V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

PROCEEDINGS

OF SCIENTIFIC CONFERENCE

“ACTUAL PROBLEMS OF STOCHASTIC ANALYSIS”

dedicated to the 80th anniversary of the birth of academician Sh.K.FORMANOV

February 20-21, 2021
Tashkent

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

PROCEEDINGS

OF SCIENTIFIC CONFERENCE

«ACTUAL PROBLEMS OF STOCHASTIC ANALYSIS»

dedicated to the 80th anniversary of the birth of academician Sh.K.FORMANOV.

February 20-21, 2021, Tashkent.

(PATH I)

Tashkent - 2021

Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз
Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

МАТЕРИАЛЫ

НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»,

ПОСВЯЩЕННОЙ 80 ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА Ш.К.ФОРМАНОВА.

20-21 февраля 2021 г., Ташкент.

(ЧАСТЬ I)

Ташкент - 2021

Об осреднении уравнения температурного поля в дельта - коррелированном по времени случайном течении

Аканбай Н., Сулейменова З.И., Тапеева С.К.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан

e-mail noureke1953@gmail.com, e-mail suleymenova2474@gmail.com, e-mail tapeevasamal77@gmail.com

Хорошо известно, что уравнения с частными производными со случайными коэффициентами наиболее адекватно и точнее описывают природу физических явлений и присущие им неопределенности. При этом одной из основных проблем является вопросы существования, единственности и измеримости решений полученных уравнений. Эти проблемы являются существенными прежде всего с теоретической точки зрения. Для прикладных же вопросов на первый план выдвигаются проблемы нахождения вероятностно-статистических характеристик решений рассматриваемых уравнений (например, вопросы нахождения математического ожидания решений или, по другому говоря, вопросы осреднения уравнений). Вместе с тем известно также, что только в редких случаях удается найти эти характеристики [1] - [4].

Предлагаемая работа посвящена выводу уравнения для среднего температурного поля в так называемом дельта - коррелированном по времени случайном течении.

Далее нам понадобится следующий, известный из курса теории случайных процессов результат [5] - [6]:

Теорема. Пусть, ξ_t - заданный на метрическом фазовом пространстве X равномерно стохастически непрерывный марковский процесс, A- его инфинитезимальный оператор, c -ограниченная непрерывная функция. Пусть знак M_x означает взятие условного математического ожидания по всем, выходящим в начальный момент из точки x траекториям процесса ξ_t.

Тогда определенная формулой

$$u(t,x) = M_x\left[exp\left\{\int_0^t c(\xi_s)ds\right\} f(\xi_t) + \int_0^t exp\left\{\int_0^s c(\xi_u)du\right\} g(\xi_s)ds\right] \tag{1}$$

функции $u(t,x)$ является единственным, растущим не быстрее чем экспонента, решением задачи

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) + c(x)u(t,x) + g(x), \qquad u(0,x) = g(x). \tag{2}$$

Далее, рассмотрим известное из гидродинамики уравнение температурного поля [7] - [8]:

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = \chi \Delta T(t,x) - \left(\overrightarrow{V}(t,x), \nabla\right) T(t,x), \qquad T(0,x) = T_0(x), \tag{3}$$

где $t \geq 0$, $x \in R^n$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$ - оператор Лапласа, χ - постоянный коэффициент молекулярной температуропроводности, $\overrightarrow{V}(t,x) = (V_1(t,x), V_2(t,x), ..., V_n(t,x))$- заданное несжимаемое ($div_x \overrightarrow{V}(t,x) = 0$) случайное поле скоростей с нулевым средним,

$T(t,x)$- температурное поле, $T_0(x)$- начальное (вообще говоря, случайное и независящее от поля скоростей $\overrightarrow{V}(t,x)$) температурное поле,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad \left(\overrightarrow{V}, \nabla\right) = V_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

(выше и в последующем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Так как $V(t,x)$ - случайное поле скоростей, дополнительно будем считать, что он зависит от элементарных событий ($\overrightarrow{V}(t,x) = \overrightarrow{V}(t,x,\omega)$), $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) - какое-то вероятностное пространство), и в свою очередь эти элементарные события индексируют реализации поля скоростей. Под предложением "$\overrightarrow{V}$- заданное поле скоростей" будем подразумевать, что нам известны все вероятностно-статистические характеристики поля $\overrightarrow{V}$. Дополнительно будем считать также, что поле скоростей $\overrightarrow{V}$ обладает всеми нужными нам свойствами гладкостей по пространственной координате, а также является дельта-коррелированной по времени [7]. Такое течение удобно представить как предел полей скоростей $\overrightarrow{V}^{\Delta}(t,x)$ принимающих постоянные значения по t на интервалах длины $\Delta t : (0, \Delta t), (\Delta t, 2\Delta t), \dots$. Поэтому для таких Δt порядок $\overrightarrow{V}^{\Delta}(t,x)$ порядка $\sqrt{\tau/\Delta t}$: $\overrightarrow{V}^{\Delta}(t,x) \approx \sqrt{\tau/\Delta t}$, $\Delta t \to 0$, где $\tau = l/v$, l - характерный масштаб длины, v- характерный масштаб скорости.

