

## МЕТОД *ASMTurbC* АУТОНОМНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФФУЗИОННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ГОРЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЕГО ТЕСТИРОВАНИЯ

Нужнов Ю.В.

*Институт Проблем Горения, Казахстан, Алматы*

Формулируется новый принцип построения математических моделей для процессов диффузионного турбулентного горения и предлагается метод автономного статистического моделирования гидродинамических характеристик таких процессов (метод *ASMTurbC*). Отличительной особенностью метода является учет эффектов перемежаемости динамических и скалярных полей турбулентного течения в сочетании с известным методом "восстановленной концентрации горючего". Принципиальным отличием метода *ASMTurbC* является возможность строить математические модели для расчёта статистических характеристик (одноточечных обычных и центральных моментов) динамических и скалярных полей течения только турбулентной жидкости турбулентного течения. Построенные по методу *ASMTurbC* модели позволяют найти условные статистические характеристики неоднородного поля концентрации восстановленной концентрации горючего как пассивной примеси и, как следствие, найти концентрации основных химических реагентов горючего и окислителя. Тестирование метода осуществляется на примере построения математической модели турбулентного факела горения затопленной осесимметричной струи горючего (пропана). Результаты тестирования представляются в виде расчетов условных и полных статистических характеристик динамических и скалярных полей факела. Показано, что выполненные расчеты достаточно хорошо соответствуют известным экспериментальным данным и не требуют значительных затрат времени.

Статистическое моделирование, диффузионное турбулентное горение, перемежаемость, метод *ASMTurbC*, математическая модель, турбулентная и нетурбулентная жидкость.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время твёрдо установлено, что все турбулентные течения (свободные, пристеночные, следы за обтекаемыми телами) обладают свойством гидродинамической (здесь и далее – внешней) перемежаемости. При этом согласно общепринятой терминологии (см. [1, 2]) перемежающееся турбулентное течение содержит "турбулентную" и "нетурбулентную" жидкость. Поскольку все основные процессы турбулентного переноса и смешения происходят только в турбулентной жидкости, то моделирование течения такой жидкости представляется особенно значимым. Возможность статистического моделирования течения только турбулентной или только нетурбулентной жидкости привело к термину "автономное статистическое моделирование".

Новый подход в моделировании турбулентных течений [3, 4] позволил сформулировать эффективный метод построения математических моделей энергосодержащей структуры таких течений в условиях перемежаемости – метод *ASMTurb* [5, 6]. Дальнейшее распространение этого метода на моделирование неизотермических турбулентных течений привело к развитию статистической теории турбулентного тепло - и массопереноса [7], особенностью которой является учёт перемежаемости не только динамических, но и консервативных, скалярных полей. Построенные при этом модели позволили провести расчёты условных и полных статистических характеристик на уровне вторых центральных моментов. Хорошее согласие выполненных расчётов (см., например, [7]) с имеющимися экспериментальными данными, а также минимальные затраты на время счёта (не более 30 с. в математическом пакете *MathCad*) указывают на высокую эффективность метода *ASMTurb*. Такая эффективность достигается за счёт использования условно усреднённых по турбулентной и нетурбулентной жидкости уравнений гидромеханики (особенность данного ме-

тогда), что позволяет моделировать условные средние "напрямую" (в отличие, например, от метода [1], в котором для их определения сначала требуется определить безусловные средние и коэффициент перемежаемости; при этом расчёт безусловных средних проводится по моделям *RANS*, которые, как известно, не обеспечивают хорошую точность всего комплекса "средних" и, в особенности, "пульсационных" характеристик).

Цель данной работы – распространить метод *ASMTurb* на моделирование основных равновесных (как первый этап моделирования) процессов турбулентного диффузионного горения. Эту задачу будем решать совместно с использованием известного метода *PDF* консервативного скаляра, выбранного в виде "восстановленной концентрации горючего" как концентрации пассивной примеси [1]. Такой подход приводит к принципиально новому методу статистического моделирования [8], названному здесь как "метод автономного статистического моделирования турбулентного горения *ASMTurbC*". Преимуществом этого метода является то, что он позволяет строить модели для течения только турбулентной жидкости вне зависимости от течения нетурбулентной.

### 1. Физическая постановка задачи

Рассмотрим процесс перемежаемости динамических и скалярных полей на примере зоны турбулентного смешения спутных потоков с различной концентрацией пассивной примеси. Иллюстрация течения в этой зоне дана на рис. 1.

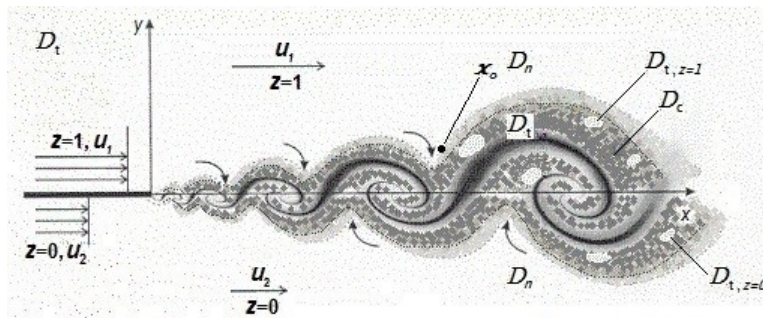


Рис. 1. Иллюстрация течения в зоне смешения спутных потоков с различной концентрацией пассивной примеси. Датчики продольной скорости и концентрации пассивной примеси помещены в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$

На этом рисунке  $D_t$  и  $D_n$  – области физического пространства с турбулентной и нетурбулентной жидкостью,  $D_{t,z=1}$  и  $D_{t,z=0}$  – области в турбулентной жидкости с постоянным значением концентрации пассивной примеси  $z$ ,  $D_c$  – область с неоднородным полем концентрации пассивной примеси (здесь – область пересечения). При этом турбулентная жидкость содержит всю возможную иерархию вихрей, т.е. весь набор волновых чисел, в то время как нетурбулентная может содержать преимущественно только крупные вихри малой интенсивности (или вообще их не содержать, если точка  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  расположена вдали от зоны смешения).

