МАТЕМАТИКА В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Международная конференция в честь 90-летия
Сергея Константиновича Годунова

4-10 августа 2019, Новосибирск, Россия

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

International Conference in honor of the 90th birthday of
Sergei K. Godunov

August 4-10, 2019, Novosibirsk, Russia

ABSTRACTS

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Международная конференция
в честь 90-летия
Сергея Константиновича Годунова

4–10 августа 2019, Новосибирск, Россия

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

НОВОСИБИРСК
2019

УДК 517.9+519.6+531/534
ББК В16+В19+В25
М34

М34 Математика в приложениях. Международная конференция в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова (4–10 августа 2019, Новосибирск): Тез. докладов. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2019. — 312 с.

ISBN 978-5-86134-226-1

В сборнике представлены тезисы докладов на Международной конференции “Математика в приложениях” в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова. Тематики докладов охватывают следующие направления: дифференциальные и разностные уравнения, уравнения с частными производными, уравнения математической физики, математическое моделирование, разностные схемы, вычислительные методы линейной алгебры, математические вопросы механики сплошных сред.

УДК 517.9+519.6+531/534
ББК В16+В19+В25

Организаторы

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Департамент промышленности, инноваций и предпринимательства мэрии города Новосибирска

Ответственный редактор: Г. В. Демиденко

Organizers

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

Novosibirsk State University

Department of Industry, Innovations and Entrepreneurship of the Mayor's Office of Novosibirsk

Editor-in-Chief: G. V. Demidenko

М $\dfrac{1602070100-02}{\text{Я}82(03)-2019}$ Без объявл.

ISBN 978-5-86134-226-1

Программный комитет

Г. В. Демиденко — *председатель*, Е. И. Роменский — *заместитель председателя*, И. И. Матвеева — *секретарь*, С. В. Алексеенко, Б. Д. Аннин, А. И. Аптекарев, В. И. Бердышев, С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов, В. Т. Жуков, В. В. Козлов, А. Н. Коновалов, А. Н. Крайко, А. Г. Куликовский, П. И. Плотников, В. В. Пухначев, В. М. Садовский, В. А. Титарев, М. П. Федорук, В. М. Фомин, В. Е. Фортов, Р. М. Шагалиев, R. Abgrall, J. Cheng, D. Drikakis, M. Dumbser, N. Nikiforakis, C. Parés, R. Saurel, Y. Takakura, B. Thornber, E. Toro, G. Warnecke

Организационный комитет

Г. В. Демиденко — *сопредседатель*, М. П. Федорук — *сопредседатель*, Л. Н. Бондарь — *секретарь*, Е. Ю. Балакина, А. А. Бондарь, А. А. Кудрявцев, И. И. Матвеева, Г. А. Петросян, М. А. Скворцова, И. А. Уварова, Ю. А. Хазова, Т. К. Ыскак

Program Committee

G. V. Demidenko (*Chairman*), E. I. Romenski (*Vice-Chairman*), I. I. Matveeva (*Secretary*), R. Abgrall, S. V. Alekseenko, B. D. Annin, A. I. Aptekarev, V. I. Berdyshev, J. Cheng, D. Drikakis, M. Dumbser, Yu. L. Ershov, M. P. Fedoruk, V. M. Fomin, V. E. Fortov, S. S. Goncharov, A. N. Konovalov, V. V. Kozlov, A. N. Kraiko, A. G. Kulikovskii, N. Nikiforakis, C. Parés, P. I. Plotnikov, V. V. Pukhnachev, V. M. Sadovskii, R. Saurel, R. M. Shagaliev, Y. Takakura, B. Thornber, V. A. Titarev, E. Toro, G. Warnecke, V. T. Zhukov

Organizing Committee

G. V. Demidenko (*Co-Chairman*), M. P. Fedoruk (*Co-Chairman*), L. N. Bondar (*Secretary*), E. Yu. Balakina, A. A. Bondar, Yu. A. Khazova, A. A. Kudryavtsev, I. I. Matveeva, H. A. Petrosyan, M. A. Skvortsova, I. A. Uvarova, T. K. Yskak

Конференцию поддержали:

Российский фонд фундаментальных исследований
(проект № 19-01-20117)

Сибирское отделение Российской академии наук

Проект ExaHyPE (соглашение № 671698)
в рамках Программы Европейского Союза
по научным исследованиям и инновациям
"Горизонт 2020"

The Conference is supported by:

Russian Foundation for Basic Research
(project no. 19-01-20117)

Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

The project ExaHyPE (agreement no. 671698)
within the framework of the European Union's
Research and Innovation programme
Horizon 2020

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИОННЫЕ УСТНЫЕ И СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ
SHORT COMMUNICATIONS AND POSTERS

ПЛЕНАРНЫЙ ДОКЛАД

ВОСПОМИНАНИЯ О РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЯХ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Сергей Константинович Годунов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
godunov@math.nsc.ru

Доклад посвящен разностным моделям в гидродинамике, вызванным ими размышлениям, новым примерам, вычислительным парадоксам.

Работа выполнялась с учетом дискуссий с Д. В. Ключинским, С. В. Фортовой и В. В. Денисенко во время совместных консультаций и по переписке.

PLENARY LECTURE

MEMORIES OF DIFFERENCE MODELS IN HYDRODYNAMICS

Sergei K. Godunov

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
godunov@math.nsc.ru

The lecture is devoted to difference models in hydrodynamics, caused by them thinking, new examples, computational paradoxes.

The work was carried out taking into account discussions with D. V. Klyuchinskiy, S. V. Fortova and V. V. Denisenko during joint consultations and correspondence.

ПРИГЛАШЕННЫЕ ДОКЛАДЫ

Тезисы

INVITED LECTURES

Abstracts

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ ЖИДКОСТИ И КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВИХРЯХ

Алексеенко С. В.

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия; asvasus@yandex.ru

Дан обзор работ, выполненных под руководством или при участии автора.

Представлены результаты теоретического и экспериментального исследования нелинейных волн и процессов переноса в стекающих пленках жидкости и ривулетах. Теоретическое моделирование в основном проводилось на основе интегрального метода Капицы – Шкадова. Выведены уравнения двухволнового типа. Проведены экспериментальные исследования волнообразования в широком диапазоне волновых параметров с применением наложенных колебаний. Пространственные распределения толщины волновой пленки определялись методом лазерной индуцированной флуоресценции, а мгновенные поля скоростей измерялись методом Particle Image Velocimetry. Выявлены механизмы интенсификации процессов тепло- и массообмена нелинейными волнами для случаев пленочной конденсации и испарения или десорбции из стекающих пленок жидкости.

Показано влияние турбулентного газового потока на генерацию волн в пленке жидкости при различных ориентациях векторов средних скоростей фаз относительно друг друга и направлении силы тяжести, в том числе в случае непараллельного движения жидкости и газа. Описана структура межфазной поверхности в кольцевом газожидкостном потоке, показаны механизмы уноса капель с гребней больших волн.

Теоретически и экспериментально исследованы трехмерные регулярные волны на прямолинейных ривулетах, стекающих по вертикальной плоскости. Описано формирование ривулетов в неизотермической пленке жидкости при наличии термокапиллярного эффекта.

Представлены результаты теоретического и экспериментального исследования вихревых структур типа вихревых нитей, которые формируются в закрученных потоках. Рассмотрено четыре основных случая: закрученный поток в тангенциальной камере; закрученная изотермическая струя; закрученное пламя; закрученный поток в коническом диффузоре. В тангенциальной камере обнаружены и описаны следующие явления: формирование устойчивых концентрированных вихрей типа вихревой нити как прямолинейных, так и спиральной формы, включая двойную спираль. Описана прецессия вихревого ядра и различного типа бегущие возмущения, такие как волны Кельвина и солитон Хасимото.

Изучены вихревые структуры в закрученных изотермических струях и пламени. Описано формирование сложных систем кольцевых и спиральных вихрей, прецессии вихревого ядра и распад вихря, который и является причиной формирования сложной структуры течения. Приведены результаты исследования процессов of vortex reconnection на вихревой спиральной трубке, которая формируется в закрученном течении в коническом диффузоре. Показано, что vortex reconnection может приводить к образованию как изолированного вихревого кольца, так и кольца, зацепленного с базовой спиральной вихревой трубкой. Описан ряд особенностей процесса of vortex reconnection, включая эффекты асимметрии, генерацию волн Кельвина и формирование разнообразных бриджей.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОРТРЕТЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

Аптекарев А. И.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия; aptekaa@keldysh.ru

Понятие ε-спектра (спектрального портрета) матрицы было введено С. К. Годуновым. Это множество комплексной плоскости, занимаемое собственными значениями матрицы при ее возмущении матрицами малой нормы. Мы обсудим (в простейшем варианте) задачу об изменении спектрального портрета при сближении собственных значений исходной матрицы. В качестве примера рассмотрим распределение собственных значений эрмитовой матрицы при возмущении ее эрмитовыми матрицами с гауссовыми случайными элементами.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Белоносов В. С.[1,2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
bvs@math.nsc.ru, belonosov@academ.org

Доклад посвящен исследованиям, инициированным проблемами интенсификации добычи нефти при слабых, но длительных вибрационных воздействиях. Эти технологии успешно применяются уже много лет, однако остаются в значительной степени эмпирическими. На рубеже XX–XXI веков междисциплинарным научным коллективом СО РАН под руководством А. С. Алексеева была разработана концепция, объясняющая парадоксальное повышение продуктивности нефтяных месторождений при их волновой стимуляции явлением параметрического резонанса [1]. Обоснование концепции базируется на классическом методе Крылова – Боголюбова асимптотических разложений по степеням малого параметра [2–3], применение которого осложняется его локальным характером. В результате усреднения получаются автономные дифференциальные уравнения, приближенно описывающие особенности точных решений — стационарные точки, циклы, участки сепаратрис и т. д. Вообще говоря, эти особенности тоже зависят от параметра. При его уменьшении они могут выходить за пределы областей, где установлены оценки погрешностей приближений, приводя к потере эффективности метода усреднений.

Данную проблему можно преодолеть, если так модифицировать метод, чтобы фазовый портрет усредненного уравнения не зависел от малого параметра, но попрежнему отражал характерные особенности решений. В общем виде эта задача достаточно сложна. Однако ее удается решить для имеющих большое прикладное значение обобщенных уравнений Матьё – Хилла $u''(t) = -A^2u(t) + \varepsilon F(t, u)$ в конечномерном евклидовом пространстве. Здесь A — самосопряженный линейный положительный оператор, ε — малый параметр, $F(t, u)$ — многочлен относительно компонент вектора u с почти периодическими по t коэффициентами. Предлагается выполнить замену переменных $v = \varepsilon^\alpha u$, а затем воспользоваться методом усреднения Крылова – Боголюбова. При подходящем выборе показателя α и степени усреднения, определенными структурой многочлена $F(t, u)$, фазовый портрет усредненной системы действительно не будет зависеть от ε. Кроме того, усредненная система обладает интересными новыми свойствами, делающими ее похожей на гамильтонову. В докладе подведены итоги этого исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев А. С., Алтунина Л. К., Белоносов В. С., Доровский В. Н., Имомназаров Х. Х., Сердюков С. В., Сказка В. В.* Физико-математическая модель процессов в нефтеносном пласте при волновых воздействиях // Интервал. Передовые нефтегазовые технологии. 2005. № 11(82). С. 4–9.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4-е. М.: Наука, 1974.
3. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Динамические системы – 3. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. С. 5–290.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ – НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА (АЛГОРИТМЫ БЕЗ НАСЫЩЕНИЯ)

Белых В. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; belykh@math.nsc.ru

Построен принципиально новый ненасыщаемый [1] метод численного решения задачи Дирихле – Неймана для уравнения Лапласа, позволяющий автоматически за счет гладкости отыскиваемого решения учитывать специфику осесимметричной постановки этой задачи, препятствующей использованию любых насыщаемых (с главным членом погрешности) вычислительных методов.

