

Akanbay E.N., Suleimenova Z.I., Tapeeva S.K.

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: 1) akanbay.yerkebulan@gmail.com 2) suleymenova2474@gmail.com

3) tapeevasamal77@gmail.com

Asymptotic normality of the solution of a parabolic equation with random rapidly oscillating coefficients

Abstract. In this paper, we study the probabilistic asymptotic behavior of the solution of the Cauchy problem for a random parabolic equation with fast-oscillating random homogeneous coefficients. Using the method of random substitution of time and properties of Brownian local time, the main result on the asymptotic normality (with zero mathematical expectation and finite variance) of a suitably normalized solution of the equation under consideration is obtained. An explicit form of the limiting finite variance is obtained in terms of the solution of the Brownian local time equation.

Keywords: Random operator, random equation with rapidly oscillating coefficients, averaged operator, averaged equation, random time substitution, Brownian local time, asymptotic normality.

УДК 519.21

Аканбай Е.Н., Сулейменова З.И., Танеева С.К.

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби,

Республика Казахстан, Алматы

E-mail: 1) akanbay.yerkebulan@gmail.com 2) suleymenova2474@gmail.com

3) tapeevasamal77@gmail.com

Асимптотическая нормальность решения параболического уравнения со случайными быстро осциллирующими коэффициентами

Аннотация

В данной работе исследовано вероятностное асимптотическое поведение решения задачи Коши для случайного параболического уравнения с быстро осциллирующими случайными однородными коэффициентами. Используя метод случайного замены времени и свойств броуновского локального времени получен основной результат об асимптотической нормальности (с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией) нормированного подходящим образом решения рассматриваемого уравнения. Получен явный вид предельной конечной дисперсии в терминах связанной с решением уравнения броуновского локального времени.

Ключевые слова: Случайный оператор, случайное уравнение с быстро осциллирующими коэффициентами, усредненный оператор, усредненное

уравнение, случайная замена времени, броуновское локальное время, асимптотическая нормальность.

Аннотация

Берілген жұмыста кездейсоқ біртекті жылдам осцилляцияланатын коэффициентті кездейсоқ параболалық теңдеу үшін Коши есебі шешімінің ықтималдықтық асимптотикалық беталысы зерттелген. Уақытты кездейсоқ ауыстыру әдісін және локал броундық уақыт қасиеттерін пайдалана отырып қажетті түрде нормаландырылған шешімнің (математикалық күтімі нөлге тең және дисперсиясы ақырлы болатын) асимптотикалық нормал шешім болатыны туралы негізгі нәтиже дәлелденген. Шектік ақырлы дисперсияның теңдеу шешімімен байланысты броундық локал уақыт терминінде жазылған айқын түрі алынған.

Кілт сөздер: Кездейсоқ оператор, жылдам осцилляцияланатын коэффициентті кездейсоқ теңдеу, орталандырылған оператор, орталандырылған теңдеу, уақытты кездейсоқ ауыстыру, броундық локал уақыт, асимптотикалық нормалдылық.

Введение.

Уравнения в частных производных с быстро осциллирующими коэффициентами описывают физические процессы, протекающие в неоднородных средах с развитой микроструктурой. Вместе с тем, изучение таких объектов естественно связано с анализом эффектов, типичных для теории вероятностей.

В связи с этим актуальными являются вопросы применимости к уравнениям в частных производных со случайными быстро осциллирующими коэффициентами принципа усреднения, т.е. доказательства существования соответствующих к исходным уравнениям усредненных (с неслучайными коэффициентами) уравнений. В ситуациях, когда наблюдается усреднение, рассматриваемая задача со случайными коэффициентами в том или ином смысле приближаются решениями соответствующих усредненных уравнений при малых значениях характерного масштаба пространственной или временной неоднородности.

В данной работе мы исследуем асимптотику при $\varepsilon \downarrow 0$ ($\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$) решения задачи Коши

$$\begin{aligned} b(x/\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x/\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(t, x) \right), \\ u_\varepsilon(0, x) &= f(x), \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $t \geq 0$, $x \in R^1$, $f(x)$ — гладкая неслучайная функция, а случайные быстро осциллирующие коэффициенты $a(x, \omega)$, $b(x, \omega)$ — однородные случайные поля на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) .

