Министерство образования и науки Республики Казахстан
Институт математики и математического моделирования

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан
и
Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященный 80-летнему юбилею академика НАН РК Станислава Николаевича Харина

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы 2019

УДК 51 (065)
ББК 22.1
Т 65

Рецензенты:

Кавокин А.А. кандидат физико-математических наук, доцент, ВНС Института математики и математического моделирования КН МОН РК;

Вербовский В.В. доктор физико-математических наук, профессор НИИ Дискретной математики и математической логики Университета Сулейман Демиреля.

Т 65 Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященный 80-летнему юбилею академика НАН РК Станислава Николаевича Харина. Алматы 3-5 апреля 2019 года: Тезисы докладов/ Издание - Институт математики и математического моделирования КН МОН РК. -Алматы: ИМММ, 2019. -120 с.

ISBN 978-601-332-299-5

Книга содержит тезисы докладов Традиционной международной апрельской математической конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященного 80-летнему юбилею академика НАН РК Станислава Николаевича Харина. Изложены основные проблемы математики, разрабатываемые в Казахстане: математическое моделирование и уравнения математической физики; дифференциальные уравнения, теория функций и функциональный анализ; алгебра, математическая логика и геометрия.

Книга предназначена для научных работников в области математики, преподавателей, студентов высших учебных заведений механико-математического профиля.

УДК 51 (063)
ББК 22.1

Рекомендовано к печати решением Ученого совета Института математики и математического моделирования. Протокол №2 от «26» февраля 2019 г.

ISBN 978-601-332-299-5

Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

Академик НАН РК Кальменов Т.Ш., председатель (ИМММ)
академик НАН РК Харин С.Н., со-председатель (ИМММ)
к.ф.-м.н. Сахауева М.А., ученый секретарь (ИМММ)
профессор Алексеева Л.А. (ИМММ)
профессор Асанова А.Т. (ИМММ)
профессор Базарханов Д.Б. (ИМММ)
член-корреспондент НАН РК Байжанов Б.С. (ИМММ)
профессор Бижанова Г.И. (ИМММ)
академик НАН РК Блиев Н.К. (ИМММ)
проф. Джайчибеков Н.Д. (ЕНУ им. Л.Н.Гумилева)
проф. Дженалиев М.Т. (ИМММ)
проф. Джумабаев Д.С. (ИМММ)
академик НАН РК Джумадильдаев А.С. (ИМММ)
ассоц. проф. Жакебаев Д.Б. (КазНУ им. аль-Фараби)
проф. Исахов А.А. (КазНУ им. аль-Фараби)
проф. Кангужин Б.Е. (КазНУ им. аль-Фараби)
доктор PhD Кожахмет К.Т. (Университет им. Сулеймана Демиреля)
член-корр НАН РК Кулпешов Б.Ш. (МУИТ)
проф. Муратбеков М.Б. (ТарГПУ)
проф. Нурсултанов Е.Д. (Казахстанский филиал МГУ им. М.В.Ломоносова)
академик НАН РК Ойнаров Р.О. (ЕНУ им. Л.Н.ГУмилева)
проф. Оспанов К.Н. (ЕНУ им. Л.Н.Гумилева)
академик НАН РК Отелбаев М. (ИМММ)
член-корр. НАН РК Садыбеков М.А. (ИМММ)
проф. Сарсенби А.М. (ЮКГУ им. М. Ауезова)
проф. Сихов М.Б. (КазНУ им. аль-Фараби)
член-корр. НАН РК Сураган Д. (Назарбаев Университет)
проф. Турметов Б.Х. (МКТУ им А. Ясави)
к.ф.-м.н. Хомпыш Х. (КазНУ им. аль-Фараби)

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:

член-корр. НАН РК Байжанов Б.С., председатель (ИМММ)
доц. Кавокин А.А., зам. председателя (ИМММ)
PhD Касабек С., ответственный секретарь (Университет им. Сулеймана Демиреля)
Алькенов М.И. (ИМММ)
Байжанов С.С.(ИМММ)
Бектемисова Г.А. (ИМММ)
Бименова Р.А. (ИМММ)
Дербисали Б.О. (ИМММ)
Джаббарханов Х.Ю. (СДУ)
Жакупбеков Т.Е. (ИМММ)
Каракенова С.Г. (ИМММ)
доц.Касенов С.Е. (КазНУ им. аль-Фараби)
проф.Кошанов Б.Д. (ИМММ)
к.ф.-м.н. Кулахметова А.Т. (ИМММ)
Музартбек Т. (ИМММ)
Мынбаева С.Т. (ИМММ)
Умбетбаев О.А. (ИМММ)
к.ф.-м.н. Шпади Ю.Р. (ИМММ)

Workshop «Problems of modeling of phenomena in electrical contacts»
Руководитель: академик НАН РК Станислав Николаевич Харин (ИМММ)
Со-руководитель: профессор Богдан Меджинский (Вроцлавский университет науки и техники)
Секретарь: PhD Самат Касабек (СДУ)

СЕКЦИИ:

S1: Алгебра, математическая логика и геометрия

Руководители:	Аскар Серкулович Джумадильдаев,
	Бектур Сембиевич Байжанов
Секретарь:	Олжас Асылбекович Умбетбаев

S2: Analysis: Дифференциальные уравнения, теория функций и функциональный анализ

Руководители:	Ерлан Даутбекович Нурсултанов,
	Махмуд Абдысаметович Садыбеков
Секретарь:	Бауыржан Онталапович Дербисалы

S3: Математическое моделирование и уравнения математической физики

Руководители:	Людмила Алексеевна Алексеева,
	Дулат Сыздыкбекович Джумабаев
Секретарь:	Сандугаш Табылдиевна Мынбаева

Содержание

1 Алгебра, математическая логика и геометрия

Geometric theory and congruence model

Zhanar ADIL

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: zhanar_adil@mail.ru

We say that a theory T is geometric if for any model $M \models T$ exchange property holds for the algebraic closure and T eliminates the quantifier $\exists^\infty$. A congruence relation is an equivalence relation on an algebraic structure that is compatible with the structure in the sense that algebraic operations done with equivalent elements will yield equivalent elements.

Let $\mathfrak{M} = \langle M, =, \Sigma\rangle$ be a structure in a complete theory T. This structure is expanded in a theory T^+ as following: $\mathfrak{M}^+ = \langle M \times N, =, \Sigma \cup \{E^2\}\rangle$, where E^2 is an equvalence relation.

$\mathfrak{M} \models P(a_1, \cdots, a_n)$;

$\mathfrak{M}^+ \models P((a_1, k_1), \cdots, (a_n, k_n))$.

The elements in the theory T^+ are pairs (a_i, k_i), where $a_i \in M$ and $k_i \in \mathbb{N}$. All predicates are true in equivalence classes. There is no algebraic closure in T^+ because infinite number of elements satisfies $P(x, a)$. Since any statement is deduced from a false statement, exchange property holds in this theory. The theory T^+ eliminates the quantifier $\exists^\infty$ because we can build as many automorphisms between any finite tuplesas we want, since it is possible to transfer classes into each other. Therefore, this theory is geometric.

Theorem 1. *For every model of a complete theory T there exists a geometric theory T^+, congruence model of which is a model of the given theory.*

Funding: The authors were supported by the grant AP05134992 of SC of the MES of RK.

Keywords: geometric theory, algebraic closure

2010 Mathematics Subject Classification: 03C50

References

[1] Hrushovski E., Pillay A. Groups definable in local fields and psedo-finite fields, in: *Israel Journal of Mathematics 85*, **1**:3 (1994), 203–262.

[2] Berenstein A., Vassiliev E. Geometric structures with a dense independent subset, in: *Selecta Mathematica*, **22**:1 (2016), 191–225.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Subshift with holes

Nazipa AITU[1,a],

[1] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]nazipa.aitu@sdu.edu.kz,

Given a 2x2 transition matrix A, Let $\sum_A$ be the infinite binary words consisting digits 0,1 subject to the transition matrix A. We define shift map $\sigma : \sum_A \longrightarrow \sum_A$ via $\sigma(a_1, a_2, ...) = a_2 a_3......$ Let π be a map from $\sum_A$ to $[0,1)$ such that $\pi(a_1, a_2, ...) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$. Given an interval (hole) $H \subseteq [0,1)$ we define $W(H) = \{x \in [0,1) | \{2^n \cdot x\} \notin H, \forall n = 0, 1, 2, ...\}$. In this talk we consider various holes and try to classify situations when W(H) uncountable. This is a joint work with S.Kadyrov that generalizes some of the results from [1], [2].

Keywords: Subshift, Cardinality of a set, Dinamical systems.

References

[1] Agarwal, N. (2017). The k-transformation on an interval with a hole. arXiv preprint arXiv:1704.02604.

[2] Glendinning, P. and Sidorov, N. (2015). The doubling map with asymmetrical holes. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 35(4), 1208-1228.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Some generalization of notion of algebraic independence

Bektur BAIZHANOV[1,a], Sayan BAIZHANOV[2,b] Daurenbek ORYNBASAROV[3,c]

[1,2,3]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan,*
[2]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,*
[3] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a] *baizhanov@hotmail.com*, [b]*sayan-5225@mail.ru*, [c]*daurenbekaga@gmail.com*

Let T be a complete theory T, A be a set of some $|A|^+$-saturated model M and p be a non-algebraic one-type over A. Let $\alpha \in p(M)$, i.e. α lies in the set of all realizations of p in M. An 2-A-formula $\phi(x, y)$ is called to be *p-preserving*, if $\phi(M, \alpha) \subset p(M)$. We call *algebraic closure of α in p* the set $alg_p(\alpha) := \{\beta \in p(M) | \beta \in alg(A\alpha)\}$. We call *quasi-neighborhood of α in p* the set

$$QV_p(\alpha) := \{\beta | \text{there is p-preserving 2-A-formula } \phi(x, y), \text{ such that } \beta \in \phi(M, \alpha)\}.$$

It follows from definition and properties of algebraic closure $alg_p(\alpha) \subseteq QV_p(\alpha)$ and $alg_p(\alpha) = alg(A\alpha) \cap p(M)$.

We say, that p-preserving $2-A$-formula $\phi(x, y)$ is called to be *$V-p$-preserving ($(p \iff p)$-preserving)*, if $\psi(x, y) := \phi(y, x)$ is p-preserving too. For example, $x = y$ is $V-p$-preserving for any non-algebraic one-type. Define *algebraic neighborhood of α in p* as the next set $alg_{V,p}(\alpha) := \{\beta \in alg_p(\alpha) | \alpha \in alg_p(\beta)\}$.

We define *neighborhood of α in p* as the set $V_p(\alpha) :=$
$\{\beta | \text{there exists V-p-preserving 2-A-formula } \phi(x, y), \text{ such that } \beta \in \phi(M, \alpha)\}$.

Notice that $alg_{V,p}(\alpha) \subseteq alg_p(\alpha)$, $alg_{V,p}(\alpha) \subseteq V_p(\alpha) \subseteq QV_p(\alpha)$.

There are complete theories distinguished these notions. For strongly minimal theories these four notions are coincided. For complete theories admitting exchange principle for algebraic closure in any one-type the notions algebraic closure in type and algebraic neighborhood in type are coincided, for example for ω-stable theories of finite rank of Morley, geometrical theories.

We say that $2-A$-formula $\phi(x, y)$ is *$(p \to q)$-preserving*, if $\phi(M, \alpha) \subset q(M)$, and is *$(p \iff q)$-preserving*, if $\phi(M, \alpha) \subset q(M)$ and $\phi(\beta, M) \subset p(M)$, for some (equivalently, any) $\alpha \in p(M, \beta \in q(M))$.

Let $\alpha \in p(M)$, $p \in S_1(A)$. Then define *quasi-neighborhood of α in q* and *quasi-neighborhood of α over the set A* as two next sets: $QV_q(\alpha) := \{\beta | \text{there is } (p \to q) - \text{preserving 2-A-formula } \phi(x, y), \beta \in \phi(M, \alpha)\}$, $QV(\alpha) := \cup_{q \in S_1(A)} QV_q(\alpha)$.

Notice that we can define *algebraic neighborhood of α over the set A* as the set

$$alg(A\alpha) \setminus alg(A) = \cup_{q \in S_1(A)} alg_q(A) =: alg(A\alpha | A).$$

Define *neighborhood of α in q* and *neighborhood of α over the set A* as the sets $V_q(\alpha) := \{\beta | \text{there is } (p \iff q) - \text{preserving 2-A-formula } \phi(x, y), \beta \in \phi(M, \alpha)\}$, $V(\alpha) := \cup_{q \in S_1(A)} V_q(\alpha)$.

Notice that for every complete theory for every set A for every two one-types p, q over A, for any $\alpha \in p(M)$, $alg_q(\alpha) = alg_{V,q}(\alpha)$ iff T satisfies exchange principle for algebraic closure.

Definition of V-independent tuple. For sequence $< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n >$, for $1 \le k < j \le n$ denote by $p_{k,j} := tp(\alpha_j | A\alpha_, ..., \alpha_k)$.

We say that sequence of different elements $< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n >$ of model M is V-independent, if for every $1 \le i < n$, for every $i < j \le n$ the following holds:

$$(i)\ \alpha_j \notin V_{p_{i-1,j}}(\alpha_i);\ (ii)\ \alpha_i \notin V_{p_{i-1,i}}(\alpha_j).$$

Notice that the condition (i) is equivalent to condition (ii) for small theories having the property: RK-relation (Rudin-Keisler) on the set of types is relation of equivalence, and in this situation we have the partition of $M \setminus alg(A)$ by relation of equivalence (in general, non-definable) $x \in V(y)$, here $V(y)$ over set A.

In our report we define (V, n)-gon and present the theorem that for arbitrary complete theory the existence of $(V, 3)$-gon implies for any $n(3 < n < \omega)$ the existence of (V, n)-gon.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On simultaneous omitting and realizing countable families of non-principal types

Bektur BAIZHANOV[1,a], Olzhas UMBETBAYEV[2,b], Tatyana ZAMBARNAYA[3,c]

[1,2,3] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@math.kz,* [b]*umbetbayev@math.kz,* [c]*zambarnaya@math.kz*

Let $\{p_n(\bar{x}_n) | n \in \omega\}$ and $\{q_n(\bar{y}) | n \in \omega\}$ be two families of complete non-isolated types over an empty set in a small theory T, such that for every natural number $n \in \omega$ there is a model $\mathfrak{M}_n \models T$ which realizes p_i and omits q_i for each $i \leq n$.

Question. Is there a countable model of the theory T which realizes every p_i and at the same time omits every q_i?

We give a criteria for existence of such a countable model, but this is not a complete answer to the question.

A complete countable theory T is said to be *small* if $|\bigcup\limits_{n<\omega} S_n(T)| = \omega$, where $S_n(T)$ is the set of all n-types over $\emptyset$. Notice that for every countable model $\mathfrak{M} = \langle M, \Sigma \rangle$ of a small theory T, for every finite $A \subset M$ the set of all 1-types over A is at most countable ($|S_1(A)| \leq \omega$), and there is a countable saturated model $\mathfrak{N} = \langle N, \Sigma \rangle$, such that $\mathfrak{M}$ is an elementary substructure of $\mathfrak{N}$. Each type $q_i(\bar{y}_i)$ can be represented as a set of formulas $\{H_{i,m} | m \in \omega\}$ such that $T \vdash \forall y_i (H_{i,m+1}(\bar{y}_i) \to H_{i,m}(\bar{y}_i))$ (a strictly decreasing family).

Let $p_n(\bar{x}_n)$ be a non-principal type over a finite subset A of some model of T. Denote by T_0 the logical closure of $T \cup \bigcup\limits_{n\in\omega} p_n(\bar{c}_n)$ in the signature $\Sigma(C) := \Sigma \cup \{c_n | n \in \omega\}$. Denote by $T_{0,n}$ the logical closure of $T_0 \cup \bigcup\limits_{j\leq n} p_j(\bar{c}_j)$ in the signature $\Sigma(C_n) := \Sigma \cup \{c_j | j \leq n\}$.

Theorem 1. *If for some $i, n, m \in \omega$ we have $T_0 \vdash \forall \bar{y}_i(\phi(\bar{y}_i, c_1, c_2, ..., c_n) \to H_{i,m}(\bar{y}_i))$, then $T_{0,n} \vdash \forall \bar{y}_i(\phi(\bar{y}_i, c_1, c_2, ..., c_n) \to H_{i,m}(\bar{y}_i))$.*

Let $\phi(\bar{y}_i, c_1, c_2, ..., c_n)$ $(\phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n))$ be a formula such for every $H_{i,m}(\bar{y}_i) \in q_i(\bar{y}_i)$ the following holds: $T_0 \vdash \forall \bar{y}_i(\phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n) \to H_{i,m}(\bar{y}_i))$. Then by Theorem 1 we have that $T_{0,n} \vdash \forall \bar{y}_i(\phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n) \to H_{i,m}(\bar{y}_i))$. Since $T_{0,n}$ has infinitely many models of T omitting $q_i(\bar{y}_i)$, $T_{0,n} \cup \{\neg\exists \bar{y}_i \phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n)\}$ has to be consistent and consequently, $T_0 \cup \{\neg\exists \bar{y}_i \phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n)\}$ has to be consistent. Moreover, for any $k \in \omega$ such that $i \leq n + k$, we have $\mathfrak{M}_{n+k} \models \neg\exists \bar{y}_i \phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n)$.

Let us extend the theory T_0. Take T_1 to be a logical closure of the set $T_0 \cup \{\neg\exists \bar{y}_i \phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n)$ formula of $\Sigma(C_n) | \exists i \in \omega, \forall m \in \omega, T_0 \vdash \phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n) \to H_{i,m}(\bar{y}_i)\}$. Notice that T_1 is consistent, because any finite subset of T_1 has infinite number of models of $\Sigma(C_n)$ for appropriate $n \in \omega$. Suppose T_1 is not complete. For every $n, i \in \omega$ we consider the following set of one-$\Sigma(C_n)$-formulas

$$\Gamma_{n,i} := \{\phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n) | \exists \bar{y}_i(\phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n)) \in T_{1,n},\ \forall m \in \omega, T_1 \cup \{\forall \bar{y}_i(\phi(\bar{y}_i, \bar{c}_n) \to H_{i,m}(\bar{y}_i))\} \text{ is consistent}\}.$$

For each $n, i, l, m \in \omega$ and for l-th formula $\phi_l \in \Gamma_{n,i}$ denote the next $\Sigma(C_n)$-sentence: $S_{n,i,l,m}(\bar{c}_n) := \forall \bar{y}_i(\phi_l(\bar{y}_i, \bar{c}_n) \to H_{i,m}(\bar{y}_i))$.

It follows from the definition of $H_{i,m}$ that for every $n, i, l \in \omega$, if $\Gamma_{n,i} \neq \emptyset$ and $l < |\Gamma_{n,i}|$, then $T \vdash \forall \bar{z}(S_{n,i,l,m+1}(\bar{z}) \to S_{n,i,l,m}(\bar{z}))$ and consequently, $T \vdash \forall \bar{z}(\neg S_{n,i,l,m}(\bar{z}) \to \neg S_{n,i,l,m+1}(\bar{z}))$.

Theorem 2. *Let a theory T'_n of the language $\Sigma(C_n)$ be a complete consistent extension of $T_{1,n}$. Then for some $i \in \omega$, every model of T'_n realizes q_i if and only if there is $i \in \omega$ with $\Gamma_{n,i} \neq \emptyset$ and there is $l < |\Gamma_{n,i}|$, $T_{1,n} \cup \{S_{n,i,l,m}(\bar{c}_n) | m \in \omega\} \subseteq T'_n$.*

Theorem 3. *Let a theory T' of the language $\Sigma(C)$ be a complete consistent extension of T_1. Then there is a model of T' omitting all types from the set of non-isolated complete types $\{q_n(\bar{y}) | n \in \omega\}$ if and only if for every $n, i \in \omega$, $\Gamma_{n,i} = \emptyset$, or for every $l \leq |\Gamma_{n,i}|$ there exists $m \leq \omega$ such that $\neg S_{n,i,l,m}(\bar{c}_n) \in T'$.*

Funding: The authors were supported by the grant AP05134992 of SC of the MES of RK.

Keywords: small theory, countable model, omitting types, prime model over a finite tuple, non-complete theories

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15

References

[1] Chang C.C., Keisler H.J. *Model Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier (1990).

[2] Marker D. *Model theory: an introduction*, Graduate texts in mathematics; 217, Springer (2002).

[3] Baizhanov B.S., Tazabekova N.S., Yershigeshova A.D., and Zambarnaya T.S. Types in small theories, in: *Mathematical journal*, **V.15**:1(55) (2015), 38–56.

— ⁂ —

Trichotomy of formulas in linearly ordered types

Bektur BAIZHANOV [1,a], Tatyana ZAMBARNAYA [2,b]

[1,2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*baizhanov@math.kz*, [b]*zambarnaya@math.kz*

Let $\mathfrak{N} \models T$ be a countable saturated model of a theory T which has a $\emptyset$-definable relation $<$ of linear order. Let A be a finite subset of N, and $p \in S_1(A)$ be a non-algebraic type.

1) An A-definable 2-formula $\varphi(x, y)$ is said to be p-**preserving**, if for every $\alpha \in p(N)$ there are $\gamma_1, \gamma_2 \in p(N)$, such that $\gamma_1 < \alpha < \gamma_2$, $\gamma_1 < \varphi(N, \alpha) < \gamma_2$, and $\varphi(N, \alpha) \cap p(N) \neq \emptyset$.

2) A p-preserving formula $\varphi(x, y)$ is **convex to the right (left)** if for every $\alpha \in p(N)$ the set $p(N) \cap \varphi(N, \alpha)$ is convex, α is the left (right) endpoint of $\varphi(N, \alpha)$, and $\alpha \in \varphi(N, \alpha)$.

3) A p-preserving convex to the right (left) formula $\varphi(x, y)$ is **equivalence-generating** if for every $\alpha, \beta \in p(N)$ such that $\mathfrak{N} \models \varphi(\beta, \alpha)$, $\mathfrak{N} \models \forall x(x \geq \beta \to (\varphi(x, \alpha) \leftrightarrow \varphi(x, \beta)))$ $(\mathfrak{N} \models \forall x(x \leq \beta \to (\varphi(x, \alpha) \leftrightarrow \varphi(x, \beta))))$.

4) A p–preserving convex to the right (left) formula $\varphi(x, y)$ is a **quasi-successor** on p if for every $\alpha \in p(N)$ there exists $\beta \in \varphi(N, \alpha) \cap p(N)$ such that $p(N) \cap (\varphi(N, \beta) \backslash \varphi(N, \alpha)) \neq \emptyset$.

Let $\varphi(x, y)$ be a p-preserving convex to the right (left) formula of a small theory T of (an expansion of) linear order. Then exactly one of the following holds:

1) $\varphi(x, y)$ is a quasi-successor on p, and T has 2^ω countable models;

2) $\varphi(x, y)$ is equivalence-generating;

3) there are $\alpha, \beta \in p(N)$ such that $(\varphi(N, \beta) \cap p(N)) \subsetneq (\varphi(N, \alpha) \cap p(N))$.

Funding: The authors were supported by the grant AP05134992 of SC of the MES of RK.

Keywords: linear order, type-preserving formulas

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C15

References

[1] Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories, *Proceedings of Informatics and Control Problems Institute*, Almaty (1996), 75–88.

[2] Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, *Mathematical Logic in Asia*, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, Singapore, World Scientific (2006), 31–40.

[3] Alibek A., Baizhanov B.S., Zambarnaya T.S. Discrete order on a definable set and the number of models, *Mathematical Journal*, **14**:3 (2014), 5–13.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

On quantifier elimination for the ordered set of real numbers with named Cantor's set

Aigerim DAULETIYAROVA[1,a], Viktor VERBOVSKIY[2,b]

[1] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
[2] *Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*d_aigera95@mail.ru,* [b]*viktor.verbovskiy@gmail.com*

In [1], John Goodrick began to study dp-minimal ordered structures, where, in particular, he proved that the elementary theory T structures $(\mathbb{R}, <, P)$, where P distinguishes Cantor's one third set, is dp-minimal. In order to prove this, J. Goodrick proved that this theory T admits quantifier elimination. In this paper, we present another proof of quantifier elimination for the given theory with respect to another signature.

A theory is *not dp-minimal* if there is a model M and formulas $\phi(x; y)$, $\psi(x; z)$ with $|x| = 1$, and elements a_{ij}, b_i, c_j such that for all i, j, i', j',

$$i = i' \iff M \models \phi(a_{ij}, b_{i'})$$
$$j = j' \iff M \models \psi(a_{ij}, c_{j'})$$

Otherwise, it is said to be dp-minimal (S. Shelah).

We consider the ordered set of real numbers $(\mathbb{R}, <, P, r, l, 0, 1)$, in which Cantor's set and two unary functions r and l are defined as follows.

If the number x does not lie in the interval $[0, 1]$, then $l(x) = r(x) = x$.

If the number x lies in the interval $[0, 1]$, then $l(x)$ is the maximum number from Cantor's set that is strictly less than x, if such exists, otherwise $l(x) = x$.

The function r is defined similarly. If the number x lies in the interval $[0, 1]$, then $r(x)$ is the minimum number from Cantor's set that is strictly greater than x, if such exists, otherwise $r(x) = x$.

Theorem *The elementary theory of* $(\mathbb{R}, <, P, r, l, 0, 1)$ *admits quantifier elimination.*

Funding: The authors were supported by the grant AP05132688 of SC of the MES of RK.

Keywords: o-minimal, dp-minimal, quantifier elimination, ordered group

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 35K05, 35K20

References

[1] Goodrick J. A monotonicity theorem for dp-minimal densely ordered groups in the journal, *Journal of Symbolic Logic*, **75**:1 (2010), 221–238.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Exceptional Tortkara algebras

Askar DZHUMADILDAYEV[1,a], Nurlan ISMAILOV[2,b], Farukh MASHUROV[3,c]

[1,2,3] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]*dzhuma@hotmail.com*, [b]*nurlan.ismail@gmail.com*, [c]*f.mashurov@gmail.com*

An algebra with identity

$$a(bc) = (ab + ba)c$$

is called (*rigth*)-Zinbiel. Let A be a Zinbiel algebra and $A^{(-)} = (A, +, [,])$ be its minus algebra, where $[a, b] = ab - ba$ for any $a, b \in A$, then it was proved in [1] that $A^{(-)}$ satisfies so called *Tortkara* identity

$$[[a, b], [c, d]] + [[a, d], [c, b]] = [J(a, b, c), d] + [J(a, d, c), b]$$

where $J(a, b, c) = [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b]$.

An anti-commutative algebra with Tortkara identity is called a Tortkara algebra. A Tortkara algebra T is said to be *special* if there exists a Zinbiel algebra A such that T is isomorphic to some subalgebra of $(A, +, [,])$, otherwise, *non-special*. Any Tortkara algebra on two generators is special [2]. It is known that any metabelian Lie algebra is Tortkara. Below we solve speciality problem for metabelian Tortkara algebras.

Theorem 1. *There exists a metabelian Lie algebra that is not special. If a metabelian Lie algebra M is special, then M is nilpotent and its nil-index is no more than* 6.

Corollary. *There exists a non-special metabelian Tortkara algebra.*

Keywords: Zinbiel algebras, Metabelian Lie algebras, Tortkara algebras.

2010 Mathematics Subject Classification: 17A30, 17A50.

References

[1] Dzhumadil'daev A.S. *Zinbiel algebras under q-commutators.* Journal of Mathematical Sciences. V. 144, No.2.(2007), 3909-3925.

[2] Dzhumadl'daev A.S., Ismailov N.A., Mashurov F.A.*Embeddable algebras into Zinbiel algebras via the commutator.* arxiv:1809.10550[math.RA], (2018).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On compositions of dense linear orders with structures and their algebras

Dmitry EMELYANOV[1,a], Beibut KULPESHOV[2,b], Sergey SUDOPLATOV[3,c]

[1] *Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*
[2] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Sobolev Institute of Mathematics, NSTU, NSU, Russia*
E-mail: [a]*dima-pavlyk@mail.ru*, [b]*b.kulpeshov@iitu.kz*, [c]*sudoplat@math.nsc.ru*

Algebras of binary formulas were studied in a series of papers both in general case [1, 2, 3] and for theories of ordered structures [4]. Here we consider both compositions of structures and compositions of theories, for dense linear orders and given structures, as well as related algebras.

Let $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ be structures of relational languages $\Sigma_{\mathcal{M}}$ and $\Sigma_{\mathcal{N}}$, respectively. We define the composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ of $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ satisfying $\Sigma_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]} = \Sigma_{\mathcal{M}} \cup \Sigma_{\mathcal{N}}$, $M[N] = M \times N$ and the following conditions:

1) if $R \in \Sigma_{\mathcal{M}} \setminus \Sigma_{\mathcal{N}}$, $\mu(R) = n$, then $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ if and only if $(a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{M}}$;

2) if $R \in \Sigma_{\mathcal{N}} \setminus \Sigma_{\mathcal{M}}$, $\mu(R) = n$, then $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ if and only if $a_1 = \ldots = a_n$ and $(b_1, \ldots, b_n) \in R_{\mathcal{N}}$;

3) if $R \in \Sigma_{\mathcal{M}} \cap \Sigma_{\mathcal{N}}$, $\mu(R) = n$, then $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ if and only if $(a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{M}}$, or $a_1 = \ldots = a_n$ and $(b_1, \ldots, b_n) \in R_{\mathcal{N}}$.

The theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M}[\mathcal{N}])$ is called the *composition* $T_1[T_2]$ of the theories $T_1 = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ and $T_2 = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$. By the definition, the composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is obtained replacing each element of $\mathcal{M}$ by a copy of $\mathcal{N}$.

The composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is called *E-definable* if $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ has an $\emptyset$-definable equivalence relation E whose E-classes are universes of the copies of $\mathcal{N}$ forming $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$. By the definition, each E-definable composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is represented as a E-combination [5] of copies of $\mathcal{N}$ with an extra-structure generated by predicates on $\mathcal{M}$ and linking elements of the copies of $\mathcal{N}$.

Notice that compositions preserve the transitivity of theories. Besides, if the composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is E-definable then the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{M}[\mathcal{N}])$ uniquely defines the theories $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$, and vice versa.

Let λ be a positive cardinality, $\mathcal{M}_\lambda = \langle M_\lambda, < \rangle$ be a dense linearly preordered set such that all maximal antichains A have the same cardinality λ, and $\mathcal{M}_\lambda/\sim$ does not have endpoints, where $x \sim y \Leftrightarrow x \not< y$ and $y \not< x$. It means that $\mathcal{M}_\lambda$ is obtained from $\mathcal{M}_1$ replacing each element by a copy of A.

Clearly, the theory $T_\lambda = \mathrm{Th}(\mathcal{M}_\lambda)$ is transitive, i.e., has unique 1-type.

The structure $\mathcal{M}_\lambda$ is linearly ordered if and only if $\lambda = 1$. In such a case the algebra $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_{\nu(p_0)}$ consists of three labels $0, 1, 2$ corresponding formulas $a \approx y$, $a < y$, and $y < a$, respectively. We have the following values for the operation $\cdot$: $u \cdot 0 = \{u\}$ for $u \in \{0, 1, 2\}$, $1 \cdot 1 = \{1\}$, $2 \cdot 2 = \{2\}$, $1 \cdot 2 = \{0, 1, 2\}$.

Now we put isomorphic structures $\mathcal{N}$, with a transitive theory, on each antichain A of $\mathcal{M}_\lambda$. The obtained structure is the E-definable composition $\mathcal{M}_1[\mathcal{N}]$ having a transitive theory. It can be considered as a variant of transitive arrangements of structures [6].

It was shown in [1, 2] that each algebra $\mathfrak{P}$ of binary isolating formulas of a fixed isolated type is an I-groupoid with non-negative labels and it can be realized by a structure $\mathcal{N}$, with a transitive theory, using a syntactic generic construction.

Considering the compositions $\mathcal{M}_1[\mathcal{N}]$, we obtain the following:

Theorem. *For any I-groupoid $\mathfrak{P}$, consisting of non-negative labels, there is a theory T with a type $p \in S(T)$ and a regular labelling function $\nu(p)$ such that $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_0[\mathfrak{P}]$.*

Funding: This research was partially supported by Grant AP05132546 of SC of MES RK and by Project No. 17-01-00531-a of Russian Foundation for Basic Researches.

Keywords: composition of structures, composition of theories, dense linear order.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C50, 03C64, 03C35, 05C65

References

[1] Sudoplatov S.V. Classification of Countable Models of Complete Theories, Novosibirsk : NSTU, 2018.

[2] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11** (2014), 380–407.

[3] Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11** (2014), 408–433.

[4] Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for binary formulas in countably categorical weakly o-minimal structures, *Algebra and Logic*, **56**:1 (2017), 13–36.

[5] Sudoplatov S.V. Combinations of structures, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, **24** (2018), 65–84.

[6] Sudoplatov S.V. Transitive arrangements of algebraic systems, *Siberian Mathematical Journal*, **40**:6 (1999), 1142–1145.

— ⁂ —

On compactness for closed families of theories

Nurlan MARKHABATOV[1,a], Sergey SUDOPLATOV[2,b]

[1] *Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*
[2] *Sobolev Institute of Mathematics, NSTU, NSU, Russia*
E-mail: [a]*nur_24.08.93@mail.ru*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

We consider a variant of compactness for families of theories.

Let $\overline{\mathcal{T}}_\Sigma$ be the set of all complete elementary theories of a relational language Σ.

For a set $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}_\Sigma$ we denote by $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ the set of all theories $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, where $\mathcal{A}$ is a structure of some E-class in $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$, $\mathcal{A}_E = \mathrm{Comb}_E(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$, $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i) \in \mathcal{T}$ [1]. As usual, if $\mathcal{T} = \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ then $\mathcal{T}$ is said to be *E-closed*.

For a set $\mathcal{T}$ of theories in a language Σ and for a sentence φ with $\Sigma(\varphi) \subseteq \Sigma$ we denote by $\mathcal{T}_\varphi$ the set $\{T \in \mathcal{T} \mid \varphi \in T\}$. Any set $\mathcal{T}_\varphi$ is called the *φ-neighbourhood*, or simply a *neighbourhood*, for $\mathcal{T}$, or the (φ-)*definable* subset of $\mathcal{T}$. The set $\mathcal{T}_\varphi$ is also called (*formula-* or *sentence-*)*definable* (by the sentence φ) with respect to $\mathcal{T}$, or (*sentence-*)*$\mathcal{T}$-definable*, or simply *s-definable*.

Proposition [2]. *If $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}_\Sigma$ is an infinite set and $T \in \overline{\mathcal{T}}_\Sigma \setminus \mathcal{T}$ then $T \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ (i.e., T is an accumulation point for $\mathcal{T}$ with respect to E-closure Cl_E) if and only if for any formula $\varphi \in T$ the set $\mathcal{T}_\varphi$ is infinite.*

If $\mathcal{T}$ is a family of theories and Φ is a set of sentences, then we put $\mathcal{T}_\Phi = \bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} \mathcal{T}_\varphi$ and the set $\mathcal{T}_\Phi$ is called (*type-* or *diagram-*)*definable* (by the set Φ) with respect to $\mathcal{T}$, or (*diagram-*)*$\mathcal{T}$-definable*, or simply *d-definable*.

A d-definable set $\mathcal{T}_\Phi$ is called *$\mathcal{T}$-consistent* if $\mathcal{T}_\Phi \neq \emptyset$, and $\mathcal{T}_\Phi$ is called *locally $\mathcal{T}$-consistent* if for any finite $\Phi_0 \subseteq \Phi$, $\mathcal{T}_{\Phi_0}$ is $\mathcal{T}$-consistent.

Notice that there are locally $\mathcal{T}$-consistent d-definable sets $\mathcal{T}_\Phi$ which are not $\mathcal{T}$-consistent. Indeed, let, for instance, $\mathcal{T}$ be an e-minimal family [3] which does not contain its unique accumulation point T. Then by the definition of accumulation point, $\mathcal{T}_T$ is locally $\mathcal{T}$-consistent whereas $\mathcal{T}_T = \emptyset$.

The following *Compactness Theorem* shows that this effect does not occur for E-closed families.

Theorem 1. *For any nonempty E-closed family $\mathcal{T}$, every locally $\mathcal{T}$-consistent d-definable set $\mathcal{T}_\Phi$ is $\mathcal{T}$-consistent.*

Theorem 2. *For any family $\mathcal{T}$, $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ consists of elements of $\mathcal{T}$ and of accumulation points realizing locally $\mathcal{T}$-consistent d-definable sets $\mathcal{T}_\Phi$.*

Theorem 3. *For any E-closed family $\mathcal{T}$, there is a d-definable family $\mathcal{T}_\Phi$ which is not s-definable if and only if $\mathcal{T}$ is infinite.*

Notice that Theorem 3 does not hold for families $\mathcal{T}$ which are not E-closed.

Funding: This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132349, AP05132546), the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002, and Russian Foundation for Basic Researches (Project No. 17-01-00531-a).

Keywords: compactness, closed set, family of theories.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C50

References

[1] Sudoplatov S.V. Combinations of structures, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, **24** (2018), 65–84.

[2] Sudoplatov S.V. Closures and generating sets related to combinations of structures, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, **16** (2016), 131–144.
[3] Sudoplatov S.V. Approximations of theories, arXiv:1901.08961v1 [math.LO], 2019.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

The prime number distribution: new approach

Alua SHAKENOVA[1,a]

[1] *Kazakh National University after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*shakenovaalua72@gmail.com,*

The prime numbers firstly were mentioned in Euclid's Elements, where were proven to be infinitely many. Another Greek ancient mathematician Eratosthenes constructed special sieve to determine whether the number was prime. The law of prime numbers has not been invented yet, and the magic formula for determining whether the number is prime has not been found, making the question open for centuries. When mathematicians understood that it is very hard to find the prime, they switched to finding the interval that contained prime numbers. The first conjecture was made by Bertrand, who proposed that for any integer n>3 there exists prime

$$n < p < 2n \tag{1}$$

This postulate was proven by Erdos in 1932-1934. The another conjecture is Legendre's hypothesis which states that for any number n there exists at least one prime number p

$$n^2 < p < (n+1)^2. \tag{2}$$

Another one is Opperman's which states that, for every integer n > 1, there is at least one prime number

$$n(n-1) < p < n^2 \tag{3}$$

and at least another prime

$$n^2 < p < n(n+1) \tag{4}$$

These upper mentioned conjectures remain open until today. In this paper, I formulate my own conjecture about the existence of 5(or 6) prime numbers (p1,p2,p3,p4,p5,p6) in the interval from n till square of n, these prime numbers satisfying one certain proviso. The conjecture is very hard to prove analytically therefore I employ Mathematical Statistics and Probability methods to analyze these specific prime numbers and find the function for their distribution.
Keywords: prime numbers, probability, generators, triples.

References [1] Rosen K.N. *Elementary Number theory and its applications*, Publisher,Addison-Wesley, Massachusets, Menlo Park, California (1986).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Geometric Structures, Neighborhoods, n-gons.

Nargiza TAZABEKOVA,

[1] *Suleyaman Demirel University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: tazabekova.nargiz@gmail.com

Definition 1. *Let T be a geometric theory, let $M \models T$ and let $\bar{a} = (a_0, a_1, ...a_{n-1}) \in M^n$ and $B \subset M$ be such that $dim(\bar{a}/B) = n - 1$ but any subset of $a_0, ...a_{n-1}$ is independent over B. We call such tuple an algebraic n-gon.*

A quasi-neighborhood is called definable if there is a formula $\psi(\bar{x}, \bar{y}$ such that $QV_{p,\mathcal{M}}(\bar{a}) = \psi(\bar{a}, M)$.

Theorem 1. *Let $\mathcal{M}$ be a saturated model of theory T, $A \subseteq M$, $p \in S(A)$, $\bar{a} \in p(M)$ and $QV_{p,\mathcal{M}}(\bar{a})$ is definable quasi-neighborhood such that $\bar{x} \in QV_{p,\mathcal{M}}(\bar{y})$ is not an equivalence relation.Then T has the strict order property.*

Keywords: geometric structures, neighborhoods, quasi-neighborhoods, algebraic n-gon

2010 Mathematics Subject Classification: 03C99

References

[1] Bernstein A., Vassiliev E. Geometric structures with dense independent subset. in the journal, *Selecta Mathematica*, **22**:191 (2016), 191–225.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Commutative algebra approach to Fujita problem

Kaisar TULENBAYEV[1,a], Abai KUNANBAYEV[2,b], S. D. NURZHAUOV[3,c], Ulzhan OSPANOVA[4,b]

[1] *Institute of Mathemitics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
[3] *School №126, Almaty*
[4] *Ed. center Success, Almaty*
E-mail: [a] tulen75@@hotmail.com, [b]abai.kaz67@mail.ru, [c]dzhamartovich@mail.ru, [d]ulzhan.ospanova.93@mail.ru

Article is dedicated to Fujita problem, one of algebraic geometry problem, which is still open since 1987.
X is smooth projective variety of dimension n. Fujita problem states:
Statement 1. *If X is minimal variety of general type, then linear system $|mK_X|$ has global generation when $m \geq n + 2$.*
Statement 2. *If A is ample and invertible sheave on X,then linear system $|mK_X + (n + 1)A|$ has global generation and $|mK_X + (n + 2)A|$ is very ample on X.*

For surfaces the Fujita conjecture follows from Reider's theorem.
For three-dimensional algebraic varieties Ein and Lazarsfeld in 1993 proved the first part of the Fujita conjecture, i.e. that m>4 implies global generation.
We use commutative algebra.
Commutative algebra approach is using tight closure and allows us to prove theorem in arbitrary characteristic without the use of desingularization or vanishing theorems.
We show that X not be smooth, F-rationality is sufficient.
Also line bundle L not be very ample, it is sufficient that the complete linear system $|L|$ defines a generically finite map to proper subvariety of a projective space of $dim|L|$.

Theorem 1. *X is projective and F-rational and $dimX = d$, complete linear system L defines a generically finite map to proper subvariety of a projective space of dim L then .... is globally generated unless $X = P^d$ and L is hyperplane bundle.*

Lemma 1. *The following conditions are equivalent*
1) reflexive sheave O_X is globally generated
2) there exists an integer N such that every element of local cohomology module of H_m^{d+1} of degree less
then N has non-zero multiple of degree $-n$.

Lemma 2. *If a local ring (R, m) of prime characteristic and dimension $d + 1$ is F-rational on its punctured spectrum then the tight closure of the zero module in the local cohomology module H_m^{d+1} has finite length.*

Lemma 3. *Let R be a normal N-graded ring over perfect field of prime characteristic p, and let I_1 and I_2 be ideals of R generated by homogeneous elements of degrees strictly less than δ and greater than or equal to δ respectively.Let z be an element of R homogeneous of degree δ. Then if $z \in (I_1 + I_2)^*$, than $z \in I_1^* + I_2$.*

Proof of the Main Theorem 1.
We can assume that section ring S is graded ring of prime characteristic.
X is F-rational follows S is F-rational on its punctured spectrum $SpecS_m$.
By Lemma 1 this means local cohomology module H_m^{d+1} has finite length.
So exists N such that tight closure of the zero lies in submodule, generated by elements of degree N and higher.
So if ν is homogeneous element of H_m^{d+1} of degree$-n < min(N, -d - 1)$ then ν is not tight closure of the zero.
We need to show that ν has non-zero multiple of degree -d.
Suppose this is not true, so S_{n-d} kills ν.
Because L globally generated, S admits a system of parameters of degree one $x_0, x_1, \cdots, x_d$.

$$H_m^{d+1} = Coker\phi : S_{x/x_0} \bigoplus S_{x/x_1} \cdots \bigoplus S_{x/x_d} \to S_x$$

where $x = x_0 x_1 \cdots x_d$

$$\phi(\frac{s_0 x_0^t}{x^t}, \cdots, \frac{s_d x_d^t}{x^t}) = \sum_i \frac{(-1)^i s_i x_i^t}{x^t}$$

.
It is well known fact that an element $[\frac{z}{x^t}]$ is in tight closure of the zero module H_m^{d+1}
if and only if z is in tight closure of the ideal $(x_0^t, x_1^t, \cdots, x_d^t)$ in S.
So we have an element of local cohomology module of type $[\frac{wz}{x^t}]$,
where $w \in (x_0^t, x_1^t, \cdots, x_d^t)^{n-d}$ is equal to zero.
Thus we assume $\nu = \sum \frac{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_d} x_0^{i_0} x_1^{i_1}, \cdots, x_d^{i_d}}{x^t}$ $w = x_0^{t-1-i_0} x_1^{t-1-i_1} \cdots x_d^{t-1-i_d} s$.
We have $degw = n - d$ and $w\nu = [\frac{\lambda s x^{t-1}}{x^t}] = [\frac{\lambda s}{x}] = 0$.
Hence $s \in (x_0^t, x_1^t, \cdots, x_d^t)^*$.
But since s has degree 1 then by Lemma 3 $s \in (x_0^t, x_1^t, \cdots, x_d^t)$.
Using that s is arbitrary element of degree 1 then we can choose s is not in linear system spanned by x_0, which is possible if $dimH^0(X, L) > d + 2$.
If L is very ample then $dimH^0(X, L) > d + 2$ except case $L = O(1)$.
The embedding of X given by complete linear system L would be isomorphism $X \to P^d$.

Funding: The first author is supported by the grant AP05131179-OT-18 of SC of the MES of RK.

Keywords: algebraic geometry, Fujita problem

2010 Mathematics Subject Classification: 11G20, 11G05, 14A22

References

[1] Iskovskikh V. A. On the Fujita hypothesis, *J. Math. Sci.*, **106**:5 (2001), 3286–3301. [2] Fujita T. On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive, *Adv. Stud. Pure Math.*, **1**:10 (1987), 167–178.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Methods of algebraic geometry in cryptography

Kaisar TULENBAYEV [1,a],

[1] *Institute of Mathemitics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a] tulen75@@hotmail.com,

Quantum computer will put an end to such algorithms as RSA, elliptic curves. Multivariable encryption is an alternative to classical encryption algorithms and resistant to attacks of a quantum computer. The multi-variable encryption algorithm uses polynomials in several variables with coefficients from a finite field. Multidimensional cryptography or multidimensional public key cryptography is a generic term describing asymmetric cryptographic schemes built on solutions of equations based on multidimensional polynomials over a finite field. The security of multidimensional cryptography is based on the assumption that solutions of a system of quadratic polynomials over a finite field, in the general case, is an NP-complete problem in a strong sense or simply NP-complete. The first attempt to build a cryptographic scheme based on multidimensional quadratic polynomials was made by Ong, Shnor and Shamir, where they offered a signature scheme based on the complexity of solutions of a quadratic equation in two variables. The development of multidimensional cryptographic schemes in the modern sense began in 1988 with the scheme C * Matsumoto-Imai [1] systems. The basic idea of вЃКвЃКmultidimensional cryptography is the choice of the system f (central transformation) of multidimensional quadratic polynomials in n variables, which can be easily inverted. After that, two random affine are selected, invertible transformations S and T in order to hide the structure of the central transformation f in an open key.