Картина поведения мгновенных характеристик продольной скорости  $u(\mathbf{x}, t)$  и концентрации пассивной примеси  $z$  в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  зоны смешения представлена на рис. 2. На этом рисунке:  $a$  – показание датчика скорости во все время наблюдения, статистика соответствует обобщенному полю течения  $G = D \times [0, \tau_0]$ ;  $I = I(\mathbf{x}, t)$  функция и  $\gamma(\mathbf{x}) = \langle I(\mathbf{x}, t) \rangle$  – коэффициент перемежаемости (как вероятность наблюдения) турбулентной жидкости в области  $(\mathbf{x}, t) \in G$ ;  $b$  – показания датчиков скорости и концентрации во время

наблюдений только турбулентной жидкости, статистика соответствует полю течения  $G_t = D_t \times [0, \tau_t]$ ;  $I_c = I_c(x, t)$  функция и  $\gamma_c(x) = \langle I_c(x, t) \rangle_c$  – коэффициент перемежаемости неоднородного поля концентрации пассивной примеси  $0 < z < 1$  в области  $(x, t) \in G_t$ ;  $c$  – показания датчиков скорости и концентрации пассивной примеси в области  $(x, t) \in G_c$ , т.е. в поле пересечения  $G_c = D_c \times [0, \tau_c]$ , которая соответствует области течения турбулентной жидкости  $D_t$  на рис. 1, из которой "удалены" области  $D_{t,z=1}$  и  $D_{t,z=0}$ . Заметим, что при рассмотрении неоднородного поля концентрации в обобщённом поле течения, т.е. когда  $(x, t) \in G$ , функция и коэффициент перемежаемости этого поля приобретают значения  $I_z = I_z(x, t)$  и  $\gamma_z(x) = \langle I_z(x, t) \rangle$ .

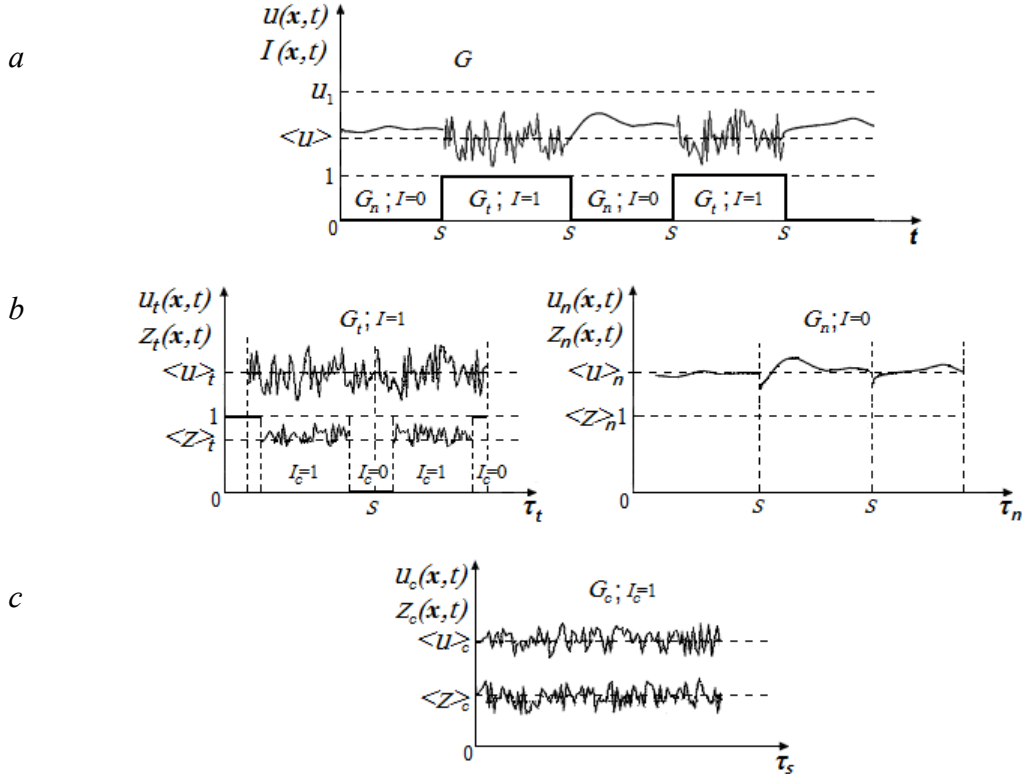


Рис. 2. Фрагменты поведения скорости и концентрации в точке  $x = x_0$  зоны смешения (см. рис. 1)

Как видно из рис. 2с, все процессы турбулентного смешения происходят только в области пересечения  $G_c$ . В этой связи надо сказать о механизме турбулентного переноса пассивной примеси в турбулентном течении.

## 2. Механизм турбулентного переноса консервативного скаляра

Известно, что в отдельных областях турбулентного факела наблюдаются как турбулентные области с "чистым" окислителем ( $z = 0$  в окружающей среде воздуха), так и с "чистым" горючим ( $z = 1$  в сопле технического устройства). Эти области образуются в результате вовлечения (эжекции) окружающей нетурбулентной жидкости (воздуха) с последующей их турбулизацией за счёт поперечного сдвига продольной скорости и нелокального воздействия пульсаций давления. Такому же влиянию подвергаются области с горючим, вытекающим из сопла и не успевшим полностью перемешаться с окружающим его окислителем. При этом вероятность наблюдения областей со значениями  $z = 0$  и  $z = 1$  в ос-

новой части факела может существенно отличаться от нуля (известное явление «несмешанности» реагентов, приводящее к неполному сгоранию топлива). В результате, процесс смешения и горения в областях со значениями  $z = 0$  и  $z = 1$  происходить не может. По этой причине в процессе моделирования турбулентного факела особое значение придается несовпадению динамического поля течения турбулентной жидкости и неоднородного поля концентрации пассивной примеси.

При построении математической модели диффузионного турбулентного горения используется концепция механизма турбулентного переноса консервативного скаляра (вещества или температуры при слабом перегреве) как *динамически пассивной* и *химически инертной примеси* (или просто– *пассивной примеси*). Согласно [7], турбулентный перенос консервативного скаляра осуществляется конвективной турбулентной диффузией, носит градиентный характер и происходит только в области пересечения динамических и скалярных гидродинамических полей  $G_c = G_t \cap G_z$ ; турбулентный перенос импульса, тепла и вещества в области  $G_c$  носит идентичный характер (при этом множество  $\Omega$  как множество значений гидродинамической величины  $f(x, t)$  представляет собой пространство элементарных событий  $f \in \Omega$ ).

Дадим теперь обоснование метода "автономного" статистического моделирования турбулентного горения *ASMTurbC*, который является логическим продолжением метода *ASMTurb*.

### 3. Метод автономного статистического моделирования *ASMTurbC*

В статистическом моделировании термодинамически равновесных процессов диффузионного турбулентного горения, т.е. когда процесс горения определяется только процессом смешения химических реагентов, с успехом используется "метод *PDF* консервативного скаляра". В теории диффузионного горения в качестве такого скаляра выбирается "восстановленная концентрация горючего", которая связана с концентрациями горючего и окислителя через посредство коэффициента стехиометрии  $St$ , [1, 9]

$$z = \frac{StC_f - C_0 + 1}{1 + St} . \quad (1)$$

При этом в приближении термодинамического равновесия состава и температуры для концентраций горючего и окислителя на фронте горения выполняются условия

$$C_f = C_0 = 0; \quad z = \frac{1}{1 + St} = z_s , \quad (2)$$

в то время как фронт пламени разделяет области с горючим и окислителем:

$$\begin{cases} C_f = 0 \\ C_0 = \frac{z_s - z}{z_s} \end{cases} \text{ при } z \leq z_s; \quad \begin{cases} C_f = \frac{z - z_s}{1 - z_s} \\ C_0 = 0 \end{cases} \text{ при } z \geq z_s . \quad (3)$$

Нелинейный характер зависимости  $C_i = f(z)$  приводит к необходимости использования *PDF* восстановленной концентрации горючего  $z$  (концентрации пассивной примеси) для статистического усреднения концентраций горючего и окислителя.

