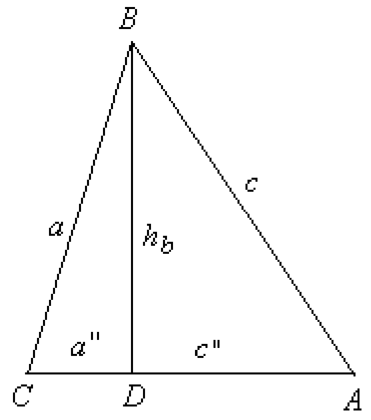
ЖОҒАРЫ ОҚУ ОРНЫНА ДЕЙІНГІ БІЛІМ БЕРУ ҮДЕРІСІНДЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ ТИІМДІ ӘДІСТЕРІ

Садықов Ж. С., Әбдібекова К. Ж., Даутова Ж. Қ.

Жоғары оқу орнына дейінгі білім беру факультетінің студенттерінің бір бөлігі Қазақстан Республикасы Президентінің грантының иегерлері – Ауғанстан Ислам Республикасының азаматттары (қазақ тілінде оқи, жаза білмейді), ал екінші бөлігі – шет елдердегі қазақ диаспорасының жастары (қазақ тілін оқыған, кейбіреуі ауызекі сөйлесуден әрі білмейді), үшінші бөлігі – ақылы бөлімде оқитындар, әртүрлі себептермен жоғары оқу орындарына бұрын түсе алмағандар. Осыған сәйкес, оларға дәріс оқып жүрген математика, физика, химия, биология пәндерінің оқытушыларына білімділігі мен әдістемелік қаблеттеріне зор талап қойылуда. Осы бағытта жүргізіліп жатқан жұмыстар жайлы ондаған мақалаларымыз жарияланған. Осы мақалада қозғалатын мәселе – жастардың ізденімпаздық қабілетін арттырудың бір жолы ретінде күрделі, стандартты емес есептерді шешудің әртүрлі, мүмкін болса, бір есептің бірнеше жолдарын таба білуге үйрету.

1-есеп. ABC үшбұрышының BD биіктігі AC табанын AD және DC бөліктеріне бөлген. ABD үшбұрышының AD, DB, BA қабырғаларының ұзындықтары арифметикалық прогрессияның қатар үш мүшесін құрайды. ABD үшбұрышының периметрі 36 см, оған іштей сызылған шеңбердің радиусы 3см, BCD үшбұрышының ауданы 30 см^2 болғанда ABC үшбұрышының ауданы қандай?



1-сурет

Жауабы: 84 см^2.

Шешуі. (1-сурет). $\Delta ABC,\ BC = a,\ BA = c,$ $h_b = BD. AD = c'',\ DC = a',$
$p_{ABD} = 36$ см, $r_{ABD} = 3$ см, $S_{BCD} = 30$ см^2. $\div c', h_b, c$ – арифметикалық прогрессияның мүшелері. Тікбұрышты үшбұрышты шеше білген оқушы ABD үшбұрышының ауданын таба алады.

1) $S_{ABD} = \frac{p}{2} \cdot r = \frac{36}{2} \cdot 3 = 54$ см^2.

Енді $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD} = 30 + 54 = 84$ см^2. Бұл есепті қиындығы бірінші деңгейдегі есепке жатқызады.

2) Тік бұрышты үшбұрышқа қатысты тағы бір тамаша формула бар: $r_{ABD} = \frac{p_{ABD}}{2} - c,\ 3 = 18 - c,\ c = 15$ см.

3) Есептің шартында $\div c', h_b, c$. Бұл сандардың қосындысы $c' + h_b + \ c = 36$. Осы теңдіктен не пайда? Қатар тұрған арифметикалық прогрессияның үш мүшесі үшін $2h_b = c' + c$. Сонымен, $3h_b = 36,\ h_b = 12$ см. Тамашасы-ай! $212 = c' + 15, c' = 9$ см. Көңіліміз недеуір көтеріліп қалды!