В силу сделанных предположений, при $\Delta t = t_1 - t_2 \to 0$ корреляционный тензор

$$cov\left(V_i(t_1,x), V_j(t_2,y)\right) = 2\tau\delta(t_1 - t_2) b_{ij}(x,y), \tag{4}$$

где δ- дельта-функция. Для простоты в дальнейшем не будем писать множителя 2τ.

Нетрудно показать, что стоящий в правой части уравнения (3) оператор

$$A = \chi\Delta - (\overrightarrow{V}, \Delta), \tag{5}$$

связан со стохастическим (по многомерному винеровскому процессу $\overrightarrow{W}(s)$) дифференциальным уравнением

$$d\overrightarrow{\xi}_{t,x}(s) = \sqrt{2\chi}d\overrightarrow{W}(s) - \overrightarrow{V}(t-s, \overrightarrow{\xi}_{t,x}(s))ds, \quad \overrightarrow{\xi}_{t,x}(0) = x, \tag{6}$$

в том смысле, что этот оператор является инфинитезимальным оператором марковского процесса $\overrightarrow{\xi}_{t,x}(s)$ являющегося при $0 \le s \le t$ решением уравнения (6).

Заметим, что существование и единственность решения уравнения (6) вытекают из известных результатов теории стохастических дифференциальных уравнений и наложенных на поле скоростей $\overrightarrow{V}(t,x)$ условий.

Вывод уравнения среднего температурного поля. Согласно формуле (1), решение уравнения (3) можем записывать в виде

$$T(t,x) = M_x T_0\left(\overrightarrow{\xi}_{t,x}(t)\right), \tag{7}$$

где знак M_x относится к процессу $\overrightarrow{\xi}_{t,x}(s)$.

Обозначим взятое по полю скоростей математическое ожидание через угловые скобки $< \dots >$. Пусть, $\overline{T}(t,x) =< T(t,x) >$. Для нахождения, уравнения осредненного температурного поля запишем температурное поле $\overline{T}(t,x)$ в момент времени $t + \Delta t$:

$$\overline{T}(t+\Delta t, x) = \langle M_x T_0(\overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(s))\rangle.$$

Обозначим через $F_{\leq \Delta t}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную событиями $\left\{\overrightarrow{\xi}_{t,x}(s) \in B, s \leq \Delta t\right\}$, где $B \in \beta(R^n)$- борелевская сигма-алгебра на R^n. Учитывая марковость процесса $\overrightarrow{\xi}_{t,x}(s)$ и используя свойства условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр, можем написать

$$T(t+\Delta t, x) = M_x T_0\left(\overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(t+\Delta t)\right) = M_x\left(M_x T_0\left(\overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(t+\Delta t)/F_{\leq \Delta t}\right)\right) =$$

$$= M_x T\left(t, \overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(\Delta t)\right). \tag{8}$$

В выражении (9) функцию $T\left(t, \overrightarrow{\xi}_{t,s}(\Delta t)\right)$ разложим по пространственной координате в окрестности точки $\overrightarrow{\xi}_{t,x}(0) = x$. После учитывая наложенные на поле скоростей условия (условие (4), отсутствие среднего и т.д.), получим

$$\langle T(t+\Delta t, x)\rangle = \langle T(t,x)\rangle + \left\langle \frac{\partial T(t,x)}{\partial x_i} M_x\left(\overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(\Delta t) - x\right)_i\right\rangle +$$

$$\frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} M_x\left(\overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(\Delta t) - x\right)_i\left(\overrightarrow{\xi}_{t+\Delta t,x}(\Delta t) - x\right)_j\right\rangle + o(\Delta t). \tag{9}$$

