\alpha}\frac{\partial u_0}{\partial x}. \tag{7.22}$$

Далее, используя свойство (4.6) мы определим, что имеет место одномерное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\delta^2 c^2}{\alpha^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{7.23}$$

Задача Коши (7.23), (7.20),(7.22) имеет единственное решение, определяемое формулой Даламбера. Такие же выводы можно сделать относительно других, трех компонент скорости. Теперь, однозначно полученные компоненты скорости подставляются в уравнение (7.18), которое мы рассмотрим с начальным условием:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x, y, z). \tag{7.24}$$

Известно [23], что задача Коши (7.18) и (7.24) имеет единственное решение.

Теорема доказана.

Таким образом, при любом наборе $SP = (\alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1)$ разрешающих параметров, класс единственности различных начально –краевых задач гидродинамики определяется формулой (7.17) или что одно и то же, эквивалентной формулой (7.21).

Для несжимаемой, однородной жидкости уравнение неразрывности записывается так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{7.25}$$

Оно формально получено из (7.1) при допущении $\rho = const$. То есть, все решения (7.25) составляют подмножество решений уравнения (7.1). Для описания этого подмножества, в формулах решений уравнения (7.4) достаточно использовать наборы разрешающих параметров с $\delta_1 = 0$.

Таким образом, для решения уравнения (7.25), мы используем все результаты предыдущего раздела.

Определение 7.3.3.

Произвольные семь скаляров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ называются разрешающими параметрами уравнения (7.25), если выполняется соотношение:

$$\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0.$$

Нетрудно понять, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.3.4. Общее решение уравнения (7.25) на компакте дается следующими формулами:

$$\begin{cases} u(t,x,y,z) = c\alpha_1 u_1\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right), \\ v(t,x,y,z) = -c\beta_1 u_2\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right), \\ w(t,x,y,z) = -c\gamma_1 u_4\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right). \end{cases} \tag{7.26}$$

где: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$–произвольный набор разрешающих параметров, $u(X) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in M_A(G)$ –произвольная регулярная функция.

Пример 7.3.5. Найти частное решение уравнения (7.25), соответствующее набору разрешающих параметров $(0, 1, 0, 1, \alpha_1, 0, 0)$ и регулярной функции $u(X) = X^2 + J_1$.

Решение: Запишем компоненты регулярной функции:

$$\begin{cases} u_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 1, \\ u_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2(x_1x_2 + x_3x_4), \\ u_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2(x_1x_3 - x_2x_4), \\ u_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2(x_1x_4 + x_2x_3). \end{cases}$$

Теперь подставив все данные в формулу (7.26), получим:

$$\begin{cases} u(t,x,y,z) = \dfrac{c\alpha_1}{L^2}(L^2 - y^2 - z^2), \\ v(t,x,y,z) = 0, \\ w(t,x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Мы получили формулу Пуазейля, описывающую ламинарное, стационарное течение несжимаемой жидкости, в бесконечной цилиндрической трубе: $y^2 + z^2 = L^2$.

Вообще говоря, подставляя в формулу (7.26) разные наборы разрешающих параметров и, соответствующим образом подбирая регулярную функцию $u(X) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in M_A(G)$, мы можем получить известные на сегодня решения стационарных или нестационарных задач, для систем уравнений Навье – Стокса. Так, можно легко получить известные решения Куэтта и многие другие решения, описанные в работе [9].

Таким образом, формулы (7.17) и (7.26) имеют важное значение для исследования различных начально –краевых задач для уравнений гидродинамики. Как и в предыдущем разделе легко показать, что функции из (7.26) подчинены принципу детерминированности. То есть, они однозначно определяются на основе данных Коши.

Говоря по другому, формулами (7.17) и (7.26) описываются классы единственности различных начально – краевых задач гидродинамики. Выход за пределы этих классов приводит к неприятностям.
Пример 7.3.6. Рассмотрим задачу Коши для идеальной, несжимаемой жидкости, заполнившей все трехмерное пространство:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{V}}{dt} + \nabla P = \vec{F}, \\ div\vec{V} = 0, \\ \vec{V}|_{t=0} = \vec{\varphi}(x, y, z). \end{cases} \tag{7.27}$$

Пусть $rot\vec{\varphi} \neq 0$ и компоненты начальной скорости исчезают на бесконечности, вместе со всеми производными. Без ограничения общности, примем $div\vec{F} = 0$. Тогда, применяя к обеим частям первого уравнения оператор дивергенции, мы получим:

$$\begin{cases} \Delta P = div(\vec{V} \times rot\vec{V}) - \triangle(\dfrac{\vec{V}^2}{2}), \\ div\vec{V} = 0, \\ \vec{V}|_{t=0} = \vec{\varphi}(x, y, z). \end{cases} \tag{7.28}$$

Если начальные данные брать произвольно, то система (7.28) имеет бесчисленное множество решений. Например такие:

$$\vec{V}^{(1)} = e^{-t}\vec{\varphi}(x, y, z); \vec{V}^{(2)} = \frac{1}{t+1}\vec{\varphi}(x, y, z).... \tag{7.29}$$

Для каждого из таких решений давление определяется из первого уравнения Пуассона. Налицо потеря единственности решений.

Если же класс начальных данных в системе (7.27) выбрать как "след"класса (7.26) при $t = 0$, то компоненты скорости определяются однозначно. В свою очередь, из первого уравнения (7.28) однозначно определяется искомое давление.

Замечание 7.3.7. Из формул (7.26) не следует, что в случае несжимаемой однородной жидкости исчезает понятие 4 – вектора скорости. Четвертая компонента скорости неизбежно появится при решении различных, нестационарных начально – краевых задач для однородных жидкостей. Это мы продемонстрируем позже, на примере исследования 6-ой задачи тысячелетия [25]. То есть, 4 –вектор скорости гидродинамики – это реально существующая субстанция механики жидкости и газов.

7.4 Движение жидкости внутри сферы

Пусть идеальная несжимаемая жидкость, целиком заполнившая сферический сосуд радиуса (r), приходит в движение с характерной скоростью (c), под действием стационарной, потенциальной внешней силы. Найдем гидродинамические характеристики стационарного движения жидкости внутри сферы.

Математически, постановка этой задачи формулируется так [8].

В трехмерной области $D : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$, с твердой границей $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ требуется найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} V_1\dfrac{\partial V_1}{\partial x} + V_2\dfrac{\partial V_1}{\partial y} + V_3\dfrac{\partial V_1}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + F_1(x, y, z) \\ V_1\dfrac{\partial V_2}{\partial x} + V_2\dfrac{\partial V_2}{\partial y} + V_3\dfrac{\partial V_2}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + F_2(x, y, z) \\ V_1\dfrac{\partial V_3}{\partial x} + V_2\dfrac{\partial V_3}{\partial y} + V_3\dfrac{\partial V_3}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + F_3(x, y, z) \end{cases} \tag{7.30}$$

удовлетворяющее уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 0 \tag{7.31}$$

и условию непротекания на границе:

$$V_n \mid_S = 0. \tag{7.32}$$

Решение задачи (7.30) – (7.32) будем искать в классе решений уравнения неразрывности (7.26). Примем за безразмерные переменные следующие величины:

$$x_1 = \frac{x}{r}; x_2 = \frac{y}{r}; x_3 = \frac{ct}{r}; x_4 = \frac{z}{r}.$$

От таких переменных зависят компоненты регулярной функции, используемой для решения уравнения неразрывности.

Нетрудно понять, что неизвестный пока набор разрешающих параметров (SP: solving parametres) стационарного уравнения неразрывности необходимо искать в виде:

$$SP = (\alpha, \beta, 0, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \Rightarrow \delta = 0.$$

Действительно, именно такой набор соответствует стационарному течению, когда в формулах гидродинамических величин будет отсутствовать параметр времени.

Далее, выбор вида регулярной функции диктуется соображениями симметрии. Так, уравнение сферы подсказывает, что необходимо выбрать четырехмерную функцию $u(X) = X^2 - 1$.

Теперь, на основе формулы (7.26) и с учетом явного вида компонент выбранной регулярной функции, решение (7.31) ищется в следующей форме:

$$\begin{cases} V_1(x,y,z) = \dfrac{\alpha_1 c}{r^2}(\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 - r^2), \\ V_2(x,y,z) = -\dfrac{2\alpha\beta\beta_1 cxy}{r^2}, \\ V_3(x,y,z) = -\dfrac{2\alpha\gamma\gamma_1 cxz}{r^2}. \end{cases} \tag{7.33}$$

Разрешающие параметры удовлетворяют соотношению:

$$\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0. \tag{7.34}$$

Далее, учитывая симметричный вид области течения и возможности изменения масштаба характерной скорости (c), мы можем принять: $\alpha = \alpha_1 = 1; \beta = \gamma; \beta_1 = \gamma_1$. Тогда из (7.34) автоматически следует: $\beta\beta_1 = \gamma\gamma_1 = \frac{1}{2}$.

Теперь (7.33) перепишется в форме с одним неизвестным параметром:

$$\begin{cases} V_1(x,y,z) = \dfrac{c}{r^2}[x^2 - \beta^2(y^2+z^2) - r^2], \\ V_2(x,y,z) = -\dfrac{cxy}{r^2}, \\ V_3(x,y,z) = -\dfrac{cxz}{r^2}. \end{cases} \tag{7.35}$$

Ясно, что (7.35) удовлетворяет условию (7.31) при любых значениях параметра β. Для его определения используем условие (7.32). Имеем:

$$V_n = 2xV_1 + 2yV_2 + 2zV_3 = \frac{2cx}{r^2}[x^2 - (\beta^2+1)(y^2+z^2) - r^2].$$

Отсюда видно, что условие (7.32) дает: $\beta^2 = -2 \Rightarrow \beta = \pm i\sqrt{2}$. Таким образом, окончательно:

$$\begin{cases} V_1(x,y,z) = \dfrac{c}{r^2}(x^2 + 2y^2 + 2z^2 - r^2), \\ V_2(x,y,z) = -\dfrac{cxy}{r^2}, \\ V_3(x,y,z) = -\dfrac{cxz}{r^2}. \end{cases} \tag{7.36}$$

Функции (7.36) удовлетворяют условиям (7.31) и (7.32). Чтобы определить неизвестную функцию давления $P(x,y,z)$, подставим эти функции в уравнения движения (7.30). Тогда получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = F_1(x,y,z) - \dfrac{2c^2x(x^2-r^2)}{r^4}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = F_2(x,y,z) + \dfrac{c^2y(2y^2+2z^2-r^2)}{r^4}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = F_3(x,y,z) + \dfrac{c^2z(2y^2+2z^2-r^2)}{r^4}. \end{cases}$$

Эта система разрешима. Действительно, по условию задачи внешняя сила $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ является потенциальным вектором. Теперь легко проверить, что в правой части системы присутствуют компоненты некоторого потенциального вектора.