### 3.1 Принцип построения статистических моделей

Сформулируем новый принцип построения статистических моделей диффузионного турбулентного горения как метод *ASMTurbC*, основанный на следующих положениях: 1) основные процессы турбулентного горения происходят только в области течения турбулентной жидкости с неоднородным полем концентрации пассивной примеси  $z \in G_c$ , т.е. в области пересечения  $G_c$ ; 2) основными характеристиками турбулентного горения являются *условные* средние гидродинамических характеристик из области пересечения  $G_c$ ; 3) условные средние гидродинамических характеристик описываются дифференциальными уравнениями гидромеханики, условно усреднёнными по области пересечения  $G_c$ ; 4) условные средние концентраций химических реагентов определяются с помощью условной *PDF*  $P_c(z)$  концентрации пассивной примеси  $z$ , мгновенные значения которой связываются с концентрациями горючего и окислителя; 5) полное среднее гидродинамических характеристик рассчитываются (если это необходимо) по статистическим соотношениям статистической гидромеханики, связывающим полное и условное средние через посредство коэффициентов перемежаемости.

Метод *ASMTurbC* базируется на операции условного статистического усреднения выражений (3), проведённой с использованием условной *PDF*  $P_c(z)$  по множеству  $\Omega_c = \{z; 0 < z < 1\}$ , и даёт условные средние горючего и окислителя:

$$\langle C_f \rangle_c = \int_{z_s}^1 \frac{z - z_s}{1 - z_s} P_c(z) dz, \quad z \geq z_s; \quad \langle C_o \rangle_c = \int_0^{z_s} \frac{z_s - z}{z_s} P_c(z) dz, \quad z \leq z_s. \quad (4)$$

Необходимость в определении функции  $P_c(z)$ , таким образом, становится очевидной.

### 3.2 Математический аппарат метода *ASMTurbC*

Сформулированная концепция механизма турбулентного переноса консервативного скаляра основывается на том экспериментально установленном факте, что в областях течения с турбулентной жидкостью  $G_t$  существуют области с однородным полем концентрации пассивной примеси  $z = 0$  и  $z = 1$ , в которых турбулентная диффузия вещества отсутствует. Математическим выражением принятой концепции является соотношение

$$\langle z \rangle_c = \frac{\langle u_t \rangle_c}{u_{max}}. \quad (5)$$

Здесь  $\langle z \rangle_c = \langle z \rangle_{t, z \in G_c}$  – статистически усреднённая безразмерная (в массовых долях) концентрация пассивной примеси, которая определяется условной выборкой мгновенных значений  $z \in G_c$  во время наблюдения турбулентной среды в заданной точке турбулентного потока, т.е. когда выполняется условие  $(x, t) \in G_c$ . При этом условное среднее скорости турбулентной жидкости

$$\langle u_t \rangle_t = \gamma_c \langle u_t \rangle_c + (1 - \gamma_c) \langle u_t \rangle_{z=const} \quad (6)$$

и в заданной точке турбулентного потока является неизменным (поток считается статистически стационарным),  $\gamma_c$  – вероятность наблюдения концентрации пассивной примеси, принадлежащей области пересечения, т.е. области с неоднородным полем консервативного скаляра в турбулентной среде течения. При этом согласно (6) в области пересечения  $G_c$ ,

т.е. когда  $\gamma_c = 1$ , величина

$$\langle u_t \rangle_c \cong \langle u_t \rangle_t , \quad (7)$$

где  $\langle u_t \rangle_t \equiv \langle u \rangle_t$ . Более того, из-за малого объёма областей с  $z = const$  с хорошим приближением можно считать, что  $\gamma_c \rightarrow 1$ , так что из (6) получаем  $\langle u_t \rangle_{z=const} \cong \langle u \rangle_t$ . Очевидно при этом, что коэффициенты перемежаемости динамических и скалярных полей должны быть одного порядка, т.е. их максимальные значения должны отличаться на небольшую величину.

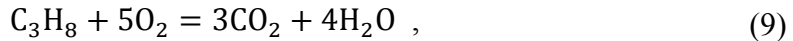
#### 4. Моделирование турбулентного диффузионного факела горения пропана

##### 4.1 Зависимость концентраций химических реагентов от концентрации пассивной примеси

Моделирование равновесного диффузионного турбулентного факела горения, кинетика которого описывается прямой одноступенчатой брутто-реакцией, в совокупности с моделью восстановленной концентрации горючего [1] позволяет определять значения равновесной плотности, температуры, концентрации реагентов и продуктов сгорания. Расчёт концентрации пропана в турбулентном диффузионном затопленном факеле горения струи пропана в окружающем воздухе был проведён на основе результатов моделирования характеристик пассивной примеси. При этом величина эквивалентной концентрации пропана, которая сохраняется во всех реакциях без участия кислородосодержащих соединений, представляется в виде [1]

$$c_f = \sum_i \frac{44}{36 + 3n_i} c_i , \quad (8)$$

где  $c_i$  – массовые концентрации углеводородов;  $n_i$  – отношение числа атомов водорода  $H$  и  $C$  в  $i$ -ом углеводороде. В отсутствие пиролиза эта величина равна концентрации пропана. В этом случае реакция горения пропана записывается в виде брутто-реакции



коэффициент стехиометрии которой  $St=3.636$ .

##### 4.2 Метод расчёта *PDF* концентрации пассивной примеси

Точное решение для условной  $P_c(z)$  в области турбулентной струи с сильной перемежаемостью (край струи) найдено в [8]. В этой же работе был предложен способ определения условной усечённой *PDF* концентрации пассивной примеси, позволяющий проводить расчёты в широкой области струи. В данном случае условная *PDF* задавалась в виде

$$P_c(\zeta) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}S_c\langle z \rangle_c} \exp \left[ -\frac{(\zeta - Sm)^2}{2S_c^2} \right], \quad \zeta = \frac{z}{\langle z \rangle_c} , \quad (10)$$

где интенсивность пульсаций концентрации  $S_c = \sigma_c / \langle z \rangle_c$  с дисперсией  $\sigma_c^2 = \langle (z - \langle z \rangle_c)^2 \rangle_c$ ,  $Sm = const$ ,  $k = const$ . Разработанная программа расчёта показала, что формула (10) в случае негорящей турбулентной струи хорошо соответствует опытным данным при

$S_c = 0.554$  [1],  $Sm = 0.9$ . Однако согласно опытным данным [10] величина  $S_c = 0.7$  только на краю факела и изменяется по мере продвижения наблюдений к оси факела, т.е. когда величина  $\langle z \rangle_c \rightarrow 1$ . Именно это обстоятельство является ключевым при распространении метода усечённых  $PDF$  на всю область факела горения. При этом поведение величины  $S_c$  может быть найдено из условия нормировки  $P_c(\zeta)$ , а значение параметра  $k$  – при заданном значении  $S_c = 0.7$ . Величина  $Sm = 1$  в формуле (10) в этом случае выбирается из условия наилучшего расчёта условных средних концентрации горючего и окислителя.