Предполагается также, что реализации случайных полей достаточно гладки, и, таким образом, реализации решения являются классическими решениями задачи (0.1). Кроме того, предположим, что существует постоянная $c > 0$ такая, что с вероятностью 1 случайные коэффициенты $a(y, \omega), b(y, \omega)$ на всей прямой удовлетворяют условию

$$0 < \frac{1}{c} \leq a(y, \omega), b(y, \omega) \leq c, \quad x \in R^1, \quad \omega \in \Omega. \quad (0.1^*)$$

Нашей целью в данной работе является доказательство осредняемости решения задачи (0.1), т.е. осредняемости случайного оператора

$$H_\varepsilon(\omega) = (b(x/\varepsilon))^{-1} \frac{\partial}{\partial x}.$$

По другому говоря, мы докажем существования осредненного (неслучайного) оператора $\bar{H}$ такого, что решение $u_\varepsilon(t, x)$ уравнения (0.1) сходится по распределению (слабо) к (неслучайному) решению $\bar{u}(t, x)$ усредненного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(t, x) = \bar{H} \bar{u}(t, x), \quad \bar{u}(0, x) = f(x).$$

Более того, мы докажем, что нормированная разность

$$u_\varepsilon^*(t, x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (u_\varepsilon(t, x) - \bar{u}(t, x))$$

асимптотически нормальна при $\varepsilon \downarrow 0$ и укажем явный вид параметров предельного нормального распределения в терминах связанного с решением рассматриваемой задачи броуновского локального времени.

Методы.

В §1, с помощью подходящей случайной замены пространственной координаты, показывается, что задачу (0.1) можно свести к решению задачи более простого вида, т.е. к задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(t, x) &= \frac{1}{2a(x/\varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\varepsilon(t, x), \\ u_\varepsilon(0, x) &= f(x), \end{aligned} \quad (0.2)$$

где $t \geq 0$, $x \in R^1$, неслучайное начальное условие $f(x)$ и случайное поле $a(x) = a(x, \omega)$ — удовлетворяют условиям задачи (0.1).

Далее, в § 2, с помощью случайной замены времени

$$\tau_\varepsilon(t) = \int_0^t a(W(s)/\varepsilon) ds, \quad (0.3)$$

где $W(s)$ – стандартный винеровский процесс с инфинитезимальным оператором [1]

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2},$$

строится новый процесс $x_\varepsilon(t)$, инфинитезимальным оператором которого является стоящий в правой части уравнения (0.2) случайный оператор

$$A_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a(x/\varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (0.4)$$

Изучение асимптотического поведения решения $u_\varepsilon(t, x)$ задачи (0.2) при $\varepsilon \downarrow 0$ проводится с привлечением оператора Грина решения $u_\varepsilon(t, x)$ и представления этого решения с помощью формулы Каца–Фейнмана. Наконец, переход к новой случайной временной переменной $\tau_\varepsilon(t)$ по формуле (0.3) и применение свойств броуновского локального времени $\check{t}(t, x)$ (свойства $\check{t}(t, x)$ см. в [2]) позволяют доказать утверждение об асимптотической нормальности подходящим образом нормированной функции

$$u_\varepsilon^*(t, x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (u_\varepsilon(t, x) - \bar{u}(t, x)) \quad (0.5)$$

при $\varepsilon \downarrow 0$, где $\bar{u}(t, x)$ – решение усредненного (неслучайного) уравнения (ниже и всюду в дальнейшем в этой работе угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение (взятие математического ожидания) по полю $a(x, \omega)$: $\langle a \rangle = Ma(x, \omega)$):

$$\frac{\partial \bar{u}(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2\langle a \rangle} \frac{\partial^2 \bar{u}(t, x)}{\partial x^2}, \quad \bar{u}(0, x) = f(x). \quad (0.6)$$

При этом получены явные выражения для параметров предельного при $\varepsilon \downarrow 0$ распределения $u_\varepsilon^*(t, x)$ (значит и предельного при $\varepsilon \downarrow 0$ распределения $u_\varepsilon(t, x)$) в терминах броуновского локального времени $\check{t}(t, x)$.