Поэтому, решение системы дается следующей формулой:

$$\frac{P(x,y,z)}{\rho} = \int_0^x \left[F_1(\xi,y,z) - \frac{2c^2\xi(\xi^2-r^2)}{r^4}\right]d\xi + \\ + \int_0^y \left[F_2(0,\eta,z) + \frac{c^2\eta(2\eta^2+2z^2-r^2)}{r^4}\right]d\eta + \\ + \int_0^z \left[F_3(0,0,\zeta) + \frac{c^2\zeta(2\zeta^2-r^2)}{r^4}\right]d\zeta + \frac{P(0,0,0)}{\rho}.$$

Вычислив простые интегралы, окончательно получим:

$$P(x,y,z) = P(0,0,0) + \frac{\rho c^2}{2r^4}\left[(y^2+z^2)^2 - x^4 + r^2(2x^2-y^2-z^2)\right] + \\ + \rho\int_0^x F_1(\xi,y,z)d\xi + \\ + \rho\int_0^y F_2(0,\eta,z)d\eta + \rho\int_0^z F_3(0,0,\zeta)d\zeta. \quad (7.37)$$

$P(0,0,0)$ определим из условия: $\iiint_D P(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta = 0$. Тогда:

$$P(0,0,0) = \frac{\rho c^2}{14} - \frac{3}{4\pi r^3}\iiint_D \varphi(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta,$$

где:

$$\varphi(x,y,z)=\rho\left[\int_0^x F_1(\xi,y,z)d\xi+\int_0^y F_2(0,\eta,z)d\eta+\int_0^z F_3(0,0,\zeta)d\zeta\right].$$

Таким образом, формулы (7.36) и (7.37) дают точное аналитическое решение исходной задачи (7.30) –(7.32).

Мы получили точное решение этой, весьма непростой задачи благодаря тому, что ранее удалось описать общее решение уравнения неразрывности.Использованный здесь метод, когда сложные уравнения движения расщепляются на основе континуума точных решений уравнения неразрывности, применим ко многим модельным задачам гидродинамики.

7.5 Задача Коши для идеальной сжимаемой жидкости

Пусть $\vec{V}(t,x,y,z)=(u,v,w)$ - искомый вектор скорости; ρ, P –искомые плотность и давление идеальной сжимаемой жидкости, целиком заполнившей все трехмерное пространство R^3.

Рассмотрим в области $G=R^3\times[0,\infty)$ систему уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}=F_1(t,x,y,z) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y}=F_2(t,x,y,z) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}=F_3(t,x,y,z) \end{cases} \tag{7.38}$$

с условием неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{7.39}$$

и с начальными условиями:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x,y,z) \tag{7.40}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x,y,z); v|_{t=0} = v_0(x,y,z); w|_{t=0} = w_0(x,y,z). \tag{7.41}$$

Естественно, начальная плотность должна быть положительной величиной всюду в R^3 :

$$0 < m \le \rho_0(x,y,z) \le M < +\infty \tag{7.42}$$

Далее, без ограничения общности, примем:

$$0 < u_0(x,y,z) \le c \tag{7.43}$$

При этом, известные функции $F_k(t,x,y,z), k = \overline{1,3}, u_0, v_0, w_0$ – считаются ограниченными и бесконечно дифференцируемыми функциями в своих областях определения, исчезающими на бесконечности вместе со своими производными любого порядка. Массовая сила $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ считается потенциальной силой, то есть, $rot\vec{F} = 0$.

Как это принято для идеальной жидкости, между давлением и плотностью существует известная функциональная зависимость вида: $\rho = \omega(P)$. Тогда можно определить функцию [20]:

$$\phi(P) = \int_{P_\infty}^{P} \frac{d\tau}{\omega(\tau)} \Rightarrow \nabla\phi(P) = \frac{1}{\rho}\nabla P$$

Известно [8] стр.206, что для задачи Коши (7.38) –(7.41) глобальных теорем существования не установлено ни в одном случае. В случае однородной несжимаемой жидкости, когда $\rho = const$, доказаны только локальные по времени теоремы существования.

Покажем, что четырехмерный анализ дает новые методы исследования таких задач. А именно, докажем глобальную по времени, теорему существования и единственности исходной задачи Коши.

Запишем систему, заменяющую уравнение неразрывности (7.39):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V}\nabla\rho = \dfrac{\rho}{c}\dfrac{\partial\theta}{\partial t} \end{cases} \tag{7.44}$$

Предварительно необходимо определить класс единственности исходной задачи Коши.После этого мы сможем перейти к доказательству существования решения в найденном классе единственности.

Из Теоремы 7.3.2 следует, что класс $SCE(G)$ единственности решения исходной задачи Коши необходимо определить на основе формулы (7.17). Для простоты изложения мы будем использовать конкретный набор разрешающих параметров. Изложение для других наборов будет идентичным, отличаясь арифметикой расчетов.

Пусть $SP = (1, i, 1, i, 1, i, -3, i)$– выбранный набор разрешающих параметров. $u = u_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M_A(G)$ –произвольная регулярная функция. Класс единственности $SCE(G)$ исходной задачи является множеством решений первого уравнения системы (7.44). Он определяется так :

$$SCE(G) = \{U = (\theta, u, v, w) \in C^1 M(G)\},$$

где:

$$\begin{cases} \theta = -3cu_3\left(\dfrac{x}{L}, \dfrac{iy}{L}, \dfrac{ct}{L}, \dfrac{iz}{L}\right) \\ u = cu_1\left(\dfrac{x}{L}, \dfrac{iy}{L}, \dfrac{ct}{L}, \dfrac{iz}{L}\right) \\ v = -icu_2\left(\dfrac{x}{L}, \dfrac{iy}{L}, \dfrac{ct}{L}, \dfrac{iz}{L}\right) \\ w = -icu_4\left(\dfrac{x}{L}, \dfrac{iy}{L}, \dfrac{ct}{L}, \dfrac{iz}{L}\right) \end{cases} \tag{7.45}$$

Здесь: L – характерная величина, имеющая размерность длины. Она играет только вспомогательную роль и необходима для соблюдения размерностей физических величин в формуле (7.45). В дальнейшем надобность в ней отпадет.

Во – первых легко понять, что функции (7.45) удовлетворяют первому уравнению системы (7.44) при любой регулярной четырехмерной функции $u(X) \in M(G)$.

Во –вторых, здесь появляется четырехмерная, стационарная функция вида $V_0 = (\theta_0, u_0, v_0, w_0)$ начальных данных, которая обязана принадлежать следу множества $SCE(G)$ на гиперплоскости $(t = 0)$, иначе задача не имеет решения в выбранном классе единственности.

Но в таком случае, компоненты такой начальной функции будут удовлетворять некоторым специфическим соотношениям: Действительно, запишем соотношения (7.21) при $t = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}|_{t=0} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x} = \dfrac{\partial v_0}{\partial y} = \dfrac{\partial w_0}{\partial z} \\ -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial\theta_0}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \dfrac{\partial v_0}{\partial z} = \dfrac{\partial w_0}{\partial y} \\ -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial\theta_0}{\partial y} = \dfrac{\partial u_0}{\partial z} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \dfrac{\partial w_0}{\partial x} \\ -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial\theta}{\partial z_0} = \dfrac{\partial u_0}{\partial y} = \dfrac{\partial v_0}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} \end{cases} \quad (7.46)$$

Отсюда автоматически определяется след $\theta_0(x, y, z)$ неизвестной функции $\theta(t, x, y, z)$, на гиперплоскости $t = 0$. Действительно, выпишем из (7.46) следующие соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_0}{\partial x} = -3\dfrac{\partial v_0}{\partial z} = -3\dfrac{\partial w_0}{\partial y} = \psi_1(x, y, z) \\ \dfrac{\partial\theta_0}{\partial y} = -3\dfrac{\partial u_0}{\partial z} = -3\dfrac{\partial w_0}{\partial x} = \psi_2(x, y, z) \\ \dfrac{\partial\theta_0}{\partial z} = -3\dfrac{\partial u_0}{\partial y} = -3\dfrac{\partial v_0}{\partial x} = \psi_3(x, y, z) \end{cases} \quad (7.47)$$

Из (7.47), с учетом (7.46), легко получим:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{\partial\psi_3}{\partial x}; \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \frac{\partial\psi_3}{\partial y}; \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = \frac{\partial\psi_2}{\partial x}$$

Тогда из (7.47) однозначно определяется начальное значение:

$$\theta_0(x,y,z) = \int_0^x \psi_1(\xi,y,z)d\xi + \int_0^y \psi_2(0,\eta,z)d\eta - \int_z^\infty \psi_3(0,0,\zeta)d\zeta \tag{7.48}$$

Мы выявили интересный факт.На основе начальных данных трех –скорости вида (7.41) автоматически определяется начальное значение четвертой компоненты 4 – скорости. Теперь докажем вспомогательную лемму.

Лемма 7.5.1. Для любой четырехмерной функции из класса единственности $SCE(G)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ I_2 = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ I_3 = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \tag{7.49}$$

Доказательство: Как мы знаем, для четырехмерных функции из $SCE(G)$ выполняются соотношения (7.21). Тогда:

$$\begin{cases} I_1 = -\dfrac{c}{3}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} + w\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ I_2 = -\dfrac{c}{3}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ I_3 = -\dfrac{c}{3}\dfrac{\partial \theta}{\partial z} + u\dfrac{\partial u}{\partial z} + v\dfrac{\partial v}{\partial z} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \tag{7.50}$$

где:

$$\varphi = -\frac{c\theta}{3} + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 \tag{7.51}$$

Лемма доказана.

Теперь уравнения движения (7.38) перепишутся в простой форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi(P)}{\partial x} = F_1(x, y, z) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi(P)}{\partial y} = F_2(x, y, z) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial \phi(P)}{\partial z} = F_3(x, y, z) \end{cases} \tag{7.52}$$

Лемма 7.5.2. При любой, потенциальной массовой силе $\vec{F} = \nabla \Gamma$, система (7.52) всегда разрешима.

Доказательство: При потенциальной массовой силе, система (7.52) перепишется в простейшей, градиентной форме:

$$\nabla \varphi + \nabla \phi(P) = \nabla \Gamma \tag{7.53}$$

Отсюда однозначно определяется:

$$\phi(P) = \Gamma - \varphi \tag{7.54}$$

Лемма доказана.

Остается показать, что при фиксированном наборе разрешающих параметров, компоненты 4–скорости и искомая плотность определяются однозначно в выбранном классе единственности.

