М.М. АБЕНОВ

# РЕШЕНИЕ ШЕСТОЙ ЗАДАЧИ ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ

Астана 2015


Kenje Press
MEDIA

М.М. АБЕНОВ

# РЕШЕНИЕ
# ШЕСТОЙ ЗАДАЧИ ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ

Kenje Press
MEDIA
Астана 2015



**Абенов Максут Мнайдарович** (1960, Костанайская область) - казахстанский математик, кандидат физико-математических наук (ВАК СССР-1990 г.).

В 1977 году окончил Республиканскую физико-математическую школу г.Алматы.

В 1984 году математический факультет КазГУ им. С.М.Кирова.

1984-1987- аспирант ИММ АН Казахской ССР.

В 1990 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.01.02- "дифференциальные уравнения и математическая физика" под руководством выдающегося математика, член-корреспондента АН Казахской ССР, д.ф.-м.н., проф. Е.И.Кима.

В 2002 году (совместно с Б.И.Маукеевым) обосновал основы новой теории в математике - теории функции бикомплексного переменного, монография "Начальные главы теории функции бикомплексного переменного" опубликована в г. Алматы 2003 г.

В 2004-2013 годах создал теорию четырехмерных регулярных функций (ТЧРФ), являющейся четырехмерным обобщением теории функции комплексного переменного (ТФКП).

В 2013 году на основе теории четырехмерных функций нашел континуум точных решений уравнения неразрывности – ключевого уравнения всей физики. Это уравнение зримо или неявно присутствует во всех математических моделях, описывающих реальные физические процессы.

Фактически, этот континуум функций дает общее решение уравнения неразрывности в классическом смысле. Благодаря этому упрощается решение целого класса задач гидродинамики, теории упругости и т.д, содержащих нелинейные системы дифференциальных уравнений.

В 2015 году, на основе ТЧРФ им найдено явное аналитическое решение шестой задачи тысячелетия в обоих вариантах ее постановки математическим институтом Клея (США).

Автор ряда учебных пособий и методических указании для ВУЗ-ов., 4-х научных монографий, имеет более 50-ти публикации в известных научных изданиях.

УДК 517.958

ББК 22.161.5

А-14

Редактор **Б.Жумадильдин**

Автор **М.М. Абенов**

А-14 **Решение шестой задачи тысячелетия.** -Астана: Издательство Кенже-Пресс-Медиа, 2015. - 54 стр.

ISBN 9965-549-26-5

В научной монографии на основе теории регулярных четырехмерных функций, дается явное аналитическое решение шестой задачи тысячелетия, в обоих вариантах ее постановки математическим институтом Клея (США). Для специалистов, интересующихся математическими методами решения прикладных дифференциальных уравнений физики и механики.

Библиография: - 10 назв.

УДК 517.958 (035)

ББК 22.161.5

ISBN 9965-549-26-5

©Абенов М.М., 2015

© Кенже-Пресс-Медиа, 2015

## Предисловие

Известно, что математические модели реальных процессов физики (механики) представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных [3] – [4], где в качестве неизвестных фигурируют действительные функций от четырех действительных переменных вида $V(x, y, z, t)$, где $x, y, z$ - пространственные координаты, $t$- время.

Исследование большинства этих моделей «в лоб» (особенно содержащих нелинейные уравнения) в исходной четырехмерной постановке, сопряжено с большими трудностями, связанными с отсутствием приемлемого четырехмерного математического аппарата исследования таких задач.

Шестая задача тысячелетия [1] относится к разряду именно таких задач.

Отметим в этой связи, что многие практические задачи аэро-газо-гидродинамики, теории упругости и другие прикладные задачи физики (механики) обычно решаются в упрощенном варианте (двумерные и одномерные модели), где исследователи пользуются одномерным (методы теории функций действительного переменного) и двумерным (методы теории функций комплексного переменного) математическими аппаратами исследования этих задач. Причем, в большинстве случаев изучаются стационарные (устоявшиеся во времени) процессы [4].

Тут уместно отметить, что между однотипными функциями одного действительного переменного (одномерные функции) и комплексного переменного (двумерные функции) прослеживается некая схожесть (общность), и не только по внешнему виду аналитического задания этих функций.

Действительно, если $u = sinx$ функция от одного действительного переменного $x$, то в двумерном случае ее аналогом служит функция комплексного переменного $u = sinz$, унаследовавшая ключевые свойства своего одномерного аналога, к примеру, такое важнейшее свойство одномерной функции, как: $sin^2 z + cos^2 z = 1$.

Такого рода «схожесть» имеет место и между другими одномерными и двумерными функциями. Сравнительный анализ их свойств нередко используется для поиска оптимальных подходов к решению двумерной задачи, если решение одномерного аналога уже известно.

В отличие от вышеизложенного, обычные функций четырех действительных переменных $F(x, y, z, t): R^4 \rightarrow R^1$, если их рассматривать

автономно, не проявляют сколь-нибудь заметных свойств. Как правило, не удается проследить заметные аналогии в их свойствах, сравнимых с известными свойствами досконально изученных одномерных или двумерных функций.

А ведь через них выражаются решения большинства прикладных задач физики и механики, в том числе и решение шестой задачи тысячелетия. А что если их рассматривать в виде объектов, где они объединены в различные четверки таких функций? Ведь не зря в физике уже давно рассматривается понятие так называемого четырех вектора.

Такие мысли и привели, много лет назад, автора данной работы к идее поиска и описания неких четырехмерных аналогов известных функций из действительного и комплексного анализа. При этом особенно важно было добиться того, чтобы основные свойства получаемых четырехмерных функций соответствовали известным свойствам своих двумерных и одномерных аналогов (принцип унаследования основных свойств).

Цель – создание элементов нового математического аппарата, в какой-то мере облегчающего исследование четырехмерных математических моделей в исходной постановке, благодаря наличию специфических свойств у получаемых четырехмерных функций.

Многолетние исследования автора в данном направлении привели к описанию бесконечномерного линейного пространства, элементами которого являются упорядоченные четверки функций от четырех действительных переменных. Оказалось, что каждый элемент этого пространства проявляет свойства, абсолютно схожие с основными свойствами своих двумерных или одномерных аналогов – однотипных обычных функций из действительного и комплексного анализа.

В данной работе будут показаны возможности применения созданного математического аппарата теории четырехмерных регулярных функций (ТЧРФ), к нахождению явного аналитического решения шестой задачи тысячелетия, поставленной математическим институтом Клея (США).

Для этого последовательно решены следующие задачи:

1. В терминах новой математической теории четырехмерных функций, заново переосмыслены постановки различных задач гидродинамики;
2. Впервые определен континуум точных решений (в некотором смысле, общее решение) обоих уравнений неразрывности, с использованием аппарата четырехмерных функций:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho V_2)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho V_3)}{\partial z} = 0$$ (для сжимаемой жидкости),

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 0$$ (для несжимаемой жидкости);

Здесь особо отметим, что уравнение неразрывности, в терминах четырехмерных функций, может рассматриваться как одно уравнение с одной неизвестной (четырехмерной) функцией.

3. Впервые доказана глобальная разрешимость задачи Коши для системы уравнений Навье - Стокса в общей постановке, при этом найдена конкретная формула точного решения этой задачи. Отсюда, уже как частный случай, выводится доказательство разрешимости шестой задачи тысячелетия, в обоих вариантах его постановки математическим институтом Клея (США).
4. Найден явный аналитический вид точных решений шестой задачи тысячелетия, при конкретных видах массовых сил и начальной скорости.

Исследования показали, что применение математического аппарата ТЧРФ позволяет значительно упростить и другие сложные нелинейные системы уравнений в задачах теории упругости, аэродинамики, гидродинамики и т. д, а в ряде случаев даже приводит к получению явных аналитических решений нелинейных задач, ранее не поддававшихся решению.

Так, разработанный математический аппарат также позволяет доказать глобальную разрешимость задачи Коши для системы уравнений Эйлера, описывающего баротропное течение сжимаемой жидкости.

Эти и другие имеющиеся результаты подчеркивают достаточную привлекательность излагаемого математического аппарата для исследования различных четырехмерных прикладных задач механики и физики.

Замечания, отзывы и пожелания по данной работе с благодарностью будут приняты по электронному адресу: abenov.m.m@gmail.com

# ГЛАВА 1. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ФУНКЦИИ

В данной главе дается понятие о четырехмерной функции, как о некотором объекте, являющимся четырехмерным аналогом известной типовой функции из действительного и комплексного анализа. Причем элементарные четырехмерные функций могут быть выписаны в явном виде, что позволяет подробно описать их основные свойства [5], [7], [8].

## 1.1. Определение множества четырехмерных функций

Пусть $G \subset R^3 \times [0,\infty)$ – некоторая четырехмерная область. Рассмотрим всевозможные отображения вида $u: G \to R^4$. Легко понять, что при таких отображениях, каждому элементу $X = (x, y, z, t) \in G$ ставится в соответствие вполне определенный образ - четырехкомпонентный объект следующего вида: $u(X) = [u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t), u_3(x, y, z, t), u_0(x, y, z, t)] \in R^4$.

**Определение 1.1.1**

Объект вида $u = (u_1, u_2, u_3, u_0)$, являющийся образом, полученным при некотором отображении $u: G \to R^4$ назовем четырехмерной функцией, а все множество четырехмерных функций обозначим как $M(G)$.

**Определение 1.1.2**

Компоненты четырехмерной функции $u_i(x, y, z, t), \left( i = \overline{0,3} \right)$, назовем составляющими функциями.

Понятно, что составляющая функция является обычной действительной функцией от четырех действительных переменных, заданной в области $G$ и, вообще говоря, может иметь различные дифференциальные свойства.

То есть, она может быть непрерывной, дифференцируемой сколь угодно раз или иметь разрывы в некоторых точках или даже вдоль некоторой линий (поверхности) из области $G$.

Можно рассматривать и стационарную четырехмерную функцию, когда ни одна из компонент не зависит от времени. Такие функции используются при исследовании стационарных (устоявшихся во времени) процессов.

Так, объект вида $U = (x^2 + siny;\ t - e^{zyx};\ x - y + z - t;\ xt + yz)$, по определению, является нестационарной четырехмерной функцией.

Вычислим «след» этой функции, при $t = 3$. Тогда получим функцию $U_{t=3} = (x^2 + siny;\ 3 - e^{zyx};\ x - y + z - 3;\ 3x + yz)$, под названием стационарная четырехмерная функция. Элемент $(a, b, c, d) \in R^4$, где составляющие есть постоянные числа, можно принять в качестве постоянной четырехмерной функции из множества $M(G)$.

**Лемма 1.1.3.** Множество $M(G)$ является линейным пространством относительно операции покомпонентного сложения и умножения на скаляр.

Действительно, для произвольных двух элементов $U = (u_1, u_2, u_3, u_0)$, $V = (v_1, v_2, v_3, v_0)$ и для произвольных скаляров $\lambda, \mu$ можно ввести правило: $\lambda U \pm \mu V = (\lambda u_1 \pm \mu v_1, \lambda u_2 \pm \mu v_2, \lambda u_3 \pm \mu v_3, \lambda u_0 \pm \mu v_0)$. Тогда утверждение леммы станет очевидным.

В качестве нулевого элемента $M(G)$, очевидно, берется постоянная четырехмерная функция $\theta = (0,0,0,0)$.

**Определение 1.1.4**

Четырехмерную функцию, у которой все составляющие - суть действительные и непрерывные функции от четырех переменных в области $G$, назовем непрерывной четырехмерной функцией, а все множество таких функций обозначим как $CM(G)$.

Очевидно включение $CM(G) \subset M(G)$. Относительно операции покомпонентного сложения и умножения на скаляр, $CM(G)$ также является линейным пространством.

Действительно, если $u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in CM(G), v = (v_1, v_2, v_3, v_0) \in CM(G)$, то, $(\lambda u + \mu v) \in CM(G)$, для любых скаляров $\lambda, \mu$.

Пусть теперь $G -$ ограниченное замкнутое множество (компакт). Тогда, в пространстве четырехмерных функций $CM(G)$, естественным путем вводится следующее понятие нормы элемента:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \boldsymbol{max_i}\,\{\boldsymbol{sup_G}|\boldsymbol{u_i}|\} \qquad (1.1.5)$$

Этим мы превратим $CM(G)$ в полное линейное нормированное пространство, где сходимость последовательности элементов вида $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ понимается как равномерная сходимость четырех последовательностей составляющих функций $\lim_{n\to\infty} u_{in} = u_i, i = \overline{0,3}$. При этом: $u_n = (u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}, u_{0n}) \in CM(G)$, $u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in CM(G)$.

Далее, по аналогии можно изучать различные подмножества вида $C^k M(G) \subset CM(G)$ четырехмерных функций, составляющие которых имеют смешанные непрерывные производные до $k -$ го порядка в области $G$. На этом вопросе мы здесь особо не останавливаемся.

Наша конечная цель – определение и описание особо специфического подмножества $M_A(G) \subset M(G)$, каждый элемент которого играет роль своеобразного четырехмерного аналога типовой функций из действительного и комплексного анализа. Ниже будет определено такое подпространство $M_A(G)$, элементы которого и будут приняты в качестве

«естественных» (регулярных) четырехмерных функций. При этом выяснится, что ключевые свойства любого элемента $M_A(G)$ будут идентичными свойствам соответствующей типовой функции, из действительного или комплексного анализа.

### 1.2. Описание пространства $M_A(G)$

Пусть $U = (u_1, u_2, u_3, u_0) \subset M(G)$, составляющие которой (как обычные функции четырех действительных переменных) дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности любой точки области $G$.

**Определение 1.2.1.**

Элемент $U = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in C^2M(G)$ назовем «естественной» или регулярной четырехмерной функцией в области $G$, если выполняются соотношения (обобщенные условия Коши-Римана) следующего вида:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_3}{\partial z}$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial u_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\partial u_3}{\partial t} \qquad (1.2.2)$$

Любая постоянная четырехмерная функция $U = (a, b, c, d)$, очевидно, будет регулярной функцией в произвольной области $G$, так как ее компоненты (постоянные числа) подавно удовлетворяют условиям (1.2.2).

Другим примером регулярной всюду функции является простейшая четырехмерная функция $U = X = (x, y, z, t)$.

Все множество таких функций обозначим как $M_A(G)$.

**Лемма 1.2.3.**

Подмножество $M_A(G)$ линейного пространства $M(G)$ само является линейным пространством относительно операции покомпонентного сложения элементов и умножения на скаляр.

Доказательство: Действительно, если функции $U = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$, $V = (v_1, v_2, v_3, v_0) \in M_A(G)$, то для произвольных скаляров $\lambda, \mu \in R$ имеем: $\lambda U \pm \mu V = (\lambda u_1 \pm \mu v_1, \lambda u_2 \pm \mu v_2, \lambda u_3 \pm \mu v_3, \lambda u_0 \pm \mu v_0) \in M_A(G)$, так как очевидно, что линейным соотношениям (1.2.2) удовлетворяет любая линейная комбинация двух регулярных функций.

В дальнейшем будет показано, что линейное подпространство $M_A(G)$ бесконечномерно. При этом выяснится, что каждая из регулярных

четырехмерных функций может рассматриваться в качестве четырехмерного аналога соответствующей типовой функции из действительного и комплексного анализа.

**Пример 1.2.4.** Рассмотрим функцию $U=(u_1,u_2,u_3,u_0)$, где компоненты имеют следующий вид:

$u_1(x,y,z,t)=x^2-y^2+t^2-z^2;$ $u_2(x,y,z,t)=2xy+2zt;$

$u_3(x,y,z,t)=2xz+2yt;$ $u_0(x,y,z,t)=2xt-2yz;$

Легко проверить, что компоненты (составляющие) этой функции удовлетворяют условиям (1.2.2) в любой области $G$, поэтому данная функция является регулярной четырехмерной функцией. Более того, примечателен такой интересный факт:

$u_1(x,y,0,0)=x^2-y^2;$ $u_2(x,y,0,0)=2xy;$

$u_3(x,y,0,0)=0;$ $u_0(x,y,0,0)=0;$

Получен некий двумерный аналог $U=z^2=(x^2-y^2,2xy,0,0)$, который представляет собой лишь другую форму записи элементарной функции от одного комплексного переменного $z^2=(x+iy)^2$.