Отличительной чертой ненасыщаемого численного метода является отсутствие главного члена погрешности, и как результат — способность автоматически подстраиваться к любым избыточным (экстраординарным) запасам гладкости решений. Полученный результат принципиален, ибо в случае C^∞-гладких решений задач, построенный метод реализует абсолютно неулучшаемую экспоненциальную оценку погрешности. Неулучшаемость оценки обусловлена асимптотикой александровского n-поперечника компакта C^∞-гладких решений. Эта асимптотика также имеет вид убывающей к нулю (с ростом параметра n) экспоненты.

Математической основой для численного исследования указанной задачи являются результаты работ автора [2–6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
2. *Белых В. Н.* К проблеме численной реализации интегральных операторов осесимметричных краевых задач (алгоритмы без насыщения) // Уфимск. мат. журн. 2012. Т. 4, № 4. С. 22–37.
3. *Белых В. Н.* Об эволюции конечного объема идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. 2017. Т. 473, № 2. С. 650–654.
4. *Белых В. Н.* Корректность одной нестационарной осесимметричной задачи гидродинамики со свободной поверхностью // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 728–744.
5. *Белых В. Н.* О колмогоровской ε-энтропии одного компакта C^∞-гладких непериодических функций (к проблеме К.И. Бабенко) // Докл. АН. 2018. Т. 482, № 2. С. 123–127.
6. *Белых В. Н.* К проблеме конструирования ненасыщаемых квадратурных формул на отрезке // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 1. С. 27–62.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПРЕССИИ В КАНАЛАХ ПЛАЗМЕННЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

Брушлинский К. В.[1,2], **Степин Е. В.**[1,2]

[1]*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;*
[2]*Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, Россия;*
brush@keldysh.ru, eugene.v.stepin@gmail.com

Течения плазмы в каналах, образованных коаксиальными электродами, постоянно представляют теоретический и практический интерес как минимум в двух областях приложений. Во-первых, магнитогазодинамическое обобщение сопла Лаваля с параметрами скорости и энергии потока на выходе, на порядки превосходящими их величины в жидкостных реактивных двигателях, и, следовательно, перспектива разработки и создания электрореактивных двигателей. Во-вторых, образование зоны компрессии — устойчивой области сжатой и нагретой плазмы на оси канала с укороченным центральным электродом за примыкающей к нему конической ударной волной. Явление компрессии может иметь перспективу приложений в проблемах управляемого термоядерного синтеза, в которых процессы нагрева и удержания плотной горячей плазмы магнитным полем являются основным объектом исследований.

Теоретические и экспериментальные исследования течений плазмы в каналах постоянно сопровождаются и дополняются математическим моделированием и расчетами в больших объемах с применением современной высокопроизводительной вычислительной техники. Краткий обзор работ по численным моделям ускорения плазмы в каналах содержится в статье [1] с необходимой библиографией.

В докладе предполагается изложить современный взгляд на численные исследования компрессии и результаты расчетов, выполненных в последнее время с целью определить ее зависимость от геометрии канала и параметров задачи. Двумерные (осесимметричные) МГД-задачи решены численно методом коррекции потоков. Установлено, что эффективность сжатия и нагрева плазмы повышается с ростом площади поперечного сечения канала и величины полного электрического тока в системе. Присутствие в канале продольного магнитного поля, созданного внешними проводниками, ослабляет эффект компрессии. Этой же теме посвящена публикуемая в 2019 г. статья [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-11-10278).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брушлинский К. В.* Математические модели плазмы в проектах Морозова // Физика плазмы. 2019. Т. 45, № 1. С. 37–50.
2. *Брушлинский К. В., Степин Е. В.* Численная модель компрессионных течений плазмы в каналах в присутствии продольного магнитного поля // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 7. С. 929–939.

С. К. ГОДУНОВ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Веденяпин В. В.[1], Аджиев С. З.[2], Казанцева В. В.[1], Мелихов И. В.[2], Негматов М. А.[3], Фимин Н. Н.[1], Чечёткин В. М.[1]

[1] *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;* vicveden@yahoo.com

[2] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* adzhiev@nm.ru

[3] *Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Москва, Россия;* negmatov@mail.ru

Мы рассмотрим важнейшие кинетические уравнения: уравнение Больцмана, которое описывает короткодействие и его важнейшее приложение — теорему о возрастании энтропии (H-теорема). H-теорема впервые была рассмотрена Больцманом в [1]. Эту теорему, обосновывающую сходимость решений уравнений типа Больцмана к максвелловскому распределению, Больцман связал с законом возрастания энтропии [2]. Работа [3] была первой по дискретным моделям уравнения Больцмана в нашей стране, и мы расскажем о развитии идей этой работы [7–12]. Мы рассматриваем обобщения уравнений химической кинетики, включающие в себя классическую и квантовую химическую кинетику [10]. Рассматриваем уравнение Власова, которое описывает дальнодействие с её важнейшими приложениями для описания плазмы и крупномасштабных явлений во Вселенной и уравнение Лиувилля или неразрывности с приложениями к статистической механике [4–9] и в методе Гамильтона – Якоби [6–7]. Уравнение Власова – Максвелла – Эйнштейна, которое описывает эволюцию Вселенной и должно описывать тёмную энергию и тёмную материю [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Больцман Л.* Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа. Избранные труды. М.: Наука, 1984. С. 125–189.
2. *Больцман Л.* О связи между вторым началом механической теории теплоты и теорией вероятностей в теоремах о тепловом равновесии. Избранные труды. М.: Наука, 1984. С. 190–235.
3. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 3. С. 3–51.
4. *Пуанкаре А.* Замечания о кинетической теории газов. Избранные труды. Т. 3. М.: Наука, 1974.
5. *Козлов В. В., Трещев Д. В.* Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем // Теор. мат. физ. 2003. Т. 134, № 3. С. 388–400.
6. *Козлов В. В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 2013.
7. *Веденяпин В. В.* Временные средние и экстремали по Больцману // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 2. С. 161–163.
8. *Аджиев С. З., Веденяпин В. В.* Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 11. С. 2063–2074.
9. *Веденяпин В. В., Аджиев С. З.* Энтропия по Больцману и Пуанкаре // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 6. С. 45–80.
10. *Веденяпин В. В., Орлов Ю. Н.* О законах сохранения для полиномиальных гамильтонианов и для дискретных моделей уравнения Больцмана // Теор. мат. физ. 1999. Т. 121, № 2. С. 307–315.
11. *Веденяпин В. В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
12. *Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Чечеткин В. М.* Об уравнении Власова – Максвелла – Эйнштейна и его нерелятивистских и слаборелятивистских аналогах. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 265. 30 с.

ЛОКАЛЬНЫЕ ВНУТРЕННИЕ МАЖОРАНТЫ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Головизнин В. М.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; gol@ibrae.ac.ru

Системы законов сохранения гиперболического типа могут быть приведены к т. н. характеристической форме. Для характеристических уравнений вдоль любого пространственного вектора выполняется принцип максимума, порождающий поле внутренних мажорант. При численном решении гиперболических уравнений по консервативным разностным схемам, получаемым методом конечного объема, дискретные аналоги внутренних мажорант не сохраняются, что приводит к нарушению монотонности численного решения. Вычислительные алгоритмы, основанные на методе характеристик в областях гладкости, дают решения, удовлетворяющие локальным внутренним мажорантам, но не удовлетворяют условиям Гюгонио на разрывах. Объединение достоинств консервативных и характеристических алгоритмов достигается в т. н. консервативных сеточно-характеристических схемах (КСХ, В. М. Головизнин, Б. Н. Четверушкин).

Доклад посвящен особенностям балансно-характеристических разностных схем, в число которых входит схема КАБАРЕ и обширный класс консервативных сеточно-характеристических уравнений.

О РАБОТАХ С.К. ГОДУНОВА ПО УРАНОВОЙ ПРОБЛЕМЕ

Дерюгин Ю. Н.[1], **Шагалиев Р. М.**[2]

Российский федеральный ядерный центр, Саров, Россия;
[1]deryugin@vniief.ru, [2]R.M.Shagaliev@vniief.ru

Для работ над “Урановой проблемой”, так первоначально назывались работы по созданию атомных, а затем и водородных бомб, были привлечены выдающиеся ученые страны. Основные работы по разработке и конструированию атомных бомб с 1948 г. проводились в КБ-11 при Лаборатории № 2 АН СССР. Созданные основные теоретические модели по газодинамике, переносу нейтронов, ядерному горению и переносу тепловой энергии потребовали развития вычислительных методов и вычислительной техники [1–3]. В развитии вычислительных методов, которые были начаты в 1948 г., пионерские работы принадлежат коллективу ИПМ АН СССР, возглавляемому М. В. Келдышем. Одним из сотрудников отдела ИПМ, которым руководил К. А. Семендяев, был Сергей Константинович Годунов. В докладе представлены работы С. К. Годунова по трем направлениям.

Первое направление связано с развитием методов решения одномерных задач газовой динамики для расчета сжатия слоистых систем [4]. Первые расчеты сжатия сферических систем проводились ручным способом методом характеристик. С появлением вычислительной техники встала задача об автоматизации вычислений. Сергеем Константиновичем Годуновым был предложен разностный метод, основанный на решении задачи о распаде разрыва, получивший в дальнейшем название — метод Годунова. По результатам этой работы им была защищена кандидатская диссертация. Под руководством С. К. Годунова для решения одномерных задач газовой динамики на объекте был создан ряд расчетных методик и программ, в лагранжевых и эйлеровых переменных, использующих решение задачи о распаде разрыва для определения потоковых величин [5]. С. К. Годуновым был разработан новый вариант метода характеристик, в котором расчет проводился в многообластной постановке по слоям. Такой способ позволил автоматизировать вычисления даже с учетом пересечения ударных волн. Важными работами С. К. Годунова были исследования автомодельных решений задачи Коши для уравнений газовой динамики для сферических систем. Это вызвано тем, что одной из важных характеристик при сжатии сферических оболочек является определение времени фокусировки. Решению задачи о схождении газовых оболочек посвящено большое число исследований. Работа С. К. Годунова является некоторым итогом этих исследований. В работе было показано, что для газовых оболочек автомодельная задача имеет не единственное решение и все решения содержат слабый разрыв.

Второе направление, которое развивалось на объекте под руководством С. К. Годунова, связано с расчетом энерговыделения изделий [7, 8]. На начальном этапе исследований в отсутствии вычислительной техники этим направлением занималась группа, возглавляемая Л. Д. Ландау [1]. Результатом работы этой группы явилось создание теории КПД изделия. С появлением вычислительной техники встал вопрос об автоматизации расчета энерговыделения изделий. Большое число работ по разработке методов расчета энерговыделения были выполнены сотрудниками ИПМ, в числе которых был и Сергей Константинович. Им была разработана оригинальная методика определения критических параметров в сферических системах методом сферических гармоник в многогрупповом приближении. Методика основана на представлении решения в виде матричных рядов. Для областей, удаленных от центра, используются обычные ряды Тейлора. Для областей центра предложен прием, переводящий решение системы в решение системы уравнений с постоянными коэффициентами. Для построенной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений им был разработан и обоснован метод ортогональной прогонки.