§1. Результаты

1.1. Случайная замена пространственной координаты

В (0.1) перейдем к новой быстроосциллирующей пространственной координате с помощью случайной замены

$$\varphi(x) = \hat{a} \int_0^x \frac{dz}{a(z/\varepsilon)}, \quad (1.1)$$

где $\hat{a} > 0$ - некоторая постоянная.

Тогда $\varphi'(x) = \frac{1}{a(x/\varepsilon)} > 0$, поэтому существует обратная функция $\varphi^{-1}(x)$: если $\varphi(x) = y$, то $x = \varphi^{-1}(y)$.

Теперь в (0.1) сделаем (случайную) замену переменной $x = \varphi^{-1}(y)$ и введем обозначения:

$$u_\varepsilon(t, x) = u_\varepsilon(t, \varphi^{-1}(y)) = \tilde{u}_\varepsilon(t, y), \quad a(x/\varepsilon) = a(\varphi^{-1}(y)/\varepsilon) = \tilde{a}(y/\varepsilon), \\ b(x/\varepsilon) = b(\varphi^{-1}(y)/\varepsilon) = \tilde{b}(y/\varepsilon), \quad f(x) = f(\varphi^{-1}(y)) = \tilde{f}(y).$$

Далее, заметив, что

$$\frac{\partial u_\varepsilon(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon(t, y)}{\partial y} \cdot \frac{\hat{a}}{\hat{a}(y/\varepsilon)} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x/\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon(t, x)}{\partial x} \right) = \frac{(\hat{a})^2}{\tilde{a}(y/\varepsilon)} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varepsilon(t, y)}{\partial y^2}$$

можем переписать задачу (0.1) в виде

$$\tilde{b}(y/\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon(t, y)}{\partial t} = \frac{(\hat{a})^2}{\tilde{a}(y/\varepsilon)} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varepsilon(t, y)}{\partial y^2}, \quad (1.2) \\ \tilde{u}_\varepsilon(0, y) = \tilde{f}(y).$$

Отметим также, что если $T_\varepsilon(x) = x/\varepsilon$, то

$$\varphi(x) = x \hat{a} \cdot \frac{1}{T_\varepsilon(x)} \int_0^{T_\varepsilon(x)} \frac{1}{a(z)} dz \rightarrow x \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

с вероятностью единица (см. например, [3]), если постоянная $\hat{a} = (\langle a^{-1} \rangle)^{-1}$.

Из сказанного следует, что задача об усреднении уравнения (0.1) при сделанных выше предположениях сводится к задаче об усреднении уравнения

$$\frac{\partial u_\varepsilon(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2a(x/\varepsilon)} \frac{\partial^2 u_\varepsilon(t, x)}{\partial x^2}, \quad (1.3) \\ u_\varepsilon(0, x) = f(x),$$

при тех же условиях (как и в задаче (0.1)) на начальную функцию $f(x)$ и на случайный быстро осциллирующий коэффициент $a(x/\varepsilon)$ (мы здесь заново переобозначили пространственную переменную, коэффициенты и начальное условие задачи (1.2)).

Таким образом, решение задачи об усреднении уравнения (0.1) сводится к задаче усреднения уравнения (0.2).

1.2. Оператор Грина решения уравнения (0.2) и случайная замена времени

Рассмотрим оператор Грина решения $u_\varepsilon(t, x)$ уравнения (1.3)

$$G_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha s} u_\varepsilon(s, x) ds, \quad (2.1)$$

где параметр $\alpha > 0$.

Если обозначим через $x_\varepsilon(t)$ процесс с инфинитезимальным (производящим) оператором (0.4), то, по формуле Каца – Фейнмана решение $u_\varepsilon(s, x)$ задачи (1.3) можно записывать в виде

$$u_\varepsilon(s, x) = M_x^{(\varepsilon)} f(x_\varepsilon(s)), \quad (2.2)$$

где знак $M_x^{(\varepsilon)}$ означает усреднение (взятие условного математического ожидания) по всем, выходящим в начальный момент $s = 0$ из точки x ($x_\varepsilon(0) = x$) траекториям процесса $x_\varepsilon(s)$.

