ШЕТЕЛ АЗАМАТТАРЫНЫҢ ЗЕРТТЕУЛІК ҚАБІЛЕТІН АРТТЫРУДА ЧЕВА, МЕНЕЛАЙ ТЕОРЕМАЛАРЫН ТИІМДІ ПАЙДАЛАНУ ӘДІСТЕМЕСІ

Садықов Ж.С., Әбдібекова К.Ж., Дауытова Ж.Қ.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Оқушылардың математикаға ынтасын арттыру әдістемесін көптеген ғалымдар оқытушылар іздеструде. Солардың ішінде ЖОО-ға дейінгі дайындық кафедрасының математика пәнінің оқытушыларыда бар. Мақалада осы мақсатта қолданып жүрген жолдың бірі – Чева, Менелай теоремаларын қиындығы жоғары деңгейдегі есептерді шешудің тиімді алгоритмдерін пайдалану, көңілден шығатын әдістемесін ұсыну. Қандай деңгейдегі қиындығы бар есептерді шешу барысында «тіректі» (сүйеніш) элементті сәтті түрде алу қажет. Ондай элемент ретінде пайдасы бар формулалар, теоремалар, бұрын шығарған осыған ұқсас есептер, қосымша бір немесе бірнеше кесінділер алынады.

Есте болатын теоремалар:

- үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы, сыртқы бұрышы іргелес емес екі бұрышының қосындысына тең, тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90^0-қа тең, кез келген үшбұрышта оның ішкі және оған сәйкес сыртқы бұрышының қосындысы 180^0-қа тең;
- Фалес теоремасы;
- биіктіктері өзара тең 2 үшбұрыштың аудандарының қатынасы олардың сәйкес биіктіктерінің қатынасына тең:

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S_1 = \frac{1}{2}ah'_a, \text{ болғанда } \quad S:S_1 = h_a:h'_a;$$

- сәйкес 2 бұрыштары өзара тең үшбұрыштардың аудандарының қатынасы тең бұрыштарды қоршап тұрған қабырғалардың көбейтінділерінің қатынасына тең;
- ABC үшбұрышында $AA_1 \cap BB_1 = 0$, $AB_1:B_1C = m:n$, $CA_1:A_1B = = p:q$.

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}+1\right) = \frac{AB_1}{B_1C}\left(\frac{CA_1}{A_1B}+1\right), \tag{1}$$

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{p}{q}\left(\frac{n}{m}+1\right) = \frac{BA_1}{A_1C}\left(\frac{\mathrm{CB_1}}{\mathrm{B_{1A}}}+1\right). \tag{2}$$

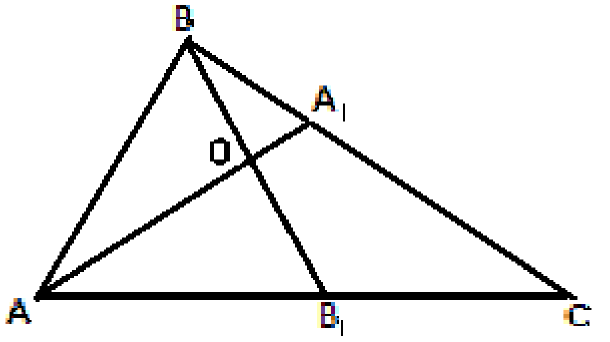
теңдіктері орындалады (1-сурет);

- *Чева* теоремасы. ABC үшбұрышының төбелерінен жүргізілген AA_1, BB_1, CC_1 кесінділері бір О нүктесінде қиылысуы үшін
-

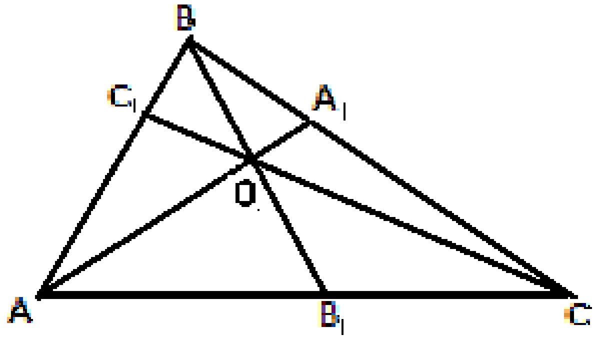
$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A} = 1 \tag{3}$$

теңдігі орындалуы керек.
Дәделі. (2-сурет)

$$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = 0, \qquad A_1 \in BC, B_1 \in AC, \qquad C_1 \in AB,$$