Действительно, дифференцируя дважды функции (7.45) и учитывая свойства компонентов регулярной функции, мы легко получим:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{7.55}$$

Таким образом, все компоненты искомой 4 –скорости, взятой из класса единственности $SCE(G) \subset C^1 M(G)$, являются решениями задачи Коши для одномерного волнового уравнения (считаем временно y, z постоянными параметрами). Например для первой компоненты имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \\ \theta(0,x,y,z) = \theta_0(x,y,z) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t}\Big|_{t=0} = -3c\dfrac{\partial u_0}{\partial x} \end{cases} \tag{7.56}$$

Единственное решение такой задачи дается формулой Даламбера:

$$\theta(t,x,y,z) = \frac{\theta_0(x+ct,y,z)+\theta_0(x-ct,y,z)}{2} - \\ - 3\frac{u_0(x+ct,y,z)-u_0(x-ct,y,z)}{2} \tag{7.57}$$

Вторая компонента является решением задачи Коши для одномерного волнового уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x,y,z) = u_0(x,y,z) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\dfrac{c}{3}\dfrac{\partial\theta_0}{\partial x} \end{cases} \tag{7.58}$$

Единственное решение такой задачи дается формулой :

$$u(t,x,y,z) = \frac{u_0(x+ct,y,z)+u_0(x-ct,y,z)}{2} - \\ - \frac{\theta_0(x+ct,y,z)-\theta_0(x-ct,y,z)}{6} \tag{7.59}$$

Аналогично, имеем следующие формулы:

$$v(t,x,y,z) = \frac{v_0(x+ct,y,z)+v_0(x-ct,y,z)}{2} + \\ + \frac{w_0(x+ct,y,z)-w_0(x-ct,y,z)}{2} \tag{7.60}$$

$$w(t,x,y,z) = \frac{w_0(x+ct,y,z) + w_0(x-ct,y,z)}{2} + \\ + \frac{v_0(x+ct,y,z) - v_0(x-ct,y,z)}{2} \quad (7.61)$$

Формулы (7.59) –(7.61) дают точные аналитические выражения компонент искомой 3 – скорости.

Далее, известно следующее, почти тривиальное утверждение. Пусть $q(x,y,z) \in C^\infty(R^3)$ – известная, ограниченная функция. Тогда, элементарно определяются еще две функции с такими же свойствами: $q^+ = q(x+ct,y,z) \in C^\infty(G)$, $q^- = q(x-ct,y,z) \in C^\infty(G)$.

Поэтому, найденные функции $\theta, u, v, w \in C^\infty(G)$. Более того, все производные этих функций ограничены и исчезают на бесконечности.

После определения компонент 4–вектора скорости, неизвестная плотность $\rho(t,x,y,z)$ определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\ln\rho)}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla(\ln\rho)) = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\theta}{\partial t} \\ (\ln\rho)|_{t=0} = \ln\rho_0(x,y,z) \end{cases} \quad (7.62)$$

Такая задача однозначно разрешима [23]. Действительно, запишем соответствующую задаче (7.62) каноническую систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u; \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{dz}{dt} = w; \dfrac{d(\ln\rho)}{dt} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\theta}{\partial t} \end{cases} \quad (7.63)$$

Для достаточно гладких (θ, u, v, w) эти уравнения имеют общие интегралы следующего вида:

$$\begin{cases} x - \eta_1(t,x,y,z) = C_1 \\ y - \eta_2(t,x,y,z) = C_2 \\ z - \eta_3(t,x,y,z) = C_3 \\ \ln\rho - \eta_0(t,x,y,z) = C_0 \end{cases} \quad (7.64)$$

При этом:
$$\eta_k(0,x,y,z)=0; k=\overline{0,3} \tag{7.65}$$
Тогда, первое уравнение системы (7.62) имеет общее решение вида:

$$\ln\rho=\eta_0(t,x,y,z)+ \\ +\omega[x-\eta_1(t,x,y,z),y-\eta_1(t,x,y,z),z-\eta_3(t,x,y,z)] \tag{7.66}$$

Здесь: $\omega(\xi,\eta,\zeta)$ – произвольная гладкая функция. Теперь, с учетом второго условия из (7.62), мы получим:

$$\ln\rho_0(x,y,z)=\omega(x,y,z) \tag{7.67}$$

Окончательно, единственное решение (7.62) запишется так:

$$\rho(t,x,y,z)=\rho_0[x-\eta_1(t,x,y,z),y-\eta_1(t,x,y,z),z-\eta_3(t,x,y,z)]\times \\ \times\exp[\eta_0(t,x,y,z)] \tag{7.68}$$

Итак, нами доказана глобальная теорема разрешимости.

Теорема 7.5.3. Пусть начальные данные (7.41) глобально согласованы, то есть, выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial x}=\dfrac{\partial v_0}{\partial y}=\dfrac{\partial w_0}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial z}=\dfrac{\partial w_0}{\partial y};\dfrac{\partial u_0}{\partial z}=\dfrac{\partial w_0}{\partial x};\dfrac{\partial u_0}{\partial y}=\dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases} \tag{7.69}$$

Тогда существует единственное решение задачи (7.38)–(7.41), которое дается формулами:(7.57), (7.59)–(7.61) и (7.68).

При этом, $u,v,w\in C^\infty(G)$ и исчезают на бесконечности, вместе с производными любого порядка.Найденные ρ,P –достаточно гладкие, ограниченные неотрицательные функции. Отметим, что взяв другой, надлежащий набор разрешающих параметров, мы получили бы схожий результат с небольшими изменениями.

7.6 О решениях уравнения Шредингера

Пусть $\psi(t, x, y, z)$ – искомая волновая функция квантовой частицы массы m, движущейся во внешнем силовом поле с известным потенциалом $Q(t, x, y, z)$. $\hbar$ –постоянная Планка. Как известно [19], волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi + Q\psi \tag{7.70}$$

Мы хотим описать континуум точных решений этого уравнения. Известно [19], что общий вид волновой функции запишется так:

$$\psi(t, x, y, z) = A(t, x, y, z)e^{\frac{iS(t,x,y,z)}{\hbar}} \tag{7.71}$$

где неизвестные: $A(t, x, y, z)$ –амплитуда волновой функции, $S(t, x, y, z)$ – действие внешнего поля на квантовую частицу. Эти функции подлежат определению.

Далее, подставив (7.71) в уравнение (7.70) мы получим следующие два соотношения:[19]

$$\frac{\partial(A^2)}{\partial t} + div(A^2\frac{\nabla S}{m}) = 0 \tag{7.72}$$

$$Q = \frac{\hbar^2\triangle A}{2mA} - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{(\nabla S)^2}{2m} \tag{7.73}$$

Эти два соотношения дают вид зависимости между потенциалом внешнего поля, амплитудой и соответствующим действием.

Далее, заметим что уравнение (7.72) представляет собой уравнение неразрывности в квантовой механике, то есть, оно идентично ранее исследованному уравнению (7.1). Поэтому мы можем описать континуум точных решений этого уравнения. За характерную скорость движения квантовой частицы берется скорость света – c. Теперь рассмотрим обычный трех – вектор $\vec{\Phi} = (u, v, w)$, где:

$$\begin{cases} u(t,x,y,z) = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial x} \\ v(t,x,y,z) = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial y} \\ w(t,x,y,z) = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial z} \end{cases} \tag{7.74}$$

Тогда, как и в случае с уравнением гидродинамики (7.1), неизбежно появится 4 –вектор вида: $\Phi_{4d} = (\theta, u, v, w)$. Причем система, эквивалентная уравнению неразрывности (7.72), запишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial (A^2)}{\partial t} + (\vec{\Phi} \cdot \nabla(A^2)) = \dfrac{A^2}{c}\dfrac{\partial \theta}{\partial t} \end{cases} \tag{7.75}$$

Общее решение первого уравнения системы легко найдется из (7.17):

Пусть:

1. $SP = (\alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1)$ – набор разрешающих параметров–скаляров, удовлетворяющих условию: $\delta\delta_1 + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$.

2. $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in M_A(G)$ – произвольная регулярная функция. Тогда, общее решение первого уравнения системы (7.75) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \theta(t,x,y,z) = c\delta_1 u_3\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right) \\ u(t,x,y,z) = c\alpha_1 u_1\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right) \\ v(t,x,y,z) = -c\beta_1 u_2\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right) \\ w(t,x,y,z) = -c\gamma_1 u_4\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right) \end{cases} \tag{7.76}$$

Здесь: c – скорость света, L – характерный размер движения квантовой частицы. Далее, из (7.74) видно, что $\vec{\Phi} = (u, v, w)$ – потенциальный вектор, поэтому в формуле (7.76) можно положить:

$$\alpha = \alpha_1; \beta = \beta_1; \gamma = \gamma_1 \tag{7.77}$$

При выполнении этого условия мы имеем совместную систему уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial x} = c\alpha u_1\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right) \\ \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial y} = -c\beta u_2\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right) \\ \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial z} = -c\gamma u_4\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right) \end{cases} \tag{7.78}$$

Отсюда, легко определяется весь континуум всевозможных функций, описывающих действия:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}S(t, x, y, z) = c\alpha \int_0^x u_1\left(\frac{\alpha\xi}{L}, \frac{\beta y}{L}, \frac{\delta ct}{L}, \frac{\gamma z}{L}\right) d\xi \\ - c\beta \int_0^y u_2\left(0, \frac{\beta\eta}{L}, \frac{\delta ct}{L}, \frac{\gamma z}{L}\right) d\eta \\ - c\gamma \int_0^z u_4\left(0, 0, \frac{\delta ct}{L}, \frac{\gamma\zeta}{L}\right) d\zeta \end{aligned} \tag{7.79}$$

Далее, найдем общее решение второго уравнения системы (7.75). Введем обозначение:

$$\ln(A^2) = W(t, x, y, z) \tag{7.80}$$

Тогда уравнение перепишется так:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial\theta}{\partial t} \tag{7.81}$$

Каноническая система обыкновенных дифференциальных уравнений получится такой:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial x}dt; dy = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial y}dt; dz = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial S}{\partial z}dt \\ \hfill dW = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \theta}{\partial t}dt \end{cases} \tag{7.82}$$

Общие интегралы этих уравнений запишутся так:[23]

$$\begin{cases} \omega_1(t,x,y,z) = C_1; \omega_2(t,x,y,z) = C_2; \\ \omega_3(t,x,y,z) = C_3; \omega_0(t,x,y,z) = C_0. \end{cases} \tag{7.83}$$

Теперь, общее решение (7.81) дается следующей формулой:

$$W = \omega_0(t,x,y,z) + \varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3) \tag{7.84}$$

Здесь: $\varphi(x,y,z)$ – произвольная, гладкая функция. После этого, искомая амплитуда волновой функции дается формулой:

$$A(t,x,y,z) = \sqrt{\exp W} \tag{7.85}$$

Формулы (7.79) и (7.85) дают весь континуум гладких, точных решений уравнения Шредингера.