The public key of a cryptosystem is a composite quadratic transformation $P = S * f * T$, which, as it is supposed, hardly differs from accidental and therefore it is difficult to invert. The private key consists of (S, f, T) and therefore it allows you to invert P. Building a public key uses a finite field GF_q

The public key of multidimensional cryptography algorithms is the polynomial map $P : GF_n \to GF_m$

$P = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$ where f_i are second-degree polynomials.

For encryption and decryption, we assume that $m > n$. To encrypt the message $z = (x_1, \cdots, x_n)$, you must calculate $h = P(z)$. To decrypt the ciphertext h recursively computed: $x = S^{-1}(h)$, $y = f^{-1}(x)$ and $z = T^{-1}(y)$. The security of multidimensional cryptography algorithms is based on the complexity of the solution quadratic multidimensional systems of equations over finite fields and the isomorphism of polynomials. The solution of a random multidimensional quadratic system over a finite field is an NP-complete problem in a strong sense or just NP-full. Patarin and colleagues showed that the difficulty of solving the isomorphism problem of polynomials is at least is the same as the graph isomorphism.

Funding: The author is supported by the grant AP05133271 of SC of the MES of RK.

Keywords: cryptography, algeraic geometry,polynomials

2010 Mathematics Subject Classification: 11G20, 11G05, 14A22

References

[1] Ding Jintai ,Gower Jason E. , Schmidt Dieter S. *Multivariate Public Key Cryptosystems*, Springer, Berlin (2006).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On definable subsets of non-valuational dp-minimal ordered groups

Viktor VERBOVSKIY[1,a],

[1] *Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*viktor.verbovskiy@gmail.com,*

An ordered groups is said to be *non-valuational*, if no non-trivial convex subgroup is definable.

A theory is *not dp-minimal* if there is a model M and formulas $\phi(x;y)$, $\psi(x;z)$ with $|x| = 1$, and elements a_{ij}, b_i, c_j such that for all i, j, i', j',

$$i = i' \iff M \models \phi(a_{ij}, b_{i'})$$
$$j = j' \iff M \models \psi(a_{ij}, c_{j'})$$

Otherwise, it is said to be dp-minimal (S. Shelah).

Theorem *Let G be an ordered non-valuational group whose elementary theory is dp-minimal. Then any definable subset of G is a finite union of convex sets intersected with cosets of definable subgroups, under the assumption that B is of finite valuation.*

Funding: The authors were supported by the grant AP05132688 of SC of the MES of RK.

Keywords: o-minimal, dp-minimal, definable subset, ordered group

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 35K05, 35K20

— ⁂ ⁂ ⁂ —

∇-cl — atomic and algebraically prime sets

Aibat YESHKEYEV[1,a], Aigul ISSAYEVA[2,b]

Karaganda state university after named E.A. Buketov, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: [a]*modth1705@mail.ru,* [b]*isa_ aiga@mail.ru*

Let us define the main definitions which will we need along this abstract.

We have deal with some fixing Jonsson theory T, C is its semantic model and all sets which we consider will be the subset of C.

Definition 1. A set A will be called $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$ atomic in the theory T, if

1) $\forall a \in A, \exists\varphi \in \nabla_1$ such that for any formula $\psi \in \nabla_2$ follows that φ is complete formula for ψ and $C \models \varphi(a)$;

2) $cl(A) = M, M \in E_T$.

Definition 2. A set A will be called weakly $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$ is atomic in T, if

1) $\forall a \in A, \exists\varphi \in \nabla_1$ such that in $C \models \varphi(a)$ for any formula $\psi \in \nabla_2$ follow that $T \models (\varphi \to \psi)$ whenever $\psi(x)$ of ∇_2 and $C \models \psi(a)$;

2) $cl(A) = M, M \in E_T$.

Thus, we have generalized the concepts of (Γ_1, Γ_2) atomic model and weakly (Γ_1, Γ_2) atomic model through $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$ atomic and weakly $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$ atomic sets.

Let $i \in \{1, 2\}$, $M_i = cl(A_i)$, where A_i are (∇_1, ∇_2) $cl-$ atomic sets. $a_0, ..., a_{n-1} \in A_1$, $b_0, ..., b_{n-1} \in A_2$.

The following definition is defined very important subclass of inductive theories class.

Definition 3. The inductive theory T is called the existentially prime if: 1) it has a algebraically prime model, the class of its AP (algebraically prime models) denote by AP_T; 2) class E_T non trivial intersects with class AP_T, i.e. $AP_T \bigcap E_T \neq 0$.

From the definition of an algebraically prime set in the theory T follows that the Jonsson theory T which has an algebraically prime set is automatically existentially prime. It is easy to understand that an example of such theory will be the theory of linear spaces.

Definition 4. The set A is said to be $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$-core [1] in the theory T, if

1) A is (∇_1, ∇_2) a cl - atomic set in the theory T;

2) $cl(A) = M$, M is the core model of the T theory.

And finally, let us formulate some obtained results regarding these new concepts.

The following result is generalized and refined the theorem 1.2 from [2] among below class of theories.

Theorem 1. Let T - be complete for $\exists$-sentences a strongly convex Jonsson perfect theory and let A is $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$-atomic set in T.

Then $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \wedge (vi), (i) \Rightarrow (i)^* \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi), (ii) \Rightarrow (ii)^* \Rightarrow (vi)$, $(i)^* \Rightarrow (ii)^*$ and $(iv)^* \Rightarrow (iv)$, where:

(i) A is $(\Delta, \Sigma) - cl$-atomic set in theory T,

$(i)^*$ A is weakly $(\Delta, \Pi) - cl$-atomic set in theory T,

(ii) A is $(\Sigma, \Sigma) - cl$-atomic set in theory T,

$(ii)^*$ A is weakly $(\Sigma, \Pi) - cl$-atomic set in theory T,

(iii) A is weakly $(\Sigma, \Sigma) - cl$-atomic set in theory T,

(iv) $A \in AP_T$,

$(iv)^*$ A is core in theory T,

(v) A is weakly $(\Delta, \Delta) - cl$-atomic set in theory T,

(vi) A is weakly $(\Sigma, \Delta) - cl$-atomic set in theory T,

All undefined notions in this abstract one can be find in [1,2].

Funding: The authors were supported by the grant AP05133271 of SC of the MES of RK.

Keywords: semantic model, atomic set, algebraically prime set, core set.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C10, 03C45, 03C50

References

[1] Ешкеев А.Р.,Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Изд-во КарГУ, Караганда (2016).

[2] Baldwin J.T. Kueker D.W. *Algebraically prime models* / J.T.Baldwin, D.W. Kueker// Ann. Math. Logic. 1981, 20, p. 289-330.

— ※ ※ ※ —

Syntactic and semantic similarity of hybrids

Aibat YESHKEYEV[1,a], Nazerke MUSSINA[2,b] Gulzhan URKEN[3,c]

Karaganda state university after named E.A. Buketov, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: [a]modth1705@mail.ru, [b]nazerke170493@mail.ru, [c]guli_1008@mail.ru

Let T is an arbitrary Jonsson theory, then $E(T) = \cup_{n<\omega} E_n(T)$, where $E_n(T)$ is a lattice of $\exists$-formulas with n free variables, T^* is a center of Jonsson theory T, i.e. $T^* = Th(C)$, where C is semantic model of Jonsson theory T in the sense of [1].

Definition 1 [1]. Let T_1 and T_2 are Jonsson theories. We say, that T_1 and T_2 are Jonsson's syntactically similar, if exists a bijection $f : E(T_1) \longrightarrow E(T_2)$ such that:

1) restriction f to $E_n(T_1)$ is an isomorphism of lattices $E_n(T_1)$ and $E_n(T_2)$, $n < \omega$;

2) $f(\exists v_{n+1}\varphi) = \exists \varphi_{n+1} f(\varphi)$, $\varphi \in F_{n+1}(T)$, $n < \omega$;

3) $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Definition 2 [1].Two Jonsson theories T_1 and T_2 are called J semantically similar if their J semantic triples are isomorphic as pure triples.

Let us define the essence of the operation of the symbol $\boxdot$ for algebraic construction of models, which will be play important role in the definition of hybrids. Let $\boxdot \in \{\cup, \cap, \times, +, \oplus, \prod_F, \prod_U\}$, where $\cup$-union, $\cap$-intersection, $\times$-Cartesian product, $+$-sum and $\oplus$-direct sum, $\prod\limits_F$-filtered product and $\prod\limits_U$-ultraproduct.

Let $Th_{\forall\exists}(C_1 \boxdot C_2) = H(T_1, T_2)$, where C_1 is semantic model of theory T_1, C_2 is semantic model of theory T_2.

In the work [2] was introduced the notion of Jonsson hybrid of first (i.e. for the same signature of two Jonsson theories) and second types (i.e. for different signatures of two Jonsson theories) and considered the issues of categoricity for hybrids of the first type.

The following definition gives a hybrid of the first type [2].

Definition 3. [2] A hybrid $H(T_1, T_2)$ of Jonsson theories T_1, T_2 is said to be the theory $Th_{\forall\exists}(C_1 \boxdot C_2)$, if it is Jonsson. Herewith, the algebraic construction $(C_1 \boxdot C_2)$ is called a semantic hybrid of the theories T_1, T_2.

Note the following fact:

Fact 1. In order for the theory $H(T_1, T_2)$ to be Jonsson enough to $(C_1 \boxdot C_2) \in E_{H(T_1,T_2)}$.

Theorem 1.

A theory $H(T_1, T_2)$ is syntactically similar to $H(T_1', T_2')$ if the following are equivalent:

1) The theory T_1 is syntactically similar to T_1';

2) The theory T_2 is syntactically similar to T_2'.

Consequence 1.

If $H(T_1, T_2)$ is syntactically similar to $H(T_1', T_2')$, then $H(T_1, T_2)$ is semantically similar to $H(T_1', T_2')$.

Keywords: Jonsson theory, semantic model, hybrid, syntactic and semantic similarity.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C10, 03C45, 03C50

References

[1] Ешкеев А.Р.,Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Изд-во КарГУ, Караганда (2016).

[2] Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. Properties of hybrids of Jonsson theories, *Bulletin of the Karaganda University*, **4**:92 (2018), 99–105.

— ⁂ —

Enrichment of hybrids

Aibat YESHKEYEV[1,a], Nazerke MUSSINA[2,b] Galiya ZHUMABEKOVA[3,c]

Karaganda state university after named E.A. Buketov, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: [a]modth1705@mail.ru, [b]nazerke170493@mail.ru, [c]galkatai@mail.ru

Let T be an arbitrary Jonsson theory in the first-order language of the signature σ. Let $\mathcal{C}$ be a semantic model of the theory T. Let $A \subset C$ be a $\nabla - cl$- a subset in T theory, where $\nabla = \forall\exists$, $cl = acl$ and at the same time $acl = dcl$. Let $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$, $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Let $T_A^C = T \cup Th_{\forall\exists}(C, a)_a \in A \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{''P \subseteq''\}$, where $\{''P \subseteq''\}$ is an infinite number of sentences expressing the fact that the interpretation of the P symbol is existentially closed submodel in the language of the signature $\sigma_\Gamma(A)$ and this model is the definable closure of the set A. It is clear that the considered set of sentences is not necessarily a Jonsson theory, and this theory, generally speaking, is not complete. Through S_P^J we denote the set of all $\exists$-complete extensions of the theory T_A^C.

We need the following definitions in order to consider main result.

Definition 1. An enrichment of the Jonsson theory T is said to be permissible if any $\exists$-type in this enrichment is definable in the framework of considered stability.

Definition 2. The Jonsson theory is said to be hereditary, if in any of its permissible enrichment any extension of it in this enrichment will be Jonsson theory.

For considered theory the reason no to be the jonssoness is the lack of amalgam in some cases, i.e. there are counterexamples of enrichment by the predicate of the Jonsson theory, which do not allow an amalgam. So we will work in the case when theory is heridetary, i.e. there is an amalgam after enrichment of signature. Let T^* be the center of the Jonsson theory T_A^C and $T^* = Th(C')$, where C' is the semantic model of the theory T_A^C.

The following definitions were given in enriched signature by unary predicate P.

Definition 3. A Jonsson theory T is called $J - P - \lambda$ - stable, if $|S_P^J| \leq \lambda$ for any set A of cardinality $\leq \lambda$.

Definition 4. A Jonsson theory T is called $J - P$ - stable, if T is $J - P - \lambda$ stable for some λ.

Let us define the essence of the operation of the symbol $\boxdot$ for algebraic construction of models, which will be play important role in the definition of hybrids.

Let $\boxdot \in \{\cup, \cap, \times, +, \oplus, \prod\limits_F, \prod\limits_U\}$, where $\cup$-union, $\cap$-intersection, $\times$-Cartesian product, $+$-sum and $\oplus$-direct sum, $\prod\limits_F$-filtered product and $\prod\limits_U$-ultraproduct.

Definition 5. A hybrid $H(T_1, T_2)$ of Jonsson theories T_1, T_2 is said to be the theory $Th_{\forall\exists}(C_1 \boxdot C_2)$, if it is Jonsson. Herewith, the algebraic construction $(C_1 \boxdot C_2)$ is called a semantic hybrid of the theories T_1, T_2.

It is turn out that for permissible and heridetary Jonsson theories we can consider and transfer $J - P$-stability property for hybrids in enrichment.

Finally, the main result is the following theorem.

Theorem 1.

Let T_1 - Jonsson theory, $T_2 = Th_{\forall\exists}(C, P(C), c_x) \cup T_1$, C - semantic model of theory T_1, $P(C) = M \preceq_1 C$, $M \in E_{T_1}$, $c_x \notin \sigma_{T_1}$. If T_1, T_2 - $J - P$ - stable theories, then $H(T_1, T_2)$ - $J - P$ - stable.

All undefined notions in this abstract one can be find [2,3].

Keywords: Jonsson theory, semantic model, hybrid, stability, P - stable theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C10, 03C45, 03C50

References

[1] Ешкеев А.Р.,Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Изд-во КарГУ, Караганда (2016).

[2] Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. Properties of hybrids of Jonsson theories, *Bulletin of the Karaganda University*, **4**:92 (2018), 99–105.

[3] Yeshkeyev A.R., Zhumabekova G.E. Companions of fragments in admissible enrichments, *Bulletin of the Karaganda University*, **4**:92 (2018), 105–111.

— ⁂ —

The property of fragments of the $\nabla - cl$ Jonsson sets in the modular Jonsson theory

Aibat YESHKEYEV[1,a], Makhabat OMAROVA[2,b]

Karaganda state university after named E.A. Buketov, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: [a]modth1705@mail.ru, [b]omarovamt_963@mail.ru

Let T be a perfect, complete for existential sentences, Jonsson theory of signature σ.

Let $\sigma_\Gamma(A) = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$ is enrichment of the signature σ, where g is automorphism, P is unary predicate, c is new constant. The theory $T_\Gamma(A)$ is not necessarily complete. Suppose that it is Jonsson, i.e. it has a center $T^*_\Gamma(A)$. We consider all complete extentions of the center T^* of the theory T in the new signature σ_Γ, where $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$.

Let A is ∇-cl-Jonsson subset of C, C is semantic model of the theory T, $\nabla = \forall\exists$, $cl = acl$, with $acl = dcl$ and a pregeometry generated by cl on the set of all subsets of C is modular. $cl(X) = M$, $M \in E_T$. We consider the theory $Th_{\forall\exists}(M)$, which we call the fragment of the set A and denote by $Fr(A)$.

If $X = C$ and (X, cl) is a modular, then the Jonsson theory T is called modular.

We formulate the question of A.D. Taimanov, given that this problem was defined for complete theories.

Namely, in studying the properties of models of the first order complete theories information about the Boolean algebras (Lindenbaum-Tarsky algebras) $F_n(T)$ is usually, $n \in \omega$ [1]. In connection with these Boolean algebras $F_n(T)$, $n \in \omega$, the A.D. Taimanov's question is well known (can be found in the works [2]):

(*) What properties should have to have the Boolean algebras B_n, $n \in \omega$, to exist a complete theory T, such that B_n is isomorphic to $F_n(T)$, $n \in \omega$?

We will say that the question (*) is solved positively for the complete theory T, if there exists a sequence of Boolean algebras B_n, $n \in \omega$, such that B_n is isomorphic to $F_n(T)$, $n \in \omega$.

It is well known, that in some cases working with Jonsson theories we have the opportunity to restrict ourselves to existential formulas and existentially closed models of the considered Jonsson theory. In this case, instead of the Lindenbaum-Tarskian algebras $F_n(T)$, $n \in \omega$, one should consider lattices of existential formulas $E_n(T)$, $n \in \omega$. Thus, the above of A.D.Taimanov's question can be formulated as follows:

(**) What properties must have the lattices E_n, $n \in \omega$, that there was Jonsson theory T, such that E_n is isomorphic to $E_n(T)$, $n \in \omega$?

Similarly, we will say, that question (**) is solved positively for the Jonsson theory T, if there exists a sequence of lattices E_n, $n \in \omega$, that E_n is isomorphic to $E_n(T)$, $n \in \omega$.

In connection with these questions (*), (**) the following results were obtained:

Theorem 1. Let $Fr(A)$ be a perfect complete for existential sentences Jonsson theory of signature $\sigma_\Gamma(A)$.

Then the following conditions are equivalent:

1) a positive solution to question (**) with respect to the theory $Fr(A)^*$;

2) a positive solution to the question (*) with respect to the theory of T^c, where T^c is the center of the theory of T^*.

Theorem 2. Let a theory T be a perfect Jonsson strongly convex theory and let it be existentially prime. The set A is as in above and $Fr(A)$ is existentially prime perfect Jonsson strongly convex fragment.

Then the following conditions are equivalent:

1) $Fr(A)^*$ has a core model;

2) $Fr(A)^c$ has a core model;

3) theory T has a core model.

All undefined notions in this thesis one can be find [1,2,3].

Keywords: Jonsson theory, semantic model, existentially prime model, pregeometry, model companion, core model.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C10, 03C45, 03C50

References

[1] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. Йонсоновские теории и их классы моделей: моногр., Изд-во КарГУ, Караганда (2016).

[2] Мустафин Т.Г. О булевых алгебрах теорий, *Математика и физические исследования*, **1**:2 (1974), 80–84.

[3] Kueker D.W. Core structures for theories, *University of Maryland, College Park*, (1973), 155-171.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Об обогащениях слабо о-минимальных структур бинарными предикатами

Саян БАЙЖАНОВ[1,a], Бейбут КУЛПЕШОВ[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*sayan-5225@mail.ru*, [b]*b.kulpeshov@iitu.kz*

В настоящем докладе обсуждаются вопросы сохранения свойств при обогащениях счетно категоричных слабо о-минимальных структур, не являющихся 1-неразличимыми, произвольным бинарным предикатом. Найден критерий сохранения счетной категоричности для слабо о-минимального обогащения ранга выпуклости 1.

Настоящий доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных структур.

Пусть $A, B \subseteq M$. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ означает что $A < \{b\}$. Через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A < b$ $(b < A)$. Через $S_1^M(\emptyset)$ будем обозначать множество всех 1-типов теории $Th(M)$.

Ранг выпуклости формулы с одной свободной переменной введен в [2]. В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимого (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом выпуклых бесконечных классов.

Ранее в работах [3], [4] нами был исследован вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий унарными предикатами. В работе [5] исследован вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий отношениями эквивалентности. В работе [6] был исследован вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей 1-неразличимых счетно категоричных слабо о-минимальных теорий произвольным бинарным предикатом. Здесь мы исследуем вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий, не являющихся 1-неразличимыми, бинарными предикатами.

Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические. Будем говорить что тип p является *слабо ортогональным* типу q $(p \perp^w q)$, если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное расширение до полного 2-типа над A. Мы также пишем $p \perp^w_M q$, если типы p и q слабо ортогональны в теории $Th(M)$.

Теорема. *Пусть M — $\aleph_0$-категоричная слабо о-минимальная структура ранга выпуклости 1, $p, q \in S_1^M(\emptyset)$ — неалгебраические. Предположим что M' — слабо о-минимальное обогащение ранга выпуклости 1 структуры M бинарным предикатом $R(x, y)$, так что $p, q \in S_1^{M'}(\emptyset)$, для любого $a \in p(M')$ $R(a, M')$ выпукло, $R(a, M') \subset q(M')$ и $R(a, M')^- = q(M')^-$. Тогда $Th(M')$ — $\aleph_0$-категорична тогда и только тогда, когда $p \perp^w_M q$.*

Funding: Исследования поддержаны грантом КН МОН РК (AP05132546).

Ключевые слова: слабая о-минимальнаость, $\aleph_0$-категоричность, обогащение моделей, ранг выпуклости

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

Литература

[1] Macpherson H.D., Marker D., and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Transactions of The American Mathematical Society*, **352** (2000), 5435–5483.

[2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties, *The Journal of Symbolic Logic*, **63** (1998), 1511–1528.

[3] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш. Инвариантные свойства при обогащениях моделей вполне о-минимальных теорий, *Известия Национальной Академии наук Республики Казахстан, серия физико-математическая*, **311**:1, (2017), 65–71.

[4] Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh. Preservation of ω-categoricity in expanding the models of weakly o-minimal theories, *Siberian Mathematical Journal*, **59**:2, (2018), 207–216.

[5] Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh. Expanding 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal theories by equivalence relations, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **15**, (2018), 106–114.

[6] Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh. On expanding countably categorical weakly o-minimal theories by binary predicates, *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, **317**:1, (2018), 18–24.

— ⁕⁕⁕ —

Йонсондық теория мысалы

Қабылда ЖЕТПІСОВ[1,a], Ақнұр МҰҚАНҚЫЗЫ[2,b]

[1,2] *Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан*
E-mail: [a]*jetpisov_K54@mail.ru*,[b] *amukankyzy@gmail.com*

Сандық жиындарда нақты (комплекс) сандар өрісі теориясы йонсондық теорияның ең қарапайым мысалы болады. Мақалаға қатысты негізгі анықтамалар мен белгілеулерді [1], [2] қарауға болады.

Бұл теориядағы Йонсон шарттарының орындалатынын көрсетейік.

1. Рационал сандар өрісі $< Q; =, +, \cdot, -, :, 0, 1 >$ теориясының саналымды жай (атомдық) моделі болады.

2. Индуктивтілік шарты нақты сандар өрісін құру әдісі бойынша анық- талады.

Индуктивті кеңеюді құру келесі түрде орындалады. Егер r-иррационал сан және $Q(r)$ құрылған болса, онда оның кеңеюі $r \cdot r_1 (r \neq r_1)$ иррационал саны арқылы $Q(r \cdot r_1)$ кеңеюі түрінде анықталады.

3. Ең үлкен қуатты моделі бар: егер $|Q| = \omega$ болса, онда үлкен қуатты модель $|R| = 2^\omega$ ($|C| = 2^\omega$), мұндағы R-нақты сандар, (C-комплекс сандар) жиыны.

4. Теорияның үйлесімді қамтылу (енгізу) қасиетіне ие болуы (JEP-шарты): егер r_1, r_2 әртүрлі иррационал сандар және $r = r_1 \cdot r_2$ - иррационал сан болса, онда $Q(r_1) \preceq Q(r)$ және $Q(\sqrt{r_2}) \preceq Q(r)$.

5. Теорияның амальгама шартын қанағаттандыруы (AP-шарты): егер r, r_1, r_2, r_3 иррационал сандар және $r_1 \cdot r_2 = r_3$ болса, онда $Q(r) \preceq Q(r_1)$ және $Q(r) \preceq Q(r_2)$ болғанда, $Q(r_1) \preceq Q(r_3)$ және $Q(r_2) \preceq Q(r_3)$ болады. Бұл диаграмма коммутативті.

6. Теорияның семантикалық моделі R-нақты (C-комплекс) сандар өрісі.

7. Нақты (комплекс) сандар теориясы кемел йонсондық теория болады.

Қолданылған әдебиеттер

[1] Дж.Барвайс *Справочная книга по математической логике: в 4 частях*, Часть 1, Теория моделей, Наука (1982).

[2] Ешкеев А.Р., Шаматаева Н.К. *Кемел йонсондық теорияларды зерттеу тәсілдері, моногр*, ҚарМУ баспасы, Қарағанды,(2016).

— ⁕⁕⁕ —

О P-комбинациях упорядоченных теорий

Бейбут КУЛПЕШОВ[1,a], Сергей СУДОПЛАТОВ[2,b]

[1] *Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*

[2] *Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

E-mail: [a]*b.kulpeshov@iitu.kz,* [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

В серии работ [1–8] изучались свойства комбинаций теорий. В настоящем докладе мы исследуем P-комбинации упорядоченных теорий и находим необходимые и достаточные условия Эренфойхтовости для P-комбинации счетного числа линейно упорядоченных структур.

Если $\langle M_1, <_1\rangle$ и $\langle M_2, <_2\rangle$ — линейные порядки, то их *линейно упорядоченная непересекающаяся комбинация* (или *конкатенация*), обозначаемая через $M_1 + M_2$, есть линейный порядок $\langle M_1 \cup M_2, <\rangle$, где

$$a < b \Leftrightarrow ([a, b \in M_1 \wedge a <_1 b] \text{ или } [a, b \in M_2 \wedge a <_2 b] \text{ или } [a \in M_1 \wedge b \in M_2])$$

Пусть $\mathcal{M}_i := \langle M_i; <_{M_i}, \Sigma_i\rangle$ — линейно упорядоченная структура для каждого $i \in \omega$. Будем обозначать через $\mathcal{M}'$ линейно упорядоченную непересекающуюся P-комбинацию структур $\mathcal{M}_i$, $i \in \omega$, в языке $\{<, \Sigma, P_i^1\}_{i\in\omega}$, где $\Sigma = \cup_{i\in\omega}\Sigma_i$, и универсумом комбинации является $\bigcup_{i\in\omega} M_i$; $P_i(M') = M_i$ для каждого $i \in \omega$; либо $P_k(M') < P_m(M')$, либо $P_m(M') < P_k(M')$ для любых $k, m \in \omega$ с условием $k \neq m$.

Для любых $i, j \in \omega$ P-*интервалом* называется следующее множество $(P_i, P_j) := \{P_k \mid P_i(M') < P_k(M') < P_j(M')\}$. Аналогично мы можем определить P-интервалы $(P_i, P_j]$, $[P_i, P_j)$, $[P_i, P_j]$. Если $\mathcal{M}'$ не имеет наименьшего P-предиката, то мы можем определить P-интервал (∞, P_j), где $(\infty, P_j) := \{P_k \mid P_k(M') < P_j(M')\}$.

Рассматривая предикаты P_i вместо элементов в $\mathcal{M}'$, замечаем что сечения в $\mathcal{M}'$ заменяются P-*сечениями*, состоящими из разбиений $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ множества всех предикатов P_i с условиями $P_j(M') < P_k(M')$ для $P_j \in \mathcal{P}$ и $P_k \in \mathcal{P}'$. Будем говорить что P-сечения $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ являются *ортогональными*, если они реализуются независимо друг от друга.

Для P-сечения $\mathcal{C} = (\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ число попарно неизоморфных счетных моделей теории $Th(\mathcal{M}')$, в которых реализуется $\mathcal{C}$, а все P-сечения, являющиеся ортогональными сечению $\mathcal{C}$, не реализуются, называется $\mathcal{C}$-*спектром*. Напомним, что полная счетная теория называется *Эренфойхтовой*, если она не является $\aleph_0$-категоричной, и имеет лишь конечное число попарно неизоморфных счетных моделей.

Теорема. *Пусть $\mathcal{M}_i$ — счетно-категоричная линейно упорядоченная структура для каждого $i \in \omega$, $\mathcal{M}'$ — линейно упорядоченная непересекающаяся P-комбинация этих структур. Тогда $Th(\mathcal{M}')$ Эренфойхтова тогда и только тогда, когда не существует бесконечного разбиения $\mathcal{M}'$ на бесконечные P-интервалы, и $\mathcal{C}$-спектр конечен для каждого P-сечения $\mathcal{C}$.*

Следствие. *Пусть $\mathcal{M}$ — счетно-категоричная вполне о-минимальная структура, $\mathcal{M}'$ — линейно упорядоченная непересекающаяся P-комбинация счетного числа копий структуры $\mathcal{M}$. Тогда либо $Th(\mathcal{M}')$ имеет 2^ω счетных моделей, либо $Th(\mathcal{M}')$ является Эренфойхтовой.*

Funding: Исследования частично поддержаны грантом КН МОН РК (AP05132546) и проектом РФФИ (№17-01-00531-а).

Ключевые слова: упорядоченная теория, вполне о-минимальная теория, P-комбинация, $\aleph_0$-категоричность, Эренфойхтовость

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

Литература

[1] Sudoplatov S.V. Combinations of structures, *Reports of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, **24** (2018), 82–101.

[2] Sudoplatov S.V. Closures and generating sets related to combinations of structures, *Reports of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, **16** (2016), 131–144.

[3] Sudoplatov S.V. Families of language uniform theories and their generating sets, *Reports of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, **17** (2016), 62–76.

[4] Sudoplatov S.V. On semilattices and lattices for families of theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **14** (2017), 980–985.

[5] Sudoplatov S.V. Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **14** (2017), 135–150.

[6] Sudoplatov S.V. Relative e-spectra, relative closures, and semilattices for families of theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **14** (2017), 296–307.

[7] Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Families of theories of Abelian groups and their closures, *Bulletin of Karaganda University. Mathematics*, **92**:4 (2018), 72–78.

[8] Feferman S., Vaught R. The first order properties of products of algebraic systems, *Fund. Math.*, **47** (1959), 57–103.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Комплексная форма закона Гука линейно-упругого анизотропного тела

Николай МАРТЫНОВ

Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан
E-mail: nikmar50@mail.ru,

Многие естественные природные и искусственные материалы характеризуются анизотропией их упругих свойств. К ним относятся в частности композитные материалы, доля использования которых в повседневной и инженерной практике с каждым годом растет. Достаточно сказать, что в настоящее время 85 процентов изделий аэрокосмического комплекса приходятся на композитные материалы. Поэтому при решении различных прикладных, инженерных и теоретических задач механики сплошной среды необходима дополнительная, более полная информация о реологических свойствах упругих параметров закона Гука анизотропного линейно-упругого тела. Выяснению закономерностей упругих параметров и общей структуры линейного закона Гука анизотропных упругих сред посвящено большое число научных исследований. Подробный обзор этих исследований до 2008 года приведен, например, в [1]. Другие подобные исследования начиная с 2008 года можно найти, например, в РЖ механика и РЖ физика.

В настоящей работе приведена комплексная форма закона Гука анизотропного упругого тела, позволяющая громоздкие тензорные соотношения заменить на матричные, и в естественном матричном виде определять собственные вектора и собственные упругие модули. Определена структура матрицы упругих параметров и новые линейные инварианты, которые характеризуют сингонии и классы упругих параметров закона Гука. Теоретически отмечено, что определенным выбором новых линейных инвариантов можно получить новые искусственные композиты с уникальными свойствами, которых нет в природе.

Полученные результаты несомненно будут способствовать разрешению проблемы идентификации анизотропных упругих материалов и созданию композитов с уникальными свойствами.

Funding: Работа поддержана грантом BR05236656 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Ключевые слова: анизотропное тело, модули упругости, унитарная матрица, тензоры деформаций и напряжений, упругий потенциал

Литература

[1] Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И. *Анизотропия упругих свойств материалов.* ПМТФ. **19**:6 (2008), С. 131-151.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

О вычислимости центра нильпотентной группы без кручения

Джамалбек ТУСУПОВ[1,a], Назиф ХИСАМИЕВ[2,b]

[1,2] *Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a] *tussupov@mail.ru,* [b] *hisamiev@mail.ru*

Пусть $\mathcal{R}$-коммутативное и ассоциативное кольцо без делителей нуля, с единицей и группа

$$G =< \{(h_1, h_2, h_3) | h_i \in \mathcal{R}\},$$

где операция умножения определена так:

$$h \cdot g = (h_1 + g_1, h_2 + g_2, h_2 g_1 + h_3 + g_3).$$

Тогда любая вычислимая нумерация ν кольца $\mathcal{R}$ индуцирует вычислимую нумерацию ν^* нильпотентной группы G. Известно что любая нильпотентная группа без кручения ступени 2 изоморфна подгруппе группы G для некоторого кольца $\mathcal{R}$. Поэтому представляет интерес, когда центр подгруппы H группы G допускает вычислимую нумерацию.

Теорема 1. Пусть $(\mathcal{R}, \nu)$ - вычислимо нумерованное кольцо и H - вычислимо перечислимая неабелева подгруппа группы (G, ν^*) такая, что справедливы:

1. сущесвуют элементы $g, \varphi \in H$ такие, что справедливы:

$$g_2, \varphi_2 \neq 0, \ \varphi_2 \neq g_2$$

2. для любого элемента $h \in H$ элементы

$$h_g = (h_1, g_2 h_1, h_3), \ h_\varphi = (\varphi_1, g_2 \varphi_1, \varphi_3)$$

также принадлежат подгруппе H. Тогда центр C подгруппы H вычислим в (H, μ), где μ - нумерация подгруппы H, индуцированная нумерацией ν.

Теорема 2. Пусть (G, ν) - вычислимо нумерованная нильпотентная группа без кручения и в ней существует вычислимо перечислимая подгруппа H, содержащая центр C группы G и такая, что размерность r (H/C) конечна. Тогда центр C - вычислимая подгруппа в (G, ν).

Следствие 1. Пусть (G, ν) - вычислимая нильпотентная группа без кручения ступени n и подгруппа C ее центр. Если справедливо хотя бы одно из следующих условий:
1) существует максимальная абелева подгруппа A группы G такая, что размерность факторгруппы A/C конечна;
2) в группе G сущесвтуют элементы $g_1, \ldots, g_n$ такие, что размерность факторгруппы централизатора этих элементов по центру C конечна;
3) существует такое число $i \leqslant n$, что центр содержится в некотором центале $\gamma_i G$ и размерность факторгруппы $\gamma_i C/C$ конечна.

Тогда центр C - вычислимая подгруппа в (G, ν).

Теорема 3. Пусть (G, ν) - вычислимая нильпотентная группа без кручения и в ней существует выичслимо перечислимая абелева нормальная подгруппа A, содержащая центр

С группы G и такая, что факторгруппы G/A конечной размерности и не имеет кручения. Тогда центр С группы G - вычислимая подгруппа в (G, ν).

Следствие 2. Если в вычислимо нумерованной нильпотентой группе без кручения (G, ν) ступени 2 существует вычислимо перечислимая максимальная абелева подгруппа такая, что факторгруппа G/A имеет конечную размерность. Тогда центр С группы G - вычислимая подгруппа в (G, ν).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05132349 КН МОН РК.

Ключевые слова: вычислимая группа, центр, нильпотентная группа

Литература

[1] Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. *Конструктивные модели*, Научная книга, Новосибирск (1996).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Вопросы сводимости запросов баз данных над вполне о-минимальной областью определения

Алтынай ШАХИЗАДА[1,a], Бейбут КУЛПЕШОВ[2,b]

[1,2] *Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]shakhizada.96@gmail.com, [b]b.kulpeshov@iitu.kz

В настоящем докладе исследуется проблема сводимости расширенных запросов баз данных к ограниченным над вполне о-минимальной областью определения, имеющей менее чем 2^ω счетных моделей.

В реляционной модели баз данных [1, 2] состояние базы данных понимается как конечная совокупность отношений между элементами. Имена отношений и их арности фиксируются и называются *схемой базы данных.* Отдельная информация, хранимая в отношениях данной схемы, называется *состоянием базы данных.* Хотя реляционные базы данных были придуманы для конечных совокупностей данных, часто удобно предполагать что существует бесконечная *область определения* — например, целые или рациональные числа — так что элементы данных выбираются из этой области. Функции и отношения, определенные на всей области определения (например, $<$ и $+$), могут быть также использованы при запрашивании. Например, если в качестве языка запросов используется язык логики предикатов первого порядка, то запросы могут использовать как отношения базы данных, так и отношения области определения, при этом переменные изменяются на всей области определения.

Пусть M — бесконечная структура сигнатуры L. Здесь мы рассматриваем упорядоченные структуры. Это означает, что L включает бинарный реляционный символ $<$, интерпретация которого в M удовлетворяет аксиомам линейного порядка.

Мы фиксируем схему базы данных SC и вводим следующие обозначения: $L_0 = \{<\}, L' = L_0 \cup SC, L'' = L \cup SC$. Мы рассматриваем два языка для запрашивания. Запросы первого языка есть формулы сигнатуры L' — мы называем их *ограниченными.* Запросы второго языка есть формулы сигнатуры L'' — мы называем их *расширенными.* Запрос называется *генерическим*, если он сохраняется относительно перестановок универсума M, сохраняющего порядок. k-арный запрос Θ называется *локально генерическим над конечными состояниями*, если $a \in \Theta$ тогда и только тогда когда $\phi(a) \in \Theta(\phi(s))$ для любого частичного $<$-изоморфизма $\phi : X \to M$, где $X \subseteq M$, для любого конечного состояния s над X и для любого k-кортежа a в X.

Будем говорить что полная теория T имеет *Свойство Изоляции,* если существует кардинал λ такой, что для любого конечного множества A и для любого элемента a модели теории T существует $A_0 \subseteq A$ такое, что $|A_0| < \lambda$ и $\mathrm{tp}(a/A_0)$ изолирует $\mathrm{tp}(a/A)$.

В работе [3] была установлена следующая теорема:

Теорема 1. *Предположим что теория первого порядка структуры M имеет Свойство Изоляции. Пусть расширенный запрос Θ является локально генерическим над конечными состояниями. Тогда Θ эквивалентен над конечными состояниями ограниченному запросу.*

Все необходимые определения, связанные с вполне о-минимальностью, можно найти в [4]. Нами доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть T — вполне о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей. Тогда T имеет Свойство Изоляции.*

Следствие 3. *Пусть T — вполне о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей. Тогда каждый расширенный запрос, являющийся локально генерическим над конечными состояниями, эквивалентен над конечными состояниями ограниченному запросу.*

Funding: Второй автор был поддержан грантом AP05132546 КН МОН РК.

Ключевые слова: реляционная база данных, генерический запрос, вполне о-минимальность

2010 Mathematics Subject Classification: 68P15, 03C52, 03C64

Литература

[1] Codd E.F. A relational model for large shared data banks, *Communications ACM*, textbf13: 6 (1970), 377–387.

[2] Codd E.F. Relational completeness of database sublanguages, *Database systems*, Prentice-Hall, 1972, 33–64.

[3] Belegradek O.V., Stolboushkin A.P. and Taitslin M.A. Extended order-generic queries, *Annals of Pure and Applied Logic*, **97** (1999), 85–125.

[4] Кулпешов Б.Ш. Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях, *Известия НАН РК, серия физико-математическая*, **227** (2003), 26–31.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

2 Analysis: Дифференциальные уравнения, теория функций и функциональный анализ

Linear recovery of pseudodifferential operators on smooth function classes on m–torus

Dauren BAZARKHANOV[1,a],

[1] *Institute of Mathematics and Math Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]dauren-math@yandex.kz,

In the talk, a linear method will be constructed for the recovery of pseudodifferential operators on an m-dimensional torus with symbols from particular classes with the use of linear spectral information on the symbol of the operator and on the function (finite sets of their Fourier coefficients). Error bounds will be given for the error of recovery in the space $L_r(\mathbb{T}^m)$ of values of these pseudodifferential operators on elements of Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel function spaces for a number of relations between r and the parameters of the symbol classes and the function spaces (Theorem 1). A key role in the proof of the bounds is played by the boundedness of the pseudodifferential operators between appropriate Nikol'skii–Besov (Lizorkin–Triebel) function spaces (Theorem 2).

— ⁂ —

Symbol calculus of PDOs associated by the Jacobi operator

Bayan BEKBOLAT[1,a], Niyaz TOKMAGAMBETOV[2,b]

[1,2] *Al–Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[1,2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]bekbolat@math.kz, [b]niyaz.tokmagambetov@gmail.com

In this work, we consider pseudo-differential operator associated by the Jacobi differential operator. Such operator firstly considered in the paper [5] and it was investigated its symbols. In this paper we continue their investigation. We introduce new a class of symbols and obtain a composition theorem for this operator.

Funding: The authors were supported by the grant AP05130994 of SC of the MES of RK.

Keywords: Pseudo-differential operator, Jacobi differential operator, symbol

2010 Mathematics Subject Classification: 35S05

References

[1] Flensted-Jensen, M. Paley-Wiener type theorems for a differential operator connected with symmetric spaces, *Ark. Mat.*, 10 (1972), 143–162.

[2] Flensted-Jensen, M., Koorwinder, T.H. The convolution structure for Jacobi function expansions, *Ark. Mat.*, 11 (1973), 245–262.

[3] Flensted-Jensen, M., Koorwinder, T.H. Jacobi functions: the addition formula and the positivity of dual convolution structure, *Ark. Mat.*, 17 (1979), 139–151.

[4] Koorwinder, T.H. A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform, *Ark. Mat.*, 13 (1975), 145–159.

[5] Salem, N.B., Dachraoui, A. Pseudo-differential operators associated with the Jacobi differential operator, *J. Math. Anal. Appl.* 220 (1998), 365–381.

— ⁂ —

Investigation of the conjugation problem for the parabolic equations with incompatible initial and boundary data

Galina BIZHANOVA[a], Shattyk NURMUKHANBET[b]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]galina_math@mail.ru, [b]shattyk.95@list.ru

We study two-phase problem for the parabolic equations with time derivative on the conjugation condition. This problem describes the heat process in the substances with thin film on a boundary of conjugation. It is assumed that the process is considered from its very beginning. In this case the compatibility conditions of the boundary and initial data are not fulfilled.

There are appeared the singular solutions due to the non-concordance of the given functions on the boundary of conjugation.

We prove the existence and uniqueness of the solution consisting of the singular functions and a function from the Holder space. The singular solutions are obtained in the explicit form. The orders of the singularities of these solutions in the neighborhood of the conjunction and the initial moment of time are found.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

INTEGRAL OF CAUCHY TYPE AND SOHOSKY - PLEMELYA FORMULAS IN FRACTIONAL SPACES

Nazarbay BLIEV[1,a], Nurlan YERKINBAEV[2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, , Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]bliev.nazarbay@mail.ru, [b] nurlan.erkinbaev@mail.ru

In the work [1] the theory of the generalized analytical functions in B- spaces of Besov is constructed, which is a continuation to the extreme cases of the known results of I.N.Vekua [2] and L.Bers [3], from which follows the results below, in our opinion, they have independent values.

Let Γ be a closed Lyapunov contour bounding the domain G of the complex plane of the point $z = x + iy$.

Theorem. The function $f(t)$ belongs to the Besov space $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$, where r, p, θ satisfy to one of the conditions:

a) $r = 1/p, 1 < p < 2, \theta = 1,$

b) $r > 1/p, 1 < p < 2, 1 \leq \theta,$

v) $r > 1 - 1/p, p \geq 2, 1 \leq \theta.$

Let an inequality be held $r + 1/p - 1 < \nu \leq 1, \Gamma \in C'_\nu$. Then the integral of Cauchy type

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t}, t \in \Gamma, \qquad (1)$$

belongs to the space $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G), \alpha = r + \frac{1}{p} - 1$, under which

$$\|\Phi(z)\|_{B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)} \leq M\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\Gamma)}.$$

Here and further M denotes a positive constant (not necessarily the same), which is independent of the adjacent factor.

We note, that in the case a)$B^r_{p,1}(\Gamma)$ is embedded to the class of continuous (Heldering is not required) functions $C(\Gamma)$, in the case b) and c) $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ is embedded to the class of continuous by Helder functions $C_\beta(\Gamma)$ with the exponent $\beta, 0 < \beta < 1$ [4].

In conditions of the theorem the singular operator

$$S_\Gamma f = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

,

understood in the sense of Cauchy's principal value, is bounded in $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$

$$\|S_\Gamma f\|_{B^r_{p,\theta}(\Gamma)} \leq M\|f\|_{B^r_{p,\theta}(G)}. \qquad (2)$$

The integral of Cauchy type (1) has the boundary values $\Phi^+(t)$ and $\Phi^-(t)$ from inside and outside of the domain G, respectively, belonging to $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$, moreover

$$\|\Phi^{\pm}(t)\|_{B^r_{p,\theta}(\Gamma)} \leq M\|f(t)\|_{B^r_{p,\theta}(G)}$$

and Sohosky-Plemelya formulas are held

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

,

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

,

Therefore

$$S_\Gamma f = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t} = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$$

.

The results are completely applicable to the study of boundary value problems of linear conjugation in fractional spaces $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$, for example, in the following form: Find a piecewise holomorphic function $\Phi(z)$ with boundary line Γ having finite order at infinity, by the boundary condition on Γ.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$$

,

where $G(t)$ and $g(t)$ are prescribed on Γ functions of the class $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$, moreover $G(t) \neq 0$ almost everywhereΓ.

We note, that as it is indicated above, in the case a) theorem we get the space $B^{\frac{1}{p}}_{p,\theta}(\Gamma), 1 < p < 2$, which is embedded to the space of continuous functions $C(\Gamma)$, but it is not embedded to the space $C_\beta(\Gamma), 0 < \beta \leq 1$ of continuous by Helder functions (in the uniform metrics) [4]. As it is known [5], for any density $f(t)$ which is continuous on Γ the integral of Cauchy type, in general, is not continuous function in the closed domain $\bar{G} = G \cup \Gamma$, consequently, it has not continuous boundary values on Γ, satisfying to the Sohosky-Plemeya formulas.

Funding: The authors were supported by the grant AP05133283 of SC of the MES of RK.

Keywords: Sohosky-Plemelya, Helder functions, Fractional spaces

2010 Mathematics Subject Classification: 26A33, 30E20

References

[1] N. Bliev Generalized analytic function in fractional spaces , *USA, Boston, Addison, Wesley Longman Inc.* , **1**:2 (1997), 160 p. [2] I.N. Vecua Generalized analytic functions, Oxford, New York, Pergamon Press (1962), 668 p. [3] L.Bers heory of pseudo - analytic functions. New York, (1953) . [4] O.V. Besov, V.P. Ilin, S.M. Nikolskii Integral representations of function and embedding theorems, 1, 2. John Willey, New York (1978; 1979,), 345; 399 p. [5] N.I. Muskhelishvili Singular integral equations. Courier Dover Publications (2013), 464 p.

— ⁂ —

Duhamel principle for the time-fractional diffusion equation in unbounded domain

Meiirkhan BORIKHANOV

Al–Farabi Kazakh National University
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
E-mail: borikhanov@math.kz

In this work we formulate and prove fractional analogue of this famous principle for the the time-fractional diffusion equation

$$u_t\left(x,t\right)-\Delta_x D_t^{1-\alpha}u\left(x,t\right)=f(x,t),\ 0<\alpha<1,\ x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ t>0, \tag{1}$$

with the initial condition

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tag{2}$$

where D_t^{α} represents the following Riemann-Liouville fractional derivative of order α.

In [1,2], Umarov generalized the classical Duhamel principle for the Cauchy problem to general inhomogeneous fractional distributed differential-operator equations. Similar results for the time-fractional diffusion equation with Caputo derivative were obtained in [3].