1-сурет



2-сурет

(1) – ші формуланы пайдаланамыз:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C}\left(\frac{CA_1}{A_1B} + 1\right) = \frac{AC_1}{C_1B}\left(\frac{BA_1}{A_1C} + 1\right) \Rightarrow$$

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CB}{A_1B} = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{A_1C} \Leftrightarrow \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

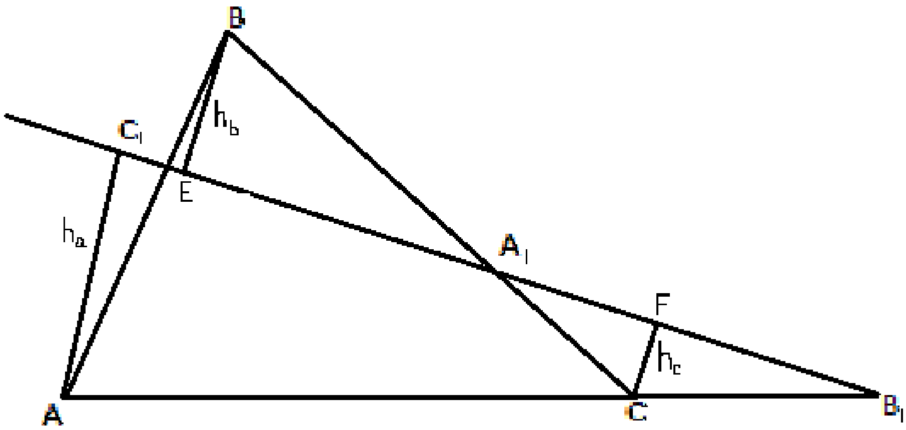
- *Менелай* теоремасы. *ABC* үшбұрышында

$A_1 \in BC$, $B_1 = C_1A_1 \cap AC$, $C_1 \in AB$ болса, онда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

теңдігі орындалады
($C_1, A_1, B_1 -$ *нүктелері бір түзудің бойында жатыр*). Дәлелі (3-сурет).

Ескерту. Чева теоремасы 3 кесіндінің бір нүктеде қиылысу шарттын, ал Менелай теорамасы 3 нүктенің бір түзудің бойында өрналасу шартын білдіреді (3-сурет).



3-сурет

$A_1 \in BC, \quad B_1 = C_1A_1 \cap AC, \quad C_1 \in AB.$

$AD = h_a, \quad BE = h_b, \quad CF = h_c$ болсын.

Сонда $\Delta AED \sim \Delta BEC$, дәл осылай $\frac{h_b}{h_c} = \frac{BA_1}{A_1C}$, $\frac{h_c}{h_a} = \frac{CB_1}{B_1A}$.

Осы теңдіктерді өзара көбейтіп (4) теңдікті аламыз.

Жоғарыда аталған «тіректі» элементтерді пайдаланып әртүрлі деңгейдегі есептерді аса «қиналмай» шығарумызға болады.

1-есеп. Үшбұрыштың 3 медианасы бір нүктеден өтеді.

Дәлелі (ауызша). болғанғандықтан (3) теңдік орындалып тұр (2-сурет).

Ескерту. Дәл осылайша 3 биссектриса, 3 биіктік бір нүктеден өтетіні дәлелденеді.

2-есеп. ABC үшбұрышында C_1, A_1, B_1 іштей сызылған шеңбердің жанасу нүктелері. AA_1, BB_1, CC_1кесінділері бір нүктеде қиылсады.

Дәлелі. Есептің шартында $AB_1 = AC_1 = p - a, BC_1 = BA_1 = p - b, CA_1 = CB_1 = p - c$. Мұнда p -жарты периметр, a_1, b_1, c_1 - үшбұрыштың қабырғалары. Енді негізгі теңдіктен

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-c}{p-a} = 1.$$

3-есеп. ABC үшбұрышында AA_1 -биссектриса, BB_1-медиана, AB=4см, AC=6см. $AA_1 \cap BB_1$=0. $AO: OA_1$ және $BO: OB_1$қатынастары неге тең?

Шешуі (1-сурет). $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{BA_1}{A_1C}$, себебі AA_1биссектриса, $AB_1 = B_1C$ - себебі BB_1 медиана. Сондықтан

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C}\left(\frac{CA_1}{A_1B} + 1\right) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \quad ;$$

$$\frac{BO}{OB_1} == \frac{BA_1}{A_1C}\left(\frac{CB_1}{B_{1A}} + 1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1} + 1\right) = \frac{4}{3}.$$

4-есеп. 3–есепке қосымша шарт: $CO \cap AB = C_{1,}$ $CO: OC_1$ қатынасы неге тең?