Причем, если известны начальные данные амплитуды и действия, то волновая функция однозначно определяется. В свою очередь, потенциал внешнего силового поля удовлетворяет уравнению (7.73).

То есть, в принципе, методами четырехмерного анализа возможно решение как прямой, так и обратной задач квантовой механики.

В частности, можно так подобрать разрешающие параметры и регулярную четырехмерную функцию, что результаты приведут к известным решениям задачи движения квантовой частицы в потенциальной яме конечных размеров.

7.7 О задаче трех (N) тел

Задача трех (многих) тел является основной задачей небесной механики [12]. Здесь излагается один из подходов исследования этой задачи, где применяются категории четырехмерного анализа. Метод дает еще три, неизвестных ранее интеграла движения задачи трех тел. В задаче многих N тел можно получить новые N интегралов, действуя идентично подходу, излагаемому здесь.

1. Постановка задачи.

Пусть $x_i(t), y_i(t), z_i(t), i = \overline{1,3}$ — координаты центров масс трех небесных тел относительно абсолютной, неподвижной системы координат в момент времени t. Тела, как правило, рассматриваются как материальные точки с массами $m_k; k = \overline{1,3}$.

Начальные координаты материальных точек и их скорости считаются заданными:

$$\begin{cases} x_i(0) = A_i; y_i(0) = B_i; z_i(0) = C_i, \\ \dot{x}_i(0) = D_i; \dot{y}_i(0) = E_i; \dot{z}_i(0) = P_i, \\ \hfill i = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{7.86}$$

Далее, известны уравнения движения k–го тела:

$$\begin{cases} a_{k1} = \sum\limits_{i=1(i\neq k)}^{3} \dfrac{\gamma m_i(x_i - x_k)}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}^3}, \\ a_{k2} = \sum\limits_{i=1(i\neq k)}^{3} \dfrac{\gamma m_i(y_i - y_k)}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}^3}, \\ a_{k3} = \sum\limits_{i=1(i\neq k)}^{3} \dfrac{\gamma m_i(z_i - z_k)}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}^3}, \\ \hfill k = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{7.87}$$

Здесь: $\vec{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3})$ – ускорение k–го тела, $k = \overline{1,3}$. Требуется найти законы движения каждого из тел в любой момент времени t, то есть, определить закономерности вида:

$$\begin{cases} x_k(t) = \omega_k(t) \\ y_k(t) = \varphi_k(t) \\ z_k(t) = \psi_k(t) \\ \qquad k = \overline{1,3} \end{cases} \tag{7.88}$$

Далее, известны различные первые интегралы движения этой задачи. К сожалению, они не приводят к определению решения задачи не только в виде (7.88), но и в другой, удобоваримой форме [12].

2. Четырехмерный взгляд на задачу трех тел.

Из вида компонент ускорений в правых частях (7.87) мы отчетливо видим, что все они являются скалярными функциями, зависящими от девяти переменных: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$.

В дальнейшем для k – го тела, в качестве главных независимых переменных берется тройка x_k, y_k, z_k, а остальные шесть переменных, вкупе, обозначаются как J_k, $k = \overline{1,3}$.

Тогда, относительно компонент ускорения каждого из тел будем иметь нижеследующие представления, как о скалярных функциях:

$$\begin{cases} a_{1m} = f_m(x_1, y_1, z_1, J_1); J_1 = (x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3); m = \overline{1,3} \\ a_{2k} = g_k(x_2, y_2, z_2, J_2); J_2 = (x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3); k = \overline{1,3} \\ a_{3n} = h_n(x_3, y_3, z_3, J_3); J_3 = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2); n = \overline{1,3} \end{cases} \tag{7.89}$$

Далее, непосредственно видно, что заданный формулами (7.87) обычный, трехмерный вектор ускорения $\vec{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3})$ является таким, что:

$$div\vec{a}_k = 0, rot\vec{a}_k = 0 \tag{7.90}$$

Отметим, что в формулах (7.90) операции дивергенции и ротора берутся по главным независимым переменным x_k, y_k, z_k, а остальные шесть неизвестных переменных J_k, $k = \overline{1,3}$ играют роль параметров.

Таким образом, для получения новых интегралов задачи трех тел необходимо использовать свойство (7.90) движения каждого тела, ранее не использованное в небесной механике. Есть надежда, что мы должны получить еще три дополнительных интеграла движения.

Теперь, на время отвлечемся от задачи трех тел и рассмотрим следующую задачу векторного анализа. Пусть некоторый трех – вектор $\vec{V} = [u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)]$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} div\vec{V} = 0 \\ rot\vec{V} = 0 \end{cases} \tag{7.91}$$

Описать общее решение такой системы, считая ее безразмерной.

Лемма 7.7.1. Общее решение системы (7.91) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = \lambda\alpha u_1\left(\alpha x, \beta y, 0, \gamma z\right), \\ v(x,y,z) = -\lambda\beta u_2\left(\alpha x, \beta y, 0, \gamma z\right), \\ w(x,y,z) = -\lambda\gamma u_4\left(\alpha x, \beta y, 0, \gamma z\right), \end{cases} \tag{7.92}$$

где: $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$–произвольные скаляры, $u(X) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in M_A(G)$ –произвольная регулярная функция, причем: $\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0$.

Доказательство: Для доказательства используем формулу (7.26). Согласно этой формуле, общее решение первого, безразмерного уравнения системы (7.91) запишется так:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = \alpha_1 u_1\left(\alpha x, \beta y, 0, \gamma z\right), \\ v(x,y,z) = -\beta_1 u_2\left(\alpha x, \beta y, 0, \gamma z\right), \\ w(x,y,z) = -\gamma_1 u_4\left(\alpha x, \beta y, 0, \gamma z\right), \\ \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0. \end{cases} \tag{7.93}$$

Тогда из (7.93) получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \alpha_1\beta\dfrac{\partial u_1}{\partial y^*}; \dfrac{\partial u}{\partial z} = \alpha_1\gamma\dfrac{\partial u_1}{\partial z^*}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\alpha\beta_1\dfrac{\partial u_2}{\partial x^*}; \dfrac{\partial v}{\partial z} = -\gamma\beta_1\dfrac{\partial u_2}{\partial z^*}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = -\alpha\gamma_1\dfrac{\partial u_4}{\partial x^*}; \dfrac{\partial w}{\partial y} = -\beta\gamma_1\dfrac{\partial u_4}{\partial y^*}, \\ x^* = \alpha x; y^* = \beta y; z^* = \gamma z. \end{cases} \tag{7.94}$$

Теперь, с учетом условии Коши – Римана (3.4) ясно, что второе уравнение системы (7.91) будет иметь место тогда и только тогда, когда:

$$\alpha_1\beta = \alpha\beta_1; \alpha_1\gamma = \alpha\gamma_1; \gamma\beta_1 = \beta\gamma_1.$$

или:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \lambda \Rightarrow \alpha_1 = \lambda\alpha; \beta_1 = \lambda\beta; \gamma_1 = \lambda\gamma.$$

Но тогда:

$$\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = \lambda(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) = 0 \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 7.7.2. Компоненты любого решения системы (7.91) удовлетворяют соотношению вида:

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial w}{\partial z} \tag{7.95}$$

Доказательство: Дифференцируя формулы (7.92) получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda\alpha^2\dfrac{\partial u_1}{\partial x^*}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\lambda\beta^2\dfrac{\partial u_2}{\partial y^*}; \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\lambda\gamma^2\dfrac{\partial u_4}{\partial z^*}; \\ x^* = \alpha x; y^* = \beta y; z^* = \gamma z. \end{cases} \tag{7.96}$$

Но из первого ряда условий (3.4) следует:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x^*} = \frac{\partial u_2}{\partial y^*} = \frac{\partial u_4}{\partial z^*} \tag{7.97}$$

Тогда, из (7.96) получим (7.95). **Лемма доказана.**

В дальнейшем соотношения (7.95) мы будем использовать в такой форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{7.98}$$

где:

$$\mu = -\frac{\alpha^2}{\beta^2}; \nu = -\frac{\alpha^2}{\gamma^2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2} = 0. \tag{7.99}$$

3. Дополнительные соотношения для ускорений трех тел. Теперь вернемся к задаче трех тел и запишем уравнения для векторов ускорений всех трех тел.

$$div\vec{a}_k = 0; rot\vec{a}_k = 0; k = \overline{1,3}. \tag{7.100}$$

Из леммы 7.7.2 следует, что компоненты ускорений этих тел удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_{k1}}{\partial x_k} = \mu_k\dfrac{\partial a_{k2}}{\partial y_k} = \nu_k\dfrac{\partial a_{k3}}{\partial z_k}; \\ \qquad 1 + \dfrac{1}{\mu_k} + \dfrac{1}{\nu_k} = 0; \\ \qquad\qquad k = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{7.101}$$

Соотношения (7.101) выполняются для любого момента времени. Тогда мы легко определим значения постоянных μ_k, ν_k. Действительно, предварительно вычислим необходимые производные:

$$\frac{\partial a_{k1}}{\partial x_k} = \sum_{i=1(i\neq k)}^{3} \frac{\gamma m_i[2(x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2 - (z_i - z_k)^2]}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}^5}$$

$$\frac{\partial a_{k2}}{\partial y_k} = \sum_{i=1(i\neq k)}^{3} \frac{\gamma m_i[2(y_i - y_k)^2 - (x_i - x_k)^2 - (z_i - z_k)^2]}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}^5}$$

$$\frac{\partial a_{k3}}{\partial z_k} = \sum_{i=1(i\neq k)}^{3} \frac{\gamma m_i[2(z_i - z_k)^2 - (y_i - y_k)^2 - (x_i - x_k)^2]}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}^5}$$

Значения этих производных в начальный (нулевой) момент времени будут равны:

$$M_k = \sum_{i=1(i\neq k)}^{3} \frac{\gamma m_i[2(A_i - A_k)^2 - (B_i - B_k)^2 - (C_i - C_k)^2]}{\sqrt{(A_i - A_k)^2 + (B_i - B_k)^2 + (C_i - C_k)^2}^5}$$

$$N_k = \sum_{i=1(i\neq k)}^{3} \frac{\gamma m_i[2(B_i - B_k)^2 - (A_i - A_k)^2 - (C_i - C_k)^2]}{\sqrt{(A_i - A_k)^2 + (B_i - B_k)^2 + (C_i - C_k)^2}^5}$$

$$L_k = \sum_{i=1(i\neq k)}^{3} \frac{\gamma m_i[2(C_i - C_k)^2 - (B_i - B_k)^2 - (A_i - A_k)^2]}{\sqrt{(A_i - A_k)^2 + (B_i - B_k)^2 + (C_i - C_k)^2}^5}$$

Отсюда элементарно получим:

$$\mu_k = \frac{M_k}{N_k}; \nu_k = \frac{M_k}{L_k}; k = \overline{1,3}.$$

Непосредственной проверкой можно доказать справедливость следующего соотношения:

$$1 + \frac{1}{\mu_k} + \frac{1}{\nu_k} = 0; k = \overline{1,3}. \tag{7.102}$$

Отсюда:

$$\nu_k = -\frac{\mu_k}{1 + \mu_k}; k = \overline{1,3}. \tag{7.103}$$

Легко проверить, что соотношения (7.102) имеют место при любых начальных данных (7.86).