Важно заметить, что проведённые расчёты условных средних концентрации пассивной примеси  $\langle z \rangle_c$  показали заметное различие для изотермической и неизотермической (даже в случае слабого подогрева) струи [7]. Ясно, что в случае горения температура струи будет высокой и её влияние на расчёт концентрации  $\langle z \rangle_c$  возрастает.

## 5. Результаты расчётов статистических характеристик

### 5.1 Расчёты условных $PDF$ концентрации пассивной примеси

Результаты расчётов точной и усечённой нормированной функции  $p_c(\zeta) = \langle z \rangle_c P_c(\zeta)$  для края осесимметричной затопленной турбулентной струи метана представлены на рис. 3, кривые 1 и 2. Расчёт функции  $p_c(\zeta)$  в случае горения осесимметричной струи пропана в окружающем воздухе представлен кривой 3 на рис. 3. Поведение величины  $S_c$  в зависимости от величины  $\langle z \rangle_c / \langle z_0 \rangle_c$  ( $z_0$  - концентрация на оси струи) вместе с имеющимися опытными данными представлены на рис. 4. Как видно, расчетные и опытные данные находятся в достаточно хорошем согласии.

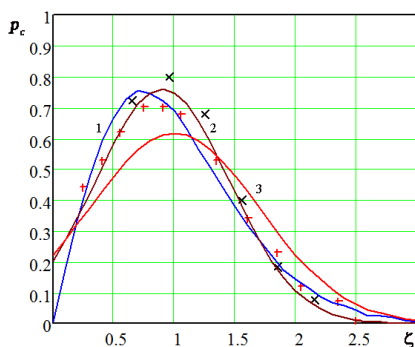


Рис. 3. Расчёты условной  $PDF$   $p_c(\zeta)$  для края осесимметричной затопленной струи метана: 1 – точное решение [8] и 2 – по формуле (10) со значением  $Sm = 0.9$ ; 3 – по формуле (10) в случае горения со значением  $Sm = 1$ . Сплошные линии – расчёт, значки – опытные данные:  $\times$ [11],  $+$ [12]

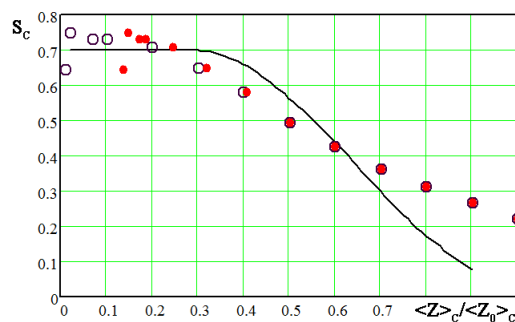


Рис. 4. Интенсивность пульсаций концентрации пассивной примеси (пары масла) в осесимметричной затопленной струе. Сплошная кривая – расчёт, кружки – опытные данные [10]

### 5.2 Расчёт концентрации пропана

Расчёт концентрации пропана по методу  $ASMTurbC$  в рассматриваемом здесь турбулентном диффузионном затопленном факеле горения, на фронте которого величина восстановленной концентрации горючего  $z_s = 0.06$ , проводился по формуле (4) и представлен на рис. 5. Здесь расчётные кривые: 1 – с использованием точного решения уравнения для  $PDF$ , 2 – с использованием усечённой  $PDF$ . Из рис. 5 видно, что расчёт соответствует



опытным данным [1], т.е. модель *ASMTurbC* позволяет проводить расчёты в широкой области факела горения с хорошей точностью. На рис. 6 приведены результаты расчётов в обычной (не логарифмической) системе координат с учётом и без учёта пульсаций концентрации по квазиламинарной модели горения, когда используется операция усреднения по методу *RANS* с результатом

$$\langle C_f \rangle_c = \frac{\langle z \rangle_c - z_s}{1 - \langle z \rangle_c} \quad (11)$$

Как видим, квазиламинарный режим горения (кривая 3) принципиально отличается от турбулентного, т.е. влияние пульсаций концентрации в турбулентном режиме горения является определяющим и квазиламинарная модель, которая соответствует операции усреднения Рейнольдса, мало пригодна для описания турбулентного горения.

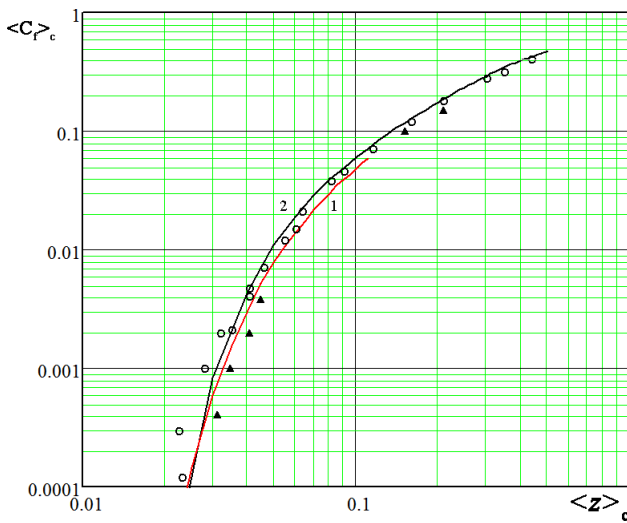


Рис. 5. Условное среднее концентрации пропана в затопленном диффузионном факеле. Расчётные кривые: 1 – с использованием точного решения уравнения для PDF, 2 – с использованием усечённой PDF (10). Значки – опытные данные [1]. Начальная скорость истечения струи  $u_0 = 10.7$  м/с

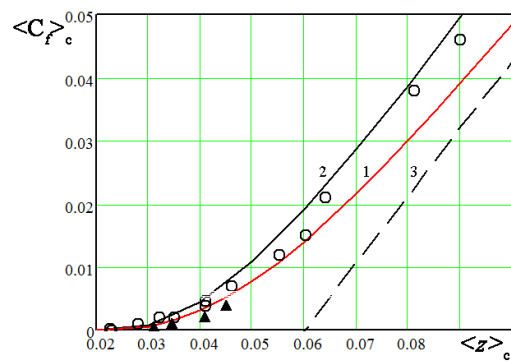


Рис. 6. Условное среднее концентрации пропана на краю затопленного диффузионного факела. Расчётные кривые соответствуют рис. 5. Пунктирная линия 3 – расчёт в случае квазиламинарного режима горения

На рис. 7 представлены расчёты условных (проведённых по методу *ASMTurbC*) и безусловных (по методу *RANS*) средних значений концентраций горючего и окислителя. Видно, что статистическое усреднение методом *ASMTurbC* с привлечением PDF концентрации пассивной примеси даёт значительное влияние пульсаций на расчёт условных средних концентраций горючего и окислителя.

