

ПӘН АРАЛЫҚ БАЙЛАНЫСТЫ МАТЕМАТИКА САБАҒЫНДА ШЕТЕЛ АЗАМАТТАРЫН ІЗДЕНІМПАЗДЫҚ ЖӘНЕ ЗЕРТТЕУЛІК ҚАБІЛЕТІН АРТТЫРУҒА ПАЙДАЛАНУ ӘДІСТЕМЕСІ

Садықов Ж.С., Әбдібекова К.Ж., Дауытова Ж.Қ.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Математикалық есептерді шешудің тиімді және жеңіл жолдарын іздестірумен көне заманнан бері мыңдаған адамдар айналысып келеді. Жоғары оқу орнына дейінгі білім беру факультетінде (бұрынғы дайындықфакультеті) ондаған жылдан бері 5 мыңнан астам 85 елдің жастары білімдерін толықтырып шықты. Шетел азаматтарының оқыту әдістемесінің өзіндік ерекшеліктері мен қиындықтары бар. Себебі олар біздің тілді, бірталайы алфавитімізді білмеуі. Сондықтан оқыту процесінде тіл мен математика тығыз байланыста өтуі тиіс. Мысалы берілген 1,2 және 3 цифрынан мүмкін болатын сандар құрып, олардың атауларын айтып жаза білу қажет. Оқытушы айран деген сөзден жаңа ұғымды сөздер құрауға тапсырма береді. Құрылған сөздердің (ай, ана, ара, арай, рай, нан, нар) мазмұнын түсіндіріп, күнделікті өмірде қандай ұғымды білдіретін түсіндіреді.

Оқушыларды есеп шығаруға үйретудің бір жолы оларды ынталандыру қабілетін арттыру. Бұл мақсатты іске асыруда берілген тапсырмалар аса жеңіл, немесе тым күрделі болмауы қажет, екінші сөзбен айтқанда «жеңілден қиынға» принципін жетік меңгерген мұғалім жақсы нәтижеге жетеді.

Әңгімеміздің жалғасында ынталандыру мен қызықтыру мәселесінде пәндер аралық және олардың ішкі байланыстарын пайдалану әдістемесін қарастырайық. Математикалық есептерді дұрыс шешуде, берілген мәндері мен нені анықтау қажеттігін ажырата білу, өте маңызды арын алады. Белгісіз шамаларды анықтау үшін қандай әрекеттерді рет-ретімен жасауға берілген нұсқауларды алгоритм деп атайды. Ерітінді, қоспа, концентрацияларға берілген әртүрлі деңгейдегі есептерді шешудің алгоритмдерін келтіреміз. Ол үшін математикадан координаттар жүйесі және физикадан массалардың ауырлық ұғымдарын пайдаланайық.

Координатты Ox өсінің бойында координаталары x_1 және x_2 болатын A мен B нүктелері берілсін. Егер осы өстің бойындағы C нүктесі оны $AC:CB=m:n$ қатынасында бөлсе

$$(x-x_1):(x_2-x)=m:n$$

Теңдігінен

$$x = \frac{mx_1+nx_2}{m+n} \quad (1)$$

Формуласын аламыз. Мұндах C нүктесінің координатасы. Көңіл аударамыз, (1) формулада x_1 , x_2 , m , n және x мәндерінің 4-уі белгілі болса, бесіншінің мәні анықталады.

Физика оқулығында $A(x_1)$ және $B(x_2)$ материалы нүктелердің массалары m_1 мен m_2 болса, онда AB кесіндісінің бойында орналасқан ауырлық центрі $C(x)$ нүктесінің координатасы

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

формуласы мен анықталады (1-сурет).

Ескерту.

1) $C(x)$ нүктесінің массасы $m_1 + m_2$ болады.



1-сурет

2) $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ массалары m_1, m_2 жазықтықта орналасса, онда ауырлық центрі $C(x, y)$ нүктесінің координаталары

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

Формулаларымен анықталады.