Funding: The authors were supported by the grant No. AP05131756 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: Duhamel principle, diffusion equation, fractional derivative, Green's function.

2010 Mathematics Subject Classification: 31A30, 31B30, 35J40.

References

[1] S. Umarov, E. Saydamatov. A Fractional Analog of the Duhamel Principle. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2006, V. 9, No. 1, P. 57-70.

[2] S. Umarov. On fractional Duhamel's principle and its applications. *Journal of Differential Equations*, 2012 ,V. 252, P. 5217-5234.

[3] Yanhua Wen, Xian-Feng Zhou and Jun Wang. Stability and boundness of solutions of the initial value problem for a class of time-fractional diffusion equations. *Advances in Difference Equations*, 2017, V. 230. doi.org/10.1186/s13662-017-1271-6.

— ⁂ —

Inversion theorems for Fourier transforms

Kairat MYNBAEV[1,a], Carlos MARTINS-FILHO[2,b]

[1] *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *University of Colorado, Boulder, CO, USA*

E-mail: [a]*kairat_mynbayev@yahoo.com*, [b]*carlos.martins@colorado.edu*

Let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform and $\mathcal{F}^{-1}$ its inverse:

$$(\mathcal{F}F)(s)=\int_R e^{ist}dF(t),\ (\mathcal{F}^{-1}F)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-ist}dF(s).$$

Here F is a distribution function on the real axis. Inversion theorems deal with recovering F from its Fourier transform $\psi=\mathcal{F}F$. The simplest of them is the Fourier inversion theorem: if $f,\psi\in L_1$, then $\mathcal{F}^{-1}\psi=f$ almost everywhere. Problems arise when ψ is not integrable. In this area, there are three types of results: 1) recovering $F(x)$ when x is a continuity point of F, 2) recovering $F(x,y)=F(y)-F(x)$ for $x<y$ continuity points and 3) recovering jumps of F.

The Gil-Pilaez theorem [1] belongs to the first type. It does not require regularization of the integrand. In the other two cases regularization of the integrand is necessary and we obtain new inversion theorems, whose main advantage is the estimate of the convergence rate. They reveal the common structure of inversion theorems and the link between distribution function estimation and inversion theorems. Here we discuss only type 2) result.

Let $g_{x,y}(t)=\chi_{[x,y]}(-t)$ where $\chi_{[x,y]}$ is an indicator of the segment $[x,y]$. The Lévy [1] and Borovkov [2] theorems can be expressed in the format

$$F(y)-F(x)=\lim_{h\to 0}\mathcal{F}^{-1}\left[H(h\cdot)(\mathcal{F}g_{x,y})\psi\right](0). \tag{1}$$

Here multiplication by $H(h\cdot)$, where $h>0$ is a parameter, is used to regularize the integrand $(\mathcal{F}g_{x,y})\psi$ when it is not integrable. In the next theorem we give a class of functions H for which (1) holds.

Assumption 1. $G=G\left([a,b]\right)$ is a bounded continuous function of intervals $[a,b]\subset R$ or, more precisely, of an ordered pair (a,b), where $a<b$ with $\lim\limits_{b\to-\infty}G\left([a,b]\right)=0$, $\lim\limits_{a\to-\infty,\ b\to\infty}G\left([a,b]\right)=1$ and $\lim\limits_{a\to\infty}G\left([a,b]\right)=0$.

Define $\phi_G(N)$ as the largest of $\sup_{b<-N}|G([a,b])|$, $\sup_{a>N}|G([a,b])|$, $\sup_{a<-N,\ b>N}|G([a,b])-1|$ and note that Assumption 1 implies that $\phi_G(N)\to 0$ as $N\to\infty$. Further, let $\omega(x,\varepsilon)\equiv\sup_{0<h\le\varepsilon}\left(F(x+h)-F(x-h)\right)$, and note that if x is a continuity point of F, then $\omega(x,\varepsilon)\to 0$ as $\varepsilon\to 0$. If K is integrable on the real line and integrates to 1, then $G\left([a,b]\right)=\int_a^b K(t)dt$ satisfies Assumption 1.

Theorem 1. Let x,y be continuity points of F. a) Suppose H is integrable and such that the function $G([a,b])=\frac{1}{2\pi}\int_a^b(\mathcal{F}H)(v)dv$ satisfies Assumption 1. Then for $\delta\in(0,1)$ and all $h>0$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{e^{-ixt}-e^{-iyt}}{it}H(ht)\psi(t)dt-F(x,y)\right|\\ \le\ &\phi_G(h^{\delta-1})+(1+\sup_{a<b}|G([a,b])\left[\omega(x,h^\delta)+\omega(y,h^\delta)\right].\end{aligned}$$

b) In case $H=\chi_{[-1,1]}$ Assumption 1 is satisfied and the Lévy theorem [2, Thm. 3.2.1]

$$F(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-1/h}^{1/h}\frac{e^{-ixt}-e^{-iyt}}{it}\psi(t)dt$$

follows with the estimate of the convergence rate.

c) With the choice $H(t)=e^{-t^2}$ the Borovkov theorem [3] obtains

$$F(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{e^{-ixt}-e^{-iyt}}{it}e^{-h^2t^2}\psi(t)dt,$$

also with the convergence rate estimate.

Funding: The authors were supported by the grant AP05130154 of SC of the MES of RK.

Keywords: Fourier transform, inversion theorem

2010 Mathematics Subject Classification: 42A38, 42A99

References

[1] Gil-Pelaez J. Note on the inversion theorem, *Biometrika*, **38** (1951), 481–482.

[2] Lukacs E. *Characteristic Functions*, Hafner Publishing Co., New York, (1970).

[3] Borovkov A. A. *Teoriya Veroyatnosteĭ*, Izdat. "Nauka", Moscow, (1976).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Geometric Hardy and Hardy-Sobolev inequalities on Heisenberg groups

Bolys SABITBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
E-mail: b.sabitbek@math.kz

In this talk, we present the geometric Hardy inequality for the sub-Laplacian in the half-spaces on the stratified groups. As a consequence, we obtain the following geometric Hardy inequality in a half-space on the Heisenberg group with a sharp constant

$$\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^p d\xi \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^+} \frac{\mathcal{W}(\xi)^p}{dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+)^p} |u|^p d\xi, \ p>1,$$

which solves the conjecture by Larson. Also, we obtain a version of the Hardy-Sobolev inequality in a half-space on the Heisenberg group

$$\left(\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^p d\xi - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\mathbb{H}^+} \frac{\mathcal{W}(\xi)^p}{dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+)^p} |u|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \geq C \left(\int_{\mathbb{H}^+} |u|^{p^*} d\xi\right)^{\frac{1}{p^*}},$$

where $dist(\xi, \partial\mathbb{H}^+)$ is the Euclidean distance to the boundary, $p^* := Qp/(Q-p)$, $2 \leq p < Q$, and

$$\mathcal{W}(\xi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \langle X_i(\xi), \nu\rangle^2 + \langle Y_i(\xi), \nu\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

is the angle function. For $p = 2$, this gives the Hardy-Sobolev-Maz'ya inequality on the Heisenberg group.

This talk is based on the recent paper with Prof. Ruzhansky and Dr Suragan (https://arxiv.org/abs/1811.07181).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Oscillations in the equations with a operator of differentiation with respect to vector fields defined by a multiperiodic system and a Lyapunov's system

Zhaishylyk SARTABANOV[1,a], Bibigul OMAROVA[2,b]

[1,2] *K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: [a]sartabanov42@mail.ru, [b]bibigul_zharbolkyzy@mail.ru

We consider the system of differential equations

$$Dx = P(\tau, t, \zeta)x + f(\tau, t, \zeta), \tag{$*$}$$

with differentiation operator D of the form

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial \overline{\tau}} \right\rangle + \left\langle a(\tau, t), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle J\zeta + \psi(\zeta), \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\rangle$$

where x are unknown n-vector-function with respect to time $\tau \in R$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_l) \in R \times \ldots \times R = R^l$, and $t = (t_1, \ldots, t_m) \in R \times \ldots \times R = R^m$ and space $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \in R^4_r$ variables; $e_l = (1, \ldots, 1)$ is l-vector; $a = (a_1, \ldots, a_m)$ is a vector-function of variables $(\tau, t) \in R \times R^m$;

$J = diag(\lambda_1 I_2, \lambda_2 I_2)$ is matrix with two-dimensional symplectic unit I_2 and constant scalars λ_1, λ_2; $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_4)$ is a vector-function of variables $\zeta \in R_r^4 = \{\zeta \in R : |\zeta| \leq r = const\}$; P is a $n \times n$-matrix and f is a vector-function of independent variables $(\tau, t, \zeta) \in R \times R^m \times R_r^4$.

The vector field

$$\frac{dt}{d\tau} = a(\tau, t)$$

is (θ, ω)-periodic and smooth with respect to (τ, t) order $(0, e_m)$, and the field given by the equation

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = J\zeta + \psi(\zeta)$$

is a Lyapunov's analytical system in the r-neighborhood of the point $\zeta = 0$.

Relatively (θ, ω)-periodic with respect to (τ, t) and smooth with respect to (τ, t, ζ) order $(0, e_m, e_4)$ of the matrix P, we assume, that the matricant of the homogeneous system corresponding to the system (*) has the property of exponential dichotomy with respect to $\tau \in R$ with parameters independent of (t, ζ).

The vector function f is (θ, ω)-periodic with respect to (τ, t), continuous with respect to (τ, t, ζ) and continuously differentiable with respect to (t, ζ) in the domain of changing arguments.

Note that the system (*) is obviously independent of the l-vector-variable $\overline{\tau}$ and it will appear, when the solution of the problem is represented as a multi-periodic function. Therefore, the system (*) is autonomous with respect to $\overline{\tau} \in R^l$.

Investigates the problem of clarifying the conditions for the existence of a unique $(\theta, \overline{\theta}, \omega)$-periodic with respect to $(\tau, \overline{\tau}, t)$ solution $x(\tau, \overline{\tau}, t, \zeta)$ of the system (*) with the differentiation operator D.

Under some natural additional conditions, besides shown above, it was established that $l = 2$ and the system (*) allows the unique solution in the domain $(\tau, \overline{\tau}, t) \in R \times R^2 \times R^m, 0 < |\zeta| \leq r_0 \leq r$.

Keywords: multi-periodic solutions, operator of differentiation, vector field, autonomous system

2010 Mathematics Subject Classification: 34C46, 35B10, 35F35

References

[1] Lyapunov A.M. *The General Problem of the Stability of Motion*, Taylor-Francis, London-Washington (1992).

[2] Malkin I.G. *Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Gostekhizdat, Moscow (1956)(in Russian).

[3] Kharasakhal V.Kh. *Almost periodic solutions of ordinary differential equations*, Nauka, Alma-Ata (1970)(in Russian).

[4] Umbetzhanov D.U. *Almost multiperiodic solutions of partial differential equations*, Nauka, Alma-Ata (1979)(in Russian).

[5] Sartabanov Z.A. The multi-period solution of a linear system of equations with the operator of differentiation along the main diagonal of the space of independent variables and delayed arguments, *AIP Conference Proceedings*, 1880, 040020 (2017).

[6] Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. Multiperiodic solutions of a linear autonomous system with an operator of differentiation with respect to directions of the Lyapunov vector field, *The proceedings of the XVIII International Scientific Conference on Differential Equations "Yerugin's Reading-2018"*, **2** (2018), 45-46.

[7] Sartabanov Z.A.,Omarova B.Z. Multiperiodic solutions of autonomous systems with operator of differentiation on the Lyapunov's vector field, *AIP Conference Proceedings*, 1997, 020041 (2018).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

An inverse problem for the heat equation with Caputo fractional derivative

Daurenbek SERIKBAEV[1,a], Niyaz TOKMAGAMBETOV[2,b]

[1,2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125 Pushkin str., Almaty, 050010, Kazakhstan*

[1,2]*Al–Farabi Kazakh National University, 71 Al–Farabi ave., Almaty, 050040,*

E-mail: [a]serykbaev.daurenbek@gmail.com, [b]tokmagambetov@math.kz

In this paper we consider an anomalous diffusion equation with nonlocal integral boundary conditions. An inverse determination problem of the temperature distribution and the source term is considered. The inverse problem is to be well-posed in the sense of Hadamard whenever an overdetermination condition of the final temperature is given.

The purpose of this contribution is to study an inverse problem for the anomalous diffusion equation (see [1])

$$\mathcal{D}^{\beta}_{0+,t}u(x,t) + \mathcal{D}^{\alpha}_{a+,x}\mathcal{D}^{\alpha}_{b-,x}u(x,t) = f(x)$$

where $0 < \beta \leq 1, 1/2 < \alpha < 1, (t,x) \in (0,+\infty) \times [a,b]$. The problem of determination of temperature at interior points of a region when the initial and boundary conditions along with diffusion source term are specified are known as direct diffusion conduction problems. In many physical problems, determination of coefficients or right hand side (the source term, in case of the diffusion equation) in a differential equation from some available information is required; these problems are known as inverse problems.

Funding: The authors were supported by the MESRK grant AP05130994 of the Committee of Science, Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: fractional differential equation, inverse problem

References:

[1] Uchaikin V.V., 2013. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. V. 1, Background and Theory. V. 2, Application. Springer. V. 4, No. 3, P.332-339.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Spectral geometry: eigenvalue and norm inequalities

Durvudkhan SURAGAN

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

E-mail: durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

In this talk, we discuss some geometric eigenvalue and norm inequalities for the logarithmic potential and Riesz potential type operators. In this case, the main reason why the results are useful, beyond the intrinsic interest of geometric extremum problems, is that they produce a priori bounds for spectral invariants of operators on arbitrary domains. We demonstrate these in explicit examples. We also discuss nonlinear analogues of these problems related to the multidimensional MEMS type problems. This talk is based on our joint papers with Kalmenov T.Sh., Kassymov A., Rozenblum G., Ruzhansky M., Sadybekov M. and Wei D. [1]-[6].

Funding: The author was supported by the grant NU SPG of Nazarbayev University.

Keywords: spectral geometry, eigenvalue, logarithmic potential, Riesz potential, MEMS

2010 Mathematics Subject Classification: 35P99, 47G40, 35S15

References

[1] Kalmenov T.Sh. and Suragan D. To spectral problems for the volume potential, *Doklady Mathematics*, **80** (2009), 646–649.

[2] Kassymov A. and Suragan D. Some spectral geometry inequalities for generalized heat potential operators, *Complex Analysis and Operator Theory*, **11**:6 (2017), 1371–1385.

[3] Kassymov A., Sadybekov M. and Suragan D. On isoperimetric inequalities for the Cauchy-Robin heat operator, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **12** (2017), 114–119.

[4] Rozenblum G., Ruzhansky M. and Suragan D. Isoperimetric inequalities for Schatten norms of Riesz potentials, *Journal of Functional Analysis*, **271**:2 (2016), 224–239.

[5] Ruzhansky M. and Suragan D. Isoperimetric inequalities for the logarithmic potential operator, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **434**:2 (2016), 1676–1689

[6] Suragan D. and Wei D. On geometric estimates for some problems arising from modeling pull-in voltage in MEMS, *arXiv:1801.08199v2*, (2018)

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Blowing-up solutions of the time-fractional dispersive partial differential equations

Berikbol TOREBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
E-mail: torebek@math.kz

This paper is devoted to the study of initial-boundary value problems for time-fractional analogues of Korteweg-de Vries-Benjamin-Bona-Mahony- Burgers, Rosenau-Korteweg-de Vries-Benjamin-Bona-Mahony-Burgers, Ostrovsky and time-fractional modified Korteweg-de Vries-Burgers equations [1] on a bounded domain. Sufficient conditions for the blowing-up of solutions in finite time of aforementioned equations are presented. We also discuss the maximum principle and in uence of gradient non-linearity on the global solvability of initial-boundary value problems for the time-fractional Burgers equation. The main tool of our study is the Pohozhaev nonlinear capacity method [2]. We also provide some illustrative examples.

These results were carried out in collaboration with Professors B. Ahmad (Saudi Arabia), A. Alsaedi (Saudi Arabia) and M. Kirane (France) [3].

Funding: The authors is financially supported by a grant No.AP05131756 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan

Keywords: Caputo derivative, Burgers equation, Korteweg-de Vries equation, Benjamin-Bona-Mahony equation, Rosenau equation, Ostrovsky equation, blow-up.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 35B50; Secondary 26A33, 35K55, 35J60.

References

[1] T. Sarpkaya, M. Isaacson. Mechanics of wave forces on offshore structures. Van Nostrand Reinhold. (1981).

[2] E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev. A priori estimates and blow-up of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities. *Proc. Steklov Inst. Math.* 234, 1–362 (2001).

[3] B. Ahmad, A. Alsaedi, M. Kirane, B. T. Torebek. Blowing-up solutions of the time-fractional Burgers, Korteweg-de Vries, Benjamin-Bona-Mahony, Rosenau and Ostrovsky type equations. arXiv:1901.09246.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О дробном аналоге задачи Робена для уравнения Пуассона

А. АБДУВАИТОВ[1,a], Р. МАДИ[1,b]

[1] Международный казахско-турецкий университет имени А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: mega.abduroziq@mail.ru, [b]mr.rai-9493@mail.ru

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ −единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega$−единичная сфера, $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{r}$, $r\frac{d}{dr} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $u(x)$ гладкая функция в области $\overline{\Omega}$. Для любого $\alpha > 0$ следующее выражение

$$J^{\alpha}u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^r (r-\tau)^{\alpha-1} u(\tau)\, d\tau,\ x \in \Omega$$

называется интегральным оператором порядка α в смысле Римана-Лиувилля. В дальнейшем будем считать $J^0 u(x) = u(x)$.

Аналогично для любого $\alpha \in (0,1]$ следующее выражение

$$D^{\alpha}u(x) = \frac{d}{dr} J^{1-\alpha} u(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} u(\tau\theta)\, d\tau$$

называется производной порядка α в смысле Римана-Лиувилля [1]. Пусть $0 < \alpha,\ \beta < 1$. Введем обозначиния

$$B_{\alpha}^{-\beta} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 (1-s)^{\beta-1} s^{-\alpha} u(sx)\, ds, B^{\alpha}u(x) = r^{\alpha} B^{\alpha} u(x).$$

Пусть $0 \leq \alpha_m < ... < \alpha_1 < \alpha < 1,\ a_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., m,$

$$P_m(D) = D^{\alpha} + \sum_{j=1}^{m} a_j D^{\alpha j}.$$

В области Ω рассмотрим следующую задачу

$$-\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$P_m(D)\, u = g(x),\ x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Решением задачи (1)-(2) назовем функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $B_{\alpha}^{-\alpha} u(x) \in C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее уравнению (1) и краевому условию (2).

Заметим, что данная задача обобщает известную задачу Робена для уравнения Пуассона на дробные порядки граничных операторов. В случае уравнения Лапласа задача была изучена в работе [2].

Теорема. *Пусть* $0 \leq \alpha_m < ... < \alpha_1 < \alpha < 1$, $a_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., m$, $f(x) \in C^{\lambda+1}\left(\overline{\Omega}\right)$, $g(x) \in C(\partial\Omega)$, $0 < \lambda < 1$.*Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x) = B_{\alpha}^{-\alpha}[v](x),$$

где $v(x)$ − *решение следующей вспомогательной задачи*

$$-\Delta v(x) = F(x) = |x|^{-2} B^{\alpha}\left[t^2 f(t\theta)\right](x),\ x \in \Omega, \tag{3}$$

$$v\left(x\right)+\sum_{j=1}^{m}a_{j}B_{\alpha}^{-(\alpha-\alpha_{j})}v\left(x\right)=g\left(x\right),\ x\in\partial\Omega \qquad (4).$$

Вспомогательная задача (3),(4) решается сведением ее к интегральному уравнению Фредгольма.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05131268 КН МОН РК.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, задача Робена, дробная производная, интегральное уравнение,существование, единственность.

2010 Mathematics Subject Classification: 31B05,35A09,35C15

Литература

[1] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, North-Holland (2006).

[2] Turmetov B. Kh., Nazarova K.Dz. On one generalization of the Neumann problem for the Laplace equation, *AIP Conference Proceedings*, **1997**:020027 (2018), 020053-1–020053-7.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Осцилляционные свойства двухчленного дифференциального уравнения четвертого порядка

Айнагуль АДИЕВА[1,a], Рыскул ОЙНАРОВ[1,b]

[1] *Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]a.aina70@mail.ru, [b]o_ryskul@mail.ru

Пусть $I=(0,\infty)$, u - непрерывная и неотрицательная функция, а положительная функция v достаточно раз непрерывно дифференцируемая на интервале I и для любого $a>0$ функция v^{-1} интегрируемая на интервале $(0,a)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$(v(t)y''(t))''-u(t)y(t)=0,\ t\in I. \qquad (1)$$

Решением уравнения (1) назовем функцию $y:\ I\to R$ - дважды непрерывно дифференцируемую вместе с функцией $v(t)y''(t)$ на интервале I и удовлетворяющую уравнению (1) при всех $t\in I$.

Уравнение (1) называется (см.[1], стр.69) осцилляторным, если при любом $T>0$ найдется (нетривиальное) решение этого уравнения, имеющего правее T более одного двукратного нуля. В противном случае уравнение (1) называется неосцилляторным.

Мы осцилляционные свойства уравнения (1) исследуем в случае

$$\int_{T}^{\infty}v^{-1}(t)dt<\infty,\int_{T}^{\infty}v^{-1}(t)\left(\int_{T}^{t}r^{-1}(x)dx\right)^{2}dt=\infty. \qquad (2)$$

на основе известного вариационного принципа (см.[1], Теорема 28).

Пусть $\int\limits_{T}^{\sigma_T}v^{-1}(t)dt=\int\limits_{\sigma_T}^{\infty}v^{-1}(t)dt$. Введем обозначения

$$A_1(T,\sigma)=\sup_{T<y<\sigma_T}\int_{T}^{y}u(z)\left(y-z\right)^{2}dz\int_{y}^{\sigma_T}v^{-1}(t)dt,$$

$$\widehat{A}_1(T,\sigma)=\sup_{T<y<\sigma_T}\int\limits_T^y u(z)\Big(\sigma_T-z\Big)^2dz\int\limits_y^{\sigma_T}v^{-1}(t)dt,$$

$$A_2(T,\sigma)=\sup_{T<y<\sigma_T}\int\limits_y^{\sigma_T}u(z)dz\int\limits_T^y v^{-1}(t)\Big(y-t\Big)^2dt,$$

$$A_3(T,\sigma)=\int\limits_T^{\sigma_T}v^{-1}(t)\Big(\sigma_T-t\Big)^2dt\int\limits_{\sigma_T}^{\infty}u(z)dz,$$

$$A_4(T,\sigma)=\sup_{y>\sigma_T}\int\limits_y^{\infty}u(z)dz\int\limits_{\sigma_T}^y v^{-1}(t)\Big(t-\sigma_T\Big)^2dt,$$

$$A_5(T,\sigma)=\sup_{y>\sigma_T}\int\limits_{\sigma_T}^y u(z)\Big(z-\sigma_T\Big)^2dz\int\limits_y^{\infty}v^{-1}(t)dt,$$

$$A(T,\sigma)=\max_{1\le i\le 5}A_i(T,\sigma),\ \ \widehat{A}(T,\sigma)=\max\{\widehat{A}_1(T,\sigma),\ \max_{2\le i\le 5}A_i(T,\sigma)\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено (2). Если* $\lim\limits_{T\to\infty}\widehat{A}(T,\sigma)\le 1/24$, *то уравнение (1) неосцилляторно.*

Теорема 2. *Пусть выполнено (2). Если* $\lim\limits_{T\to\infty}A(T,\sigma)>1$, *то уравнение (1) осцилляторно.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05130975 КН МОН РК.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, осцилляторность, неосцилляторность, неравенство, наилучшая постоянная

2010 Mathematics Subject Classification: 34C10, 26D10

Литература

[1] Глазман Н.М. *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов*, Физматгиз, Москва (1963).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Смешанная задача для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений

Серик АЛДАШЕВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru

В [1] доказано существование и единственность классического решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. При этом установлено корректность задачи существенно зависящей от высоты рассматриваемой цилиндрической области.

Смешанная задача для этих уравнений в обобщенных пространствах изучены в [2,3].

Однако насколько известно автору, эта задача для вырождающихся эллиптических уравнений не исследованы.

В данной работе показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений. В статье используется метод, предложенный в работах [4,5].

Пусть D_α - цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ - длина вектора $x = (x_1,...,x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α, обозначим через Γ_α, S_α, S_0 соответственно.

В области D_α рассмотрим вырождающиеся многомерные эллиптические уравнения

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

где $g(t) > 0$, при $t > 0$, $g(0) = 0$, $g(t) \in C[0,\alpha] \cap C^2(0,\alpha)$, Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых $x_1,...,x_m,t$ координат к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i < \pi$, $i = 2,3,...,m-1$.

В качестве смешанной задачи рассмотрим задачу

Задача 1: Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C^1(\overline{D_\alpha}) \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_0} = \tau(r,\theta), \quad u_t\Big|_{S_0} = \nu(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \tag{2}$$

при этом $\tau(1,\theta) = \psi(0,\theta)$, $\nu(1,\theta) = \psi_t(0,\theta)$.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\alpha) \subset C(\overline{D_\alpha})$, $l \geq m+1$, $i = 1,...,m$, $c(r,\theta,t) \leq 0$, $\forall (r,\theta,t) \in D_\alpha$, $W_2^l(D_\alpha)$ -пространства Соболева.

Тогда справедлива

Теорема. *Если $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $l > \frac{3m}{2}$, то задача 1 имеет единственное решение.*

Funding: Авторы были поддержаны грантами AP05133239, AP05134615, BR05236656 КН МОН РК.

Ключевые слова: эллиптико-параболическое уравнение, задача Бицадзе-Самарского, пространства Соболева

2010 Mathematics Subject Classification: 35J56, 35J05

Литература

[1] Aldashev S.A. Well-posedness of the mixed problem for degenerate multi-dimensional hyperbolic equation, *Material international scientific conference, "Modern problems of mathematical modeling, computational methods and information technologies"*, RDGU, Rivne, Ukraine, 2018, pp. 14-15.

[2] Барановский Ф.Т. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости. *Ученые записки Ленингр. пед. института*, **183** (1958), С. 23-58.

[3] Краснов М.Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка. *Матем. сб.*, **49**:91 (1959), С. 29-84.

[4] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений. *Вестник НГУ, сер.:мат.,мех.,инф.*, **12**:1 (2012), С. 7-13.

[5] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся эллиптических уравнений. *Матем. заметки*, **94**:6 (2013), С. 936-939.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об одной системе дифференциальных уравнений

Тамаша АЛДИБЕКОВ[1,a], Майра АЛДЖАРОВА[2,b]

[1] КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан
[2] ИММ при КазНУ Аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан
E-mail: [a]tamash59@mail.ru, [b]a_maira77@mail.ru

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x) y_k + g_i(x,\, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n; \tag{1}$$

где функций $p_{ik}(x),\ i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n;$ непрерывные на промежутке $I \equiv [x_0, +\infty)$, функций $g_i(x,\, y_1, \ldots\, y_n),\ i = 1, \ldots, n;$ непрерывные по x на промежутке I, имеют непрерывные частные производные по $y_s,\ s = 1, \ldots, n;$ в области $\|y\| = \left(\sum\limits_{s=1}^{n} y_s^2\right)^{\frac{1}{2}} < h,\ y = colon\,[y_1, \ldots, y_n]\,,\ g_i(x, 0, \ldots, 0) = 0,\ i = 1, \ldots, n;$

Теорема 1. *Если для некоторого числа $\alpha > 0$ и для некоторой положительной непрерывной функции $\varphi(x)$, $\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(s)ds \uparrow +\infty$, при $x \geq x_0$ выполняются условия:*
1) имеют место неравенства: $p_{k,k}(x) - p_{k+1,k+1}(x) \geq \alpha\varphi(x),\ \alpha > 0,\ k = 1, \ldots, n-1;$ при $x \geq x_0;$
2) существуют пределы: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|p_{ik}(x)|}{\varphi(x)} = 0,\ i \neq k,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, n;$
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{q(x)} \int\limits_{x_0}^{x} p_{kk}(s)ds = \beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, n;$ и $\beta_1 < 0;$ $q(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(s)ds.$
4) Для $0 < \alpha < |\beta_1|,\ m > 1$ и $0 < \varepsilon < (m-1)\alpha$ имеет место $\int\limits_{x_0}^{x} e^{[\varepsilon + \alpha(1-m)][q(s) - q(x_0)]} ds < \infty;$
5) векторная функция $g(x, y) = colon[g_1(x,\, y_1, \ldots, y_n),\ \ldots, g_n(x,\, y_1, \ldots, y_n)]$ удовлетворяет неравенству

$$\|g(x, y)\| \leq K\|y\|^m,\ K > 0,\ m > 1;$$

где

$$\|g(x, y)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2(x, y_1, \ldots, y_n)\right)^{\frac{1}{2}};$$

тогда нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (1) экспоненциально устойчиво относительно $q(x)$ при $x \to +\infty$.

Рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_{1k}(x)y_k + g_1(x, y_1, \ldots, y_n)\right)\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \ldots + \\
\qquad + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_{nk}(x)y_k + g_n(x, y_1, \ldots, y_n)\right)\frac{\partial u_1}{\partial y_n} = 0 \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_{1k}(x)y_k + g_1(x, y_1, \ldots, y_n)\right)\frac{\partial u_2}{\partial y_1} + \ldots + \\
\qquad + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_{nk}(x)y_k + g_n(x, y_1, \ldots, y_n)\right)\frac{\partial u_2}{\partial y_n} = 0 \\
\\
\frac{\partial u_n}{\partial x} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_{1k}(x)y_k + g_1(x, y_1, \ldots, y_n)\right)\frac{\partial u_n}{\partial y_1} + \ldots + \\
\qquad + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_{nk}(x)y_k + g_n(x, y_1, \ldots, y_n)\right)\frac{\partial u_n}{\partial y_n} = 0;
\end{cases}
\tag{2}
$$

где $u_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, u_n(x, y_1, \ldots, y_n)$ неизвестные функции.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, *тогда линейная однородная система* (2) *имеет интегральный базис, примыкающий к нулю*

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05132615 КН МОН РК.

Ключевые слова: система, дифференциальная, линейная, нелинейная, устойчивость, экспоненциальная, решение

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20

Литература

[1] Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, Москва (1967).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Об одном методе построения решения аналога уравнения Бесселя

Турганай АЛИБЕК [1,a], Ш КУЛАХМЕТОВА [1,b]

[1] *Международный казахско-турецкий университет имени А.Ясави, Туркестан, Казахстан*
E-mail:[a] *turganai96_96@mail.ru*, [b] *shahimat95@gmail.com*

Настоящая работа посвящена к исследованию методов построения явных решений дифференциальных уравнений типа Бесселя. Пусть $\beta > 0, \mu_j \geq 0, j = 1, 2, ..., m$, $\lambda \neq 0$. Рассмотрим в области $t > 0$ дифференциальное уравнение вида

$$
D_\beta y(t) \equiv t^{-\beta}\left(t\frac{d}{dt} + \mu_1\right)\left(t\frac{d}{dt} + \mu_2\right)...\left(t\frac{d}{dt} + \mu_m\right)y(t) = \lambda y(t) + f(t) \tag{1}
$$

Уравнение вида (1) обобщает известное уравнение Бесселя и в случае $\mu_j = \beta \cdot \gamma_j, j = 1, 2, ..., m$, где γ_j- некоторые действительные числа исследовалась в работе [1].

Введем обозначение

$$
D_\beta^{-1}y(t) = t^\beta \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 \tau^{\mu_1+\beta-1}...\tau^{\mu_m+\beta-1}y(t\tau_1 \cdot ... \cdot \tau_m)d\tau_1...d\tau_m,
$$

$$
D_\beta^{-k} = \underbrace{D_\beta^{-1} \cdot D_\beta^{-1} \cdot ... \cdot D_\beta^{-1}}_{k}, k \geq 1.
$$

В настоящей работе мы предлагаем новый метод построения явного вида решения уравнения вида (1), которая основана на построении нормированных систем относительно пары операторов (D_β, λ). Подробнее об этом методе можно узнать в работе [2]. Обозначим

$$C_{\bar{\mu},k} = \prod_{i=1}^{m}\prod_{n=1}^{k}(n\beta + \mu_i - \mu_j)^{-1},\ k \geq 1, C_{\bar{\mu},0} = 1$$

Теорема 1. *Пусть* $\mu_j \geq 0, \beta + \mu_i - \mu_j > 0, i, j = 1, 2, ..., m$. *Тогда ряд*

$$y_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k C_{\bar{\mu},k} t^{k\beta-\mu_j}, j = 1, 2, ..., m$$

сходится равномерно на любом отрезке $[a, b] \subset (0, \infty), a, b < \infty$, *к нему можно почленно применять оператор* D_β. *Кроме того, функции* $y_j(t)$ *и* $D_\beta y_j(t)$ *принадлежат классу* $C(0, \infty)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mu_j \geq 0, \mu_i \neq \mu_j, i \neq j, \beta + \mu_i - \mu_j > 0, i, j = 1, 2, ..., m, f(t) = 0$. *Тогда функции* $y_j(t)$ *из (2) являются линейно независимыми решениями однородного уравнения (1) на* $(0, \infty)$.

Теорема 3. *Пусть* $\mu_j \geq 0, \mu_i \neq \mu_j, i \neq j, \beta + \mu_i - \mu_j > 0, i, j = 1, 2, ..., m, f(t) \in C[0, a],\ f_0(t) = D_\beta^{-1} f(t)$ *и функции* $f_k(t),\ k = 0, 1, 2, ...$ *определены равенством*

$$f_0(t) = D_\beta^{-1}[f](t), f_k(t) = \lambda^k D_\beta^{-k}[f_0](t),\ k = 1, 2, ...,$$

Тогда функция

$$y_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$$

является частным решением неоднородного уравнения (1) из класса $C[0, a]$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05131268 КН МОН РК.

Ключевые слова: уравнение Бесселя,метод нормированных систем, явное решение, частное решение.

2010 Mathematics Subject Classification: 45J05, 26A33, 33E12.

Литература

[1] Kiryakova V. Solving hyper-Bessel differential equations by means of MeijerЎs Gfunctions, I: Two alternative approaches, *Reports Strathclyde Univ., Math.Dept.*, **19**, (1992) 1–36.

[2] Turmetov B. Kh. On a method for constructing a solution of integro-differential equations of fractional order, *Electr.J. of Qual.Theory of Diff.Equat.* , **2018**:25 (2018), 1–14.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Об устойчивости разностно-динамических систем с запаздывающим аргументом

Каден БАПАЕВ[1,a], Самал БАПАЕВА[2,a], Сая СЛАМЖАНОВА[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан*

E-mail: [a]v_gulmira@mail.ru, [b]beksultan.82@mail.ru

В предлагаемой работе делаются попытки распространения второго метода Ляпунова на разностно-динамические системы (РДС) с запаздывающим аргументом [1-3]

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ...x_{n-m}. \tag{1}$$

РДС с запаздывающим аргументом (1) имеет решение, если заданы начальные значения $x_{-m}, x_{-m+1}, ..., x_{-1}, x_0$ и f – однозначная вектор-функция, определенная в области пространства $R^{k(m+1)}$ и это решение продолжимо при $n > 0$, если x_n не выходит за границы области определения f.

Предположим, что $f(0, ...0)$ и f удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам.

Определение. Тривиальное решение РДС (1) с запаздывающим аргументом называется устойчивым по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такая, что для любых x_{-j} $(j = \overline{0, m})$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{j=0}^{m} \|x_j\| < \delta$$

следует неравенство

$$\|x_n\| < \varepsilon \text{ для } \forall n > 0.$$

Если к тому же будет

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0,$$

то говорят, что имеется асимптотическая устойчивость.

Теорема 1. *Если существует определенно-положительная функция:* $V_n = V(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-m})$ *в области определения правой части РДС (1) с неположительной правой разностью от произвольных* x_n *и всяких* x_j, *удовлетворяющих неравенству*

$$V(x_j) \leq V(x_{n+1}, \ \ j = \overline{n-m, n},$$

то нулевое решение РДС (1) устойчиво по Ляпунову.

Теорема 2. *Если существует такая определенно-положительная функция:* $V_n = V(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-m}$ *что первая разность* ΔV_n *вдоль решения (1) удовлетворяет неравенству*

$$\Delta V_n \leq -U(\|x_n\|)$$

для всяких x_j *таких, что*

$$V(x_j) \leq -W(x_{n+1}, \ \ n-m \leq j \leq n,$$

то нулевое решение РДС (1) с запаздывающим аргументом асимптотически устойчиво.

Здесь $U(r_n)$ – определенно-положительная функция скалярного аргумента, W – непрерывная монотонно-возрастающая функция, удовлетворяющая неравенству $W(r_n) > r_n$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05131369 КН МОН РК.

Ключевые слова: разностно-динамические системы, устойчивость

2010 Mathematics Subject Classification: 60H10

Литература

[1] Dixit A., Norman V. *International Trade Theory*, Cambridge (1980).

[2] Puu T. *Nonolinear Economic Dynamica*, Berlin, Springer-Verlag, (1989).

[3] Ракитский Ю.В. Асимптотические формулы приближенных решений задачи Коши разностными методами, *Прикладная механика*, **1**:7 (1966), 130–134.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О тригонометрических множителях в весовых пространствах

Амангуль БАХЫТ[1,a], Назерке ТЛЕУХАНОВА[1,b]

[1] *Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]*amangulbakhyt@gmail.com*, [b]*tleukhanova@rambler.ru*

Работа посвящена изучению тригонометрический проблемы множителей в весовых пространствах λ_{pq}.

Классическая постановка тригонометрической проблемы множителей заключается в следующем: пусть $f \in L_1[0, 2\pi]$ и $\{a_k(f)\}$ ее последовательность коэффициентов Фурье по тригонометрической системе. При этом предпололагается, что f обладает свойстами, достаточными, чтобы $\{a_k(f)\} \in l_p, 1 \le p \le \infty$. Требуется определить гладкостные и метрические характеристики функции ϕ для того, чтобы $T_\phi f = \{a_k(f \cdot \phi)\} \in l_p$, то есть определить условия на функцию ϕ, гарантирующие ограниченность оператора $T_\phi : l_p \longrightarrow l_p$. Класс таких функций обозначается через M_p.

Эта задача рассматривалась в работах Стечкина С.Б. [1], Хиршмана И.И. [2], Эдельштейна С.Л. [3], Бирмана М.Ш. и Соломяка М.З. [4], Караджова Г.Е. [5].

Пусть $0 < q, p < \infty$. Будем говорить, что последовательность $a = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ принадлежит классу $\lambda_{p,q}$, если конечна величина:

$$\|a\|_{\lambda_{p,q}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^q |\bar{k}|^{\left(\frac{q}{p}-1\right)} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \bar{k} = \max(|k|, 1).$$

Если $q = \infty$, то $\|a\|_{\lambda_{p,\infty}} = \sup |a_k||\bar{k}|^{\frac{1}{p}}$.

Будем говорить, что функция ϕ принадлежит классу $M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}$, если линейный оператор T_ϕ ограничен из λ_{p_0,q_0} в λ_{p_1,q_1} и

$$\|\phi\|_{M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}} = \|T_\phi\|_{\lambda_{p_0,q_0} \longrightarrow \lambda_{p_1,q_1}}.$$

Лемма 1. *Пусть* $1 < r, p, q < \infty,\ 0 < s \le \infty,\ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{s}$ *и* $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. *Тогда имеет место следующее неравенство*

$$\|a * b\|_{\lambda_{qs}} \le c \|a\|_{\lambda_{r_1 t_1}} \|b\|_{\lambda_{r_2 t_2}}.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_0 < 2 < p_1,\ \ q_1 \le p_1,\ \ p_0 \le q_0, 0 < s, q_0, q_1 < \infty$, $\dfrac{1}{p_0} - \dfrac{1}{p_1} < \dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_0} - \dfrac{1}{p_1},\ \ \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{q_0}$.
Тогда имеет место вложение

$$L_{rs}[0,1] \hookrightarrow M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_0 \le q_0 \le q_1 \le p_1 < 2, 1 < s, q_0, q_1 < \infty$ $\alpha = \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_0} - \dfrac{1}{2},\ \ 1 - \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{q_0} - \dfrac{1}{q_1}$.
Тогда справедливо следующее вложение

$$B_{rs}^{\alpha}[0,1] \hookrightarrow M_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}.$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05132590 КН МОН РК.

Ключевые слова: тригонометрические коэффициенты Фурье, классы множителей, дискретные весовые пространства Лебега.

2010 Mathematics Subject Classification: 44A35, 46E35, 47G10, 30H25

Литература

[1] Стечкин С.Б. О билинейных формах, *ДАН СССР*, **71**:3 (1950), 237–240.

[2] I.I. Hirshman On multiplier transformations, *Duke Math. J.*, **26**:2, (1959) 221-242.

[3] Эдельштейн С.Л. Ограниченность свертки в $L_p(Z_m)$ и гладкость символе оператора, *Мат. заметки*, **22**:6, (1977), 873–884.

[4] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева приложение к спектральной теории*, -В: X мат. школа, Киев, (1974), 5–189.

[5] G.E. Karadzhov *Тригонометрические проблема множителей.* Конструктивная теория функцийЎ81 София, (1983), 82–86.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об ограниченности потенциала типа Рисса в локальных пространствах типа Морри с переменным показателем

Нуржан БОКАЕВ [1,a], Жомарт ОНЕРБЕК[2,b]

[1] *Евразийский национальный университет, Астана, Казакстан*

[2] *Евразийский национальный университет, Астана, Казакстан*

E-mail: [a]*bokayev2011@yandex.ru*, [b]*onerbek.93@mail.ru*

Здесь приводятся достаточные условия ограниченности потенциала Рисса в локальных пространствах типи Морри с переменным показателем.

Потенциал типа Рисса определяется равенством:

$$I_{\alpha(x)}\, f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy,$$

где $0 < \alpha(x) < n$.

Пусть $p(x)$ - измеримая функция на открытом на множестве $\Omega \subset R^n$.

Предположим

$$1 \le p_- \le p\,(x) \le p_+ < \infty,$$

где

$$p_- = p_-(\Omega) = \inf\nolimits_{x\in\Omega} p(x), \quad p_+ = p_+\,(\Omega) = \sup\nolimits_{x\in\Omega} p\,(x)\ .$$

Пусть $P^{\log(\Omega)}$ - это множество функций $p(x)$, для которых

$$p(x) - p(y) \le \frac{C}{-ln\ x-y}, x-y \le \frac{1}{2}, x, y \in \Omega.$$

Обозначим через $L_{p(.)}(\Omega)$ пространство всех измеримых функций $f(x)$ на Ω, таких, что

$$I_{p(.)}(f) = \int_{\Omega} [f(x)]^{p(x)}\, dx < \infty,$$

где норма определяется следующим образом:

$$||f||_{p(.)} = \inf \left\{\eta > 0, I_{p(.)}\left(\frac{f}{\eta}\right) \le 1 \right\}.$$

Пусть $w(x,r)$ - неотрицательная изммеримая функция на $\Omega\times[0,l]$, где $\Omega\subset R^n$, $l=diam\Omega, 1\leq\theta<\infty$. Локальное пространство Морри с переменным показателем $LM_{p(.),w(.),\theta}$ - это множество функций с конечной квазинормой:

$$||f||_{LM_{p(.),w,\theta}}=\left|\left|w\left(r\right)||f||_{L_{p(.)(B(0,r)}}\right|\right|_{L_{\theta(0,\infty)}}<\infty,$$

где $B(x,r)$ - шар в n -мерном пространстве с центром в точке x и радиусом r.
Пусть $\theta_{p(x,r)}=\frac{n}{p(x)}$, при $r\leq1$; $\quad\theta_{p(x,r)}=\frac{n}{p(\infty)}$, при $r>1$.

Теорема. Пусть $p_1(x),\ p_2(x)\in P^{\log(\Omega)}$ и $\alpha_-=\inf_{x\in\Omega}\alpha(x)>0,(\alpha p)_+=\sup_{x\in\Omega}\alpha(x)p(x)<n$,

$$\frac{1}{p_2\left(x\right)}=\frac{1}{p_1\left(x\right)}-\frac{\alpha\left(x\right)}{n},$$

$1\leq\theta<\infty$, и пусть измеримые функции w_1,w_2 удовлетворяют условию:

$$\sup_{t>0}\int_0^\infty\left(\frac{r^{\theta_{p_1}(0,t)}}{w_2\left(r,t\right)}\right)^\theta\int_r^\infty\left(s^{-\theta_{p_2}(0,r)-1}\,w_1\left(s,r\right)\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}}dsdr<\infty$$

Тогда оператор I_α ограничен из $LM_{p_1(.),w_1,\theta}$ в $LM_{p_2(.),w_2,\theta}$.

Отметим, что обобщенные пространства типа Морри с переменным показателем $M_{p(\cdot),w(\cdot)}$ рассмотрены в работах [1] и [2]. Для таких пространств аналог приведенной теоремы рассмотрен в [2].

Ключевые слова: потенциал типа Рисса, локальные пространства типа Морри, ограниченность.

Литература

[1] Amedia A., Hasanov J.J., Samko S.G. Maximal and potential operators in variable Morrey spaces. / Georgian Mathematical Journal, 2008, Vol. 15, No. 2, P. 198-201.

[2] Guliyev V.S., Samko S.G. Maximal, potential and singular operators in the generalizes variable exponent Morrey spaces on unbouded sets, Journal of Mathematical sciences, 2013, Vol. 193, No. 2, P. 228-232.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Краевые условия объемного гиперболического потенциала в области с криволинейной границей

Бауыржан ДЕРБИСАЛЫ

Институт математики и математического моделирования,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби
Алматы, Казахстан
E-mail: derbissaly@math.kz

Объемные потенциалы для уравнений в частных производных в силу своей теоретической и прикладной значимости являются одними из важных понятий современной теории дифференциальных уравнений. Ключевыми этапами развития этой теории явились исследования, проведенные Ньютоном для эллиптических потенциалов, где наряду с фундаментальными исследованиями целого ряда существенных вопросов данной теории, была также показана практическая значимость проблемы. Различные приложения объемного потенциала в электростатике, теплопроводности, упругости, диффузии и других областях науки хорошо известны и привлекли внимание таких уччных, как Лаплас, Гаусс, Пуассон, Грин, Бельтрами, Кирхгоф, лорд Кельвин, Гобсон, Ляпунов, Соболев, Бицадзе и других, которые внесли значительный вклад в развитие этой теории в течении нескольких столетий.

Начиная с работ Т.Ш. Кальменова, его учеников и последователей были заложены основы теории краевых задач для различных видов объемных потенциалов. Также в мировой литературе такие ученые, как Engquist B. и Majda A., Givoli D, Li J.R., Greengard L., Hagstrom T., Tsyn-kov S.V., Saito N., Wu X. and Zhang J. использовали аналогичные результаты исследований для решения различных задач математической физики и численных расчетов.