Чева теоремасы бойынша

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1; \qquad \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1; \qquad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{3}{2}.$$

Сонда

$$\frac{CO}{OC_1} == \frac{CB_1}{B_1A}\left(\frac{AC_1}{C_1B} + 1\right) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

5-есеп. ABC үшбұрышында $AA_1 \cap BB_1$=0, BB_1-медиана, $CA_1: A_1B = 2: 1,$ COB_1үшбұрышының ауданы S_0. ABC ауданы қандай?

Шешуі (2-сурет).

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{BA_1}{A_1C}\left(\frac{CB_1}{\mathrm{A}B_1} + 1\right) = \frac{1}{2}(1 + 1) = \frac{1}{1}.$$

Ендеше $BO = OB_1$, одан $S_{BOC} = S_{CB_1O} = S_{0,}$ $S_{CBB_1} = 2S_0 = \frac{1}{2}S,$

$S = 4S_0 см^2$. Егер $S_0 = 15 см^2$ болса, онда $S_{ABC} = 4 \cdot 15$=60$см^2$.

6-есеп. ABC үшбұрышында $AA_1 \cap BB_1 = O,$ $AO: OA_1 = 8: 1,$ $BO: OB_1$ =1:2. A_1BO үшбұрышының ауданы 2 см². ABC үшбұрышының ауданы қандай?

Шешуі (4-сурет). $AA_1 \cap BB_1 = O, AO: OA_1 = 8: 1, BO: OB_1$ =1:2,

$BO: OB_1$ =1:2, $S_{A_1OB} = 2$ см². $S_{ABC}-$?

$\frac{AB_1}{B_1C} = x,$ $\frac{CA_1}{A_1B} = y$ делік.

$$\text{Сонда}\begin{cases} \frac{AO}{OA_1} = x(y+1) = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{y+1} \\ \frac{BO}{OB_1} = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} + 1 = \frac{y}{2} \end{cases}$$

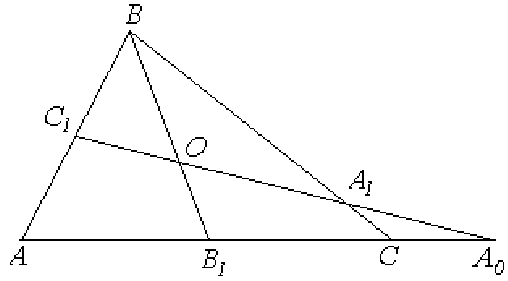
$\frac{y+1}{8} + 1 = \frac{y}{2},$ $y + 9 = 4y,$ $y = 3,$ $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{3}{1}$. $x = \frac{8}{y+1}$ теңдеуінен $x = 2, \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{2}{1}$.

$S_{ABA_1} = 2 + 2 \cdot 8 = 18$ см², $S_{ABC} = 4 \cdot S_{ABA_1} = 4 \cdot 18 = 72$ см².

7-есеп. 6-есепте $AO:OA_1 = 8:1, BO:OB_1 = 1:2, AB \cap B_1A_1 = C_1$. Берілген мәндерге қосымша шарт қосылған. $AB:BC_1$ қатынасы қандай?

Шешуі (5-сурет). (4)-Менелай теңдігінен 6-есепте табылған мәндерді пайдаланып $AB:BC_1 = 5:1$ болатынын анықтаймыз.

8-есеп. ABC үшбұрышында BB_1 медиана, $AC_1:C_1B = 3:1$, $BA_1:A_1C = 4:1$, $BB_1 \cap C_1A_1 = O$, $C_1A_1 \cap AC = A_0$, CA_1OB_1 төртбұрышының ауданы 36,5 см². ABC үшбұрышының ауданы қандай?



6-сурет

Шешуі (6-сурет). $AB_1 = B_1C$, $AC_1:C_1B = 3:1$, $BA_1:A_1C = 4:1$, $BB_1 \cap C_1A_1 = O$, $C_1A_1 \cap AC = A_0$, $S_{CA_1OB_1} = 36{,}5$ см². S_{ABC}—?

Менелай теоремасын ABC үшбұрышына қолданамыз. C_1, O, A_1, A_0 нүктелері бір түзудің бойында жатыр.