Третье направление, которое, совместно с сотрудниками ИПМ, начало развиваться на объекте с появлением вычислительной техники, связано с созданием двумерных методик расчета задач газовой динамики. Под руководством С. К. Годунова были разработаны методики в подвижных эйлеровых сетках с выделением основных особенностей решения: движение ударных и детонационных волн [6]. Создание этих методик позволило учесть неодномерность конструкций на процессы сжатия. Первые двумерные методики были написаны в машинных кодах. С появлением алгоритмических языков программирования под руководством С. К. Годунова стал развиваться метод расчета двумерных задач газовой динамики в произвольных криволинейных координатах. Важными элементами в этом методе являются алгоритмы построения и деформации криволинейных разностных сеток [9]. На основе разностной схемы Годунова на объекте были созданы ряд двумерных и трехмерных методик расчета ударно-волновых процессов в различных средах [10]. Метод Годунова является базовым методом в пакете программ инженерного анализа ЛОГОС [11] для расчета внешних и внутренних течений.

Сергей Константинович Годунов часто бывал на объекте. Многие работы были выполнены совместно с сотрудниками объекта. Под руководством С. К. Годунова была подготовлена и защищена Изабеллой Александровной Адамской кандидатская диссертация по обоснованию метода сферических гармоник. Монография, написанная С. К. Годуновым совместно с С. В. Рябеньким, “Введение в теорию разностных схем” была на протяжении многих лет настольным учебником математиков. Созданные под его руководством методики и программы были одним из основных инструментов, с помощью которых разрабатывались ядерные и термоядерные заряды в 50 и 60 годах [5].

Сотрудники ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ” поздравляют Сергея Константиновича, желают ему осуществления намеченных планов, здоровья и благополучия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров Г. А., Рябев Л. Д.* О создании первой отечественной атомной бомбы // Успехи физ. наук. 2001. Т. 171, № 1. С. 71–93.
2. *Гончаров Г. А.* К истории создания советской водородной бомбы // Успехи физ. наук. 1997. Т. 67, № 8. С. 859–867.
3. *Из плеяды героев. Памяти Г. А. Гончарова.* Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2017.
4. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
5. *Адамская И. А., Софронов И. Д.* Пакеты прикладных программ для решения одномерных задач математической физики // Пакеты прикладных программ. Системное наполнение. М.: Наука, 1984. С. 56–67.
6. *Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 6. С. 1020–1050.
7. *Адамская И. А., Годунов С. К.* Метод сферических гармоник в задаче о критических параметрах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 3. С. 473–484.
8. *Адамская И. А., Годунов С. К., Прокопов Г. П.* Выражение функционала В. С. Владимирова через сферические гармоники в тензорной форме // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8, № 4. С. 824–841.

9. *Годунов С. К. (ред.)* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
10. *Величко О. М., Губкова Г. Н., Дерюгин Ю. Н.* Пакеты программ для решения многомерных задач газовой динамики разностным методом Годунова // Материалы конференции “Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения”. Саров: ВНИИЭФ, 2000. С. 21–29.
11. *Дерюгин Ю. Н., Козелков А. С., Спиридонов В. Ф., Циберев К. В., Шагалиев Р. М.* Многофункциональный высокопараллельный пакет программ ЛОГОС для решения задач тепломассопереноса и прочности // Сборник тезисов докладов Санкт-Петербургского научного форума “Наука и общество”. 2012. С. 102.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ, ПОСТРОЕННЫЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИДЕЙ ОСНОВОПОЛАГАЮЩИХ РАБОТ С. К. ГОДУНОВА

Иванов М. Я., Мамаев В. К.

Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова, Москва, Россия; Ivanov@ciam.ru

Выполнен анализ галилеево-инвариантных термодинамически согласованных законов сохранения, допускающих класс обобщенных решений. Главная особенность рассматриваемых в статье обобщенных решений состоит в описании потерь полного давления, сопровождающих динамический процесс подвода тепла. Принципиальными свойствами при построении обобщенных решений являются рассматриваемая в работах С. К. Годунова [1, 2] галилеева инвариантность и термодинамическая согласованность исходных законов сохранения при математической формулировке теплового процесса. Исчерпывающее ознакомление с основными идеями С. К. Годунова по данному вопросу можно получить по записям семинаров МИАН им. В. А. Стеклова, легко доступным по интернету [3, 4].

Известно, что класс обобщенных решений помимо традиционных классических гладких решений включает соотношения на разрывах. В нашем случае при наличии теплоподвода класс обобщенных решений квазилинейных уравнений термодинамики расширяется. Однако постановка проблемы рассматривается лишь для небольшой простейшей части феноменологической термодинамики (без химических реакций, фазовых переходов и т. п.). Определяющими факторами анализируемых обобщенных решений будут рост энтропии и непосредственно связанное с ним наличие уже упомянутых потерь полного давления. Особенности рассматриваемых нами решений следуют, во-первых, из использования исходной замкнутой математической формулировки для теплового процесса в виде трех балансовых законов сохранения массы, импульса и энергии и, во-вторых, из построения итоговых решений, характеризуемых наличием потерь полного давления.

Выполнение свойства галилеевой инвариантности для получения замкнутой математической формулировки требуется также для задаваемых граничных и начальных условий задачи. С этим обстоятельством связано, в частности, задание входных граничных параметров моделируемого потока. В качестве наглядного примера приведем изменение значений полного давления и полной температуры потока, втекающего в моделируемую область. При наличии скорости набегающего потока его заторможенные параметры увеличиваются и это должно учитываться в термодинамически согласованной постановке. В работе также сформулирована уточненная термодинамически согласованная процедура постановки галилеево инвариантных начальных условий нестационарной задачи с учетом потерь полного давления. При решении стационарных задач методом установления термодинамическая согласованность конечного решения достигается в процессе установления, благодаря интегрированию термодинамически согласованных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К., Роменский Е. И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Годунов С. К., Гордиенко В. М.* Простейшие галилеево-инвариантные и термодинамически согласованные законы сохранения // Прикл. механика и техн. физика. 2002. Т. 43, № 1 (251). С. 3–16.
3. *Годунов С. К.* Термодинамика и уравнения математической физики // Семинар МИАН им. В. А. Стеклова, 16.12.2004.
4. *Годунов С. К.* Законы сохранения в газовой динамике // Семинар МИАН им. В. А. Стеклова, 24.03.2016.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Кабанихин С. И.[1,2,3]**, Куликов И. М.**[1,3]**, Шишленин М. А.**[1,2,3]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[3]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
Kabanikhin@sscc.ru, Kulikov@ssd.sscc.ru, Maxim.Shishlenin@sscc.ru

Исследована задача Коши для скалярного закона сохранения

$$u_t + f(u)_x = 0, \qquad x \in (0, L), \quad t \in (0, T),$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in (0, L).$$

Здесь $u(x, t)$ — концентрация частиц, функция $f(u)$ моделирует осаждение частиц [1, 2].

В обратной задаче требуется определить функцию f по дополнительной информации о решении прямой задачи. В первой обратной задаче в качестве дополнительной информации измеряется концентрация в фиксированный момент времени, во второй — концентрация в некоторых точках пространства.

Для решения обратной задачи разработан алгоритм градиентного спуска [3]. Аналогичный подход применен для решения обратной задачи акустической томографии, сформулированной в виде законов сохранения [4]. Проведен анализ численной сходимости алгоритма решения прямой [5] и обратной задач. Приведены результаты численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kang H., Tanuma K.* Inverse problems for scalar conservation laws // Inverse Probl. 2005. V. 21. P. 1047–1059.
2. *Berres S, Bürger R., Coronel A., Sepúlveda M.* Numerical identification of parameters for a strongly degenerate convection-diffusion problem modelling centrifugation of flocculated suspensions // Appl. Numer. Math. 2005. V. 52. P. 311–337.
3. *Kabanikhin S. I., Scherzer O., Shishlenin M. A.* Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2003. V. 11, No. 1. P. 87–109.
4. *Куликов И. М., Новиков Н. С., Шишленин М. А.* Математическое моделирование распространения ультразвуковых волн в двумерной среде: прямая и обратная задача // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 219–228.
5. *Годунов С. К.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА С. К. ГОДУНОВА: ЯВНО-НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ, АЭРОАКУСТИКА, МНОГОФАЗНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Меньшов И. С.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия; menshov@kiam.ru

В докладе рассматриваются три вопроса, связанные с развитием явной численной схемы, которую С. К. Годунов предложил почти 60 лет тому назад для решения уравнений газовой динамики [1]. Это — (1) применение метода С. К. Годунова к гибридным явно-неявным схемам интегрирования по времени [2], (2) модификация метода С. К. Годунова для расчета эволюции аэроакустических полей малых возмущений на среднем неоднородном поле течения и обобщение метода С. К. Годунова на уравнения течения неравновесной многофазной среды. Первые два вопроса тесно связаны с вариационной задачей Римана. Ее формулировка сводится к нахождению первой вариации решения автомодельной задачи Римана при малых вариациях начальных данных. Первая вариация выписывается через вариационные матрицы, связанные с вариацией вектора состояния слева и справа от начального разрыва. Показывается, что решение вариационной задачи Римана существует и единственно. Аналитические выражения для вариационных матриц получаются в явном и достаточно компактном виде при произвольных начальных данных. С помощью вариационных матриц можно выполнить точную линеаризацию годуновского численного потока. Это позволяет непосредственно провести конечно-объемную дискретизацию линеаризованной системы сжимаемых уравнений Эйлера, описывающей распространение акустических полей малых возмущений в неоднородном потоке. Точная линеаризация численного потока используется также в ньютоновских итерациях решения дискретных уравнений явно-неявной схемы С. К. Годунова, что позволяет повысить скорость сходимости численных решений. Приводятся численные результаты, показывающие точность расчета акустического поля в неоднородном потоке, в том числе при наличии разрывов, и сходимость явно-неявной схемы на стационарных и нестационарных течениях.

Во второй части доклада обсуждается обобщение метода С. К. Годунова на неконсервативные системы уравнений гиперболического типа. Рассматриваются уравнения двухфазной гидродинамики в рамках модели Байера – Нунзиато. Вводятся расщепленные постановки задачи Римана для несущей и дисперсной фазы, соответственно, описываются их точные аналитические решения, обсуждаются возможные упрощенные приближения на основе двухволновой структуры решения. С использованием полученного приближенного решения построена численная схема, обеспечивающая свойство однородности (well-ballancing). Проводится тестирование схемы на решении задач о распаде произвольного разрыва.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00921).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
2. *Menshov I. S., Nakamura Y.* Hybrid explicit-implicit, unconditionally stable scheme for unsteady compressible flows // AIAA Journal. 2004. V. 42, No. 3. P. 551–559.

КОНЦЕНТРАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО ГАЗА

Плотников П. И.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; pilotnikov@mail.ru

В работе рассматривается следующая краевая задача для уравнений Навье – Стокса динамики вязкой сжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}
&\partial_t(\varrho\,\mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\varrho\,\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p(\varrho) \\
&\qquad\qquad = \operatorname{div}\,\mathbb{S}(\mathbf{u}) + \varrho\,\mathbf{f} \quad \text{в } \Omega\times(0,T),\\
&\partial_t\varrho + \operatorname{div}\,(\varrho\mathbf{u}) = 0 \quad \text{в } \Omega\times(0,T),\\
&\mathbf{u} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega\times(0,T),\\
&\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{в } \Omega,\\
&\varrho(x,0) = \varrho_0(x) \quad \text{в } \Omega.
\end{aligned}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область, $\varrho_0>0$, $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{f}$ — заданные ограниченные функции, $p(\varrho)=\varrho^\gamma$, $\mathbb{S}(\mathbf{u})=\mu(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^\top)+\lambda\operatorname{div}\,\mathbf{u}$, μ,λ — положительные постоянные. Мы сосредоточимся на критическом случае $\gamma=3/2$, когда энергетическая оценка не гарантирует интегрируемость плотности кинетической энергии с показателем адиабаты большим единицы. В критических случаях возможна концентрация конечной энергии в сколь угодно малых областях. Для решения проблемы концентраций предлагается новый подход, основанный на на априорных оценках потенциала Ньютона для функции давления. В работе доказывается, что в трехмерной задаче с критическим показателем адиабаты $\gamma=3/2$ плотность кинетической энергии ограничена в пространстве Орлича $L\log L^\alpha$. Этого достаточно для решения проблемы концентраций.