4) Пифагор теоремасы бойынша $c' -$ тің мәнін анықтау жолы $c' = \sqrt{c^2 - h_b^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{27 \cdot 3} = 9.\ c' = 9$ см.

5) $S_{BCD} = \frac{1}{2} a' \cdot h_b = 30,\ \frac{1}{2} a' \cdot 12 = 30,\ a' = 5$ см.

6) $b = AC = a' + c' = 5 + 9 = 14,\ b = 14$ см.

7) Пифагор теоремасы бойынша $a = \sqrt{a'^2 + h_b^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
Есептің шартында $\div c'', h_b, c$ немесе $\div 9; 12; 15$. Бұлар айырмасы $d = 3$ болатын арифметикалық прогрессия мүшелері! Есепті шығару барысында тағы қандай қызықты жағдайларды байқадық? ABC үшбұрышының қабырғалары $a = 13; d = 14; c = 15$. Бұлар да арифметикалық прогрессияның мүшелері болып тұрған жоқ па? Ендеше өзіміз бірігіп жаңадан есеп құрайық. Алдымен ABC үшбұрышының табылмаған элементтерін анықтайық.

8) $p_{BCD} = 5 + 13 + 12 = 30; r_1 = S_{BCD} : \frac{p_{BCD}}{2} = 30 : 15 = 2;\ r_1 = 2$.

9) Алғашқы есепте $r_1 : r$ неге тең десе, біз оны анықтадық: $\frac{r_1}{r} = \frac{2}{3}$.

10) $p_{BCD} : p_{BAD}$ қандай? $\frac{p_{BCD}}{p_{BAD}} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$;

11) $\sin A -?$ $\sin A = \frac{h_b}{c} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$; $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$;

$\sin A = \frac{4}{5}$; $\cos A = \frac{3}{5}$. Байқаймыз: $\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$.

12) $\sin C = \frac{h_b}{a} = \frac{12}{13}$; $\cos C = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$; $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$.

13) $\sin B -?$ $A + B + C = 180^\circ$; $B = 180^\circ - (A + C)$.
$\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin C =$

$= \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{56}{65}$; $\sin B = \frac{56}{65}$.

14) $b = 2R\sin B$; $14 = 2R \cdot \frac{56}{65}$; $1 = \frac{R \cdot 8}{65}$; $R = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$.

Екінші жолы: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84 \cdot 6} = \frac{13 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{65}{8}$!

Көңіл аударыңыздар:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}c''h_b = 54; c''h_b = 108; 2c''h_b = 216; \qquad (1)$$

Пифагор теоремасы бойынша:

$$h_b^2 + c''^2 = c^2 = 225. \qquad (2)$$

(1) және (2) теңдіктерден шығатыны

$$h_b^2 + 2h_a \cdot c'' + c''^2 = 225 + 216 = 441 = 21^2 \Leftrightarrow (h_b + c'')^2 = 21^2,$$

$$h_b^2 - 2h_a \cdot c'' + c''^2 = 225 - 216 = 9 = 3^2 \Leftrightarrow (h_b - c'')^2 = 3^2.$$

$$\begin{cases} h_b + c'' = 21, & 2h_b = 24, \quad h_b = 12, \\ h_b - c'' = 3. & 2c'' = 18, \quad c'' = 9. \end{cases}$$

Бұл жол ұзағырақ болғанымен екі белгісізі бар жүйелерді шешуге тиімді. Осы есепті шешудің тағы бір жолын көріңіздер.

$$\begin{cases} h_b \cdot c'' = 108, \\ h_b + c'' = 21. \end{cases}$$

Виет теоремасын пайдаланып, квадрат теңдеу құрамыз: $t^2 - 21t + 108 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 432}}{2} = \frac{21 \pm 3}{2}; \; t_1 = h_b = 12; \; t_2 = c'' = \frac{18}{2} = 9.$$

2-есеп. ABC үшбұрышында BD биіктігі екі ABD және BCD үшбұрыштарына бөлген. $CD = 5$ см, кіші үшбұрыштарға іштей сызылған шеңберлердің радиустары 2 см және 3 см. ABC –ң ауданы теге тең?