В настоящем докладе мы построим краевые условия объемного гиперболического потенциала

$$u(x,t)=\int_{\Omega}\varepsilon(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{1}$$

где $\varepsilon(x,t,\xi,\tau)$ – фундаментальное решение задачи Коши для линейного гиперболического уравнения

$$Lu(x,t)=u_{xx}-u_{tt}+a(x,t)u_x+b(x,t)u_t+c(x,t)u=f(x,t) \tag{2}$$

а $\Omega\in\mathbb{R}^2$ – область, ограниченная кривыми $x=\alpha(t)$ и $x=\beta(t)$ и отрезками прямых $t=0$ и $t=T>0$. Здесь $\alpha(t)<\beta(t)$, $\alpha(0)=0$, $\beta(0)=1$, $|\alpha'(t)|<1$, $|\beta'(t)|<1$.

Рассмотрим уравнение (2) в области Ω. Хорошо известно, что при $T>1/2$ решение уравнения (2) в Ω не однозначно восстанавливается по начальным условиям

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le 1. \tag{3}$$

Для однозначности необходимо использование краевых условий.

Ставится задачей построение краевых условий, по которым решение уравнения (2) в Ω будет однозначно определяться в виде (1).

Построенные краевые условия имеют, вообще говоря, интегральный вид. Однако для частных случаев, когда все младшие коэффициенты уравнения (2) равны нулю, краевые условия имеют вид

$$u_x(\alpha(t),t)-u_t(\alpha(t),t)=0,\ \ 0\le t\le T, \tag{4}$$

$$u_x(\beta(t),t)+u_t(\beta(t),t)=0,\ \ 0\le t\le T. \tag{5}$$

Доклад основан на результатах совместных исследований с М.А. Садыбековым и Т.Ш. Кальменовым.

Funding: Автор был поддержан грантом AP05133239 КН МОН РК.

Ключевые слова: волновой потенциал, объемный потенциал, краевые условия

2010 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35L15, 35L20

— ⁂ —

О граничной задаче теплопроводности в трехмерном конусе

Мувашархан ДЖЕНАЛИЕВ[1,a], Мурат РАМАЗАНОВ[2,b]

[1] *ИМММ, Алматы, Казахстан*

[2] *КарГУ им.Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан*

E-mail: [a]*muvasharkhan@gmail.com*, [b]*ramamur@mail.ru*

Изучается следующая граничная задача в перевернутом конусе $G=\{(x;y,t):\ x^2+y^2<t^2,\ 0<t<T\}$ для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

с граничным условием на поверхности конуса

$$u(x,y,t)=u_{\text{c}}(x,y,t),\ \sqrt{x^2+y^2}=t,\ 0<t<T, \tag{2}$$

где $u_c(x,y,t)$ – заданная функция.

Переходя к полярным координатам в задаче (1)–(2) и предполагая выполнение свойства изотропности по угловой координате, получаем: найти в области $\Omega = \{(r,t): \ 0 < r < t, \ 0 < t < T\}$ решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{3}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\lim_{r\to 0}\frac{u(r,t)}{\ln(1/r)} = u_0(t), \ 0 < t < T, \tag{4}$$

$$\lim_{r\to t} u(r,t) = u_1(t) \equiv u_c(x,y,t)\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t}, \ 0 < t < T. \tag{5}$$

Решение граничной задачи (3)–(5) сводится к изучению вопросов разрешимости неоднородного интегрального уравнения

$$t\,\varphi(t) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)d\,\tau}{\sqrt{t-\tau}} = f(t), \ 0 < t < T < \infty, \tag{6}$$

где λ – заданная положительная постоянная величина, $\{f(t), \ t \in (0,T)\}$ – заданная функция.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть $t^{-3/2}u_0(t), \ t^{-1/2}u_1(t) \in L_\infty(0,T)$. Тогда граничная задача (3)–(5) имеет общее решение*

$$u(r,t) = Cu_{hom}(r,t) + u_{part}(r,t) \in L_\infty(\Omega; r^{-1/2}),$$

$$\text{т.е., } r^{-1/2}u(r,t) \in L_\infty(\Omega), \ C = const,$$

где $u_{hom}(r,t)$ и $u_{part}(r,t)$ являются решениями соответственно однородного (при $u_0(t) \equiv 0, \ u_1(t) \equiv 0$) и неоднородного граничных задач (3)–(5).

В случае осевой симметрии из теоремы 1 следует следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $t^{-1/2}u_1(t) \equiv t^{-1/2}u_c(x,y,t)\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} \in L_\infty(0,T)$. Тогда граничная задача (1)–(2) имеет общее решение*

$$u(x,y,t) = Cu_{hom}(x,y,t) + u_{part}(x,y,t) \in L_\infty(G; (x^2+y^2)^{-1/4}),$$

$$\text{т.е., } (x^2+y^2)^{-1/4}u(x,y,t) \in L_\infty(G), \ C = const,$$

где $u_{hom}(x,y,t)$ и $u_{part}(x,y,t)$ являются решениями соответственно однородного (при $u_c(x,y,t) \equiv 0$) и неоднородного граничных задач (1)–(2).

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть $t^{-1/2}f(t) \in L_\infty(0,T)$. Тогда интегральное уравнение (6) имеет общее решение*

$$\varphi(t) = C\varphi_{hom}(t) + \varphi_{part}(t) \in L_\infty(0,T); t^{-1/2}),$$

$$\text{т.е., } t^{-1/2}\varphi(t) \in L_\infty(0,T), \ C = const,$$

где $\varphi_{hom}(t)$ и $\varphi_{part}(t)$ являются решениями соответственно однородного (при $f(t) \equiv 0$) и неоднородного интегральных уравнений (6).

Funding: Авторы были поддержаны грантами AP05130928, AP05132262 и BR05236693 КН МОН РК.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, вырождающаяся область, конус, краевое условие

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об одном обобщении задачи типа Самарского-Ионкина для случая уравнения Пуассона

Айшабиби ДУКЕНБАЕВА

Институт математики и математического моделирования,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби
Алматы, Казахстан
E-mail: dukenbayeva@math.kz

В настоящем докладе мы формулируем и исследуем обобщение задачи Самарского-Ионкина для случая уравнения Пуассона в круге.

Постановка задачи. Пусть $\Omega = \{z = (x, y) = x + iy \in C : |z| < 1\}$ – единичный круг, $r = |z|$ и $\varphi = \arctan(y/x)$. Рассмотрим следующие две задачи $(k = 1, 2)$. Найти функцию $u(z) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющую внутри Ω уравнению Пуассона

$$-\Delta u(z) = f(z), \quad |z| < 1, \tag{1}$$

а на его границе – краевым условиям

$$u(1, \varphi) - \alpha u(1, 2\pi - \varphi) = \tau(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial r}(1, 2\pi - \varphi) = \nu(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \tag{3_k}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(z) \in C^\gamma(\overline{\Omega}), \tau(\varphi) \in C^{1+\gamma}[0, \pi], \nu(\varphi) \in C^\gamma[0, \pi], 0 < \gamma < 1$.

Очевидно, что необходимым условием существования решения задачи (1),(2),(3_k) из класса $C^1(\overline{\Omega})$ является выполнение условий согласования:

$$\nu(0) = \nu(\pi) = 0 \ \text{ при } \ k = 1 \tag{4}$$

и

$$\tau(0) = \tau(\pi) = 0 \ \text{ при } \ \alpha = 1 \ \text{ и } \ \tau'(0) = \tau'(\pi) = 0 \ \text{ при } \ \alpha = -1. \tag{5}$$

Антипериодическая краевая задача (1),(2),(3_1) при $\alpha = -1$ и периодическая краевая задача (1),(2),(3_2) при $\alpha = 1$ были исследованы в [1,2]. В [3] исследованы спектральные свойства задачи (1),(2),(3_k).

В настоящем докладе исследуется корректность задач (1),(2),(3_k). Обоснована возможность применения метода разделения переменных. Построена в явном виде функция Грина задачи и получено интегральное представление решения.

Доклад основан на результатах совместных исследований с М.А. Садыбековым и Н.А. Есиркегеновым [4].

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05133271 КН МОН РК.

Ключевые слова: функция Грина, задача Самарского-Ионкина, уравнения Пуассона

2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J25, 35P10

Литература

[1] Садыбеков М.А., Турметов Б.Х. Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге, *Дифф. уравнения*, **50**:2 (2014), 264–268.

[2] Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On analogs of periodic boundary problems for the Laplace operator in ball, *Eurasian Mathematical Journal*, **3**:1 (2012), 143–146.

[3] Yessirkegenov, N.A. Spectral properties of the generalized Samarskii-Ionkin type problems, *Filomat*, **32**:3 (2018), 1019–1024.

[4] Dukenbayeva A.A., Sadybekov M.A., Yessirkegenov, N.A. On a Generalised Samarskii-Ionkin Type Problem for the Poisson Equation, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, **264** (2018), 207–216.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

К распределению собственных значений дифференциального оператора третьего порядка с регулярными краевыми условиями

Нурлан ИМАНБАЕВ,

Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, Шымкент, Казахстан
E-mail: imanbaevnur@mail.ru,

В пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор L_0, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(u) = P_0(x)\,u'''(x) + P_1(x)\,u''(x) + P_2(x)\,u'(x) + P_3(x)\,u(x) \tag{1}$$

и регулярными краевыми условиями

$$U_1(u) = u(0) = 0, U_2(u) = u(1) = 0, U_3(u) = u'(0) - u'(1) = 0 \tag{2}$$

Пусть $P_0(x) = +1$, $P_1(x) = P_2(x) = P_3(x) = 0$, то есть

$$L_0 u \equiv l(u) = +u'''(x)\,. \tag{3}$$

Тогда $l^*(\vartheta)$-сопряженное дифференциальное выражение:

$$l^*(\vartheta) = -\vartheta'''(x)\,, \;\; 0 < x < 1. \tag{4}$$

Следовательно, оператор L_0^*, сопраженный оператору L_0 задается дифференциальным выражением (4) и краевыми условиями

$$V_1(\vartheta) \equiv \vartheta(1) = 0, V_2(\vartheta) \equiv \vartheta(0) = 0, V_3(\vartheta) = \vartheta'(0) - \vartheta'(1) = 0. \tag{5}$$

Нами исследуется задача на собственные значение оператора

$$L_0 u \equiv l(u) = u'''(x) = -\lambda u(x)\,, 0 < x < 1 \tag{6}$$

с краевыми условиями (2)

Имеет место следующая

Теорема. *Характеристический определитель спектральной задачи (6)-(2), представим в виде экспоненциального квазиполинома*

$$\Delta(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda}\Big((k_2 - k_3)\,e^{k_1\sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2)\,e^{(k_2+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} + (k_3 - k_1)\,e^{k_2\sqrt[3]{\lambda}} +$$

$$+ (k_3 - k_1)\,e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2)\,e^{k_3\sqrt[3]{\lambda}} + (k_2 - k_3)\cdot e^{(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}}\Big)\,,$$

где $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *и является целой аналитической функцией переменного* λ.

Утверждение.

1. Существует бесконечно много собственных значений оператора $L_{0.}$.

2. Расстояние между двумя соседними собственными значениями одной серии (j − *const*) *ровно* $\frac{2\pi}{|d|}$.

3. Собственные значения оператора L_0 *каждой серии лежат на лучах, перпендикулярно отрезку, содержащему числа*

$$\left(\overline{k_1},\ \overline{k_3 + k_1}\right);\ \left(\overline{k_3}, \overline{k_3 + k_1}\right); \left(\overline{k_2 + k_3},\ \overline{k_3}\right);\ \left(\overline{k_2}\,\overline{k_2 + k_3}\right);$$

$$\left(\overline{k_2},\ \overline{k_2+k_1}\right);\ \left(\overline{k_2+k_1},\ \overline{k_1}\right).$$

Ключевые слова: собственные значения, регулярные краевые условия,целая функция, спектральная задача, характеристический определитель

2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J08, 35J25

Литература

[1] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций, *Функциональный анализ*, **1**:2 (1967), 52–59.

[2] Imanbaev N.S. Distribution of Eigen values of a Third-Order Differential Operator with Strongly Regular non local Boundary Conditions, *AIP Conference Proceedings*, **1997**:020027 (2018), 020027-1–020027-5.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Спектральная задача, возникающая в задаче стабилизации для нагруженного уравнения теплопроводности: двумерный и многоточечный случаи

Канжарбек ИМАНБЕРДИЕВ[1,2,a], Арнай КАСЫМБЕКОВА[1,2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]kanzharbek75ikb@gamail.com, [b]kasar08@mail.ru

Идея свести задачу стабилизации для параболического уравнения с помощью граничных управлений к вспомогательной краевой задаче в расширенной области независимых переменных принадлежит А.В. Фурсикову [1]. Ранее мы изучали задачи стабилизации для нагруженных одно- и двумерных уравнений теплопроводности [2–4]. В данной работе исследуются спектральные свойства нагруженного двумерного оператора Лапласа, которые используются для решения задачи стабилизации.

Постановка задачи. Пусть $\Omega = \{x, y : -\pi/2 < x, y < \pi/2\}$ – область с границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times \{t > 0\}$ с боковой поверхностью $\Sigma = \partial\Omega \times \{t > 0\}$ рассматривается граничная задача для нагруженного уравнения теплопроводности

$$u_t - \Delta u + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \cdot u(x_m, y, t) + \sum_{n=1}^{N} \beta_n \cdot u(x, y_n, t) = 0,\ \{x, y, t\} \in Q, \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y),\ \{x, y\} \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x, y, t) = p(x, y, t),\ \{x, y, t\} \in \Sigma, \tag{3}$$

где $\{x_m, y_n, m = 1, ..., M, n = 1, ..., N\} \subset (-\pi/2, \pi/2)$ – фиксированные, $\{\alpha_m, \beta_n, m = 1, ..., M, n = 1, ..., N\} \subset \mathbb{C}$ – заданные, $u_0(x, y) \in L_2(\Omega)$ – заданная функция.

Требуется: найти такую функцию $p(x, y, t)$, чтобы решение граничной задачи удовлетворяло неравенству

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)} \le C_0 e^{-\sigma t},\ \sigma > 0,\ t > 0. \tag{4}$$

Уравнение (1) называется нагруженным уравнением [5]. Отметим, что задача (1)–(4) с одной точкой нагрузки была изучена в [4].

Вспомогательная граничная задача (ВГЗ). Пусть $\Omega_1 = \{x, y : -\pi < x, y < \pi\}$ и $Q_1 = \Omega_1 \times \{t > 0\}$.

$$z_t - \Delta z + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \cdot z(x_m, y, t) + \sum_{n=1}^{N} \beta_n \cdot z(x, y_n, t) = 0,\ \{x, y, t\} \in Q_1, \tag{5}$$

$$z(x,y,0)=z_0(x,y),\ \{x,y\}\in\Omega_1, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^j z(-\pi,y,t)}{\partial x^j}=\frac{\partial^j z(\pi,y,t)}{\partial x^j},\ \{y,t\}\in(-\pi,\pi)\times\{t>0\},$$

$$\frac{\partial^j z(x,-\pi,t)}{\partial y^j}=\frac{\partial^j z(x,\pi,t)}{\partial y^j},\ \{x,t\}\in(-\pi,\pi)\times\{t>0\},\quad j=0,1. \tag{7}$$

Требуется: найти такую начальную функцию $z_0(x,y)$, чтобы решение ВГЗ удовлетворяло неравенству

$$\|z(x,y,t)\|_{L_2(\Omega_1)}\le C_0e^{-\sigma t},\ \sigma>0,\ t>0, \tag{8}$$

где постоянные C_0 и σ такие же как в исходной задаче (1)–(4).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05130928 КН МОН РК.

Ключевые слова: граничная стабилизация, нагруженное уравнение, спектр, нагруженный оператор Лапласа

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 39B82, 47A75

Литература

[1] Фурсиков А.В. Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью, *Математический сборник*, **192**: 4 (2001), 115–160.

[2] Amangaliyeva M., Jenaliyev M., Imanberdiyev K., Ramazanov M. On spectral problems for loaded two-dimension Laplace operator, *AIP Conference Proceedings*, 1759 (2016), 020049. https://doi.org/10.1063/1.4959663.

[3] Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Imanberdiyev K.B., Ramazanov M.I. On a stability of a solution of the loaded heat equation, *Bulletin of the Karaganda University. "Mathematics"series*, **90**: 2 (2018), 56–71.

[4] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Стабилизация решения уравнения теплопроводности, нагруженного по нульмерным многообразиям, с помощью граничных управлений, *Математический журнал*, **15**: 4 (2015), 33–53.

[5] Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их приложения*, Наука, Москва (2012).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О весовых неравенствах для одного класса квазилинейных интегральных операторов

Айгерим КАЛЫБАЙ[1,a]

[1] *Университет КИМЭП, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*kalybay@kimep.kz*

Пусть $0<r,q,p<\infty$ и $I=(0,\infty)$. Пусть w, u и v — весовые функции, т.е., неотрицательные и локально суммируемые на I функции.

Для $f\ge 0$ рассмотрим неравенства

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_0^x\left(\int_0^t K(t,s)f(s)ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_0^\infty v(x)f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

и

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_0^x\left(\int_t^\infty K(s,t)f(s)ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_0^\infty v(x)f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

с ядром $K(\cdot,\cdot) \geq 0$, удовлетворяющим условию Ойнарова (см. [1]): существует константа $d > 0$ такая, что

$$d^{-1}(K(t,\tau) + K(\tau,s)) \leq K(t,s) \leq d(K(t,\tau) + K(\tau,s)) \tag{1.5}$$

для $0 < s \leq \tau \leq t < \infty$.

В последние годы изучению неравенств типа (1) и (2) посвящено большое количество работ (см., например, [2–7]). Интерес к данному типу неравенств вызван их применимостью к пространствам типа Морри ([8] и [9]). Более того, зная характеризацию данных неравенств, легко получить характеризацию билинейных неравенств Харди ([7] и [10]).

В данной статье мы также находим необходимые и достаточные условия для выполнения неравенств (1) и (2), но полученные нами условия являются альтернативными по сравнению с условиями, найденными ранее. Естественно, что метод исследования также альтернативный. Здесь поставленная задача решена при $0 < r < \infty$ и $1 < p \leq q < \infty$.

Funding: Автор был поддержан грантом AP05130975 КН МОН РК.

Ключевые слова: интегральный оператор, неравенство типа Харди, весовая функция, ядро

2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 46E30

Литература

[1] Ойнаров Р. Весовые неравенства для одного класса интегральных операторов, *ДАН*, **319**:5 (1991), 1076–1078.

[2] Gogatishvili A., Mustafayev R., Persson L.–E. Some new iterated Hardy-type inequalities, *J. Funct. Spaces Appl.*, (2012), http://dx.doi.org/10.1155/2012/734194.

[3] Gogatishvili A., Mustafayev R., Persson L.–E. Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta = 1$, *J. Inequal. Appl.*, (2013), https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-515.

[4] Gogatishvili A., Mustafayev R. Weighted iterated Hardy-type inequalities, *Math. Inequal. Appl.*, **20**:3 (2017), 683–728.

[5] Прохоров Д.В., Степанов В.Д. О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах, *Тр. МИАН.*, **283** (2013), 155–170.

[6] Прохоров Д.В., Степанов В.Д. Весовые неравенства для квазилинейных интегральных операторов на полуоси и приложения к пространствам Лоренца, *Матем. сб.*, **207**:8 (2016), 135–162.

[7] Прохоров Д.В. Об одном классе весовых неравенств, содержащих квазилинейные операторы, *Тр. МИАН.*, **293** (2016), 280–295.

[8] Burenkov V.I., Oinarov R. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space, *Math. Inequal. Appl.*, **16**:1 (2013), 1–19.

[9] Kalybay A. On boundedness of the conjugate multidimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a local Morrey-type space, *Int. J. Math. Anal.*, **8**:11 (2014), 539–553.

[10] Bernardis A.L., Salvador P.O. Some new iterated Hardy-type inequalities and applications *J. Math. Ineq.*, **11**:2 (2017), 577–594.

— ⁂ —

Осцилляционные свойства одного класса квазилинейных разностных уравнений второго порядка

Айгерим КАЛЫБАЙ [1,a], Данагул КАРАТАЕВА [2,b]

[1] *Университет КИМЭП , Алматы, Казахстан*

[2] *Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

E-mail: [a]*kalybay@kimep.kz*, [b]*danagul83@mail.ru*

Рассмотрим квазилинейное разностное уравнение второго порядка

$$\Delta(\rho_i|\Delta y_i|^{p-2}\Delta y_i) + v_i|y_{i+1}|^{p-2}y_{i+1} = 0, \quad i = 0, 1, 2, ..., \tag{1}$$

где $1 < p < \infty$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\{\rho_i\}$ - последовательность положительных, $\{v_i\}$ - последовательность неотрицательных действительных чисел.

Говорят, что интервал $(m, m+1]$, $m \in N$, содержит обобщенный нуль решения $y = \{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ уравнения (1), если $x_m \neq 0$ и $y_m y_{m+1} \leq 0$. Нетривиальное решение уравнения (1) называется осцилляторным, если оно имеет бесконечно много обобщенных нулей на дискретном интервале $[n, \infty)$, $n \in N$, в противном случае решение уравнения (1) называется неосцилляторным. Если все решения уравнения (1) осцилляторно,то уравнение называется осцилляторным. Уравнение (1) называется уравнением без сопряженных точек на дискретном отрезке $[m, n]$, если каждое его решение имеет не более одного обобщенного нуля на дискретном интервале $(m, n+1]$ и его решение y с начальными условиями $y_m = 0$, $y_{m+1} \neq 0$, не имеет обобщенного нуля на $(m, n+1]$.

Обозначим через $\overset{\circ}{Y}(m, n)$ совокупность нетривиальных последовательностей действительных чисел $y = \{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ таких, что $supp\ y \subset [m+1, n]$, $n < \infty$.

Рассмотрим дискретное неравенство Харди

$$\sum_{i=m}^{n} v_{i-1}|y_i|^p \leq C \sum_{i=m}^{n} \rho_i |\Delta y_i|^p, \quad y \in \overset{\circ}{Y}(m, n), \tag{2}$$

где C - наименьшая постоянная в (2).

Пусть $0 \leq m < n \leq \infty$. Положим

$$B_p(m, n) = \sup_{m \leq t \leq s < n} \left\{ \sum_{t=s}^{j-1} v_i \left[\left(\sum_{i=m}^{t} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{n} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} \right]^{-1} \right\},$$

$\alpha_p = \inf\limits_{\lambda > 1} \frac{\lambda^p(\lambda^p - 1)}{(\lambda - 1)^p}$, $1/p + 1/p' = 1$.

Теорема 1. *Пусть $0 \leq m < n \leq \infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} < \infty$ при $n = \infty$. Неравенство (4) выполнено тогда и только тогда, когда $B_p(m, n) < \infty$ при этом*

$$B_p(m, n) \leq C \leq 2\alpha_p B_p(m, n), \tag{3}$$

где C - наименьшая постоянная в (2).

Приведем осцилляционные свойства уравнения (1) вытекющие, на основания известного вариационного принципа, из утверждения Теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $0 \leq m < n \leq \infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} < \infty$ при $n = \infty$. Тогда*

(i) для безсопряженности уравнения (1) на интервале $[m, n]$ условие $B_p(m, n) \leq 1$ необходимо, а условие $2\alpha_p B_p(m, n) \leq 1$ достаточно;

(ii) для сопряженности уравнения (1) на интервале $[m, n]$ условие $2\alpha_p B_p(m, n) > 1$ необходимо, а условие $B_p(m, n) > 1$ достаточно.

Теорема 3. *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} < \infty$.
(i) *Для неосцилляторности уравнения (1) условие* $B_p(m,\infty) \le 1$ *при некотором* $m \ge 0$ *необходимо, а условие* $2\alpha_p B_p(n,\infty) \le 1$ *при некотором* $n \ge 0$ *достаточно;*
(ii) *Для осцилляторности уравнения (1) условие* $2\alpha_p \lim\limits_{m\to\infty} \sup B_p(m,\infty) > 1$ *необходимо, а условие* $\lim\limits_{m\to\infty} \sup B_p(m,\infty) \ge 1$ *достаточно.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05130975 КН МОН РК.

Ключевые слова: разностное уравнение, осцилляторность, неосцилляторность,сопряженность, безсопряженность, неравенство, наилучшая постоянная

2010 Mathematics Subject Classification: 34C10, 26D10

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Ограниченность одного класса интегральных операторов из весового пространства Соболева в весовое пространств Лебега

Айгерим КАЛЫБАЙ[1,a], Рыскул ОЙНАРОВ[2,b]

[1] *Университет КИМЭП , Алматы, Казахстан*
[2] *Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]*kalybay@kimep.kz*, [b]*danagul83@mail.ru*

Пусть $I=(a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$. Пусть $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Пусть υ,ρ,u и ω неотрицательные на I функции такие, что υ^p, ρ^p, ω^p,u^r, $\rho^{-p'}$, $\omega^{-q'}$ локально суммируемы на I.

Обозначим через $W_p^1(u,\upsilon) \equiv W_p^1(u,\upsilon,I)$ пространство всех локально абсолютно непрерывных на I функций, для которых конечно норма

$$\|f\|_{W_p^1} = \|\rho f'\|_p + \|\upsilon f\|_p,$$

где $\|\cdot\|_p$ - обычная норма пространства $L_p(I)$.

Через $\mathring{W}_p^1(\rho,\upsilon) \equiv \mathring{W}_p^1(\rho,\upsilon,I)$ обозначим замыкание множества $\mathring{AC}(I) \cap W_p^1(\rho,\upsilon)$ по норме пространства $W_p^1(\rho,\upsilon)$.

Пусть $L_{p,\upsilon} \equiv L_p(\upsilon,I)$ пространство всех измеримых на I функций с конечной нормой $\|f\|_{p,\upsilon} \equiv \|\upsilon f\|_p$.

Рассмотрим ограниченность интегрального оператора

$$\mathcal{K}^+ f(x) = \int\limits_a^x K(x,s) f(s) ds, \quad x \in I, \tag{1}$$

из $\mathring{W}_p^1(\rho,\upsilon)$ в $L_{q,}(\omega,I)$, т.е. выполнение неравенства

$$\|\omega \mathcal{K}^+ f\|_q \le C(\|\rho f'\|_p + \|\upsilon f\|_p), \quad f \in \mathring{W}_p^1(\rho,\upsilon). \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $1<p\le q<\infty$ *и ядро оператора (1) принадлежит классу* $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n \ge 0$. *Тогда для оператора (1) неравенство (2) выполнено тогда и только тогда, когда* $\max\{F_i^+, G_j^+\} < \infty$ *хотя бы при одной паре* (i,j), $i,j=1,2$, *при этом для наилучшей постоянной* $C>0$ *в (2) имеет место соотношение* $C \approx \max\{F_i^+, G_j^+\}$, $i,j=1,2$. *Здесь* $F_i^+ = \sup\limits_{z\in I} F_i^+(z)$, $G_j^+ = \sup\limits_{z\in I} G_j^+(z)$,

$$F_1^+(z) = \left(\int\limits_a^{\mu^-(z)} \rho^{-p'}(x) \left(\int\limits_z^b \left(\int\limits_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} K(t,s) ds \right)^q \omega^q(t) dt \right)^{\frac{p'}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$F_2^+(z) = \left(\int\limits_z^b \omega^q(t) \left(\int\limits_a^{\mu^-(z)} \left(\int\limits_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} K(t,s)ds \right)^{p'} \rho^{-p'}(x)dx \right)^{\frac{q}{p'}} dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$G_1^+(z) = \sup_{y \in \Delta_\mu^+(z)} \left(\int\limits_{\mu^-(z)}^{\mu^+(y)} \rho^{-p'}(x) \left(\int\limits_y^z \left(\int\limits_{\varphi^-(x)}^t K(t,s)ds \right)^q \omega^q(t)dt \right)^{\frac{p'}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$G_2^+(z) = \sup_{y \in \Delta_\mu^+(z)} \left(\int\limits_y^z \omega^q(t) \left(\int\limits_{\mu^-(z)}^{\mu^+(y)} \left(\int\limits_{\varphi^-(x)}^t K(t,s)ds \right)^{p'} \rho^{-p'}(x)dx \right)^{\frac{q}{p'}} dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

$\Delta_\mu^+(z) = [\varphi^-(\mu^-(z)), z]$.

Определение функции $\varphi^\pm, \mu^\pm$ и множества $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$ можно найти в [1].

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05130975 КН МОН РК.

Ключевые слова: интегральный оператор, ядро оператора, весовое неравенство, весовое пространство Соболева, ограниченность

2010 Mathematics Subject Classification: 47B38, 26D10, 46E30, 46E35

Литература

[1] Ойнаров Р. Ограниченность интегральных операторов в весовых пространствах Соболева, *Известия РАН, серия математическая*, **78**:4, (2014), 207–223.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об одной многомерной задаче Бицадзе-Самарского для вырождающегося эллиптико-параболического уравнения

Тынысбек КАЛЬМЕНОВ[1,a], Гаухар АРЕПОВА[1,2,b] Бекзат АУБАКИРОВ[1,2,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]kalmenov@math.kz, [b]arepovag@mail.ru, [c]borya@mail.ru

Пусть $\Omega \subset R^n$ конечная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$, а $D = \Omega \times [a,b]$, $a > 0$, $b > 0$ цилиндрическая область, где $D^- = \Omega \times [a,0]$, $D^+ = \Omega \times [0,b)$.

Задача N:

$$u(x,t) = \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - t\Delta_x\right) u(x,t) = f^+(x,t), & (x,t) \in D^+ \\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + t\Delta_x\right) u(x,t) = f^-(x,t), & (x,t) \in D^-. \end{cases} \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,t)\Big|_{t=-a} = 0, \quad u(x,t)\Big|_{(x,t)\in\partial\Omega\times[-a,b]} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\Big|_{t=0} = f(x,0). \tag{3}$$

Следует отметить, что наряду с граничными условиями (2), имеется внутреннее граничное условие (3) и поэтому задача (1)-(3) является задачей Бицадзе-Самарского как в работе [1].

Пусть $u(x,t) \in W^{2,1}_{2,t}(D^+)$ и $u(x,t) \in W^{2}_{2,t}(D^-)$ весовые пространства Соболева:

$$\|u(x,t)\|^2_{W^{2,1}_{2,t}(D^+)} = \int_{D^+}\left[|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|^2 + t|\Delta_x u(x,t)|^2 + |u(x,t)|^2\right]dxdt,$$

$$\|u(x,t)\|^2_{W^{2}_{2,t}(D^-)} = \int_{D^-}\left[|\frac{\partial^- u(x,t)}{\partial t_-}|^2 + |t||\Delta_x u(x,t)|^2 + |u(x,t)|^2\right]dxdt.$$

Имеет место

Теорема. *Пусть* $f^-(x,t) \in W^{1,2m}_2(D^-)$, $f^+(x,t) \in W^{1,2m}_2(D^+)$ *и* $f(x,t) \in W^1_2(D)$, $2m > [\frac{n}{2}] + 1$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,t) \in W^{2,1}_{2,t}(D^+) \cap W^{2}_{2,t}(D^-)$ *задачи (1)-(3) удовлетворяющее неравенству*

$$\|u(x,t)\|_{W^{2,1}_2(D)} + \|u(x,t)\|^2_{W^{2,1}_{2,t}(D^+)} + \|u(x,t)\|^2_{W^{2}_{2,t}(D^-)} \le$$

$$\le d\left(\|f(x,t)\|_{W^1_2(D)} + \|f^+(x,t)\|^2_{W^{2m,1}_{2,t}(D^+)} + \|f^-(x,t)\|^2_{W^{2m,1}_{2,t}(D^-)}\right).$$

Funding: Авторы были поддержаны грантами AP05133239, AP05134615, BR05236656 КН МОН РК.

Ключевые слова: эллиптико-параболическое уравнение, задача Бицадзе-Самарского, пространства Соболева

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35J05

Литература

[1] Кальменов Т.Ш., Отелбаев М., Арепова Г.Д. Краевое условие Бицадзе-Самарского для эллиптико-параболического объемного потенциала, *Доклады Академии Наук России. Математика*, **480**:2 (2018), 141-144.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Спектральное разложение потенциала Гельмгольца

Тынысбек КАЛЬМЕНОВ[1,a] Сергей КАБАНИХИН[2] Айдана ЛЕС[3]

[1,3] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск*
E-mail: [a]*kalmenov@math.kz,*

Ключевые слова:уравнение Гельмгольца, фундаментальное решение, спектральное разложение, метод спуска, функция Макдональда, потенциальное граничное условие

Пусть $\Omega \subset R^n$ конечная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$.

Рассмотрим потенциал Гельмгольца, который определяется интегралом

$$u(x,\mu) = \int_\Omega \varepsilon(x-\xi,\mu)\rho(\xi)d\xi, \tag{3}$$

где $\varepsilon(x,\mu)$ - фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$-\Delta_x\varepsilon(x,\mu) + \mu\varepsilon(x,\mu) = \delta(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

а $\rho(\xi)$ -неизвестная плотность, μ - вещественное число.

В работе [1]-[2] приведены представления фундаментального решения $\varepsilon(x,\mu)$ построенного с помощью интегрального преобразования Фурье. В нашей работе [3] методом спуска от фундаментального решения уравнения теплопроводности со скалярным параметром получен явный вид $\varepsilon(x,\mu)$ в следующем виде

$$\varepsilon(x,\mu)=\frac{1}{\omega_n\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{\sqrt{\mu}|x|}{2}\right)^{\frac{n}{2}}K_{\frac{2-n}{2}}(\sqrt{\mu}|x|), \tag{5}$$

где

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^\infty \xi^{-\nu-1}e^{-\xi-\frac{z^2}{4\xi}}d\xi$$

функция Макдональда и $\omega_n=\frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, $|x|=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$.

Пользуясь методами работ [4]-[5] показано, что самосопряженный интегральный оператор (1) эквивалентен следующей самосопряженной задаче

$$-\Delta u(x)+\mu u(x)=\rho(x),\quad x\in\Omega, \tag{6}$$

$$-\frac{u(x,\mu)}{2}+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,\mu)}{\partial n_\xi}u(\xi,\mu)-\varepsilon(x-\xi,\mu)\frac{\partial u(\xi,\mu)}{\partial n_\xi}\right)d\xi=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{7}$$

Пусть $e_k(x,\mu)$ - полная ортонормированная система векторов задачи (4)-(5) соответствующее собственным значениям $\lambda_{k_1,k_2,\dots,k_n}$.

Имеет место

Теорема. *Пусть $u(x)\in W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет потенциальному граничному условию*

$$-\frac{u(x,\mu)}{2}+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,\mu)}{\partial n_\xi}u(\xi,\mu)-\varepsilon(x-\xi,\mu)\frac{\partial u(\xi,\mu)}{\partial n_\xi}\right)d\xi=0,\quad x\in\partial\Omega.$$

Тогда существует единственная плотность $\rho(x)$ потенциала Гельмгольца (1) задаваемая формулой

$$\rho(x,\mu)=\sum_{|k|=1}^\infty\lambda_k u_k e_k(x,\mu), \tag{8}$$

где

$$u_k=(u(x,\mu),e_k(x,\mu))_0$$

- коэффициент Фурье разложения $u(x,\mu)$:

$$u(x,\mu)=\sum_{|k|=1}^\infty u_k e_k(x,\mu). \tag{9}$$

Funding: Работа поддержана грантами AP05133239, AP05134615, BR05236656 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Литература

[1] Бесов О.В., Никольский С.М., Ильин В.П. *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, Москва, (1981).

[2] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, (1981).

[3] Kal'menov T.Sh., Arepova G.D., Arepova D.D. Boundary Condition of the Volume Potential for an Elliptic-Parabolic Equation with a Scalar Parameter, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2018**:129 (2018), 1–14.

[4] Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала, *Доклады Академии Наук России. Математика.*, **428**:4 (2009), 16–19.

[5] Кальменов Т.Ш., Отелбаев М., Арепова Г.Д. Краевое условие Бицадзе-Самарского для эллиптико-параболического объемного потенциала, *Доклады Академии Наук России. Математика*, **480**:2 (2018), 141–144.

[6] Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.- М.: Наука, 1981.- 400 с.*

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Регулярные по Биркгофу краевые условия для оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде

Балтабек КАНГУЖИН[1,a], Ляйля ЖАПСАРБАЕВА[1,b]

[1] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,*
E-mail: [a]kanbalta@mail.ru, [b]leylazhk67@gmail.com

Рассмотрим спектральную задачу для оператора двухкратного дифференцирования

$$\begin{array}{c} -y''_{m+1}(x_{m+1}) = \rho^2 y_{m+1}(x_{m+1}),\ 0 < x_{m+1} < 1, \\ -y''_{m}(x_{m}) = \rho^2 y_{m}(x_{m}),\ 0 < x_{m} < 1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ -y''_{1}(x_{1}) = \rho^2 y_{1}(x_{1}),\ 0 < x_{1} < 1 \end{array} \tag{1}$$

с условиями вида

$$\begin{array}{c} y_{m+1}(1) = y_1(0) = \ldots = y_m(0), \\ y'_{m+1}(1) = y'_1(0) + \ldots + y'_m(0) \end{array} \tag{2}$$

и условиями вида

$$U_s(y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}) = \sum_{j=1}^{2} \Big[a_{sj} y_1^{(j-1)}(1) + a_{s(2+j)} y_2^{(j-1)}(1) + \ldots + \tag{3}$$

$$+ a_{s(2m-2+j)} y_m^{(j-1)}(1) + a_{s(2m+j)} y_{m+1}^{(j-1)}(0) \Big] = 0,\ s = 1, \ldots, m+1,$$

где $m-$ фиксированное натуральное число. Матрицу из коэффициентов условий вида (3) обозначим через A:

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,2m+1} & a_{1,2m+2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,2m+1} & a_{2,2m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \ldots & a_{m+1,2m+1} & a_{m+1,2m+2} \end{array} \right\|,$$

где $a_{sp}-$ некоторые, быть может, комплексные числа. Считаем, что $rank\, A = m+1$.

Согласно результатам работ [2] задача (1), (2), (3) может быть интерпретирована как задача на собственные значения оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде $\Im = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$. При $m = 1$ задача (1), (2), (3) совпадает с задачей Штурма-Лиувилля

$$-u''(x) = \rho^2 u(x),\ 0 < x < 2,$$

$$U_j(u) = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} u^{(k-1)}(0) + \sum_{k=1}^{2} a_{j(k+2)} u^{(k-1)}(2),\ j = 1, 2. \tag{5}$$

В этом случае матрица A примет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Согласно монографии [1], условия (5) называются невырожденными граничными условиями, если выполнено одно из следующих требований

$$1) A_{34} \neq 0,\ 2) A_{34} = 0,\ A_{14} + A_{23} \neq 0,\ 3) A_{34} = 0,\ A_{14} + A_{23} = 0,\ A_{12} \neq 0.$$

Здесь A_{ij} означает минор матрицы (6), составленный из столбцов матрицы A с номерами i и j.

В монографии [3] среди условий вида (5) выделены регулярные по Биркгофу краевые условия. В настоящей работе для оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде выделены регулярные по Биркгофу краевые условия.

Funding: Авторы были поддержаны грантами AP05131292 и AP05131845 КН МОН РК.

Ключевые слова: оператор двухкратного дифференцирования, регулярные по Биркгофу краевые условия, граф-звезда

2010 Mathematics Subject Classification: 34L20

Литература

[1] Марченко В.А. *Операторы Штурма-Лиувиля и их приложения*, Наукова думка, Киев (1977).

[2] Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Кошкарбаев Н. Об асимптотике по спектральному параметру решений дифференциальных уравнений на дереве с условиями Кирхгофа в его внутренних вершинах, *Математический журнал*, **17**:4 (2017), 37–50.

[3] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Москва (1969).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об отсутствии свойства базисности Рисса у неусиленно регулярных краевых задач для оператора Штурма–Лиувилля

Нурбек КАХАРМАН

Институт математики и математического моделирования,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Алматы, Казахстан
E-mail: n.kakharman@math.kz

В докладе рассматривается спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

на интервале $(0, \pi)$ с неусиленно регулярными краевыми условиями.

Как было показано в [1], все такие краевые условия могут быть представлены в одном из двух видов

$$\begin{cases} y'(0) + (-1)^\theta y'(\pi) + \beta_0 y(0) + \beta_1 y(\pi) = 0, \\ \alpha y(0) + (-1)^\theta (1-\alpha) y(\pi) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \alpha y'(0) + (-1)^\theta (1-\alpha) y'(\pi) + \beta_0 y(0) + \beta_1 y(\pi) = 0, \\ y(0) + (-1)^\theta y(\pi) = 0; \end{cases} \tag{3}$$

где $\theta = 0$ или $\theta = 1$, а коэффициенты α, β_0 и β_1 – произвольные комплексные числа. Если $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$, то не уменьшая общности можно считать, что отличны от нуля следующие определители

$$\begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \alpha & (-1)^\theta (1-\alpha) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ 1 & (-1)^\theta \end{vmatrix} \neq 0,$$

составленные из коэффициентов краевых условий (2) и (3) соответственно.

Сравнительно недавно, в 2006 году, А.С. Макин [2] выделил один подкласс неусиленно регулярных краевых условий и показал, что система корневых функций задач с такими условиями образует базис Рисса независимо от поведения коэффициента $q(x)$: Если $\alpha = 1/2$ и $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$, то спектр задачи (1), (2) асимптотически простой, а система нормированных корневых функций образует базис Рисса в $L_2(0, \pi)$.

Этот, выделенный А.С. Макиным, подкласс неусиленно регулярных краевых условий оказался единственным подклассом граничных условий, в дополнение к усиленно регулярным, которые обеспечивают базисность Рисса системы корневых функций для любого потенциала $q(x)$. Для остальных случаев неусиленно регулярных краевых условий показано, что множество коэффициентов $q(x)$, при которых система корневых функций задачи (1), (2) образует безусловный базис в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_1(0,1)$. При этом множество коэффициентов $q(x)$, при которых система корневых функций задачи (1), (2) не образует безусловного базиса в $L_2(0,1)$, также является плотным в $L_1(0,1)$. Это демонстрирует неустойчивость свойства базисности корневых векторов по отношению к малым изменениям коэффициента $q(x)$ для случая неусиленно регулярных краевых условий.

Мы будем рассматривать только нормальные (по терминологии А.А. Шкаликова [3]) системы корневых векторов.

Основным результатом доклада является доказательство того факта, что при $\alpha \neq 1/2$ нормальная система корневых векторов не может образовывать базиса Рисса в $L_2(0,1)$, хотя и может быть безусловным базисом.

Доклад основан на результатах совместных исследований с М.А. Садыбековым.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05133239 КН МОН РК.

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля, неусиленно регулярная краевая задача, корневые функции, безусловный базис, базис Рисса

2010 Mathematics Subject Classification: 34B09, 34B24, 34L10

Литература

[1] Оразов И., Садыбеков М.А. Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам, *Сиб. мат. журнал*, **53**:1 (2012), 180–186.

[2] Макин А.С. О базисности систем корневых функций регулярных краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля, *Дифференц. уравнения*, **42**:12 (2006), 1646–1656.

[3] Велиев О.А., Шкаликов А.А. О базисности Рисса собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма-Лиувилля, *Матем. заметки*, **85**:5 (2009), 671–686.

— ⁂ —

Об индексе обобщенной задачи Неймана

Бакытбек КОШАНОВ[1,a], Арай КУНТУАРОВА[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]koshanov@list.ru, [b]araika.14.89@mail.ru

В докладе исследуется эллиптическое уравнение $2l-$ го порядка в односвязной области D

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} + \sum_{0 \le r \le k \le 2l-1} a_{rk}(x,y) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r} \partial y^r} = f(x,y), (x,y) \in D \qquad (1)$$

с коэффициентами $a_r \in \mathbb{R}$ и $a_{rk} \in C^{\mu}(\overline{D})$, $\Gamma = \partial D \in C^{2l,\mu}$, $0 < \mu < 1$.

Задача S. Обобщенная задача Неймана заключается в отыскании решения $u(x,y)$ уравнения (1) в области D по краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\right|_{\Gamma} = g_j, \quad j = 1,\ldots,l, \tag{2}$$

где $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_l \le 2l$ и $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль.

Для полигармонического уравнения эта задача была изучена А.В. Бицадзе [1]. Другой вариант задачи Неймана, основанный на вариационном принципе, был ранее предложен А.А.Дезиным [2]. В работе [3] задача (1),(2) была исследована при $a_{kr} \neq 0$ и $f \neq 0$ в пространстве функций $C_a^{2l-1,\mu}(\overline{D})$.

В докладе доказывается, что условие фредгольмовости задачи (1),(2) эквивалентно известному [4] условию дополнительности (или Шапиро– Лопатинского). Также приведена формула ее индекса $\operatorname{ind} S$ удобного для использования.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05135319 КН МОН РК.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, краевая задача, нормальные производные, фредгольмовость задачи, формула индекса

2010 Mathematics Subject Classification: 35J30, 35J40, 35J37

Литература

[1] Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций, *Дифференц. уравнения*, **24**:5 (1988), 825–831.

[2] Дезин А.А. Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве W_2^m, *Доклады АН СССР*, **96**:5 (1954), 901–903.

[3] Кошанов Б.Д., Солдатов А.П. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости, *Дифференц. уравнения*, **52**:12 (2016), 1666–1681.

[4] Schechter M. General boundary value problems for elliptic partial differential equations, *Comm. Pure and Appl. mathem.*, **12** (1950), 467–480.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Приводимость линейной однородной D_e-системы к каноническому виду

Айман КУЛЬЖУМИЕВА[1,a], Жайшылык САРТАБАНОВ[2,b]

[1] *Западно-Казахстанский государственный университет им. М.Утемисова, Уральск, Республика Казахстан*

[2] *Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Республика Казахстан*

E-mail: [a]*aiman-80@mail.ru,* [b]*sartabanov42@mail.ru*

В заметке исследуется вопрос о приводимости линейной однородной системы с постоянными на диагонали коэффициентами к каноническому виду в случае когда система распадается на r линейных однородных уравнений порядков n_1, ..., n_r, $(n_1+n_2+...+n_r = n)$.

Для решения поставленного вопроса рассмотрим систему вида

$$D_e x = A(\sigma)x \tag{1}$$

с дифференциальным оператором $D_e = \frac{\partial}{\partial\tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$, где $\sigma = t - e\tau$, $\tau \in (-\infty,+\infty) = R$, $t = (t_1,...,t_m) \in R\times...\times R = R^m$, $e = (1,...,1)$ – m-вектор, $\langle , \rangle$ – знак скалярного произведения, $A(\sigma)$ – $n\times n$-матрица, которая удовлетворяет условию

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad \forall k \in Z^m \tag{2}$$

с кратными вектор-периодами $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$, $k = (k_1, ..., k_m)$ из множества целочисленных векторов Z^m.