Ал n материалды $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ нүктелерінің ауырлық центрі $C(x, y, z)$ координаталары

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (4)$$

$$z = (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n) : (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

формулаларымен анықталатыны дәлелденген.

3) Ерітінді, қоспалаға берілген әр түрлі қиындықтағы есептерді шешуге көмектесетін алгоритмді формулалардайын. **Іске сәт!**

1-мысал. Этилді спирттің 1-ші ерітіндісінің массасы 450г.. Концентрациясы 20%, 2-ші ерітіндісінің массасы 550г., концентрациясы 80%. Екеуін араластырып алынған ерітіндінің концентрациясы қандай?

Шешуі:

Алгоритмдегі 1-қадам: $m_1=450$ г, $m_2=550$ г;

2-қадам: $x_1=20\%$, $x_2=80\%$;

3-қадам: 2-формулаға осы мәндерді.

Қойып x –тің мәнін табамыз:

$$x = \frac{450 \div 20 + 550 \div 80}{450 + 550} = \frac{45 \div 2 + 55 \div 8}{10} = \frac{530}{10} = 53.$$

Жауабы. Жаңадан құрылған ерітіндінің концентрациясы 53%.

2-мысал. Күкірт қышқылы (H_2SO_4), күкіртті ангидрид (SO_3), пиросералық қышқыл ($H_2S_2O_7$) қоспасынолеум деп атайды. Ол өндірісте жиі қолданылады. Олеумнің 4 қоспасы берілген.

- 1) 85% H_2SO_4 , 5% SO_3 , 10% $H_2S_2O_7$;
- 2) 55% H_2SO_4 , 5% SO_3 , 40% $H_2S_2O_7$;
- 3) 30% H_2SO_4 , 20% SO_3 , 50% $H_2S_2O_7$;
- 4) 60% H_2SO_4 , 35% SO_3 , 5% $H_2S_2O_7$.

1-ші қоспадан 24кг, 2-ден 120кг, 3-ден 32кг, 4-ден 16кг алып жасалған олеумнің пайыздық құрамы қандай?

Шешуі: Жаңа құрамда $x\%$ -күкірт қышқылы, $y\%$ -күкірт ангидриді, $z\%$ - пиросералық қышқылы болсын десек, (4) формулалардан ауырлық центрінің $M(x,y,z)$ координаталарын

$M_1(85; 5; 10)$, $M_2(55; 5; 40)$, $M_3(30; 20; 50)$, $M_4(60; 35; 5)$ нүктелерінің массалары $m_1=24$ кг, $m_2=120$ кг, $m_3=32$ кг, $m_4=16$ кг, $n=4$ ескеріп, $x=55$, $y=10$, $z=35$ анықтаймыз. Сонымен, жаңа қоспада 55% H_2SO_4 , 10% SO_3 , 35% $H_2S_2O_7$.

Ескерту. Болашақ мамандығын химия өндірісіне арнаған жастарға осындай есептерді жиі шығарту олардың ізденімпаздық қабілетін артыруда пайдасы зор болады.

3-мысал. Үш ерітіндідегі спирттің пайыздық мәдері геометриялық прогрессия құрайды. Егер бірінші, екінші және үшінші ерітінділерді салмақтары 3:2:1 қатынастарында араластырса, жаңадан пайда болған ерітіндіде спирттің мәні 11 болады. Ал егерде оларды салмақтары 1:5:3 қатынасында араластырса, онда жаңадан пайда болған ерітіндіде $\frac{46}{3}\%$ спирт болады. Әр ерітіндідегі спирттердің пайыздық мәндері қандай?

Жауабы. 6%, 12%, 24%.