Аналогично, $u_1(x,0,0,0)=x^2;$ $u_2(x,0,0,0)=0;$

$u_3(x,0,0,0)=0;$ $u_0(x,0,0,0)=0;$

Полученный одномерный аналог $U=x^2=(x^2,0,0,0)$ является просто другой формой записи обычной функции одного действительного переменного. Такое положение вещей свойственно всем регулярным четырехмерным функциям, то есть, указанным путем из ее вида (формулы) легко выводятся соответствующие двумерные и одномерные аналоги.

Пусть $X=(x,y,z,t)$, тогда рассмотренную выше функцию можно обозначить $U=X^2$ и, считать четырехмерным обобщением известных элементарных функций: $U=(x+iy)^2$ (двумерный аналог) и $U=x^2$ (одномерный аналог).

В дальнейшем будет показано, что пространство $M_A(G)$ замкнуто относительно некоторой специфической, но коммутативной операции умножения, в рамках которой и будет: $U=X^2=X\times X$.

Пусть $U=(u_1,u_2,u_3,u_0)\in M_A(G);$ $V=(v_1,v_2,v_3,v_0)\in M_A(G).$

Определим четырехмерную функцию $W=(w_1,w_2,w_3,w_0)\in M(D)$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} w_1&=u_1v_1-u_2v_2-u_3v_3+u_0v_0\\ w_2&=u_2v_1+u_1v_2+u_0v_3+u_3v_0\\ w_3&=u_3v_1+u_0v_2+u_1v_3+u_2v_0 \end{aligned} \qquad (1.2.5)$$

$$w_0 = u_0v_1 - u_3v_2 - u_2v_3 + u_1v_0$$

**Теорема 1.2.6.**

Функция, определенная формулой (1.2.5) является регулярной четырехмерной функцией, то есть, $W \in M_A(G)$.

Доказательство:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x}v_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x}v_2 + \frac{\partial u_0}{\partial x}v_0 - \frac{\partial u_3}{\partial x}v_3 + \frac{\partial v_1}{\partial x}u_1 - \frac{\partial v_2}{\partial x}u_2 + \frac{\partial v_0}{\partial x}u_0 - \frac{\partial v_3}{\partial x}u_3$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}v_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y}v_2 + \frac{\partial u_3}{\partial y}v_0 + \frac{\partial u_0}{\partial y}v_3 + \frac{\partial v_1}{\partial y}u_2 + \frac{\partial v_2}{\partial y}u_1 + \frac{\partial v_0}{\partial y}u_3 + \frac{\partial v_3}{\partial y}u_0$$

Отсюда получим: $\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial y}$, так как компоненты $u_i$ , $v_j$ $\left(i,j = \overline{0,3}\right)$ удовлетворяют условиям (1.2.2) по определению.

Аналогичные прямые подсчеты показывают, что все компоненты $w_j$ $(j = \overline{0,3})$ удовлетворяют условиям (1.2.2), то есть, $W = (w_1, w_2, w_3, w_0) \in M_A(G)$.

**Определение 1.2.7.**

Четырехмерная функция $W = (w_1, w_2, w_3, w_0)$, определяемая соотношениями (1.2.5), называется произведением четырехмерных функций $U = (u_1, u_2, u_3, u_0)$ и $V = (v_1, v_2, v_3, v_0)$.

Утверждения теоремы (1.2.6) означают, что пространство $M_A(G)$ замкнуто относительно такой специфической операции умножения четырехмерных функций.

Причем особо ценно то, что данная операция является коммутативной.

Действительно по формулам (1.2.5) легко проверяется, что $UV = VU$.

Можно легко проверить, что введенная операция произведения (1.2.5) является естественным четырехмерным обобщением обычных операций умножения функций из действительного и комплексного анализа.

Теперь у нас появляется возможность определения вида базисных элементов множества $M_A(G)$.

За основную независимую переменную берем $X = (x, y, z, t)$. Тогда по формулам (1.2.5) последовательно определяются:

$$X^2 = (w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{20}), \text{ где:}$$

$$w_{21}(x,y,z,t) = x^2 - y^2 + t^2 - z^2; \qquad w_{22}(x,y,z,t) = 2xy + 2zt;$$

$$w_{23}(x,y,z,t) = 2xz + 2yt; \qquad w_{20}(x,y,z,t) = 2xt - 2yz;$$

$$X^3 = (w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{30}), \text{ где:}$$

$$w_{31}(x,y,z,t) = x^3 - 3xy^2 + 3xt^2 - 3xz^2 - 6yzt;$$

$$w_{32}(x,y,z,t) = -y^3 + 3yx^2 + 3yt^2 - 3yz^2 + 6xzt$$
$$w_{33}(x,y,z,t) = -z^3 + 3zx^2 - 3zy^2 + 3zt^2 + 6xyt$$
$$w_{30}(x,y,z,t) = t^3 + 3tx^2 - 3ty^2 - 3tz^2 - 6xyz$$

Далее, по индукции доказывается, что для любой натуральной степени:

$X^n = (w_{n1}, w_{n2}, w_{n3}, w_{n0})$, где:

$$w_{n1}(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left\{[(x+t)^2 + (y+z)^2]^{\frac{n}{2}} \cos\left(narctg\frac{y+z}{x+t}\right) + [(x-t)^2 + (y-z)^2]^{\frac{n}{2}} \cos(narctg\frac{y-z}{x-t})\right\};$$

$$w_{n2}(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left\{[(x+t)^2 + (y+z)^2]^{\frac{n}{2}} si\, n\left(narctg\frac{y+z}{x+t}\right) + [(x-t)^2 + (y-z)^2]^{\frac{n}{2}} \sin(narctg\frac{y-z}{x-t})\right\};$$

$$w_{n3}(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left\{[(x+t)^2 + (y+z)^2]^{\frac{n}{2}} \sin\left(narctg\frac{y+z}{x+t}\right) - [(x-t)^2 + (y-z)^2]^{\frac{n}{2}} \sin(narctg\frac{y-z}{x-t})\right\};$$

$$w_{n0}(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left\{[(x+t)^2 + (y+z)^2]^{\frac{n}{2}} \cos\left(narctg\frac{y+z}{x+t}\right) - [(x-t)^2 + (y-z)^2]^{\frac{n}{2}} \cos(narctg\frac{y-z}{x-t})\right\}; \quad (1.2.8)$$

Итак, в пространстве $M_A(G)$ содержится счетное подмножество элементов вида $X^0, X^1, \ldots . X^n, \ldots ..$

где: $X^0 = \mathrm{E} = (1,0,0,0)$, $X^1 = X = (x,y,z,t)$ и т.д.

**Теорема 1.2.9.**

Пространство $M_A(G)$ является бесконечномерным пространством.

Доказательство:

Рассматриваемое пространство четырехмерных функций бесконечномерно, так как оно содержит бесконечно-счетное множество линейно-независимых элементов вида: $\mathrm{E}, X^1, \ldots . X^n, \ldots$

Действительно, при любом конечном $n$, линейная независимость конечного числа элементов вида: $\mathrm{E}, X^1, \ldots . X^n$ очевидна.

Это легко понять из следующих соображений.

Если в формулах (1.2.8) положить $y = z = t = 0$, то получим одномерный аналог степеней:

$$X^n = (x^n, 0,0,0)$$

Аналогично, при $z = t = 0$, получим формулу для определения натуральной степени комплексного числа $z^n = (x+iy)^n$.

$$X^n = ((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(narctg\frac{y}{x}\right); (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}} \sin(narctg\frac{y}{x}), 0, 0)$$

Легко заметить, что последняя формула есть не что иное, как тригонометрическая запись степени $z^n$.

То есть, четырехмерным элементам вида: $\mathrm{E}, X^1, \ldots . X^n, \ldots ..$ соответствуют:

в одномерном случае, последовательность: $1, x, x^2, \ldots . x^n \ldots$,

в двумерном случае - $1, z, z^2, \ldots . z^n \ldots \ldots$

**Определение 1.2.10.**

Функции $\mathrm{E}, X^1, \ldots . X^n, \ldots ..$ назовем базисными элементами $M_A(G)$.

## 1.3. Анализ простейших элементов $M_A(G)$

В данном разделе изучим другие простейшие функции из класса $M_A(G)$.

**1.Общий вид линейной функции.**

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_0) \neq \Theta \in R^4$, $\mathrm{b} = (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_0) \in R^4$, $X = (x, y, z, t)$. Тогда общий вид линейной функции запишется так: $u(X) = aX + \mathrm{b}$.

Отсюда, $u$=$\{u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t), u_3(x, y, z, t), u_0(x, y, z, t)\}$ (1.3.1)

Раскрыв правую часть (1.3.1) по формулам сложения и умножения, получим следующий вид составляющих функций:

$$u_1(x, y, z, t) = a_1 x - a_2 y - a_3 z + a_0 t + b_1$$
$$u_2(x, y, z, t) = a_2 x + a_1 y + a_0 z + a_3 t + b_2$$
$$u_3(x, y, z, t) = a_3 x + a_0 y + a_1 z + a_2 t + b_3$$
$$u_0(x, y, z, t) = a_0 x - a_3 y - a_2 z + a_1 t + b_0$$

Эту четырехмерную функцию мы считаем естественным четырехмерным обобщением линейных функций действительного и комплексного анализа в связи со следующими ее свойствами:

$$u(x, 0,0,0) = \{a_1 x + \mathrm{b}_1, 0, 0, 0\} = a_1 x + \mathrm{b}_1 \quad (1.3.2)$$

$$u(x, y, 0,0) = \{a_1 x - a_2 y + \mathrm{b}_1;\ a_2 x + a_1 y + \mathrm{b}_2;\ 0;\ 0\} \quad (1.3.3)$$

Ясно, что (1.3.2) – запись линейной функции от одного переменного $x$, а (1.3.3) – другая форма записи линейной функции комплексного переменного $u$ =$aZ + \mathrm{b}$, где: $a = (a_1, a_2, 0, 0) \neq 0$, $\mathrm{b} = (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, 0, 0) -$ комплексные числа, $Z = x + iy$ – комплексная переменная.

**2.Составляющие квадратного трехчлена**

Пусть: $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \neq \Theta \in R^4$, $\mathrm{b} \in R^4$, $c \in R^4$, $X = (x, y, z, t) -$ независимая переменная. Тогда общий вид квадратичной функции запишется так:

$$u(X) = aX^2 + \mathrm{b}X + c \quad (1.3.4)$$

Раскрыв правую часть (1.3.4) по формулам сложения и умножения функции, (предварительно определив $X^2$) получим следующий вид составляющих функций:

$u_1(x,y,z,t) = a_1(x^2 - y^2 + t^2 - z^2) - 2a_2(xy + tz) + 2a_3(xt - yz) - 2a_4(xz + yt) + \mathrm{b}_1 x - \mathrm{b}_2 y + \mathrm{b}_3 t - \mathrm{b}_4 z + c_1,$

$u_2(x,y,z,t) = a_2(x^2 - y^2 + t^2 - z^2) + 2a_1(xy + tz) + 2a_4(xt - yz) + 2a_3(xz + yt) + \mathrm{b}_2 x + \mathrm{b}_1 y + \mathrm{b}_4 t + \mathrm{b}_3 z + c_2,$

$u_3(x,y,z,t) = a_4(x^2 - y^2 + t^2 - z^2) + 2a_3(xy + tz) + 2a_2(xt - yz) + 2a_1(xz + yt) + \mathrm{b}_4 x + \mathrm{b}_3 y + \mathrm{b}_2 t + \mathrm{b}_1 z + c_4,$

$u_0(x,y,z,t) = a_3(x^2 - y^2 + t^2 - z^2) - 2a_4(xy + tz) + 2a_1(xt - yz) - 2a_2(xz + yt) + \mathrm{b}_3 x - \mathrm{b}_4 y + \mathrm{b}_1 t - \mathrm{b}_2 z + c_3.$

Из общего вида этой четырехмерной функции, легко получить соответствующие двумерные и одномерные аналоги.

### 3.Составляющие многочлена

Пусть $a_k = (a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, a_{4k}) \in R^4$, $k = \overline{0, n-1.}$, где $a_{n-1} \neq \Theta$. Многочлен от независимого переменного $X$, (степени не выше $n-1$) определяется по следующей формуле:

$$u(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} \qquad (1.3.5)$$

При раскрытии правой части (1.3.5), последовательно определяются все степени $X$ (формула 1.2.8) а затем производится умножение на коэффициенты $a_k$ по формуле (1.2.5). Двумерные и одномерные аналоги этого четырехмерного многочлена легко получить из общей формулы (1.3.5) и, они представляют собой обычные многочлены из действительного и комплексного анализа.

Для более полного описания других типов четырехмерных функций необходимо определить операцию деления элементов в этом множестве. Такая специфическая операция определяется как обобщение обычной операции деления функций из действительного и комплексного анализа.

## 1. 4. Операция деления

Пусть $U = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$– некоторая регулярная четырехмерная функция. Определим некоторую четырехмерную функцию $W = (w_1, w_2, w_3, w_0)$, по следующим формулам:

$$w_1 = \frac{1}{Q}[u_1({u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 - {u_0}^2) - 2u_0u_2u_3]$$

$$w_2 = \frac{1}{Q}[-u_2({u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_0}^2 - {u_3}^2) + 2u_0u_1u_3] \qquad (1.4.1)$$

$$w_3 = \frac{1}{Q}[-u_3({u_1}^2 + {u_0}^2 + {u_3}^2 - {u_2}^2) + 2u_0u_1u_2]$$

$$w_0 = \frac{1}{Q}[u_0({u_0}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 - {u_1}^2) - 2u_1u_2u_3]$$

где: $Q = [(u_1 - u_0)^2 + (u_2 - u_3)^2][(u_1 + u_0)^2 + (u_2 + u_3)^2]$

Отсюда, используя формулы умножения (1.2.5), легко получим:

$$UW = WU = E = (1,0,0,0)$$

Таким образом, четырехмерная функция $W = (w_1, w_2, w_3, w_0)$ является функцией, обратной к функции $U = (u_1, u_2, u_3, u_0)$, то есть, $W = \frac{1}{U} = U^{-1}$. Легко проверить, что $W$ является регулярной функцией из класса $M_A(G)$.

Итак, в пространстве $M_A(G)$ определяется операция деления на четырехмерную функцию (кроме нуля), по следующему правилу:

$$\frac{V}{U} = VU^{-1} = VW$$

При этом обратная функция определяется в области, где $Q \neq 0$.

**Пример 1.4.2.** Найти вид функции $u = \frac{1}{X} = X^{-1}$.

Составляющие этой функции определяются по формуле (1.4.1).

Здесь: $Q = [(x - t)^2 + (y - z)^2][(x + t)^2 + (y + z)^2]$.

Тогда, $X^{-1} = \{ u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t), u_0(x,y,z,t)\}$, где:

$$u_1(x,y,z,t) = \frac{x(x^2 + y^2 - t^2 + z^2) - 2ytz}{[(x - t)^2 + (y - z)^2][(x + t)^2 + (y + z)^2]}$$

$$u_2(x,y,z,t) = \frac{-y(x^2 + y^2 + t^2 - z^2) + 2xtz}{[(x - t)^2 + (y - z)^2][(x + t)^2 + (y + z)^2]} \quad (1.4.3)$$

$$u_0(x,y,z,t) = \frac{t\,(-x^2 + y^2 + t^2 + z^2) - 2xyz}{[(x - t)^2 + (y - z)^2][(x + t)^2 + (y + z)^2]}$$

$$u_3(x,y,z,t) = \frac{-z\,(x^2 - y^2 + t^2 + z^2) + 2xyt}{[(x - t)^2 + (y - z)^2][(x + t)^2 + (y + z)^2]}$$

Далее, после простых преобразований, эта четырехмерная функция запишется в другой, более удобной форме:

$$u_1(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{x - t}{(x - t)^2 + (y - z)^2} + \frac{x + t}{(x + t)^2 + (y + z)^2}\right]$$

$$u_2(x,y,z,t) = -\frac{1}{2}\left[\frac{y - z}{(x - t)^2 + (y - z)^2} + \frac{y + z}{(x + t)^2 + (y + z)^2}\right]$$

$$u_3(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{y - z}{(x - t)^2 + (y - z)^2} - \frac{y + z}{(x + t)^2 + (y + z)^2}\right]$$

$$u_0(x,y,z,t) = -\frac{1}{2}\left[\frac{x-t}{(x-t)^2+(y-z)^2} - \frac{x+t}{(x+t)^2+(y+z)^2}\right] \quad (1.4.4)$$

Легко видеть, что эта функция определена и бесконечно дифференцируема в любой трехмерной области, не содержащей точек плоскостей $y = \pm z$.