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ДИНАМИКЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД: ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ СОГЛАСОВАННОСТЬ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОРРЕКТНОСТЬ, ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Садовский В. М., Садовская О. В.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия;
sadov@icm.krasn.ru

Термодинамически согласованные системы законов сохранения изучаются в работах С. К. Годунова и его учеников [1, 2] применительно к моделям с обратимой термодинамикой в теории упругости, газовой динамике, магнитной газодинамике и электродинамике. В предлагаемом докладе дается обобщение этого подхода на термодинамически необратимые модели, учитывающие диссипативные пластические деформации среды.

Используются специальные формулировки моделей динамики упругопластических, сыпучих и пористых сред в виде вариационных неравенств для гиперболических операторов с ограничениями, описывающими физически нелинейный процесс перехода материала в пластическое состояние [3] и разное сопротивление сыпучего или пористого материала растяжению и сжатию [4]. На этой основе исследуется проблема разрывных решений с пластическими ударными волнами, строятся интегральные оценки в характеристических конусах оператора, из которых следует единственность и непрерывная зависимость от начальных данных решений задачи Коши и краевых задач с диссипативными граничными условиями, включая задачи с разрывами скоростей и напряжений.

Разрабатываются оригинальные вычислительные алгоритмы сквозного счета, которые можно рассматривать как реализацию метода расщепления по физическим процессам, автоматически удовлетворяющие свойствам монотонности и диссипативности на дискретном уровне, пригодные для расчета решений с особенностями типа сильных разрывов и разрывов сплошности среды. Для численного решения двумерных и трехмерных задач применяется метод двуциклического расщепления Г. И. Марчука по пространственным переменным, сохраняющий второй порядок точности при использовании схем второго порядка на этапе решения пространственно одномерных задач.

В качестве нерешенной проблемы рассматривается проблема разрешимости краевых задач для гиперболических вариационных неравенств в пространствах С. Л. Соболева в геометрически нелинейных задачах с конечными упругопластическими деформациями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
2. *Godunov S. K., Romenskii E. I.* Elements of continuum mechanics and conservation laws. Kluwer Academic / Plenum Publishers: New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2003.
3. *Садовский В. М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Физматлит, 1997.
4. *Sadovskaya O., Sadovskii V.* Mathematical modeling in mechanics of granular materials. Ser.: Advanced Structured Materials, V. 21. Springer: Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2012.

УПРАВЛЯЕМЫЕ ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ВЫМЕТАНИЯ

Толстоногов А. А.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; aatol@icc.ru

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается процесс выметания (sweeping process). Он порождается определенным на отрезке многозначным отображением, значениями которого являются полиэдры. Полиэдр — это пересечение конечного числа замкнутых полупространств, которые определяются с помощью гиперплоскостей. В уравнения гиперплоскостей входят нормальные вектора и свободные члены, которые в нашем случае являются функциями времени. Поэтому их можно рассматривать как управления. Такие управления мы называем внутренними. Наряду с внутренними управлениями в правую часть процесса выметания входят и внешние управления, которые представляют собой традиционные измеримые функции. Внешние управления имеют ограничения в виде многозначного отображения с замкнутыми значениями.

Изучаются вопросы существования и зависимости решений от внутренних и внешних управлений, а также задачи оптимального управления. Для решения таких задач на пространстве полиэдров вводится метрика, сходимость в которой совпадает со сходимостью по Моско выпуклых замкнутых множеств.

В свою очередь пространство непрерывных многозначных отображений, значениями которых являются полиэдры, наделяется топологией равномерной сходимости.

В терминах нормальных векторов и свободных членов (внутренних управлений) даются достаточные условия компактности множеств в пространстве полиэдральных отображений. Это позволяет рассмотреть вопросы существования оптимальных управлений в задачах минимизации интегральных функционалов, интегранты которых зависят от внешних и внутренних управлений, на решениях полиэдральных процессов выметания.

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК НАНОМАТЕРИАЛОВ

Фомин В. М.[1,2], Филиппов А. А.[1]

[1] *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия;* fomin@itam.nsc.ru

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

Анализ современной литературы позволяет сделать простой вывод, что при изменении характерного размера наноматериалов их механические характеристики могут изменяться на порядки. Экспериментальные методы их определения представляют технически сложную и реально пока невыполнимую задачу вследствие малости размеров данных объектов. Расчетные модели дают достаточно большие расхождения в связи с неточными заложенными в них исходными начальными данными.

В данной работе на основе теоретико-экспериментального подхода удается получить свойства наноструктур в зависимости от размеров и структуры их образования. Гетерогенный материал, состоящий из нанофазы и связующей фазы, массовые и объемные концентрации которых заданы, с помощью методов осреднения сводится к гомогенному. Такой подход связывает механические характеристики фаз через осредненные. Полученный гомогенный материал позволяет получать образцы для классических экспериментов на растяжение, сжатие, кручение и др. При этом в осредненные механические характеристики материала будут входить механические характеристики составляющих фаз. Считая механические характеристики связующего материала и осредненные характеристики гомогенного материала известными из данных экспериментов, получим систему уравнений для определения механических характеристик нанофаз, входящих в данный гомогенный образец. Изменяя размеры нанофаз и проводя соответствующие расчеты и эксперименты, получим закономерность изменения механических характеристик для нанофазы.

Используя предложенный подход, были исследованы упругие характеристики наночастиц диоксида кремния порошков Аэросил и Таркосил в зависимости от диаметров. В результате осреднения по объему и в приближении одноосного напряженного и деформированного состояния удается получить систему алгебраических уравнений, связывающих

$$\lambda_1 = \varphi_1(\lambda_2, \mu_2, \hat{\lambda}, \hat{\mu}, m_1, d_1); \quad \mu_1 = \varphi_2(\lambda_2, \mu_2, \hat{\lambda}, \hat{\mu}, m_1, d_1), \tag{1}$$

где λ_1, μ_1 — константы Ламэ для нанофазы, λ_2, μ_2, $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ — константы Ламэ связующей и осредненной фаз соответственно, m_1 — объемная концентрация и d_1 — диаметр нанофазы. Проведя эксперименты на растяжение и сжатие в одноосном напряженном приближении, находим $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ при заданных m_1, d_1, чем и замыкается система (1). Подготовка полимерного композиционного материала подробно описана в [1], а результаты механических испытаний изложены также в работе [1].

В результате приведенных исследований установлено, что при увеличении d_1 параметры λ_1, μ_1 асимптотически стремятся к классическому сплошному материалу, а при уменьшении d_1 параметры λ_1, μ_1 возрастают, стремясь к теоретическому пределу, вычисленному в приближении двухатомной структуры. Следует заметить, что данные результаты подтверждают выводы Н. Ф. Морозова, А. М. Кривцова и др., полученные на основе теоретических исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brusentseva T. A., Filippov A. A., Fomin V. M., Malykhin E. V., Vaganova T. A.* Influence of the nanosized filler nature on the mechanical properties of epoxy-anhydride polymer composites // Nanotechnologies in Russia. 2014. V. 9, No. 1–12. P. 638–644.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗРЫВНЫХ ЯВЛЕНИЙ ПРИ БЫСТРЫХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ

Якуш С. Е.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия; yakush@ipmnet.ru

Быстрые фазовые переходы, связанные с высвобождением энергии и резким увеличением удельного объема системы, способны приводить к локальному повышению давления и распространению взрывных волн. Примерами таких явлений служат вскипание перегретой жидкости при разрушении резервуара высокого давления, представляющее опасность при авариях со сжиженными давлением углеводородами, а также паровой взрыв (термическая детонация) при взаимодействии жидкого теплоносителя с расплавами, находящимися при температуре значительно выше температуры кипения теплоносителя. Последняя задача актуальна в атомной энергетике при анализе тяжелых аварий с плавлением активной зоны реактора. В обоих случаях движущие причины взрыва носят физический характер, в отличие от обычных взрывов с выделением энергии химических превращений.

В докладе рассмотрены математические модели указанных явлений, в которых основной упор делается на гидродинамические аспекты проблемы (возникновение и распространение ударных волн в многофазных системах) при определенных упрощениях сложных процессов, протекающих на малых масштабах (зарождение и рост пузырьков, взаимное движение жидкой и паровой фаз), на основе предположения о малом временном масштабе неравновесных процессов по сравнению с характерными гидродинамическими временами. В результате задача сводится к решению гиперболических уравнений движения с усложненным уравнением состояния. Обсуждается процедура численного решения и особенности реализации соответствующих схем, в частности, вычисление потоков на границах расчетных ячеек и описание подвижной границы раздела между двухфазной областью и окружающей средой.

Приведены примеры расчета физического взрыва при разрушении резервуара высокого давления со сжиженным пропаном, а также парового взрыва в системе вода – пар – расплав. Рассмотрено быстрое вскипание при полном и частичном заполнении резервуара, получены характеристики воздушных ударных волн, продемонстрирована картина течения в двухфазной зоне, включая распространение волны вскипания и вторичные отражения ударных волн, приводящие к характерным профилям давления с несколькими максимумами. Рассчитана структура волны парового взрыва при распространении по зоне предварительного перемешивания с крупнодисперсными каплями расплава, испытывающими фрагментацию после прохождения волны давления. Обсуждается роль различных физических явлений в формировании взрывной волны, а также рассматривается аналогия с детонационными волнами в химически реагирующих системах. Результаты расчетов сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00289).

GEODESIC MESH MHD: A NEW PARADIGM FOR COMPUTATIONAL ASTROPHYSICS AND SPACE PHYSICS APPLIED TO SPHERICAL SYSTEMS

Balsara D. S.

University of Notre Dame, Notre Dame, USA; dbalsara@nd.edu

A majority of astrophysical systems tend to be spherical. The same is true for problems in space physics. Even so, simulations of such systems tend to be done on logically Cartesian meshes. The r-theta-phi meshes that are often used have a few major deficiencies: a) They don't cover the sphere uniformly, b) The coordinate singularity on-axis results in a loss of accuracy, c) The timestep is seriously diminished. All these problems are associated with using an inadequate coordinate system for doing the calculation. As astrophysicists and space physicists actively take on the issues of MHD turbulence, it becomes increasingly important to have high orders of accuracy. High accuracy schemes are the only way of reducing the dissipation and dispersion that should be held down in turbulence simulations.

In this work we show that an excellent alternative is available. The most isotropic covering of the sphere comes from icosahedrally generated geodesic meshes. The elements of such a mesh are inherently curved and we show that isoparametric mapping provides an extraordinarily accurate re-mapping strategy for the sphere. We show that divergence-free MHD calculations can be done on such meshes with no loss of on-core processing efficiency or parallelism. To improve accuracy we use a combination of: a) WENO methods, b) A re-formulation to support high order divergence-free reconstruction of magnetic fields, c) Multidimensional Riemann solvers, d) Higher order timestepping to match the spatial accuracy. The resulting capability achieves provably high order of accuracy and high levels of parallelism. Several stringent test problems are presented and a few frontline applications are shown to highlight the utility of our approach.