Ендеше

1) $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CA_0}{A_0A} = 1,\ \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{CA_0}{A_0A} = 1,\ \frac{A_0C}{A_0A} = \frac{1}{12},$

$A_0A = 12A_0C, \quad A_0C + CA = A_0C; \quad CA = 11A_0C,$

$$\frac{A_0C}{AC} = \frac{1}{11} \tag{1}$$

2) $\frac{B_1O}{OB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CA_0}{A_0B_1} = 1,\ B_1C = \frac{1}{2}AC,$

$A_0B_1 = B_1C_0 + CA_0,\ A_0B_1 = \frac{1}{2}AC + CA_0,$

$\frac{CA_0}{A_0B_1} = \frac{CA_0}{\frac{1}{2}AC + CA_0} = \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{AC}{CA_0} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 11 + 1} = \frac{2}{13}.$

Сонымен, $\frac{B_1O}{OB} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{13} = 1, \quad \frac{OB}{OB_1} = \frac{8}{13}$ (2)

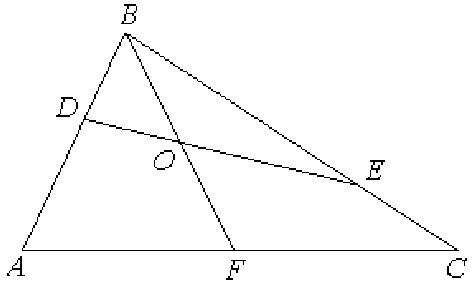
Енді $S_{B_1BC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ екенін ескеріп, $S_{OBA_1}:S_{B_1BC}$ анықтаймыз.

$$\frac{S_{OBA_1}}{S_{B_1BC}} = \frac{BO\cdot BA_1}{BB_1\cdot BC} = \frac{8}{21}\cdot\frac{4}{5}, \quad S_{OBA_1} = \frac{32}{105}\cdot\frac{1}{2}S = \frac{16S}{105}.$$

Теңдеу құрамыз: $S_{BOA_1} + S_{B_1OA_1C} = \frac{1}{2}S,\ \frac{16S}{105} + S_{B_1OA_1C} = \frac{S}{2}.$

$$S_{B_1OA_1C} = \frac{S}{2} - \frac{16S}{105} = \frac{(105-32)S}{2\cdot 105} = \frac{73\cdot S}{2\cdot 105} = 36{,}5; \quad S_{ABC} = 105 \text{ см}^2.$$

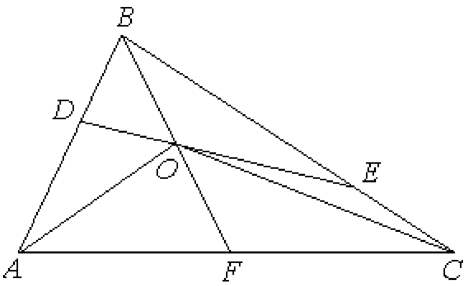
9-есеп. ABC үшбұрышында D нүктесі AB қабырғасын $AD:DB = 2:1$ қатынасында, E нүктесі BC -ны $BE:EC = 3:1$ қатынасында, F нүктесі AC – ны тең екі бөлікке бөлген. $DE \cap BF = O$ нүктесінде қиылысқан. $CEOF$ төртбұрышының ауданы S_0. ABC –ның және оның бөліктерінің ауданын S_0 саны арқылы анықтаңыздар. Егер $S_0 = 8{,}5$ см^2 және $S_0 = 34$ см^2 болғандағы сандық мәндерін есептеңіздер.



7а-сурет

Ескерту. Осындай мазмұнды есептерді Менелай теоремасын немесе мақаламыздың басында көрсетілген (1), (2) формулалардың көмегімен шығаруға болады. Оны оқушылардың өздеріне тапсырамыз. Стандартты жолмен шығарып көреміз.

Шешуі (7-сурет). $AD:DB = 2:1$, $BE:EC = 3:1$, $AF = FC$. $DE \cap BF = O$, $S_{CEDF} = S_0$, (соңында 8,5 см^2, 34 см^2 сандарына сәйкес есептейміз).



7б-сурет

Енді осы есепте O нүктесін A және C нүктелерімен қосайық (7б-сурет). Әрі қарай EBO және DBO үшбұрыштарының аудандарын S_1 мен S_2 әріптерімен белгілейік. Сонда төрт қосымша элементтерді кіргіздік. Өте көп болып кеткен жоқ па, ә? Шыдайық! S_1 және S_2 аудандарды S_0-дің мәні арқылы өрнектеп, S_1 және S_2-ге байланысты екі теңдеу құруымыз қажет.