Следуя давно известным идеям случайной замены времени (см. например, [5]) покажем, что таким процессом является процесс

$$x_\varepsilon(t) = W(\tau_\varepsilon^{-1}(t)), \quad (2.3)$$

где $\tau_\varepsilon^{-1}(t)$ – обратная к определенной формулой (0.3) случайной времени $\tau_\varepsilon(t)$ функция (существование $\tau_\varepsilon^{-1}(t)$ вытекает из того, что $\tau'_\varepsilon(t) = a(W(s)/\varepsilon) > 0$), а $W(t)$ – стандартный винеровский процесс (броуновское движение).

Действительно, по определению инфинитезимального оператора A_ε процесса $x_\varepsilon(t)$, для любой функции $g(x)$, ограниченной и равномерно непрерывной вместе с производными первых двух порядков ($g(x) \in C_{\text{равн}}^{(2)}$), имеем

$$\begin{aligned} A_\varepsilon g(x) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{M_x^{(\varepsilon)} g(x_\varepsilon(t)) - g(x)}{t} = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{M_x^{(\varepsilon)} W(\tau_\varepsilon^{-1}(t)) - g(x)}{t} = \lim_{\tau_\varepsilon(s) \downarrow 0} \frac{M_x g(W(s)) - g(x)}{\tau_\varepsilon(s)} = \\ &= \lim_{s \downarrow 0} M_x \left[\frac{g(W(s)) - g(x)}{s} \cdot \frac{s}{\tau_\varepsilon(s)} \right] = \frac{1}{\tau'_\varepsilon(0)} \cdot \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} g(x) = \\ &= \frac{1}{2a(x/\varepsilon)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} g(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В (2.4) (и всюду в дальнейшем) знак условного математического ожидания M_x относится к стандартному винеровскому процессу $W(t)$, т.е. M_x означает взятие условного математического ожидания по всем, выходящим в начальный момент $t = 0$ из точки x , траекториям винеровского процесса $W(t)$ ($W(0) = x$).

Выше мы при вычислении предела сначала произвели случайную замену времени $s = \tau_\varepsilon(t)$, после воспользовались тем, что если $s \downarrow 0$, то $\tau_\varepsilon(s) \downarrow 0$ и наоборот, а также тем, что инфинитезимальным оператором стандартного винеровского процесса является оператор $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2}$ и $\tau'_\varepsilon(0) = a(x/\varepsilon)$.

Соотношение (2.4) показывает, что инфинитезимальным оператором процесса $x_\varepsilon(t)$ действительно является определенный формулой (0.4) оператор A_ε .

Подставляем теперь (2.2) в (2.1), после переходим к новой переменной интегрирования $\tau_\varepsilon(t)$ по формуле (0.3). После, представив $\tau_\varepsilon(t)$ в виде

$$\tau_\varepsilon(t) = \int_0^t a(W(s)/\varepsilon) ds = \langle a \rangle t + \int_0^t (a(W(s)/\varepsilon) - \langle a \rangle) ds,$$

и введя обозначение

$$Y_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (a(W(s)/\varepsilon) - \langle a \rangle) ds, \quad (2.4)$$

получим, что оператор Грина $G_\alpha f(x)$ уравнения (1.3) можно будет записывать в виде:

$$\begin{aligned} G_\alpha f(x) &= \int_0^\infty M_x^{(\varepsilon)}(e^{-\alpha s} f(x_\varepsilon(s))) ds = \int_0^\infty M_x[e^{-\alpha \tau_\varepsilon(t)} f(W(t)) a(W(t)/\varepsilon)] dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha \langle a \rangle t} M_x[e^{-\sqrt{\varepsilon} Y_\varepsilon(t)} f(W(t)) (a(W(t)/\varepsilon) - \langle a \rangle)] dt + \\ &+ \int_0^\infty e^{-\alpha \langle a \rangle t} M_x(e^{-\sqrt{\varepsilon} Y_\varepsilon(t)} f(W(t))) dt = G_\alpha^{(0)} f(x) + G_\alpha^{(1)} f(x), \end{aligned}$$

где

$$G_\alpha^{(0)} f(x) = \int_0^\infty \langle a \rangle e^{-\alpha \langle a \rangle t} M_x(e^{-\sqrt{\varepsilon} Y_\varepsilon(t)} f(W(t))) dt, \quad (2.5)$$

$$G_\alpha^{(1)} f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha \langle a \rangle t} M_x[e^{-\sqrt{\varepsilon} Y_\varepsilon(t)} f(W(t)) (a(W(t)/\varepsilon) - \langle a \rangle)] dt. \quad (2.6)$$