После этого, соотношения (7.101) запишутся в виде следующей, эквивалентной системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_{k1}}{\partial x_k} - \mu_k \dfrac{\partial a_{k2}}{\partial y_k} = 0; \\ \mu_k \dfrac{\partial a_{k2}}{\partial y_k} - \nu_k \dfrac{\partial a_{k3}}{\partial z_k} = 0 \\ \qquad\qquad k = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{7.104}$$

Уравнения системы (7.104) выражают закон изменения компонент ускорения вдоль траектории движения k–го тела, то есть, претендуют на роль новых интегралов движения в задаче трех тел.

Теперь запишем уравнения системы (7.104) в развернутом виде:

$$\sum_{i=1 (i\neq k)}^{3} \frac{m_i[2(x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2 - (z_i - z_k)^2]}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}^5} - \\ - \sum_{i=1 (i\neq k)}^{3} \frac{\mu_k m_i[2(y_i - y_k)^2 - (x_i - x_k)^2 - (z_i - z_k)^2]}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}^5} = 0, \tag{7.105}$$

$$\sum_{i=1 (i\neq k)}^{3} \frac{\mu_k m_i[2(y_i - y_k)^2 - (x_i - x_k)^2 - (z_i - z_k)^2]}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}^5} - \\ - \sum_{i=1 (i\neq k)}^{3} \frac{\nu_k m_i[2(z_i - z_k)^2 - (y_i - y_k)^2 - (x_i - x_k)^2]}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}^5} = 0. \tag{7.106}$$

Можно показать, что уравнения (7.106) является следствием (7.105). Поэтому, в дальнейшем мы будем рассматривать только уравнение (7.105).

4. Получение новых интегралов движения.

Перепишем уравнение (7.105) для первого тела, положив в нем $k = 1$. Тогда получим:

$$(2+\mu_1)U_1-(1+2\mu_1)V_1+(\mu_1-1)W_1=0, \tag{7.107}$$

где:

$$\begin{cases} U_1=m_2R_{31}^5(x_2-x_1)^2+m_3R_{21}^5(x_3-x_1)^2 \\ V_1=m_2R_{31}^5(y_2-y_1)^2+m_3R_{21}^5(y_3-y_1)^2 \\ W_1=m_2R_{31}^5(z_2-z_1)^2+m_3R_{21}^5(z_3-z_1)^2 \\ R_{i1}=\sqrt{(x_i-x_1)^2+(y_i-y_1)^2+(z_i-z_1)^2};\, i=\overline{2,3}. \end{cases} \tag{7.108}$$

Перепишем уравнение (7.105) для второго тела, положив в нем $k=2$. Тогда получим:

$$(2+\mu_2)U_2-(1+2\mu_2)V_2+(\mu_2-1)W_2=0, \tag{7.109}$$

где:

$$\begin{cases} U_2=m_1R_{32}^5(x_1-x_2)^2+m_3R_{12}^5(x_3-x_2)^2 \\ V_2=m_1R_{32}^5(y_1-y_2)^2+m_3R_{12}^5(y_3-y_2)^2 \\ W_2=m_1R_{32}^5(z_1-z_2)^2+m_3R_{12}^5(z_3-z_2)^2 \\ R_{i2}=\sqrt{(x_i-x_2)^2+(y_i-y_2)^2+(z_i-z_2)^2};\, i=1,3. \end{cases} \tag{7.110}$$

Наконец, положив $k=3$ в формуле (7.105), мы получим:

$$(2+\mu_3)U_3-(1+2\mu_3)V_3+(\mu_3-1)W_3=0, \tag{7.111}$$

где:

$$\begin{cases} U_3=m_1R_{23}^5(x_1-x_3)^2+m_2R_{13}^5(x_2-x_3)^2 \\ V_3=m_1R_{23}^5(y_1-y_3)^2+m_2R_{13}^5(y_2-y_3)^2 \\ W_3=m_1R_{23}^5(z_1-z_3)^2+m_2R_{13}^5(z_2-z_3)^2 \\ R_{i3}=\sqrt{(x_i-x_3)^2+(y_i-y_3)^2+(z_i-z_3)^2};\, i=1,2. \end{cases} \tag{7.112}$$

Формулы (7.107), (7.109) и (7.111) дают три новых, ранее неизвестных интеграла в задаче трех тел. Можно показать, что в некоторой системе координат они представляют собой уравнения конической поверхности второго порядка. Покажем это на примере первого тела. Введем обозначения в правой части формулы (7.108):

$$\begin{cases} m_2R_{31}^5(x_2-x_1)^2+m_3R_{21}^5(x_3-x_1)^2=MR_G^5X_1^2 \\ m_2R_{31}^5(y_2-y_1)^2+m_3R_{21}^5(y_3-y_1)^2=MR_G^5Y_1^2 \\ m_2R_{31}^5(z_2-z_1)^2+m_3R_{21}^5(z_3-z_1)^2=MR_G^5Z_1^2 \\ M=m_1+m_2+m_3. \end{cases} \tag{7.113}$$

Здесь: R_G – радиус –вектор центра масс системы трех тел, он определяется элементарно.X_1, Y_1, Z_1 – новые неизвестные. Теперь (7.107) перепишется в новой форме:

$$(2+\mu_1)X_1^2-(1+2\mu_1)Y_1^2+(\mu_1-1)Z_1^2=0 \tag{7.114}$$

Это – уравнение конической поверхности второго порядка, в некоторой системе координат $(OX_1Y_1Z_1)$. Траектория первого тела – это некоторая кривая на этой поверхности. Аналогичный подход приводит к уравнениям для второго и третьего тела:

$$(2+\mu_2)X_2^2-(1+2\mu_2)Y_2^2+(\mu_2-1)Z_2^2=0 \tag{7.115}$$

$$(2+\mu_3)X_3^2-(1+2\mu_3)Y_3^2+(\mu_3-1)Z_3^2=0 \tag{7.116}$$

Мы ясно видим, что все три тела движутся по схожим траекториям, принадлежащим одинакового типа коническим поверхностям второго порядка. Известно, что линией пересечения конической поверхности с плоскостью может быть только кривая второго порядка: либо эллипс, либо парабола, либо гипербола.

Таким образом, четырехмерный подход дает не только три новых интеграла в задаче трех тел, но и подтверждает движение тел по однотипным кривым второго порядка. В задаче многих (N) тел четырехмерный подход дает новые (N) интегралов движения вида (7.107). Рассуждения аналогичные, как и в задаче трех тел.

Глава 8

Решение шестой задачи тысячелетия

В 2000 году Институт математики Клэя (США) опубликовал список из семи нерешенных математических задач, которые названы задачами тысячелетия. Шестая задачи тысячелетия касается проблемы существования и единственности гладкого решения задачи Коши, для систем уравнений Навье – Стокса.

1. Постановка задачи.

Пусть: $\nu > 0, \rho > 0$ –известные постоянные, коэффициент вязкости и плотность, $\vec{V}(t,x,y,z) = (u,v,w)$ - искомый вектор скорости, $P(t,x,y,z)$ –искомая функция давления вязкой несжимаемой жидкости, целиком заполнившей все трехмерное пространство R^3.

Рассмотрим в $G = R^3 \times [0,\infty)$ систему уравнений Навье – Стокса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = \nu\Delta u + F_1(t,x,y,z) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = \nu\Delta v + F_2(t,x,y,z) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = \nu\Delta w + F_3(t,x,y,z) \end{cases} \tag{8.1}$$

с условием неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{8.2}$$

и с начальными условиями:

$$u|_{t=0}=u_0(x,y,z);v|_{t=0}=v_0(x,y,z);w|_{t=0}=w_0(x,y,z). \tag{8.3}$$

Далее, по условию задачи, входные данные задачи являются сколь –угодно гладкими, а именно:

1. Для любого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ существуют положительные постоянные $C_{\alpha K}>0, K>0$, такие, что выполняются условия:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial^{|\alpha|}u_0}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}\right| \le \dfrac{C_{\alpha K}}{(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^K} \\ \left|\dfrac{\partial^{|\alpha|}v_0}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}\right| \le \dfrac{C_{\alpha K}}{(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^K} \\ \left|\dfrac{\partial^{|\alpha|}w_0}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}\right| \le \dfrac{C_{\alpha K}}{(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^K} \end{cases} \tag{8.4}$$

2. Для любого мультииндекса $\alpha^*=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ существуют положительные постоянные $C_{\alpha_0\alpha K}>0, K>0$, такие, что выполняются условия:

$$\left|\frac{\partial^{\alpha_0+|\alpha|}F_m}{\partial t^{\alpha_0}\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}\right| \le \frac{C_{\alpha_0\alpha K}}{(1+t+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^K}; m=\overline{1,3} \tag{8.5}$$

Доказать (или опровергнуть), что при таких входных данных задача (7.87) – (7.89) имеет сколь –угодно гладкое решение, с такими же дифференциальными свойствами, как и у известных данных:

$$\begin{cases} u, v, w, P \in C^{\infty}(G) \\ \left|\dfrac{\partial^{\alpha_0+|\alpha|}u}{\partial t^{\alpha_0}\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}\right| \le \dfrac{C_{\alpha_0\alpha K}}{(1+t+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^K} \\ \left|\dfrac{\partial^{\alpha_0+|\alpha|}v}{\partial t^{\alpha_0}\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}\right| \le \dfrac{C_{\alpha_0\alpha K}}{(1+t+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^K} \\ \left|\dfrac{\partial^{\alpha_0+|\alpha|}w}{\partial t^{\alpha_0}\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}\right| \le \dfrac{C_{\alpha_0\alpha K}}{(1+t+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^K} \\ \displaystyle\int_{R^3}(u^2+v^2+w^2)dxdydz < C, \forall t \in [0,\infty) \end{cases} \tag{8.6}$$

Такова полная постановка задачи, изложенная в работе [25] американского математика Ч.Феффермана. Дополнительно, постановщик задачи предлагает выбрать нулевую массовую силу $\vec{F} \equiv (0,0,0)$.

2. Анализ постановки проблемы.