Для решения стационарных задач (устоявшиеся во времени процессы) используются стационарные аналоги четырехмерных функций. Они легко могут быть получены из их общего вида (аналитического выражения), если в соответствующих формулах положить: $t = T = const$, (в частности, $T = 0$).

Действительно, пусть некоторый физический процесс считается устоявшимся, начиная с некоторого момента времени $t = T = const$. Для исследования такого рода процессов удобно использовать стационарные четырехмерные функции. К примеру, компоненты стационарной функции $U = X^2$ имеют следующий вид (при $t = 0$):

$u_1(x,y,z,0) = x^2 - y^2 - z^2$; $u_2(x,y,z,0) = 2xy$;

$u_3(x,y,z,0) = 2xz$; $u_0(x,y,z,0) = -2yz$;

В общем случае, для любой четырехмерной функции $U \in M_A(G)$ может быть рассмотрен ее стационарный аналог, как «след» этой функции, при $t = T$.

Далее, в задачах гидродинамики удобно использовать дробно-линейную функцию, имеющую следующий общий вид:

$$U(X) = \frac{AX+B}{CX+D} \quad (1.4.6)$$

Здесь: $A = (a_1, a_2, a_3, a_0)$, $B = (b_1, b_2, b_3, b_0)$, $C = (c_1, c_2, c_3, c_0)$, $D = (d_1, d_2, d_3, d_0)$, $X = (x, y, z, t)$.

Такая функция всегда имеет конечное значение на бесконечности и, может использоваться для решения задач механики жидкости и газов.

В общем случае, можно определить составляющие всех видов элементарных функций, таких как $u = sinX$, $u = e^X$ и т.д. [7].

Таким образом, множество $M_A(G)$ регулярных четырехмерных функций можно считать вполне определенным.

В этом множестве даны все четыре арифметические операции. Через базовые функции: E, $X$, $X^2$, ... $X^n$ .... можно определить явный вид всех элементарных функций.

Особо примечательным является тот факт, что каждая четырехмерная функция является четырехмерным аналогом известных однотипных функций из действительного и комплексного анализа, и имеет схожие свойства.

Весьма важно, что сохраняются четырехмерные аналоги известных соотношений между обычными функциями, например, справедливо:

$$(sinX)^2 + (cosX)^2 = E$$

Это – аналог известного тригонометрического соотношения из действительного анализа. Отметим, что в рамках $M_A(G)$:

$sinX = \{ u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t), u_0(x,y,z,t)\}$

$$u_1(x,y,z,t) = sinx\ chy\ cost\ chz + cosx\ shy\ sint\ shz$$
$$u_2(x,y,z,t) = cosx\ shy\ cost\ chz - sinx\ chy\ sint\ shz$$
$$u_3(x,y,z,t) = cosx\ chy\ cost\ shz - sinx\ shy\ sint\ chz$$
$$u_0(x,y,z,t) = cosx\ chy\ sint\ chz + sinx\ shy\ cost\ shz$$

$cosX = \{ u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t), u_0(x,y,z,t)\}$

$$u_1(x,y,z,t) = cosx\ chy\ cost\ chz - sinx\ shy\ sint\ shz$$
$$u_2(x,y,z,t) = -sinx\ shy\ cost\ chz - cosx\ chy\ sint\ shz$$
$$u_3(x,y,z,t) = -sinx\ chy\ cost\ shz - cosx\ shy\ sint\ chz$$
$$u_0(x,y,z,t) = -sinx\ chy\ sint\ chz + cosx\ shy\ cost\ shz$$

Далее, укажем еще вид четырехмерной экспоненциальной функции.

$e^X = \{ u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t), u_0(x,y,z,t)\}$, где:

$$u_1(x,y,z,t) = \frac{1}{2}[\, e^{x+t}\cos(y+z) + e^{x-t}\cos(y-z)]$$
$$u_2(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\,[\, e^{x+t}\sin(y+z) + e^{x-t}\sin(y-z)] \qquad (1.4.7)$$
$$u_3(x,y,z,t) = \frac{1}{2}[\, e^{x+t}\sin(y+z) - e^{x-t}\sin(y-z)]$$
$$u_0(x,y,z,t) = \frac{1}{2}[\, e^{x+t}\cos(y+z) - e^{x-t}\cos(y-z)]$$

Следующие примеры подчеркивают факт того, что четырехмерные функции действительно являются обобщениями типовых одномерных и двумерных функций.

К примеру, из (1.4.7) при $t = z = 0$ получим:

$u_1(x,y,0,0) = e^x cosy$

$$u_2(x,y,0,0) = e^x siny \qquad (1.4.8)$$
$$u_0(x,y,0,0) = 0$$
$$u_3(x,y,0,0) = 0$$

Здесь мы получили двумерный аналог $e^X$ в виде функции комплексного переменного $e^z = e^x(cosy + isiny)$.

Если в (1.4.7) положить $y = t = z = 0$, то получим:

$$u_1(x,0,0,0) = e^x$$
$$u_2(x,0,0,0) = 0 \qquad (1.4.9)$$
$$u_0(x,0,0,0) = 0$$
$$u_3(x,0,0,0) = 0$$

Здесь мы получили одномерный аналог - обычную функцию $y = e^x$.

То есть, любую четырехмерную регулярную функцию можно, в принципе, рассматривать в качестве обобщенных четырехмерных аналогов соответствующих типовых функций из действительного и комплексного анализа.

А это означает, что класс регулярных четырехмерных функций $M_A(G)$ является глобально широким множеством. Как множество некоторых элементов, оно имеет мощность континуума.

### 1.5. Специфическая гармоничность регулярных функций

Пусть $U = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$ - регулярная четырехмерная функция, то есть, она всюду в области $G$ удовлетворяет обобщенным условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_3}{\partial z}$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial u_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\partial u_3}{\partial t} \qquad (1.5.1)$$

Теперь, используя различные парные соотношения из (1.5.1), легко докажем справедливость следующих равенств, для всех $k, (k = 0,3)$:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} \qquad (1.5.2)$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}$$

Как видно из свойств (1.5.2), каждая составляющая регулярной функции, является решением гиперболического уравнения по парам переменных $(x,t)$, $(y,z)$ и, одновременно, эллиптического уравнения по другим двум парам $(x,y)$ или $(x,z)$. Причем в этих дифференциальных уравнениях, два независимых аргумента из четырех считаются параметрами.

И наконец, из (1.5.2) следует, что каждая из компонент является решением четырехмерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = 0, \quad (k = 0,3) \qquad (1.5.3)$$

Таким образом, каждая составляющая регулярной четырехмерной функции является гармонической функцией в области $G$.

Но здесь гармоничность несколько «специфическая», так как эти функции изначально удовлетворяют уравнениям (1.5.1) –(1.5.2), а гармоничность является лишь следствием одновременного выполнения этих уравнений (фактически, сложения двух нулей).

Интересен тот факт, что другие известные гармонические функции не обладают такими дополнительными свойствами. К примеру, уравнению Лапласа (1.5.3), в некоторой области удовлетворяет функция вида:

$$U(x,y,z,t) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$$

Легко проверить, что эта функция не удовлетворяет ни одному из соотношений (1.5.2), то есть ее структурные (групповые) свойства в корне отличаются от свойств составляющих регулярной функции.

То же самое относится к известным гармоническим полиномам, описанным в литературе, они не имеют дополнительных свойств вида (1.5.2).

Именно использование специфических свойств (1.5.1) – (1.5.2) составляющих функций, как мы увидим ниже, позволяет описать классы точных решений (общее решение) уравнения неразрывности и некоторых известных уравнений движения механики.

Пусть теперь $G-$ ограниченное, замкнутое множество. Тогда, в пространстве регулярных четырехмерных функций $M_A(G)$, можно ввести следующее понятие нормы элемента:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \boldsymbol{max_i}\,\{\boldsymbol{sup_G}|\boldsymbol{u_i}|\} \qquad (1.5.4)$$

Этим мы превратим $M_A(G)$ в полное линейное нормированное пространство, где сходимость последовательностей элементов вида $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ , понимается как равномерная сходимость четырех последовательностей составляющих функций $\lim_{n\to\infty} u_{in} = u_i, i = \overline{0,3}$. При этом: $u_n = (u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}, u_{0n}) \in M_A(G)$, $u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$.

Но мы уже выяснили, что каждая составляющая регулярной функции является гармонической функцией, то есть, бесконечно дифференцируемой функцией в области $G$.

Отсюда, учитывая свойства последовательностей гармонических функций, мы легко заключаем, что из $\lim_{n\to\infty} u_{in} = u_i$, следует:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^n u_{in}}{\partial t^k \partial x^l \partial y^s \partial z^r} = \frac{\partial^n u_i}{\partial t^k \partial x^l \partial y^s \partial z^r},\ i = \overline{0,3}. \qquad (1.5.5)$$

Здесь: $k + l + s + r = n$ −неотрицательные целые числа.

Далее, из теоремы Вейерштрасса следует, что $M_A(G)$ является полным нормированным пространством. Оно сепарабельно, так как содержит счетное, всюду плотное подмножество многочленов от независимой переменной $X = (x, y, z, t)$.

В дальнейшем мы увидим, что регулярные функции из класса $M_A(G)$ имеют прямое отношение к большинству задач гидродинамики.

Удивительным выглядит то обстоятельство, что компоненты так называемых массовых сил, входящих в правые части большинства уравнений движения механики, так или иначе будут связаны с функциями из пространства $M_A(G)$, или других множеств функций, порождаемых именно этим пространством.

Например, задача Коши для системы уравнений Навье – Стокса, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости, оказалась разрешимой только для определенного класса массовых сил и начальных скоростей.

Эти классы, как выяснится далее, также напрямую связаны с описанным пространством $M_A(G)$.

То есть, нам удается доказать разрешимость этих систем, именно при определенных классах правых частей и начальных скоростей, связанных с пространством $M_A(G)$. При этом, сами решения также будут связаны с компонентами некоторых регулярных функций.

# ГЛАВА 2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

## 2.1. Постановка задачи.

В бесконечной четырехмерной области $G = R^3 \times [0, \infty)$, рассмотрим уравнение неразрывности следующего вида:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad (2.1.1)$$

Здесь: $\rho(x, y, z, t)$ – неизвестная плотность частиц жидкости (газа), $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)$ – неизвестные компоненты скорости частиц жидкости (газа). Для однородной несжимаемой жидкости, в (2.1.1) принято приближенно считать $\rho \approx const$. В этом случае оно преобразуется к следующему частному виду:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2.1.2)$$

В этом разделе мы определим некоторый континуум точных решений уравнений (2.1.1) и (2.1.2). При этом речь идет не просто о классических (гладких) решениях этих уравнений, а с учетом специфической постановки шестой задачи тысячелетия [1], о бесконечно дифференцируемых решениях.

Как известно [2] – [4], уравнения вида (2.1.1) или (2.1.2), на равноправной основе входят в составы различных систем дифференциальных уравнений гидродинамики (газодинамики), описывающих процессы течения жидкостей (газов). Другие уравнения упомянутых выше систем дифференциальных уравнений, как правило, содержат более сложные нелинейные члены.

Далее, большинство исследований известных ученых посвящено поиску условий существования обобщенного решения именно этих нелинейных уравнений, в тех или иных функциональных классах [2].

При этом принято использовать уравнение (2.1.1) (особенно (2.1.2)) лишь попутно. Обычно, это делается при интегрировании по частям некоторого функционального выражения, когда появляющийся внеинтегральный член приравнивается к нулю, на основе уравнения неразрывности.

Между тем, равнозначность любых законов физики (механики), на наш взгляд, предопределяет необходимость изучения уравнения неразрывности так же углубленно, как это делается по отношению к другим нелинейным уравнениям движения.

Действительно, если удастся каким-то путем определить широкие классы точных решений (2.1.1) и (2.1.2) (не говоря об общем решении) в явном аналитическом виде, то уже среди этих решений будет легче искать те, которые одновременно являются решениями более сложных нелинейных уравнений, содержащихся в различных системах уравнений физики (механики).

В двумерных стационарных задачах гидродинамики, такой подход с успехом использован в работе [4].

Противоположный подход, как известно, приводит к существенным, а подчас и непреодолимым математическим трудностям.

Поэтому, на наш взгляд, целесообразность первоочередного поиска классов точных решений (в идеале, даже общего решения) (2.1.1) и (2.1.2) не вызывает сомнений, хотя и это считается достаточно трудной задачей [4].

Теперь покажем, что при переходе к безразмерной форме, уравнения неразрывности сохраняют свой первоначальный вид.

Действительно, пусть $U$ −характерная скорость, $l$ −характерный размер, $T$ −характерное время, $\rho_0 > 0$ −характерная плотность течения. Перейдем к безразмерной форме уравнения (2.1.1), считая:

$$\rho(x,y,z,t) = \rho_0 \cdot \rho^*\left(\frac{x}{l},\frac{y}{l},\frac{z}{l},\frac{t}{T}\right) = \rho_0 \cdot \rho^*(x_1,y_1,z_1,t_1)$$

$$u(x,y,z,t) = U \cdot V_1\left(\frac{x}{l},\frac{y}{l},\frac{z}{l},\frac{t}{T}\right) = U \cdot V_1(x_1,y_1,z_1,t_1)$$

$$v(x,y,z,t) = U \cdot V_2\left(\frac{x}{l},\frac{y}{l},\frac{z}{l},\frac{t}{T}\right) = U \cdot V_2(x_1,y_1,z_1,t_1)$$

$$w(x,y,z,t) = U \cdot V_3\left(\frac{x}{l},\frac{y}{l},\frac{z}{l},\frac{t}{T}\right) = U \cdot V_3(x_1,y_1,z_1,t_1)$$

Здесь уже: $\rho^*(x_1,y_1,z_1,t_1), V_1, V_2, V_3$ − неизвестные безразмерные функции.

Тогда уравнение (2.1.1) перепишется в следующей форме:

$$\frac{\rho_0}{T}\cdot\frac{\partial\rho^*}{\partial t_1} + \frac{\rho_0 U}{l}\cdot\frac{\partial(\rho^* V_1)}{\partial x_1} + \frac{\rho_0 U}{l}\cdot\frac{\partial(\rho^* V_2)}{\partial y_1} + \frac{\rho_0 U}{l}\cdot\frac{\partial(\rho^* V_3)}{\partial z_1} = 0$$

Далее учтем, что: $\frac{\rho_0 U}{l} = \frac{\rho_0 U}{UT} = \frac{\rho_0}{T}$ и, сократив обе части полученного выше уравнения на ненулевой множитель $\frac{\rho_0}{T}$, получим:

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial t_1} + \frac{\partial(\rho^* V_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho^* V_2)}{\partial y_1} + \frac{\partial(\rho^* V_3)}{\partial z_1} = 0 \qquad (2.1.3)$$

Мы получили безразмерный вид нелинейного уравнения неразрывности, имеющий точно такой же вид, что и (2.1.1). Если положить в уравнении (2.1.3) $\rho^* \approx const$, то получим безразмерный вид уравнения (2.1.2):

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial y_1} + \frac{\partial V_3}{\partial z_1} = 0 \qquad (2.1.4)$$

Как видно, уравнения (2.1.3) и (2.1.4) абсолютно идентичны уравнениям (2.1.1) и (2.1.2), соответственно. Это обстоятельство позволяет нам изучать исходные уравнения напрямую. В принципе, если будет такая надобность, можно сперва решить безразмерное уравнение, а затем преобразовать полученное решение, умножением на размерные постоянные.