Далее заметим, что

$$M_x(e^{-\sqrt{\varepsilon} Y_\varepsilon(t)} f(W(t))) = M(e^{-\sqrt{\varepsilon} Y_\varepsilon(t, x)} f(W(t) + x)),$$

где введено обозначение

$$Y_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^t [a((W(s) + x)/\varepsilon) - \langle a \rangle] ds. \quad (2.4^*)$$

Изучим более подробно этот процесс. Для этого нам удобно будет воспользоваться свойствами броуновского локального времени $\check{t}(t, x)$ (подробности см. в [2]). Напомним определение $\check{t}(t, x)$ и некоторых нужных нам его свойств.

По определению, для всех $t \geq 0$ и $x \in R^1$, с вероятностью единица

$$\check{t}(t, x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^t \chi_{(x, x+\delta)}(W(s)) ds = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\text{mes} \{s: x \leq W(s) < x+\delta, s \leq t\}}{\delta}, \quad (2.7)$$

где $\chi_B(y)$ – индикатор множества B : $\chi_B(y) = 1, y \in B$; $\chi_B(y) = 0, y \notin B$.

По своему смыслу $\check{t}(t, x)$ есть мера Лебега времени, которое броуновская (винеровская) траектория проводит в точке x за время t .

Известно (см. [2] и соответствующую литературную ссылку из [2]), что при каждом x процесс $\check{t}(t, x)$, как процесс по параметру t , не убывает и для любой локально интегрируемой функции $h(x)$ с вероятностью единица для любого $t \geq 0$ выполняется равенство

$$\int_0^t h(W(s)) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \check{t}(t, x) dx. \quad (2.8)$$

С помощью равенства (2.8) процесс $Y_\varepsilon(t, x)$ можем представить в виде

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon(t, x) &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} [a(y/\varepsilon) - \langle a \rangle] M_x \check{t}(t, y) dy = \\ &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon [a(y) - \langle a \rangle] \check{t}(t, \varepsilon y + x) dy = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{t}(t, \varepsilon y + x) dF(y), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где функция

$$F(y) = - \int_y^\infty (a(z) - \langle a \rangle) dz, \quad y > 0,$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^y (a(z) - \langle a \rangle) dz, \quad y < 0.$$

Функция (случайное поле) $F(y)$ имеет ограниченную вариацию, $F(+\infty) = F(-\infty) = 0$. Существование же интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a(y) - \langle a \rangle) dy$$

в среднеквадратичном смысле (или с вероятностью единица) вытекает из условия (см. [1], [6])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{aa}(y_1 - y_2) dy_1 dy_2 < \infty \quad (2.9)$$

где $K_{aa}(y_1, y_2)$ - корреляционная функция случайного однородного поля $a(y, \omega)$.

Таким образом, для процесса $Y_\varepsilon(t, x)$ выполняются все условия теоремы 3.1. из [2] ([2], стр. 30, или см. [7]). Эта теорема позволяет нам утверждать, что при $\varepsilon \downarrow 0$ имеет место сходимость по распределению

$$Y_\varepsilon(t, x) \rightarrow d \cdot W_x(\check{t}(t, x)), \quad (2.10)$$

где $\check{t}(t, x)$ – броуновское локальное время, d – определенная формулой

$$d = \left(4 \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dy\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

постоянная, а $W_x(s), s \geq 0, x \in R^1$, - семейство независимых стандартных винеровских процессов с $W_x(0) = x, MW_x(s) = 0, MW_x^2(s) = s$, причем это семейство не зависит от $W(s)$.

Для дальнейших наших исследований нам нужно будет введение следующих σ – алгебр (сигма – алгебр):

$$\begin{aligned} F_{=t} &= \sigma\{W(t)\} = \{W(t) \in B, B \in \beta(R)\}, \\ F_{\leq t} &= \sigma\{W(s) \in B, s \leq t, B \in \beta(R)\}. \end{aligned}$$

где $\beta(R)$ – борелевская σ – алгебра на прямой. По смыслу, $F_{=t}$ – порожденная процессом (случайной величиной) $W(t)$ в момент времени t σ – алгебра, а $F_{\leq t}$ – порожденная событиями $\{W(s) \in B, s \leq t, B \in \beta(R)\}$ наименьшая σ – алгебра. Очевидно, что $F_{=t}$ является под σ – алгеброй $F_{\leq t}$.