Шешуі: 1) 1-ші ертіндіден m_1 г, 2-ден m_2 г, 3-ден m_3 г алынған, оларда

$$m_1 : m_2 : m_3 = 3 : 2 : 1.$$

2) 1-ден m'_1 г, 2-ден m'_2 г, 3-ден m'_3 г алынған. Оларға $m'_1 : m'_2 : m'_3 = 1 : 5 : 3$. Ал $x_1\%$, $x_2\%$, $x_3\%$ үш колбадағы спирттердің пайыздық мәндері. $(m_1+m_2+m_3)$ г салмақта 11% спирт, ал $(m'_1 + m'_2 + m'_3)$ г салмақта $\frac{46}{3}\%$ спирт бар.

$$x_1, x_2, x_3, \text{ мұнда } x_2^2 = x_1 \times x_3. \quad (1).$$

Біздің жағдайда (4) формуладан $n=4$. Ендеше біздер

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Формуласын пайдалануымызға болады. Жоғарыдағы қатынастардан анықтайтынымыз:

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{3}{1}, \quad m_1 = 3m_3, \quad \frac{m_2}{m_3} = \frac{2}{1}, \quad m_2 = 2m_3,$$

$$\frac{m'_1}{m'_3} = \frac{1}{3}, \quad m'_1 = \frac{m'_3}{3}$$

$$\frac{m'_2}{m'_3} = \frac{5}{3}, \quad m'_2 = 5 \frac{m'_3}{3}$$

Сонда

$$1) \quad \frac{3m_3x_1 + 2m_3x_2 + m_3x_3}{3m_3 + 2m_3 + m_3} = 11; \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 66.$$

$$2) \quad \frac{\frac{m'_3}{3}x_1 + 5\frac{m'_3}{3}x_2 + m'_3x_3}{\frac{m'_3}{3} + 5\frac{m'_3}{3} + m'_3} = \frac{46}{3}; \quad x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 138.$$

Жүйе құрамыз

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 66, & |(-3)|(5) \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 138, & |(-1)|(-2) \\ x_2^2 = x_1 \times x_3. \end{cases}$$

1-ші және 2-ші теңдеулерден:

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 198, \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -138 \end{cases} +$$

$8x_1 + x_2 = 60$ -1-ші теңдеуді 3-ке, 2-ші теңдеуді (-1)-ге көбейтіп, екі жағын мүшелеп қостық.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 66, & |\times 5 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 138. & |\times (-2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 330, \\ -2x_1 - 10x_2 - 6x_3 = -276. \end{cases}$$

Мүшелеп қосқанда $13x_1 - x_3 = 54$.

Алғашқы жүйемізді мына түрге келтірдік:

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 = 60, & \Rightarrow x_2 = 60 - 8x_1 \\ 13x_1 - x_3 = 54, & \Rightarrow x_3 = 13x_1 - 54 \\ x_2^2 = x_1 \times x_3 \end{cases}$$

Сонғы теңдеуді пайдаланып $(60 - 8x_1)^2 = x_1(13x_1 - 54) \Rightarrow x_1$ белгісізі арқылы квадрат теңдеу аламыз:

$$17x_1^2 - 302x_1 + 1200 = 0.$$

Екінші мүшесі 302 жұп сан болғанын ескеріп қысқаша формуламен шешеміз.

$$(x_1)_{1,2} = \frac{151 \pm \sqrt{151^2 - 17 \times 1200}}{17} = \frac{151 \pm \sqrt{22801 - 20400}}{17} =$$

$$= \frac{151 \pm \sqrt{2401}}{17} = \frac{151 \pm 49}{17},$$

$$(x_1)_1 = 6, \quad (x_1)_2 = \frac{200}{17}.$$

Есептің шартына $x_1=6$ сәйкес келеді.

$$x_2 = 60 - 8x_1 = 12, \quad x_3 = 13x_1 - 54 = 24.$$

Жауабы: 6; 12; 24.