На рис. 8 представлены расчёты условного среднего концентраций горючего, окислителя и продуктов сгорания в широкой области факела горения, т.е. в широкой области изменения условного среднего восстановленной концентрации горючего.



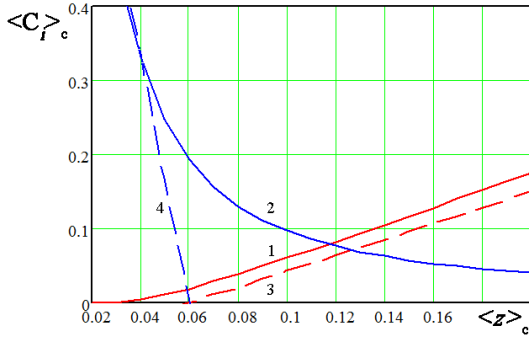


Рис. 7. Условные и безусловные средние концентрации горючего и окислителя в факеле горения пропана: 1 –  $\langle C_f \rangle_c$  и 2 –  $\langle C_o \rangle_c$  – расчёты по методу *ASMTurbC*; 3 –  $\langle C_f \rangle_{kc}$  и 4 –  $\langle C_o \rangle_{kc}$  – расчёты по методу *RANS* (квазиламинарный факел горения – пульсации не учитываются)

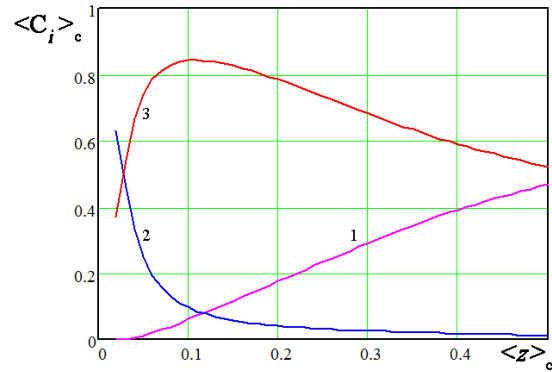


Рис. 8. Условные средние концентрации горючего 1, окислителя 2 и продуктов сгорания 3 в широкой области факела горения

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод *ASMTurbC* базируется на методе *ASMTurb* [5], который позволяет проводить автономное моделирование статистических характеристик каждой из перемежающихся сред турбулентного течения. Принципиальным отличием метода *ASMTurbC* является то, что он позволяет строить математические модели для расчёта статистических характеристик только для динамических полей течения турбулентной жидкости с неоднородной концентрацией пассивной примеси, т.е. в области пересечения  $G_c$ . Построенная по методу *ASMTurbC* модель позволяет находить статистические характеристики восстановленной концентрации горючего  $z$  в зависимости от пространственных координат факела, в то время как использование *PDF*  $P_c(z)$  – находить условное среднее равновесных концентраций горючего и окислителя в зависимости от значений  $z$ .

Что касается теории моделирования неравновесных процессов горения, например, оксидов азота, то здесь требуется привлечение теории мелкомасштабной турбулентности. Однако в случае использования, например, теории А.Н. Колмогорова возникает проблема, связанная с зависимостью коэффициентов пропорциональности (например, в законе "двух-третей") от коэффициента внешней перемежаемости. Развитие теории А.Н. Колмогорова в условиях гидродинамической перемежаемости, включая перемежаемость диссипативной жидкости, представлено в работе [13].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### 1. Тестирование метода *ASMTurb*

Метод *ASMTurb* позволяет строить математические модели для условных статистических характеристик каждой из перемежающихся сред турбулентного течения. При этом полные средние находятся по статистическим соотношениям теории вероятностей. Для демонстрации эффективности этого метода представим результаты расчётов условного и полного среднего основных статистических характеристик, полученных по модели *ASMTurb* для зоны турбулентного смешения спутных потоков (рис. 9 – рис. 11). Здесь же представлены опытные данные [14] в зависимости от  $\eta = y/x$  с экспериментально найденным значением  $\eta_{0s} = -0.02$ . На рис. 12 для сравнения приведены результаты расчётов безусловного среднего статистических характеристик, выполненные по модели *RANS*.

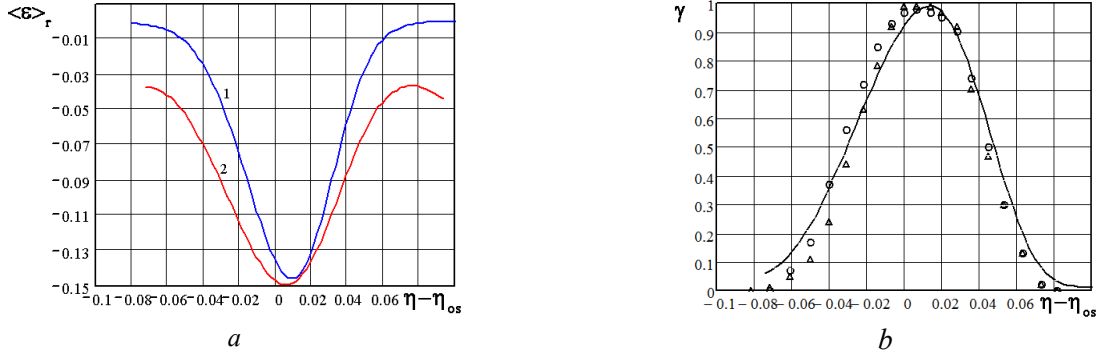


Рис. 9. *a* – распределение скоростей диссипации турбулентной энергии  $\langle \varepsilon \rangle_r$ : 1 –  $\langle \varepsilon \rangle_R$  – безусловное среднее RANS, 2 –  $\langle \varepsilon \rangle_t$  – условное среднее в турбулентной жидкости. *b* – распределение значений коэффициента перемежаемости  $\gamma = \langle \varepsilon \rangle_R / \langle \varepsilon \rangle_t$