Суть вопроса заключается в приведении системы (1) к системе с матрицей канонической формы

$$D_e x = J(\sigma)x, \tag{3}$$

$J(\sigma)$ – $n \times n$ – матрица жордановой формы, удовлетворяющая условию

$$J(\sigma + k\omega) = J(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad \forall k \in Z^m.$$

Здесь существенное значение имеют $\lambda_j(\sigma)$ – собственные значения матрицы $A(\sigma)$ кратности k_j, $j = \overline{1, s}$, обладающие свойствами непрерывной дифференцируемости, периодичности, знакоопределенности и разделенности [1].

В случае известных элементарных делителей матрицы $A(\sigma)$ систему (1) можно привести к более простому виду.

Таким образом, неособенная линейная замена

$$x = L^*(\sigma)y \tag{4}$$

с матрицей преобразования $L^*(\sigma) = L(\sigma)B(\sigma)$, обладающей свойствами

$$detL^*(\sigma) \neq 0, \quad L^*(\sigma + k\omega) = L^*(\sigma), \quad k \in Z^m \tag{5}$$

приводит D_e-систему (1) к D_e-системе (3) с жордановой матрицей $J(\sigma)$, где $B(\sigma)$ – матрица Вандермонда, $L(\sigma)$ – неособенная непрерывно дифференцируемая ω-периодическая матрица, такая что $A^*(\sigma) = L^{-1}(\sigma)A(\sigma)L(\sigma)$, $A^*(\sigma)$ – сопровождающая матрица.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Пусть матрица $A(\sigma)$, обладающая свойством (2), имеет собственные значения $\lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, удовлетворяющие условиям непрерывной дифференцируемости, периодичности, знакоопределенности и разделенности. Тогда система (1) линейным преобразованием (4)-(5) приводится к жордановой канонической D_e-системе (3).*

По постановке вопроса данное исследование примыкает к исследованиям [2-3].

Ключевые слова: линейная однородная система, канонический вид, жорданова матрица, собственные значения, сопровождающая матрица

2010 Mathematics Subject Classification: 35B109, 35C15

Литература

[1] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. Reduction of linear homogeneous D_e-systems to the Jordan canonical form, *NEWS of NAS RK. Series of physico-math.*, **5**:315, (2017), 5–12.

[2] Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. О приводимости линейной D_e-системы с постоянными на диагонали коэффициентами к D_e-системе с жордановой матрицей в случае эквивалентности ее одному уравнению высшего порядка, *Вестник Карагандинского университета. Серия математика*, **4**:84 (2016), 88–93.

[3] Сартабанов Ж.А., Кульжумиева А.А. Приводимость линейных многопериодических уравнений с оператором дифференцирования по диагонали, *Математический журнал*, **1**:67 (2018), 139–150.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Теорема Харди-Литтлвуда для тригонометрических рядов с обобщенно монотонными коэффициентами

Асхат МУКАНОВ

МГУ имени М.В.Ломоносова, Казахстанский филиал, Астана, Казахстан
E-mail: mukanov.askhat@gmail.com

В данной работе мы обобщаем классическую теорему Харди-Литтлвуда об интегрируемости функции с монотонными коэффициентами Фурье.

Теорема 1. *Пусть дана функция f с рядом Фурье $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, где $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – невозрастающие последовательности, стремящиеся к нулю. Тогда для любого $1 < p < \infty$, имеет место эквивалентность*

$$\|f\|_{L_p([0,2\pi])} \asymp \left(|a_0|^p + \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}(a_n^p + b_n^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Мы рассматриваем следующий класс обобщенно монотонных последовательностей.

Определение 1. Последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется обобщенно монотонной, обозначается $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$, если существуют константы $C > 0$ и $\lambda > 1$такие, что для любого натурального n имеет место неравенство

$$\sum_{k=n}^{2n} |a_k - a_{k+1}| \leq C \sum_{k=\frac{n}{\lambda}}^{\lambda n} \frac{|a_k|}{k}.$$

Мы доказали, что утверждение Теоремы 1 остается верным для вещественнозначных коэффициентов $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$.

Funding: Автор был поддержан грантом AP05132071 КН МОН РК.

Ключевые слова: теорема Харди-Литтлвуда, обобщенно монотонные последовательности.

2010 Mathematics Subject Classification: 26A48, 42A16

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Интерполяционные теоремы типа теорем Марцинкевича-Кальдерона

Ерлан НУРСУЛТАНОВ[1,a]

[1] *МГУ имени М.В.Ломоносова, Казахстанский филиал, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]er-nurs@yandex.kz

Хорошо известна интерполяционная теорема Марцинкевича - Кальдерона.

Пусть $p_0 < p_1,\ \theta \in (0,1),\quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.
Тогда для квазилинейного оператора T верна оценка

$$\|T\|_{L_p \to L_p} \leq C_{p_0,p_1,p,\tau} \left(\|T\|_{L_{p_0,\tau} \to L_{p_0,\infty}}\right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{L_{p_1,\tau} \to L_{p_1,\infty}}\right)^{\theta}$$

где $0 < \tau \leq \infty$ В докладе приводятся новые интерполяционные теоремы для интегральных операторов, где условия ограничености операторов дается в терминах ядра оператора. Данные подход позволяет расширить класс интегральных операторов для которых имеет месть теоремы типа Марцинкевича - Кальдерона. Приводятся так же теоремы типа теорем экстраполяции для интегральных операторов.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05132071 КН МОН РК.

Ключевые слова: теорема Марцинкевича - Кальдерона, интерполяционная теорема.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C40, 47G10

— ⁕⁕⁕ —

Интерполяционная теорема для сетевых пространств

Ерлан НУРСУЛТАНОВ[1,a], Анар БАШИРОВА[2,b]

[1] МГУ имени Л.В.Ломоносова, Казахстанский филиал1, Астана1, Казахстан1
[2] докторант ЕНУ имени Л.Н.Гумилева2, Астана2, Казахстан2
E-mail: [a]er-nurs1@yandex.kz1, [b]anar_basirova2@mail.ru2

Пусть M - множество всех прямоугольников $Q = Q_1 \times Q_2$ из $\mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2)$- интегрируемая функция на множестве $Q \in M$. Определим

$$\bar{f}(t_1,t_2,M) = \sup_{\substack{|Q_1|\ge t_1\\ |Q_2|\ge t_2}} \frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int_{Q_1}\int_{Q_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \quad t_1>0, t_2>0,$$

где $|Q_i|$ - длина отрезка Q_i.
Пусть $0<\mathbf{p}=(p_1,p_2)<\infty$, $0<\mathbf{q}=(q_1,q_2)\le\infty$. $N_{\mathbf{pq}}(M)$ - множество всех функцийf, для которых

$$\|f\|_{N_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(M)} = \left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left(t_1^{\frac{1}{p_1}}t_2^{\frac{1}{p_2}}\overline{f}(t_1,t_2,M)\right)^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{q_2}<\infty,$$

Пусть $\mathbf{A_0}=(A_1^0,A_2^0)$, $\mathbf{A_1}=(A_1^1,A_2^1)$ два анизотропных пространства, $E=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2):\varepsilon_i=0,\text{ или }\varepsilon_i=1,\quad i=1,2\}$. Для произвольного $\varepsilon\in E$ определим пространство $\mathbf{A}_\varepsilon=(A_1^{\varepsilon_1},A_2^{\varepsilon_2})$ с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{A}}=\|\|a\|_{A_1^{\varepsilon_1}}\|_{A_2^{\varepsilon_2}}.$$

Пару анизотропных пространств $\mathbf{A_0}=(A_1^0,A_2^0)$, $\mathbf{A_1}=(A_1^1,A_2^1)$ назовем совместимой, если найдется линейное хаусдорфово пространство содержащее в качестве подмножеств пространства $\mathbf{A}_\varepsilon,\quad\varepsilon\in E$.[1],[2]

Определим K - функционал :

$$K(t,a;\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})=\inf\{\sum_{\varepsilon\in E}t^\varepsilon\|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon}\ :\ a=\sum_{\varepsilon\in E}a_\varepsilon,\ a_\varepsilon\in\mathbf{A}_\varepsilon\},$$

где $t^\varepsilon=t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2}$.

Пусть $0<\theta=(\theta_1,\theta_2)<1,\quad 0<\mathbf{q}=(q_1,q_2)\le\infty$ Через $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}=(\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})_{\theta\mathbf{q}}$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon\in E}\mathbf{A}_\varepsilon$, для элементов которых верно:

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}}=\|t^{-\theta}K(t,a)\|_{L_{\mathbf{q}}(\frac{1}{t})}<\infty.$$

Тогда верна следующая интерполяционная теорема

Теорема. *Пусть M - множество всех прямоугольников в $\mathbb{R}^2$, $1<p_0<p_1<\infty$, $1<q_0,q_1,q\le\infty$, $\mathbf{p}_i=(p_1^i,p_2^i)$, $\mathbf{q}_i=(q_1^i,q_2^i)$, $i=0,1$ тогда*

$$(N_{\mathbf{p^0},\mathbf{q^0}}(M),N_{\mathbf{p^1},\mathbf{q^1}}(M))_{\theta,\mathbf{q}}=N_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(M)$$

где $\frac{1}{\mathbf{p}}=\frac{1-\theta}{\mathbf{p_0}}+\frac{\theta}{\mathbf{p_1}}$, $\theta=(\theta_1,\theta_2)$.

Литература [1] Нурсултанов Е.Д. Сетевые пространства и неравенства типа Харди-Литлвуда, Матем. сб (1998), 189:3, 83–102

[2] Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из Lp-пространств, Изв. РАН, Сер. матем. (2000), 64:1, 95–122

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Весовая оценка одного класса квазилинейных дискретных операторов

Бибигазиза ОМАРБАЕВА[1,a], Айнур ТЕМИРХАНОВА[1,b]

[1] *Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]*gaziza.omarbaeva@mail.ru*, [b]*ainura-t@yandex.kz*

Пусть $0 < p, q, \theta < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательные, а $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ положительная, последовательности действительных чисел. Пусть $1 < p < \infty$. Рассмотрим весовую оценку

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{\theta}\big((H_{\varphi,q}f)_n\big)^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \leq C\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|u_j f_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

квазилинейного оператора

$$(H_{\varphi,q}f)_n = \Big(\sum_{k=1}^{n}\Big|\varphi_k\sum_{i=1}^{k}f_i\Big|^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

В последние годы интенсивно исследуются весовые оценки для различных классов квазилинейных операторов в связи с различными приложениями (см.,например,[1],[2],[3] и приведенные там ссылки).

Теорема 1. *Пусть $1 < p \leq q, \theta < \infty$. Тогда весовая оценка (1) для оператора $H_{\varphi,q}$ выполнена тогда и только тогда, когда $B_1 < \infty$, где*

$$B_1 = \sup_{r\geq 1}\Big(\sum_{n=r}^{\infty}\omega_n^{\theta}\Big(\sum_{k=r}^{n}\varphi_k^q\Big)^{\frac{\theta}{q}}\Big)^{\frac{1}{\theta}}\Big(\sum_{i=1}^{r}u_i^{-p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

При этом, $C \approx B_1$, где C -наилучшая константа в (1).

Теорема 2. *Пусть $0 < q < p, \theta < \infty$. Предположим $\sum\limits_{i=1}^{r}u_i^{-p'} < \infty$ для всех $r \geq 1$. Тогда весовая оценка (1) для оператора $H_{\varphi,q}$ выполнена тогда и только тогда, когда $\max\{B_1, B_2\} < \infty$, где B_1 определен в теореме 1 и*

$$B_2 = \sup_{k\geq 1}\Big(\sum_{r=1}^{k}\Big(\sum_{s=r}^{k}\varphi_s^q\Big)^{\frac{q}{p-q}}\cdot\varphi_r^q\Big(\sum_{n=1}^{r}u_n^{-p'}\Big)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\Big)^{\frac{p-q}{pq}}\Big(\sum_{i=k}^{\infty}\omega_i^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

При этом, $C \approx \max\{B_1, B_2\}$, где C -наилучшая константа в (1).

Теорема 3. *Пусть $0 < q < \theta < p < \infty$. Тогда весовая оценка (1) для оператора $H_{\varphi,q}$ выполнена тогда и только тогда, когда $\max\{C_1, C_2\} < \infty$, где*

$$C_1 = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=j}^{\infty}\Big(\sum_{s=j}^{i}\varphi_s^q\Big)^{\frac{\theta}{q}}\omega_i^{\theta}\Big)^{\frac{p}{p-\theta}}\Big(\sum_{i=1}^{j}u_i^{-p'}\Big)^{\frac{p(\theta-1)}{p-\theta}}u_j^{-p'}\Big)^{\frac{p-\theta}{p\theta}},$$

и

$$C_2 = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{j}\Big(\sum_{s=k}^{j}\varphi_s^q\Big)^{\frac{p}{p-q}}\Big(\sum_{n=1}^{k}u_n^{-p'}\Big)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}u_k^{-p'}\Big)^{\frac{\theta(p-q)}{q(p-\theta)}}\Big(\sum_{i=j}^{\infty}\omega_i^{\theta}\Big)^{\frac{\theta}{p-\theta}}\omega_j^{\theta}\Big)^{\frac{p-\theta}{p\theta}}.$$

При этом, $C \approx \max\{C_1, C_2\}$, где C -наилучшая константа в (1).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05130975 КН МОН РК.

Ключевые слова: квазилинейный оператор, весовая оценка

2010 Mathematics Subject Classification: 26D15, 47A30

Литература

[1] Burenkov V.I., Oinarov R. Necessary and Sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesque space to a Morrey-type space, *Math. Inequal. Appl.*, **16**:1 (2013), 1-19.

[2] Oinarov R., Kalybay A. Weighted estimates of a class of integral operators with three parameters, *J. Funct. Spaces. Appl.*, **2016** (2016), Article ID 1045459, 11 pages.

[3] Stepanov V.D., Shambilova G.E. On weighted iterated hardy-type operators, *Analysis Math.*,, **44**:2 (2018), 273Ц283.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Одна задача управления точечным источником тепла

Отелбаев М.[1,a], Кахарман Н. [1,2,b] Жаксылыкова Ж.[3,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования,*
[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби,*
Алматы, Казахстан
[3] *Казахский Национальный педагогический университет имени Абая,*
Алматы, Казахстан
E-mail: [a] *otelbaevm@mail.ru,* [b]*n.kakharman@math.kz,* [c]*Zhaksylykova0507@mail.ru*

В медицине известно, что некоторые вызывающие серьезные заболевания вирусы и клетки погибают при температуре более 43° по Цельсию. При такой температуре здоровые клетки организма выживает. Поэтому используют термолечение. Для этого погружают пациента в горячую ванну. С древних времен используют ванну с температурой около 40° по Цельсию. Такую температуру пациент переносит. Но пациент погруженный ванну очень плохо переносит температуру выше 43° по Цельсию.

Температура 43° нужна лишь для того участка тела пациента в которой находится больные клетки и нежелательные микробы. Поэтому необходимо иметь возможность создавать нужную температуру на больном участке тела, для остальной части тела сохранив температуру около 40° по Цельсию.

Такая возможность можно создать с помощью управляемого точечного источника тепла. В статьях [1]-[9] показано, что на заданной поверхности можно создать любое заранее запланированное распределение тепла. Показано, что можно управлять динамикой процесса распределения тепла по времени. Приведен математический алгоритм решения такой задачи. Так как в реальной ситуации необходимо управлять распределением тепла в объеме (а не только в поверхности), то наша задача будет отличаться от задачи, решенной в [1]-[9], (хотя используем в идейном плане сходный математический аппарат).

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^3$ есть куб $[-\pi;\pi]$.
Пусть

$$\Omega = \Omega_- \cup Q \cup \Omega_+ \tag{1}$$

где $Q-$куб с ребрами равными 2π, параллельными координатным осям. Область $\Omega_\pm$ заданы следующим образом

$$\Omega_- = \{0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi, -\delta \le z \le 0\}$$

$$\Omega_+ = \{0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi, 0 \le z \le +\delta\}$$

Нас будет интересовать следующая задача: Функция $u(t,x,y,z)$ удовлетворят в областях $\Omega_{\pm}$,Q уравнению теплопроводности

$$\begin{aligned} u_t - a^2(z)\triangle u = 0, \\ u(t,x,y,z)|_t = 0; \end{aligned} \tag{2}$$

где $a^2(z)$

$$a^2(z) = \begin{cases} a_- & \text{при} \quad \delta \le z \le -\pi, \\ a & \text{при} \quad 0 \le z \le \pi, \\ a_+ & \text{при} \quad 0 \le z \le \pi + \delta. \end{cases} \tag{3}$$

К (1) добавляем условия

$$\begin{array}{ll} u(t,x,y,z)|_{x=0} = 0, & u(t,x,y,z)|_{x=\pi} = 0, \\ u(t,x,y,z)|_{y=0} = 0, & u(t,x,y,z)|_{y=\pi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{z=-\delta} = \mu(t,x,y,-\delta), & \frac{\partial u}{\partial n}|_{z=\pi+\delta} = \mu(t,x,y,\pi+\delta), \\ u_+(x,y,z,0) = u_-(x,y,z,0), & u_+(x,y,z,\pi) = u_-(x,y,z,\pi). \end{array} \tag{4}$$

В подледных строчках равенства (4) индексы $+$ и - означают пределы справа и слева (для $z \in (-\infty; +\infty)$).

Функции μ являются управлением.

Ставится следующая цель: в области Q содержится подобласть $\widehat{Q}$ с небольшим объемом. Необходимо выбрать управление $\mu(t,x,y,\pm\delta)$ так чтобы выполнялись

а) при $0 \le t \le T_0$ выполнялись неравенства

$$\begin{array}{lll} C_0 - \delta \le u(t,x,y,z) \le C_0 & \text{в} & Q \setminus \widehat{Q}, \\ C_1 - \delta \le u(t,x,y,z) \le C_0 + \delta & \text{в} & \widehat{Q}. \end{array}$$

в) при $T_0 \le t \le T_1$ выполнялись неравенство

$$\begin{array}{lll} C_0 + \frac{\delta}{2} \le u(t,x,y,z) \le C_0 + \delta & \text{в} & \widehat{Q}, \\ C_0 - \frac{\delta}{2} \le u(t,x,y,z) \le C_0 + \delta & \text{в} & Q \setminus \widehat{Q}. \end{array}$$

и, чтобы $mes\{(x,y,z) \in Q \setminus \widehat{Q}\} \le C_2\delta$ ($mes-$ мера Лебега).

Функция $\mu(t,x,y)$ из (4) нужно взять следующего вида

$$\mu(t,x,y,\delta) = M\delta(x - \omega(t)) \tag{5}$$

где $\delta(x)$- дельта функция Дирака на поверхности, M-мощность лазерного источника тепла, $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ траектория луча. И задача состоит в следующими:

I. Необходимо выбрать в (4) так, чтобы в области получить (приближенно) заданное распределение тепла.

II. Выбранные в I) функций приблизить (в среднем) функциями вида (5).

Часть I) можно решать методом предложенным в [6]-[9].

А часть II) решается путем использованным в работах Отелбаева и турецкого математика Хасаноглы [1]-[5].

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05135319, AP05133239 КН МОН РК.

Ключевые слова: Дельта функция Дирака, лазерного источника тепла

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K05, 49N45, 47A05

Литература

[1] М. Отелбаев, А. Гасанов, Б. Акпаев, Об одной задаче управления точечных источником тепла, ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2010, том 435, с. 317Ц319.

[2] Гаджиев А.М., Гасанов А.И., Фатуллаев А.Г. Мат.моделирование. 1991. 3(1). С. 18Ц24.

[3] Отелбаев М., Молдабеков С.М. Об управлении линейным операторным уравнением. В сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения. АлмаАта: КазГУ, 1982. С. 6Ц9.

[4] Отелбаев М., Болеева М.К. Изв. НАН РК. Сер.физ.-матем. 1994. No.3. С. 46Ц51.

[5] Hasanov A., Otelbaev M. Identification of an Unknown Source Term in Parabolic Equation from Final Over determination: Weak.

[6] Смагулов Ш.С., Балдыбек Ж.А., Отелбаев М.О. Метод дополненных областей для уравнений Навье-Стокса. Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 1993.

[7] Смагулов Ш.С., Отелбаев М.О., Мухаметжанов А.Т. Об одном новом приближенном методе решения нелинейных краевых задач. Препринт ИА РК, No.21, 1997, С.34.

[8] Смагулов Ш.С., Отелбаев М.О. О новом методе приближенных решений краевых задач в произвольной области. Известия НАН РК, том 7, No.6, 1998. Стр 452-455.

[9] Смагулов Ш.С., Отелбаев М.О. Эллиптика-параболическая аппроксимация для уравнения Навье-Стокса. Монография.-Алматы. 2002. 9 стр.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О базисности корневых функций краевых задач для оператора Штурма–Лиувилля с симметричным потенциалом

Махмуд САДЫБЕКОВ

Институт математики и математического моделирования,
Алматы, Казахстан
E-mail: sadybekov@math.kz

В докладе рассмотрена спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

на интервале $(0, \pi)$ с двухточечными краевыми условиями общего вида:

$$\begin{cases} U_1(y) = a_{11}y'(0) + a_{12}y'(\pi) + a_{13}y(0) + a_{14}y(\pi) = 0, \\ U_2(y) = a_{21}y'(0) + a_{22}y'(\pi) + a_{23}y(0) + a_{24}y(\pi) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $U_1(y)$ и $U_2(y)$ – линейно независимые формы с комплексными коэффициентами.

По своим спектральным свойствам краевые условия (2) традиционно разделяют на 4 основных типа:
1) усиленно регулярные;
2) регулярные, но не усиленно регулярные;
3) нерегулярные;
4) вырожденные.

Известно, что в первом случае система корневых функций задачи (1), (2) всегда является базисом Рисса в $L_2(0, \pi)$. Этот результат независимо доказан в книге Данфорд Н. и Шварц Дж. (1966), В.П. Михайловым (1962) и Г.М. Кесельманом (1964).

В третьем случае, как впервые было показано Stone M.H. в 1927 году, она никогда не образует даже обычного базиса в $L_2(0, \pi)$. Решение вопроса о базисности корневых функций для четвертого случая краевых условий дано в недавней работе А.С. Макина 2018 года. Им доказано, что никакая система корневых функций задачи (1), (2) с вырожденными краевыми условиями не образует даже обычного базиса в $L_2(0, \pi)$.

Таким образом, благодаря исследованиям многих математиков, проблема базисности системы корневых функций задачи (1), (2) сведена к исследованию случая регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий.

При этом хорошо известно, что в этом случае, в зависимости от конкретного вида краевых условий и функции $q(x)$, система корневых функций задачи может обладать или не обладать свойством базисности в $L_2(0,\pi)$. Однако, как показано А.А. Шкаликовым в 1979 году, корневые функции задачи можно объединить парами так, что соответствующие двумерные подпространства образуют базис Рисса из подпространств (и безусловный базис со скобками).

Впервые В.А. Ильин построил пример двух операторов с одними и теми же (регулярными, но не усиленно регулярными) краевыми условиями и сколь угодно близкими (в любой метрике) бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, которые имеют принципиально различные свойства: у одного имеется базис из корневых функций, у другого – нет. В частности, отсюда следует, что проблема базисности корневых функций для задач с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями, вообще говоря, не может быть решена в терминах коэффициентов краевого условия.

В настоящем докладе, для случая, когда комплекснозначный коэффициент $q(x) \in L_1(0,\pi)$ удовлетворяет условию симметрии

$$q(x) = q(\pi - x), \quad 0 < x < \pi, \tag{3}$$

дано полное описание свойств базисности в $L_2(0,\pi)$ корневых функций двухточечных краевых задач в терминах коэффициентов краевого условия.

Доклад основан на результатах совместных исследований с Т.Ш. Кальменовым и Б.Н. Бияровым.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05133271 КН МОН РК.

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля, двухточечная краевая задача, собственные функции, корневые функции, безусловный базис

2010 Mathematics Subject Classification: 34B09, 34B24, 34L10

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Оценки нормы оператора свертки в анизотропных пространствах Бесова с доминирующей смешанной производной

Келбет САДЫКОВА[1,a], Назерке ТЛЕУХАНОВА[1,b]

[1] *Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]*sadkelbet@gmail.com*, [b]*tleukhanova@rambler.ru*

Пусть $\mathbb{T}^n = [0,1)^n$ – n-мерный тор, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{1 < p=} (p_1,\dots,p_n) \mathbf{<\infty,\ 0 < q} = (q_1,\dots,q_n) \mathbf{\le\infty}$. Следуя работе [1] определим пространство $B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{T}^n)$ как множество рядов $f = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i(m,x)}$ (вообще говоря, расходящиеся), для которых конечна величина

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{T}_n)} = \left(\sum_{k_n=0}^{\infty}\dots\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j k_j}\|\Delta_k(f)\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\dots\right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty,$$

где $\Delta_k(f)(x) = \sum\limits_{\substack{2^{k_j-1}\le|m_j|<2^{k_j}\\ j=1,\dots,n}} a_m e^{2\pi i(m,x)}$, $k \in \mathbb{Z}^n_+$, $(m,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i$.

При $q=\infty$ величины $\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$, $\left(\int\limits_{\mathbb{T}} f^q\right)^{\frac{1}{q}}$ будем понимать соответственно как $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}|b_k|$, $ess\sup\limits_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|$.

Будем говорить, что ряд $f(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i(k,x)}$ является элементом пространства $W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$ (см. [1]), если найдется функция $f^{\boldsymbol{\alpha}}\in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n}\bar{k}^{\alpha} a_k e^{2\pi i(k,x)}$, здесь $\bar{k}^{\alpha}=\prod\limits_{j=1}^{n}\bar{k}_j^{\alpha}$, $\bar{k}_j=\max\{|k_j|,1\}$, $j=1,\dots,n$,

$$\|f\|_{W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}\overset{def}{=}\|f^{\alpha}\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}.$$

Определим понятие свертки для элементов этих пространств.

Пусть $f(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i(k,x)}$ и $g(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k e^{2\pi i(k,x)}$ тригонометрические ряды. Под сверткой этих рядов будем понимать ряд

$$(f*g)(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k b_k e^{2\pi i(k,x)}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{1}\le\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{r}<\infty$, $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}+\mathbf{1}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}$, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$. *Предположим, что* $f\in W^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$, $g\in W^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^n)$. *Тогда* $f*g\in W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^n)$ *и*

$$\|f*g\|_{W^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^n)}\le\|f\|_{W^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}\|g\|_{W^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^n)}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}\le\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$, $1\le\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{r}<\infty$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}+\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}$. *Предположим, что* $f(x)$ *и* $g(x)$ *– измеримые функции на* $\mathbb{T}^n$, *такие что* $f\in B^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}}(\mathbb{T}^n)$, $g\in B^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}\boldsymbol{\xi}}(\mathbb{T}^n)$. *Тогда* $f*g\in B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{qh}}(\mathbb{T}^n)$ *и*

$$\|f*g\|_{B^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{qh}}(\mathbb{T}^n)}\le C\|f\|_{B^{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}}(\mathbb{T}^n)}\|g\|_{B^{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{r}\boldsymbol{\xi}}(\mathbb{T}^n)},$$

где $\dfrac{1}{\mathbf{h}}\le\dfrac{1}{\boldsymbol{\eta}}+\dfrac{1}{\boldsymbol{\xi}}$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05132590 КН МОН РК.

Ключевые слова: оператор свертки, анизотропные пространства Бесова, анизотропные пространства Соболева.

2010 Mathematics Subject Classification: 44A35, 46E35, 47G10, 30H25

Литература

[1] Nursultanov E.D. Interpolation theorems for anisotropic function spaces and their applications, *Dokl. Math.*, **69**:1 (2004), 16–19.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Абдисалам САРСЕНБИ

Южно-Казахстанский Государственный Университет имени М. Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан; Институт Математики и математического моделирования КН МОН РК, г. Алматы, Казахстан
E-mail: abzhahan@mail.ru

В докладе будет проведен краткий обзор новых результатов по теории базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов и одномерных дифференциальных операторов с инволюцией, их сравнительный анализ. Рассматриваются дифференциальные операторы второго порядка с инволюцией вида

$$Lu = -u''(x) + \alpha u''(-x) + q(x)\,u(x)\,,\ -1 < x < 1.$$

Получены теоремы о базисности собственных функций и равносходимости разложений по собственным функциям. Доказана базисность корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций. Установлены базисность собственных функций и равносходимость разложений по собственным функциям дифференциального оператора второго порядка с инволюцией вида

$$Lu = -u''(-x) + q(x)\,u(x)\,,\ -1 < x < 1.$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05131225 КН МОН РК.

Ключевые слова: Инволюция, метод Фурье, смешанная задача, собственные функций, базис.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35D35, 34K08, 34L10, 46B15

Литература

[1] Kritskov L. V., Sarsenbi A. M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution, *Differential Equations*, **53**:1 (2017), 33–46.

[2] Kritskov L. V., Sarsenbi A. M. Equiconvergence Property for Spectral Expansions Related to Perturbations of the Operator with Initial Data, *Filomat*, **32**:3, (2018), 1069–1078. doi.org/10.2298/FIL1803069K.

[3] Kritskov L. V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A. M. Nonlocal spectral problem for a second-order differential equation with an involution, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. Special issue.*, **3**:91 (2018), 53–61.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

НЕКОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВИДА С ИНВОЛЮЦИЕЙ И УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ

Абдисалам САРСЕНБИ

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан.
Институт Математики и математического моделирования КН МОН РК, г.Алматы
E-mail: salam@mail.ru,

В прямоугольной области $\{(x,t) : -1 < x < 1,\ t \geq 0\}$ рассмотрим следующую задачу:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(-x,t)\,, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$u(-1,t) = 0,\ \ u_x(-1,t) = u_x(1,t)\,, \quad u(x,0) = \varphi(x)\,. \quad (2)$$

Применение метода Фурье к задаче (1), (2) приводит к несамоспряженной спектральной задаче с инволюцией

$$-X''(-x) = \lambda X(x)\,, \quad X(-1) = 0,\ \ X'(-1) = X'(1)\,. \quad (3)$$

Спектральная задача (3) несамосопряженная, имеет две серии собственных значений $\lambda_{k1} = -k^2\pi^2,\ \lambda_{k2} = k^2\pi^2$. Им соответствуют собственные функции

$$X_0(x) = x+1,\ \ X_{k1}(x) = sink\pi x,\ \ k = 1,2...\ ;$$

$$X_{k2}(x) = (-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + cosk\pi x,\ k = 1,2...; \quad (4)$$

которые образуют базис Рисса в классе $L_2(-1,1)$ [1].

Стандартным способом выписывается формальное решение смешанной задачи (1), (2) в виде ряда

$$u(x,t) = A_0(x+1) + \sum_{\lambda_{k1}\neq 0} A_k e^{-\lambda_{k1}t} X_{k1} + \sum_{\lambda_{k2}} B_k e^{-\lambda_{k2}t} X_{k2}$$

$$A_k = \int_{-1}^{1} \varphi(x) Y_{k1} dx, \quad B_k = \int_{-1}^{1} \varphi(x) Y_{k2} dx, \; A_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx. \qquad (5)$$

где Y_{ki} биортогонально сопряженная система. Смешанная задача (2) для уравнения параболического вида с инволюцией (1) поставлена некорректно. Например, возмущение $u_\delta(x,t) = \varepsilon e^{-\lambda_{k1}t}\sin k\pi x$ не превосходит числа ε при $t=0$, но будет большим любого наперед заданного числа C_0 для $t=\delta$, при достаточно малых ε и δ и достаточно большом k. Тем не менее, решение изучаемой смешанной задачи существует и единственно.

Теорема 1. *Если решение смешанной задачи (1), (2) существует, то оно единственно. Сформулируем условия существования решения.*

Теорема 2. *Если начальная функция $\varphi(x)$ является полиномом по системе $\{X_k(x)\}$ вида*

$\varphi(x) = A_0(x+1) + \sum_{k=1}^{N_1} a_k X_{k1} + \sum_{k=1}^{N_2} b_k X_{k2}$, то решение задачи (1), (2) существует, единственно и представимо в виде (5). Так как множество полиномов по системе $\{X_k\}$, образующей базис Рисса, всюду плотно в $L_2(-1,1)$, то из Теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Множество допустимых начальных функций в Теореме 2, для которых смешанная задача (1), (2) разрешима, всюду плотно в $L_2(-1,1)$.*

Полученные результаты справедливы и в случае уравнения

$$u_t(x,t) = u_{xx}(-x,t) + q(x)\, u(x,t), \quad -1 \le x \le 1, \quad t \ge 0,$$

с непрерывным коэффициентом.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05131225 КН МОН РК.

Ключевые слова: Инволюция, метод Фурье, смешанная задача, собственные функций, базис.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35D35, 34K08, 34L10, 46B15

Литература

[1] Сарсенби А.А. Полнота и базисность собственных функций спектральной задачи с инволюцией, *Математический журнал*, **17**:2(64) (2017), 175–183.

— ⁂ —

Об одном методе исследования многопериодического решения системы с различными операторами дифференцирования

Жайшылык САРТАБАНОВ[1,a], Амире ЖУМАГАЗИЕВ[2,b], Галия АБДИКАЛИКОВА[3,c]

[1,2,3] *Актюбинский региональный государственный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан*

E-mail: [a]sartabanov42@mail.ru, [b]charmeda@mail.ru, [c]agalliya@mail.ru

Рассматривается система уравнений

$$D_1 x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + f_1(\tau,t)$$
$$D_2 x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + f_2(\tau,t), \qquad (1)$$

где x_i - искомые n_i-вектор-функции, $i = 1, 2$; $D_1 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle a_1, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle a_2, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$, $a_1 \neq a_2$ - постоянные m-векторы, $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$, $\langle a_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$- скалярное произведение; A_{ij}-$n_i \times n_j$-матрицы, $f_i(\tau, t)$- n_i-вектор-функции.

Предполагается, что вектор-функции $f_i(\tau, t)$ обладают (θ, ω)-периодичностью и $C^{(0,e)}_{\tau,t}(R \times R^m)$ свойством гладкости порядка $(0, e) = (0, 1, \ldots, 1)$ по $(\tau, t) = (\tau, t_1, \ldots t_m) \in R \times R^m$: $f_i(\tau + \theta, t + q\omega) = f_i(\tau, t)$.

Здесь $(\theta, \omega) = (\theta, \omega_1, \ldots, \omega_m)$ - период с рационально несоизмеримыми координатами $\omega_0 = \theta, \omega_1, \ldots, \omega_m$, $q\omega = (q_1\omega_1, \ldots, q_m\omega_m)$ - m-вектор.

Цель сообщения - установить достаточные условия существования и единственности (θ, ω)-периодического решения системы (1) и их интегральные представления.

Наряду с системой (1) рассмотрим однородную систему

$$Dx = Ax \tag{2}$$

положив $D = (D_1, D_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $A = [A_{ij}]_{i,j=1,2}$. Заменой $x = By$ (2) запишем в виде $Dy = Jy$ с жордановой матрицей $J = diag(J_1, \ldots, J_k)$, где B-неособая n-матрица; J_j блоки матрицы J порядков l_j с поддиагональными единицами, $j = \overline{1,k}$, $l_1 + \ldots + l_k = n_1 + n_2 = n$.

$x(\tau, t - a_1\tau, t - a_2\tau) = X(\tau - \tau_0)Pc(h(\tau_0, \tau, t)) + \widetilde{x}(\tau_0, \tau, t)$ общее решение

$$Dx = Ax + f(\tau, t), \tag{3}$$

с произвольными дифференциальными вектор-функциями $c(\sigma)$ и оператором P действующим по правилу $X(\tau)P = [X_{ij}(\tau)P_i]$ с проекторами $P_i c_j(\sigma) = c_j(\sigma_i)$, $X(\tau)Pc(h(\tau_0, \tau, t))$ решение (2), $c(h)$-произвольная дифференцируемая функция:
$\widetilde{x}(\tau_0, \tau, t) = \int_{\tau_0}^{\tau} X(\tau - s)Pf(s, h(s, \tau, t))ds$ частное решение (3), $\sigma_i = t - a_i\tau$. Оператор $P = [P_1, P_2]$ называют проектором, определяющим функцию на соответствующей характеристике.

Дополнительно предположим, что у матрицы A все собственные значения $\lambda_j(A)$ имеют отличные от нуля действительные части.

Многопериодические решения системы (3) можно представить в виде

$$x^*(\tau, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau - s)Pf(s, h(s, \tau, t))ds, \tag{4}$$

где функцию Грина $G(\tau)$ разбив на блоки $G_{ij}(\tau)$ из интегрального представления (4) решения системы (1) имеем интегральное представление многопериодического решения рассматриваемой системы.

На основе метода характеристик разработана методика построения решений начальной задачи для системы с различными операторами дифференцирования вдоль двух прямых пространства независимых переменных. В некритическом случае доказана теорема существования и единственности многопериодического решения системы и дано его интегральное представление. Полученные результаты можно обобщить на общие случаи, включая нелинейные системы, пользуясь методами [1-3].

Ключевые слова: многопериодичность, некритичность,характеристика, проектор, оператор дифференцирования.

2010 Mathematics Subject Classification: 35B10, 35F35

Литература

[1] Харасахал В.Х. *Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Алма-Ата: Наука. 1970. -200с.

[2] Умбетжанов Д.У. *Почти периодические решения эволюционных уравнений*, Алма-Ата: Наука. 1990. -184с.

[3] Sartabanov Z.A. The multi-period solution of a linear system of equations with the operator of differentiation along the main diagonal of the space of independent variables and delayed arguments, *AIP Conference Proceedings*, 1880, 040020 (2017)

— ⋇ ⋇ ⋇ —

О функции Грина аналога задачи Робена для полигармонического уравнения

Мухаббат ТАЖИМЕТОВА [1,a], Батирхан ТУРМЕТОВ[1,b]

[1] *Международный казахско-турецкий университет имени А.Ясави, Туркестан, Казахстан*

[a]*E-mail: muhabbat2595@mail.ru,* [b] *turmetovbh@mail.ru*

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - n-мерный единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega$ - единичная сфера.

Явный вид функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравния в шаре Ω построены различными авторами. Например, в работе [1] показано, что функция Грина задачи Дирихле имеет вид

$$G_D\left(x,y\right) = K_{m,n}|x-y|^{2m-n} \int\limits_1^{g(x,y)} (t^2-1)^{m-1} t^{1-n} dt,$$

где

$$g(x,y) = \frac{1}{|x-y|} \left| x|y| - \frac{y}{|x|} \right|, K_{m,n} = \frac{1}{4^{m-1}((m-1)!)^2 \omega_n}, \omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2).$$

Пусть $r = |x|, r\frac{\partial}{\partial r} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Рассмотрим операторы

$$\Gamma_a = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + a\right), \Gamma_a^{(k)} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + a\right)^k \equiv \underbrace{\Gamma_a \cdot ... \cdot \Gamma_a}_{k}, k \geq 2.$$

Свойства и применение операторов типа $\Gamma_a^{(k)}$ в классе гармонических функций были изучены в работе [2]. В настоящей работе мы исследуем метод построения функции Грина следующего аналога третьей краевой задачи

$$(-\Delta)^m u(x) = f(x), x \in \Omega, \Gamma_a^{(k)}[u](x) = 0, x \in \partial\Omega, k = 1, 2, ..., m. \tag{1}$$

Приведем основное утверждение относительно задачи (1).

Теорема. *Пусть $a > 0, 0 < \lambda < 1$ и $f(x) \in C^{\lambda+1}(\overline{\Omega})$. Тогда решение задачи (1) можно представить в виде*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_a(x,y) f(y) dy,$$

где функция Грина $G_a(x,y)$ имеет вид

$$G_a(x,y) = G_D(x,y) + K(1-|y|^2)^{m-1} \int\limits_0^1 s^{a-1} \frac{(1-s^2|x|^2)^{m-1}(1-s^2|x|^2|y|^2)}{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|^n} ds.$$

Следствие. *Если $m = 1$, то функция Грина задачи Робена для уравнения Пуассона представляется в виде*

$$G_a(x,y) = G_D(x,y) + \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^1 s^{a-1} \frac{1-s^2|x|^2|y|^2}{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|^n} ds.$$

Данное представление в случае $n = 2$ получено в работе [3].

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05131268 КН МОН РК.

Ключевые слова: задача Робена, задача Дирихле, полигармоническое уравнение, функция Грина

2010 Mathematics Subject Classification: 31B30; 35C10; 35J40; 35J08

Литература

[1] Gazzola F., Grunau H.-Ch., Guido S. *Polyharmonic Boundary Value Problems*, Springer-Verlag, Berlin (2010).

[2] Баврин И.И. Операторы для гармонических функций и их приложения, *Дифф.урав.*, **21** (1985) 9–15.

[3] Sadybekov M. A., Torebek B. T., Turmetov B. Kh. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle, *Adv. Pure Appl. Math.*, **6**, (2015) 163–172.

— ⁂ —

О некоторых нелокальных краевых задачах для уравнения Пуассона

Батирхан ТУРМЕТОВ,

Международный казахско-турецкий университет имени А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: turmetovbh@mail.ru,

В настоящей работе исследуется вопросы разрешимости некоторых нелокальных краевых задач для уравнения Пуассона. Рассматриваемые задачи являются обобщениями классических краевых задач Дирихле и Неймана.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар $n \geq 2$, а $\partial\Omega$ - единичная сфера, S - действительная ортогональная матрица $S \cdot S^T = E$. Предположим также, что существует такое натуральное $l \in N$ что $S^l = E$.

Примерами таких отображений являются: 1) $Sx = -x$. Тогда $S = S^T$ и $l = 2$;

2) Пусть $\varphi = 2\pi/l, l \in N$. Рассмотрим матрицу S следующего вида

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Тогда $S \cdot S^T = E, S^l = E$.

Пусть $a_1, a_2, ..., a_l$ некоторые действительные числа. Рассмотрим в Ω следующие задачи.

Задача D. *Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям*

$$-\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{l} a_k u\left(S^{k-1}x\right) = g(x),\ x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Задача N. *Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее уравнению (1) и краевому условию*

$$\sum_{k=1}^{l} a_k \frac{\partial u}{\partial \nu}\left(S^{k-1}x\right) = g(x),\ x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

В случае $a_1 \neq 0,\ a_k = 0,\ k = 2, 3, ..., l$ мы получаем классические задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона. Отметим, что в случае $n = 2$ задачи D и N с отображениями вида S из примера 2 изучены в работе [1].

В работе доказаны теоремы о существования и единственности решения исследуемых задач. Установлены также интегральные представления решений рассматриваемых задач. Введены понятия функции Грина и построены явный вид этих функций. Изучены также соответствующие спектральные вопросы. Найдены собственные функции и собственные значения рассматриваемой задачи и для некоторых частных случай доказана полнота систем собственных функций.

В частности доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть числа* $\{a_k : k = 1, ..., l\}$ *такие, что* $\mu_k = a_1\lambda_0^k + ... + a_l\lambda_{l-1}^k \neq 0$ *при* $k = 1, ..., l$, *где* $\{\lambda_k\}$ *корни степени* l *из единицы и* $f \in C^{\lambda}(\bar{\Omega}),\ g \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega), 0 < \lambda < 1$. *Тогда решение задачи D существует, единственно, принадлежит классу* $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$ *и представляется в виде*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_S(x, y)f(y)\, dy + \int\limits_{\partial\Omega} P_S(x, y)g(y)\, ds_y,$$

где

$$G_S(x, y) = \sum_{k=1}^{l} a_k \sum_{q=1}^{l} b_q G\left(S^{q-1}x, \left(S^{k-1}\right)^T y\right), P_S(x, y) = \sum_{q=1}^{l} b_q P(S^{q-1}x, y),$$

$G(x, y)-$ *функция Грина классической задачи Дирихле, а* $P(x, y)-$*ядро Пуассона,* b_q- *некоторые постоянные.*

Funding: Работа была поддержана грантом AP05131268 КН МОН РК.

Ключевые слова: нелокальная задача,уравнение Пуассона, задача Дирихле, задача Неймана,функция Грина

2010 Mathematics Subject Classification: 31B05,35A09,35C15

Литература

[1] Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument, *Commentat. Math.*, **17** (1974), 451–457.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

3 Математическое моделирование и уравнения математической физики

On the periodic problem for an impulsive partial differential equation of fourth order

Aziza ABILDAYEVA[1,a], Agila TLEULESSOVA[1,2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *L.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
E-mail: [a]*azizakz@mail.ru*, [b]*agila72@mail.ru*

We consider on the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ a periodic problem for the impulsive system of partial differential equation of fourth order

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + B_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + A_2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$+ B_2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + A_3(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B_3(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\Big|_{t=T}, \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2)$$

$$\lim_{t \to t_r + 0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \lim_{t \to t_r - 0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \varphi_r(x), \ r = \overline{1,k}, \qquad (3)$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi_2(t), \ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = \psi_2(t), \ t \in [0,T], \qquad (4)$$

where $u(t,x) = col(u_1(t,x),...,u_n(t,x))$ is unknown function, the $n \times n$ matrices $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i = \overline{1,3}$, $C(t,x)$, and n vector function $f(t,x)$ are piecewise continuous on Ω with possible discontinuities at lines $t = t_r$, $r = \overline{1,k}$; the n vector-functions $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ are piecewise continuously differentiable on $[0,T]$ with possible discontinuities at lines $t = t_r$, $r = \overline{1,k}$; the n vector functions $\varphi_r(x)$, $r = \overline{1,k}$, are continuously differentiable on $[0,\omega]$.

We investigated a questions for existence and uniqueness of solution to problem (1)–(4) by method of introduction additional parameters [1].

Funding: The authors were supported by the grant AP05131220 of SC of the MES of RK.

Keywords: impulsive partial differential equation, periodic problem, method of introduction additional parameters, solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G35, 35G40, 35G46, 35L53, 35L55, 35L57

References

[1] Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equations, *Electronic J. Differ. Equ.,* **2018**:72 (2018), 1–8.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On the solvability of nonlocal problem for a fourth order partial differential equation

Anar ASSANOVA[1,a], Askarbek IMANCHIYEV[1,2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: [a]*assanova@math.kz*, [b]*imanchiev_ae@mail.ru*

Consider on the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ a nonlocal problem for the system of partial differential equation of fourth order

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} = \sum_{i=1}^{3} \Big\{ A_i(t,x)\frac{\partial^{4-i} u}{\partial x^{4-i}} + B_i(t,x)\frac{\partial^{4-i} u}{\partial x^{3-i} \partial t} \Big\} + C(t,x)u + f(t,x), \qquad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=1}^{3}\Big\{P_{k,j}(x)\frac{\partial^{4-k}u(t,x)}{\partial x^{4-k}}+S_{k,j}(x)\frac{\partial^{4-k}u(t,x)}{\partial x^{3-k}\partial t}\Big\}\Big|_{t=t_j}=\varphi(x), x\in[0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0)=\psi_0(t),\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0}=\psi_1(t),\ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=\psi_2(t),\ t\in[0,T], \tag{3}$$

where $u(t,x)=col(u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x))$ is unknown function, the $n\times n$ matrices $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i=\overline{1,3}$, $C(t,x)$, and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω, the $n\times n$ matrices $P_{k,j}(x)$, $S_{k,j}(x)$, $k=\overline{1,3}$, $j=\overline{0,2}$, and n vector function $\varphi(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, $0=t_0<t_1<t_2=T$, the the n vector-functions $\psi_s(t)$, $s=\overline{0,2}$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

We also consider an auxiliary nonlocal problem for system of hyperbolic equations second order

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}=A_1(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}+B_1(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}+A_2(t,x)v+g(t,x), \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{2}\Big\{P_{3,j}(x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}+S_{3,j}(x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\Big\}\Big|_{t=t_j}=\Phi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{5}$$

$$v(t,0)=\psi_2(t), \qquad t\in[0,T]. \tag{6}$$

Here the functions $g(t,x)\in C(\Omega,R^n)$, $\Phi(x)\in C([0,\omega],R^n)$.