### 2.2. Представление решения, как четырехмерной функции

Введем новые неизвестные функции по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &U_0(x,y,z,t) = \rho(x,y,z,t);\\ &U_1(x,y,z,t) = \rho(x,y,z,t)\,u(x,y,z,t);\\ &U_2(x,y,z,t) = \rho(x,y,z,t)\,v(x,y,z,t);\\ &U_3(x,y,z,t) = \rho(x,y,z,t)\,w(x,y,z,t). \end{aligned} \qquad (2.2.1)$$

Тогда, относительно новых неизвестных функций, взамен (2.1.1), мы получим эквивалентное линейное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z} = 0 \qquad (2.2.2)$$

На основе материалов главы 1 ясно, что под классическим решением уравнения (2.2.2) необходимо считать некоторую четырехмерную функцию $U = (U_1, U_2, U_3, U_0) \in C^1M(G)$, составляющие которой, будучи подставлены в (2.2.2), обращают его в тождество по независимым переменным. При этом ясно, что (2.2.2) - суть одно уравнение, заданное для одной неизвестной (четырехмерной) функции.

Особенно важно то, что любому найденному частному решению уравнения (2.2.2), будет соответствовать только одно частное решение $(u, v, w, \rho) \in C^1M(G)$ уравнения (2.1.1), которое выразится следующими формулами:

$$\rho(x,y,z,t) = U_0(x,y,z,t); \qquad u(x,y,z,t) = \frac{U_1(x,y,z,t)}{U_0(x,y,z,t)};$$

$$v(x,y,z,t) = \frac{U_2(x,y,z,t)}{U_0(x,y,z,t)}; \qquad w(x,y,z,t) = \frac{U_3(x,y,z,t)}{U_0(x,y,z,t)}.$$

То есть, множество точных решений линейного уравнения (2.2.2), если оно будет найдено, автоматически приведет к определению эквивалентного по мощности множества точных решений нелинейного уравнения (2.1.1).

Еще раз напоминаем, что мы ищем бесконечно дифференцируемые решения уравнений (2.1.1) и (2.1.2), поэтому решения (2.2.2) также ищутся из класса $U = (U_1,\ U_2, U_3, U_0) \in C^{\infty}M(G)$.

Естественно, тут сразу приходит мысль о регулярных, во всем полупространстве $G = R^3 \times [0, \infty)$, четырехмерных функциях. Именно они, как нам известно, являются яркими представителями класса $C^{\infty}M(G)$.

То есть, можно предугадать наличие связи между решениями уравнения (2.2.2) и, регулярными во всем полупространстве четырехмерными функциями. Эта догадка подтвердится в последующем.

Действительно, для нахождения точных решений (2.2.2) руководствуемся некоторыми соображениями, учитывающими ключевые свойства произвольной функции $u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$. Нам известно, что ее компоненты удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_3}{\partial z} \tag{2.2.3}$$

Отсюда имеем очевидное следствие:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial(-u_2)}{\partial y} + \frac{\partial(-u_3)}{\partial z} = 0 \tag{2.2.4}$$

Более того, справедливо следующее обобщение (2.2.4).

**Лемма 2.2.5**

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ −произвольные скаляры, удовлетворяющие условию: $\delta\delta_1 + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$. Тогда:

$$\frac{\partial(\delta_1 u_0\,(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t))}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(-\beta_1 u_2)}{\partial y} + \frac{\partial(-\gamma_1 u_3)}{\partial z} = 0. \tag{2.2.6}$$

Доказательство: Если $\alpha x = x_1,\ \beta y = y_1,\ \gamma z = z_1,\ \delta t = t_1$, то с учетом свойств (2.2.3), левая часть (2.2.6) преобразуется так:

$$\delta\delta_1 \frac{\partial u_0}{\partial t_1} + \alpha\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \beta\beta_1 \frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \gamma\gamma_1 \frac{\partial u_3}{\partial z_1} = (\delta\delta_1 + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1)\frac{\partial u_0}{\partial t_1} = 0.$$

Теперь, сравнивая (2.2.6) с уравнением (2.2.2) видим, что точные решения последнего уравнения легко определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} U_0(x,y,z,t) &= \delta_1 u_0(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t) \\ U_1(x,y,z,t) &= \alpha_1 u_1(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t) \\ U_2(x,y,z,t) &= -\beta_1 u_2(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t) \\ U_3(x,y,z,t) &= -\gamma_1 u_3(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t) \end{aligned} \qquad (2.2.7)$$

То есть, при фиксированных параметрах $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, удовлетворяющих условию $\delta\delta_1 + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$, любая регулярная четырехмерная функция, определяет ровно одно точное решение уравнения (2.2.2) и, как следствие, автоматически определяется одно точное решение уравнения неразрывности (2.1.1).

**Основная Теорема 2.2.8.**

Пусть:

1. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ −произвольные скаляры, удовлетворяющие условию: $\delta\delta_1 + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$.
2. $u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$ – произвольная регулярная четырехмерная функция.

Тогда уравнение неразрывности (2.1.1) имеет точное решение вида:

$$\rho(x,y,z,t) = \delta_1 u_0(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t)$$

$$u(x,y,z,t) = \frac{\alpha_1 u_1(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t)}{\delta_1 u_0(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t)}$$

$$v(x,y,z,t) = \frac{-\beta_1 u_2(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t)}{\delta_1 u_0(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t)}$$

$$w(x,y,z,t) = \frac{-\gamma_1 u_3(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t)}{\delta_1 u_0(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t)} \qquad (2.2.9)$$

Формулы (2.2.9) дают некоторый континуум точных решений нелинейного уравнения неразрывности (2.1.1).

Решение содержит четыре произвольные функции, являющиеся компонентами произвольной регулярной функции и восемь постоянных чисел, связанных равенством: $\delta\delta_1 + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$.

Если $\rho(x,y,z,t) > 0$, то функций, определяемые формулами (2.2.9), будут бесконечно дифференцируемыми функциями в области $G$.

По аналогии, легко найдем континуум точных решений уравнения неразрывности (2.1.2), для идеальной несжимаемой жидкости.

Нетрудно понять, что когда $\rho = const$, точное решение уравнения (2.1.2) определится следующими формулами:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \alpha_1 u_1(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t) \\ v(x,y,z,t) &= -\beta_1 u_2(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t) \\ w(x,y,z,t) &= -\gamma_1 u_3(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t) \end{aligned} \qquad (2.2.10)$$

В формулах (2.2.10): $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 -$ произвольные числа, такие, что: $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$; $u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$ – произвольная регулярная четырехмерная функция. Из свойств компонентов регулярной функции следует, что формулами (2.2.10) всегда определяются бесконечно дифференцируемые в области $G$ функции.

Полученные результаты очень важны для решения шестой задачи тысячелетия и других задач физики и механики, где наряду с уравнением неразрывности содержатся сложного вида нелинейные уравнения. У нас появляется возможность гибкого маневрирования.

То есть, имея в наличии континуум точных решений уравнения неразрывности, мы среди этих решений сравнительно просто можем «вылавливать» те решения, которые одновременно удовлетворяют другим нелинейным уравнениям системы.

Такой подход к решению задач гидродинамики, ранее успешно опробован автором в работе [8]. Более того, теперь появляется возможность описания классов правых частей (векторов массовых сил) и векторов начальных условий, при которых известные системы уравнений движения физики (механики) однозначно разрешимы. В ряде случаев возможно нахождение точных решений.

## 2.3. Точные решения уравнения неразрывности для вязкой сжимаемой и несжимаемой жидкости (газа)

Для случая вязкой сжимаемой жидкости, уравнение неразрывности (2.1.1) имеет континуум точных решений такого же вида, что и (2.2.9), но здесь дополнительно учитывается тот факт, что компоненты скорости, вообще говоря, зависят и от коэффициента вязкости $\nu$, в отличие от рассмотренного выше случая идеальной жидкости. Поэтому, легко обобщив (2.2.9) на случай вязкой сжимаемой жидкости, получим следующее утверждение.

**Теорема 2.3.1.**

Пусть $\alpha(\nu),\beta(\nu),\gamma(\nu),\delta(\nu),\alpha_1(\nu),\beta_1(\nu),\gamma_1(\nu),\delta_1(\nu)$ −произвольные функций (действительные или комплекснозначные) от переменной вязкости $\nu$, такие, что: $\delta\delta_1+\alpha\alpha_1-\beta\beta_1-\gamma\gamma_1=0$, $u=(u_1,u_2,u_3,u_0)\in M_A(G)$ – произвольная регулярная четырехмерная функция.

Тогда континуум точных решений уравнения неразрывности для вязкой сжимаемой жидкости имеет нижеследующий вид:

$$\rho(x,y,z,t,\nu)=\ \delta_1(\nu)\,u_0\,(\,\alpha(\nu)x,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)$$

$$u(x,y,z,t,\nu)=\frac{\alpha_1(\nu)\,u_1(\alpha(\nu)x,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)}{\delta_1(\nu)\,u_0\,(\alpha(\nu)x,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)}$$

$$v(x,y,z,t,\nu)=\frac{-\beta_1(\nu)\,u_2(\alpha(\nu)x,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)}{\delta_1(\nu)\ \ u_0\,(\alpha(\nu)x,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)}$$

$$w(x,y,z,t,\nu)=\frac{-\gamma_1(\nu)\,u_3(\alpha(\nu)x,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)}{\delta_1(\nu)\ \ u_0\,(\alpha(\nu)x,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)}$$

(2.3.2)

Далее, очевидно, что для случая вязкой несжимаемой жидкости, уравнение неразрывности (2.1.2) имеет общее решение такого же вида, что и (2.2.10), но и здесь необходимо учесть тот факт, что компоненты скорости дополнительно зависят от коэффициента вязкости $\nu$, в отличие от рассмотренного случая идеальной жидкости. Поэтому, обобщив (2.2.10) на случай вязкой несжимаемой жидкости, получим следующее утверждение.

**Теорема 2.3.3.**

Пусть $\alpha(\nu),\beta(\nu),\gamma(\nu),\delta(\nu),\alpha_1(\nu),\beta_1(\nu),\gamma_1(\nu)$ −произвольные функций (действительные или комплекснозначные) от переменной вязкости $\nu$, такие, что: $\alpha\alpha_1-\beta\beta_1-\gamma\gamma_1=0$, $u=(u_1,u_2,u_3,u_0)\in M_A(G)$ – произвольная регулярная четырехмерная функция.

Тогда континуум точных решений уравнения неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости (газа) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z,t,\nu)\ &=\alpha_1(\nu)\ \ u_1(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)\\
v(x,y,z,t,\nu\,)&=-\beta_1(\nu)\ \ u_2(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)\\
w(x,y,z,t,\nu)&=-\gamma_1(\nu)\ \ u_3(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)
\end{aligned}\qquad(2.3.4)$$

Очевидно множество решений вида (2.3.4) образует линейное пространство относительно операции сложения и умножения на скаляр.

Обозначим это линейное пространство решений, как $SCE\ (G)$.

Далее, дадим эквивалентную формулировку теоремы 2.3.3, уже в терминах безразмерного числа Рейнольдса - $Re = \frac{Ul}{\nu}$.

**Теорема 2.3.5.**

Пусть $\alpha(Re), \beta(Re), \gamma(Re), \delta(Re), \alpha_1(Re), \beta_1(Re), \gamma_1(Re)$ −безразмерные функций (действительные или комплекснозначные) от переменной $Re$, такие, что: $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$, $u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$ – произвольная регулярная четырехмерная функция. $U$ −характерная скорость течения, $l$ −характерный размер, $T$ −характерное время течения.

Тогда уравнение неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости (газа) имеет континуум точных решений следующего вида:

$$u(x,y,z,t,Re) = U\,\alpha_1(Re)\quad u_1\left(\alpha(Re)\frac{x}{l}, \beta(Re)\frac{y}{l}, \gamma(Re)\frac{y}{l}, \delta(Re)\frac{t}{T}\right)$$
$$v(x,y,z,t,Re) = -U\,\beta_1(Re)\quad u_2\left(\alpha(Re)\frac{x}{l}, \beta(Re)\frac{y}{l}, \gamma(Re)\frac{y}{l}, \delta(Re)\frac{t}{T}\right)$$
$$w(x,y,z,t,Re) = -U\,\gamma_1(Re)\quad u_3\left(\alpha(Re)\frac{x}{l}, \beta(Re)\frac{y}{l}, \gamma(Re)\frac{y}{l}, \delta(Re)\frac{t}{T}\right) \quad (2.3.6)$$

Из этих формул сразу видно, что размерности величин $u, v, w$ всегда соответствуют размерности скорости.

## 2.4. Уравнение неразрывности в стационарном случае

Если процесс течения стабилизировался в момент времени $t = T$, и далее не зависит от времени, то уравнения (2.1.1) и (2.1.2) приобретут следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4.2)$$

В этих стационарных уравнениях, неизвестные функции $\rho(x,y,z), u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)$ уже не зависят от времени $t$.

В этом случае, точные решения этих уравнений записываются в виде «следов» решений нестационарных уравнений, в следующих вариациях:

**A) <u>Вязкая сжимаемая жидкость</u>**

$$\rho(x,y,z,\nu) = \delta_1(\nu)\, u_{0T}\,(\,\alpha(\nu)x, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)T)$$

$$u(x,y,z,\nu) = \frac{\alpha_1(\nu)\, u_{1T}(\alpha(\nu)x, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)T)}{\delta_1(\nu)\, u_{0T}\,(\alpha(\nu)x, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)T)}$$

$$v(x,y,z,\nu) = \frac{-\beta_1(\nu)\, u_{2T}(\alpha(\nu)x, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)T)}{\delta_1(\nu)\;\; u_{0T}\,(\alpha(\nu)x, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)T)}$$

$$w(x,y,z,\nu) = \frac{-\gamma_1(\nu)\, u_{3T}(\alpha(\nu)x, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)T)}{\delta_1(\nu)\;\; u_{0T}\,(\alpha(\nu)x, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)T)}$$

(2.4.3)

Здесь: $\alpha(\nu), \beta(\nu), \gamma(\nu), \delta(\nu), \alpha_1(\nu), \beta_1(\nu), \gamma_1(\nu), \delta_1(\nu)$ −произвольные функций (действительные или комплекснозначные) от переменной вязкости $\nu$, такие, что: $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$, $u_T = (u_{1T}, u_{2T}, u_{3T}, u_{0T})$ – «след» произвольной регулярной четырехмерной функции, когда $t = T$. Случай $T = 0$ не исключается.

**B) <u>Вязкая несжимаемая жидкость</u>**

$$u(x,y,z,\nu) = \alpha_1(\nu)\;\; u_{1T}(\alpha(\nu)x\,, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)T)$$
$$v(x,y,z,\nu\,) = -\beta_1(\nu)\;\; u_{2T}(\alpha(\nu)x\,, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)T)$$
$$w(x,y,z,\nu) = -\gamma_1(\nu)\;\; u_{3T}(\alpha(\nu)x\,, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)T)$$

(2.4.4)

Здесь: $\alpha(\nu), \beta(\nu), \gamma(\nu), \delta(\nu), \alpha_1(\nu), \beta_1(\nu), \gamma_1(\nu)$ −произвольные функций (действительные или комплекснозначные) от переменной вязкости $\nu$, такие, что: $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$, $u_T = (u_{1T}, u_{2T}, u_{3T}, u_{0T})$ – «след» произвольной регулярной четырехмерной функции, когда $t = T$. Случай $T = 0$ не исключается.

**C) <u>Идеальная сжимаемая жидкость</u>**

$$\rho(x,y,z) = \delta_1\, u_{0T}\,(\,\alpha x, \beta y\,, \gamma z\,, \delta T)$$

$$u(x,y,z) = \frac{\alpha_1 u_{1T}(\alpha x, \beta y\,, \gamma z\,, \delta T)}{\delta_1 u_{0T}\,(\alpha x, \beta y\,, \gamma z\,, \delta T)}$$

$$v(x,y,z)=\frac{-\beta_1 u_{2T}(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta T)}{\delta_1 u_{0T}(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta T)}$$

$$w(x,y,z)=\frac{-\gamma_1 u_{3T}(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta T)}{\delta_1 u_{0T}(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta T)} \qquad (2.4.5)$$

Здесь: $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1$ −произвольные действительные или комплексные числа, такие, что: $\alpha\alpha_1-\beta\beta_1-\gamma\gamma_1=0$.