Жауабы: 84 см^2.

Шешуі (1-сурет). $CD = 5, r_2 = 2, r_1 = 3$ белгілі. CBD үшбұрышында

$r_2 = p - a$; $2 = p - a$; $p = a + 2 = \frac{a + h_b + 5}{2}$;

$a + h_b + 5 = 2a + 4$; $a = h_b + 1$. ΔBDC –да $a^2 = CD^2 + h_b^2$;

$(h_b + 1)^2 = 5^2 + h_b^2$; $2h_b + 1 = 25$; $h_b = 12$; $a = 13$.

ABD үшбұрышында $S_{ABD} = p_{ABD} \cdot r_1 = p_{ABD} \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot c'' \cdot h_b;\ 3p_{ABD} = 6c'';$

$p_{ABD} = 2c'' = \frac{12+c+c''}{2};\ 4c'' = 12 + c + c'';\ 3c' = 12 + c;\ c = 3c'' - 12.$

Пифагор теоремасы бойынша

$h_b^2 + c''^2 = c^2;\ c''^2 = 9c'^2 - 72c';\ 8c''^2 = 72c';\ c'' \neq 0;\ c'' = 9;$

$b = AD + DC = 9 + 5 = 14;\ b = 14;\ c = 3 \cdot 9 - 12 = 15.$

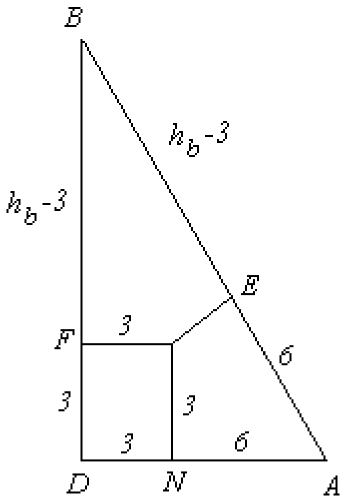
Сонымен, ABC үшбұрышының ауданы $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84$ см^2.

3-есеп. ABC үшбұрышында BD биіктігі AC табанын AD және DC бөліктеріне бөлген. ABD және DBC үшбұрыштарына іштей сызылған шеңберлердің радиустары 3 см және 2 см, $AD = 9$ см. ABC үшбұрышының ауданы қандай?

Жауабы: 84 см^2.

Шешуі (1-сурет). $AD = 9;\ r_{ABD} = 3,\ r_{CBD} = 2.\ S_{ABC} -?$

$r_{ABD} = p_{ABD} - c;\ 3 = \frac{9+h_b+c}{2} - c;\ 6 = 9 + h_b + c - 2c;\ c = h_b + 3.$



2-сурет

ΔABD −да Пифагор теоремасы бойынша
$h_b^2 + c''^2 = c^2;\ 81 = 6h_b + 9;\ 6h_b = 72;\ h_b = 12$см.
$c = h_b + 3 = 15;\ c = 15$ см.

CBD үшбұрышында $r_2 = \frac{p_{CBD}}{2} - a;$ $2 = \frac{a''+a+12}{2} - a;$
$4 = a'' + a + 12 - 2a;\ \ a = a'' + 8.$
Пифагор теоремасы бойынша:
$a^2 = a''^2 + h_b^2;$ $(a'' + 8)^2 = a''^2 + 12^2;$ $16a'' + 64 = 144;\ 16a'' = 80;\ a' = 5$ см; $b = a'' + c'' = 5 + 9 = 14$. Сонымен, $a = a'' + 8 = 5 + 8 = 13;\ b = 14;$ $c = 15.$ $S_{ABC} = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84$ см^2. Тағы бір тамаша байланыстарға көңіл аударайық (2-сурет). ABD үшбұрышына іштей сызылған шеңбер AB, BD, DA қабырғаларын E, F, N нүктелерінде жанасын.