For $P_{3,1}(x)=S_{3,1}(x)=0$ problem (4)–(6) are investigated in [1, 2].

For $j=\overline{0,m}$, $m=2,3,...$, are studied in [3, 4].

The following assertion is true.

Theorem 1. *Let*

i) the $n\times n$ *matrices* $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i=\overline{1,3}$, $C(t,x)$, *and* n *vector function* $f(t,x)$ *are continuous on* Ω;

ii) the $n\times n$ *matrices* $P_{k,j}(x)$, $S_{k,j}(x)$, $k=\overline{1,3}$, $j=\overline{0,2}$, *and* n *vector function* $\varphi(x)$ *are continuous on* $[0,\omega]$;

iii) the n *vector-functions* $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, *and* $\psi_2(t)$ *are continuously differentiable on* $[0,T]$;

iv) the nonlocal problem for system of hyperbolic equations second order (4)–(6) is uniquely solvable for any $g(t,x)\in C(\Omega,R^n)$, $\Phi(x)\in C([0,\omega],R^n)$, *and* $\psi_2(t)\in C^1([0,T],R^n)$.

Then problem (1)–(3) has a unique solution.

Theorem 1 is proved analogously scheme of proof Theorems 1 and 2 in [5].

Remark. For $P_{3,0}(x)=I$, $P_{3,2}(x)=-I$, where I is identity matrix on dimension n, and the remaining boundary matrices and function $\varphi(x)$ will be zeros, we obtain the periodic problem for fourth order partial differential equations.

Funding: The authors were supported by the grant AP05131220 of SC of the MES of RK.

Keywords: fourth order partial differential equation, nonlocal problem, system of hyperbolic equations, method of introduction additional parameters, solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G35, 35G40, 35G46, 35L53, 35L55, 35L57

References

[1] Asanova A.T. A nonlocal boundary value problem for systems of quasi-linear hyperbolic equations, *Doklady Mathematics*, **74**:3 (2006), 787–791.

[2] Asanova A.T. Criteria of unique solvability of nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives, *Russian Mathematics (Iz.VUZ)*, **60**:5 (2016), 1–17.

[3] Asanova A.T., Imanchiev A.E. On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasi-linear systems of hyperbolic equations, *Eurasian Math. J.*, **6**:4 (2015), 19–28.

[4] Asanova A.T. Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative, *J. Math. Sciences (United States)*, **212**:3 (2016), 213–233.

[5] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *J. Math. Anal. and Appl.*, **402**:1 (2013), 167–178.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

A numerical algorithm for solving problem with parameter for a loaded differential equation

Elmira BAKIROVA[1,a], Zhazira KADIRBAYEVA[1,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]bakirova1974@mail.ru, [b]kadirbayeva@math.kz

In the present paper we consider the problem for the linear loaded differential equations with parameter

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + B(t)\mu + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)x(\theta_j) + f(t), \quad x, \mu \in R^n, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$x(0) = x^0, \quad x^0 \in R^n, \tag{2}$$

$$x(T) = x^1, \quad x^1 \in R^n, \tag{3}$$

where the $(n \times n)$ - matrices $A_j(t)$, $j = \overline{0,m}$, $B(t)$ and n-vector-function $f(t)$ are continuous on $[0,T]$.

A solution to problem (1)-(3) is a pair $(\mu^*, x^*(t))$, where $\mu^* \in R^n$, the vector function $x^*(t)$ is continuous on $[0,T]$, continuously differentiable on $(0,T)$ and satisfies Eq. (1) with $\mu = \mu^*$ and additional conditions (2), (3).

Loaded differential equations can be used to describe processes in biology, ecology, and underground fluid dynamics. In [1] a linear boundary value problem for the system of loaded differential equations with multipoint integral condition is considered. The method of parameterization [2], [3] is used for solving the problem considered. Numerical method for finding solution to the problem is suggested. The method is based on solving the Cauchy problem on subintervals by using Runge-Kutta method of the 4-th order. In [4] parameterization method is developed for problem (1)–(3), where $A_j(t) = 0$, $j = \overline{1,m}$. A numerical method for solving this problem is offered.

Problem for the linear loaded differential equations with parameter (1)–(3) is investigated. The parameterization method is used to solve the problem. The essence of parameterization method is that segment, where the loaded differential equation is considered, is divided into parts by loading points, and the initial problem is reduced to the problem with parameters. The boundary value problem with parameters equivalent to the considered problem consists of the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations with parameters, boundary condition and continuity conditions. The solution to the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations with parameters is constructed using the fundamental matrix of differential equation. The system of linear algebraic equations with respect to the parameters is composed by substituting the values of corresponding points of solutions into the boundary condition and continuity conditions. Numerical method for finding solution to the problem is suggested. The numerical method is based on solving the Cauchy problem on subintervals by using Runge-Kutta method of the 4-th order.

Funding: The authors were supported by the grant AP05132455 of SC of the MES of RK.

Keywords: problem with parameter, loaded differential equation, parametrization method, numerical algorithm

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34H05, 34K06, 34K28, 45J05

References

[1] Kadirbayeva Zh.M. On the method for solving linear boundary-value problem for the system of loaded differential equations with multipoint integral condition, *Mathematical Journal*, **17**:4 (2017), 50–61.

[2] Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Comput. Maths. Math. Phys*, **29**:1 (1989), 34–46.

[3] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **294**:2 (2016), 342–357.

[4] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A.,Kadirbayeva Zh.M. An algorithm for solving a control problem for a differential equation with a parameter, *News of the NAS RK*, **5**:321 (2018), 25–32.

— ⁂ —

Optimization of heated oil pumping in the main oil pipeline

Iskander BEISEMBETOV, Timur BEKIBAEV[a], Uzak ZHAPBASBAEV, Gaukhar RAMAZANOVA[b], Bagdaulet KENZHALIEV,

Kazakh National Research Technical University after K.I. Satbayev, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]timur_bekibaev@mail.ru, [b]gaukhar.ri@gmail.com

The transportation of high pour point oil through mail pipelines is carried out by pumps and preheaters, which are the main consumers of electrical and thermal energy. The energy-saving mode of high pour point oil pumping requires determination of optimum operating conditions for all pumping equip-ment and preheaters located at the main oil pipeline section.

The task definition is to search for energy-saving operating modes of the main oil pipeline section where a given volume of high pour point oil is pumped at the minimum usable total cost of energy consumption of all pumps and preheaters. To do this, it is necessary to find optimal conditions for the operation of pumps and preheaters at the section of the main oil pipeline, which ensure the pump high pour point oil with the minimum total cost of electricity and fuel.

The optimization criterion of the energy-saving mode of oil mixture pumping at the section of the main oil pipeline with several stations is determined by the minimum value of the total energy cost used by pumping units and preheaters [1]:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(z_i^{\mathrm{el}}\sum_{j=1}^{m_i^{\mathrm{pum}}} c_{ij}^{\mathrm{pum}} N_{ij}^{\mathrm{PU}}(\mathbf{k}_{ij}) + z_i^{\mathrm{fl}}\sum_{j=1}^{m_i^{\mathrm{ph}}} c_{ij}^{\mathrm{ph}} Q_{ij}^{\mathrm{fl}}\right) \to min \tag{1}$$

where n is the number of pumping stations, $m_i^{\mathrm{pum}}/m_i^{\mathrm{ph}}$ is the number of pumps/ preheaters at the i-th station, $z_i^{\mathrm{el}}/z_i^{\mathrm{fl}}$ is the electricity cost (tenge/ kW·h)/fuel cost (tenge/kg) at the i-th station; $c_{ij}^{\mathrm{pum}}/c_{ij}^{\mathrm{ph}}$ is the integer variable which has a value of 1 if the pump/preheater is in operation, and 0 otherwise; Q_{ij}^{fl} is the rate fuel is supplied to j-th preheater of the i-th station (kg/h); $N_{ij}^{\mathrm{PU}}(\mathbf{k}_{ij})$ is the power consumption of the j-th pumping equipment at the i-th station (kW); k_{ij} is the ratio of rotary rotations per minute to the nominal rotary rotations per minute of the given pump.

The calculation of the pressure and temperature of high pour point oil at the linear section of the pipeline is found by solving the system of equations:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\zeta(Re, \varepsilon)\frac{\rho_0 v^2}{2D} - \rho_0 g\, sin\alpha(x) \tag{3}$$

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 c_p v \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{4k}{D}(T - T_w) + \frac{dp}{dt} \tag{4}$$

where ρ_0, p, c_p, v, T are the density, the pressure, the heat capacity, the velocity, and the temperature of oil, respectively; g is the gravity acceleration; Re is the Reynolds number; k is the heat transfer coefficient; ζ is the hydraulic resistance coefficient; T_w is the ambient temperature; ε, D are the roughness and the diameter of the pipeline, respectively.

Included in equation (2) is the speed of propagation of waves in the pipeline. According to N.E. Zhukovsky [2], the speed c is calculated by the following formula:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_0}{\xi} + \frac{\rho_0 D}{E\delta}}} \tag{5}$$

where ξ is the oil compressibility modulus, E and δ are the Young's modulus and wall thickness of the pipe, respectively.

The temperature-viscosity and temperature-heat capacity relationships are defined by the standard formulas [2]:

$$\mu(T) = a \cdot e^{-bT};\ c_p(T) = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}(53357 + 107.2 \cdot T) \tag{6}$$

The optimization calculations are carried out by the system of equations (2) - (6) when the condition (1) is fulfilled. The energy-saving modes of high pour point oil pumping at the section of the main oil pipeline were determined in the calculations.

Funding: The authors were supported by the grant AP05130503 of SC of the MES of RK.

Keywords: optimization criterion, motion equation, continuity, heat transfer, the speed of waves propagation

2010 Mathematics Subject Classification: 76A05, 49K20, 80A20

References

[1] Bekibayev T.T., Zhapbasbayev U.K., Ramazanova G.I. Optimization of oil-mixture "hot"pumping in main oil pipelines, *Journal of Physics: Conference Series*, **894**:1 (2017) 012127, 1–8.

[2] Agapkin V.M., Krivoshein B.L., and Yufin V.A. *Thermal and hydraulic calculations of pipelines for oil and oil products*, Nedra, Moscow (1981).

— ⁎ ⁎ ⁎ —

New general solutions of nonlinear ordinary differential equations, their properties and applications

Dulat DZHUMABAEV[1,2,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK,*
[2] *International Information Technology University*
E-mail: [a]*ddzhumabaev54@gmail.com*

In the communication, we consider the nonlinear ordinary differential equation (ODE)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad t \in [0, T], \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

where $f : [0, T] \times R^n \to R^n$ is continuous.

General solution of Eq.(1) plays important role in solving boundary value problems. Construction of classical general solution of ODE is a difficult problem and breaks down in many cases. Therefore, we introduce a new concept of general solution. This concept based on parametrization's method. The interval $[0,T]$ is divided into N parts with the points $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, values of unknown function $x(t)$, a solution of Eq.(1), at beginning points of subintervals considered as additional parameters, and Eq.(1) is reduced to the Cauchy problem for ordinary differential equations with parameters on subintervals

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad r = \overline{1,N}. \tag{2}$$

Using the solutions of the Cauchy problems, the functions $u_r(t,\lambda_r)$, we construct the Δ_N general solution of Eq.(1). Properties of the Δ_N general solutions are established and their applications in finding the solutions of nonlinear boundary value problems for Eq.(1) is discussed.

Funding: The author was supported by the grant AP05132486 of SC of the MES of RK.

Keywords: general solution, differential equations with parameters, parametrization's method.

2010 Mathematics Subject Classification:34A34, 34B15

— ⁂ —

On a pseudo-Volterra integral equation

Sagyndyk ISKAKOV[1], Alibek TANIN[2],

[1,2]*Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan*
E-mail: isagyndyk@mail.ru

We study the solvability of a pseudo-Volterra integral equation:

$$\varphi(t) + \int_0^t K_\omega(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \tag{1}$$

where the kernel $K_\omega(t,\tau)$ is representable as a sum:

$$K_\omega(t,\tau) = \sum_{i=1}^{4} K_\omega^{(i)}(t,\tau),$$

and:

$$K_\omega^{(1)} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{t^\omega + \tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(t^\omega+\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\};$$

$$K_\omega^{(2)} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{t^\omega - \tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(t^\omega-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\};$$

$$K_\omega^{(3)} = -\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1+\omega t^{\omega-1}}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(t^\omega+\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\};$$

$$K_\omega^{(4)} = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1+\omega t^{\omega-1}}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(t^\omega-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}.$$

This kind of integral equations arise in solving the following boundary value problem [1]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \{(x,t)\,|\,0 < x < t^\omega, t > 0\}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=t^\omega} = 0,$$

where $\tilde{u}(t) = u(t^\omega, t), \omega > \frac{1}{2}$.

We will search for the solution of the integral equation (1) in the class of functions:

$$t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot \varphi(t) \in L_\infty(0,\infty),$$

i.e.

$$\varphi(t) \in L_\infty(0,\infty; t^{\frac{3}{2}-\omega})$$

Volterra integral equations of this kind were considered in papers [2–4].
The following statement is proved

Theorem. *If $\omega > \frac{1}{2}$, then the integral equation (1) for any*

$$t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot f(t) \in L_\infty(0,\infty)$$

has a unique nonzero solution: $t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot \varphi(t) \in L_\infty(0,\infty)$.

Keywords: characteristic equation, kernel, integral operator, class of essentially bounded functions

2010 Mathematics Subject Classification: 45D05, 35K10

References

[1] Solonnikov, V.A., Fasano, A. On one-dimensional parabolic problem arising in the study of some free boundary problems (in Russian) [Ob odnomernoj parabolicheskoj zadache, voznikajushhej pri izuchenii nekotoryh zadach so svobodnymi granicami] *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, **269** (2000), 322–338.

[2] Amangaliyeva, M.M., Jenaliyev, M.T., Kosmakova, M.T., & Ramazanov, M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain, *Boundary Value Problems*, **213** (2014), 1–21.

[3] Amangaliyeva, M.M., Jenaliyev, M.T., Kosmakova, M.T., & Ramazanov, M.I. On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain, *Siberian Mathematical Journal*, **56**:6 (2015), 982–995.

[4] Amangaliyeva, M.M., Jenaliyev, M.T., Kosmakova, M.T., & Ramazanov, M.I. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel, *Advances in Difference Equations*, **71** (2015), 1–14.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On the solution of the special Cauchy problem for the system of nonlinear Fredholm integro-differential equations

Sayakhat KARAKENOVA[1,a]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]sayakhat.karakenova05@gmail.com

Consider the nonlinear Fredholm integro-differential equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t)\int_0^T \psi(\tau) f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

where the $n \times n$ matrices $A(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(\tau)$ are continuous on $[0,T]$, $f : [0,T] \times R^n \to R^n$ is continuous; $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

The interval $[0,T]$ is divided into N parts by points $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. Application parametrization's method [1, 2] Eq.(1) yields the special Cauchy problem for the system of nonlinear integro-differential equations with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r + \lambda_r] + \varphi(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(\tau) f(\tau, u_j(\tau) + \lambda_j)d\tau,\ t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{2}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \tag{3}$$

In communication questions on existing the solution to the problem (2), (3) is discussed.

Keywords: Nonlinear Fredholm integro-differential equation, special Cauchy problem, parametrization's method.

2010 Mathematics Subject Classification: 34G20, 45B05, 45J05

References

[1] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **294** (2016), 342Џ357.

[2] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, **327** (2018), 79-108.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On a mathematical model of breaking travelling waves

Nurbol KOSHKARBAY

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, ALmaty, Kazakhstan*
nurbol-koshkarbaev@mail.ru

This paper is devoted to the initial boundary value problem for the Korteweg-de Vries-Benjamin-Bona-Mahony equation

$$\eta_t + \eta\eta_x + \eta_{xxx} - \eta_{txx} - \eta_x = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$$

in a infinite domain. This particular problem arises from the phenomenon of long wave with small amplitude in fluid. For certain initial-boundary problems for the Korteweg-de Vries-Benjamin-Bona-Mahony equation, we obtain the conditions of blowing-up of travelling wave solutions in finite time. The proof of the results is based on the nonlinear capacity method. In closing, we provide the exact and numerical examples.

Funding: The author is financially supported by a grant No.AP05131756 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan

Keywords: Breaking waves; Korteweg-de Vries-Benjamin-Bona-Mahony equation; blow-up of solution; initial-boundary problems

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Sarpkaya T., Isaacson M. *Mechanics of wave forces on offshore structures*, Van Nostrand Reinhold, (1981).

[2] Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Philos. Trans. R. Soc. Lond. 272, (1972). 47–78.

[3] Ursell F. The long-wave paradox in the theory of gravity waves, in: Proc. Camb. Philos. Soc. 49, (1953). 685–694.

[4] Bona J. L., Smith R., A model for the two-way propagation of water waves in a channel, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 79, (1976). 167–182.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On a homogeneous singular integral equation

Minzilya KOSMAKOVA, Zhanar TULEUTAEVA, Laila KASYMOVA

Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: Svetik_mir69@mail.ru

We study the solvability of a singular integral equation of the second kind

$$\nu(t)-\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}}\cdot\nu(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{k\,a\sqrt{\pi}}\int_0^t \sqrt{\frac{\tau}{t}}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}}\cdot\nu(\tau)d\tau=0, \tag{1}$$

where $a,\quad k$ are positive constants.

A similar kind of integral equation arises in solving the boundary value problems of heat conduction with heat generation, which describe the development of the one-dimensional unsteady heat processes with axial symmetry.

The solution of the homogeneous integral equation (1) found in explicit form:

$$\nu(t)=\frac{Ce^{\frac{1}{k}}}{(ka)^{\frac{1}{k}}}\frac{(2t)^{\frac{1}{2k}}}{2\sqrt{\pi}t}\ \exp\left\{\frac{t}{2k^2a^2}-\frac{t}{4a^2}-\frac{a^2}{8t}\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{k}\sqrt{2t}\,D_{-\left(\frac{1}{k}+1\right)}\left(\frac{ka^2-2t}{ak\sqrt{2t}}\right)+a\,D_{-\frac{1}{k}}\left(\frac{ka^2-2t}{ak\sqrt{2t}}\right)\right], \tag{2}$$

where

$$D_{-p}(z)=\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty}e^{-zx-\frac{x^2}{2}}x^{p-1}dx,\quad Rep>0$$

are Parabolic cylinder functions (Weber functions).

From a practical point of view, the case $k=2$ is interesting:

$$\nu(t)=\frac{C\sqrt{e}}{\sqrt{2a\pi}(2t)^{\frac{3}{4}}}\ \exp\left\{-\frac{t}{8a^2}-\frac{a^2}{8t}\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{\sqrt{2t}}{2}\,D_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2t}}-\frac{\sqrt{t}}{a\sqrt{2}}\right)+a\,D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2t}}-\frac{\sqrt{t}}{a\sqrt{2}}\right)\right], \tag{3}$$

where

$$D_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi\,z}{2}}K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right)$$

and $K_\nu(x)$ is the modified Bessel function of the second kind or the Macdonald function.

The following theorem is proved.

Theorem 1. *The integral equation (1) at $k=2$ in the class of functions $\nu(t)\in L_\infty(0,\ +\infty)$ has a solution defined by the formula (3).*

When $k=1$, representation (2) has the form:

$$\nu(t)=\frac{Ce^{\frac{3}{2}}}{a\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{t}{4a^2}-\frac{a^2}{4t}\right\}+\frac{\sqrt{\pi}}{ae}\exp\left\{\frac{3t}{4a^2}\right\}erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}}{a}\right)\right] \tag{4}$$

And, the following theorem is valid.

Theorem 2. *The integral equation (1) at $k=1$ in the weight class of functions* $\exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\}$ *$\nu(t)\in L_\infty(0,\ +\infty)$ has a solution defined by the formula (4).*

Remark. Singular integral equations were considered in works [1] – [3]. Their kernels were also "incompressible but kernels had an another form. In this connection, the weight classes of the solution existence differ from the class of the solution existence for the equation considered in this work.

Keywords: Volterra equation of the second kind, kernel, class of essentially bounded functions, Laplace transformation

2010 Mathematics Subject Classification: 45D05, 35K10

References

[1] Amangaliyeva, M.M., Jenaliyev, M.T., Kosmakova, M.T., & Ramazanov, M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain, *Boundary Value Problems*, **213** (2014), 1–21.

[2] Amangaliyeva, M.M., Jenaliyev, M.T., Kosmakova, M.T., & Ramazanov, M.I. On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain, *Siberian Mathematical Journal*, **56**:6 (2015), 982–995.

[3] Amangaliyeva, M.M., Jenaliyev, M.T., Kosmakova, M.T., & Ramazanov, M.I. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel, *Advances in Difference Equations*, **71** (2015), 1–14.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Particle dispersion in the turbulent mixing layer in depending on a particle size.

Altyn MAKASHEVA[1,a], Abdirassul OSPANOV[2,b]

[1] *Institute of Mathemitics and Mathematical Modeling. Almaty, Kazakhstan*
[2] *Master of 1 course Institute of Mathemitics and Mathematical Modeling. Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]altyn-mak@mail.ru, [b]o.abdirasul@mail.ru

The mixing of two layers with different velocity and particle loading profiles is commonly observed in natural and industrial processes. Such flows are explored experimentally and numerically [1-2]. As rule, the experiments are very complexity and expensively. Therefore, at the moment, the numerical simulation of particle dispersion in a mixing layer is most preferable. Numerically, there are two main modeling approaches suitable for the simulation of these flows [1]. In first models, both, the carrier phase and the particle phase are modeled in an Eulerian frame [1]. Like the carrier phase, the particle phase is governed by conservation laws. Another approach for modeling two-phase flows is a mixed Eulerian-Lagrangian viewpoint [2].

The purpose of this paper is the particles dispersion in a plane developing mixing layer in Eulerian-Lagrangian formulation. The investigation focuses on the effects of developing vortex structures on particle dispersion of different size in a mixing layer. The unsteady, planar compressible Navier-Stokes equations are considered for multi-species gas mixture. The particles are traced assuming one-way coupling between the continuous and the dispersed phases, i.e. the particles are influenced by the gas phase. Consequently, governing equations for particles are equations of trajectory and momentum and temperature. To close the systems of the original equations, we used the Wilke formula to determine the mixture viscosity coefficient in terms of the mass fractions [3]. For the gas at the inflow all physical variables are varied smoothly from hydrogen (fuel) flow to air flow using a hyperbolic-tangent function [4]. In order to produce the roll-up and pairing of vortex rings, an unsteady boundary condition is also applied at the inlet plane [4]. The calculation Navier-Stokes equations are performed with the use of Nav2D code [5] based on the third-order accuracy ENO scheme. Numerical calculation is performed for the range $20 \leq d_p \leq 200$ of the diameters of the particles. The influence of large-scale coherent structures in a spatially-developing mixing layer on the particle dynamics are numerically studied. Detailed analysis reveals that the small particles are captured by the vortices homogeneously while the large particles are accumulated in the periphery of the vortices and along the braid of two adjacent vortices. The dispersion of the particles in supersonic multispecies mixture layer is similar to the trajectory of the particles in subsonic flow: the large particles reacted to the centrifugal action, while the small particles are in a quasi-equilibrium status with the gases.

Funding: The authors were supported by the grant AP05131555 of SC of the MES of RK.

Keywords: two-phase flows, turbulent gas-particle flows, ENO scheme, Euler-Lagrangian approach, mixing layer, supersonic flow, particle dispersion.

2010 Mathematics Subject Classification: 94B05, 94B15

References

[1] Ling W., Chung J.N., Troutt T.R., and Crowe C.T. Direct numerical simulation of a three-dimensional temporal mixing layer with particle dispersion. , *Journal of Fluid Mechanics.* , **358**, (1998), 61–85.

[2] 4. Elghobashi S. and Truesdell G.C. On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid particles. I: Turbulence modification. , *Phys. Fluids*, **5**, (1993), 1790–1801.

[3] Lapin V. and Strelets M. Kh. *Internal Flows of Gas Mixtures*, Nauka, Moscow (1989).

[4] Dale A.Hudson. *Numerical simulation of a confined supersonic shear layer.*, PhD dissertation (1996).

[5] Beketaeva A. and Naimanova A. Numerical study of spatial supersonic flow of a perfect gas with transverse injection of jets., *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.*, **52**:6 (2011), 896–904.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Phase portraits of the Henon-Heiles potential

Ewgenij MALKOV[1], A.A.Bekov[2,3,4], S.B. Momynov[2,3,a], I.B. Bekmukhamedov[3,b]

[1] *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

[2] *The Kazakh National Research Technical University after K.I. Satpaev, Almaty, Kazakhstan*

[3] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

[4] *JSC National Centre for Space Research and Technology, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a] s.momynov@gmail.com, [b] beckmuhamedov1924@gmail.com

The Henon-Heiles potential is undoubtedly one of the simplest, classical and characteristic examples of open Hamiltonian systems with two degrees of freedom. The above topic was devoted to a large number of research scientists [1,2].

The potential of the Henon-Heiles system is determined by the formula:

$$U(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3) \tag{1}$$

Equation (1) shows that the potential actually consists of two harmonic oscillators, which were connected by the perturbing terms $x^2y - \frac{1}{3}y^3$.

The basic equations of motion for a test particle with a unit mass ($m = 1$) are:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\tfrac{\partial U}{\partial x} = -x - 2xy \\ \ddot{y} &= -\tfrac{\partial U}{\partial y} = -y - x^2 + y^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Consequently, the Hamiltonian of system (1) has the form:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 = h \tag{3}$$

where $\dot{x}$ and $\dot{y}$ are the momenta per unit mass, x and y are the coordinates of the system; $h > 0$ the numerical value of the Hamiltonian, which is conserved. It is seen that $h > 0$ the Hamiltonian is symmetric with respect to $x \to -x$, and H also exhibits a symmetry of rotation at $\frac{2\pi}{3}$.

To study the Henon-Heiles system, the Poincare section method is used. Advantages of this method are especially evident when we consider nonlinear systems for which exact solutions are unknown. In this case, the phase trajectories are calculated by numerical methods.

To solve the systems of equations (2), boundary conditions are chosen so that they satisfy equation (3). Further, the systems of equation (2) are solved on the basis of the Runge-Kutta method. To construct the Poincare section, those values that intersect the plane $x = 0$ are chosen. The Poincare sections for Henon-Heiles systems for different energy values ($E = 1/12$, $E = 1/8$, $E = 1/6$) were investigated. With increasing energy, the structure of the cross sections is destroyed. The results obtained are in agreement with other authors [1, 2].

Thus, the results obtained by the numerical method determine the oscillations for the Henon-Heiles model and serve as the basis for a comparative analysis in determining the analytical mapping.

Keywords: Henon-Heiles model, Poincare section, numerical solutions.

PACS 45.50.Pk **References**

[1] Lichtenberg A., Lieberman M. *Regular and stochastic dynamics (In Russian)*, M: Mir, Moscow (1985).

[2] Vernov S. Ju. Construction of solutions of the generalized Henon-Heiles system using the Painleve test (In Russian), *TMF*, **135**:3 (2003), 409–419.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Numerical solution of periodical boundary value problem for the Van der Pol differential equation.

Dauren MURSALIYEV[1,2,a], Aiym SERGAZINA[2,b], Amina KENJEYEVA[2,c]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,* [2]*International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*mu.dauren@gmail.com,* [b]*aiym.sergazina@gmail.com,* [c]*akenjeyeva@gmail.com*

We consider the periodical boundary value problem for the Van der Pol differential equation:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \epsilon(1-y^2)\frac{dy}{dt} + y - \epsilon p cos(\omega t + \alpha) + g(t), t \in (0,T), y \in R,$$

$$y(0) = y(T),\ y'(0) = y'(T).$$

In the communication the numerical solution of nonlinear boundary value problem is found by the method proposed in [1].

Interval is divided into 2 parts, values of solution at the left-end points of the subintervals are considered as additional parameters and original problem is reduced to the boundary value problem with parameters. Using solution to the Cauchy problems for the differential equations with parameters, boundary condition, and the continuity condition at the dividing point, a system of nonlinear algebraic equations with respect to introduced parameters is composed. The values of functions, which present left sides of the system, and their derivatives by parameters, we can find by solving the Cauchy problems for ordinary differential equations on the subintervals. The Cauchy problems solutions we find by the Runge-Kutta method of fourth order. The solution of composed system if found by Newton's method.

Funding: The work is supported by the grant project AP05132486 (2018-2020) from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: boundary value problem, Van der Pol equation, parametrization's method, the Runge-Kutta method of fourth order, Newton's method

2010 Mathematics Subject Classification: 34G20, 44B05, 45J05, 47G20.

References

[1] Dzhumabaev D.S. A method for solving nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations // Mathematical Journal. – 2018. – No. 3. – P. 43-51.

— ⁂ —

Conditions of the existence of a solution to the special Cauchy problem for a nonlinear Fredholm integro-differential equation

Sandugash MYNBAYEVA[1,2,a]

[1] *K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]mynbaevast@mail.ru

In [1-4] parametrization's method is applied to study and solve the linear Fredholm integro-differential equations and boundary value problems for them. The interval is divided into parts, values of desired function at the beginning points of subintervals are considered as additional parameters and the original integro-differential equation is reduced to a system of integro-differential equations with parameters, where unknown functions satisfy the initial conditions on the subintervals. At the fixed values of parameters we get the special Cauchy problem for the system of linear integro-differential equations. The solutions to the special Cauchy problems are used in solving boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations.

Consider the nonlinear Fredholm integro-differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

where the $n \times n$ matrices $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1,m}$, are continuous on $[0,T]$, $f : [0,T] \times R^n \to R^n$ is continuous; $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

The interval $[0,T]$ is divided into N parts by points $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. By using parametrization's method Eq.(1) is reduced to the special Cauchy problem for the system of nonlinear integro-differential equations with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)[u_j(\tau) + \lambda_j] d\tau, \; t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{2}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \tag{3}$$

The special Cauchy problem as the Cauchy problem for Fredholm integro-differential equations is not always solvable. In [5], sufficient conditions for the existence of a unique solution to the special Cauchy problem for the nonlinear Fredholm integro-differential equations are obtained. An algorithm for finding a solution to the special Cauchy problem for the nonlinear integro-differential equations and a numerical implementation of the proposed algorithm are developed in [6]. Note that in these papers required to be small the lengths of subintervals.

The purpose of this paper is to establish conditions for the existence of a solution to the special Cauchy problem (2), (3) for any partition of the interval $[0,T]$.

In this communication questions of the existence of a solution to the special Cauchy problem (2), (3) at the fixed values of parameters are studied. To this end Arzela's theorem on compactness of the set of continuous functions on the closed intervals is used. Conditions for the existence of a solution to the special Cauchy problem (2), (3) are established.

Funding: The author was supported by the grant AP05132486 of SC of the MES of RK.

Keywords: Nonlinear Fredholm integro-differential equation, special Cauchy problem, parametrization's method, compact set.

2010 Mathematics Subject Classification: 34G20, 44B05, 45J05, 47G20

References

[1] Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem an integro-differential equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50** (2010), 1150-1161.

[2] Dzhumabaev D.S. Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of Linear Boundary-Value Problems for the Fredholm Integro-differential Equations, *Ukrainian Math. J.*, **66**:8 (2015), 1200-1219.

[3] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **294** (2016), 342Ц357.

[4] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, **327** (2018), 79-108.

[5] Bakirova E. A. Existence and uniqueness of a solution to the special Cauchy problem for the nonlinear integro-differential equations, *Math. J.*, **11-1**:39 (2011), 43-52. (in Russian)

[6] Dzhumabaev D.S., Bakirova E. A., Mynbayeva S.T. Numerical realization of one algorithm for finding a solution of special Cauchy problem for nonlinear integro-differential equation, *Math. J.*, **17**:4 (2017), 25-36. (in Russian)

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Analysis of dynamic pull-in voltage of a graphene MEMS model

Shirali KADYROV,

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: shirali.kadyrov@sdu.edu.kz

Bifurcation analysis of dynamic pull-in for a lumped mass model is presented.The restoring force of the spring is derived based on the nonlinear constitutive stress-strain law and the driving force of the mass attached to the spring is basedon the electrostatic Coulomb force, respectively. The analysis is performed on theresulting nonlinear spring's mass equation with initial conditions. The necessary andsufficient conditions for the existence of periodic solutions are derived analyticallyand illustrated numerically. The conditions for bifurcation points on the parametersassociated with the second-order elastic stiffness constant and the voltage aredetermined. This is a joint work with P Skrzypacz, D Nurakhmetov, and D Wei [1].

Keywords: MEMS,Graphene, Pull-in, Nonlinear oscillator, Bifurcation, Periodic solution

2010 Mathematics Subject Classification: 34C25, 34H20

References

[1] Skrzypacz, P., Kadyrov, S., Nurakhmetov, D., & Wei, D. Analysis of dynamic pull-in voltage of a graphene MEMS model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications.*, **45** (2019), 581–589.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Solvability of linear boundary value problem for a loaded Fredholm integro-differential equation

Asselya SMADIYEVA[1,a], Ainur ZHOLAMANQYZY[2,b] Erbulat AKZHIGITOV[3,c]

[1,2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[3] *S.Seifullin Kazakh Agro Technical Universiy Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*aselya87kz@mail.ru*, [b]*aynur.zho@gmail.com*
[c]*akzhigitov@inbox.ru*

In the communication, we consider the boundary value problem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t)\int\limits_0^T \psi(\tau)x(\tau)d\tau +$$

$$+N(t)x(\theta_0) + W(t)x(\theta_1) + Z(t)x(\theta_2) + f(t),\ t \in (0,T),\ x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \tag{2}$$

where $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 = T$, the $(n \times n)$-matrices $A(t), \varphi(t), \psi(t), N(t), W(t)$, $Z(t)$ and n-vector $f(t)$ are continuous on $[0,T] \times [0,T]$ and $[0,T]$, respectively.

Let $C([0,T],R^n)$ be space of continuous functions $x : [0,T] \to R^n$ with the norm $||x||_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} ||x(t)||$. A solution to problem (1), (2) is a continuously differentiable on $(0,T)$ function $x(t) \in C([0,T],R^n)$ satisfying the loaded Fredholm integro-differential equation (1) and boundary condition (2).

Boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations and loaded differential equations are considered by many authors (see [1]-[4] and refrences cites there in).

By $\Delta_2(\theta)$ we denote the partition of interval $[0;T)$ into two subintervals: $[0;T) = [0;\theta_1) \cup [\theta_1;T)$.

Introducing parameters $\lambda_1 = x_1(0),\ \lambda_2 = x_2(\theta_1),\ \lambda_3 = x(T)$ and making the substitutions $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r, t \in [\theta_{r-1},\theta_r),\ r = \overline{1,2},\ x(T) = \lambda_3$, we obtain the system of integro-differential equations with parameters:

$$\frac{du_1}{dt} = A(t)[u_1 + \lambda_1] + \varphi(t)\Bigg[\int\limits_0^{\theta_1} \psi(\tau)[u_1(\tau) + \lambda_1]d\tau + \int\limits_{\theta_1}^T \psi(\tau)[u_2(\tau) + \lambda_2]d\tau\Bigg] +$$

$$+N(t)\lambda_1 + W(t)\lambda_2 + Z(t)\lambda_3 + f(t),\ t \in [0,\theta_1), \tag{3}$$

$$\frac{du_2}{dt} = A(t)[u_2 + \lambda_2] + \varphi(t)\Bigg[\int\limits_0^{\theta_1} \psi(\tau)[u_1(\tau) + \lambda_1]d\tau + \int\limits_{\theta_1}^T \psi(\tau)[u_2(\tau) + \lambda_2]d\tau\Bigg] +$$

$$+N(t)\lambda_1 + W(t)\lambda_2 + Z(t)\lambda_3 + f(t),\ t \in [\theta_1,T), \tag{4}$$

initial conditions at the beginning points of subintervals:

$$u_1(0) = 0, \tag{5}$$

$$u_2(\theta_1) = 0, \tag{6}$$

the boundary condition:

$$B\lambda_1 + C\lambda_3 = d, \tag{7}$$

and continuity conditions:

$$\lambda_1 + \lim_{t\to\theta_1-0} u_1(t) - \lambda_2 = 0, \tag{8}$$

$$\lambda_2 + \lim_{t \to T-0} u_2(t) - \lambda_3 = 0. \tag{9}$$

Solving the problem (3)-(9), we determine the solution to problem (1), (2). Sufficient conditions of solvability of problem (3)-(9) are obtained.

Keywords: Loaded Fredholm integro-differential equation, parameterization method, boundary value problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 45J05

References

[1] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – No. 327. – P. 79-108.

[2] Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem an integro-differential equation // Comput. Math. Math. Phys.– 2010. – No. 50. – P. 1150-1161.

[3] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **294**:2 (2016), 342–357.

[4] Dzhumabaev D.S. Computational methods for solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Math. Meth Appl Sci. – 2017. – P.1-24.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

About construction of laguerre polynomials of many variables

Zh. N. TASMAMBETOV[1,a], A. A. ISSENOVA[2,b]

[1,2] *Aktobe Regional Zhubanov State University, Aktobe, RK*
E-mail: [a]*tasmam@rambler.ru,* [b]*akkenje_ia@mail.ru*

Confluent hypergeometric functions were studied in the works Of J. Horn, P. Appell, M. P. Humbert, M. Lauricella, and others [1]. M. P. Humbert has determined confluent hypergeometric function from n variables and established a link with the Laurichella function F_A.

Definition 1. The degenerated hypergeometric function of M. P. Humbert $\Psi_2^{(n)}$ n variables is determined by a series of

$$\Psi_2^{(n)}(\lambda, \gamma_1, \cdots \gamma_n; x_1, \cdots, x_n) = \sum \frac{(\lambda)_{m_1+\ldots+m_n}}{(\gamma_1)_{m_1} \ldots (\gamma_n)_{m_n}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \tag{1}$$

for which equality is fair [1, p. 134]:

$$\Psi_2^{(n)}(\lambda, \gamma_1, \ldots \gamma_n; x_1, \ldots, x_n) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_A(\lambda, \frac{1}{\varepsilon}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon}; \gamma_1, \ldots \gamma_n; \varepsilon x_1, \ldots, \varepsilon x_n).$$

The series converges absolutely and uniformly at $|x_1| < \varepsilon$, ...,$|x_n| < \varepsilon$.

Definition 2. Humbert function (1) is a special solution of the system consisting of n partial differential equations of the second order

$$x_j = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + [\gamma_j - x_j] \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{(k \neq j)} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \lambda F = 0, \quad (j = \overline{1, n}). \tag{2}$$

where $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ is the total unknown for all equations of the system (2).

If $n = 2$ (1) we obtain a confluent hypergeometric Humbert function of two variables $\Psi_2^{(2)}(\lambda, \gamma_1, \gamma_2, ; x_1, x_2)$ which is a particular solution of the Horn system consisting of two equations of the second order.

The system of the Horn type 2^2 has linearly independent partial solutions, and the Horn-type system has linearly independent partial solutions in the form of Humbert functions from n variables.

In this paper, particular solutions of the Gorn type system have been established (2), in the form of Laguerre polynomials from n variables.

Theorem. *Let in a system of Horn type (2) consisting of equations the parameters* $\gamma_1 = \alpha_1 + 1$, ..., $\gamma_n = \alpha_n + 1$ $(\alpha_1 > -1, ..., \alpha_n > -1, \alpha_1 \neq 0, ..., \alpha_n \neq 0)$. *Then the system of partial differential equations of the second order (2) has linearly independent partial solutions.*

The decision of which is

$$F_1(x_1, ..., x_n) = \Psi_2^{(n)}(-n, 1+\alpha_1,\ ..., 1+\alpha_n; x_1,\ ...., x_n), \tag{3}$$

if $\lambda = -n$ ($n > 0$ -integer number) defines the generalized Laguerre polynomial and n variables

$$L_{n,...,n}^{(0,...,0)}(x_1, ..., x_n) = \sum_{m_1,...m_n=0}^{n} \frac{(\lambda)_{m_1+...+m_n}}{(1+\alpha_1)_{m_1}...(1+\alpha_n)_{m_n}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot ... \cdot \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \tag{4}$$

If $\alpha_j = 0$ $(j = \overline{1, n})$ then Laguerre polynomial is represented as

$$F_1(x_1, ..., x_n) = \Psi_2^{(n)}(\lambda, 1, ..., n; x_1, x_2, ..., x_n),$$

if $\lambda = -n$ ($n > 0$ -integer number) defines the simple Laguerre polynomial of n variables of the form

$$L_{n,...,n}^{(0,...,0)}(x_1, ..., x_n) = \sum_{m_1,...m_n=0}^{n} \frac{(\lambda)_{m_1+...+m_n}}{(1)_{m_1}...(1)_{m_n}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot ... \cdot \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

Keywords: Laguerre polynomial, system, generalized, simple, particular solutions, linearly independent.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

References

[1] Appell P, Kampe de Feriet MJ *Fonctions hypergeometriques et hypersperiques*, P Gauthier Villars, Paris (1926).

[2] Tasmambetov Zh.N. Confluent hypergeometric functions and two variables Laguerre polynomials as a solution of Wilczynski type system, // *AIP Conference Proceeding*, **1**:2 (2016).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Regular system of solution consisting of two differential equations of the third order

Zh. N. TASMAMBETOV[1,a], Zh. K. UBAYEVA[2,b]

[1,2]*Aktobe Regional Zhubanov State University, Aktobe, RK.*
E-mail: [a]*tasmam@rambler.ru*, [b]*zhanar_ubaeva@mail.ru*

Statement of the problem. The regular homogeneous system is being considered the possibility of the joint solutions to the private differential equations in the third order consisting of two equations in the form

$$\begin{aligned} &x^3 g^{(0)} p_{30} + x^2 y p_{21} + x^2 g^{(2)} p_{20} + xyg^{(3)} p_{1,1} + xg^{(4)} p_{10} + yg^{(5)} p_{01} + g^{(6)} p_{0,0} = 0, \\ &y^3 q^{(0)} p_{03} + xy^2 p_{12} + y^2 q^{(2)} p_{02} + xyq^{(3)} p_{1,1} + xq^{(4)} p_{10} + yq^{(5)} p_{01} + q^{(6)} p_{0,0} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $p_{30} = Z_{xxx}, p_{03} = Z_{yyy}, p_{12} = Z_{xyy}, p_{20} = Z_{xx}, p_{02} = Z_{yy},\ p_{11} = Z_{xy}, p_{10} = Z_x, p_{01} = Z_y, p_{0,0} = Z(x,y)$-total unknown, coefficients

$$g^{(i)} = g^{(i)}(x,y) = a_{00}^{(i)} + a_{10}^{(i)} \cdot x^h,$$
$$q^{(i)} = q^{(i)}(x,y) = b_{00}^{(i)} + b_{10}^{(i)} \cdot y^h, (i = \overline{0,6}) \tag{2}$$

Suppose that system (1) is being implemented and integrability condition is satisfied.

$$1 - \frac{g^{(1)}}{g^{(0)}} \cdot \frac{q^{(1)}}{q^{(0)}} \neq 0 \tag{3}$$

In this case, nine linearly-independent private solutions can be defined. Assertions are true.

Theorem 1. *Suppose that the system (1) with coefficients type (2), where* $a_{00}^{(0)} \neq 0, b_{00}^{(0)} \neq 0, h = 1$ *conditions of compatibility and integrability are satisfied (3). Then system (1) has nine linearly independent private solutions in the form*

$$Z_t(x,y) = x^{\rho_t} \cdot y^{\sigma_t} \cdot \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}^{(t)} \cdot x^m \cdot y^n, A_{0,0} \neq 0, (t = \overline{1,9}), \tag{4}$$

near the singularity $(0,0)$, where ρ_t, σ_t, $A_{m,n}(m,n = 0,1,2,....; t = \overline{1,9})$ unknown permanent.

Theorem 2. *Suppose that the system (1) with coefficients type (2), where* $a_{10}^{(0)} \neq 0$, $b_{01}^{(0)} \neq 0$, $h = 1$ *conditions of compatibility and integrability are satisfied (4). Then system (1) has nine linearly independent private solutions in the form*

$$Z_t(x,y) = x^{\rho_t} \cdot y^{\sigma_t} \cdot \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}^{(t)} \cdot x^m \cdot y^n, B_{0,0} \neq 0, (t = \overline{1,9}), \tag{5}$$

near feature (∞,∞), where ρ_t, σ_t, $B_{m,n}(m,n = 0,1,2,....; t = \overline{1,9})$ unknown permanent.

Unknown indicators ρ_t, σ_t, $t = \overline{1,9})$ of series (4) and (5) are determined from systems of defining equations for singularities $(0,0)$ and (∞,∞). If the system (1) with coefficient $a_{00}^{(0)} = 0$, we get a hyper geometric type system. The specific special case of such a system is the example of Campe de Feriet.

Example. Degenerate hypergeometric system

$$x^2 \cdot p_{3,0} + x \cdot y \cdot p_{2,1} + (\gamma + \delta + 1)x \cdot p_{2,0} + \delta \cdot y \cdot p_{1,1} + \gamma \cdot \delta p_{1,0} - p_{0,0} = 0,$$
$$y^2 \cdot p_{3,0} + x \cdot y \cdot p_{1,2} + (\gamma + \delta' + 1)y \cdot p_{0,2} + \delta' \cdot x \cdot p_{1,1} + \gamma \cdot \delta' p_{0,1} - p_{0,0} = 0 \tag{6}$$

is obtained by passing the limit of system type Clausen, since it has obtained from the joint system. For it the integrability condition (3) is not satisfied. Therefore, system (6) does not accuracy of nine linear-independent solutions. By constructing the method of Frobenius-Latyshev, we will see that the first system solution represents the generalized singular Clausen hypergeometric function of two variables

Thus, we have just satisfied that system (6) composed of two equations to the third order has been the system type Clausen, and its solutions are expressed through the degenerate Clausen hypergeometric function.

Keywords: Regularity, irregularity, system, solutions, generalized, particular, linearly independent.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

References

[1] Appell P., Kampe de Feriet M.J. *Fonctions hypergeometriques et hypersperiques*, Paris: Gautier Villars. 1926. -434 pp.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Absolute stability of a program manifold of non-autonomous indirect control systems with stationary nonlinearities

Sailaubay ZHUMATOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakstan
E-mail: sailau.math@mail.ru

We will introduce for consideration a class of continuously-differentiable at times t and bounded on a norm matrices Ξ.