В (9) осреднение $< \ldots >$ будем проводить в два этапа: сначала от 0 до t (при этом осредняются только величины, связанные с температурным полем), после от Δt до $t+\Delta t$ (при этом осредняются только связанные с процессом величины). После, используя свойства винеровского процесса, независимости $\overrightarrow{W}(t)$, $\overrightarrow{V}(t,x)$ и переходя надлежащим образом к пределу при $\Delta t \to 0$, для осредненного температурного поля $\overline{T}(t,x)$ получим следующее уравнение

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \left(\chi\delta_{ij} + \frac{1}{2}b_{ij}(x,x)\right)\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_i x_j} - \alpha_i(x,x)\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}, \quad \overline{T}(0,x) = \langle T_0(x)\rangle, \tag{10}$$

где δ_{ij} -символ Кронекера. В уравнении (10) коэффициенты $b_{ij}(x,x)$ определяются соотношением (4), а в свою очередь

$$\alpha_i(x,x) = \frac{\partial b_{ij}(x,x)}{\partial x_j}.$$

Для некоторых частных случаев уравнение (10) можно решить в явной форме. Например, если поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ является однородным по пространственной координате, то уравнение (10) превращается в уравнение с постоянными коэффициентами и решается известными методами.

Литература

1. *L. V. Bogachev, S. A. Molchanov* Mean-field models in the theory of random media.I, Theoret. and Math. Phys., 81:2 (1989), 1207-1214.

2. *L. V. Bogachev, S. A. Molchanov* Mean-field models in the theory of random media. II, Theoret. and Math. Phys., 82:1 (1990), 99-107.

3. *L. V. Bogachev, S. A. Molchanov* Mean-field models in the theory of random media. III, Theoret. and Math. Phys., 87:2 (1991), 512-526.

4. *A. D. Venttsel', S. A. Molchanov, V. N. Tutubalin,* Asymptotic problems in probability theory and the theory of random media, Theory Probab. Appl., 35:1 (1990), 87-93.

5. *А.Д. Вентцель* Курс теории случайных процессов, М.: Наука, 1975, 320 с.

6. *И.И.Гихман., А.В.Скороход.* Введение в теорию случайных процессов, М.: Наука, 1985, 568 с.

7. *С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов,* Короткокоррелированный случайный поток как быстрое динамо, Докл. АН СССР, 295:3 (1987), 576-579.

8. *А.С.Монин., А.М.Яглом.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 1, М.: Наука, 1965, 640 с.

9. *А.С.Монин., А.М. Яглом.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 2, М.: Наука, 1967, 720 с.

О контрольных картах проверяющие однородности двух выборок

Ахмедов С.А., Юлдашев Х.Д.

Андижанский государственный университет им. З.М. Бобура.

akhmedov.sohibjon@gmail.com, yuldashevx266@gmail.com

Пусть из генеральных совокупностей X и Y с функциями распределениями $F(x)$ и $G(x)$ взяты выборки с объемами m и n и упорядочены, соответственно, по возрастанию:$x_1 < x_2 < ... < x_m$, $y_1 < y_2 < ... < y_n$. Обозначим эмпирические распределения X и Y соответственно через $F_m(x)$ и $G_n(x)$.

Положим $d = \max_x |F_m(x) - G_n(x)|$.

Статистика критерия Смирнова $\lambda = d \cdot \sqrt{\frac{m \cdot n}{m = n}}$ измеряет различие между эмпирическими функциями распределения построенными по выборкам и в пределе подчиняется распределению Колмогорова (см. [1]; [2])

При ограниченном m и n случайная величина d является дискретной, при этом при помощи λ можно проверить следующие гипотезы относящиеся к педагогико-психологическим процессам:

H_0: Различия между двумя распределениями недостоверны;

H_1: Различия между двумя распределениями достоверны.

В частности, критерий λ Смирнова при $n; m \geq 50$ позволяет найти точку, в которой сумма накопленных расхождений между двумя распределениями является наибольшей и оценить достоверность этого расхождения.

Здесь рассмотрим следующую типичную задачу в педагогических исследованиях.

Пусть сравнивается распределение объектов двух совокупностей (экспериментальные и контрольные классы) по состоянию некоторого свойства (например, выполнение определенного задания). При этом учащихся разделяют на четыре категории в соответствии отметками (в баллах 2; 3; 4; 5), полученными за выполнение некоторой контрольной работы, Требуется проверить гипотезы H_0 и H_1.

Для решения этой задачи можно использовать критерии: λ - Смирнова; хи квадрат - Пирсона; Сравнения двух средних и т.п. При этом статистические выводы делаются в конце эксперимента (Of line - контроль).