$u_T=(u_{1T},u_{2T},u_{3T},u_{0T})$ – «след» произвольной регулярной четырехмерной функции, когда $t=T$. Случай $T=0$ не исключается.

**E) <u>Идеальная несжимаемая жидкость</u>**

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \alpha_1 u_{1T}(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta T)\\ v(x,y,z) &= -\beta_1 u_{2T}(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta T)\\ w(x,y,z) &= -\gamma_1 u_{3T}(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta T) \end{aligned} \qquad (2.4.6)$$

В формулах (2.4.6): $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ − произвольные действительные или комплексные числа, такие, что: $\alpha\alpha_1-\beta\beta_1-\gamma\gamma_1=0$; как обычно $u_T=(u_{1T},u_{2T},u_{3T},u_{0T})$ – след произвольной регулярной четырехмерной функции, когда $t=T$. Случай $T=0$ также не исключается.

### 2.5. Приложения

Можно легко показать, что в формуле (2.4.4) содержатся общеизвестные точные решения стационарной системы уравнений Навье – Стокса.

**Пример 2.5.1**

Найдем решение, соответствующее следу четырехмерной регулярной функции $u=X^2$, когда $t=a$, при следующих значениях других параметров в формуле (2.4.4):

$$\alpha(\nu)=\beta_1(\nu)=\gamma_1(\nu)=0;\quad \alpha_1(\nu)=\frac{\Delta P}{4\nu l};\quad \beta=\gamma=\delta=1.$$

Вычислим след функции $u=X^2$, когда $t=a$:

$u_1=x^2-y^2+a^2-y^2;$ $\qquad u_2=2xy+2az;$

$u_3=2xz+2ay;$ $\qquad u_0=2xa-2yz.$

Тогда из (2.4.4) получим: $u(y,z,\nu)=\frac{\Delta P}{4\nu l}(a^2-y^2-z^2);$ $\qquad v=w=0.$

Как известно [4], найденное решение является общеизвестным решением Пуазейля, описывающим ламинарное стационарное течение вязкой жидкости в бесконечной круглой трубе.

Аналогично, подбором соответствующих параметров в формулах (2.3.4) или (2.4.4), можно легко получить решения при слоистых течениях, вращательно-симметричных течениях Кармана и т.д. Мы, не останавливаясь на этих известных, но в некотором смысле явно специфических решениях, хотим продемонстрировать интересные, с точки зрения разрешимости шестой задачи тысячелетия, примеры.

**Пример 2.5.2**

Найдем решение уравнения неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости, соответствующее следующим параметрам:

$$u = 2sinX; \quad \alpha(\nu) = \delta(\nu) = \frac{1}{\nu+1}; \quad \beta(\nu) = \gamma(\nu) = \frac{i}{\nu+1};$$

$$\alpha_1(\nu) = \frac{2}{\nu+1}; \quad \beta_1(\nu) = \gamma_1(\nu) = -\frac{i}{\nu+1}.$$

Решение: Выпишем явный вид функции $U = 2sinX$.

$$u = \{ u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t), u_0(x,y,z,t)\}$$

$$u_0(x,y,z,t) = \sin(x+t)\, ch(y+z) - \sin(x-t)\, ch(\mathrm{y}-\mathrm{z})$$

$$u_1(x,y,z,t) = \sin(x+t)\, ch(y+z) + \sin(x-t)\, ch(\mathrm{y}-\mathrm{z})$$

$$u_2(x,y,z,t) = cos(x+t)\, sh(y+z) + cos(x-t)\, sh(y-z)$$

$$u_3(x,y,z,t) = cos(x+t)\, sh(y+z) - cos(x-t)\, sh(y-z)$$

Теперь подставим все параметры в формулу (2.3.4) и, после несложных преобразований, получим следующее решение уравнения неразрывности:

$$u(x,y,z,t,\nu) = \frac{2}{\nu+1}\left[sin\frac{x+t}{\nu+1}cos\frac{y+z}{\nu+1} + sin\frac{x-t}{\nu+1}cos\frac{y-z}{\nu+1}\right]$$

$$v(x,y,z,t,\nu) = -\frac{1}{\nu+1}\left[cos\frac{x+t}{\nu+1}sin\frac{y+z}{\nu+1} + cos\frac{x-t}{\nu+1}sin\frac{y-z}{\nu+1}\right]$$

$$w(x,y,z,t,\nu) = -\frac{1}{\nu+1}\left[cos\frac{x+t}{\nu+1}sin\frac{y+z}{\nu+1} - cos\frac{x-t}{\nu+1}sin\frac{y-z}{\nu+1}\right]$$

Полученное вихревое решение нестационарного уравнения неразрывности, обладает следующими отличительными свойствами ( для всех $\nu > 0$):

А) Компоненты скорости являются периодическими функциями с вектором-периодом: $T = (2\pi(\nu+1), \pi(\nu+1), \pi(\nu+1)$, то есть:

$$u(x + 2\pi(\nu+1), y + \pi(\nu+1), z + \pi(\nu+1), t, \nu) = u(x,y,z,t,\nu);$$

$$v(x + 2\pi(\nu+1), y + \pi(\nu+1), z + \pi(\nu+1), t, \nu) = v(x,y,z,t,\nu);$$

$$w(x + 2\pi(\nu+1), y + \pi(\nu+1), z + \pi(\nu+1), t, \nu) = w(x,y,z,t,\nu).$$

В) Компоненты скорости бесконечно дифференцируемы и ограничены в области $G = R^3 \times [0, \infty)$, вместе со смешанными производными по переменным $x, y, z, t$, любого порядка.

Найденное решение уравнения неразрывности указывает на то, что 6-я задача тысячелетия (задачи Коши) наверняка разрешима в периодической постановке, при определенном виде массовых сил и начальных условий [1].

**Пример 2.5.3**

Найдем решение уравнения неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости, соответствующее следующим параметрам:

$u = 2e^{-X^2}; \quad \alpha(\nu) = \delta(\nu) = \sqrt{\nu}\,; \quad \beta(\nu) = \gamma(\nu) = i\sqrt{\nu};$

$\alpha_1(\nu) = 2\sqrt{\nu}; \quad \beta_1(\nu) = \gamma_1(\nu) = -i\sqrt{\nu}.$

Решение: Выпишем явный вид функции $U = 2e^{-X^2}$.

$u = \{ u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t), u_0(x,y,z,t)\}$

$u_0(x,y,z,t) = e^{-(x+t)^2+(y+z)^2} \cos 2(x+t)(y+z) - e^{-(x-t)^2+(y-z)^2} \cos 2(x-t)(y-z);$

$u_1(x,y,z,t) = e^{-(x+t)^2+(y+z)^2} \cos 2(x+t)(y+z) + e^{-(x-t)^2+(y-z)^2} \cos 2(x-t)(y-z)\,;$

$u_2(x,y,z,t) = -e^{-(x+t)^2+(y+z)^2} \sin 2(x+t)(y+z) - e^{-(x-t)^2+(y-z)^2} \sin 2(x-t)(y-z)\,;$

$u_3(x,y,z,t) = -e^{-(x+t)^2+(y+z)^2} \sin 2(x+t)(y+z) + e^{-(x-t)^2+(y-z)^2} \sin 2(x-t)(y-z).$

Теперь подставим все параметры в формулу (2.3.4) и, после несложных преобразований, получим следующее решение уравнения неразрывности:

$$u(x,y,z,t,\nu) = 2\sqrt{\nu}\left[e^{-\nu(x+t+y+z)^2} + e^{-\nu(x+t-y-z)^2} + e^{-\nu(x-t+y-z)^2} + e^{-\nu(x-t-y+z)^2}\right]$$

$$v(x,y,z,t,\nu) = -\sqrt{\nu}\left[e^{-\nu(x+t+y+z)^2} - e^{-\nu(x+t-y-z)^2} + e^{-\nu(x-t+y-z)^2} - e^{-\nu(x-t-y+z)^2}\right]$$

$$w(x,y,z,t,\nu) = -\sqrt{\nu}\left[e^{-\nu(x+t+y+z)^2} - e^{-\nu(x+t-y-z)^2} - e^{-\nu(x-t+y-z)^2} + e^{-\nu(x-t-y+z)^2}\right]$$

Легко понять, что получено вихревое решение уравнения неразрывности, которое бесконечно дифференцируемо и ограничено в области $G = R^3 \times [0, \infty)$, вместе со смешанными производными любого порядка по $x, y, z, t$.

Более того, само решение и все его производные стремятся к нулю на бесконечности.

Найденное решение уравнения неразрывности указывает на то, что 6-я задачи тысячелетия (задачи Коши) наверняка разрешима и во второй постановке, при определенном виде массовых сил и начальных условий [1].

**Пример 2.5.4.**

Пусть: $\alpha(Re) = \beta(Re) = \gamma(Re) = \delta(Re) = Re;\ \alpha_1(Re) = 2Re;$

$\beta_1(Re) = \gamma_1(Re) = Re;$ тогда: $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$, при любом $Re$.

Из формулы (2.3.5) следует, что уравнение неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости имеет континуум точных решений следующего вида:

$$u(x,y,z,t,\nu) = 2U\,Re\quad u_1\left(\frac{xRe}{l},\frac{yRe}{l},\frac{zRe}{l},\frac{tRe}{T}\right)$$
$$v(x,y,z,t,\nu) = -U\,Re\quad u_2\left(\frac{xRe}{l},\frac{yRe}{l},\frac{zRe}{l},\frac{tRe}{T}\right)$$
$$w(x,y,z,t,\nu) = -U\,Re\quad u_3\left(\frac{xRe}{l},\frac{yRe}{l},\frac{zRe}{l},\frac{tRe}{T}\right)$$

Здесь: $u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G) -$ произвольная регулярная функция.

Данный пример демонстрирует зависимость характера течения от числа Рейнольдса. Причем явно видно, что характер течения может изменяться со временем, в любой конкретной точке трехмерной области, где происходит течение.

**Пример 2.5.5.**

Найдем решение уравнения неразрывности для идеальной сжимаемой жидкости, соответствующее следующим параметрам:

$u = 2sinX + \mathrm{C}$; где: $\mathrm{C} = (0,0,0,3) -$ постоянная регулярная функция, $\alpha = \delta = \delta_1 = 1;\ \ \beta = \gamma = i;\ \ \alpha_1 = 1;\ \beta_1 = -i;\ \gamma_1 = -i.$

Запишем явный вид базовой функции:

$$u = \{u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t), u_0(x,y,z,t)\}$$
$$u_0(x,y,z,t) = \sin(x+t)\,ch(y+z) - \sin(x-t)\,ch(\mathrm{y}-\mathrm{z}) + 3$$
$$u_1(x,y,z,t) = \sin(x+t)\,ch(y+z) + \sin(x-t)\,\mathrm{ch}(\mathrm{y}-\mathrm{z})$$
$$u_2(x,y,z,t) = cos(x+t)\,sh(y+z) + cos(x-t)\,sh(y-z)$$
$$u_3(x,y,z,t) = cos(x+t)\,sh(y+z) - cos(x-t)\,sh(y-z)$$

Отсюда, легко находим точный вид преобразованных функций:

$$u_0(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta t) = sin(x+t)\cos(y+z) - sin(x-t)\cos(y-z) + 3;$$
$$u_1(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta t) = sin(x+t)\cos(y+z) + sin(x-t)\cos(y-z);$$
$$u_2(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta t) = i\,(cos(x+t)\,sin(y+z) + cos(x-t)\,sin(y-z));$$
$$u_2(\alpha x,\beta y,\gamma z,\delta t) = i\,(cos(x+t)\,sin(y+z) - cos(x-t)\,sin(y-z));$$

Теперь, по формулам (2.4.5), определим требуемое решение:

$$\rho(x,y,z,t) = sin(x+t)\cos(y+z) - sin(x-t)\cos(y-z) + 3$$

$$u(x,y,z,t)=\frac{sin(x+t)\cos(y+z)+sin(x-t)\cos(y-z)}{sin(x+t)\cos(y+z)-sin(x-t)\cos(y-z)+3}$$

$$v(x,y,z,t)=-\frac{cos(x+t)\,sin(y+z)+cos(x-t)\,sin(y-z)}{sin(x+t)\cos(y+z)-sin(x-t)\cos(y-z)+3}$$

$$w(x,y,z,t)=-\frac{cos(x+t)\,sin(y+z)-cos(x-t)\,sin(y-z)}{sin(x+t)\cos(y+z)-sin(x-t)\cos(y-z)+3}$$

Найденное решение обладает следующими свойствами:

1. $0<\rho(x,y,z,t)<5,\quad \forall\,(x,y,z,t)\in R^3\times[0,\infty)$,
2. $u(x,y,z,t),v(x,y,z,t),w(x,y,z,t),\rho(x,y,z,t)\in \mathrm{C}^\infty(R^3\times[0,\infty))$,
3. $u(x,y,z,t),v(x,y,z,t),w(x,y,z,t),\rho(x,y,z,t)$ −ограничены всюду.

Данный пример показывает, что задача Коши для уравнений сжимаемой идеальной жидкости (уравнения Эйлера), может иметь сколь-угодно гладкое решение, ограниченное всюду в области $R^3\times[0,\infty)$.

В заключение, резюмируя результаты Главы 2, можно констатировать следующее:

1. Общее уравнение неразрывности (2.1.1), разрешимо во всем полупространстве $G=R^3\times[0,\infty)$;
2. Классические решения (2.1.1) представимы в виде сколь-угодно гладких, четырехмерных функций из класса $C^\infty M(G)$;
3. Уравнение неразрывности (2.1.2) также разрешимо во всем полупространстве $G=R^3\times[0,\infty)$;
4. Классические решения (2.1.2) представимы в виде сколь-угодно гладких вектор - функций $(u,v,w)\in SCE\ (G)$;
5. Сколь-угодно гладкие решения обоих уравнений неразрывности могут иметь дополнительные свойства, такие как: ограниченность во всем полупространстве $R^3\times[0,\infty)$, периодичность по пространственным переменным, стремление решения к нулю, вместе со всеми смешанными производными любого порядка на бесконечности и т.д.

Полученные результаты говорят о том, что шестая задача наверняка разрешима, причем в обоих вариантах постановки математического института Клея (США), что и и будет подтверждено результатами следующей главы.

При этом мы найдем конкретные классы правых частей (векторов массовых сил) и векторов начальной скорости, при которых шестая задача будет однозначно разрешимой. Ее решение мы найдем в явном виде.

## Глава 3. Решение задачи Коши для вязкой несжимаемой жидкости

### 3.1.Общая постановка задачи

В бесконечной области $G = R^3 \times [0, \infty)$, требуется найти ограниченное и достаточно гладкое решение задачи Коши для системы уравнений Навье - Стокса, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости (газа)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \nu\Delta u &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f_1(x,y,z,t) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \nu\Delta v &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + f_2(x,y,z,t) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \nu\Delta w &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + f_3(x,y,z,t) \end{aligned} \qquad (3.1.1)$$

с условием неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (3.1.2)$$

и начальными условиями:

$$u(x,y,z,0) = \varphi_1(x,y,z), \qquad v(x,y,z,0) = \varphi_2(x,y,z),$$
$$w(x,y,z,0) = \varphi_3(x,y,z) \qquad (3.1.3)$$

Здесь: $f_i$, $\varphi_i$, $i = \overline{1,3}$ – компоненты заданных массовых сил и начальной скорости, которые пока предполагаем достаточно гладкими. В дальнейшем уточним условия, налагаемые на эти функции, при выполнении которых система (3.1.1) – (3.1.3) имеет решение.

**Определение 3.1.4.** Решение $(u, v, w, P)$ задачи (3.1.1) –(3.1.3) назовем полноценным решением, если $uvw \neq 0$ в области $G$.