Consider the problem of construction of a material system by given $(n-s)$-dimensional program manifold $\Omega\,(t) \equiv \omega(t,x) = 0$, in the following form [1]:

$$\dot{x} = f\,(t,x) - B(t)\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi\,(\sigma)\,, \quad \sigma = P^T(t)\omega - Q(t)\xi, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,, \tag{1}$$

provided that $Q(t) >> 0$, where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t) = 0$, $B \in \Xi^{n\times r}$, $P \in \Xi^{s\times r}$, $Q \in \Xi^{r\times r}$ are matrices, $\omega \in R^s (s \leq n)$ is a vector, $\xi \in R^r$ is a vector-function, satisfying to conditions of local quadratic connection

$$\varphi(0) = 0 \ \wedge\ 0 < \sigma^T\varphi(\sigma) \leq \sigma^T K(t)\sigma, \quad \forall\ \sigma \neq 0, \tag{2}$$

$$K_1 \leq \frac{\partial\varphi(\sigma)}{\partial\sigma} \leq K_2,, \quad [K(t) = K^T(t) >> 0] \in \Xi^{r\times r} \quad K_i = K_i^T > 0.$$

This problem reduce to investigation of quality properties of the following system with respect to vector-function ω [2, 3]:

$$\dot{\omega} = -A(t)\omega - H(t)B(t)\xi, \quad \xi = \varphi\,(\sigma)\,, \quad \sigma = P^T(t)\omega - Q(t)\xi, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,. \tag{3}$$

Here nonlinearity satisfies also to generalized conditions (2).

Great number of works is devoted to the construction of the autonomous systems of equations on the given program manifold possessing of quality properties and to solving of various inverse problems of dynamics. The detailed reviews of these works were shown (see [3]-[7]).

Statement of the Problem. To get the condition of absolute stability of a program manifold $\Omega(t)$ of the non-autonomous indirect control systems with stationary nonlinearity in relation to the given vector-function ω.

Theorem 1. *Suppose that there exist matrices*

$$L = L^T > 0,\ \beta = diag\,(\beta_1,\ldots,\beta_r) > 0,$$

non-linear function $\varphi(\sigma)$ satisfies the conditions (2) and $-\dot{V}|_{(3)} = W$.

Then in order that, the program manyfold $\Omega\,(t)$ with respect to the vector function ω will satisfy to inequalities

$$\lambda_1\|z(t_0)\|exp[\alpha_1(t-t_0)] \leq \|z(t)\| \leq \lambda_2\|z(t_0)\|exp[\alpha_2(t-t_0)],$$

it is sufficient performing of the following conditions

$$l_1(\|z\|^2 \leq V \leq l_2(\|z\|^2, \tag{4}$$

$$g_1(\|z\|^2 \leq W \leq g_2(\|z\|^2, \tag{5}$$

where $z(t_0) = \|\omega(t_0)\ \xi(t_0)\|^T$, $z(t) = \|\omega(t)\ \xi(t)\|^T$ and $\lambda_1,\lambda_2,\alpha_1,\alpha_2,\ l_1,l_2,g_1,g_2$ are positive constants.

Funding: This results are supported by grant of the Ministry education and science of Republic Kazakhstan No. AP 05131369 for 2018-2020 years.

Keywords: stability, program manifold, non-autonomous control systems, Lyapunov function, stationary nonlinearity

2010 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C19, 34K29

References

[1] Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system*, Nauka, Alma-Ata (1981).

[2] Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral manifold, *Prikladnaya Matematika i Mecanika*, **10**:6 (1952), 659–670.

[3] Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. *Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion*, Gylym, Almaty (1999).

[4] Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. Review of researches on the analytical construction of the systems programmatic motions, *Vestnik RUDN*, **1** (1994), 5–21.

[5] Llibre J., Ramirez R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications.* Springer International Publishing Switzerland(2016).

[6] Zhumatov S.S. Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold, *Nelineinye kolebania.* **28**: 3 (2016), 367–375.

[7] Zhumatov S.S. Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems, *News NAS RK. Series physico-mathematical.* **322**: 6 (2018), 37-43.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Тензор Грина уравнений динамики термоупругого стержня

Нурсауле АЙНАКЕЕВА[1,a], Асият ДАДАЕВА[1,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]nursaule_math@mail.ru, [b]dady_1262@mail.ru

Стержневые конструкции широко используются в строительстве и машиностроении в качестве опор мостов и зданий, соединительных и передаточных звеньев для конструктивных элементов самых разных машин и механизмов. Изучение напряженно-деформированного состояния стержневых конструкций с учетом влияния температуры, которая существенно влияет на их прочность и надежность при эксплуатации, является актуально научно-технической проблемой. Здесь рассматривается термоупругий стержень, который характеризуется линейной плотностью , скоростью распространения упругих волн в стержне и двумя термоупругими константами [1]. Исследуются продольные перемещения сечений стержня и температурное поле , которые описываются системой гиперболо-параболических уравнений второго порядка . В работе [2] ранее построено преобразование Фурье по времени тензора Грина уравнений связанной термоупругости в пространственно-одномерном случае. Здесь построено обобщенное преобразование Фурье матрицы фундаментальных решений уравнений несвязанной термоупругости, проведена его регуляризация, на основе которой построен оригинал этого тензора в исходном пространстве времени, что не удается в случае связанной термоупругости. Получены обобщенные решения уравнений несвязанной термоупругости при действии нестационарных силовых и тепловых источников произвольного вида и даны их регулярные интегральные представления. Приведены графики расчетов матрицы фундаментальных решений, характеризующих термонапряженное состояние стержня при действий сосредоточенных силовых и тепловых источников колебаний для разных значений термоупругих констант среды и частот колебаний.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05132272 КН МОН РК.

Ключевые слова: уравнение термоупругости, тензор Грина, преобразование Фурье

2010 Mathematics Subject Classification: 74B05, 74H15

Литература

[1] Новацкий В. *Теория упругости*, Мир, Москва (1975).

[2] Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. Стационарные колебания, *Математический журнал*, **14**:2 (2014), 5–20.

— ⁂ —

Тензор Грина для термоупругой полуплоскости со свободной границей

Людмила АЛЕКСЕЕВА[1,a], Бахыт АЛИПОВА[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*alexeeva@math.kz*, [b]*b.alipova@iitu.kz*

При изучении сейсмических процессов в земной коре для учета реальных свойств породного массива используются различные математические модели механики деформируемых твердых тел. Наиболее изучены процессы распространения и дифракции волн в упругих средах при действии сосредоточенных и распределенных источников различного вида. Теоретические исследования в этом направлении на основе классических методов математической физики имеют довольно обширную библиографию (см.[1-4]). Реальный породный массив, помимо упругих, обладает целым рядом других свойств, которые оказывают существенное влияние на процессы распространения сейсмических волн и его напряженно-деформированное состояние. Поэтому усложнение математической модели для более полного учета действующих факторов при изучении сейсмических процессов является абсолютно необходимым. Одним из таковых является температура массива, которая существенно влияет на его напряженно-деформированное состояние и при статических, и динамических воздействиях. Исследование динамики термоупругих сред при действии нестационарных силовых и тепловых источников возмущений относится к числу мало изученных проблем механики и математической физики. В связи со сложностью построения решений системы уравнений движения термоупругой среды, которая относится к классу систем смешанного гиперболо-параболического типа, обычно уравнения упрощают, пренебрегая воздействием упругих деформаций на температурное поле среды. Для такой модели, которая получила название несвязанной термоупругости, вначале можно определить температурное поле, решая хорошо изученное параболическое уравнение теплопроводности, а затем определить перемещения или скорости точек среды, используя классические уравнения динамики упругого тела, в которые градиент температурного поля входит как массовая сила. Но даже для такой модели класс решенных задач, а тем более компьютерных программ очень ограничен. Здесь рассматривается волновая динамика термоупругого полупространства при нестационарных силовых и тепловых воздействиях, для чего используется модель связанной термоупругости. В пространстве преобразований Лапласа построен тензор Грина для термоупругого полупространства, описывающего перемещения среды при действии мгновенных сосредоточенных силовых и тепловых источников. Построено обобщенное решение задачи динамики термоупругого полупространства в условиях плоской деформации при действии произвольных массовых сил и тепловых источников.

Funding: Авторы были поддержаны грантом АР КН МОН РК.

Ключевые слова: термоэластодинамика, обобщенные функции, тензор Грина, термоупругое полупространство

2010 Mathematics Subject Classification: 74B10

Литература

[1] Novacki V. *Theory of elasticity*, Mir, Moscow (1975).

[2] A.N. Guz , V.D. Kubenko , M.A. Cherevko Diffraction of elastic waves, - Kiev: Naukova Dumka. - 1978.-308 p.

[3] Zh.S. Erzhanov ,Sh.M. Aitaliev ,L.A. Alexeyeva *Dynamics of tunnels and underground pipelines*, Almaty: Nauka (1989) 240 p

[4] Sh.M. Aitaliev ,L.A. Alexeyeva ,Sh.M. Dildabaev , N.B. Zhanbyrbaev *Method of boundary integral equations in the problems of dynamics of elastic multicoupled solids*, Nauka, Almaty (1992)-228 p.

[5] V. Novacki *Dynamical problems of thermoelasticity*, Mir, Moscow (1970) - 256 p

[6] V.D. Kupradze , T.G. Gegelia , M.O. Basheleishvili , T.V. Burchuladze *3D problems of mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*, Nauka, Moscow (1976) - 664 p

[7] H.G. Georgiadis , A.P. Rigatos , L.M. Brock Thermoelastodynamic disturbances in a half-space under the action of a buried thermal/mechanical line source, *International Journal of Solids and Structures* 1999. V. 36. P. 3639-3660.

[8] G. Lykotrafitis ,H.G. Georgiadis ,L.M. Brock Three-dimensional thermoelastic wave motions in a half-space under the action of a buried source, *International Journal of Solids and Structures*, 2001. V. 38. P. 4857-4878

[9] M. Raoofian Naeeni, M. Eskandari-Ghadi, A.A. Ardalan, S. Sture, M. Rahimian Transient response of a thermoelastic half-space to mechanical and thermal buried sources, *ZAMM* 2015. V. 95. No 4. P. 354-376

[10] Mahmoodi Kordkhieli H., Ghodrati Amiri G., Hosseini M. Axisymmetric analysis of a thermoelastic isotropic half-space under buried sources in displacement and temperature potentials, *Journal of Thermal Stresses. 2017* V. 40. No 2. P. 237-254

[11] L.A. Alexeyeva , B.N. Kupesova (Alipova), Method of generalized functions in boundary-valued problems of coupled thermoelastodynamics, *Applied Mathematics and Mechanics* - 2001. - T.65.- No 2. - pp.334-345

[12] V.S. Vladimirov *Generalized functions in mathematical physics* Nauka, Moscow (1978) - 280 p

[13] L.A. Alexeyeva , A.N. Dadaeva About uniqueness of solutions of boundary-valued problems of thermoelasticity with considering of thermal shoch waves, *Proceedings of KazNTU, Series of Mathematics, Mechanics and Informatics* - 2013. -No 28. - pp.11-18

[14] B.N. Alipova , L.A. Alexeyeva , A.N. Dadayeva, Shock waves as generalized solutions of thermoelastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions, *AIP Conference Proceedings, ICNPAA 2016 World Congress 11th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences July 4-8, 2016, La Rochelle, France, American Institute of Physics* ISBN: 978-0-7354-1276-7, http://dx.doi.org/ 10.1063/1.4765466, Citation: 1798, 020003 (2017)

[15] V. Kech , P. Teodorescu *Introduction into theory of generalized functions with applications in technics*, Mir, Moscow (1978) -518 p

[16] B.N. Alipova Method of Boundary integral equations (BIEM) and generalized solutions of transient problems of thermoelastodynamics, *ICNPAA 2012, 9-15 July, AIP Conference Proceedings*, 1493, 39(2012); doi: 10.1063/1.4765466, American Institute of Physics, Vien, Austria, http://dx.doi.org/10.1063/1.4765466, pp.39-46

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Математическое моделирование динамики упругой среды при образовании трещин

Людмила АЛЕКСЕЕВА[1,a], Гульмира ЗАКИРЬЯНОВА[2,b], Бакытбек САРСЕНОВ[3,c]

[a,b,c]*Институт механики и машиноведения им. У.А.Джолдасбекова, Алматы, Қазахстан*
E-mail: [1]alexeeva@math.kz, [2]gulmzak@mail.ru

Представление об очаге землетрясения как о результате разрыва сплошности среды под действием упругих напряжений было сформулировано Д.Рейдом в 1910 году. Землетрясение происходит за счет разрядки напряжений путем образования трещин в земной коре. При этом образуются сейсмические дилатационные и сдвиговые волны, которые, распространяясь в земной коре, воздействуют на подземные и надземные сооружения, вызывая часто разрушительные последствия. Выяснение причин таких явлений, как разрушение и потеря несущей способности конструкции, разрушение деталей машин и механизмов, требует изучения процессов образования трещин, разрушения и сопровождающих их динамических явлений в телах и средах.

Механика разрушения, начало которой было положено Гриффитсом в 1921 году, получила развитие только с середины прошлого столетия и до сих пор далека от завершения. Для изучения таких процессов наиболее эффективными являются методы математического моделирования. Для этого используются различные математические модели механики деформируемого твердого тела, в частности, упругие изотропные и анизотропные среды. Задачи динамики прямолинейных и плоских трещин в упругих и упругопластических средах исследовались в работах Д. Райса, Б.Н. Кострова, Л.И. Слепяна [1-3] и др. на основе аналитических методов механики деформируемого твердого тела, а также с использованием различных численных методов.

Здесь, на основе метода обобщенных функций, разработан новый метод расчета напряженно-деформированного состояния упругого массива при образовании трещины произвольной формы с заданным законом взаимодействия берегов трещины [3-5]. Даны регулярные интегральные представления перемещений, деформаций и напряжений среды, ядра которых являются фундаментальными решениями уравнений движения упругой среды. Приведены результаты расчетов динамики упругой среды при образовании сдвиговых трешин и трещин вертикального разрыва при плоской деформации [6].

Ключевые слова: упругость, трещина, ударные волны, метод обобщенных функций **2010 Mathematics Subject Classification:** 74J40

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05135494 КН МОН РК.

Литература

[1] Райс Дж. Математические методы в механике разрушения.-М:Мир- 1973.

[2] Костров Б.В. Механика очага тектонического землетрясения. М:Наука, 1979.

[3] Alekseeva L.A. Analogues of the Kirchhoff and Somigliana formulae in two-dimensional elastodynamics problems//Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1991, v.55, **2**, p. 238-247.

[4] Алексеева Л.А., Дильдабаева И.Ш. Обобщенное решение уравнений динамики упругой среды с трещиной //Математический журнал, 2007, Т.8, є3, с.11-20.

[5] Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Фундаментальные решения гиперболических систем второго порядка //Дифференциальные уравнения,2001, Т.37, є4, с.488-494.

[6] Alexeyeva L.A., Sarsenov B. T. Dynamics of elastic half-plane when resetting the vertical stress at the crack// International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2016, v.107, **3**, p. 517-528.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Фундаментальные и обобщенные решения уравнений колебаний двухкомпонентной среды Био и их свойства

Людмила АЛЕКСЕЕВА[1,a], Ергали Курманов [2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования МОН РК, , Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*alexeeva@math.kz,* [b] *kurmanovergali@gmail.com*

При изучении сейсмических процессов в земной коре для учета реальных свойств породного массива используются различные математические модели механики деформируемых твердых тел. Наиболее изучены процессы распространения и дифракции волн в упругих средах при действии сосредоточенных и распределенных источников различного вида. Но эти модели не учитывают многие реальные, существенные для практики, свойства окружающего массива. Таковыми являются, например, наличие грунтовых вод, которое осложняет строительство и эксплуатацию наземных и подземных сооружений, влияет на величину и распределение напряжений. Пористая среда, насыщенная жидкостью или газом, с точки зрения механики сплошной среды, - это, по существу, двухфазная сплошная среда, одной из фаз которой является частицы жидкости (газа), другой - твердые частицы скелета среды. Существуют различные математические модели таких сред, разработанные различными авторами. Наиболее известные из них - это модели М.Био, В.Н.Николаевского[1,2]. Однако класс решенных для них задач очень ограничен и в основном связан с построением и исследованием частных решений этих уравнений на основе методов полного и неполного разделений переменных и теории специальных функций в работах этих авторов, а также Ержанова Ж.С., Айталиева Ш.М., Алексеевой Л.А., В.В. Шершнева [3-5]. В связи с этим актуальной является разработка эффективных методов решения краевых задач для таких сред с применением современных математических методов. Здесь рассматриваются процессы распространения волн в среде Био, порождаемые действующими периодическими силами различного типа. На основе преобразования Фурье обобщенных функций, построено фундаментально решение уравнений колебаний среды Био - тензор Грина, который описывает процесс распространения гармонических по времени волн фиксированной частоты в пространствах размерности N=1,2,3 при действии сосредоточенных в начале координат силовых источников, описываемых сингулярной дельта-функцией. На его основе построены обобщенные решения этих уравнений при действии разнообразных источников периодических возмущений, которые описываются как регулярными, так и сингулярными обобщенными функциями. Для регулярных действующих сил даны интегральные представления решений, которые могут использоваться для вычислений напряженно-деформированного состояния пористой водонасыщенной среды.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05132272 КН МОН РК.

Ключевые слова: среда Био, фундаментальное решение, обобщенное преобразование Фурье

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде, *Механика. Сб. перев*, **1**:2 (1963), 103–104.

[2] Николаевский В.Н. *Механика пористых и трещиноватых сред*, Наука, Москва (1984).

[3] Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов, Наука, Алма-Ата (1989), 240.

[4] Алексеева Л.А., Шершнев В.В. Фундаментальные решения уравнений движения среды Био, *Доклады НАН РК*, **1**:2 (1994), 3-6.

[5] Алексеева Л.А., Курманов Е.Б. Фундаментальные и обобщенные решения Двухкомпонентной среды М.Био 1. Преобразование Фурье фундаментальных решений и их регуляризация *Математический журнал*, **1**:Т.17. 13-30 (2017), 13-30.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Анализ данных из социальных сетей на основе теории социального влияния Латане

Айдана АХМЕТОВА

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: akhmetovaazh@mail.ru

В связи с развитием интернет технологий стало возможным общаться виртуально при помощи социальных сетей. Социальная сеть [1,2] представляет собой интерактивный многопользовательский веб-сайт, содержание (контент) которого наполняется самими участниками сети. Сайт представляет собой автоматизированную социальную среду, позволяющую общаться группе пользователей, объединенных общими интересами. Однако отметим, что социальная сеть Ц это инструмент, который может активно использоваться государствами для формирования и манипулирования общественным мнением. В ряде стран (США, Китай, Франция и т.д.) приняты решения об исследовании и использовании социальных сетей в интересах этих стран для моделирования социальных, экономических, политических и других процессов и разработки механизмов воздействия на эти процессы. В статье предпринята попытка адаптировать теорию динамического социального влияния Латане [3,4] для того чтобы вычислить уровень влияния окружающих людей на мнение конкретного человека. Предложены количественные характеристики, множества, которые могут быть вычислены или построены на основе информации, полученной из социальных сетей.Для анализа социальных сетей можно предложить модификацию формулы Латане в следующем виде:

$$I_u = -\beta \sum_{i=1}^{N} Followerscount(u_i) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=2,i>j}^{N} \frac{Followerscount(u_j)O_jO_i}{d^{\alpha}(u_i,u_j)}$$

В этой формуле силой влияния сичтается количество подписчикой пользователя. Чем больше количество подписчиков, тем популярнее пользователь. Здесь $d^{\alpha}(u_i,u_j)$ Ц расстояние от пользователя u_i до пользователя u_j, которое определяем по несовпадениям анкетных данных. В случае, когда учитывается реклама, направленная на сообщество, получаем формулу

$$I_u = -\beta \sum_{i=1}^{N} Followerscount(u_i) - \sum_{i=1}^{N} Followerscount(s)O_iO_s -$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=2,i>j}^{N} \frac{Followerscount(u_j)O_jO_i}{d^{\alpha}(u_i,u_j)}$$

Здесь количество подписчиков сообщества $Followers_count(s)$ - считаем как силу влияния сообщества на данного пользователя. Если есть реклама на сообщество то O_i принимает значение $+1$, иначе Ц1. В процессе исследований был разработан программный комплекс на языке Python, содержащий модули извлечения информации из социальных сетей, обработки, анализа и визуализации данных. Модуль извлечения данных имеет возможность извлекать данные, в первую очередь, из крупнейших социальных сетей: Twitter и vkontakte. Ниже представлены результаты тестирования (табл. 1). В последней колонке приведены уровни влияния подписчиков (друзей) рассматриваемого индивидуума.

Таблица 1

Друзья Maksat Zhalel	Друзья	Кол-во несовпадений	Уровень влияния
Asselya Moldasheva	828	7	-118.286
Дильшат Аширов	67	8	8.375
Бейбит Тузелбаев	128	7	-18.2857
Сергей Коробицин	34	7	-4.85714

Ключевые слова: анализ социальных сетей, социальные сети, теория Латане, интернет, vkontakte

Литература

[1] Charu C. Aggarwal. *Social network data analytics*,(2011).

[2] Батура Т.В. Методы анализа компьютерных социальных сетей, *Вестник НГУ*, **С**ерия: Информационные технологии, Новосибирск (2012), 13–28.

[3] Nowak A., Szamrej J., Latane B. From private attitude to public opinion: a dynamic theory of social impact, *Psychological Review*,**97** (1990), 362–376.

[4] Wragg T. Modeling the Effects of Information Campaigns Using Agent-Based Simulation, *Prep.: Command and Control Division, Defense Science and Technology Organization*, Australian Government (2006), 61.

— ⁂ —

Связь одной задачи финансовой математики с задачей Стефана

Алтын БАЙТЕЛИЕВА[1,a], Канат ШАКЕНОВ[2,b]

[1,2] *Казахский национальный университет, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]Baiteliyevaaltyn@gmail.com, [b]shakenov2000@mail.ru

Предположим, что на фильтрованном вероятностном пространстве $\Big(\Omega,\, F,\, \big(F_t\big)_{t\geq 0},\, \mathbf{P}\Big)$, где $\big(F_t\big)_{t\geq 0}$ – броуновская (винеровская) фильтрация, т.е. поток σ-алгебр $F_t=\sigma\big(F_t^0\cup\mathcal{N}\big)$, $F_t^0=\sigma\big(B_s,\, s\leq t\big)$, $\mathcal{N}=\big\{A\in F:\, \mathbf{P}\big(A\big)=0\big\}$, задан стандартный винеровский процесс $W_t=\big(W_t\big)_{t\geq 0}$ и диффузионный $\big(B,\, S\big)$-рынок имеет следующую структуру:

$$dB_t=rB_tdt,\quad B_0>0, \tag{1}$$

$$dS_t=S_t\big(\mu dt+\sigma dW_t\big),\quad S_0>0, \tag{2}$$

где r – процентная ставка, μ и σ – параметры геометрического броуновского движения $S_t=\big(S_t\big)_{t\geq 0}$. Уравнение (2) с начальным условием S_0 не зависящим от стандартного винеровского процесса $W=\big(W_t\big)_{t\geq 0}$, имеет явное решение $S_t=S_0e^{\mu t}e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t}$. Отметим, что параметр μ характеризует среднюю величину изменения скорости броуновского движения, а диффузию σ^2 часто называют волатильностью, и они могут иметь другие смыслы в зависимости от постановки задачи. Эти параметры в нашей задаче являются детерминированными.

Для стандартного дисконтируемого опциона покупателя (опциона-колл) функция платежа f_t имеет структуру: $f_t=e^{-\lambda t}g\big(S_t\big)$, где $g(x)=(x-K)^+$, $x\in E=(0,\,\infty)$, K – цена исполнения (strike price).

Положим $V^*(x)=\sup B_0\tilde{\mathbf{E}}_x\frac{f_\tau}{B_\tau}$, где sup берется по классу всех конечных моментов остановки $\mathcal{M}_0^\infty=\big\{\tau=\tau(\omega):\, 0\leq\tau(\omega)<\infty,\, \omega\in\Omega\big\}$ и $\tilde{\mathbf{E}}_x$ обозначает математическое ожидание по мартингальной мере $\tilde{\mathbf{P}}_x$, относительно которой процесс $S_t=\big(S_t\big)_{t\geq 0}$ имеет стохастический дифференциал $dS_t=S_t\big(rdt+\sigma dW_t\big)$, $\quad S_0=x$. Положим $\mu=r$. В этом допущении у $\tilde{\mathbf{P}}_x$ и $\tilde{\mathbf{E}}_x$ символ $\sim$ можно опускать.

Итак, пусть

$$V^*(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^\infty} \mathbf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau}\big(S_\tau - K\big)^+. \tag{3}$$

Для многих целей имеет смысл рассматривать наряду с классом $\mathcal{M}_0^\infty$ также класс $\overline{\mathcal{M}}_0^\infty = \big\{\tau = \tau(\omega) : 0 \le \tau(\omega) \le \infty, \omega \in \Omega\big\}$ тех марковских моментов, которые могут принимать и значения ∞, и полагать

$$\overline{V}^*(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^\infty} \mathbf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau}\big(S_\tau - K\big)^+ I(\tau < \infty). \tag{4}$$

Отыскание функций $V^*(x)$ и $\overline{V}^*(x)$ имеет самое прямое отношение к рассматриваемого стандартного опциона-колл Американского типа, поскольку значения $V^*(x)$ и $\overline{V}^*(x)$ в точности совпадают со значениями **рациональных стоимостей**, в предположении, что покупатель опциона может выбирать момент предъявления опциона или в классе $\mathcal{M}_0^\infty$, или в классе $\overline{\mathcal{M}}_0^\infty$ и $S_0 = x$. Случай $\tau = \infty$ соответствует непредъялению опциона к исполнению. Если τ^* и $\overline{\tau}^*$ – **оптимальные моменты** в решении задач (3), (4), то они будут оптимальными моментами предъявления покупателем опционов в классах $\mathcal{M}_0^\infty$ или $\overline{\mathcal{M}}_0^\infty$.

Тем самым, решение задач (3), (4) сводится к отысканию значения x^* и функции $V^*(x)$ $\big(V^*(x) = \overline{V}^*(x)$, или, тоже самое, что требуемое значение x^* и $V^*(x)$ – наименьшая $\beta = (\lambda + r)$-эксцессивная мажоранта функции $g(x)$, должны быть решениями следующей задачи Стефана, или задачи со свободной границей:

$$\mathbf{L}\widetilde{V}(x) = (\lambda + r)\widetilde{V}(x), \quad x < \widetilde{x}, \tag{5}$$

$$\widetilde{V}(x) = g(x), \quad x \ge \widetilde{x}, \tag{6}$$

$$\frac{d\widetilde{V}(x)}{dx}\Big|_{x\uparrow\widetilde{x}} = \frac{dg(x)}{dx}\Big|_{x\downarrow\widetilde{x}}, \tag{7}$$

где $\mathbf{L} = rx\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – инфинитезимальный оператор процесса $S = \big(S_t\big)_{t\ge 0}$ со стохастическим дифференциалом $dS_t = S_t\big(rdt + \sigma dW_t\big)$.

Ключевые слова: вероятностное пространство, винеровский процесс, процентная ставка, волотильность, мартингал, рациональная стоимость, оптимальный момент, задача Стефана

2010 Mathematics Subject Classification: 91G80, 35J25

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О построении множества стохастических дифференциальных уравнений устойчивого программного движения

Гулмира ВАСИЛИНА[1,2,a], Марат ТЛЕУБЕРГЕНОВ[1,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]v_gulmira@mail.ru, [b]marat207@mail.ru

По заданной программе движения

$$\Lambda : \lambda \equiv y - \varphi(t) = 0, \ y \in R^n, \ \varphi \in C^1, \ \|\varphi\| \le l, \tag{1}$$

построить соответствующее множество стохастических уравнений Ито

$$\dot{y} = Y(y,t) + \sigma(y,t)\dot{\xi}, \ \ \xi \in R^k, \tag{2}$$

в классе уравнений, допускающих для начальных условий $y|_{t=t_0} = \varphi(t_0)$ существование и единственность до стохастической эквивалентности решения уравнения (2) и множество s-мерных вектор-функций $Q(y,t)$ по отношению к составляющим которых имеется устойчивость по вероятности множества (1).

Здесь $\xi(t) = \omega(t) + \int_{R^n} c(y)P(t,dy)$ – случайный процесс с независимыми приращениями, где $\omega(t)$ – винеровский процесс, $P(t,A)$ – пуассоновский процесс как функция t и пуассоновская стохастическая мера как функция множества A, а $c(y)$ – векторная функция, отображающая R^n в пространство значений процесса $\xi(t)$ при каждом t.

Приведенная постановка является обобщением задачи, рассмотренной ранее при $\sigma \equiv 0$ в [1,2].

Уравнение возмущенного движения материальной системы, для которой заданное движение (1) является возможным, может быть представлено в виде

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, y, t) + B(\lambda, y, t)\dot{\xi}, \tag{3}$$

где $A(\lambda, y, t)$ – вектор-функция, $B(\lambda, y, t)$ – матрица типа Еругина, удовлетворяющие условию $A(0, y, t) \equiv 0$, $B(0, y, t) \equiv 0$.

Определение. Функция $a(r)$ называется функцией класса Хана ($a \in \in K$), если она непрерывна, строго возрастающая и удовлетворяет условию $a(0) = 0$.

Теорема. *Если в окрестности интегрального многообразия Λ_ε существует функция Ляпунова со свойствами*

$$a(\|\lambda\|) \le V(\lambda; y, t) \le b(\|\lambda\|), \ \ a, b \in K,$$

$$LV \le -c(\|\lambda\|), \ \ c \in K,$$

то программное движение $\lambda \equiv y - \varphi(t) = 0$ системы (3) асимптотически ρ-устойчиво по вероятности относительно произвольной непрерывной по y и t s-мерной вектор-функции $Q(y,t)$ удовлетворяющей условию

$$\|x\| \le \beta(\|\lambda\|), \quad \beta \in K,$$

где $x = Q(y,t) - Q(\varphi(t), t)$ и L – производящий оператор процесса $\xi(t)$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05131369 КН МОН РК.

Ключевые слова: устойчивость по вероятности, програмное движение, функция сравнения

2010 Mathematics Subject Classification: 60H10

Литература

[1] Галиуллин А.С. *Обратные задачи динамики*, Наука, Москва (1981).

[2] Тлеубергенов М.И. О построении множества функций сравнения программного движения, в: *Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики*, УДН, Москва (1983), 63–66.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Численное моделирование пространственного турбулентного перемешивания сверхзвуковой струи в спутном сверхзвуковом потоке с наложением дополнительных возмущений.

Акерке ЗАДАУЛЫ[1,a], Асель БЕКЕТАЕВА[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования. Алматы, Казахстан*
[2] *PhD 2 года обучения, Институт механики и машиноведения. Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*azadauly@gmail.com*, [b]*azimaras10@gmail.com*

Изучение свойств смешивания струй играет важную роль во многих задачах промышленности, таких как: турбулентное смешивание струи топлива с воздухом в камерах сгорания, взаимодействие струй при запуске ракеты и космического механизма с пусковым оборудованием и т.д. Проблема улучшения смешивания струй, как низкоскоростных так и высокоскоростных, исследовалась экспериментально [1-3] и численно [4-6]. На сегодняшний день известны различные способы улучшения смешения струи и потока к примеру: введение уступов и каверн на стенках камер сгорания, дополнительное возмущение струи на входе и т.д. [7-9]. Однако проблема контроля улучшения смешивания остается по сей день актуальной.

В данной работе численно моделируется сверхзвуковая турбулентная круглая струя в спутном сверхзвуковом потоке методом LES. Течение описывается системой трехмерных осредненных по пространству уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного совершенного газа, замкнутых моделью Смагоринского. Для корректной постановки граничных условий на входе наряду с базовыми характеристиками (функция гиперболического тангенса) задаются флуктуации скорости спектральным методом, позволяющим правильно описать анизотропию вихревых турбулентных структур [10]. Далее, с целью улучшения смешения, налагаются дополнительные нестационарные возмущения на входе, путем задания периодических функций с максимальной амплитудой 3-10 процентов от базовой скорости. Исследовалось влияние амплитудных и частотных характеристик этих возмущений на турбулентное смешение струи и потока. В результате было выявлено, что вариация частоты приводит к увеличению размеров вихрей и существенному росту слоя смешения. Дополнительно был проведен сравнительный анализ численного моделирования с эксперментом [11], в результате которого получено достаточно удовлетворительное совпадение вычисленных данных с опытными.

Финансирование: Авторы были поддержаны грантом AP05131555 КН МОН РК.

Ключевые слова: Численное моделирование, сверхзвуковая струя, совершенный газ, уравнения Навье-Стокса, улучшение смешивания, возбужденная струя, спектральные граничные условия.

2010 Mathematics Subject Classification: 94B05, 94B15

Литература

[1] Antonia R.A. and Bilger R.W. An experimental investigation of an axisymmetric jet in a co-flowing stream. , *J.Fluid Mechanics*, **61:4**, (1973), 805–822.

[2] Borean J.-L.,Huilier D. and Burnage H. On the effect of a co-flowing stream on the structure of an axisymmetric turbulent jet. ,*Exp. Therm. and Fluid Science*, **7**, (1998), 10–17.

[3] Charonko J.J. and Prestridge K. Variable-density mixing in turbulent jets with coflow. ,*J.Fluid Mechanics*, **825**, (2017), 887–921.

[4] Ghasemi A., Pereira A., Li X. Large Eddy Simulation of Compressible Subsonic Turbulent Jet Starting From a Smooth Contraction Nozzle. , *Flow Turb. Combust.*, **98**, (2017), 83–108.

[5] Kuo C.-W., Cluts J. and Samimy M. Effects of excitation around jet preferred mode Strouhal number in high-speed jets. , *Exp. Fluids*, **98**, (2017), 83–108.

[6] Balarac G., Lesieur M. and Metais O. Control of coaxial jets by an azimuthal excitation: vortex dynamic and mixing properties. , *TSFP digital library*, **5**, (2007).

[7] Li L.-Q., Huang W., Yan L. and Li S.-B. Parametric effect on the mixing of the combination of a hydrogen porthole with an air porthole in transverse gaseous injection flow fields. , *Acta Astronautica*, **139**, (2017), 435–448.

[8] Huang W., Wang Z. G., Luo S. B. and Liu J. Parametric effects on the combustion flow field of a typical strut-based scramjet combustor. , *Chin. Sci. Bull.*, **56:35**, (2011), 3871–3877.

[9] Seiner J. M., Dash S. M. and Kenzakowski D. C. Historical survey on enhanced mixing in scramjet engines. , *J. Propuls. Power.*, **17**, (2001), 1273–1286.

[10] Адамьян Д. Ю., Стрелец М. Х., Травин А. К. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений. , *Математическое моделирование*, **23:7**, (2011), 3–19.

[11] Samimy M., Elliott G.S. Effects of compressibility on the characteristics of free shear layers., *AIAA Journal*, **28:3**, (1990), 439–445.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Численный алгоритм нахождения решения полупериодической краевой задачи для одного неклассического уравнения третьего порядка

Сымбат КАБДРАХОВА[1,a], Азиза САРСЕНБАЕВА[2,b]

[1]*Институт математики и математического моделирования*
[1,2]*КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*S_Kabdrachova@mail.ru,* [b]*azizok_96@mail.ru*

В области $\overline{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для одного неклассического уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = a_0(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_3(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} +$$
$$+ a_4(x,t)u + f(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t),\ \ t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,T)}{\partial t},\ x \in [0,\omega] \tag{4}$$

где $f(x,t), a_i(x,t)(i = \overline{0,4})$ непрерывные на $\overline{\Omega}$ функции, $\psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ функция, удовлетворяющая условиям $\psi(0) = \psi(T)$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}(T)$.

Краевые задачи для уравнений в частных производных третьего порядка описывают реальные процессы механики, нелинейной акустики, магнитной гидродинамики. Продольные колебания составных стержней, состоящих из упругих и упруго-вязких участков описываются уравнением третьего порядка [1-3]. Вопросы посвященные корректной разрешимости краевых задач для уравнений третьего порядка и методы их исследования рассмотрены в работах [4,5]. В работе [6] установлено однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка и оценки решения.

В данной сообщении на основе модификации метода ломаных Эйлера [7] построен алгоритм нахождения приближенного решения задачи (1)-(4). На основе специального преобразования неизвестной функции уравнение третьего порядка сводится к семействе периодических краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений применяется модификация метода ломаных Эйлера. Получены условия сходимости метода ломаных Эйлера к решению рассматриваемой краевой задачи.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP 05131220 КН МОН РК.

Ключевые слова: полупериодическая краевая задача, линейное гиперболическое уравнение, модификация метода ломаных Эйлера, численное решение, условия сходимости

2010 Mathematics Subject Classification: 35L20,35L70, 35B10

Литература

[1] Кожанов А.И., Ларькин Н.А., Яненко Н.А. *Смешанная задача для некоторых классов уравнений третьего порядка*, Препринт Т.5. Новосибирск: ИТПМ СО АН ССР, (1980), 36с.

[2] Ларькин Н.А. *О краевой задаче с ограниченными для уравнения третьего порядка и ее применение в газовой динамике. Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*, (1981), С. 115.

[3] Маматурдиев Г.М. *Решение одной краевой задачи о продольных колебаниях конечного упругого- вязкого стержня методом прямых. Труды межд.конф. "Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа*, Ташкент, (1993). С.115.

[4] Джураев Т.Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов*, Ташкент: Фан, (1979), 240с.

[5] Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* Ташкент: Фан, (1986), 220с.

[6] Оспанов М.Н. *Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка, Известия НАН РК. Серия физ.-мат., 2004, Т. 3, С.103-107. Известия НАН РК. Серия физ.-мат., 2004, Т. 3, С.103-107.*

[7] Кабдрахова С.С. *Об оценках сходимости модификации метода ломаных Эйлера решения линейной полупериодической краевой задачи для гиперболического уравнения*, Математический журнал, Алматы (2008). Т. 8, №2(28).- С. 55-62.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Моделирование движения толпы на основе клеточных автоматов в системе ANYLOGIC

Мансия КАНТУРЕЕВА[1,a],

[1] *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,*
E-mail: [a]monsiko@mail.ru,

В работе рассматриваются имитационные модели движения людей, базирующиеся на теории клеточных автоматов [1-4]. Толпа - одно из вездесущих явлений в нашей жизни. Защита людей от воздействия опасных факторов (пожара, угрозы взрыва, затопления и др.) является одной из актуальных задач. Ее успешное решение предполагает определение, прежде всего, временных характеристик движения людей.

Выбор формализма, основанного на теории клеточных автоматов, в ряде случаев дает возможность более быстрого получения результатов с помощью компьютерного моделирования и предпочтителен, когда требуется индивидуальное представление каждого человека, участвующего в движении.

Практическая значимость такого рода моделирования состоит в том, что разработанные методы могут использоваться для анализа процессов эвакуации из зданий и сооружений. На основе этих же методов, с использованием математического моделирования, могут быть выработаны рекомендации еще на стадии проектирования зданий и улиц, т.е. перед началом строительства.

Проведен обзор и анализ многих натурных наблюдений за поведением реальных толп, в том числе изучение зависимости плотности, скорости толпы и пропускной способности различных сооружений от различных внешних параметров. Основным инструментальным средством для выполнения данной работы является программная система AnyLogic [5]. Автором данной работы была создана модель небольшого аэропорта (Рис.1).

AnyLogic является уникальным программным продуктом, поддерживающим три методологии имитационного моделирования, называемых: системная динамика, дискретно-событийное и агентное моделирование. Система включает набор примитивов и библиотечных объектов для эффективного моделирования производства и логистики, бизнес-процессов и персонала, финансов, потребительского рынка, а также окружающей инфраструктуры в их естественном взаимодействии.

В первой разработанной модели имеется возможность 2D-анимации. В следующей модели используется 3D-анимация. Добавлена камера, возникает соответствующее 3D-окно, и пассажиры также отображаются в виде 3D-объектов.

Пассажиры, прибывающие в аэропорт, регистрируются на рейс. Затем все пассажиры должны будут пройти процедуру предполетного досмотра, после чего они смогут направиться в зону ожидания перед гейтами, дожидаясь начала посадки на свой рейс [5,6]. При объявлении начала посадки, пассажиры направляются к соответствующему гейту. У гейта служащие аэропорта проводят проверку посадочных талонов, после чего пассажиры проходят на посадку на самолет.

Изменения скоростей движения участников толпы зависят от многих причин, трудно подчиняющихся точному расчету. Поэтому при оценке скорости движения неизбежно приходится прибегать к средним значениям, которые можно считать надежными, если они установлены на основании статистических методов.

В значительной степени скорость движения зависит от плотности людской массы. В рассмотренных моделях движение людских потоков носит спокойный характер. Если предположить, что в таких скоплениях неожиданно возникнет аварийная ситуация, легко представить себе к каким серьезным последствиям она может привести. Изучение подобных ситуаций требует усложнения математических моделей.

Литература

[1] Blue V.J., Adler J.L. Cellular Automata Microsimulation of Bi-directional pedestrian flows// Journal of the Transportation Research.- 2000. P. 135-141.

[2] Burstedde C., Klauck K., Schadschneider A., Zittartz J. Simulation of pedestrian dynamics using a two dimensional cellular automaton // Physica.- 2001.-Vol-295,P. 507-525.

[3] Pelechano N., Badler N. Modeling Crowd and Trained Leader Behavior during Building Evacuation // IEEE Computer Graphics and Applications. -12-1-2006.- Vol-26, Issue-6-P.80-86

[4]Soraia Musse R., Daniel Thalmann. A model of human crowd behavior: Group inter-relationship and collision detection analysis. In Proc. Workshop of Computer Animation and Simulation of Eurographics. -1997. P. 39-51.

[5] https://www.anylogic.com/

[6]Borshchev A. The Big Book of Simulation Modeling. Multimethod modeling with AnyLogic 6. AnyLogic North America.- 2013

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О периодической краевой задаче для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка

Алия КЕЛДИБЕКОВА[1,a], Нургул ОРУМБАЕВА[2,b]

[1,2]Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан

E-mail: [b]OrumbayevaN@mail.ru

На $\Omega = [0, X] \times [0, T]$ рассматривается периодическая краевая задача

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad u(0,t) = \varphi(t), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \tag{2}$$

где $(n \times n)$ - матрицы $A(x,t), B(x,t)$, n-вектор-функции $f(x,t)$ непрерывны на Ω, n-вектор-функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[0,T]$.

В сообщении исследуются вопросы существования решения периодической краевой задачи для системы дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка (1), (2) и предлагается метод построения ее приближенного решения. С помощью дополнительных функций рассматриваемая задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из семейства многоточечных задач для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с функциональным параметром и интегрального соотношения. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения исследуемой задачи и доказана его сходимость. При установлении условий разрешимости семейства многоточечных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка использован метод параметризации [1]. Установлены достаточные условия существования и единственности решения периодической задачи для системы дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка. Справедлива следующая

Теорема. Пусть при некоторых $h > 0 : Nh = T, N = 1, 2, ...,$ $(nN \times nN)$ матрица $Q(x,h)$ обратима при всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства
1) $\|[Q(x,h)]^{-1}\| \le \gamma(x,h)$; 2)$a(x)q(x,h) \le \mu < 1$, $q(x,h) = h[1 + a(x)\gamma(x,h)h]$.
Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) и справедливы оценки $a)$ $\max\limits_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r^*(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\| + \max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^*(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\| \le$

$$\le \sigma(x,h)b(x)\sum_{j=2k-1}^{\infty}\frac{1}{j!}\bigg(\int_0^x\int_0^\xi \sigma(\eta,h)b(\eta)d\eta d\xi\bigg)^j\int_0^x\int_0^\xi \chi(\eta,h)d\eta d\xi\times$$

$$\times\max\bigg\{\max_{t\in[0,T]}\|\varphi(t)\|, \max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \|f\|_0\bigg\},$$

$$b)\ \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^*(x,t) - u_r^{(k)}(x,t)\| \le$$

$$\le \int_0^x\int_0^\xi\bigg(\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^*(\eta) - \lambda_r^{(k)}(\eta)\| + \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(\eta,t) - \widetilde{v}_r^{(k)}(\eta,t)\|\bigg)d\eta d\xi,$$

$k = 1, 2, ...,$ где $a(x) = \max\limits_{t\in[0,T]}\|A(x,t)\|, b(x) = \max\limits_{t\in[0,T]}\|B(x,t)\|, \|f\|_0 = \max\limits_{(x,t)\in\Omega}\|f(x,t)\|,$

$$\chi(x,h) = \bigg[\sigma(x,h)q(x,h) + \gamma(x,h)h\bigg][a(x) + b(x)]\rho(x), \quad \sigma(x,h) = \frac{[q(x,h) + \gamma(x,h)h]}{1 - a(x)q(x,h)},$$

$$\rho(x) = \max\left\{[b(x)+1]q(x,h), x + \int\limits_0^x \int\limits_0^\xi \Big[b(\eta)+1][q(\eta,h)+\gamma(\eta,h)h\Big] d\eta d\xi\right\}\times$$

$$\times \max\left\{\max_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\|, \max_{t\in[0,T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0\right\}.$$

Funding: Работа поддержана МОН РК (грант AP05132262, грант "Лучший преподаватель ВУЗа").

Ключевые слова: уравнения в частных производных третьего порядка, периодические условия, краевая задача, алгоритм

2010 Mathematics Subject Classification: 35L20

Литература

[1] Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **29**:1 (1989), 50–66.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Численное моделирование процесса образования структур Лизеганга под действием электрического поля

Виктор КИРЕЕВ[1,a], Быкыт ШАЛАБАЕВА[2,b], Нурболат ДЖАЙЧИБЕКОВ [2], Айгуль ЗАКИРОВА [1],

[1] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*
[2] *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]kireev@anrb.ru, [b]shalabaeva.b.s@mail.ru

Колебательные химические реакции, в которых концентрации реагирующих веществ изменяются периодически, на протяжении более ста лет являются предметом изучения ученых различных специальностей: химиков, физиков, биологов, геологов, медиков, математиков [1]. Наиболее известными примерами колебательных химических являются реакции Брея-Либавски (1921), Белоусова-Жаботинского (1958) и Бриггса-Раушера (1972). Кольца (или слои) Лизеганга, представляющие собой пространственные периодические структуры, были впервые обнаружены немецким химиком Рафаэлем Эдуардом Лизегангом в 1896 году, но до сих пор не создана теория, способная объяснить все механизмы, лежащие в основе этой периодической реакции [2-3]. Дальнейшее теоретическое и экспериментальное изучение закономерностей образования структур Лизеганга может, в частности, способствовать более глубокому пониманию особенностей осадкообразования в различных технологических процессах нефтехимических производств.