DBE және ABC үшбұрышында B бұрышы ортақ. Оның бізге қандай қажеті бар деп ойлаймыз. Қараңыздар:

$$\frac{S_{DBE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BD\cdot BE\cdot\sin\beta}{\frac{1}{2}BA\cdot BC\cdot\sin\beta} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4};\ S_{DBE} = \frac{1}{4}\cdot S = S_1 + S_2;$$

$$S_{ABF} = S_{CBF};\quad S_{CEO} = \frac{1}{3}S_{EBO} = \frac{1}{3}S_1;\quad S_{AOF} = S_{COF} = S_0 - \frac{1}{3}S_1;\ S_{ADO} = 2S_2;$$

$$S_2 + 2S_2 + S_0 - \frac{1}{3}S_1 = S_1 + S_0. \qquad (1)$$

$$3S_2 - \frac{1}{3}S_1 = S_1;\ 9S_2 = 4S_1. \qquad (1')$$

Төртбұрыш $ADEC$ -ның ауданы $S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S$. Екінші теңдеуді құруға әзірміз! $\frac{3}{4}S = 3(S_1 + S_2) = 3S_1 + 3S_2$.

$$\frac{3}{4}S = 2S_2 + 2S_0 - \frac{1}{3}S_1; \;\; 3S_1 + 3S_2 = 2S_2 + 2S_0 - \frac{1}{3}S_1;$$

$$\frac{10S_1}{3} + S_2 = 2S_0, \qquad \begin{cases} 10S_1 + 3S_2 = 6S_0, \\ \quad 9S_2 = 4S_1. \end{cases}$$

Жүйенің бірінші теңдігін 3-ке көбейтейік:

$$\begin{cases} 30S_1 + 9S_2 = 18S_0, \\ \quad 9S_2 = 4S_1. \end{cases} \begin{matrix} \mapsto 34S_1 = 18S_0; \;\; S_1 = \frac{9S_0}{17}\;; \\ \mapsto \; S_2 = \frac{4}{9}S_1 = \frac{4}{9}\cdot\frac{9S_0}{17} = \frac{4S_0}{17}; \end{matrix}$$

$$\frac{1}{4}S = S_1 + S_2 = \frac{9S_0}{17} + \frac{4S_0}{17} = \frac{13S_0}{17}; \; S = \frac{52S_0}{17}.$$

Енді сандық мәндерін анықтайық:

1. $S_0 = 8{,}5$ см^2 болса, $S = \frac{52\cdot8{,}5}{17} = \frac{26\cdot17}{17} = 26$ см^2.

2. $S_1 = \frac{9S_0}{17} = \frac{9\cdot17}{17\cdot2} = 4{,}5$ см^2.

3. $S_2 = \frac{4S_0}{17} = \frac{4\cdot17}{17\cdot2} = 2$ см^2.

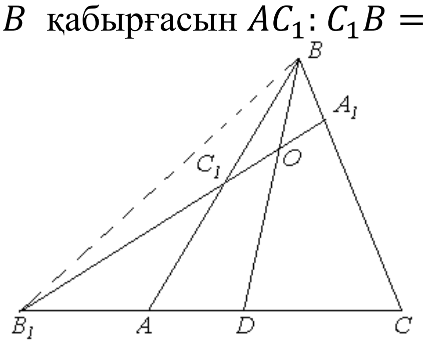
4. $S_{ABF} = S_{CBF} = \frac{S}{2} = 13$ см^2.

5. $\frac{3}{4}S = \frac{3}{4}\cdot 26 = \frac{3\cdot13}{2} = \frac{39}{2} = 19{,}5$ см^2.

Ескерту. Есеп шығарып болғаннан кейін жауаптың дұрыстығына күмән тууы мүмкін. Мүмкіндігінше тексерген жөн. Соңғы есепті тексеріп көрейік: $\frac{S}{2} = 13$ см^2; $S_1 = 4{,}5$ см^2; $S_0 = \frac{S}{2} - S_1 = 13 - 4{,}5 = 8{,}5$ см^2.

Есептің дұрыстығына көзіміз жетті.