CONTRIBUTIONS TO THE MATHEMATICAL TECHNOLOGY TRANSFER WITH FINITE VOLUME METHODS

Bermúdez A.[1], **Busto S.**[2], **Cea L.**[3], **Vázquez-Cendón M. E.**[4]

[1] *University of Santiago de Compostela, Technological Institute for Industrial Mathematics, Santiago de Compostela, Spain;* alfredo.bermudez@usc.es
[2] *University of Trento, Trento, Italy;* saray.busto@unitn.it
[3] *University of A Coruña, A Coruña, Spain;* luis.cea@udc.es
[4] *University of Santiago de Compostela, Technological Institute for Industrial Mathematics, Santiago de Compostela, Spain;* elena.vazquez.cendon@usc.es

At the early 1980s, the research group in Mathematical Engineering, mat+i, from the USC, started working on finite volume methods for the simulation of environmental issues concerning Galician rias (Spain). The focus was on the study of hyperbolic balance laws due to the presence of source terms related with the bathymetry of Galician coast. A correct treatment of these terms, an upwind discretization, was initially presented in [1] and extended to bidimensional problems in [2–3]. The transfer of this knowledge has motivated the registration of IBER code (*www.iberaula.es*).

Latterly, under research projects MTM2008-02483, CGL2011-28499-C03-0, MTM2013-43745-R and MTM2017-86459-R, we have been working on the development of a numerical algorithm for the resolution of Euler and Navier–Stokes equations. A semi-implicit hybrid projection finite volume/finite element method [4–5] is employed to decouple the computation of pressure and momentum making use of unstructured staggered grids. To attain second order of accuracy ADER methodology is employed.

On the other hand, with numerical simulation of gas transportation networks in view, a first-order well-balanced finite volume scheme for the solution of a model, for the flow of a multi-component gas in a pipe on non-flat topography, is introduced. The mathematical model consists of Euler equations, with source terms arising from heat exchange and gravity and viscosity forces, coupled with the mass conservation equations of species. We propose a segregated scheme in which Euler and species equations are solved separately. This methodology leads to a flux vector in the Euler equations depending not only on the conservative variables but also on time and space through the gas composition [6].

REFERENCES

1. *Bermúdez A., Vázquez-Cendón M. E.*, “Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms,” Comput. Fluids, **23**, No. 8, 1049–1071 (1994).
2. *Bermúdez A., Dervieux A., Desideri J. A., Vázquez-Cendón M. E.*, “Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes,” Comput. Fluids, **155**, 49–72 (1998).
3. *Vázquez-Cendón M. E., Cea L.*, “Analysis of a new Kolgan-type scheme motivated by the shallow water equations,” Appl. Numer. Math., **62**, No. 4, 489–506 (2012).
4. *Bermúdez A., Ferrín, J. L., Saavedra L., Vázquez-Cendón M. E.*, “A projection hybrid finite volume/element method for low-Mach number flows,” J. Comput. Phys., **271**, 360–378 (2014).
5. *Busto S., Ferrín, J. L., Toro E. F., Vázquez-Cendón M. E.*, “A projection hybrid high order finite volume/finite element method for incompressible turbulent flows,” J. Comput. Phys., **353**, 169–192 (2018).
6. *Bermúdez A., López X., Vázquez-Cendón M. E.*, “Finite volume methods for multi-component Euler equations with source terms,” Comput. Fluids, **156**, 113–134 (2017).

WHY GODUNOV-TYPE SCHEMES ARE SO RICH

Berthon C.

Université de Nantes, Nantes, France; christophe.berthon@univ-nantes.fr

In this talk we present recent developments of Godunov-type schemes to approximate the weak solutions of hyperbolic systems eventually supplemented with source terms. Here, the objectives are to enrich the associated approximate Riemann solutions in order to recover some important properties to be satisfied by the numerical approximations. For the sake of simplicity, we focus on the well-known shallow-water model where the so-called topography source term involves several specific properties to be preserved at the numerical level. More precisely, the source term makes the smooth steady solutions not obvious and their numerical capture may become a very difficult task. After [2], it is well-known that an accurate approximation of these steady sates is crucial to avoid some spurious waves during the numerical simulation. As a consequence, we propose a suitable extension of the Harten, Lax and van Leer integral consistency condition [3] in order to derive approximate Riemann solvers which exactly capture all the steady solutions of the shallow-water system. The obtained finite volume scheme is then called fully-well-balanced scheme. In addition, this scheme is proved to be robust. Concerning the entropy stability, at this level, we can establish, according to the celebrate Lax–Wendroff Theorem, that if the scheme converges then it converges to the entropy weak solutions.

Next, we enrich this numerical procedure in order to recover some additional asymptotic regimes. For instance, let us complete the topography source term with a friction source term. As soon as the friction becomes dominant and for a long time, we then have to deal with a porous media and the flow under consideration is clearly governed by a diffusion equation. During the last decade, numerous authors have proposed techniques to derive asymptotic preserving scheme [4] to correctly capture the diffusion regime. Here, we show that the fully-well-balanced above technique easily yields to preserve the associated asymptotic regimes.

The last part of the talk concerns the derivation of fully discrete entropy inequalities. Once again here, the required numerical stability is obtained by introducing suitable properties within the adopted approximate Riemann solver. More precisely, arguing the well-known artificial viscosity technique [5], we introduce a suitable reformulation of the artificial numerical viscosity in order to get a relevant control of the numerical entropy dissipation rate involved by the approximate Riemann solver. Adopting this procedure we easily solve entropy-fix involved by some first-order finite volume schemes. Next, we extend this procedure in order to improve the hydrostatic reconstruction scheme [1] and get fully discrete entropy inequalities.

REFERENCES

1. *Audusse E., Bouchut F., Bristeau M.-O., Klein R., Perthame B.,* “A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows,” SIAM J. Sci. Comput., **25**, 2050–2065 (2004).
2. *Bermudez A., Vazquez M. E.,* “Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms,” Comput. Fluids, **23**, 1049–1071 (1994).
3. *Harten A., Lax P. D., van Leer B.,* “On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws,” SIAM Rev., **25**, 35–61 (1983).
4. *Jin S.,* “Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations,” SIAM J. Sci. Comput., **21**, 441–454 (1999).
5. *Tadmor E.,* “Entropy stable schemes,” in: Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems: Basic and Fundamental Issues, Elsevier, Amsterdam, 2017, pp. 467–493.

STABILITY OF THE POISEUILLE-TYPE FLOW FOR MHD MODEL OF AN INCOMPRESSIBLE POLYMERIC FLUID

Blokhin A. M.[1,2], **Tkachev D. L.**[1,2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
blokhin@math.nsc.ru, tkachev@math.nsc.ru

We study a generalization of a structural-phenomenological Pokrovski–Vinogradov model [1] describing flows of melts and solutions of incompressible viscoelastic polymeric mediums, onto the nonisothermic case with additional assumption that medium is under the influence of magnetic field.

Our main interest is in analogue of a known shear flow in an infinite channel — Poiseuille flow. It turns out that in considered case it has a number of features. So, for example, our calculations show that for some parameter values the velocity profile is elongated to the side opposite to the direction of pressure forces.

Main results.

1. We derived the asymptotic representation for the spectrum of linearized problem with respect to the chosen main flow (Poiseuille-type flow).
2. We found sufficient condition for asymptotic stability of the main solution in chosen class of perturbations periodic with respect to the variable going along the boundary of an infinite plane channel.

For justification of formulated results we used ideas proposed in authors’ works [2–5].

The authors were partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 17-01-00791a, no. 19-01-00261a).

REFERENCES

1. *Pishnograi G. V., Pokrovski V. N., Yanovski Yu. G., Obraztsov I. F., Karnet Yu. N.,* “Defining equation for nonlinear viscoelastic (polymeric) mediums in zeroth approximation by parameters of molecular theory and consequences for shear and elongation,” Dokl. Akad. Nauk, **355**, No. 9, 612–615 (1994).
2. *Blokhin A. M., Yegitov A. V., Tkachev D. L.,* “Linear instability of solutions in a mathematical model describing polymer flows in an infinite channel,” Comput. Math. Math. Phys., **55**, No. 5, 848–873 (2018).
3. *Blokhin A. M., Yegitov A. V., Tkachev D. L.,* “Asymptotics of the spectrum of a linearized problem of the stability of a stationary flow of an incompressible polymer fluid with a space charge,” Comput. Math. Math. Phys., **56**, No. 1, 102–117 (2018).
4. *Blokhin A., Tkachev D., Yegitov A.,* “Spectral asymptotics of a linearized problem for an incompressible weakly conducting polymeric fluid,” Z. Angrew. Math. Mech., **98**, No. 4, 589–601 (2018).
5. *Blokhin A. M., Tkachev D. L., Yegitov A. V.,* “Asymptotic formula for the spectrum of the linear problem describing periodic polymer flows in the infinite channel,” J. Appl. Mech. Tech. Phys., **59**, No. 6, 992–1003 (2018).

PSEUDOEIGENVALUES, SPECTRAL PORTRAIT OF THE MATRICES AND THEIR CONNECTIONS WITH DIFFERENT CRITERIA OF STABILITY

Bulgak H.

Selcuk University, Konya, Turkey; hbulgak@selcuk.edu.tr

The eigenvalue problem is well-posed for symmetric matrices and is ill-posed in a general case. Instead of the eigenvalues for non-self-adjoint matrices one must work with pseudo spectrum (L. N. Trefethen terminology) or in another word ϵ-spectrum (Godunov's group terminology, see preface [1]). It leads researchers to find a graphic representation of ϵ-spectra of matrix A. This representation is known as spectral portrait of a matrix. Application MVC [2] allows to draw spectral portrait in the complex domain $|z| < ||A||$ with spectral norm A. It looks like using algorithm [3] one can prepared a fast algorithm for spectral portrait drawing.

One application of ϵ-spectra is Hurwitz problem: Are there all the eigenvalues of matrix A strictly in the left-hand half-plane? There exist some numerical characteristics such as factor of stability, distance from stable matrices to unstable matrices set (Charles Van Loan) which are connected with spectral portrait of a matrix. Beginning with extremal quadratic Lyapunov functions [4] a quality of stability parameter $\kappa(A)$ was suggested in [5]. For Hurwitz matrices A and $S = S^T$ the following inequalities are true

$$\|e^{tA}\| \le \sqrt{\kappa(A)}e^{-t\frac{\|A\|}{\kappa(A)}},$$

$$\|e^{tS}\| \le e^{-t\frac{\|S\|}{\kappa(S)}}.$$

There exists an algorithm with guaranteed accuracy for computing $\kappa(A)$ [6]. This parameter has also a physical interpretation which was found by S. K. Godunov [7].

REFERENCES

1. *Godunov S. K.,* Modern Aspects of Linear Algebra, AMS, Providence (1998).
2. *Bulgak H., Eminov D.,* “Computer dialogue system MVC,” Selcuk J. Appl. Math., **2**, No. 2, 17–38 (2001).
3. *Bulgak A. S.,* “An algorithm for testing the practical regularity of interval matrices” (Russian), Sib. Zh. Vychisl. Mat., **6**, No. 1, 17–23 (2003).
4. *Sarybekov R. A.,* “Extremal quadratic Lyapunov functions of systems of second-order equations,” Sib. Math. J., **18**, 823–829 (1978).
5. *Bulgakov A. Ya.,* “An effectively calculable parameter for the stability quality of systems of linear differential equations with constant coefficients,” Sib. Math. J., **21**, 339–347 (1981).
6. *Bulgak(ov) A. Ya.,* Matrix Computations with Guaranteed Accuracy in Stability Theory, Selcuk University Press, Konya (1995).
7. *Godounov S. K., Boulgakov A. J.,* “Difficultes calculatives dans le probleme de Hurwitz et methodes pour les surmonter (aspect calculatif du probleme Hurwitz)” (French), Lect. Notes Control Inf. Sci., **44**, 846–851 (1982).

ON ALL-REGIME AND WELL-BALANCED LAGRANGE-PROJECTION SCHEMES FOR COMPRESSIBLE FLUID SYSTEMS

Chalons C.

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Versailles, France;
christophe.chalons@uvsq.fr

It is the purpose of this talk to provide an overview on recent advances on the development of Lagrange-Projection like numerical schemes for compressible fluids systems. We will focus in particular on the design of all-regime strategies for low Mach number flows and on (fully) well-balanced schemes for shallow water equations.