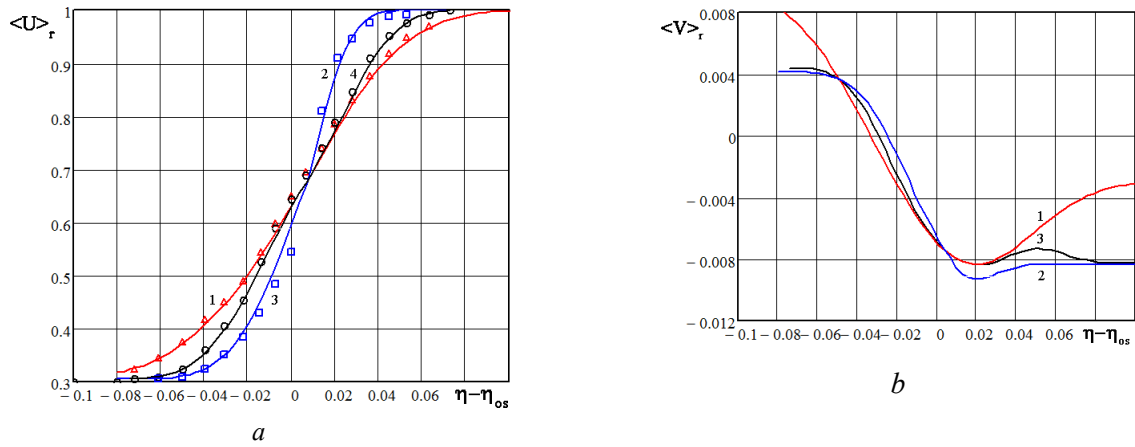


Рис. 10. Условные и полные средние динамических характеристик: *a* – продольная скорость  $\langle U \rangle_r = \langle u \rangle_r / u_1$ : 1 –  $\Delta - \langle U \rangle_t$ ; 2 –  $\square - \langle U \rangle_{n1}$ ; 3 –  $\square - \langle U \rangle_{n2}$ ; 4 –  $\circ - \langle U \rangle = \langle u \rangle / u_1$ . *b* – поперечная скорость  $\langle V \rangle_r = \langle v \rangle_r / u_1$ : 1 –  $\langle V \rangle_t$ ; 2 –  $\langle V \rangle_n$ ; 3 –  $\langle V \rangle = \langle v \rangle / u_1$ . Опытные данные для  $\langle V \rangle_r$  отсутствуют

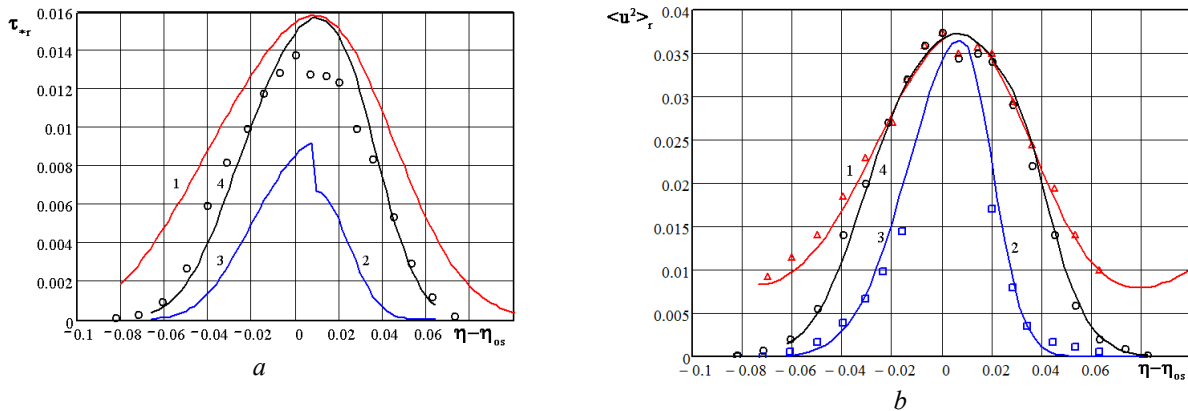


Рис. 11. Условные и полные средние пульсационных характеристик. *a* – напряжение трения  $\tau_r = -\langle u'v' \rangle_r / \Delta U^2$ : 1 –  $\tau_t$ ; 2 –  $\tau_{n1}$ ; 3 –  $\tau_{n2}$ ; 4 –  $\circ - \tau = -\langle u'v' \rangle_r / \Delta U^2$ . *b* – интенсивность пульсаций продольной скорости  $\langle u'^2 \rangle_r = \langle u'^2 \rangle_r / \Delta U^2$ : 1 –  $\Delta - \langle u'^2 \rangle_t$ ; 2 –  $\square - \langle u'^2 \rangle_{n1}$ ; 3 –  $\square - \langle u'^2 \rangle_{n2}$ ; 4 –  $\circ - \langle u'^2 \rangle = \langle u'^2 \rangle_r / \Delta U^2$ . Опытные данные для  $\tau_t$  и  $\tau_n$  отсутствуют

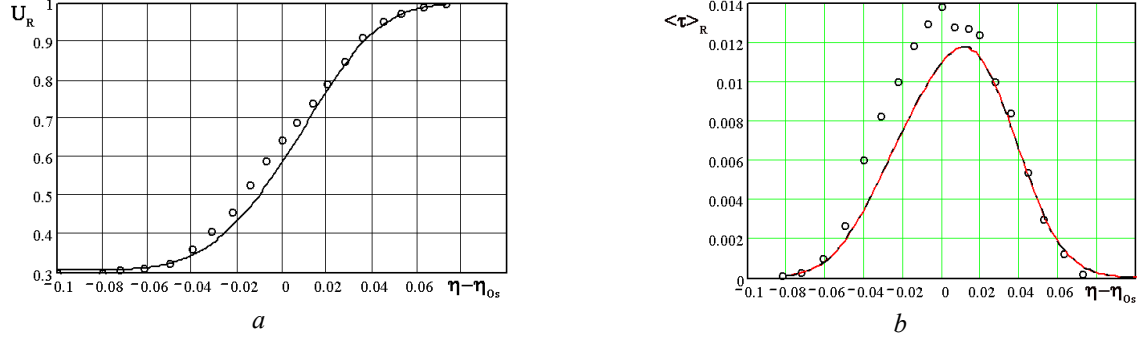


Рис. 12. *a* – профиль безусловного среднего продольной скорости  $\langle U \rangle_R = \langle u \rangle_R / u_1$ . *b* – распределение безусловного среднего касательного напряжения трения  $\tau_R = -\langle u'v' \rangle_R / \Delta U^2$

## 2. Способ трансформации модели *RANS* в модель *ASMTurb*

Метод *ASMTurb* допускает возможность трансформации известной модели *RANS* в модель *ASMTurb*. Проведём такую трансформацию на примере моделирования дефекта продольной скорости  $\langle u \rangle = U_\infty - \langle U \rangle$  турбулентного течения в дальнем следе за поперечно обтекаемым круговым цилиндром. Известная модель *RANS* [15] даёт решение для безусловного среднего дефекта этой скорости в виде  $\langle u \rangle_R / \langle u \rangle_{R_{max}} = \exp[-0.5(\xi/b_R)^2]$ , где  $b_R = 0.181$ ;  $\xi = y/l_0$ ;  $l_0 = \sqrt{(x - x_0)d}$ ;  $d$  – диаметр цилиндра. Представим это решение как

$$\langle u \rangle_r / \langle u \rangle_{r_{max}} = \exp[-0.5(\xi/b_r)^2], \quad (12)$$