10-есеп. ABC үшбұрышында C_1 нүктесі AB қабырғасын $AC_1 : C_1B = 3:4$ қатынасында, A_1 нүктесі BC қабырғасын $BA_1 : A_1C = 1:3$ қатынасында, D нүктесі AC қабырғасын $AD:DC = 1:2$ қатынасында бөлген. $A_1C_1 \cap BD = O$ нүктесінде, $A_1C_1 \cap CA = B_1$ созындысын B_1 нүктесінде қиған. $S_{AC_1B_1} = S_0 = 15$ см^2. $B_1A : AC$ қатынасын, $DO:OB$ қатынасын, ABB_1, ABC, A_1BC_1, A_1BO, C_1BO, ABD, CBD үшбұрыштарының аудандарын табыңыздар.



8-сурет

Шешуі (8-сурет). $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{3}{4}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{3}$, $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$, $A_1C_1 \cap BD = O$,

$A_1C_1 \cap CA = B_1,\ S_{AC_1B_1} = S_0.$

1) $A_1,\ O,\ C_1,\ B_1$ нүктелері бір түзудің бойында жатыр. Менелай теремасы бойынша

$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1,\ \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1,$

$\frac{B_1C}{AB_1} = \frac{4}{1},\quad \frac{B_1A+AC}{AB_1} = 4,\quad \frac{AC}{AB_1} = 3,$

$$AD = \frac{1}{3}AC.$$

2) $\frac{DO}{OB} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1D} = 1,$

$\frac{AB_1}{B_1D} = \frac{AB_1}{B_1A+AD} = \frac{AB_1}{B_1A+\frac{1}{3}AC} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{AC}{AB_1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}\cdot 3} = \frac{1}{2},$

$\frac{DO}{OB} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1,\quad \frac{DO}{OB} = \frac{3}{2}.$

3) B_1 мен B нүктелерін қосамыз. Сонда $S_{AB_1C_1} = S_0$ болғандықтан

$$S_{B_1C_1B} = \frac{1}{3}S_0 \cdot 4 = \frac{4}{3}S_0. \quad S_{B_1C_1B} = \frac{4}{3}S_0.$$

$$S_{B_1AB} = S_0 + \frac{4}{3}S_0 = \frac{7}{3}S_0.$$

4) AC табаны AB_1 -ден 3 есе артық. Сондықтан $S_{ABC} = 3 \cdot S_{B_1AB} = 3 \cdot \frac{7}{3}S_0 = 7S_0. \quad S_{ABC} = 7S_0.$

5) $S_{A_1BC_1} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot S = \frac{1}{7}S = \frac{1}{7} \cdot 7S_0 = S_0; \quad S_{A_1BC_1} = S_0;$

6) $S_{A_1BO} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}S = \frac{S}{15} = \frac{7}{15}S_0; \quad S_{A_1BO} = \frac{7}{15}S_0;$

7) $S_{C_1BO} = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}S = \frac{8}{105}S = \frac{8\cdot 7}{105}S_0 = \frac{8}{15}S_0; \quad S_{C_1BO} = \frac{8}{15}S_0;$

8) $S_{ABD} = \frac{1}{3}S = \frac{7}{3}S_0;$

9) $S_{CBD} = \frac{2}{3}S = \frac{14}{3}S_0;$

10) $S_{AC_1OD} = \frac{1}{3}S - \frac{8}{15}S_0 = \frac{35S_0 - 8S_0}{15} = \frac{27S_0}{15} = \frac{9S_0}{5}; \quad S_{AC_1OD} = \frac{9S_0}{5};$

11) $S_{CA_1OD} = \frac{2}{3}S - \frac{S}{15} = \frac{9S}{15} = \frac{3S}{5}; \quad S_{CA_1OD} = \frac{3S}{5};$

12) $S_{AC_1A_1C} = S - S_{A_1BC_1} = S - \frac{1}{7}S = \frac{6}{7}S; \quad S_{AC_1A_1C} = \frac{6}{7}S;$

Ескерту. $S_0 = 15$ см^2 мәнін қойып, 12 сұраққа санды түрде жауабын аламыз.

11-есеп. $\Delta ABC,\ AC_1{:}\,C_1B = 3{:}\,4,\ BA_1{:}\,A_1C = 2{:}\,3, AD{:}\,DC = 1{:}\,2$ болғанда алдыңғы есептегі сұрақтарға жауап беріңіздер.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Садықов Ж. С., Садықова А. Ж., Дауытова Ж. Қ. Геометрия. 1-бөлім. 2009 ж. Алматы.