SYMMETRY-PRESERVING AND POSITIVITY-PRESERVING LAGRANGIAN SCHEMES FOR COMPRESSIBLE MULTI-MATERIAL FLUID FLOWS

Cheng J.

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China;
cheng_juan@iapcm.ac.cn

In applications such as astrophysics and inertial confinement fusion, there are many three-dimensional cylindrical-symmetric multi-material problems which are usually simulated by Lagrangian schemes in the two-dimensional cylindrical coordinates. For this type of simulation, the critical issues for the schemes include keeping positivity of physically positive variables such as density and internal energy and keeping spherical symmetry in the cylindrical coordinate system if the original physical problem has this symmetry. In this talk, I will introduce our recent work on high order positivity-preserving and symmetry-preserving conservative Lagrangian schemes solving compressible Euler equations. The properties of positivity-preserving and symmetry-preserving are proven rigorously. One- and two-dimensional numerical results are provided to verify the designed characteristics of these schemes.

LAGRANGIAN GODUNOV'S NUMERICAL SCHEMES

Després B.[1,2]

[1] *Sorbonne Université, Paris, France;*
[2] *Institut Universitaire de France, France;*
bruno.despres@sorbonne-universite.fr

This presentation will focus on Godunov's numerical schemes for Lagrangian compressible gas dynamics. Professor Godunov's scientific influence in France started very early, in particular with celebrated works translated in French such as [1]. The proceedings of the Saint Etienne conference [2] were also very influential.

There has been constant efforts in France to adapt and use Godunov's Lagrangian schemes for numerical calculations. Two aspects will be evoked. The first aspect is how Lagrangian numerical schemes can be used in combination with the entropy principle to get families of entropy stable numerical methods for models ranging between non viscous compressible gas dynamics to ideal magnetohydrodynamics. These schemes allow an easy extension to complex physics, and the structure is ultimately the one of an Eulerian scheme on fixed grid. The second aspect is why and how a strong modification of Godunov's seminal principles has been recently investigated [3] in order to use linearized Riemann solvers on moving Lagrangian grids (translated in "maillages ottants" in [1]). The idea was to solve a problem already addressed in [1] by defining Lagrangian uxes at nodes, and not at edges. It solves the geometrical problem on general grids, and is now extended in many directions [4].

The author thanks CEA for support.

REFERENCES

1. *Godunov S. K., Zabrodine A., Ivanov M., Kraiko A., Prokopov G.,* Résolution numérique des problèmes ultidimensionnels de la dynamique de gaz, Mir, Moscou (1979).
2. *Godunov S. K.,* "Lois de conservation et intégrales d'énergie des équations hyperboliques," in: Nonlinear Hyperbolic Problems, Springer-Verlag, 1986, pp. 135–149.
3. *Després B., Mazeran C.,* Symmetrization of Lagrangian gas dynamics and multi-dimensional solvers, Comptes Rendus Académie des Sciences en Mécanique, Paris (2003).
4. *Després B.,* Numerical Methods for Eulerian and Lagrangian Conservation Laws, Springer, Birkhauser (2017).

STRUCTURE-PRESERVING SEMI-IMPLICIT SCHEMES FOR CONTINUUM MECHANICS

Dumbser M.[1], **Boscheri W.**[2], **Ioriatti M.**[1], **Peshkov I.M.**[3], **Romenski E.I.**[1,3]

[1] *University of Trento, Trento, Italy;* michael.dumbser@unitn.it
[2] *University of Ferrara, Ferrara, Italy;* walter.boscheri@unife.it
[3] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* evrom@math.nsc.ru

In this talk, we present a new class of structure-preserving semi-implicit schemes for the unified first order hyperbolic model of Newtonian continuum mechanics proposed by Godunov, Peshkov and Romenski (GPR). The GPR model is a geometric approach to continuum mechanics, which is able to describe the behavior of moving elasto-plastic solids as well as viscous and inviscid fluids within one and the same governing PDE system. This is achieved via appropriate relaxation source terms in the evolution equations for the distortion field and the thermal impulse. In previous work it has already been shown that the GPR model reduces to the compressible Navier–Stokes equations in the stiff relaxation limit when the relaxation times tend to zero. The governing PDE system belongs to the class of symmetric hyperbolic and thermodynamically compatible systems (SHTC), which have been studied for the first time by Godunov in 1961 and later in a series of papers by Godunov and Romenski. An important feature of the proposed model is that the propagation speeds of all physical processes, including dissipative processes, are finite.

In the absence of source terms, the homogeneous part of the GPR model is endowed with some natural involutions, namely the distortion field A and the thermal impulse J need to remain curl-free. In this talk we present a new structure-preserving scheme that is able to preserve the curl-free property of both fields exactly also on the discrete level. This is achieved via the definition of appropriate and compatible discrete gradient and curl operators on a judiciously chosen staggered grid. Furthermore, the pressure terms are discretized implicitly in order to capture the low Mach number limit of the equations properly, while all other terms are discretized explicitly. In this manner, the resulting pressure system is symmetric and positive definite and can be solved with efficient iterative solvers like the conjugate gradient method. Last but not least, the new staggered semi-implicit scheme is also able to reproduce the stiff relaxation limit of the governing PDE system properly, recovering an appropriate discretization of the compressible Navier–Stokes equations. To the best of our knowledge, this is the first pressure-based semi-implicit scheme for nonlinear continuum mechanics that is able to preserve all involutions and asymptotic limits of the original governing PDE system also on the discrete level. Computational results for several test cases are presented in order to illustrate the performance of the new scheme.

REFERENCES

1. *Godunov S. K.,* “An interesting class of quasilinear systems,” Dokl. Akad. Nauk SSSR, **139**, 521–523 (1961).
2. *Godunov S. K., Romenski E.,* “Nonstationary equations of nonlinear elasticity theory in Eulerian coordinates,” J. Appl. Mech. Tech. Phys., **13**, 868–884 (1972).
3. *Peshkov I., Romenski E.,* “A hyperbolic model for viscous Newtonian flows,” Contin. Mech. Thermodyn., **28**, 85–104 (2016).
4. *Dumbser M., Peshkov I., Romenski E., Zanotti O.,* “High order ADER schemes for a unified first order hyperbolic formulation of continuum mechanics: viscous heat-conducting fluids and elastic solids,” J. Comput. Phys., **314**, 824–862 (2016).

MODELLING SODIUM COMBUSTION WITH LIQUID WATER

Furfaro D.[1], **Saurel R.**[1,2], **David L.**[3], **Beauchamp F.**[3]

[1] *RS2N, Saint-Zacharie, France;* Damien.Furfaro@rs2n.eu
[2] *Aix-Marseille University, Marseille, France;* Richard.Saurel@univ-amu.fr
[3] *CEA Cadarache, Saint-Paul-lez-Durance, France;*
Lucas.David@cea.fr, Francois.Beauchamp@cea.fr

Solid and liquid sodium combustion with liquid water occurs through a thin gas layer where exothermic reactions happen with sodium and water vapors. It thus involves multiple interfaces separating liquid and gas in the presence of surface tension, phase transition and surface reactions. The gas phase reaction involves compressible effects resulting in possible shock wave appearance in both gas and liquid phases. To understand and predict the complexity of sodium combustion with water a diffuse interface flow model is built. This formulation enables flow resolution in multidimension in the presence of complex motion, such as for example Leidenfrost-type thermo-chemical flow. More precisely sodium drop autonomous motion on the liquid surface is computed. Various modelling and numerical issues are present and addressed in the present contribution. In the author's knowledge, the first computed results of such type of combustion phenomenon in multidimensions are presented in this paper thanks to the diffuse interface approach. Explosion phenomenon is addressed as well and is reproduced at least qualitatively thanks to extra ingredients such as turbulent mixing of sodium and water vapors in the gas film and delayed ignition. Shock wave emission from the thermo-chemical Leidenfrost-type flow is observed as reported in related experiments.

GODUNOV APPROACH IN VISCO-PLASTICITY: APPLICATION TO HIGH-VELOCITY IMPACT PROBLEMS

Gavrilyuk S.

Aix-Marseille University, Marseille, France; sergey.gavrilyuk@univ-amu.fr

A mathematical model for an arbitrary number of interacting hyperelastic solids undergoing large elastic-plastic deformations is derived. The description of such a multicomponent "solid mixture" is based on the Eulerian formulation of visco-plastic solids proposed by S. K. Godunov in his famous book "Elements of Mechanics of Continuous Media" published in 1978 (the extended version was co-authored with E. I. Romenski). The specific energy of each solid is given in separable form: it is the sum of a hydrodynamic part of the energy depending only on the density and entropy, and an elastic part of the energy which is unaffected by the volume change. In particular, it allows us to naturally pass to the fluid description in the limit of vanishing shear modulus [1–3].

The Eulerian numerical method, called diffuse interface method, is developed. The method considers the interface cells as an artificial mixture zones through which the interface conditions must be satisfied. Thus, the interface between a solid and a fluid is a diffuse zone, but this diffusion is negligible for a short time interval. The boundary conditions at the interfaces are included naturally in the model formulation. In spite of a large number of governing equations ($15 \times N$, where N is the number of solids), the model has a quite simple mathematical structure: it is a duplication of a single visco-plastic model. The model is well posed both mathematically and thermodynamically: it is hyperbolic and compatible with the second law of thermodynamics.

This is a joint work with N. Favrie, S. Hank, S. Ndanou and J. Massoni [4].

REFERENCES

1. *Ndanou S., Favrie N., Gavrilyuk S.,* "Criterion of hyperbolicity in hyperelasticity in the case of the stored energy in separable form," J. Elasticity, **115**, 1–25 (2014).
2. *Ndanou S., Favrie N., Gavrilyuk S.,* "Multi-solid and multi-fluid diffuse interface model: applications to dynamic fracture and fragmentation," J. Comput. Phys., **295**, 523–555 (2015).
3. *Gavrilyuk S., Ndanou S., Hank S.,* "An example of a one-parameter family of rank-one convex stored energies for isotropic compressible solids," J. Elasticity, **124**, 133–141 (2016).
4. *Hank S., Gavrilyuk S., Favrie N., Massoni J.,* "Impact simulation by an Eulerian model for interaction of multiple elastic-plastic solids and fluids," Int. J. Impact Eng., **109**, 104–111 (2017).

AN OPTIMIZATION METHOD FOR FEEDBACK STABILIZATION OF LINEAR DELAY SYSTEMS

Hu G.[1], **Hu R.**[2]

[1] *Shanghai University, Shanghai, China;* ghu@hit.edu.cn
[2] *University of Science and Technology Beijing, Beijing, China;* s20180571@xs.ustb.edu.cn

This talk is concerned with feedback stabilization of linear delay systems described by

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^{m} A_j x(t-\tau_j) + Bu(t), \tag{1}$$

where constant matrices $A_0, A_j \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B \in \mathbb{R}^{d\times p}$, $x(t) \in \mathbb{R}^d$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, and $\tau_j > 0$ for $j = 1, \dots, m$. Let controller $u(t) = K_0 x(t) + \sum_{j=1}^{m} K_j x(t-\tau_j)$, where constant feedback gain matrices $K_0, K_j \in \mathbb{R}^{p\times d}, j = 1 \dots, m$. The closed-loop system is

$$\dot{x}(t) = (A_0 + BK_0)x(t) + \sum_{j=1}^{m}(A_j + BK_j)x(t-\tau_j). \tag{2}$$

Our aim is to seek feedback gain matrices such that the closed-loop system (2) is asymptotically stable. Let vector $\vec{K}$ is formed by "stacking" the columns of the compound matrix $[K_0, K_1, \dots, K_m]$ into one long vector. The state transition matrix [1] of the closed-loop system is denoted by $F[\vec{K}, t] \in \mathbb{R}^{d\times d}$ which satisfies (2). We try solving the feedback stabilization of system (1) via the following optimization problem:

$$\min_{\vec{K}} \int_0^T ||F[\vec{K}, \sigma]||^2 d\sigma + ||\vec{K}||^2, \tag{3}$$

subject to the equations of the state transition matrix,

where T is a sufficient large positive constant and $||\cdot||$ stands for the $Frobenius$ norm.