Покажем, что $W(t)$ и $Y_\varepsilon(t, x)$, значить и $e^{-\sqrt{\varepsilon}Y_\varepsilon(t, x)}$, являются независимыми (как случайные величины).

Действительно, по свойствам условного математического ожидания относительно σ – алгебр

$$\begin{aligned} M(Y_\varepsilon(t, x)/F_{=t}) &= MY_\varepsilon(t, x), \\ M[Y_\varepsilon(t, x)f(W(t) + x)] &= M[M(Y_\varepsilon(t, x)f(W(t) + x)/F_{=t})] = \\ &= M[f(W(t) + x)M(Y_\varepsilon(t, x)/F_{=t})] = Mf(W(t) + x) \cdot MY_\varepsilon(t, x). \end{aligned}$$

Вместе с тем, по формуле Каца – Фейнмана (или см. [1]), что функция

$$u(t, x) = M_x f(W(t)) = Mf(W(t) + x)$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = f(x). \quad (2.12)$$

Легко проверяется также, что функция $\bar{u}(t, x) = u(t/\langle a \rangle, x)$ является решением усредненного уравнения

$$\frac{\partial \bar{u}(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2\langle a \rangle} \frac{\partial^2 \bar{u}(t, x)}{\partial x^2}, \quad \bar{u}(0, x) = f(x). \quad (2.13)$$

Учитывая вышесказанные, мы можем записывать $G_\alpha^{(0)} f(x)$ в виде

$$G_\alpha^{(0)} f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha s} \bar{u}(s, x) ds - \sqrt{\varepsilon} \int_0^\infty e^{-\alpha s} Y_\varepsilon(s/\langle a \rangle, x) \bar{u}(s, x) ds + o(\sqrt{\varepsilon}). \quad (2.14)$$

Проанализируем теперь $G_\alpha^{(1)} f(x)$.

Воспользовавшись независимостью $W(t)$ и $e^{-\sqrt{\varepsilon} Y_\varepsilon(t, x)}$, можем написать:

$$G_\alpha^{(1)} f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha \langle a \rangle t} M e^{-\sqrt{\varepsilon} Y_\varepsilon(t, x)} M_x [f(W(t))(a(W(t)/\varepsilon) - \langle a \rangle)] dt.$$

Заметим, что

$$M e^{-\sqrt{\varepsilon} Y_\varepsilon(t, x)} = e^{\frac{1}{2} \sigma_{Y_\varepsilon}^2(t, x) \cdot \varepsilon},$$

где $\sigma_{Y_\varepsilon}^2(t, x)$ – дисперсия процесса $Y_\varepsilon(t, x)$: $\sigma_{Y_\varepsilon}^2(t, x) = DY_\varepsilon(t, x)$.

Кроме того, обозначив через $p(t, x, y)$ фундаментальное решение уравнения (2.12), имеем

$$\begin{aligned} M_x [f(W(t))(a(W(t)/\varepsilon) - \langle a \rangle)] &= \varepsilon M_x [f(W(t))(\varepsilon^{-1}(a(W(t)/\varepsilon) - \langle a \rangle))] = \\ &= \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f(y+x) \varepsilon^{-1}(a((y+x)/\varepsilon) - \langle a \rangle) p(t, 0, y) dy \rightarrow \\ &\rightarrow \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \xi_a(y) p(t, x, y) dy \end{aligned}$$

при $\varepsilon \downarrow 0$, потому что для любого фиксированного y при $\varepsilon \downarrow 0$ поле $\varepsilon^{-1}[a(y/\varepsilon) - \langle a \rangle]$ слабо сходится к некоторому $\xi_a(y)$:

$$\varepsilon^{-1}[a(y/\varepsilon) - \langle a \rangle] \rightarrow \xi_a(y) \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Сказанное позволяет нам представить $G_\alpha^{(1)} f(x)$ в виде

$$G_\alpha^{(1)} f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha s} \left(\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} g(s, x, y) dy \right) dt,$$