В работе с помощью численного моделирования исследуется процесс образования структур Лизеганга, т.е. процесс периодического осаждения при взаимной диффузии двух реагирующих химических веществ, при наличии внешнего постоянного электрического поля. Математическая модель процесса состоит из трех дифференциальных уравнений диффузии-реакции для концентраций исходных компонент и образующегося осадка. Кинетика образования осадка описывается в соответствии теорией перенасыщения В. Оствальда. Уравнения математической модели в одномерной и двумерной постановках решались численно методом контрольного объема с использованием написанного авторами работы на языке C++ компьютерного кода.

В результате численного моделирования при отсутствии электрического поля были получены периодические структуры из образовавшегося осадка, которые качественно соответствуют картинам, наблюдавшихся в экспериментах. Показано, что полученные численно кольца Лизеганга удовлетворяют известным закономерностям: соотношение расстояний до соседних колец остается постоянным и существует степенная зависимость между расстояниями до колец и временем их образования. Исследовано влияние отношения концентрации исходных веществ и напряженности электрического поля на характер образующихся структур. Обнаружено, что увеличение напряженности электрического поля приводит к уменьшению числа образующихся структур.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05134098 КН МОН РК.

Ключевые слова: структуры Лизеганга, электрическое поле, метод контрольного объема

2010 Mathematics Subject Classification: 37N10, 65N08, 80A32

Литература

[1] Шемякин Ф.М., Михалев П.Ф. *Физико-химические периодические процессы*, М.-Л.: Изд. АН СССР (1938).

[2] Кузьмин В.И., Гадзаов А.Ф., Тытик Д.Л., Бусев С.А., Ревина А.А., Высоцкий В.В. Кинетика образования колец Лизеганга, *Журнал структурной химии*, **54**:Приложение 2 (2013), S368-S382.

[2] Lagzi I. Formation of Liesegang patterns in an electric field, *Physical Chemistry Chemical Physics*, **4**:8 (2002), 1268-1270.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Решение одной граничной задачи для уравнения теплопроводности в области с подвижной границей

Умбеткул КОЙЛЫШОВ[1,a], Кулняр БЕЙСЕНБАЕВА[2,b]

[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[2]*Казахская академия транспорта и коммуникации им. Тынышбаева, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]umbetkul.koylyshov@gmail.com,

Аннотация. Получено явное решение одной граничной задачи для уравнения теплопроводности с подвижной границей, в области вырождающейся в начальный момент времени.

Краевые задачи для уравнений теплопроводности в областях с движущейся границей принципиально отличны от классических. Вследствие зависимости размера области от времени, к этому типу задач в общем случае не применимы методы разделения переменных и интегральных преобразований, так как оставаясь в рамках классических методов математической физики, не удается согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса.

Решение этой проблемы являлось предметом исследования многих отечественных и зарубежных математиков. Большое число работ посвящены краевым задачам в невырождающихся областях, в них рассматривались вопросы существования классических решений методом тепловых потенциалов как для уравнения теплопроводности, так и для более общих уравнений параболического типа.

Когда область вырождается в начальный момент времени, то метод последовательных приближений решения интегральных уравнений невозможно применить. Так как при вырождении области интегральные операторы становятся особыми, то есть, при их воздействии на постоянную и стремлении верхнего предела к нулю, они не стремится к нулю. Интегральные уравнения такого рода было получено в работе [8] , при изучении теплового поля жидких контактных мостиков и найдено асимптотическое решение, которое можно использовать для решения практических задач.

Данная работа посвящена исследованию одной граничной задачи для уравнения теплопроводности в области, вырождающейся в начальный момент времени, когда граница движется по линейному закону.

Получен явный вид решения данной задачи, впоследствии которого можно применять для численного решения.

Рассматривается следующая задача: требуется найти функцию $u(x,t)$ в области $D(0 < x < \alpha t,\ t >)$, где $\alpha > 0$, удовлетворяющее уравнению:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in D = \{(x,t),\ 0 < x < \alpha t, \quad 0 < t < T\}, \tag{1}$$

граничным условиям:

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(\alpha t, t) = \psi(t), \quad (0 < t < T), \tag{2}$$

Решение задачи (1) – (2) имеет следующий вид:

$$u(x,t) = -4a^2 \int\limits_0^t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G(x + 2n\alpha t,\ t - \tau)}{\partial x} \cdot e^{\frac{\alpha n(x+\alpha n t)}{a^2}} \varphi(\tau) d\tau -$$

$$-4a^2 \int\limits_0^t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G(x + (2n-1)\alpha t,\ t - \tau)}{\partial x} \cdot e^{\frac{2(2n-1)\alpha x + (2n-1)^2 \alpha^2 t + \alpha^2 \tau}{4a^2}} \psi(\tau) d\tau,$$

где $G(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{x^2}{4a^2 t}}$;

Нетрудно проверить, что полученное решение удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (2). Аналогичным образом можно найти решение и других граничных задач.

Ключевые слова: уравнения теплопроводности, граничная задача, подвижная граница, вырождающейся область, явное решение.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05

Литература

[1] Харин С.Н. *Тепловые процессы в электрических контактах и связанные с ними сингулярные интегральные уравнения.* , Дисс. канд.физ-мат. наук. Алма-Ата (1968).

— ⁂ —

Теоремы о существовании и компактности резольвенты оператора Шредингера с отрицательным параметром и их применение к изучению сингулярного оператора гиперболического типа

Мусахан МУРАТБЕКОВ[1,a], Мади МУРАТБЕКОВ[2,b]

[1] *Таразский государственный педагогический университет, Тараз, Казахстан*
[2] *Казахский университет экономики, финансов и международной торговли, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]musahan_m@mail.ru, [b]mmuratbekov@kuef.kz

Оператор Шредингера $L = -\Delta + q(x),\ x \in R^n$ является одним из основных операторов современной квантовой механики и теоретической физики. Известно, что для оператора Шредингера L получено немало фундаментальных результатов. Среди них, например, вопросы о существовании резольвенты, разделимости (коэрцитивная оценка), различные весовые оценки, оценки промежуточных производных функций из области определения оператора, оценки собственных и сингулярных чисел (s-чисел). В настоящее время имеются различные обобщения вышеуказанных результатов для эллиптических операторов.

Для общих дифференциальных операторов решение такой задачи в целом далеко от завершения. В частности, насколько нам известно, до сих пор не было результата, показывающего существование резольвенты и коэрцитивности, а также дискретности спектра оператора гиперболического типа в бесконечной области с растущими и колеблющимися коэффициентами.

Нетрудно видеть, что изучение некоторых классов дифференциальных операторов гиперболического типа, определенных в пространстве $L_2(R^{n+1})$ можно свести с помощью метода Фурье к изучению оператора Шредингера с отрицательным параметром:

$$L_t = -\Delta + \left(-t^2 + itb(x) + q(x)\right),$$

где t – параметр $(-\infty < t < \infty)$, $i^2 = -1$.

Отсюда, нетрудно заметить, что в операторе L_t при $|t| \to \infty$ получим, что $-t^2 \to -\infty$. Следовательно, здесь возникает совершенно иная ситуация по сравнению с оператором Шредингера $L = -\Delta + q(x)$, и в частности, методы, отработанные для оператора Шредингера L оказываются мало приспособленными при изучении оператора Шредингера L_t с отрицательным параметром.

Рассмотрим оператор

$$(L_t + \mu I)\, u = -\Delta u + \left(-t^2 + itb\,(x) + q\,(x) + \mu\right) u,$$

первоначально определенный на множестве $C_0^\infty\,(R^n)$, где $\mu \geq 0$.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $b\,(x)$, $q\,(x)$ удовлетворяют условию $i)$ $|b\,(x)| \geq \delta_0 > 0$, $\; q\,(x) \geq \delta > 0$ - непрерывные функции в R^n.

Оператор $L_t + \mu I$ допускает замыкание в пространстве $L_2\,(R^n)$, которое обозначим также через $L_t + \mu I$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда оператор $L + \mu E$ при $\mu \geq 0$ ограниченно обратим в пространстве $L_2\,(R^n)$.*

Теорема 1.2. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда при $\mu \geq 0$ для всех $u \in D\,(L_t)$ справедливы оценки:*

а) $\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2 + \left\| \sqrt{q\,(x)}u \right\|_2 \leq c \cdot \|(L_t + \mu I)\, u\|_2$, $c > 0$ *– постоянное число;*

б) $\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2 + \left\| \sqrt{q\,(x)}u \right\|_2 + \left\| \sqrt{|t| \cdot b\,(x)}u \right\|_2 \leq c \cdot \|(L_t + \mu I)\, u\|_2$ *для всех* $|t| \geq \beta > 0$, $c > 0$ *– постоянное число.*

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2. Тогда резольвента оператора L_t компактна в том и только в том случае, если*

$$\lim \inf_{e \in N(Q_d)} \int_{Q_d \setminus e} \left(|tb(x)| + q(x)\right) dx = \infty,$$

когда куб Q_d удаляется в бесконечность, где Q_d – открытый n-мерный куб с длиной ребра d, $N(Q_d)$ – совокупность всех подмножеств куба Q_d, имеющих достаточно малую емкость.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP0513108 КН МОН РК.

Ключевые слова: оператор Шредингера, резольвента, ограниченная обратимость, коэрцитивные оценки

2010 Mathematics Subject Classification: 47A10, 34L40, 81Q12

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Некоторые особенности прямых и обратных задач гравиметрии

Данияр НУРСЕИТОВ[1,a], Алтын НУРСЕИТОВА[2,b] Семен СЕРОВАЙСКИЙ[2,c]

[1] *Казахский национальный технический университет имени К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан*

[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]ndb80@mail.ru, [b]altynna@mail.ru, [c]serovajskys@mail.ru

Длительная разработка месторождений нефти и газа может привести к последствиям негативного характера. Для оценки соответствующих геодинамических событий осуществляется комплекс методов мониторинга этих процессов. Одним из таких методов является гравиметрический мониторинг, суть которого заключается в оценке деформационных процессов в продуктивных отложениях. В основе гравиметрического мониторинга лежат измерения гравитационного поля, проводимого, как правило, на поверхности земли с помощью специальных приборов, называемых гравиметрами. Однако эффективное использование результатов наблюдений предполагает сочетание результатов измерения с применением современных методов математического анализа и компьютерных технологий, обеспечивающих решение прямых и обратных задач гравиметрии.

Прямые задачи гравиметрии предполагают расчет гравитационного поля в исследуемой области по имеющейся ее геофизической характеристике. Как известно, основной характеристикой рассматриваемого процесса является потенциал гравитационного поля, удовлетворяющий уравнению Пуассона. В правую часть данного уравнения входит распределение плотности в соответствующей области. Общая информация такого рода для разрабатываемых нефтяных месторождений известна. При этом возникает проблема постановки граничных условий. Следует иметь в виду, что информация о величине потенциала гравитационного поля и его производных на внутренних (подземных) границах области, подлежащей исследованию, как правило, отсутствует. Однако известно, что потенциал гравитационного поля убывает по мере удаления от исследуемого объекта и стремится к нулю на бесконечности. В этой связи для решения прямой задачи гравиметрии рассматриваемая область достаточно сильно расширяется, и на границах расширенной области потенциал полагается равным нулю. Предварительные расчеты показывает, что для устранения влияния искусственных границ на гравитационное поле в заданной области последняя должна быть расширена примерно на порядок.

Обратные задачи гравиметрии предполагают идентификацию структуры рассматриваемой области (месторождения) по результатам измерения гравитационного поля, как правило, на поверхности земли. Используемая на практике измерительная аппаратура (гравиметры) установлена в определенных местах, их географические координаты и высоты известны. Объектом измерения является ускорение силы тяжести, что соответствует вертикальной производной потенциала гравитационного поля. Общая обратная задача гравиметрии предполагает восстановление распределения плотности по всей интересующей области на основе имеющей математической модели и результатов измерения. Однако в такой постановке решение обратной задачи существенно не единственно, т.е. одни и те же данные производной потенциала в отдельных точках на внешней поверхности могут быть вызваны разными распределениями плотности. В этой связи рассматриваются частные обратные задачи, в которых значительная информация о структуре месторождения считается известной, а требуется восстановить отдельные ее характеристики, например, толщину нефтяного пласта, глубину ее залегания, размеры имеющихся пустот и т.п. Отметим, соответствующие геометрические обратные задачи сводятся к задачам минимизации негладких функционалов, что предъявляет повышенные требования к разрабатываемым численным алгоритмам.

Результаты решения прямых и обратных задач гравиметрии позволяет дать некоторые практические рекомендации по эксплуатации нефтегазовых месторождений.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05135158 КН МОН РК.

Ключевые слова: гравиметрия, прямые задачи, обратные задачи, уравнение Пуассона, нефтегазовое месторождение

2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35Q86, 86-08

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Коэрцитивная разрешимость сингулярного эллиптического уравнения со смещением

Кордан ОСПАНОВ

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: ospanov_kn@enu.kz

Пусть $\Omega = \{(x,\ y):\ -\infty < x < \infty,\ \ -\pi < y < \pi\}$. Рассмотрим следующую задачу:

$$Lu = -u_{xx} - u_{yy} + a\,(x)\,u_x + b\,(x)\,u = f(x,\ y), \tag{1}$$

$$u\,(x,\ -\pi) = u(x,\ \pi), u_y\,(x,\ -\pi) = u_y(x,\ \pi), \tag{2}$$

где a непрерывно дифференцируема, b непрерывна, а $f \in L_2(\Omega)$. В докладе обсуждаются условия на коэффициенты a и b, достаточные для корректной разрешимости задачи (1), (2) и выполнения следующей, т.н. оценки максимальной регулярности:

$$\|u_{xx}\|_{2,\ \Omega} + \|u_{yy}\|_{2,\ \Omega} + \|au_x\|_{2,\ \Omega} + \|(|b|+1)u\|_{2,\ \Omega} \leq C\|f\|_{2,\ \Omega},$$

где u - решение (1), (2), а $\|\cdot\|_{2,\ \Omega}$ - норма в $L_2(\Omega)$.

Наиболее интересен случай, когда рост промежуточного коэффициента a не контролируется функцией b. Сингулярные линейные эллиптические уравнения, когда их промежуточные коэффициенты растут на бесконечности либо линейно, либо как функция $|x|ln(1+|x|)$, исследованы в работах A. Lunardi и V. Vespri (1997), M. Chicco и M. Venturino (2000), P.J. Rabier (2005), M. Hieber, L. Lorenzi, J. Pruss, A. Rhandi и R. Schnaubelt (2009). В настоящей работе предполагается, что a допускает более быстрый рост и колебание.

Уравнение (1) встречается в задачах распространения колебаний в среде с сопротивлением, стохастического анализа, биологии и финансовой математики.

Funding: Автор был поддержан грантом AP05131649 КН МОН РК.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, смещение, корректная разрешимость, максимальная регулярность

2010 Mathematics Subject Classification: 35J75, 47F05

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об одном свойстве решения псевдопараболического уравнения третьего порядка в бесконечной области

Мырзагали ОСПАНОВ

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: myrzan66@mail.ru

Рассмотрим псевдопараболическое уравнение третьего порядка

$$u_{xtt} = a_0(x,t)u_{xt} + a_1(x,t)u_{tt} + a_2(x,t)u_x + a_3(x,t)u_t + a_4(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $(x,t) \in \Omega = (0,\omega) \times (-\infty,\infty)$. Будем предполагать, что функции a_i $(i = \overline{0,4})$ и f непрерывны на $\overline{\Omega}$ ($\overline{\Omega}$ – замыкание Ω).

В настоящее время весьма активно изучаются и вызывают большой практический и теоретический интерес локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения (1), поскольку к нему сводятся ряд прикладных задач физики, механики и биологии [1]. Уравнение (1) в случае, когда $a_1 = 0$, исследовалось в работе [2].

Через $C_*(\overline{\Omega})$ обозначим пространство ограниченных функций, непрерывных по $t \in R$ при $x \in [0, \omega]$ и равномерно относительно $t \in R$ непрерывных по $x \in [0, \omega]$. Мы исследуем свойства решения u из $C_*(\overline{\Omega})$ уравнения (1), имеющего непрерывные в Ω частные производные u_x, u_t, u_{xt}, u_{tt}, и удовлетворяющего условиям

$$u(0,t) = \psi(t), \;\; u_x(x,t), \; u_{xt}(x,t) \in C_*(\bar{\Omega}). \tag{2}$$

Положим $P_{\alpha,\beta}(x,t) = \frac{\alpha(x,t)}{\sqrt{\beta(x,t)}}$.

Теорема. *Пусть коэффициенты a_i $(i = \overline{0,4})$ уравнения (1) непрерывны на $\overline{\Omega}$, функция $\psi(t)$ и его производные $\dot{\psi}(t), \ddot{\psi}(t)$ непрерывны и ограничены на R и выполнены условия:*
a) $a_2(x,t) \geq \gamma > 0$;
b) $\frac{a_2(x,t)}{a_2(x,\tilde{t})} \leq C$ $(C - const, C > 1)$ при $x \in [0, \omega]$, $t, \tilde{t} \in R, |t - \tilde{t}| \leq 1$;
c) для каждого $\epsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что для всех $t \in R$ и $x', x'' \in [0, \omega]$: $|x' - x''| < \delta$ выполнено неравенство $|\frac{a_2(x',t) - a_2(x'',t)}{a_2(x'',t)}| < \epsilon$;
d) $P_{a_0,a_2}(x,t) \leq K$, $P_{a_j,a_2}(x,t)$, $P_{f,a_2}(x,t) \in C_*(\overline{\Omega})$ $(j = 1,3,4)$.
Тогда существует единственное решение u задачи (1), (2) и для него справедлива следующая оценка:

$$\max\{\|u\|, \|u_x\|, \|u_t\|, \|u_{tt}\|, \|u_{xt}\|\} \leq C_1,$$

где $\|V\| = \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} |V(x,t)|$, а C_1 не зависит от u.

Funding: Автор был поддержан грантом AP05131649 КН МОН РК.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, решение, существование, единственность, оценка производных

2010 Mathematics Subject Classification: 35K70, 35B65

References

[1] Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии* , Высшая школа, Москва (1995).

[2] Джумабаев Д.С., Оспанов М.Н. Об ограниченности на полосе решения и его производных системы гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами, *Математический журнал*, **6**:1 (2006), 61–66.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Обратная задача подземного трубопровода

Болатбек РЫСБАЙУЛЫ[1,a], Айгуль САТЫБАЛДИНА[2,b]

[1,2] *Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]b.rysbaiuly@mail.ru, [b]aigul1191@gmail.com

Магистральные трубопроводы транспортируют: нефть и нефтепродукты, сжиженный углеводородный газ, товарную продукцию в пределах компрессорных и нефтеперекачивающих станций, воду в системах отопления и прочих системах водоснабжения, импульсный, топливный и пусковой газ. Тепловой расчет горячего трубопровода довольно сложен, поскольку эксплуатация трубопровода зависит от многих факторов, начиная от реологических характеристик жидкости и заканчивая меняющимися во времени метеорологическими условиями [1]. Чтобы точнее прогнозировать работу подземного трубопровода необходимо располагаться исходными параметрами подземного трубопровода. Поэтому нахождение исходных параметров становится актуальной задачей.

Процесс тепломассопереноса моделируется в цилиндрической системе координат симметрично относительно плоскости , при этом уравнение тепломассопереноса выглядит следующим образом [2]

$$C_p W_x \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}, \tag{1}$$

$$r \in [0; r_0]; \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

где C_p−объемная теплоемкость, W_x−средняя по сечению скорость, L−длина трубопровода, λ−коэффициент теплопроводности, T−температура жидкости. Распределение скорости потока W_x при перекачке высоковязкой и высокозастывающей нефти примем параболическим, зависящим от безразмерного радиуса [2]

$$W_x = 2W_{cp} \left(1 - R^2\right) \cos \frac{\varphi}{3},$$

где $R = \frac{r}{r_0}$; W_{cp}−средняя по сечению скорость; r_0−радиус трубы. Начальные и граничные условия:

$$T\Big|_{x=0} = T_0; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = -\alpha \left(T - T_c\Big|_{r=r_0} \right); \quad \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0; \quad T(r, \varphi) = T(r, \varphi + 2\pi). \tag{2}$$

В настоящей работе разрабатывается приближенный метод нахождения характеристики жидкости λ и W_{cp} в подземном трубопроводе:
- Составлена прямая разностная задача проблемы (1)-(2);
- Составлена сопряженная разностная задача;
- Найден градиент минимизируемого функционала;
- Разработаны приближенные расчетные формулы для λ и W_{cp};
- Проведены численные расчеты.

Литература

[1] Бородавкин П.П. *Подземные магистральные трубопроводы*, Изд. “Недра”, Москва (1982).

[2] Николаев А.К., Трапезников С.Ю., Климко В.И. *Тепловые режимы перекачки нефти*, Изд. “Лань”, Санкт-Петербург (2017).

— ⁂ —

Субградиентный метод в локационной обратной задаче гравиметрии с условиями на части границы

Марк СИГАЛОВСКИЙ[1,a],

[1] *КазНУ им. Аль-Фараби, г. Алматы, РК*
E-mail: [a]mark.sgl15@yandex.ru,

В связи с разработкой новых месторожений, а также с необходимостью экспертной оценки старых – на выработку и на риски техногенного возействия, в практике недропользования возникают математические обратные задачи идентификации. Частое возникновение таких проблем в реальных полевых условиях обусловливает актуальность их изучения и решения. К ним относится и данная обратная локационная задача гравиметрии. Кратко сформулируем ее постановку.

Постановка задачи: Требуется восстановить координаты $(a; b)$ центра гравитационной аномалии известной формы и структуры (плотности) по данным замеров гравитационного потенциала и его градиента с поверхности Земли. Основное уравнение модели –

уравнение Пуассона $\Delta\phi = -4\pi G\rho$, где $\phi = \phi(x;y)$ – функция гравитационного потенциала, а $\rho = \rho(x;y)$ – функция плотности. Граничные условия ставятся на заглубленной части прямоугольной области поиска так: а) на верхней части границы известны значения ϕ и $\nabla\phi$; б) при стремлении координат x и y к заглубленным и расширяемым границам области поиска имеет место $|\phi - \phi_0| \to 0$, где ϕ_0 – нормальное значение для вмещающей неоднородность породы. Решение поставленной обратной задачи должно удовлетворять граничному условию на градиент функции потенциала, а сама функция – быть решением соответствующей прямой задачи, сформулированной в [1]. Обратная задача сводится к минимизации целевого функционала. В ходе работы было доказано [1], что функциональная производная, не являясь производной Гато, является *производной по направлению*, и имеет вид:

$$J'(a;b) = -4\pi G\psi_* \cdot (|h_1| \cdot I_1 + |h_2| \cdot I_2), \tag{1}$$

где $-4\pi G\psi_*$ – отрицательная константа, а I_1, I_2 – положительные числовые результаты интегрирования. Этот результат позволяет применить *субградиентный метод*, что требует вывода формулы субдифференциала. Функцию вида $f(x_1,x_2) = |x_1| + |x_2|$ назовем *модулеподобной функцией.* Т.к. все величины в правой части (1), кроме модулей – знакопостоянные константы, то искомый субдифференциал совпадет с субдифференциалом модулеподобной функции.

Теорема 1. *Субдифференциал модулеподобной функции равен*

$$\partial f(x_1,x_2) = \begin{cases} (-1;-1), & x_1 < 0, x_2 < 0; \\ (-1;1), & x_1 < 0, x_2 > 0; \\ (1;-1), & x_1 > 0, x_2 < 0; \\ (1;1), & x_1 > 0, x_2 > 0; \\ (-1;y_2), y_2 \in [-1;1], & x_1 < 0, x_2 = 0; \\ (1;y_2), y_2 \in [-1;1], & x_1 > 0, x_2 = 0; \\ (y_1;-1), y_1 \in [-1;1], & x_1 = 0, x_2 < 0; \\ (y_1;1), y_1 \in [-1;1], & x_1 = 0, x_2 > 0; \\ (y_1;y_2), y_1 \in [-1;1], y_2 \in [-1;1], & x_1 = 0, x_2 = 0; \end{cases} \tag{2}$$

Замечание. Если на $X \in \mathbb{R}^n$ субдифференциал функции векторного аргумента $f(x)$ непуст, то *субградиентный алгоритм* ее минимизации задается итерационной формулой $x_{k+1} = \mathcal{P}_X(x_k - \alpha_k c_k), \alpha_k > 0, c_k \in \partial f(x_k)$,$k = 0,1,2,...; x_0 \in X$; субградиент $c_k \in \partial f(x_k)$ из субддифференциала $\partial f(x_k)$ выбирается произвольно. Процесс прекращается, если найдется k, для которого будет выполнено $x_{k+1} = x_k$ [2].

Funding: Автор был поддержан грантом AP05135158 КН МОН РК.

Ключевые слова: субградиентный метод, обратные задачи, гравиметрия, уравнение Пуассона, субдифференциал, условия на части границы.

2010 Mathematics Subject Classification: 49M30, 86A22, 35J05 , 35R30.

Литература

[1] Сигаловский, М.А. Дифференциальные свойства целевого функционала в одной обратной задаче гравиметрии, *Abai University Bulletin*, Phys.Math.Sciences 3(63) 2018, с. 138-Ц146;

[2] Васильев, Ф.П., *Методы оптимизации*, т. I, М.:МЦНМО, 2011, с. 303.

— ⁂ —

О приближенном методе решения краевой задачи для параболического уравнения

[1,2,3,a]Светлана ТЕМЕШЕВА, [1,2,4,b]Наркеш ИСКАКОВА

[1]*Институт математики и математического моделирования,*
[2]*Институт информационных и вычислительных технологий,*
[3]*КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[4]*КазНПУ имени Абая, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*temeshevasvetlana@gmail.com,* [b]*narkesh@mail.ru*

Рассматривается полупериодическая краевая задача для неоднородного параболического уравнения

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = a(x,t)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \widetilde{f}(x,t,Z), \quad (x,t) \in \bar{\Omega} = [0,\omega] \times [0,T], \quad Z \in R, \tag{1}$$

$$Z(x,0) = Z(x,T), \quad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$Z(0,t) = \psi_1(t), \quad Z(\omega,t) = \psi_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

где $a(x,t)$, $f(x,t,Z)$ непрерывны соответственно на $\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega} \times R$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[0,T]$ функции.

Через $C(\bar{\Omega}, R)$ обозначим пространство непрерывных функций $u : \bar{\Omega} \to R$ с нормой $\|u\|_1 = \max\limits_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \|u(x,t)\|$.

Функция $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}, R)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \in C(\bar{\Omega}, R)$ называется решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет параболическому уравнению (1) при всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$ (при этом $u(x,t)$ на границе Ω имеет односторонние частные производные) и краевым условиям (2)-(3).

Для отыскания приближенного решения задачи (1)-(3) построим аппроксимирующую задачу следующим образом. Выберем число $\theta > 0$: $(m+1)\theta = \omega$, $m \in \mathbb{N}$. Введем обозначения: $Z_i(t) = Z(i\theta, t)$, $i = \overline{1, m+1}$, $Z_0(t) = \psi_1(t)$, $Z_m(t) = \psi_2(t)$, $a_i(t) = a(i\theta, t)$, $\widehat{f}_i(t, Z_i) = \widetilde{f}(i\theta, t, Z(i\theta, t))$, $i = \overline{1, m+1}$, $t \in [0,T]$. Для функции $Z(x,t)$ на прямой $x_i = i\theta$ имеет место приближенное равенство

$$\left.\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right|_{(i\theta,t)} \approx \frac{1}{\theta^2}(Z_{i-1}(t) - 2Z_i(t) + Z_{i+1}(t)), \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [0,T].$$

Получим периодическую краевую задачу для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(t,z), \qquad t \in (0,T), \qquad z \in R^m, \tag{4}$$

$$z(0) = z(T), \tag{5}$$

где $z(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_m(t))'$, $f(t,Z) = A(t)Z + \widehat{f}(t,Z)$,
$\widehat{f}(t,Z) = (\frac{1}{\theta^2}a_1(t)\psi_1(t) + f_1(t,Z_1), f_2(t,Z_2), f_3(t,Z_3), \ldots, f_{m-1}(t,Z_{m-1}), \frac{1}{\theta^2}a_m(t)\psi_2(t) + f_m(t,Z_m))'$,

$$A(t) = \frac{1}{\theta^2}\begin{pmatrix} -2a_1(t) & a_1(t) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_2(t) & -2a_2 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3(t) & -2a_3(t) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{m-1}(t) & -2a_{m-1}(t) & a_{m-1}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_m(t) & -2a_m(t) \end{pmatrix}.$$

Для исследования и решения аппроксимирующей периодической краевой задачи (4), (5) используется метод параметризации [1]. Установлены оценки аппроксимации решения смешанной краевой задачи (1)-(3) решением периодической краевой задачи (4), (5).

Funding: Авторы были поддержаны грантами AP 05132486 и AP 05132455 КН МОН РК.

Ключевые слова: полупериодическая краевая задача, параболическое уравнение, метод параметризации, аппроксимация

2010 Mathematics Subject Classification: 35B10, 65D05, 65D15

References

[1] D.S.Dzhumabaev, S.M.Temesheva, *A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems*, Comput. Maths. Math. Phys. 47(2007), pp. 37-61.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Задача типа Гурса для системы дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка

Жанибек ТОКМУРЗИН[1,a]

[1] *Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан*

E-mail: [a] tokmurzinzh@gmail.com

В области $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается нелокальная задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} +$$

$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_7(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}|_{x=0} = \psi_3(t), \qquad t \in [0,T], \tag{5}$$

где $u(t,x) = col(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$ - неизвестная функция, $n \times n$ - матрицы $A_i(t,x)$, $i = \overline{1,7}$, n - вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω, n - вектор-функция $\varphi(x)$ трижды непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$, n - вектор-функции $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$.

Функция $u(t,x)$, имеющая частные производные, называется классическим решением задачи (1)–(5), если она удовлетворяет системе (1) для всех $(t,x) \in \Omega$, краевому условию (2) для всех $x \in [0,\omega]$, начальным условиям (3)–(5) для всех $t \in [0,T]$.

Дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков находят широкое применение в различных задачах естествознания и техники [1-3]. В настоящем сообщении исследуются вопросы существования классического решения задачи типа Гурса для системы дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка (1)–(5) и способы построения ее приближенного решения.

Вводятся новые неизвестные функции [4]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_1(t,x), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v(t,x)$$

и исследуемая задача сводится к задаче Гурса для системы гиперболических уравнений второго порядка с функциональными параметрами и интегральными условиями. Установлены условия однозначной разрешимости задачи Гурса для системы гиперболических уравнений второго порядка с функциональными параметрами и интегральными условиями. Предложен алгоритм нахождения решения исследуемой задачи и доказана его сходимость. Полученный результат приведен в следующем утверждении.

Теорема. *Пусть a) $n \times n$ - матрицы $A_i(t,x)$, $i = \overline{1,7}$, n - вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω; b) n - вектор-функция $\varphi(x)$ трижды непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$; c) n - вектор-функции $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$.*

Тогда задача типа Гурса для системы дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка (1)–(5) имеет единственное классическое решение.

Funding: Автор частично поддержан грантом AP05131220 КН МОН РК.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, нелокальная задача, задача Гурса, система гиперболических уравнений второго порядка, разрешимость, алгоритм.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G35, 35G40, 35G46, 35L53, 35L55, 35L57

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1972).

[2] Пташник Б.И. *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных*, Наукова думка, Киев (1984)

[3] Нахушев А.М. *Задача со смещением для уравнений в частных производных*, Наука, Москва (2006)

[4] Асанова А.Т. Об одном подходе к решению нелокальной задачи для системы дифференциальных уравнений типа Аллера, *Математический журнал*, **18**: №2(68) (2018), 5–18.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об одной особой граничной задаче тепло-массообмена

Ермек ХАЙРУЛЛИН[1,a]

[1] *Казахский национальный исследовательский университет им. К.И.Сатпаева, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*khairullin_42_42@mail.ru*

Рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial u_k(x,y,t)}{\partial t} = \lambda_k \Delta u_k(x,y,t), \quad k = \overline{1,3} \tag{1}$$

в области $Q_T \equiv \{(x,y,t) : x \in R_+, y \in R, t \in]0,t[\,\}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u_k(x,y,0,) = 0 \tag{2}$$

и граничным условиям

$$(u_1(x,y,t) + a_1 u_2(x,y,t))|_{x=0} = \varphi_1(y,t), \tag{3}$$

$$(u_2(x,y,t) + a_2 u_3(x,y,t))|_{x=0} = \varphi_2(y,t), \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\left(b_k\frac{\partial u_k(x,y,t)}{\partial x}+c_k\frac{\partial u_k(x,y,t)}{\partial y}+b_{3+k}u_k(x,y,t)\right)\Bigg|_{x=0}=\varphi_3(y,t), \tag{5}$$

где Δ – оператор Лапласа; λ_k – положительные постоянные, причем $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$; a_1,a_2,b_k,c_k – заданные постоянные; $\varphi_k(y,t)$ – заданные ограниченные непрерывные функции.

Решение краевой задачи (1) – (5) ищется в виде потенциала двойного слоя. Используя граничные условия, получена система интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ).

Характеристическая часть СИДУ решена методом интегральных преобразований Фурье-Лапласа. Найдены условия корректности и некорректности задачи, выраженные через заданные постоянные системы.

Методом регуляризации СИДУ сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма.

Теорема 1. *Если $\varphi_k(y,t)\in C^{2,1}_{y,t}(Q_T\backslash x)$, то при выполнении условия разрешимости существует решение $u_k(x,y,t)\in C^{2,2,1}_{x,y,t}(Q_T)$ краевой задачи (1)–(5)*

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05133919 КН МОН РК.

Ключевые слова: тепло-и массообмен, краевая задача, условия разрешимости, регуляризация

2010 Mathematics Subject Classification: 35K45, 58J35

— ⁂ —

Метод потенциалов для первой краевой задачи теплопроводности в области, вырожденной в начальный момент

Юрий ШПАДИ[1,a] Адия КУЛАХМЕТОВА[1,b] Алексей КАВОКИН[1,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]yu-shpadi@yandex.ru, [b]kulakhmetova@mail.ru, [c]kavokin_alex@yahoo.com

Рассматривается краевая задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{1}$$

в области $\Omega=\{\,0<x<\alpha_0 t,\ 0<t<T\,\}$ с граничными условиями

$$u(0,t)=\varphi(t), \tag{2}$$

$$u(\alpha_0 t,t)=\psi(t), \tag{3}$$

Для решения задачи (1)–(3) используется интегральное представление

$$u(x,t)=u_1(x,t)+W(x,t)+F(x,t), \tag{4}$$

где:

1) $u_1(x,t)$ есть решение начально-краевой задачи для однородного уравнения (1) $(f(x,t)\equiv 0)$ в области $\Omega_1=\{\,0<x<\infty,\ 0<t<T\,\}$, удовлетворяющее краевому условию (2) и нулевому начальному условию;

2) $W(x,t)$ – тепловой потенциал двойного слоя с плотностью $\theta(t)$, определенный относительно подвижной границы $x=\alpha_0 t$;

3) $F(x,t)$ – тепловой объемный потенциал с плотностью $f(x,t)$;

В качестве фундаментального решения в потенциалах $W(x,t)$ и $F(x,t)$ используется функция

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right],$$

обеспечивающая обращение в нуль этих потенциалов на границе $x = 0$.

Требование соблюдения условия (3) для интегрального представления (4) и использование свойства скачка потенциала двойного слоя в окрестности подвижной границы приводит к особому интегральному уравнению типа Вольтерра 2-го рода

$$\theta(t) = g(t) + \int_0^t K(t,\tau)\theta(\tau)d\tau, \tag{5}$$

относительно неизвестной плотности $\theta(t)$ потенциала $W(x,t)$, в котором

$$g(t) = u_1(\alpha_0 t, t) - \psi(t) + F(\alpha_0 t, t). \tag{6}$$

Определение 1. *К функциональному классу $M_\mu(0,T)$, отнесцм все непрерывные функции $h(t)$, определчнные на интервале $(0,T)$ и удовлетворяющие условию $|h(t)| \le A_h t^\delta$, где $\delta > \mu$, $\mu \in (-\infty, \infty)$.*

В работе [1] показано, что если $g(t) \in M_{\frac{1}{2}}(0,T)$, то уравнение (5) однозначно разрешимо в классе функций $M_0(0,T)$ и его решение $\theta(t)$ можно построить методом последовательных приближений Пикара.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,t) = \frac{f_0(x,t)}{x^\beta t^\gamma}$, где $f_0(x,t)$ определена в $\overline{\Omega}$, непрерывна по t и удовлетворяет условию Гельдера по x, $\beta + \gamma < \frac{3}{2}$. Тогда объемный потенциал $F(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям:*

$$\lim_{x->0} F(x,t) = 0, \qquad \lim_{t->0} F(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega_1, \tag{7}$$

$$F(\alpha_0 t, t) \in M_{\frac{1}{2}}(0,T). \tag{8}$$

Из работы [1] и свойств (7)–(8) объемного потенциала следует, что если $\varphi(t) \in M_{\frac{1}{2}}(0,T)$, $\psi(t) \in M_{\frac{1}{2}}(0,T)$, то $g(t)$ в (6) принадлежит классу $M_{\frac{1}{2}}(0,T)$, и тогда (4) является решением задачи (1) – (3).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05133919 КН МОН РК.

Ключевые слова: теплопроводность, краевая задача, интегральное уравнение Вольтерра

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 45D05

Литература

[1] Kavokin A.A., Kulakhmetova A.T., Shpadi Yu.R. Application of Thermal Potentials to the Solution of the Problem of Heat Conduction in a Region Degenerates at the Initial Moment, *Filomat* **32**:3 (2018), 825Ц836.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

4 Workshop «Problems of modeling of phenomena in electrical contacts»

The model of temperature field in opening electrical contacts with tunnel effect

Stanislav KHARIN[a], Adiya KULAKHMETOVA[b], Samat KASSABEK[c]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the KN MES RK, Almaty Kazakhstan
E-mail: [a]staskharin@yahoo.com, [b]kulakhmetova@mail.ru [c]kassabek@gmail.com

The mathematical model describing the dynamics of the temperature increase in opening electrical contacts with the influence of tunnel effect is presented. It is based on the system of the heat equations for anode and cathode with the boundary conditions relating to the non-ideal thermal contact with the Kohler heat sources on the contact spot. Using the heat potentials of the single layer the problem is reduced to the system of integral equations, for which analytical and approximate methods of solution are elaborated. The final result is obtained in the terms of the integral error functions which are very convenient for the engineering applications. It is shown that in the range of low current the influence of the tunnel effect leads to the essential anode overheating in comparison with the cathode temperature, and neglecting of this phenomenon will entail the indispensable error.

Funding: The authors were supported by the grant AP05133919 of SC of the MES of RK.

Keywords: Mathematical modeling, Opening electrical contacts , Tunnel effect

2010 Mathematics Subject Classification: 74F05, 58J35

— ⁂ ⁂ ⁂ —

The solution of the two-phase spherical Stefan problem using heat polynomials

Stanislav KHARIN[1,a], Targyn NAURYZ[1,b], Khumoyun JABBARKHANOV[2,c],

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]staskharin@yahoo.com, [b]targyn.nauryz@gmail.com, [c]khumoyun.jabbarkhanov@sdu.edu.kz

The inverse two-phase spherical Stefan problem for unknown boundary heat flux is solved by the method of the heat polynomials. Side by side with exact solution two methods for the approximate solution, collocation and variational methods, convenient for engineering applications are presented and compared. It is shown that both methods give very good approximation even for use of several points only. However, the collocation method gives better result for the initial stage of heating, while the variational method is more preferable for the large values of the Fourier criterion. The estimation of the error of approximation is obtained using the principle of maximum for the heat equation. The application of the obtained results for the calculation of the electrical arc heat flux at the contact opening is presented.

Keywords: Stefan problem, Heat polynomials, heat flux, melting zone.

References

[1] S.N. Kharin. The analytical solution of the two-face Stefan problem with boundary flux condition. Mathematical Journal. No.1, 2014.P. 55-75.

[2] Kharin S.N. Sarsengeldin M.M. Nouri H. Analytical solution of two-phase spherical Stefan problem by heat polynomials and integral error functions. AIP Conference Proceedings 1759, 020031(2016); doi: 10.1063/1.4959645, Available on line http://dx.doi.org/10.1063/1.4959645

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Mathematical model of temperature field at closure of electrical contacts with bouncing

Stanislav KHARIN[1,a], Merey SARSENGELDIN[2,b]

[1] *Kazakh-British technical University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Satbayev University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*staskharin@yahoo.com,* [b]*merey@mail.ru*

This study is devoted to the modeling of temperature field at closure of electrical contacts with bouncing and a continuation of previous study [1]. Electric contact processes are investigated in three stages. The first stage is described by the system of generalized heat equations. Temperature field in the last two stages are described on the basis of two phase Stefan problems where exact solution is represented in the form of combination of Heat polynomials.

Funding: The authors were supported by the grant AP05133271 of SC of the MES of RK.

Keywords: diffusion equation, homogeneous body, initial state, local inhomogeneity, transparent boundary conditions

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Sarsengeldin M.M., Kharin S.N. Method of the integral error functions for the solution of the one- and two-phase Stefan problems and its application, *FILOMAT*, **31**:4 (2017), 1017–1029.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Asymptotic representation of the solution in 2-phases Stefan problem with boundary heat flux condition

Yuriy SHPADI[a] Adiya KULAKHMETOVA[b], Alexei KAVOKIN[c],

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the KN MES RK, Almaty Kazakhstan
E-mail: [a]*yu-shpadi@yandex.ru ,* [b]*kulakhmetova@mail.ru* [c]*kavokin_alex@yahoo.com,*

The solvability conditions and the asymptotic representation of the free boundary $x = z(t)$ at small values of time t, are investigated for the following Stefan problem:

$$\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} = a_i^2 \frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2};$$

$$\{i = 1,2;\ D_1 : \{x \in (0, z(t))\};\ D_2 : \{x \in (z(t), \infty)\};\ t > 0\}$$

with the initial and boundary conditions:

$$T_2(x,0) = f_3(x); \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} = g(T(0,t),t); \quad T_2(\infty,t) = f_3(\infty),$$

and Stefan conditions at the free boundary $x = z(t)$:

$$T_1(z,t) = T_2(z,t) = T_0; \qquad \lambda_1 \frac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2(0,t)}{\partial x} = \gamma \frac{\partial z(t)}{\partial t}$$

where: λ_i are – coefficients of thermal conductivity, and γ is the latent heat of phase transformation (negative in the case of melting and positive by crystallization). It is assumed that $f_3(x)$ has number of derivatives, and $g(T_1(0,t),t)$ is also differentiable with respect to both arguments, but may have a singularity of type $t^{-1/2}$ when $t \to 0$.

We represent solution to this problem in the form:

$$T_i(x,t) = \sum_{k=i-1}^{i} \frac{1}{2a_i\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f_{i+k}(\xi) \exp\left(-(x+(-1)^{k+i}\xi)^2/(4a_i^2 t)\right) d\xi$$

where the functions, $f_{i+k}(\xi)$, $(i = 1, 2, 4)$, are also assumed to be properly differentiable. Using the following asymptotic expansions of functions $f_i(x)$, $(i = \overline{1,4})$, and $z(t)$

$$f_i(x) = \sum_{k=0}^{n} f_{i,k}x^k + o(x^n) \quad \text{and} \quad z(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k\theta^k + o(\theta^m), \quad \theta = \sqrt{t},$$

we obtain, from the initial and boundary conditions of the problem, a recurrently solvable (uniquely) system of equations for determining the coefficients $f_{i,k}$, α_k.

Analysis of the solutions obtained by this method allows us to draw the following conclusions regarding the solvability conditions of the problem and the asymptotic representation of $z(t)$:

– if the condition of coincidence of the initial and boundary functions: $f_3(0) = f_{3,0} = T_0$, is not satisfied, then this problem has no classical solution.

– if asymptotic $g(T,t) \sim g_0 \cdot t^{-1/2}$ takes place at $t \to 0$, then $z(t) \sim a_1 \cdot \sqrt{t}$, where α_1 is the root of the known nonlinear equation depending on parameters of the problem.

– if at the initial time the external $(g_0 = g(T_2(0,0),0) < \infty)$ and internal $(-\lambda_2 f_{3,1})$ heat fluxes at then $x = 0$ are not equal, then $z(t) \sim \alpha_2 \cdot t$; $\alpha_2 = \frac{1}{\gamma}(g_0 - \lambda_2 f_{3,1})$, with the necessary condition: $\alpha_2 > 0$.

– if the area D_2 is heated by the same heat flux g_0 at $x = 0$, i.e. $\alpha_2 = 0$, then $z(t) \sim \alpha_3 \cdot t^{3/2}$; $\alpha_3 = \frac{4g_0}{3\pi\gamma\sqrt{t_0}}$, where t_0 is the time of heating the surface $x = 0$, from the initial value to the temperature of phase transformation. If initial temperature is constant $(\forall x > 0)$ then t_0 is explicitly determined from the solution of the corresponding heat equation.

In the last two cases, there is also an asymptotic representation: $T_1(x,t) \sim T_0 + \frac{g_0}{\lambda_1}(x - z(t))$.

Using the next items of the asymptotic expansions, we can also estimate the time to which it is possible to use the above formulas.

Funding: The authors were supported by the grant AP05133919 of SC of the MES of RK.

Keywords: Mathematical modeling, Stefan problem, asymptotic expansion of the solution

2010 Mathematics Subject Classification: 80A22, 74N20

References

[1] Kharin S.N. The analytical solution of the two-face Stefan problem with boundary flux condition, *Математический журнал*, **1**, (2014), 55–75.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

The mathematical model of the arc to glow transition in electrical contacts

Gregorz WIŚNIEWSKI[1,a], Stanislav KHARIN[2,b], Bogdan MIEDZIŃSKI[3,c]

[1] *Wroclaw University of Science and Technology Department of Electrical Power Engineering, Wroclaw, Poland*
[2] *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Institute of Innovative Technologies EMAG, Katowice, Poland*
E-mail: [a]*grzegorz.wisniewski@pwr.edu.pl,* [b]*staskharin@yahoo.com* [c]*bogdan.miedzinski@pwr.edu.pl*

The paper presents an attempt to assess the transition of arc to glow discharge on the basis of a comparison of selected theoretical indicators and these provided by the experiments. The evaluation includes the dynamics change of the discharge volume during the opening of the contact. The tests were carried out for a low voltage DC circuit with a discharge energy not exceeding $10J$. Based on the results obtained, appropriate practical conclusions were formulated regarding the need for further consideration.

Keywords: Switching DC arc, low voltage and low power electric grid, arc-to-glow transition

2010 Mathematics Subject Classification: 80A22

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Предметный указатель

Институт математики и математического моделирования

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященный 80-летнему юбилею академика НАН РК Станислава Николаевича Харина.

Алматы, 3-5 апреля 2019 года

Тезисы докладов

Подписано в печать 01.04.2019г.
Формат 60x84 1/16 Бумага офсетная
Тираж 200 экз.

Опечатано в типографии ИМММ МОН РК
050010, г. Алматы, ул. Пушкина, 125