где  $r = R$  – для безусловного среднего *RANS*,  $r = t$  – для условного среднего турбулентной и  $r = n$  – нетурбулентной жидкости. Эмпирические параметры  $b_t$  и  $b_n$  будем находить из следующих соображений. Привлечём статистическое выражение для полного среднего

$$\langle u \rangle = \gamma \langle u \rangle_t + (1 - \gamma) \langle u \rangle_n \quad (13)$$

и заметим, что в области течения турбулентной жидкости  $\gamma = 1$ , так что  $\langle u \rangle = \langle u \rangle_t$ . Причём с точки зрения случайных функций величина полного среднего  $\langle u \rangle$  эквивалентна величине безусловного среднего  $\langle u \rangle_R$ , т.е.  $\langle u \rangle = \langle u \rangle_R$ .

Подберём теперь параметр  $b_t$  в решении (12) для  $\langle u \rangle_t$  так, чтобы  $\langle u \rangle_t = \langle u \rangle_R$  в области течения со значением  $\gamma \cong 1$ . Такую же операцию проделаем для условного среднего нетурбулентной жидкости в области  $\gamma \cong 0$  с надлежащим подбором параметра  $b_n$  в решении (12) для  $\langle u \rangle_n$ , где  $\langle u \rangle_n = \langle u \rangle_R$ .

На рис. 13*a,b* представлены результаты такой трансформации. Расчёты выполнены в переменных [15]  $u_r = \langle u \rangle_r / \langle u \rangle_{r_{max}}$ ,  $\xi = y/l_0$  (рис. 13*a*) и [16]  $u_{Fdr} = A_F \langle u \rangle_r / \langle u \rangle_{r_{max}} * d/l_0 * 10^2$ ,  $y/d = l_0/d * \xi$ , где величина  $A_F = 1.18$ ,  $l_0/d = \sqrt{440}$  (рис. 13*b*).

Полное среднее определялось по формуле (13) при известном распределении значений коэффициента перемежаемости  $\gamma$ , которое подбиралось в виде аппроксимирующей опытные данные [16] кривой.

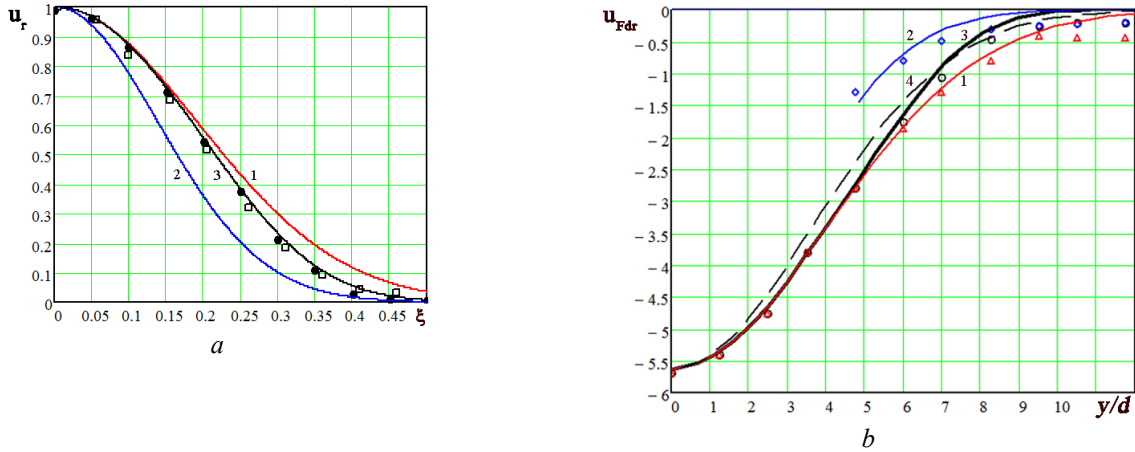


Рис. 13. Условные и полное средние дефекта продольной скорости: а– 1– $u_t$ , 2– $u_n$ , 3– $u$  – [17], □– [16]; б– 1– $\Delta$ – $u_{Fdt}$ ,  $b_{Ft} = 0.191$ ; 2– $\blacklozenge$ – $u_{Fdn}$ ,  $b_{Fn} = 0.14$ ; 3– $\circ$ – $u_{Fd}$ ; 4– безусловное среднее RANS

Как видно, результаты тестирования метода *ASMTurb* дают "удивительно" хорошую точность для моделирования турбулентного течения – расчёты условного и полного среднего статистических характеристик практически совпадают с опытными данными. Примечательно при этом, что модель *ASMTurb* построена на градиентных гипотезах замыкания самого простого типа и содержит всего два эмпирических параметра, связанных с расширением турбулентной зоны смешения вниз по потоку и с максимальным значением кинетической энергии турбулентности.

### Библиографический список

- 1 Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 288 с.
- 2 Pope S.V. Turbulent Flows. Cambridge University Press, 2000. 771 p.
- 3 Нужнов Ю.В. Условное усреднение уравнений Навье-Стокса и новый подход к моделированию перемежающихся турбулентных течений // Механика Жидкости и Газа. 1997. № 4. С. 24-31.
- 4 Nuzhnov Yu.V. Statistical theory and modeling of energy-containing structure of intermittent turbulent flows // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics and Computer Science series. 2010. V. 66, no. 3. P. 38-44.
- 5 Нужнов Ю.В. Метод автономного статистического моделирования турбулентных течений (*ASMTurb*): ИС 0010816 РК; опублик. 21.10.2013; бюл. № 1392.
- 6 Nuzhnov Yu.V. Method of the "autonomous" modeling of turbulent flows under intermittency conditions. Part 1- Problem formulation // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics and Computer Science Series. Almaty, 2009. V. 60, no. 1. P. 87-98.
- 7 Нужнов Ю.В. К теории турбулентного тепло- и массопереноса с учетом эффектов перемежаемости // Инженерно-Физический Журнал. 2011. Т. 84, № 1. С. 150-159.
- 8 Нужнов Ю.В. Моделирование турбулентного горения на основе условных PDF консервативного скаляра // Вестник КазНУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 46, № 3. С.119-130.
- 9 Burke S.P., Schumann T.E.W. Diffusion flames // Indust. Eng. Chem.. 1928. V. 20, no. 10. P. 988-1006.
- 10 Becker H., Hottel H., Williams G. The nozzle-fluid concentration field of the round turbulent