Ескерту. Есепті шешу барысында бірталай «терледік». Патшалардқа арналған жеңіл жолын байқамадық. Недегенімен, аздап ойлансақ сонғы теңдеу ($x_1 - 6$) екімүшесіне қалдықсыз бөлінетінін байқаймыз!

$$(x_1 - 6)(17x_1 - 200) = 0, \quad (x_1)_1 = 6, \quad (x_1)_2 = \frac{200}{17}$$

4-мысал. Үш ерітіндідегі күкірт қышқылдарының (H_2SO_4) пайыздық мәндері арифметикалық прогрессия құрайды. Егер бірінші, екінші және үшінші ерітінділерден салмақтары $m_1:m_2:m_3 = 6:3:1$ қатынастарында алып араластарса, жаңадан пайда болған ерітіндіде күкірт қышқылының мәні 10% болады. Ал егерде оларды салмақтары $m'_1:m'_2:m'_3 = 1:5:3$ қатынастарында араластырса, онда жаңадан пайда болған ерітіндіде күкірт қышқылының мәні $11\frac{1}{9}$ % пайыз болады. Әр ерітіндідегі күкірт қышқылының пайыздық мәндері қандай?

Жауабы: 8%; 12%; 16%.

Шешуі. Ерітінділердегі күкірт қышқылдарының пайыздық мәндері x_1, x_2, x_3 болса, онда $2x_2 = x_1 + x_3$ теңдігі орындалады. Себебі олар арифметикалық прогрессияның қатар тұрған 3 мүшелері.

Енді $x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$ формуласын пайдаланып 2 теңдеу аламыз.

Ол үшін $m_1 : m_2 : m_3 = 6 : 3 : 1$ және $m'_1 : m'_2 : m'_3 = 5 : 1 : 3$ қатынастарынан төмендегі теңдіктерді анықтап алайық:

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{6}{1}m_1 = 6m_3 \frac{m_2}{m_3} = \frac{3}{1}m_2 = 3m_3 \frac{m'_1}{m'_3} = \frac{5}{3}m'_1 = \frac{5m'_3}{3}$$

$$\frac{m'_2}{m'_3} = \frac{1}{3}m'_2 = \frac{m'_3}{3}$$

$$\text{Сондықтан } \frac{6m_3x_1 + 3m_3x_2 + m_3x_3}{6m_3 + 3m_3 + m_3} = 10; \quad 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 100,$$

$$1) \quad \frac{5\frac{m'_3}{3}x_1 + \frac{m'_3}{3}x_2 + m'_3x_3}{5\frac{m'_3}{3} + \frac{m'_3}{3} + m'_3} = \frac{100}{9}; \quad 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 100.$$

3 белгісізі бар жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 100, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 100, \\ 2x_2 = x_1 \times x_3. \end{cases}$$

$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 \cdot x_3)$ теңдіктің мәнін 1-ші және 2-ші теңдәктердегі x_2 - нің орнына қойып түрлендіреміз:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 3x_3 = 100, \\ 5x_1 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 3x_3 = 100, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x_1 + 5x_3 = 200, \\ 11x_1 + 7x_2 = 200. \end{cases}$$

Теңдіктердің екі жағын мүшелеп шегертсек

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_3 &= 0, \\ x_3 &= 2x_1. \end{aligned}$$

Осы мәнді айдаланып

$$\begin{aligned} 15x_1 + 5x_3 &= 200, \\ 15x_1 + 10x_1 &= 200, \\ x_1 &= 8. \end{aligned}$$

$$\text{Ал } x_3 = 2x_1, \quad x_3 = 16, \quad x_2 = \frac{1}{2}(x_1 \cdot x_3), \quad x_2 = 12.$$

Тексеру. 8,12,16 сандары айырымы $d=4$ арифметикалық прогрессия құрып тұр. Құрылған жүйенің теңдеулерін қанағаттандырып тұр!

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Такежанова Д. Ф., Садықов Ж. С. Общая химия. Методические указания к самостоятельной работе для слушателей подготовительного отделения и студентов первого курса АЭИ. Алма-Ата. 1988 г.