Дәлелдеудің 1-жолы. $NA - AE = 9 - 3 = 6;$ $BF = BE = h_b - 3;$ Пифагор теоремасы бойынша $h_b^2 + AD^2 = AB^2;$ $h_b^2 + 9^2 = (h_b - 3 + 6)^2 = (h_b + 3)^2 = h_b^2 + 6h_b + 9;$ $6h_b = 72;$ $h_b = 12$ см. Ендеше $BE = h_b - 3 =$

$12-3=9.$ $c=AB=9+6=15;$ $c=15;$ $S_{ABD}=\frac{1}{2}h_bAD=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9=54$ см². Соңғы теңдікке $S_{ABD}=54$ көңіл аударайық: 6 және 9 сандары жанасу E нүктесі гипотенуза AB-ны бөлген бөліктер. Гипотеза пайда болады: $AE=m, EB=n$ болған жағдайда кез келген тіктөртбұрыштың ауданы $S=mn$ формуласымен есептеледі. Әрине, оны жалпы түрде дәлелдеу қажет. $AE=AN=m,$ $AD=r+m,$ $BE=BF=n,$ $BD=n+r,$ $AB=m+n$ теңдіктерін пайдалануымызға болады. Тік бұрышты үшбұрыштың ауданы $S=\frac{1}{2}AD\cdot BD=p_{ABD}\cdot r_{ABD};$ $p_{ABD}=\frac{AB+BD+DA}{2}=\frac{m+n+n+r+r+m}{2}=m+n+r;$ $r_{ABD}-$ ABD үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің радиусы. Сонда

$$S=\frac{(m+r)(n+r)}{2}=\frac{mn+(m+n)r+r^2}{2}=(m+n+r)r=(m+n)r+r^2.$$

Енді $S=\frac{mn+S}{2};$ $2S=mn+S;$

$$S=mn. \qquad (*)$$

Дәлелдеудің 2-жолын келтірейік: Пифагор теоремасы бойынша $AD^2+DB^2=AB^2$ немесе $(r+m)^2+(r+n)^2=(m+n)^2;$ $2r^2+2(m+n)r+m^2+n^2=m^2+2mn+n^2;$ $r^2+(m+n)r=mn.$ Жоғарыда $S=\frac{mn+(m+n)r+r^2}{2}$ теңдігін алғанбыз. Сондықтан $S=\frac{mn+mn}{2}=mn.$

Жалықпасаңыз (*) формуласының дұрыстығының 3-жолын қарастырайық. Кез келген тік бұрышты үшбұрыштың қабырғалары мен оған іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустары арасында тамаша бір байланыс бар. Ол радиустар r және R болсын. Сонда $r=p-c,$ мұнда $p-$ үшбұрыштың жарты периметрі, $c=AB-$ гипотенуза және $c=2R$ екені белгілі. Сонымен,

$$r=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2},\ 2r=a+b-c;\ a+b=2r+c=2r+2R,$$

$$r=\frac{a+b-c}{2}. \qquad (**)$$

Бұл формула әртүрлі деңгейдегі қиындықтағы есептерді шығару барысында пайдаланылады. Сонымен, 2-суретте AD және $BD-$ катеттері, $AB-$гипотенуза. $AE=m,$ $BE=n$ болғанда $DA=r+m,$ $DB=n+r$ және $m=p-BD,$ $n=p-AD.$ Енді $mn-$ді түрлендірейік:

$$mn=(p-BD)(p-AD)=\frac{AD+BD+AB-2BD}{2}\cdot\frac{AD+BD+AB-2AD}{2}=$$

$$= \frac{AD - BD + AB}{2} \cdot \frac{BD + AB - AD}{2} = \frac{2AD \cdot DB}{4} = \frac{AD \cdot DB}{2} = S_{ABC};$$

$$S_{ABC} = mn.$$