Анализ проведем в духе работы [18] выдающегося математика О.А.Ладыженской, посвященной шестой задаче тысячелетия:

1) Дают ли уравнения Навье – Стокса (8.1) и (8.2) с начальным условием (8.3) детерминированное описание динамики течения вязкой несжимаемой жидкости?

2) Если да, то каковы дополнительные свойства компонент начальной скорости, можно ли их выбрать произвольно? Или достаточно того, что они удовлетворяют условиям (8.4)?

2) Связан ли вектор массовых сил $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ каким – то образом (функционально) с начальной скоростью $\vec{\varphi} = (u_0, v_0, w_0)$ или их можно выбрать абсолютно независимо?

Ответ на первый вопрос утвердительный и приведен в Теоремах 7.3.2 и 7.3.4 данной монографии. Если класс единственности решения задачи (8.1) –(8.3) выбрать в виде (7.17) или (7.26), то условие детерминированности выполнено. Задача Коши имеет единственное решение.

Ответ на второй вопрос будет следующим.

Касательно этой задачи можно показать, что не для всяких входных данных, даже с исключительными свойствами гладкости вида (8.4) и (8.5), сохраняется единственность классического решения исходной задачи (8.1) –(8.3).

Действительно, запишем исходную задачу в векторной форме Громека – Лэмба [20]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + rot\vec{V} \times \vec{V} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) + \nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) = \nu\Delta\vec{V} + \vec{F} \tag{8.7}$$

$$div\vec{V} = 0 \tag{8.8}$$

$$\vec{V}_{t=0} = \vec{\varphi} = (u_0, v_0, w_0) \tag{8.9}$$

Без ограничения общности, примем $div\vec{F} = 0$ и будем считать, что входные данные задачи $(\vec{F}, \vec{\varphi})$ удовлетворяют любым условиям согласованности между собой, обеспечивающим разрешимость задачи. Тогда, применяя к обеим частям (8.7) оператор дивергенции, мы получим эквивалентную систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \triangle\left(\dfrac{P}{\rho}\right) = -\triangle\left(\dfrac{V^2}{2}\right) - div[rot\vec{V} \times \vec{V}] \\ div\vec{V} = 0 \\ \vec{V}_{t=0} = \vec{\varphi} = (u_0, v_0, w_0) \end{cases} \tag{8.10}$$

Система (8.10) имеет бесконечно много решений, удовлетворяющих условиям (8.6), например, такие:

$$\vec{V}^{(1)} = e^{-t}\vec{\varphi}; \vec{V}^{(2)} = \frac{1+e^{-t}}{2}\vec{\varphi}, \cdots \tag{8.11}$$

Для каждой такой скорости, давление Р определяется как решение уравнения Пуассона, из первого уравнения системы.

Отсюда вывод: Условий (8.4) и (8.5) явно не достаточно, чтобы обеспечить единственность решения задачи Коши. Поэтому необходимо уточнить класс начальных данных. В первую очередь, необходимо определить класс единственности решения исходной задачи и, начальные данные (8.3) выбрать из класса–следа этого множества на гиперплоскости $t = 0$. Только после этого доказывается существование решения в данном классе единственности.

Ответ на третий вопрос будет следующим. Если искать единственное решение, соответствующее механическому смыслу (процесс детерминированный) течения жидкости, то мы априори выбираем в качестве начальных данных (8.3) функции из класса – следа множества трех –векторов (7.26), при $t = 0$. Причем берем такие данные, которые удовлетворяют жестким условиям (8.4). Очевидно, что $rot\vec{\varphi} \neq 0$. Иначе, по теореме Томсона скорость жидкости во все времена будет потенциальным вектором и ее компоненты будут гармоническими функциями во всем R^3. Но тогда, из теоремы Лиувилля, с учетом (8.5), получим только тривиальное, нулевое значение скорости.

Если вектор начальной скорости не потенциальный, то можно подобрать их так, что при $\vec{F} \equiv 0$ станут неразрешимыми уравнения движения (8.1). Таких контрпримеров можно построить сколько угодно. Отсюда вывод: Поиск классических (не обобщенных!) решений задач типа (8.1) – (8.3), тем более в бесконечной области, априори предполагает наличие согласованности начальных данных задачи.

При этом нельзя путать стационарные задачи для систем уравнений Навье – Стокса с нестационарными постановками в неограниченных областях. Только для стационарных задач для системы Навье – Стокса имеются решение типа Пуазейля, при нулевом $\vec{F} \equiv 0$. Для нестационарных задач условие $rot\vec{F} \equiv 0$ обеспечивает существование потенциала скорости, то есть, только безвихревого течения [20].

Отсюда вывод: Между массовой силой и начальной скоростью априори существуют функциональные связи, иначе задача может и не иметь классического решения из жесткого класса (8.6).

3. Выбор класса единственности. Из результатов предыдущих разделов ясно, что в нестационарной задаче вектор 4 –х скорости присутствует всегда. То есть, любому, сколь –угодно гладкому нестационарному трех –вектору скорости $\vec{V}(t,x,y,z) = (u,v,w)$ соответствует 4 –вектор вида $\vec{V}_{4d}(t,x,y,z) = (\theta,u,v,w) \in C^1[M(G)]$. Пусть $SP = (\alpha,\beta,\delta,\gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$– любой набор разрешающих параметров. $u = u_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \in M_A(G)$ –произвольная регулярная функция. Класс единственности $SMP(G) \subset C^1[M(G)]$ определяется нами на основе Теоремы 7.3.2 и формулы (7.26):

$$\begin{cases} SMP(G) = \{(\theta,u,v,w) \mid (\theta,u,v,w) \in C^1M(G)\}, \\ \hfill \theta = cu_3\left(\dfrac{\alpha x}{L},\dfrac{\beta y}{L},\dfrac{\delta ct}{L},\dfrac{\gamma z}{L}\right), \\ \hfill u = c\alpha_1 u_1\left(\dfrac{\alpha x}{L},\dfrac{\beta y}{L},\dfrac{\delta ct}{L},\dfrac{\gamma z}{L}\right), \\ \hfill v = -c\beta_1 u_2\left(\dfrac{\alpha x}{L},\dfrac{\beta y}{L},\dfrac{\delta ct}{L},\dfrac{\gamma z}{L}\right), \\ \hfill w = -c\gamma_1 u_4\left(\dfrac{\alpha x}{L},\dfrac{\beta y}{L},\dfrac{\delta ct}{L},\dfrac{\gamma z}{L}\right), \\ \hfill \alpha_1\alpha - \beta_1\beta - \gamma_1\gamma = 0. \end{cases} \tag{8.12}$$

Здесь: c –характерная скорость течения, за которую можно принять постоянную величину:

$$c = sup_{R^3}|u_0(x,y,z)| > 0 \tag{8.13}$$

Условия (7.90) обеспечивают конечность характерной скорости. Далее, L – это вспомогательная величина, имеющая размерность длины. Она необходима для соблюдения размерностей физических величин в формуле (8.12). В дальнейшем надобность в ней отпадет.

Теперь, используя условия (3.4), мы можем записать свойства компонент искомой четырехмерной функции из класса единственности $SMP(G) \subset C^1[M(G)]$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\delta c}\dfrac{\partial\theta}{\partial t} = \dfrac{1}{\alpha_1\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{\beta_1\beta}\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\gamma_1\gamma}\dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{1}{c\alpha_1\delta}\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\beta_1\gamma}\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{1}{\gamma_1\beta}\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \quad\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{1}{\alpha_1\gamma}\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{c\beta_1\delta}\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{\gamma_1\alpha}\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \quad\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = \dfrac{1}{\alpha_1\beta}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{\beta_1\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{c\gamma_1\delta}\dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases} \qquad (8.14)$$

Можно дать соответствующие пояснения относительно класса единственности $SMP(G) \subset C^1[M(G)]$.

Во –первых легко понять, что последние три функции из (8.12) удовлетворяют условию (8.2) при любой регулярной четырехмерной функции $u(X) \in M(G)$.

Во –вторых, здесь появляется четырехмерная, стационарная функция вида $V_{4d0} = (\theta_0, u_0, v_0, w_0)$ начальных данных, которая обязана принадлежать следу множества $SMP(G)$ на гиперплоскости $(t = 0)$, иначе задача не имеет решения в выбранном классе единственности.

Но в таком случае, компоненты такой начальной функции будут удовлетворять некоторым специфическим соотношениям: Действительно, запишем соотношения (8.14) при $t = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\delta c}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{\alpha_1\alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial x} = -\dfrac{1}{\beta_1\beta}\dfrac{\partial v_0}{\partial y} = -\dfrac{1}{\gamma_1\gamma}\dfrac{\partial w_0}{\partial z} \\ \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial\theta_0}{\partial x} = \dfrac{1}{c\alpha_1\delta}\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\dfrac{1}{\beta_1\gamma}\dfrac{\partial v_0}{\partial z} = -\dfrac{1}{\gamma_1\beta}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \\ \quad\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial\theta_0}{\partial y} = \dfrac{1}{\alpha_1\gamma}\dfrac{\partial u_0}{\partial z} = \dfrac{1}{c\beta_1\delta}\dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{\gamma_1\alpha}\dfrac{\partial w_0}{\partial x} \\ \quad\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial\theta}{\partial z_0} = \dfrac{1}{\alpha_1\beta}\dfrac{\partial u_0}{\partial y} = \dfrac{1}{\beta_1\alpha}\dfrac{\partial v_0}{\partial x} = \dfrac{1}{c\gamma_1\delta}\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} \end{cases} \qquad (8.15)$$

Отсюда автоматически определяется след $\theta_0(x, y, z)$ неизвестной функции $\theta(t, x, y, z)$, на гиперплоскости $t = 0$. Действительно, выберем из

(8.15) следующие соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_0}{\partial x} = -\dfrac{\alpha}{\beta_1\gamma}\dfrac{\partial v_0}{\partial z} = -\dfrac{\alpha}{\gamma_1\beta}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} = \psi_1(x,y,z) \\ \dfrac{\partial\theta_0}{\partial y} = \dfrac{\beta}{\alpha_1\gamma}\dfrac{\partial u_0}{\partial z} = \dfrac{\beta}{\gamma_1\alpha}\dfrac{\partial w_0}{\partial x} = \psi_2(x,y,z) \\ \dfrac{\partial\theta_0}{\partial z} = \dfrac{\gamma}{\alpha_1\beta}\dfrac{\partial u_0}{\partial y} = \dfrac{\gamma}{\beta_1\alpha}\dfrac{\partial v_0}{\partial x} = \psi_3(x,y,z) \end{cases} \quad (8.16)$$

Из (8.16), с учетом (8.15), легко получим:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{\partial\psi_3}{\partial x}; \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \frac{\partial\psi_3}{\partial y}; \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = \frac{\partial\psi_2}{\partial x}$$

Тогда однозначно определяется начальное значение:

$$\theta_0(x,y,z) \;=\; \int_0^x \psi_1(\xi,y,z)d\xi + \int_0^y \psi_2(0,\eta,z)d\eta - \int_z^\infty \psi_3(0,0,\zeta)d\zeta \quad (8.17)$$

Далее мы знаем, что любая функция из класса $SMP(G)$ однозначно определяется через свое начальное значение (Теорема 7.3.2) и потому это множество дает истинный класс единственности исходной задачи..