причем (зависящий от s и x) внутренний интеграл ограничен некоторой константой. Это значит, что $G_\alpha^{(1)}f(x)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ будет порядка ε , т.е. $G_\alpha^{(1)}f(x) = o(\sqrt{\varepsilon})$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Подставляя теперь найденные выражения в (2.5) и переходя к обратному преобразованию, получим:

$$u_\varepsilon^*(t, x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(u_\varepsilon(t, x) - \bar{u}(t, x)) = Y_\varepsilon(t/\langle a \rangle, x)u(t/\langle a \rangle, x) + o(\sqrt{\varepsilon}),$$

или, по другому, можем утверждать, что нормированное решение $u_\varepsilon^*(t, x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(u_\varepsilon(t, x) - \bar{u}(t, x))$ асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией $\sigma_{Y_\varepsilon}^2 \bar{u}^2(t, x)$.

Сформулируем теперь вкратце полученный в данной работе основной результат.

В данной работе исследовано вероятностное асимптотическое поведение при $\varepsilon \downarrow 0$ решения задачи (0.1) в предположении, что быстро осциллирующий случайный однородный коэффициент удовлетворяет нужным свойствам существования и гладкости решения. В §1 задача (0.1) сведена к решению аналогичной, но более простой, задачи (0.2). Далее изучен оператор Грина решения (0.2), при этом применения метод случайной замены времени и свойств броуновского локального времени получен основной результат об осредняемости оператора правой части уравнения (0.2), или, по другому говоря, доказана асимптотическая нормальность (с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией) нормированного подходящим образом решения уравнения (0.2). При этом получен явный вид предельной конечной дисперсии в терминах связанной с решением уравнения (0.2) броуновского локального времени.

Обсуждение.

Полученные нами результаты согласуются и подтверждают результатов работ [4], [8], [9].

Например, в хорошо известной работе [9], когда коэффициенты являются однородными случайными полями (с помощью введения специальных, так называемых гармонических координат), показано, что усредненным оператором правой части уравнения (0.1) является оператор

$$\bar{H} = (\langle a^{-1} \rangle)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Этот результат в данной работе подтвержден нами другими методами.

Отметим также, что в работе [4] рассмотрена аналогичная (0.1) задача для волнового уравнения:

$$\begin{aligned} b(x/\varepsilon) \frac{\partial^2 u_\varepsilon(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x/\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon(t, x)}{\partial x} \right), \\ u_\varepsilon(0, x) &= f(x), \quad \left. \frac{\partial u_\varepsilon(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = h(x). \end{aligned} \quad (2.15)$$

При этом предполагается, что коэффициенты $\bar{K}(y) = \{a(y, \omega), b(y, \omega)\}$ удовлетворяют всем условиям нашей задачи (0.1). Кроме того, они дополнительно являются также m – зависимыми (т.е. для всех $y_1, \dots, y_n$, $|y_i - y_j| > m$, $\bar{K}(y_i)$ и $\bar{K}(y_j)$ – независимые случайные поля).

Далее, обозначив через $u_\varepsilon(t, x)$ решение волнового уравнения (2.15), через $\bar{u}(t, x)$ – решение соответствующего осредненного уравнения

$$\langle b \rangle \frac{\partial^2 \bar{u}(t, x)}{\partial t^2} = (\langle a^{-1} \rangle)^{-1} \frac{\partial^2 \bar{u}(t, x)}{\partial x^2}, \quad \bar{u}(0, x) = f(x), \quad \left. \frac{\partial \bar{u}(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = h(x),$$

и определив для гладкой неслучайной финитной функции $\Phi(t, x)$ произведение $(F(t, x), \Phi(t, x))$ соотношением

$$(F(t, x), \Phi(t, x)) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, x) \Phi(t, x) dt dx,$$

в [4] получен следующий основной результат: при $\varepsilon \downarrow 0$

$$(u_\varepsilon^*(t, x), \Phi(t, x)) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (u_\varepsilon(t, x) - \bar{u}(t, x), \Phi(t, x))$$

асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Отметим, что при этом не был указан явный вид формулы вычисления предельной дисперсии.