By discretization, the optimization problem (3) with the equations of the state transition matrix is reduced to a nonlinear minimization one with equality constraints. Then a numerical optimization algorithm with a stability criterion [2] is presented. The effectiveness of the algorithm is interpreted by a theoretical result and numerical examples.

REFERENCES

1. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.*, Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York (1993).
2. *Hu G. D., Liu M.*, "Stability criteria of linear neutral systems with multiple delays," IEEE Trans. Autom. Control," **52**, No. 4, 720–724 (2007).

ON THE APPROXIMATION ORDER OF GENERALIZED GODUNOV SCHEMES

Iske A.

University of Hamburg, Hamburg, Germany; armin.iske@uni-hamburg.de

We study analytical properties of the Toro–Titarev solver for generalized Riemann problems (GRPs), which is the heart of the flux computation in ADER generalized Godunov schemes. In particular, we compare the Toro–Titarev solver with a local asymptotic expansion developed by LeFloch and Raviart. We show that for non-linear scalar problems in 1D the Toro–Titarev solver reproduces the truncated Taylor series expansion of LeFloch–Raviart exactly, whereas for nonlinear systems the Toro–Titarev solver introduces an error whose size depends on the height of the jump in the initial data. Thereby, our analysis answers open questions concerning the justification of simplifying steps in the Toro–Titarev solver. For further illustration, we discuss numerical results concerning shallow water equations and a system from traffic flow.

This talk is based on joint work with Claus R. Goetz [1].

REFERENCES

1. *Goetz C. R., Iske A.*, "Approximate solutions of generalized Riemann problems for non-linear systems of hyperbolic conservation laws," Math. Comput., **85**, 35–62 (2016).

RELAXATION-PROJECTION SCHEMES, ARE THEY THE ULTIMATE APPROXIMATE RIEMANN SOLVERS?

Klingenberg C.

University of Würzburg, Würzburg, Germany;
klingen@mathematik.uni-wuerzburg.de

An approximate Riemann solver was developed in Paris by Frederic Coquel and co-workers around the rurn of the century, see e.g. [1, 3]. It is inspired by an idea of Shi Jin and Zhoupiing Xin, where the solutions to a system of conservation laws are approximated by a particularly straightforward way to find a corresponding relaxation system. The ensuing French idea was two-fold:

- find a particularly clever relaxation system that approximates a given system of conservation laws,
- translate this into a numerical scheme by transporting the left hand side of the relaxation system and then projecting the thus found solution to the equilibrium variables.

We shall show how this leads to approximate Riemann solvers with good properties, like stability and entropy consistency, which implies positivity of density and temperature for the Euler and ideal MHD equations, see e.g. [2, 4–6].

REFERENCES

1. *Bouchut F.*, Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws, and Well-Balanced Schemes for Sources, Frontiers in Mathematics Series, Birkhäuser (2004).
2. *Bouchut F., Klingenberg C., Waagan K.*, "A multiwave approximate Riemann solver for ideal MHD based on relaxation. I. Theoretical framework," Numer. Math., **108**, 7–42 (2007).
3. *Coquel F., Godlewski E., In A., Perthame B., Rascle P.*, "Some new Godunov and relaxation methods for two-phase flow problems," in: Proceedings of the International conference on Godunov methods: Theory and Applications, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001, pp. 179–188.
4. *Desveaux V., Zenk M., Berthon C., Klingenberg C.*, "A well-balanced scheme to capture non-explicit steady states in the Euler equations with gravity," Int. J. Numer. Methods Fluids, **81**, No. 2, 104–127 (2016).
5. *Thomann A., Zenk M., Klingenberg C.*, "A second order well-balanced finite volume scheme for Euler equations with gravity for arbitrary hydrostatic equilibria," Int. J. Numer. Methods Fluids, **89**, 465–482 (2019).
6. *Berthon C., Klingenberg C., Zenk M.*, "An all Mach number relaxation upwind scheme," submitted (2019), http://tinyurl.com/yxlhnqec

HIGHER-ACCURACY EDGE-BASED SCHEMES FOR UNSTRUCTURED MESHES AND THEIR RECENT APPLICATIONS

Kozubskaya T. K.

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia;
kozubskaya@imamod.ru

We present an overview of the Edge-Based Reconstruction (EBR) Schemes for solving the Euler equations on unstructured meshes [1] and give some recent examples of using these schemes for applied aerodynamics and aeroacoustics problems. The EBR schemes possess higher accuracy as compared with the traditional finite-volume second-order methods at lower costs as compared with the very high order algorithms. The higher accuracy is provided thanks to the quasi-1D reconstruction of variables on the extended edge-oriented stencils on unstructured meshes so that in the case of a uniform grid-like mesh (i.e. the mesh translationally invariant to its each edge), the EBR schemes reduce to the high-order finite difference method. The lower costs result from the quasi-1D nature of these schemes. The EBR schemes have been extended to hybrid unstructured meshes and equipped with the WENO and TVD shock-capturing techniques [2]. They have been implemented for interface regions of sliding meshes and are being adapted to prismatic boundary layers within the strand-mesh technology. The schemes are used for scale-resolving RANS-LES simulations of complex turbulent flows and associated acoustic far fields calculated by the integral Ffowcs Williams Hawkings method.

In the paper we show some recent numerical results. In particular, we predict the noise generated by the turbulent subsonic ($M = 0.9$) and hot under-expanded jets [3], and by the turbulent flow over the three-component airfoil (30P30N model) [4]. We simulate the separated flow over the 3D inclined backstep at the transonic regimes, the supersonic flow over the cylinder base, the dual-stream nozzle jet. We study numerically the aerodynamic and acoustic characteristics of helicopter rotors [5] and start actively considering the moving bodies [6].

The work is supported by the Russian Science Foundation (project 16-11-10350).

REFERENCES

1. *Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T.*, “Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes,” Int. J. Numer. Methods Fluids, **81**, No. 6, 331–356 (2016).
2. *Bakhvalov P. A., Kozubskaya T. K.*, “EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes,” Comput. Fluids, **157**, 312–324 (2017).
3. *Duben A. P., Kozubskaya T. K.*, “Jet noise simulation using quasi-1D schemes on unstructured meshes,” in: 23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2017-3856, 1–13 (2017).
4. *Bobkov V., Gorobets A., Duben A., Kozubskaya T., Tsvetkova V.*, “Towards affordable CAA simulations of airliner’s wings with deployed high-lift devices,” in: Book of abstracts of the 5th International workshop “Computational Experiment in Aeroacoustics,” Svetlogorsk, Russia, September 19–22, 2018, pp. 36–37.
5. *Abalakin I. V., Anikin V. A., Bakhvalov P. A., Bobkov V. G., Kozubskaya T. K.*, “Numerical investigation of the aerodynamic and acoustical properties of a shrouded rotor,” Fluid Dyn., **51**, No. 3, 419–433 (2016).
6. *Zhdanova N. S., Abalakin I. V., Kozubskaya T. K.*, “Immersed boundary penalty method for compressible flows over moving obstacles,” in: Proceedings of ECCM 6/ECFD 7, Glasgow, UK, June 11–15, 2018, p. 1797.

A SHARP INTERFACE APPROACH FOR COMPRESSIBLE MULTIPHASE FLOW

Munz C.-D.[1], **Jöns S.**[2], **Hitz T.**[3]

University of Stuttgart, Institute of Aerodynamics and Gas Dynamics, Stuttgart, Germany;
[1]munz@iag.uni-stuttgart.de, [2]joens@iag.uni-stuttgart.de,
[3]hitz@iag.uni-stuttgart.de

The numerical simulation of compressible multiphase flow is a difficult task due to the close connection of thermodynamics and fluid dynamics. Our approach is based on a sharp interface treatment. The two phases are coupled by a ghost fluid method to avoid a mixing of the phases. To obtain information about the location of the interface a level-set equation is applied. The bulk flows are approximated by a spectral element discontinuous Galerkin scheme for the Navier–Stokes equations that supports a general equation of state. To get values in the ghost-fluid cells for the coupling of the two phases, and to determine the propagation velocity of the phase front for the level set equation, we solve the multi-phase Riemann problem to determine the phase front velocity and to get the values at the phase interface from both sides, the liquid and the gas flow [1].

The focus of the talk will be the solution of the multi-phase Riemann problem itself. Two novel aspects of our current work are discussed in more detail. We discuss first the solution of the multiphase Riemann problem solution for the Euler equations. We depict an equation of state that is similar to the van der Waals equation of state and is based on the Lennard–Jones model fluid with truncated and shifted potential [2]. This allows comparing the macroscopic solution of the Riemann problem with molecular dynamics simulations based on the corresponding Lennard–Jones model fluid and establishes a clear connection of both simulations. We present our first results for the supercritical regime and for expansion waves into vacuum, which allow simpler microscopic simulations. Here, the MD simulations show a clustering of molecules that can be interpreted as a starting of droplet formation due to the strong pressure drop.

The multiphase Riemann problem solution may strongly depend on heat conduction to balance the latent heat. Hence, we look in the second part for an extension of our Riemann problem solution to include heat conduction. We propose a novel calculation of the numerical flux based on the generalized Riemann problem for advection diffusion problems. This approach is explained for a scalar conservation law.

The authors were supported by the DFG within the Collaborative Research Center “Droplet Dynamics Under Extreme Ambient Conditions”.

REFERENCES

1. *Fechter S., Munz C.-D., Rohde C., Zeiler C.*, “A sharp interface method for compressible liquid-vapor flow with phase transition and surface tension,” J. Comput. Phys., **336**, 347–374 (2017).
2. *Thol M., Rutkai G., Span R., Vrabec J., Lustig R.*, “Equation of state for the Lennard–Jones truncated and shifted model fluid,” Int. J. Thermophys., **36**, 25–43 (2015).

WELL-BALANCED HIGH-ORDER METHODS FOR SYSTEMS OF BALANCE LAWS

Parés C.[1], Castro M. J.[2], Gómez-Bueno I.[3]

University of Málaga, Málaga, Spain;
[1]`pares@uma.es`, [2]`mjcastro@uma.es`, [3]`igomezbueno@gmail.com`

We introduce a family of well-balanced high-order numerical methods for 1d systems of balance laws

$$U_t + F(U)_x = S(U)H_x,$$

where $U(x,t)$ takes value in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^N$ is the flux flunction, $S : \Omega \mapsto \mathbb{R}^N$, and H is a known function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ (possibly the identity function $H(x) = x$). The methods are based on a first order numerical flux and a reconstruction operator, i.e. an operator that, given the cell averages of a function, provides high-order approximations of the function at the cells. This operator is said to be well-balanced for a stationary solution if the approximations at the cells provided by this operator from its cell averages are exact. The strategy to design well-balanced reconstructions operators introduced in [1] is applied.

The implementation of this strategy requires the computation, at every cell and at every time step, of the stationary solution whose cell average is equal to the numerical approximation already obtained. Since solving these problems can be difficult and expensive, we introduce some optimization techniques to rewrite them as control problems that are numerically solved.

The more difficult case of source terms involving a function H which is discontinuous is also addressed: the Generalized Hydrostatic Reconstruction introduced in [2] is used to discretize the discontinuities related to the discontinuities of H.

The schemes are applied to the Burgers' equation with a nonlinear source term, the shallow water equations, and the Euler equations with gravitational forces: some numerical tests will be shown to illustrate the behaviour of the numerical methods.