То есть, у полноценного решения все компоненты скорости тождественно не равны нулю. Более того, все компоненты обязательно зависят от всех пространственных переменных $x, y, z$. Этим мы отсекаем специфические решения типа Пуазейля, решения, не зависящие от каких-либо пространственных переменных, линейно зависящие от части пространственных переменных, априори имеющие вращательную симметрию и т.д. [6].

Реальные течения в бесконечной области (приближение - течение океана), как показывает опыт, не проявляют такого рода специфические свойства в процессе течения.

Поэтому мы в дальнейшем будем искать только полноценные решения исходной задачи. Мы докажем, что полноценное решение этой задачи всегда существует и единственно, если векторы массовых сил $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ и начальной скорости $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ будут принадлежать определенным классам функций, связанным с пространством $M_A(G)$.

**Замечание 3.1.5.** В правых частях (3.1.1) нельзя задавать $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ так, чтобы $rot\vec{F} = 0$. Как показано в работе [8], в этом случае полноценное решение задачи Коши может иметь только следующий вид:

$u(x, y, z, t, \nu) = \lambda\, \alpha(\nu)\ u_1(\alpha(\nu)x\,, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)t)$

$v(x, y, z, t, \nu) = -\lambda\, \beta(\nu)\ \ u_2(\alpha(\nu)x\,, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)t)$

$w(x, y, z, t, \nu) = -\lambda\, \gamma(\nu)\ \ u_3(\alpha(\nu)x\,, \beta(\nu)y\,, \gamma(\nu)z\,, \delta(\nu)t)$

При этом: $\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0;\ \ \Delta u = \Delta v = \Delta w = 0.$

Тогда, ограниченное во всей бесконечной области $G = R^3 \times [0, \infty)$, полноценное решение задачи Коши, может быть только постоянной регулярной функцией (теорема Лиувилля). Этот случай, как известно, не представляет особого практического интереса.

Поэтому в правых частях системы (3.1.1) мы будем рассматривать только такие массовые силы, для которых $rot\vec{F} \neq 0$.

Этим автоматически отсекается случай, когда $\vec{F} = (0,0,0)$, хотя в постановке шестой задачи тысячелетия [1], предлагается (наверное, для упрощения исследований) принимать и нулевое значение массовых сил.

Таким образом, для существования полноценного решения задачи Коши (3.1.1) – (3.1.3) необходимо, чтобы $rot\vec{F} \neq 0$, а значит , $\vec{F} \neq (0,0,0)$.

Далее, решение (3.1.1) – (3.1.3) мы будем искать в классе $SCE\,(G)$ векторов-функций, задаваемых формулами (2.3.4).

### 3.2. Определение условий существования решения из класса $SCE\,(G)$

Вначале покажем, что функции $\varphi_i(x, y, z)$, $i = \overline{1,3}$, определяющие компоненты начальной скорости в правой части (3.1.3), не могут задаваться произвольно.

Действительно, точные решения уравнения неразрывности (3.1.2) определяются формулой (2.3.4), поэтому для существования решения (3.1.1) – (3.1.3) необходимо, чтобы начальные функции имели только следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y,z,\nu) &= \xi_1(\nu)\,\omega_1(\xi(\nu)x\,,\eta(\nu)y\,,\zeta(\nu)z\,,0)\\ \varphi_2(x,y,z,\nu) &= -\eta_1(\nu)\,\omega_2(\xi(\nu)x\,,\eta(\nu)y\,,\zeta(\nu)z\,,0)\\ \varphi_3(x,y,z,\nu) &= -\zeta_1(\nu)\,\omega_3(\xi(\nu)x\,,\eta(\nu)y\,,\zeta(\nu)z\,,0)\end{aligned} \qquad (3.2.1)$$

Здесь: $\xi(\nu),\eta(\nu),\zeta(\nu),\xi_1(\nu),\eta_1(\nu),\zeta_1(\nu)$ −произвольные функций (действительные или комплекснозначные) от переменной вязкости $\nu$, такие, что: $\xi\xi_1-\eta\eta_1-\zeta\zeta_1=0$, $\omega_{t=0}=(\omega_{10},\omega_{20},\omega_{30},\omega_{00})$ – «след» произвольной регулярной четырехмерной функции $\omega\in M_A(G)$, при $t=0$.

Ясно, что «след» любой регулярной функции является некоторой стационарной четырехмерной функцией. Вообще говоря, ее «след» определяется при любом $t=T$ и, в частности, при $t=0$. Если взять функцию $\omega=\big(\omega_1(x,y,z,t),\omega_2(x,y,z,t),\omega_3(x,y,z,t),\omega_0(x,y,z,t)\big)\in M_A(G)$, то ее «след» при любом $t=T$, имеет вид $\omega_T=(\omega_{1T},\omega_{2T},\omega_{3T},\omega_{0T})$, где:

$$\omega_{iT}=\omega_i(x,y,z,T),\ i=\overline{0,3}. \qquad (3.2.2)$$

Для любого «следа» регулярной функции, соотношения вида (1.2.2) также сохраняются, только в укороченной форме:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\omega_{1T}}{\partial x}=\frac{\partial\omega_{2T}}{\partial y}=\frac{\partial\omega_{3T}}{\partial z}\\ &\frac{\partial\omega_{0T}}{\partial x}=\frac{\partial\omega_{2T}}{\partial z}=\frac{\partial\omega_{3T}}{\partial y}\\ &\frac{\partial\omega_{0T}}{\partial y}=\frac{\partial\omega_{1T}}{\partial z}=-\frac{\partial\omega_{3T}}{\partial x}\\ &\frac{\partial\omega_{0T}}{\partial z}=\frac{\partial\omega_{1T}}{\partial y}=-\frac{\partial\omega_{2T}}{\partial x}\end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

**Определение 3.2.4**

Класс векторов – функций $\vec{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, компоненты которых определены формулами (3.2.1), обозначим как $Ar_A(\omega_0,\xi,\eta,\zeta,\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$.

Очевидно, что это множество имеет мощность континуума, так как любой его элемент определяется через след конкретной регулярной функции при $t=0$, при фиксированных параметрах $\xi,\eta,\zeta,\xi_1,\eta_1,\zeta_1$, где: $\xi\xi_1-\eta\eta_1-\zeta\zeta_1=0$.

Более того, любой элемент $\vec{\varphi}\in Ar_A(\omega_0,\xi,\eta,\zeta,\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ имеет следующее ключевое свойство: $div\vec{\varphi}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}=0$, действительно:

$$div\vec{\varphi}=\xi\xi_1\frac{\partial\omega_{10}}{\partial x_1}-\eta\eta_1\frac{\partial\omega_{20}}{\partial y_1}-\zeta\zeta_1\frac{\partial\omega_{30}}{\partial z_1}=(\xi\xi_1-\eta\eta_1-\zeta\zeta_1)\frac{\partial\omega_{10}}{\partial x_1}=0.$$

Здесь мы использовали первый ряд равенств (3.2.3).

Таким образом, для существования решения (3.1.1) – (3.1.3) необходимо, чтобы $\overrightarrow{\varphi}(x,y,z) \in Ar_A(\omega_0,\xi,\eta,\zeta,\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$, в противном случае задача Коши не имеет классического решения из класса $SCE\ (G)$.

Далее, перейдем к определению классов правых частей (3.1.1), то есть, векторов массовых сил $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$, для которых решение (3.1.1) – (3.1.3) может существовать.

При этом обязательно, чтобы $rot\vec{F} \neq 0$ , это пояснено в замечании 3.1.5.

Определим теперь класс векторов – функций $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$, то есть, массовых сил, следующим путем.

Пусть $\alpha(\nu), \beta(\nu), \gamma(\nu), \delta(\nu), \alpha_0(\nu), \beta_0(\nu), \gamma_0(\nu), \alpha_1(\nu), \beta_1(\nu), \gamma_1(\nu) -$ произвольные функции, (действительные или комплексные) зависящие от вязкости $\nu$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Теперь, $\forall u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$ поставим в соответствие вполне определенную вектор - функцию $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$, по следующему правилу:

$$f_1 = \frac{\alpha_0}{\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\beta_0}{\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\gamma_0}{\gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{3.2.5}$$

где:

$$\Psi(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) = \delta u_0(\alpha x\ ,\beta y\ ,\gamma z\ ,\delta t) + \frac{\alpha\alpha_1}{2}{u_1}^2 + \frac{\beta\beta_1}{2}{u_2}^2 +$$

$$+\frac{\gamma\gamma_1}{2}{u_3}^2 - \frac{\nu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{\alpha}\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{3.2.6}$$

Этим определяется некоторый класс векторов – функций, который обозначим как: $Zh_A(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\ )$. Очевидно, для каждой регулярной функции, формулами (3.2.5) и (3.2.6) однозначно определяется одна вектор – функция. Поэтому множество $Zh_A$ имеет мощность континуума, ибо порождающее его множество $M_A(G)$ −бесконечномерное пространство регулярных функций.

В завершение данного раздела рассмотрим важный вопрос о согласованности вектора – функции $\vec{F} \in Zh_A(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\ )$ массовых сил и, $\vec{\varphi} \in Ar_A(\omega_0,\xi,\eta,\zeta,\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ −вектора начальной скорости.

**Определение 3.2.8**

Пара $(\vec{F}, \overrightarrow{\varphi})$ называется согласованной парой, если выполняются следующие условия:

А) $u_{t=0} = \omega_0;\ \ \xi = \alpha;\ \ \eta = \beta;\ \ \zeta = \gamma;\ \xi_1 = \alpha_1;\ \ \eta_1 = \beta_1;\ \ \zeta_1 = \gamma_1;$

B) $\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}-\frac{\beta_0}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}-\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)^2\neq 0;\quad \alpha^2-\beta^2-\gamma^2\neq 0;\ \alpha\beta\gamma\neq 0;$

$$\alpha\alpha_0-\beta\beta_0-\gamma\gamma_0\neq 0;$$

C) $\alpha_1(\nu)=\frac{\alpha(\beta\beta_0+\gamma\gamma_0)-\alpha_0(\beta^2+\gamma^2)}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2};\quad \beta_1(\nu)=\frac{\beta_0(\alpha^2-\gamma^2)-\beta\,(\alpha\alpha_0-\gamma\gamma_0)}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2},$

$$\gamma_1(\nu)=\frac{\gamma_0(\alpha^2-\beta^2)-\gamma\,(\alpha\alpha_0-\beta\beta_0)}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}$$

Таким образом, у согласованной пары семь параметров $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$ могут задаваться произвольно, а остальные три параметра $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ −несвободны, они определяются через них, по определенным выше формулам. Условие $\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}-\frac{\beta_0}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}-\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)^2\neq 0$ означает, что тройное равенство $\frac{\alpha_0}{\alpha}=\frac{\beta_0}{\beta}=\frac{\gamma_0}{\gamma}$ одновременно не выполняется, иначе $rot\vec{F}=0$, мы уже говорили о том, что при потенциальном векторе $\vec{F}$, исходная задача Коши может иметь только постоянное решение. Условие $\alpha\beta\gamma\neq 0$ обеспечивает нахождение только полноценных решений, зависящих от всех пространственных переменных. Докажем еще следующее простое утверждение.

**Лемма 3.2.9**

Если пара согласована, то $\alpha\alpha_1-\beta\beta_1-\gamma\gamma_1=0$, при любых допустимых значениях свободных параметров $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$.

Доказательство леммы элементарно и основано на прямых вычислениях.

Теперь, все множество согласованных пар обозначим как $AL_A(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$. При фиксированных значениях десяти параметров, как легко понять из вышеизложенного материала, любой регулярной функции $u=(u_1,u_2,u_3,u_0)\in M_A(G)$ будет соответствовать только одна согласованная пара $(\vec{F},\overrightarrow{\varphi})\in AL_A(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$.

То есть это множество имеет мощность континуума и, содержит весьма широкий класс согласованных пар.

### 3.3. Инвариантность вида левых частей в уравнениях движения

Результаты этого раздела являются важными для поиска точного решения исходной задачи Коши (3.1.1) – (3.1.3).

Здесь мы докажем, что левые части систем нелинейных уравнений движения (3.1.1) несжимаемой вязкой жидкости (газа), содержащие нелинейные конвективные члены, всегда можно привести к симметрично - инвариантному виду.

Речь здесь идет, как видно из (3.1.1), о следующих функциональных выражениях:

$$J_1 = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \nu\Delta u$$
$$J_2 = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \nu\Delta v \qquad (3.3.1)$$
$$J_3 = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \nu\Delta w$$

Схожие функциональные выражения встречаются в составах и других систем дифференциальных уравнений гидродинамики [3] – [4].

Мы хотим доказать, что для любого решения уравнения неразрывности, определяемого формулой (2.3.4), выражения (3.3.1) всегда приводятся к инвариантному виду, то есть, к некой симметричной форме. Причем это имеет место для всего континуума функций, являющихся решениями уравнения неразрывности.

Действительно, как уже доказано, любое решение уравнения неразрывности для несжимаемой вязкой жидкости, определяется из следующей формулы общего решения (Теорема 2.3.3):

$$u(x,y,z,t,\nu) = \alpha_1(\nu)\quad u_1(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)$$
$$v(x,y,z,t,\nu) = -\beta_1(\nu)\quad u_2(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t)$$
$$w(x,y,z,t,\nu) = -\gamma_1(\nu)\quad u_3(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t) \qquad (3.3.2)$$

Здесь: $\alpha(\nu),\beta(\nu),\gamma(\nu),\delta(\nu),\alpha_1(\nu),\beta_1(\nu),\gamma_1(\nu)$ –произвольные функций (действительные или комплекснозначные) от переменной вязкости $\nu$, такие, что: $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0$, $u = (u_1,u_2,u_3,u_0) \in M_A(G)$ – произвольная регулярная четырехмерная функция.

Примем: $\alpha x = x_1,\ \beta y = y_1,\ \gamma z = z_1,\ \delta t = t_1$.

Теперь, последовательно дифференцируя функции из (3.3.2) и, при этом используя свойства (1.5.1) – (1.5.2) регулярной функции, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha_1(\nu)\delta(\nu)\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = \alpha_1(\nu)\delta(\nu)\frac{\partial u_0}{\partial x_1};\qquad u\,\frac{\partial u}{\partial x} = [\alpha_1(\nu)]^2\,\alpha(\nu)\,u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_1(\nu)\beta(\nu)\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = -\alpha_1(\nu)\beta(\nu)\frac{\partial u_2}{\partial x_1};\qquad v\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_1(\nu)\beta_1(\nu)\beta(\nu)u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_1(\nu)\gamma(\nu)\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\alpha_1(\nu)\gamma(\nu)\frac{\partial u_3}{\partial x_1}; \quad w\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_1(\nu)\gamma_1(\nu)\gamma(\nu)u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_1};$$

$$\Delta u = \alpha_1(\nu)\left(\alpha^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial {x_1}^2} + \beta^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial {y_1}^2} + \gamma^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial {z_1}^2}\right) = \alpha_1(\nu)(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial {x_1}^2}.$$

Тогда:

$$J_1 = \alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\delta u_0(x_1, y_1, z_1, t_1) + \frac{\alpha\alpha_1}{2}{u_1}^2 + \frac{\beta\beta_1}{2}{u_2}^2 + \frac{\gamma\gamma_1}{2}{u_3}^2 - \nu(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right].$$

Возвращаясь к исходным пространственным переменным, имеем:

$$J_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad \Psi(u, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \delta u_0(\alpha x, \beta y, \gamma z, \delta t) + \frac{\alpha\alpha_1}{2}{u_1}^2 + \frac{\beta\beta_1}{2}{u_2}^2 +$$

$$+ \frac{\gamma\gamma_1}{2}{u_3}^2 - \frac{\nu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{\alpha}\frac{\partial u_1}{\partial x}. \qquad (3.3.3)$$

Аналогичные преобразования дают: $J_2 = \frac{\beta_1}{\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial y}$; $J_3 = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$.

Таким образом, левые части системы дифференциальных уравнений Навье - Стокса, всегда преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \nu\Delta u = \frac{\alpha_1}{\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ J_2 &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \nu\Delta v = \frac{\beta_1}{\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ J_3 &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \nu\Delta w = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

То есть, инвариантный вид (3.3.5) справедлив для всех функций, являющихся решениями уравнения неразрывности и, определяемых из формулы общего решения (3.3.2). А ведь решения самих систем дифференциальных уравнений (3.1.1) мы также должны искать среди множества решений уравнения неразрывности.