В дальнейшем, в работе [8], с помощью известной, связывающей решения задач (2.15) и (0.2) формулы, результаты работы [4] перенесены на случай уравнения (0.2). Но при этом, в отличие от [4], здесь уже была указана явная формула для вычисления предельной дисперсии.

В данной нашей работе, в отличие от вышеназванных работ, мы не предполагаем m – зависимости коэффициентов рассматриваемых уравнений. Кроме того, мы в основном опираемся на метод случайной замены времени и на некоторые тонкие свойства броуновского локального времени. Вообще следует сказать, что к настоящему времени хорошо известны много фундаментальных результатов о локальных временах не только броуновского движения, но и других более общих, в частности для широкого класса марковских, процессов. Некоторые представления об этих и других результатах можно получить, например, ознакомившись работами [10- 15]. По нашему мнению, одним из основных направлений распространения наших результатов является рассмотрение задач с операторами, связанными с отличными от броуновского движения процессами и локальными временами.

Список использованной литературы

1. А.Д.Вентцель. Курс теории случайных процессов – М.: Наука. Физматлит, 1996. - 400 стр.
2. A.N.Borodin, “Brownian local time”, *Russian Math. Surveys*, 44:2 (1989), 1–51.
3. В.Ф.Гапошкин. Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей. – Теория вероятн. И ее примен., 1977, т.22, №2, с. 295-319.
4. В.В.Юринский. О распространении волн в одномерной случайной среде.- МИ СО АН СССР, препринт № 9. – Новосибирск, 1982.
5. Е.Б.Дынкин. Марковские процессы. – М.: Физматлит, 1963. – 860 стр.
6. H.Cramer M.R.Leadbetter. Stationary and Related Stochastic Processes – John Wiley, 1967.
7. A.N.Borodin. On the character of convergence to Brownian Local time.1// Th. Rel.Fields. – 1986. – V.72, №2. – P. 231-250.
8. Аканбай (Аканбаев) Н. Об оценке остаточного члена в теореме осреднения для случайных параболических уравнений – Изв. АН Каз ССР, сер. Физ.-мат., 1985, №5. – с. 11 – 15.
9. S.M.Kozlov, “Averaging of random operators”, *Math. USSR-Sb.*, **37**:2 (1980), 167–180
- 10.A.N.Borodin, “Hyperbolic Ornstein–Uhlenbeck process”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **219**:5 (2016), 631–638
- 11.A.N.Borodin, “Distributions of functionals of switching diffusions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **229**:6 (2018), 632–650
- 12.A.N.Borodin, “On distributions of integral functionals of diffusions stopped at inverse range time”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **229**:6 (2018), 626–631
- 13.A.N.Borodin, “Distributions of functionals of diffusions with jumps stopped at random moments”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **206**:2 (2015), 115–126
- 14.M.Grabchak, S.A.Molchanov, “Limit theorems for random exponentials: the bounded support case”, *Theory Probab. Appl.*, **63**:4 (2019), 634–647
- 15.Dan Han, Yulia Makarova, Stanislav Molchanov, Elena Yarovaya, “Branching random walks with immigration”, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, **10684** (2017), 401–408

Сведения об авторах

- 1) Аканбай Е.Н. докторант, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, моб.тел: 87475117416, E-mail: akanbay.yerkebulan@gmail.com
- 2) Сулейменова З.И. Старший преподаватель, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, моб.тел: 87078329346, E-mail: suleymenova2474@gmail.com

- 3) Тапеева С.К. Старший преподаватель, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, моб.тел: 87771255425, E-mail: tapeevasamal77@gmail.com

2) информация о том, кому из соавторов следует адресовать вопросы: Сулейменова З.И.

Рецензенты:

- 1) Сагиндыков Б.Ж.- кандидат физико-математических наук, ассоциированный профессор НОЦ «Математика и кибернетика» Satbayev University
- 2) Шакенов К.К.- доктор физико-математических наук, профессор кафедры Математического и Компьютерного моделирования Казахского национального университета им. Аль-Фараби.

Н. Федосенко Ответственный секретарь

Адрес редакции: Казахстан, г. Алматы, ул. Сатпаева, 22 каб. 616 Т. +7 (727) 292-63-46 E-mail: nina.fedorovna.52@mail.ru