- free jet // Journal of Fluid Mechanics. 1967. V. 30, no. 2. P. 285-303.
- 11 Birch A.D., Brown D.R, Dodson M.G., Tomson G.R. The turbulent concentration field of a methane jet // Journal of Fluid Mechanics. 1978. V. 88, no. 3. P. 431-450.
- 12 Ebrahimi I., Gunter R., Haberda F. Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der Konzentration in isothermen Luft-Freistrahlen // Forsch. Ing.-Wes. 1977. V. 43, no. 2. P. 47-52.
- 13 Nuzhnov Yu.V. Some results of statistical modeling of the small-scale turbulence structure revealed with consideration of intermittency // IMECE2013. V. 7A "Fluids Engineering Systems and Technologies". San Diego, 2013. 7 p.
- 14 Spenser B.W., Jones B.G. Statistical investigation of pressure and velocity fields in the turbulence two-stream mixing layer // The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 1971. Paper 71-613.
- 15 Tennekes H., Lumley J.L. A First Course in Turbulence. MIT Press, 1972. 300 p.
- 16 Fabris G. Conditional sampling study of the turbulent wake of a cylinder // Journal of Fluid Mechanics. 1979. V. 94, no. 4. P. 673-709.
- 17 Townsend A.A. The Fully Developed Wake of a Circular Cylinder // Australian Journal of Scientific Research 2(4). 1949. P. 451-468.

### Информация об авторах

**Нужнов Юрий Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики, Казахский национальный университет имени аль-Фараби; заведующий лабораторией "Моделирование процессов горения", Институт проблем горения. E-mail: [nuzhnov@mail.ru](mailto:nuzhnov@mail.ru). Область научных интересов: статистическое моделирование турбулентности, турбулентного теплопереноса и горения.

### METHOD *ASMTurbC* OF AUTONOMOUS STATISTICAL MODELING OF A DIFFUSION TURBULENT COMBUSTION AND SOMETHING OF ITS TESTING

Yu.V. Nuzhnov  
Institute of Combustion Problems, Kazakhstan, Almaty City

A new principle of constructing mathematical models for processes of diffusion turbulent combustion is formulated and a method of autonomous statistical modeling of hydrodynamic characteristics of such processes (*ASMTurbC* method) is proposed. The distinguishing peculiarity of the method is the consideration of the intermittency effects of dynamic and scalar fields combined with the known method of "reduced concentration of fuel". The principal difference of the *ASMTurbC* method is the possibility to construct mathematical models for calculating the statistical characteristics (one-point ordinary and central moments) of dynamic and scalar fields of the flow only of turbulent fluid of the turbulent flow. Constructed by the *ASMTurbC* method models allow to obtain the conditional statistical characteristics of inhomogeneous field of the reduced fuel concentration (as a passive contaminant) and, as a result, to obtain concentrations of the major chemical reagents of fuel and oxidizer. The method testing is carried out on the example of construction of a mathematical model of a turbulent flame of the axisymmetric submerged combustion jet (propane). The results of testing are presented in the form of calculations of the main statistical characteristics of dynamic and scalar fields of the flame. It is shown that the calculations is made in good agreement with the known experimental data and do not require time-consuming.

Statistical modeling, diffusion turbulent combustion, *ASMTurbC* method, intermittency, mathematical model, turbulent and nonturbulent fluid.

### References

- 1 Kuznetsov V.R., Sabel'nikov V.A. Turbulence and Combustion. New York : Hemisphere

- Publishing, 1990. 362 p.
- 2 Pope S.B. Turbulent Flows. Cambridge University Press, 2000. 771 p.
  - 3 Nuzhnov Yu.V. Conditional Averaging of Navier-Stokes Equations and a New Approach to Modeling Intermittent Turbulent Flows. *Journal of Fluid Dynamics*, 1997. V. 4. P. 489-494.
  - 4 Nuzhnov Yu.V. Statistical theory and modeling of energy-containing structure of intermittent turbulent flows. *KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics and Computer Science series*, 2010, v. 66, no. 3, p. 38-44.
  - 5 Nuzhnov Yu.V. Metod avtonomnogo statisticheskogo modelirovaniya turbulentnih techeniy (*ASMTurb*) [Method of autonomous statistical modeling of turbulent flows (*ASMTurb*)]. IP RK, no. 0010816, 2013. (Publ. 21.10.2013, bul. no. 1392)
  - 6 Nuzhnov Yu.V. Method of the "autonomous" modeling of turbulent flows under intermittency conditions. Part 1- Problem formulation. *KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics and Computer Science Series*, 2009, v. 60, no. 1, p. 87-98.
  - 7 Nuzhnov Yu.V. On the theory of turbulent heat and mass transfer with allowance for intermittence effects. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2011. V. 84, no. 1. P. 160-170.
  - 8 Nuzhnov Yu.V. Modelirovanie turbulentnogo goreniya na osnove uslovykh PDF konservativnogo scalyara. *KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics and Computer Science series*, 2005, v. 46, no. 3, p. 119-130. (In Russ.)
  - 9 Burke S.P., Schumann T.E.W. Diffusion flames. *Indust. Eng. Chem.*, 1928. V. 20, no. 10. P. 988-1006.
  - 10 Becker H., Hottel H., Williams G. The nozzle-fluid concentration field of the round turbulent free jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967. V.30, no. 2. P. 285-303.
  - 11 Birch A.D., Brown D.R, Dodson M.G., Tomson G.R. The turbulent concentration field of a methane jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978. V. 88, no. 3. P. 431-450.
  - 12 Ebrahimi I., Gunter R., Haberda F. Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der Konzentration in isothermen Luft-Freistrahlen. *Forsch. Ing.-Wes.*, 1977. V. 43, no. 2. P. 47-52.
  - 13 Nuzhnov Yu.V. Some results of statistical modeling of the small-scale turbulence structure revealed with consideration of intermittency // IMECE2013. V.7A. "Fluids Engineering Systems and Technologies". San Diego, 2013. 7 p.
  - 14 Spenser B.W., Jones B.G. Statistical investigation of pressure and velocity fields in the turbulence two-stream mixing layer. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1971. P. 613.
  - 15 Tennekes H., Lumley J.L. A First Course in Turbulence. MIT Press, 1972. 300 p.
  - 16 Fabris G. Conditional sampling study of the turbulent wake of a cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 1979. Vol. 94, no. 4. P. 673-709.
  - 17 Townsend A.A. The Fully Developed Wake of a Circular Cylinder. *Australian Journal of Scientific Research* 2(4), 1949. P. 451-468.

### About the authors

**Nuzhnov Yuriy Vasilevich**, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Mechanics, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan; laboratory chief "Modeling of combustion processes", Institute of Combustion Problems. E-mail: [nuzhnov@mail.ru](mailto:nuzhnov@mail.ru). Area of research: statistical modeling of turbulence, turbulent heat and mass transfer and combustion.