4. Об инвариантной форме уравнений движения

Теперь покажем, что на всех функциях класса единственности, левые части в уравнениях (8.1) приводятся к единой, инвариантной форме.

Лемма 8.4.1. Для любой четырехмерной функции из класса единственности $SMP(G)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} - \nu\triangle u = \dfrac{\alpha_1}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ I_2 = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} - \nu\triangle v = \dfrac{\beta_1}{\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ I_3 = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} - \nu\triangle w = \dfrac{\gamma_1}{\gamma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases} \quad (8.18)$$

где:

$$\varphi = c\delta\theta + \frac{\alpha}{2\alpha_1}u^2 + \frac{\beta}{2\beta_1}v^2 + \frac{\gamma}{2\gamma_1}w^2 - \frac{\nu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{\alpha_1\alpha}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{8.19}$$

Доказательство:

Из (8.12) простым дифференцированием и, с учетом условий (4.3), легко получим:

$$\triangle u = \frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \triangle v = -\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\beta^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2};$$
$$\triangle w = -\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\gamma^2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \tag{8.20}$$

Далее мы знаем, для четырехмерных функции из $SMP(G)$ выполняются соотношения (8.14). Тогда:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{c\alpha_1\delta}{\alpha}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\alpha_1\beta}{\alpha\beta_1}v\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\alpha_1\gamma}{\alpha\gamma_1}w\dfrac{\partial w}{\partial x} - \\ \qquad -\dfrac{\nu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{\alpha^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ I_2 = \dfrac{c\beta_1\delta}{\beta}\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \dfrac{\beta_1\alpha}{\beta\alpha_1}u\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\beta_1\gamma}{\beta\gamma_1}w\dfrac{\partial w}{\partial y} + \\ \qquad +\dfrac{\nu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{\beta^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\beta_1}{\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ I_3 = \dfrac{c\gamma_1\delta}{\gamma\delta_1}\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \dfrac{\gamma_1\alpha}{\gamma\alpha_1}u\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\gamma_1\beta}{\gamma\beta_1}v\dfrac{\partial v}{\partial z} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} + \\ \qquad +\dfrac{\nu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{\gamma^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases} \tag{8.21}$$

Лемма доказана.

Теперь, уравнения движения (8.1) примут простую форму:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = F_1(t,x,y,z) \\ \dfrac{\beta_1}{\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = F_2(t,x,y,z) \\ \dfrac{\gamma_1}{\gamma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = F_3(t,x,y,z) \end{cases} \tag{8.22}$$

Мы доказали, что на любых функциях из класса единственности, уравнения движения имеют инвариантную форму вида (8.22).

5. Описание допустимого класса массовых сил

Известно, что для существования классического решения различных задач гидродинамики, вектор массовых сил должен быть согласован с вектором начальных данных [8], даже в начально – краевых задачах, рассматриваемых в ограниченных областях. В нашем случае область неограничена, более того, решение задачи ищется в специфическом классе (8.6). Поэтому естественно ожидать, что условия согласования будут достаточно жесткими.

Лемма 8.5.1. Для любой потенциальной массовой силы $rot\vec{F} = 0$, система (8.22) приводит к тривиальной, нулевой скорости жидкости из класса единственности задачи.

Доказательство:

Если $\vec{F} = \nabla\Pi$, то система (8.22) запишется в следующей форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\Pi - \dfrac{P}{\rho}\right) \\ \dfrac{\beta_1}{\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\Pi - \dfrac{P}{\rho}\right) \\ \dfrac{\gamma_1}{\gamma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\Pi - \dfrac{P}{\rho}\right) \end{cases}$$

Эта система разрешима тогда и только тогда, когда:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \lambda \tag{8.23}$$

В таком случае из (8.12) получим:

$$\begin{cases} u = c\lambda\alpha u_1\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right) \\ v = -c\lambda\beta u_2\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right) \\ w = -c\lambda\gamma u_4\left(\dfrac{\alpha x}{L}, \dfrac{\beta y}{L}, \dfrac{\delta ct}{L}, \dfrac{\gamma z}{L}\right) \end{cases}$$

Отсюда, с учетом условий (3.4), легко получим: $rot\vec{V} = 0$, а это означает, что:

$$rot\vec{V} = 0; div\vec{V} = 0 \Rightarrow \triangle\vec{V} = 0$$

Тогда из теоремы Лиувилля, с учетом (8.6) следует, что $\vec{V} = 0$.

Лемма доказана.

Из нее следует, что для существования нетривиального решения исходной задачи, разрешающие параметры уравнения неразрывности необходимо выбрать в форме, отличной от (8.23). Это приводит нас к понятию набора разрешающих параметров системы уравнений Навье – Стокса (8.1).

Действительно, перепишем систему (8.22) в следующей форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = F_1(t, x, y, z) - \dfrac{\alpha_0}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\beta_1 - \beta_0}{\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = F_2(t, x, y, z) - \dfrac{\beta_0}{\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = F_3(t, x, y, z) - \dfrac{\gamma_0}{\gamma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases} \tag{8.24}$$

Здесь скаляры $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ подбираются так, чтобы:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha} = \frac{\beta_1 - \beta_0}{\beta} = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma} = \lambda$$

То есть:

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \lambda\alpha; \beta_1 = \beta_0 + \lambda\beta; \gamma_1 = \gamma_0 + \lambda\gamma \tag{8.25}$$

Отсюда, используя последнее из условий (8.12), получим:

$$\lambda = -\frac{\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0 - \gamma\gamma_0}{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2} \tag{8.26}$$

Определение 8.5.2 Произвольный набор из семи скаляров вида: $SPNS = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha, \beta, \delta, \gamma)$ называется набором разрешающих параметров системы Навье – Стокса (8.1), если:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \neq 0; \\ \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 \neq 0 \end{cases} \tag{8.27}$$

При этом, автоматически формируется набор разрешающих параметров уравнения неразрывности (8.2) вида:$SP = (\alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ такой, что последние три параметра определяются посредством формул (8.25) и (8.26).

Теперь можно описать класс массовых сил. Из (8.24) видно, что такая система разрешима тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{\partial\omega}{\partial x} + \dfrac{\alpha_0}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ F_2 = \dfrac{\partial\omega}{\partial y} + \dfrac{\beta_0}{\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ F_3 = \dfrac{\partial\omega}{\partial z} + \dfrac{\gamma_0}{\gamma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases} \tag{8.28}$$

Здесь ω –произвольная скалярная функция. Без ограничения общности можно считать $\omega = 0$, ибо градиент такой функции может быть отнесен к градиенту неизвестного давления. Таким образом, для любого набора разрешающих параметров системы Навье – Стокса, класс допустимых массовых сил дается формулой:

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{\alpha_0}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ F_2 = \dfrac{\beta_0}{\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ F_3 = \dfrac{\gamma_0}{\gamma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases} \tag{8.29}$$

При любой массовой силе из этого класса, система (8.24) имеет единственное решение вида:

$$P(t,x,y,z) = P_\infty - \lambda\rho\varphi \tag{8.30}$$

6. Определение условий согласования входных данных Здесь мы даем условия глобальной согласованности известных данных: вектора начальной скорости $\vec{V_0} = (u_0, v_0, w_0)$ с вектором массовых сил $\vec{F} = [F_1(t,x,y,z), F_2, F_3]$.

Пусть $SPNS = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha, \beta, \delta, \gamma)$ – набор разрешающих параметров. Для упрощения записи примем:

$$\alpha_0 = 4; \beta_0 = \gamma_0 = \beta = \gamma = i; \alpha = \delta = 1 \tag{8.31}$$

Это никак не умаляет общности. При этом, из (8.25) и (8.26) легко получим:$\lambda = -2$; $\alpha_1 = 2, \beta_1 = -i; \gamma_1 = -i$.

Теперь, из (8.15) следует, что компоненты вектора начальной скорости должны удовлетворять следующим условиям согласованности:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u_0}{\partial x} = -\dfrac{\partial v_0}{\partial y} = -\dfrac{\partial w_0}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial z} = \dfrac{\partial w_0}{\partial y} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u_0}{\partial z} = -\dfrac{\partial w_0}{\partial x} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u_0}{\partial y} = -\dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases} \tag{8.32}$$

После этого, формулой (8.17) автоматически определяется начальное значение недостающей компоненты 4 – скорости вида $\theta_0(x,y,z)$. Далее, из аналогов (7.58), (7.60)–(7.62) мы получим явные формулы для компонент 4 – скорости:

$$\theta(t,x,y,z) = \frac{\theta_0(x+ct,y,z) + \theta_0(x-ct,y,z)}{2} + \\ + \frac{u_0(x+ct,y,z) - u_0(x-ct,y,z)}{4} \tag{8.33}$$

$$u(t,x,y,z)=\frac{u_0(x+ct,y,z)+u_0(x-ct,y,z)}{2}+ \\ +\theta_0(x+ct,y,z)-\theta_0(x-ct,y,z) \quad (8.34)$$

$$v(t,x,y,z)=\frac{v_0(x+ct,y,z)+v_0(x-ct,y,z)}{2}+ \\ +\frac{w_0(x+ct,y,z)-w_0(x-ct,y,z)}{2} \quad (8.35)$$

$$w(t,x,y,z)=\frac{w_0(x+ct,y,z)+w_0(x-ct,y,z)}{2}+ \\ +\frac{v_0(x+ct,y,z)-v_0(x-ct,y,z)}{2} \quad (8.36)$$

Формулы (8.33) –(8.36) дают точные аналитические выражения компонент искомой 4 – скорости, для выбранного нами набора разрешающих параметров. Теперь, из формулы (8.19), через компоненты начальной скорости определяется скалярная функция:

$$\varphi=c\theta+\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}w^2-\frac{3\nu}{2}\frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.37)$$

Для уточнения дифференциальных свойств этих функции достаточно учесть следующий факт.

Лемма 8.6.1. Пусть функция $q(x,y,z)\in C^\infty(R^3)$ удовлетворяет условию (8.4). Тогда через нее можно определить такие две функции $\psi_1=q(x+ct,y,z), \psi_2=q(x-ct,y,z)\in C^\infty(R^3\times[0,\infty))$ автоматически удовлетворяющие условию вида (8.5).