Поэтому ясно, что любое решение (3.1.1) – (3.1.3), если оно существует, при подстановке в левые части (3.1.1), обязательно приводит к форме (3.3.5).

### 3.4 Теорема существования и единственности задачи Коши

Теперь мы подготовлены к доказательству теоремы о существовании и единственности задачи Коши (3.1.1) – (3.1.3).

**Глобальная теорема разрешимости**

Пусть вектор массовых сил $\vec{F} \in Zh_A(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ и вектор начальной скорости $\overrightarrow{\varphi}(x,y,z) \in Ar_A(\omega_0,\xi,\eta,\zeta,\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ заданы так, что пара $(\vec{F},\ \overrightarrow{\varphi}) \in AL_A(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$.

Тогда:

1. Задача (3.1.1) - (3.1.3) имеет единственное полноценное решение из класса: $u,v,w,P \in C^{\infty}(R^3 \times [0,\infty))$;
2. Это решение дается следующей формулой:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t,\nu) &= \alpha_1(\nu)\ \ u_1(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t),\\ v(x,y,z,t,\nu) &= -\beta_1(\nu)\ \ u_2(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t),\\ w(x,y,z,t,\nu) &= -\gamma_1(\nu)\ \ u_3(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,\delta(\nu)t),\\ P(x,y,z,t,\nu) &= -\rho[\lambda\,\Psi(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)+C(t)]. \end{aligned} \qquad (3.4.1)$$

где: $C(t)$ −произвольная функция, $\Psi$ −определяется по формуле (3.3.3),

$$\lambda = -\frac{\alpha\alpha_0-\beta\beta_0-\gamma\gamma_0}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}.$$

3. Формула (3.4.1) содержит, среди прочих, и ограниченные всюду в области $R^3 \times [0,\infty)$ решения.

**Доказательство:**

Пусть $(\vec{F},\ \overrightarrow{\varphi}) \in AL_A(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$. Тогда:

$$f_1 = \frac{\alpha_0}{\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \qquad f_2 = \frac{\beta_0}{\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad f_3 = \frac{\gamma_0}{\gamma}\frac{\partial\Psi}{\partial z},$$

$$\Psi(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) = \delta u_0(\alpha x\,,\beta y\,,\gamma z\,,\delta t) + \frac{\alpha\alpha_1}{2}{u_1}^2 + \frac{\beta\beta_1}{2}{u_2}^2 +$$

$$+\frac{\gamma\gamma_1}{2}{u_3}^2 - \frac{\nu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{\alpha}\frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y,z,\nu) &= \ \ \alpha_1(\nu)\,u_1(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,0)\\ \varphi_2(x,y,z,\nu) &= -\beta_1(\nu)\,u_2(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,0)\\ \varphi_3(x,y,z,\nu) &= -\gamma_1(\nu)\,u_3(\alpha(\nu)x\,,\beta(\nu)y\,,\gamma(\nu)z\,,0) \end{aligned} \qquad (3.4.2)$$

A) Покажем, что первая тройка функции из (3.4.1) удовлетворяет условию (3.1.2). Для этого достаточно показать, что $\alpha\alpha_1-\beta\beta_1-\gamma\gamma_1=0$, но это всегда выполняется для согласованной пары (Лемма 3.2.9).

B) То, что первая тройка функции из (3.4.1) удовлетворяет условию (3.1.3) тривиально, если сравнить конкретный вид начальных функций (3.4.2) и компонентов скорости самого решения из (3.4.1).

С) Наконец покажем, что вся четверка функции из (3.4.2) удовлетворяет всем уравнениям системы (3.1.1).

На основе инвариантного вида (3.3.5) и, учитывая конкретный вид массовых сил, (3.1.1) преобразуется в следующую эквивалентную форму:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\alpha_0}{\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial x}; \quad \frac{\beta_1}{\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\beta_0}{\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\gamma_0}{\gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Отсюда:

$$\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\beta_1-\beta_0}{\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\gamma_1-\gamma_0}{\gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.4.3)$$

Далее, прямые расчеты, с учетом явного вида $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ из (3.2.8), дают:

$$\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha} = \frac{\beta_1-\beta_0}{\beta} = \frac{\gamma_1-\gamma_0}{\gamma} = \lambda = -\frac{\alpha\alpha_0-\beta\beta_0-\gamma\gamma_0}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}.$$

Тогда (3.4.3) перепишется в следующей, градиентной форме:

$\lambda\nabla\Psi = -\frac{1}{\rho}\nabla P$, отсюда, $P(x,y,z,t,\nu) = -\rho[\lambda\,\Psi(x,y,z,t,\nu) + C(t)]$.

Из способа получения решения сразу следует, что оно единственно. Очевидно, что $u, v, w, P \in C^{\infty}(R^3 \times [0,\infty))$. Действительно, каждая из этих функций определяется через составляющие функции. Но нам известно, что эти составляющие бесконечно дифференцируемы.

Е) Компоненты скорости $u, v, w$, определяемые формулой (3.4.1), окажутся бесконечно дифференцируемыми функциями в любом случае, но они могут иметь и другие свойства, в зависимости от свойств параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ и типа регулярной функции $u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$.

Можно легко показать (пример 2.5.3), что при соответствующем подборе исходных параметров, по формулам (3.4.1) могут определяться и ограниченные во всей области решения.

Глобальная теорема разрешимости доказана.

Она показывает, что при любых согласованных парах массовых сил и начальной скорости, задача Коши глобально разрешима, при этом решение единственно и бесконечно дифференцируемо..

Теперь уже решение шестой задачи тысячелетия просто сводится к подбору конкретного вида $u = (u_1, u_2, u_3, u_0) \in M_A(G)$ и параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ так, чтобы полученные векторы массовых сил и начальной скорости удовлетворяли условиям этой задачи. А затем остается проверить дифференциальные свойства полученного решения.

# Глава 4. Явное аналитическое решение шестой задачи тысячелетия

## 4.1. Постановка задачи в периодической форме

В бесконечной области $G = R^3 \times [0, \infty)$ требуется доказать существование бесконечно-дифференцируемого решения задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \nu\Delta u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f_1(x, y, z, \nu, t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \nu\Delta v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + f_2(x, y, z, \nu, t) \qquad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \nu\Delta w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + f_3(x, y, z, \nu, t)$$

с условием неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.2)$$

с начальными условиями:

$$u(x, y, z, 0, \nu) = \varphi_1(x, y, z, \nu);\ v(x, y, z, 0, \nu) = \varphi_2(x, y, z, \nu);$$
$$w(x, y, z, 0, \nu) = \varphi_3(x, y, z, \nu). \qquad (4.1.3)$$

Здесь компоненты массовых сил и начальной скорости являются периодическими функциями по пространственным переменным, то есть, существует $(e_1, e_2, e_3) \in R^3$ и выполняются условия:

$$\left|\frac{\partial^{n+r+s+m} f_i}{\partial x^n \partial y^r \partial z^s \partial t^m}\right| \le \frac{C_{nrsmK}}{(1+t)^K} \qquad (4.1.4)$$

$$f_i(x + e_1, y + e_2, z + e_3, t, \nu) = f_i\,(x, y, z, t, \nu)\,, \qquad (4.1.5)$$

$$\varphi_i(x + e_1, y + e_2, z + e_3, \nu) = \varphi_i(x, y, z, \nu)\,,\ i = \overline{1,3} \qquad (4.1.6)$$

где: $n, r, s, m -$ любые неотрицательные целые числа, $K \ge 0 -$ некоторое число, $C_{nrsmK} -$ конечное положительное число, свое для каждой комбинаций чисел $n, r, s, m$ и $K$.

Требуется доказать, что существует решение задачи (4.1.1) – (4.1.3) из класса:

$u(x, y, z, t, \nu), v(x, y, z, t, \nu), w(x, y, z, t, \nu), P(x, y, z, t, \nu) \in C^\infty\left[R^3 \times [0, \infty)\right]$, причем:

$$u(x + e_1,\ y + e_2,\ z + e_3, t, \nu) = u(x, y, z, t, \nu);$$
$$v(x + e_1,\ y + e_2, z + e_3, t, \nu) = v(x, y, z, t, \nu);$$
$$w(x + e_1, y + e_2, z + e_3, t, \nu) = w(x, y, z, t, \nu) \qquad (4.1.7)$$

**Теорема (4.1.8).** Задача (4.1.1) – (4.1.3) однозначно разрешима для любой согласованной пары $(\vec{F},\ \overrightarrow{\varphi}) \in AL_A(u, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, и конкретный вид решения дается формулой (3.4.1). Дополнительно, если

компоненты массовых сил и начальной скорости имеют свойства (4.1.4) – (4.1.6), то полученное решение имеет свойство (4.1.7).

Доказательство:

Решение (4.1.1) – (4.1.3) существует, единственно и имеет вид (3.4.1), это следует из глобальной теоремы разрешимости. Нам остается показать, что существует четырехмерная регулярная функция $U \in M_A(G)$ такая, что согласованная пара массовых сил и начальной скорости, определенная по данной функции, будет удовлетворять (4.1.4) – (4.1.6), а полученное решение задачи – условиям (4.1.7).

В качестве базовой, примем четырехмерную функцию $U = 2sinX$.

$U = \{u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t), u_0(x,y,z,t)\} \in M_A(G)$, где:

$$u_0(x,y,z,t) = \sin(x+t)\,ch(y+z) - \sin(x-t)\,ch(\mathrm{y}-\mathrm{z})$$
$$u_1(x,y,z,t) = \sin(x+t)\,ch(y+z) + \sin(x-t)\,\mathrm{ch}(\mathrm{y}-\mathrm{z})$$
$$u_2(x,y,z,t) = cos(x+t)\,sh(y+z) + cos(x-t)\,sh(y-z)$$
$$u_3(x,y,z,t) = cos(x+t)\,sh(y+z) - cos(x-t)\,sh(y-z)$$

Это – регулярная функция всюду в области $G = R^3 \times [0,\infty)$.

Далее примем:

$$\alpha(\nu) = \delta(\nu) = \frac{1}{\nu+1}\ ;\ \beta(\nu) = \gamma(\nu) = \frac{i}{\nu+1};\ \alpha_0 = 4;\ \beta_0 = \gamma_0 = i.$$

Тогда автоматически, по (3.2.8), определяются еще три функции:

$$\alpha_1(\nu) = \frac{\alpha(\beta\beta_0+\gamma\gamma_0)-\alpha_0(\beta^2+\gamma^2)}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} = \frac{\frac{1}{\nu+1}\left(\frac{-2}{\nu+1}\right)-4\left(\frac{-2}{(\nu+1)^2}\right)}{\frac{3}{(\nu+1)^2}} = 2;$$

$$\beta_1(\nu) = \frac{\beta_0(\alpha^2-\gamma^2)-\beta\,(\alpha\alpha_0-\gamma\gamma_0)}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} = -i;$$

$$\gamma_1(\nu) = \frac{\gamma_0(\alpha^2-\beta^2)-\gamma\,(\alpha\alpha_0-\beta\beta_0)}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} = -i.$$

Теперь найдем вид взаимно согласованной пары $(\vec{F}, \vec{\varphi})$, вектора массовых сил и вектора начальной скорости. По формуле (3.4.2) имеем:

$$\varphi_1(x,y,z,\nu) = 2\left[\sin\left(\frac{x}{\nu+1}\right)ch\left(i\frac{y+z}{\nu+1}\right) + \sin\left(\frac{x}{\nu+1}\right)ch\left(i\frac{y-z}{\nu+1}\right)\right].$$

$$\varphi_2(x,y,z,\nu) = i\left[cos\left(\frac{x}{\nu+1}\right)sh\left(i\frac{y+z}{\nu+1}\right) + cos\left(\frac{x}{\nu+1}\right)sh\left(i\frac{y-z}{\nu+1}\right)\right]$$

$$\varphi_3(x,y,z,\nu) = i\left[cos\left(\frac{x}{\nu+1}\right)sh\left(i\frac{y+z}{\nu+1}\right) - cos\left(\frac{x}{\nu+1}\right)sh\left(i\frac{y-z}{\nu+1}\right)\right]$$

Отсюда, после простых преобразований, окончательно получим:

$$\varphi_1(x,y,z,\nu) = 2\sin\frac{x}{\nu+1}\left(cos\frac{y+z}{\nu+1} + cos\frac{y-z}{\nu+1}\right);$$

$$\varphi_2(x,y,z,\nu) = -cos\frac{x}{\nu+1}\left(\sin\frac{y+z}{\nu+1} + \sin\frac{y-z}{\nu+1}\right);$$

$$\varphi_3(x,y,z,\nu) = -cos\frac{x}{\nu+1}\left(\sin\frac{y+z}{\nu+1} - \sin\frac{y-z}{\nu+1}\right)$$

Заметим, что $div\overrightarrow{\varphi} = 0$.

Очевидно, что: $\varphi_i(x,y,z,\nu) \in C^\infty[R^3 \times [0,\infty)], i = \overline{1,3},$ к тому же, $\varphi_i(x+2\pi(\nu+1), y+\pi(\nu+1), z+\pi(\nu+1), \nu) = \varphi_i(x,y,z,\nu), i = \overline{1,3}.$

То есть, найденные функции $\varphi_i(x,y,z,\nu),\ i = \overline{1,3},$ являются периодическими функциями по пространственным переменным $(x,y,z)$ с вектором-периодом: $T = (2\pi(\nu+1), \pi(\nu+1), \pi(\nu+1).$

Далее, найдем точный вид вектора массовых сил $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$: $f_1(x,y,z,\nu,t) = \frac{\alpha_0}{\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial x};\quad f_2(x,y,z,\nu,t) = \frac{\beta_0}{\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial y};\quad f_3(x,y,z,\nu,t) = \frac{\gamma_0}{\gamma}\frac{\partial\Psi}{\partial z}.$

Вспомогательная функция $\Psi(x,y,z,\nu,t)$ вычисляется непосредственно:

$$\Psi(x,y,z,\nu,t) = \frac{1}{\nu+1}(R_1 + R_2 + R_3) - \frac{3\nu}{(\nu+1)^2}R_4$$

$$R_1 = sin\frac{x+t}{\nu+1}cos\frac{y+z}{\nu+1} - sin\frac{x-t}{\nu+1}cos\frac{y-z}{\nu+1}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x+t+y+z}{\nu+1} + \sin\frac{x+t-y-z}{\nu+1}\right)\left(\sin\frac{x-t+y-z}{\nu+1} + \sin\frac{x-t-y+z}{\nu+1}\right)$$

$$R_3 = \frac{1}{2}\left(cos\frac{2(y+z)}{\nu+1} - cos\frac{2(x+t)}{\nu+1} + cos\frac{2(y-z)}{\nu+1} - cos\frac{2(x-t)}{\nu+1}\right)$$

$$R_4 = cos\frac{x+t}{\nu+1}cos\frac{y+z}{\nu+1} + cos\frac{x-t}{\nu+1}cos\frac{y-z}{\nu+1}$$

Отсюда легко понять, что:

$$\Psi(x+2\pi(\nu+1), y+\pi(\nu+1), z+\pi(\nu+1), t, \nu) = \Psi(x, y, z, t, \nu)$$

То есть, найденная функция $\Psi(x, y, z, t, \nu)$ является периодической функцией по всем пространственным переменным, с вектором-периодом: $T = (2\pi(\nu+1), \pi(\nu+1), \pi(\nu+1)$, при этом: $\Psi \in C^{\infty}[R^3 \times [0, \infty)]$.

Далее: $f_1 = 4(\nu+1)\frac{\partial \Psi}{\partial x}$; $f_2 = (\nu+1)\frac{\partial \Psi}{\partial y}$; $f_3 = (\nu+1)\frac{\partial \Psi}{\partial z}$.

Тогда очевидно, что компоненты массовых сил также являются периодическими функциями по переменным $(x, y, z)$, с тем же вектором-периодом: $T = (2\pi(\nu+1), \pi(\nu+1), \pi(\nu+1)$, то есть,

$$f_i(x+2\pi(\nu+1), y+\pi(\nu+1), z+\pi(\nu+1), t, \nu) = f_i(x, y, z, t, \nu), i = \overline{1,3}.$$

$f_i(x, y, z, \nu, t) \in \mathrm{C}^{\infty}[R^3 \times [0, \infty)]$ , $i = \overline{1,3}$; Прямыми расчетами можно доказать следующие дифференциальные свойства найденного вектора массовых сил $\vec{F}$:

$\left|\frac{\partial^{n+r+s+k} f_i}{\partial x^n \partial y^r \partial z^s \partial t^{\delta k}}\right| \leq \frac{6}{(\nu+1)^{n+r+s+k}}$ , где $n, r, s, k -$ любые неотрицательные целые числа.

Полученной согласованной паре $(\vec{F}, \vec{\varphi})$, как нам уже известно, соответствует единственное решение задачи (4.1.1) –(4.1.3) вида:

$$u(x, y, z, t, \nu) = 2\left(sin\frac{x+t}{\nu+1} cos\frac{y+z}{\nu+1} + sin\frac{x-t}{\nu+1} cos\frac{y-z}{\nu+1}\right);$$

$$v(x, y, z, t, \nu) = -\left(cos\frac{x+t}{\nu+1} sin\frac{y+z}{\nu+1} + cos\frac{x-t}{\nu+1} sin\frac{y-z}{\nu+1}\right);$$

$$w(x, y, z, t, \nu) = -\left(cos\frac{x+t}{\nu+1} sin\frac{y+z}{\nu+1} - cos\frac{x-t}{\nu+1} sin\frac{y-z}{\nu+1}\right);$$

$$P(x, y, z, t, \nu) = -\rho\,[2(\nu+1)\,\Psi(x, y, z, \nu, t) + \mathrm{C}\,(t, \nu)].$$

Из этой явной формулы, автоматически определяются следующие дифференциальные свойства найденного решения:

$u(x, y, z, t, \nu), v(x, y, z, t, \nu), w(x, y, z, t, \nu), P(x, y, z, t, \nu) \in C^{\infty}[R^3 \times [0, \infty)]$,

причем: $u(x+2\pi(\nu+1), y+\pi(\nu+1), z+\pi(\nu+1), t, \nu) = u(x, y, z, t, \nu)$;

$v(x+2\pi(\nu+1), y+\pi(\nu+1), z+\pi(\nu+1), t, \nu) = v(x, y, z, t, \nu)$;

$w(x+2\pi(\nu+1), y+\pi(\nu+1), z+\pi(\nu+1), t, \nu) = w(x, y, z, t, \nu)$.

Легко понять, что найденное решение ограничено во всей бесконечной области $G = R^3 \times [0, \infty)$. Теорема доказана.

Таким образом, шестая задача тысячелетия всегда разрешима в периодической постановке, если только векторы массовых сил и начальной скорости согласованы и, обладают нужными свойствами периодичности.

В следующем разделе шестая задача тысячелетия будет изучена в другой постановке, то есть, исследуется вопрос о нахождении бесконечно дифференцируемого решения задачи Коши, стремящегося к нулю на бесконечности, вместе со смешанными производными любого порядка.

**4.2. О существовании и единственности решения задачи Коши, исчезающего на бесконечности, вместе с производными любого порядка**

В бесконечной области $G = R^3 \times [0, \infty)$ требуется доказать существование бесконечно-дифференцируемого решения задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \nu\Delta u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f_1(x, y, z, \nu, t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \nu\Delta v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + f_2(x, y, z, \nu, t) \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \nu\Delta w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + f_3(x, y, z, \nu, t)$$

с условием неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.2.2)$$

с начальными условиями:

$$u(x, y, z, 0, \nu) = \varphi_1(x, y, z, \nu);\ v(x, y, z, 0, \nu) = \varphi_2(x, y, z, \nu);$$
$$w(x, y, z, 0, \nu) = \varphi_3(x, y, z, \nu). \quad (4.2.3)$$

Рассмотрим исходную задачу (4.2.1) – (4.2.3). Пусть начальная скорость $\vec{\varphi}-$ произвольная гладкая вектор - функция, удовлетворяющая уравнению неразрывности (4.2.2) и такая, что для любого мультииндекса $\alpha$ и любого $K > 0$ , существует постоянная $C_{\alpha K}$ (зависящая только от $\alpha$ и $K$), такая, что:

$$|\partial^\alpha \vec{\varphi}| \le \frac{C_{\alpha K}}{(1+r)^K}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{для } \forall (x, y, z) \in R^3. \quad (4.2.4)$$

Пусть вектор массовых сил $\vec{F}$ — также гладкая вектор - функция, удовлетворяющая аналогичному неравенству (здесь мультииндекс включает также производные по времени):

$$\left|\partial^\alpha \vec{F}\right| \le \frac{C_{\alpha K}}{(1+r+t)^K} \quad \text{для} \quad \forall (x, y, z, t) \in R^3 \times [0, \infty). \quad (4.2.5)$$

Доказать существование решения задачи Коши, удовлетворяющего следующим условиям:

1. $u(x,y,z,t,\nu), v(x,y,z,t,\nu), w(x,y,z,t,\nu), P(x,y,z,t,\nu) \in C^{\infty}[R^3 \times [0,\infty)]$;

2. $\exists C > 0$, такая, что: $\iiint_{-\infty}^{+\infty}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz < C,\ \forall t \in [0,\infty)$.

(4.2.6)

**Теорема 4.2.7** Задача (4.2.1) – (4.2.3) однозначно разрешима для любой пары $(\vec{F},\ \overrightarrow{\varphi}) \in AL_A(u,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ и решение дается формулой (3.4.1), в которой необходимо принять: $C(t) = 0$. При этом, если компоненты пары таковы, что имеют место (4.2.4) и (4.2.5), то полученное решение удовлетворяет условиям (4.2.6).

Доказательство:

Решение (4.2.1) – (4.2.3) существует и единственно, это следует из глобальной теоремы разрешимости. Нам остается показать, что существует хотя бы одна четырехмерная регулярная функция $U \in M_A(G)$, такая, что согласованная пара массовых сил и начальной скорости, определенная по данной функции, будет удовлетворять (4.2.4) – (4.2.5), а полученное решение задачи – условиям (4.2.6).

В качестве базовой функции выберем $u = A\,e^{-X^2}$, где $A = (1,0,0,1)$ – постоянная функция. Тогда перемножив по формуле (1.2.5), определим:

$u = \{u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t), u_0(x,y,z,t)\}$

$u_0(x,y,z,t) = e^{-(x+t)^2+(y+z)^2}\cos 2(x+t)(y+z)$

$u_1(x,y,z,t) = e^{-(x+t)^2+(y+z)^2}\cos 2(x+t)(y+z)$;

$u_2(x,y,z,t) = -e^{-(x+t)^2+(y+z)^2}\sin 2(x+t)(y+z)$;

$u_3(x,y,z,t) = -e^{-(x+t)^2+(y+z)^2}\sin 2(x+t)(y+z)$.

Пусть: $\alpha(\nu) = \delta(\nu) = \sqrt{\nu}$; $\beta(\nu) = \gamma(\nu) = i\sqrt{\nu}$; $\alpha_0 = 4$; $\beta_0 = \gamma_0 = i$.

Тогда:

$$\alpha_1(\nu) = \frac{\alpha(\beta\beta_0+\gamma\gamma_0)-\alpha_0(\beta^2+\gamma^2)}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} = 2;$$

$$\beta_1(\nu) = \frac{\beta_0(\alpha^2-\gamma^2)-\beta\,(\alpha\alpha_0-\gamma\gamma_0)}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} = -i;$$

$$\gamma_1(\nu) = \frac{\gamma_0(\alpha^2-\beta^2)-\gamma\,(\alpha\alpha_0-\beta\beta_0)}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} = -i.$$

Теперь найдем вид взаимно согласованной пары $(\vec{F}, \vec{\varphi})$, вектора массовых сил и вектора начальной скорости. По формуле (3.4.2) имеем:

$$\varphi_1(x,y,z,\nu) = \alpha_1(\nu)\, u_1(\alpha x, \beta y, \gamma z, 0) \quad = 2\left[e^{-\nu(x+y+z)^2} + e^{-\nu(x-y-z)^2}\right].$$

$$\varphi_2(x,y,z,\nu) = \ -\beta_1(\nu)\, u_2(\alpha x, \beta y, \gamma z, 0) = -\left[e^{-\nu(x+y+z)^2} - e^{-\nu(x-y-z)^2}\right]$$

$$\varphi_3(x,y,z,\nu) = \ -\gamma_1(\nu)\, u_3(\alpha x, \beta y, \gamma z, 0) = -\left[e^{-\nu(x+y+z)^2} - e^{-\nu(x-y-z)^2}\right]$$

Легко видеть, что $div\overrightarrow{\varphi} = 0$.

Очевидно, что: $\varphi_i(x,y,z,\nu) \in C^\infty[R^3], i = \overline{1,3},$ к тому же, все функции $\varphi_i(x,y,z,\nu)$ удовлетворяют условию (4.2.4), так как $\nu > 0$.

Далее, найдем точный вид вектора массовых сил $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$.

$f_1(x,y,z,\nu,t) = \frac{\alpha_0}{\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial x}$; $\quad f_2(x,y,z,\nu,t) = \frac{\beta_0}{\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial y}$; $\quad f_3(x,y,z,\nu,t) = \frac{\gamma_0}{\gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$.

Вспомогательная функция $\Psi(x,y,z,\nu,t)$ вычисляется непосредственно:

$$\Psi = \sqrt{\nu}\ \left(e^{-\nu(x+t+y+z)^2} + e^{-\nu(x+t-y-z)^2} + 4e^{-2\nu[(x+t)^2+(y+z)^2]}\right) +$$

$$+6\sqrt{\nu}\,\nu^2(x+t+y+z)e^{-\nu(x+t+y+z)^2} + 6\sqrt{\nu}\,\nu^2(x+t-y-z)e^{-\nu(x+t-y-z)^2}.$$

Отсюда ясно, что: $\Psi(x,y,z,\nu,t) \in C^\infty[R^3 \times [0,\infty)]$. Далее, очевидно, что не только сама функция, но и все ее смешанные производные стремятся к нулю, когда $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty$, быстрее, чем $\frac{1}{(1+r+t)^K}$ где $K > 0$.

Тогда, точно такими же свойствами обладают компоненты массовых сил:

$$f_1 = \frac{4}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial \Psi}{\partial x}; \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial \Psi}{\partial y}; \qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

Найденные компоненты массовых сил подавно удовлетворяют условиям (4.2.5). Теперь, на основе глобальной теоремы разрешимости задачи Коши, найденным векторам массовых сил и начальной скорости соответствует единственное решение задачи (4.2.1) - (4.2.3), следующего вида :

$$u(x,y,z,t,\nu) = 2\left[e^{-\nu(x+t+y+z)^2} + e^{-\nu(x+t-y-z)^2}\right]$$

$$v(x,y,z,t,\nu) = -\left[e^{-\nu(x+t+y+z)^2} - e^{-\nu(x+t-y-z)^2}\right]$$

$$w(x,y,z,t,\nu) = -\left[e^{-\nu(x+t+y+z)^2} - e^{-\nu(x+t-y-z)^2}\right]$$

$P(x,y,z,t,\nu) = -\rho[\lambda\,\Psi(x,y,z,\nu,t) + C(t)]$, где :

$\lambda = -\frac{\alpha\alpha_0-\beta\beta_0-\gamma\gamma_0}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} = -\frac{2}{\sqrt{\nu}}$ , а $C(t) = 0$ –из условия стремления решения к нулю на бесконечности.

Легко видеть, что полученное решение обладает свойствами (4.2.6). Более того, здесь имеет место закон сохранения кинетической энергии жидкости:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}(u^2 + v^2 + w^2)dxdydz = \iiint_{-\infty}^{+\infty}({\varphi_1}^2 + {\varphi_2}^2 + {\varphi_3}^2)dxdydz.$$

Действительно, это следует из простых равенств, следующего типа:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\nu(x+t+y+z)^2}\,dxdydz = \begin{vmatrix} x+t=x_1 \\ dx=dx_1 \end{vmatrix} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\nu(x_1+y+z)^2}\,dx_1dydz$$

Теорема доказана полностью.

## Заключение

В данной работе показаны возможности применения нового математического аппарата, связанного с понятием четырехмерных регулярных функций, к решению шестой задачи тысячелетия в обеих постановках [1], данных математическим институтом Клея (США).

Для решения этой трудной задачи, потребовалось предварительно определить континуум точных решений ключевого уравнения физики (механики) – так называемого уравнения неразрывности, и оно найдено благодаря использованию аппарата новой математической теории.

Вообще говоря, начальные главы этой теории опирались на подход, связанный с бикомплексными числами. Они были изложены в совместной работе [5], опубликованной в 2003 году и, нуждались в серьезной доработке.

В связи с этим, автор за последнее десятилетие переработал и дополнил основы теории так, что потребовалось ее изложения в ином ракурсе, уже без привлечения понятия бикомплексного числа. Такой подход, по мнению автора, снимает многие неясные вопросы, имевшие место в первоначальном изложении.

В данной работе краткое изложение материала дано по новому подходу.

Далее, кроме излагаемого здесь материала, получены и другие существенные результаты. Это свидетельствует о том, что созданный четырехмерный математический аппарат является действенным инструментом решения различных прикладных четырехмерных задач физики и механики, где приходится исследовать нелинейные задачи достаточно сложного вида.

Отметим, что в случае сжимаемой жидкости, метод также применим, и дает возможность находить даже точные решения соответствующих систем дифференциальных уравнений при баротропных процессах.

Далее, метод применим для решения и других четырехмерных нелинейных задач различного направления (в частности, задач теории упругости и теории крыла).

В целом, у него есть убеждение, что умелое применение методов ТЧРФ в аэродинамике, в гидродинамике, в задачах теории крыла и т.д., еще не раз приведет к получению интересных, доселе неизвестных результатов.

Действительно, на это указывает «корневая» связь четырехмерных функций с ключевым уравнением неразрывности. А последнее уравнение зримо или неявно присутствует во всех математических моделях, описывающих реальные физические процессы.

## Литература

1. Fefferman, C. L., “Existence and smoothness of the Navier–Stokes equations,” in The Millenium Prize Problems, edited by Jaffe, A. and Wiles, A. (American Mathematical Society, Providence, 2006), pp. 57–70, freely available at http://www.claymath.org/millenium/Navier-Stokes_Equations/NavierStokes.pdf.

2. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.:Наука,1973.

5.Маукеев Б.И., Абенов М.М. Начальные главы теории функций бикомплексного переменного.-Алматы.:ТОО «МТИА», 2003.- 58 с.

6.С.Н.Аристов и др. Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных. «Теоретические основы химической технологии», 2009, том 43, №5.

7. Абенов М.М., Некоторые приложения спектральной теории функции бикомплексного переменного. -Алматы.:Издательство «К-2», 2013.- 54 с.

8. Абенов М.М., Решения системы уравнений Навье - Стокса. -Алматы.: Издательство «К-2», 2013.- 64 с.

9. Abenov M., Exact solutions of the three – dimensional Navier – Stokes equations //V Congress of the TURKIC WORLD MATHEMATICIANS, Abstracts//, 2014.- p.149.

10. Абенов М.М., О континууме точных решений общего уравнения неразрывности.- Тезисы докладов международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и математического моделирования».- Алматы, 2015.- с.215.

**АБЕНОВ МАХСУТ МНАЙДАРОВИЧ**

# РЕШЕНИЕ ШЕСТОЙ ЗАДАЧИ ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ

Ответственный за выпуск: Жумадильдин Б.А.
Дизайн и верстка: Медеубеков Д.С.
Сдано в набор 20.07.2015 г. Подписано в печать 22.07.2015 г.
Формат А4. Бумага 80 гр. шрифт «Times New Roman»
Печать офсетная. Печ.л.3.
Тираж 500 экз. Заказ 0001

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре
«Казахстан Инжиниринг»
010000, г. Астана, ул. Ауезова, 2