Доказательство: Обозначим: $x+ct=\xi; x-ct=\eta$. Тогда:

$$\psi_1(t,x,y,z)=q(\xi,y,z);\psi_2(t,x,y,z)=q(\eta,y,z);-\infty<\xi,\eta<+\infty \quad (8.38)$$

Отсюда, записав условия (8.5) для функции $q(\xi, y, z)$, легко получим:

$$\left|\frac{\partial^{\alpha_0+|\alpha|}\psi_1}{\partial t^{\alpha_0}\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}\right| \leq \frac{C_{\alpha_0\alpha K}}{(1+\sqrt{(x+ct)^2+y^2+z^2})^K} \tag{8.39}$$

Такая же оценка верна для функции $\psi_2(t, x, y, z)$.**Лемма доказана.**

Из этой леммы следует, что все найденные функции $(\theta, u, v, w, \varphi)$ удовлетворяют условию (8.6).

Далее, компоненты массовой силы, глобально согласованной с вектором начальной скорости, определяются формулой (8.29) и, согласно Лемме 8.6.1, также будут удовлетворять условиям (8.5).

7. Глобальная теорема разрешимости

Теперь мы сможем сформулировать глобальную (по времени) теорему существования и единственности решения шестой задачи тысячелетия. Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} f_0(t,x,y,z) = \frac{1}{4}[2\theta_0(x+ct,y,z) + u_0(x+ct,y,z)] \\ f_1(t,x,y,z) = \frac{1}{4}[2\theta_0(x-ct,y,z) - u_0(x-ct,y,z)] \\ f_2(t,x,y,z) = \frac{1}{2}[v_0(x+ct,y,z) + w_0(x+ct,y,z)] \\ f_3(t,x,y,z) = \frac{1}{2}[v_0(x-ct,y,z) - w_0(x-ct,y,z)] \\ \varphi(t,x,y,z) = c(f_0+f_1) + (f_0-f_1)^2 - f_2^2 - f_3^2 - 3\nu\frac{\partial}{\partial x}(f_0-f_1) \end{cases} \tag{8.40}$$

Определение 8.7.1. Будем говорить, что вектор начальной скорости $\vec{V_0} = [u_0(x, y, z), v_0, w_0]$ глобально согласован с вектором массовых сил $\vec{F} = [F_1(t, x, y, z), F_2, F_3]$,если:

1. Компоненты начальной скорости удовлетворяют (8.32);

2. Компоненты вектора массовых сил согласованы с компонентами начальной скорости:

$$F_1(t,x,y,z) = 4\frac{\partial\varphi}{\partial x}; F_2(t,x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; F_3(t,x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{8.41}$$

где φ определяется из формулы (8.40). Таковы условия согласования начальных данных, когда уравнения движения станут разрешимыми.

Основная Теорема

Пусть вектор начальной скорости глобально согласован с вектором массовых сил. Тогда задача (8.1) – (8.3) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (8.6), следующего вида:

$$\left\{\begin{aligned} u(t,x,y,z) &= 2[f_0(t,x,y,z) - f_1(t,x,y,z)] \\ v(t,x,y,z) &= f_2(t,x,y,z) + f_3(t,x,y,z) \\ w(t,x,y,z) &= f_2(t,x,y,z) - f_3(t,x,y,z) \\ P(t,x,y,z) &= P_\infty + 2\rho\varphi(t,x,y,z) \end{aligned}\right. \qquad (8.42)$$

Доказательство: Эти функции удовлетворяют (8.1) – (8.3). Это нами уже доказано в процессе предыдущих рассуждений. Далее, все условия (8.6), кроме последнего, также доказаны ранее с помощью Леммы 8.6.1. Остается показать выполнение последнего условия из (8.6).

Известно, что начальные данные удовлетворяют условию вида:

$$\int_{R^3} \left[u_0^2(x,y,z) + v_0^2(x,y,z) + w_0^2(x,y,z)\right] dxdydz < C \qquad (8.43)$$

Это означает, что выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{R^3} \theta_0^2(x,y,z)dxdydz < C_0, \\ &\int_{R^3} u_0^2(x,y,z)dxdydz < C_1, \\ &\int_{R^3} v_0^2(x,y,z)dxdydz < C_2, \\ &\int_{R^3} w_0^2(x,y,z)dxdydz < C_3 \end{aligned}\right. \qquad (8.44)$$

Отсюда нетрудно понять, что выполняются неравенства и такого вида:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{R^3} \theta_0^2(x \pm ct, y, z)dxdydz < C_0, \forall t \in [0, \infty) \\ \displaystyle\int_{R^3} u_0^2(x \pm ct, y, z)dxdydz < C_1, \forall t \in [0, \infty) \\ \displaystyle\int_{R^3} v_0^2(x \pm ct, y, z)dxdydz < C_2, \forall t \in [0, \infty) \\ \displaystyle\int_{R^3} w_0^2(x \pm ct, y, z)dxdydz < C_3, \forall t \in [0, \infty) \end{cases} \tag{8.45}$$

Действительно, каждый из интегралов в левой части (8.45) простой заменой $|x \pm ct = \xi|$ легко приводится к виду (8.44).

Далее, формулы (8.40) показывают, что такого же вида оценки верны для следующих функции:

$$\int_{R^3} f_k^2(t, x, y, z)dxdydz < A_k, k = \overline{0, 3}; \forall t \in [0, \infty) \tag{8.46}$$

Например:

$$\begin{aligned} \int_{R^3} f_2^2(t, x, y, z)dxdydz &= \frac{1}{4}\int_{R^3} [v_0(x+ct, y, z)+w_0(x+ct, y, z)]^2 dxdydz \\ &\le \frac{1}{4}\int_{R^3} 2(v_0^2 + w_0^2)dxdydz \le \frac{1}{2}(C_2 + C_3) \end{aligned} \tag{8.47}$$

Теперь легко получим такую оценку:

$$\int_{R^3} \left[u^2(t, x, y, z) + v^2 + w^2\right] dxdydz \le C^*, \forall t \in [0, \infty) \tag{8.48}$$

Теорема доказана.

Нам удалось доказать глобальную теорему существования и единственности решения задачи Коши.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии даны ключевые категории новой теории в математике –теории функций четырехмерного переменного (числа).

Изложение дано в сжатой форме, преимущественно с точки зрения приложения математического аппарата теории в механике (физике), на основе новых и существенных результатов (спектральная норма, четырехмерная сфера Римана и т.д), полученных автором за последние годы.

Особо отметим следующие, ключевые выводы ТФЧП:

1. Существует ортогональное преобразование четырехмерного пространства, сохраняющее инварианты движения – спектральную норму и спектральный модуль элемента пространства;

2. Относительно таких движений пространства, безусловно форминвариантны все основные законы физики (механики);

3. Понятие 4 – вектора – это естественное следствие закона сохранения массы и оно присуще всем разделам физики (механики).

Из приведенных в книге примеров приложения математического аппарата ТФЧП , особо выделим следующие:

1. Описание континуума точных решений уравнения неразрывности – общего решения с точки зрения детерминированности;

2. Получение новых интегралов движения задачи трех (многих) тел небесной механики;

3. Получение явной аналитической формулы решения, так называемой, шестой задачи тысячелетия.

Далее отметим, что имеются примеры успешного приложения методов ТФЧП и к другим задачам естествознания. В частности выявлено, что ее методы дают неизвестные ныне методы кодирования (шифрования) и сжатия информации, передачи сигналов.

Это свидетельствует о наличии больших перспектив применения методов четырехмерной математики к прикладным исследованиям, во всех сферах современного естествознания.

Литература

[1] Абенов М. М. *Решения системы уравнений Навье - Стокса.* Алматы.: Изд–во К –2,2013.–58 с.

[2] Абенов М. М. *Решение шестой задачи тысячелетия.* Астана.: Кенже–Пресс медиа,2015.–60 с.

[3] Абенов М. М. *О континууме точных решений системы Эйлера.* Сборник тезисов Уфимской международной математической конференции: Изд–во РИЦ БашГУ,2016.– с.7-8

[4] Абенов М. М. *О точных решениях основной модели Навье - Стокса.* Сборник тезисов Международной математической конференции (посвященной 100 летию академика А.Д.Тайманова): Изд–во ИМиММ МОН РК,2017.– с.83-85

[5] Abenov M. M. ,Gabbassov M. B. *Movement of fluid inside the sphere.* International Journal of Engineering and Technology: 7 (4/30),2018.– p.42-44

[6] Айзерман М. А. *Классическая механика.* М.: Наука,1980.–368 с.

[7] Арнольд В. И.,Козлов В. В.,Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики.* М.: ВИНИТИ,1985.–304 с.

[8] Антонцев С. Н.,Кажихов А. В.,Монахов В. Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* Новосибирск.: Наука,1983.– 316 с.

[9] Аристов С. Н., и др.*Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных.* «Теоретические основы химической технологии», 2009, том 43, №5,С.547-566.

[10] Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.- М.:Наука,1984.–280 с.

[11] Дзядык Г. Н. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами* М.: Наука,1978.–456 с.

[12] Дубошин В. К. *Небесная механика.Аналитические и качественные методы* М.: Наука,1977.–512 с.

[13] Дубровин Б. А.,Новиков С. П.,Фоменко А. Т. *Современная геометрия: Методы и приложения.* М.: Наука,1986.–760 с.

[14] Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М.: Наука,1967.–576 с.

[15] Кантор И. Л.,Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа.* М.: Наука,1973.–144 с.

[16] Колмогоров А. Н.,Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука,1989.–624 с.

[17] Лаврентьев М. А.,Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* М.: Наука,1965.–716 с.

[18] Ладыженская О. А. *Шестая проблема тысячелетия: Уравнения Навье – Стокса, существование и гладкость.* УМН, 2003,том 58, выпуск 2(350), С.45-78.

[19] Ландау Л. Д.,Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика в 10-ти томах.* М.: Наука,1988.

[20] Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа.* - М.:Наука,1970 –904 с.

[21] Маукеев Б. И.,Абенов М. М. *Начальные главы теории функций бикомплексного переменного.* Алматы.: МТИА,2003.–58 с.

[22] Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука,1978.

[23] Степанов В. В. *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Изд.физ – мат,1959–468 с.

[24] Титчмарш Е. К. *Теория дзета – функции Римана* М.: Изд.иностр.лит.,1953–408 с.

[25] Fefferman C. L. *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equations.* http://www.claymath.org/,2000.

.

Научное издание

Махсут Мнайдарович Абенов

ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИКА:
МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Монография

Дизайн обложки: А. Калиева

ИБ №13175
Подписано в печать 20.11.2019. Формат 60х84/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 11,0 п.л.
Тираж 200 экз. Заказ №7605. Цена договорная.
Издательский дом «Қазақ университеті»
Казахского национального университета имени аль-Фараби.
050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71, КазНУ.
Отпечатано в типографии издательского дома
Қазақ университеті».