REFERENCES

1. *Castro M. J., Gallardo J. M., López J. A., Parés C.*, "Well-balanced high order extensions of Godunov method for linear balance laws," SIAM J. Numer. Anal., **46**, 1012–1039 (2008).
2. *Castro M. J., Pardo A., Parés C.*, "Well-balanced numerical schemes based on a generalized hydrostatic reconstruction technique," Math. Models Methods Appl. Sci., **17**, 2055–2113 (2007).

A METHOD OF BOUNDARY EQUATIONS FOR UNSTEADY HYPERBOLIC PROBLEMS IN 3D

Petropavlovsky S. V.[1], **Tsynkov S. V.**[2], **Turkel E.**[3]

[1] *National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia;* spetropavlovsky@gmail.com
[2] *North Carolina State University, Raleigh, USA;* tsynkov@math.ncsu.edu
[3] *Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel;* turkel@post.tau.ac.il

We discuss the interior and exterior initial boundary value problems for the three-dimensional wave (d'Alembert) equation. First, a given problem is reduced to an equivalent operator equation with respect to the unknown sources defined only at the boundary of the original domain. By applying the Huygens' principle, we obtain the operator equation in a form that involves only finite and non-increasing pre-history of the solution in time. Then, the resulting boundary operator equation is discretized and solved by the method of difference potentials [1]. The overall numerical algorithm enables high order accuracy while allowing for non-conforming boundaries to be handled on regular structured grids. For long simulation times, it offers sub-linear complexity with respect to the grid dimension, i.e., is asymptotically cheaper than the cost of a typical explicit scheme. In addition, on multi-processor (or multi-core) platforms, the algorithm benefits from parallelization in time [2].

As the time of presentation permits, we may also address the initial aspects of generalization to systems.

Work supported by the US Army Research Office (ARO) under grant # W911NF-16-1-0115, and by the US–Israel Binational Science Foundation (BSF) under grant # 2014048.

REFERENCES

1. *Ryaben'kii V. S.,* Method of Difference Potentials and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin (2002).
2. *Petropavlovsky S., Tsynkov S., Turkel E.,* "A method of boundary equations for unsteady hyperbolic problems in 3D," J. Comput. Phys., **365**, 294–323 (2018).

PROBLEMS OF NUMERICAL MODELING OF NATURAL AND ANTHROPOGENIC PROCESSES IN THE ARCTIC ZONE OF THE RUSSIAN FEDERATION

Petrov I. B.

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia;
petrov@mipt.ru

In this work questions of numerical modeling of dynamic problems of the Arctic zone on high-performance computing systems are considered. The physical sizes of field of integration in such tasks can reach tens and hundreds of kilometers. For correct modeling of distribution wave indignations on such distances, high-precision numerical methods taking into account wave properties of the solvable equations and also a possibility of modeling of difficult dynamic processes in non-uniform geological environments with a set of contact and free borders are required. As such numerical method in work the net and characteristic method to the numerical solution of systems of the equations of mechanics of a deformable solid body is used. This method was already applied to some problems of seismicity in two-dimensional and three-dimensional cases. This method was already applied to some problems of seismicity in two-dimensional case, in this work modeling was carried out in three-dimensional statement. We mark that the grid and characteristic method was successfully tested for the numerical decision of tasks in such fields of applied science as hydroaerodynamics, dynamics of plasma, the mechanic of a deformable solid body and corrupting, computing medicine. Examples of its application are described in different appendices in operation.

DESIGNING CFD ALGORITHMS FOR BANDWIDTH

Roe P. L.

University of Michigan, Ann Arbor, USA; philroe@umich.edu

For more than two decades there has been intense research devoted to devising "high-order" methods for Computational Fluid Dynamics. By this it is usually meant that some measure of the error can be written as

$$\epsilon = Ch^p \partial^p \mathbf{u}$$

with $p \geq 3$. However, accuracy itself is not always achievable; there are uncertainties in the material properties, the geometry, or even in the governing equations. Instead, accuracy is often used as a proxy for more practical objectives such as robustness and the ability to obtain acceptable answers on affordable grids. However, these are high frequency issues. Although accuracy is more amenable to mathematical analysis it is a low-frequency property.

In his celebrated 1959 paper [1], Sergei Godunov opened a pathway to the incorporation of realistic physics into CFD methods. All previous workers had focused on using "difference schemes" to approximate the evolution operator. Instead, he approximated the data and put it into a form where the exact evolution operator could be applied to it. For the compressible Euler equations in one space dimension, the data was made piecewise constant and the exact evolution was provided by solving the Riemann problem. In 1977, van Leer [2] applied the same concept to one-dimensional linear advection for a variety of piecewise-polynomial data representations. These two papers still form the foundation of many CFD methods.

However, few realistic multi-dimensional problems are purely advective, and acoustic behavior, for example, is quite different, being isotropic and subject to focussing and decay. Multidimensional acoustic behavior can be introduced via the exact solution of the scalar wave equation presented by Poisson [3] in 1818. This can be applied to nonlinear acoustics in first-order form [4], and to the full compressible Euler equations by operator-splitting. Excellent results are obtained on arbitrary unstructured grids. The appropriate incorporation of physics is reflected in superior symmetry properties and natural boundary conditions.

REFERENCES

1. *Godunov S. K.*, "A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics" (Russian), Mat. Sb., N. Ser., **47(89)**, No. 3, 271–306 (1959).
2. *Van Leer B.*, "Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection," J. Comput. Phys., **17**, No. 7, 276–299 (1977).
3. *Poisson S. D.*, "Memoire sur la theorie des ondes," Mem. Acad. R. Sci. Inst. France, **2**, 70–186 (1818).
4. *Fan D., Roe P. L.*, "Investigations of a new scheme for wave propagation," in: 22nd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 2015-2449, 1–10 (2015).

GODUNOV SYMMETRIC SYSTEMS AND RATIONAL EXTENDED THERMODYNAMICS

Ruggeri T.

University of Bologna, Bologna, Italy; tommaso.ruggeri@unibo.it

In many physical systems, one encounters situations where phenomena occur at different scales. An example is the modeling of a rarefied gas at varying Knudsen number (Kn). Large Kn is where Boltzmann equation is the most appropriate model while, for small Kn, one can obtain Euler or the Navier–Stokes–Fourier system. At intermediate regimes, using the mathematical methods of Rational Extended Thermodynamics (RET), one can obtain the closure of moments system associated with the Boltzmann equation and the differential system becomes Godunov symmetric system.

We present in this talk some recent results and some open problems on RET both for monatomic and polyatomic gases.

REFERENCES

1. *Mueller I., Ruggeri T.,* Rational Extended Thermodynamics, Springer; first edition (1993); second edition (1998).
2. *Ruggeri T., Sugiyama M.,* Rational Extended Thermodynamics beyond the Monatomic Gas, Springer (2015).

HIGH ORDER CONSERVATIVE SEMI-LAGRANGIAN AP SCHEMES FOR THE BGK MODEL

Russo G.[1], Boscarino S.[2], Yun S.-B.[3], Cho S.-Y.[4]

[1] *University of Catania, Catania, Italy;* russo@dmi.unict.it
[2] *University of Catania, Catania, Italy;* boscarino@dmi.unict.it
[3] *Sungkyunkwan University, Seoul, Republic of Korea;* sbyun01@skku.edu
[4] *Sungkyunkwan University, Seoul, Republic of Korea;* chosy89@skku.edu

In this talk we present two approaches for the construction of conservative semi-Lagrangian schemes for the BGK model of the Boltzmann equation of rarefied gas dynamics. Semi-Lagrangian schemes are very attractive since they overcome CFL-type stability restrictions on the time step induced by the advection term. Furthermore, the use of L-stable time discretization for the collision term avoids the time step to be limited by the collision time, and allows, in principle, the construction of Asymptotic Preserving (AP) schemes that are able to capture the underlying fluid dynamic limit of the kinetic model for vanishing Knudsen number. High accuracy in space may be obtained by suitable high order non oscillatory reconstructions, while high order in time is guaranteed by Runge–Kutta (RK) or Backward Difference Formulas (BDF).

In order to construct AP schemes, it is important that the scheme maintains conservation at a discrete level, so that for small Knudsen number it becomes a shock capturing scheme for the Euler limit.

Classical semi-Lagrangian schemes are observed to lose conservation at a discrete level. Lack of conservation is due to two main causes: the use of continuous Maxwellian and the non-linear weights in the reconstruction. The first problem is solved by adopting discrete Maxwellian, which allows exact conservation of the collision step even with a small number of grid points in velocity space. To solve the second problem we propose two different techniques: a conservative correction (CC) and a conservative reconstruction (CR). In the first technique, a non conservative high order predictor is computed by a classical semi-Lagrangian method. This predictor is then used to compute the fluxes of a conservative scheme. This approach is very general, and allows conservation to be maintained to machine precision. It can be applied to other contexts, such as the Vlasov–Poisson system and the incompressible Euler equations [1], or to classical and relativistic gas dynamics [2]. Its application to the BGK model has been recently submitted [3]. The second technique is based on a new conservative reconstruction, which allows to produce conservative semi-Lagrangian schemes which do not suffer from stability restrictions, and which are AP with respect to the fluid dynamic limit. Several numerical tests in one and two space dimensions will be shown, which illustrate the accuracy properties of the schemes for various Knudsen numbers, and their conservation properties and shock capturing capability in the Euler limit.

REFERENCES

1. *Xiong T., Russo G., Qiu J. M.*, "High order multi-dimensional characteristics tracing for the incompressible Euler equation and the guiding-center Vlasov equation," J. Sci. Comput., **77**, No. 1, 263–282 (2018).
2. *Pidatella R. M., Puppo G., Russo G., Santagati P.*, "Semi-conservative finite volume schemes for conservation laws," SIAM J. Sci. Comput., accepted.
3. *Boscarino S., Cho S.-Y., Russo G., Yun S.-B.*, "High order conservative semi-Lagrangian scheme for the BGK model of the Boltzmann equation," submitted.

DIVERGENCE-FREE POSITIVE TENSORS AND APPLICATIONS TO FLUID MECHANICS

Serre D.

Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France; denis.serre@ens-lyon.fr

Many situations in Mathematical Physics exhibit a structure that has been overlooked so far. A symmetric tensor is non-negative and row-wise divergence-free. These properties imply an enhanced integrability of the determinant. When applied to various models of fluid mechanics, this yields new a priori estimates under the assumption that the mass and energy are finite.

BOUND-PRESERVING HIGH ORDER SCHEMES FOR HYPERBOLIC EQUATIONS: SURVEY AND RECENT DEVELOPMENTS

Shu Ch.-W.

Brown University, Providence, USA; shu@dam.brown.edu

Solutions to many hyperbolic equations have convex invariant regions, for example solutions to scalar conservation laws satisfy maximum principle, solutions to compressible Euler equations satisfy positivity-preserving property for density and internal energy, etc. It is however a challenge to design schemes whose solutions also honor such invariant regions. This is especially the case for high order accurate schemes. In this talk we will first survey strategies in the literature to design high order bound-preserving schemes, including the general framework in constructing high order bound-preserving finite volume and discontinuous Galerkin schemes for scalar and systems of hyperbolic equations through a simple scaling limiter and a convex combination argument based on first order bound-preserving building blocks, and various flux limiters to design high order bound-preserving finite difference schemes. We will then discuss a few recent developments, including high order bound-preserving schemes for relativistic hydrodynamics, high order discontinuous Galerkin Lagrangian schemes, high order discontinuous Galerkin methods for radiative transfer equations, high order discontinuous Galerkin methods for MHD, and implicit bound-preserving schemes. Numerical tests demonstrating the good performance of these schemes will be reported.

MOVING COORDINATE METHOD AND ITS APPLICATIONS

Takakura Y.

Tokai University, Hiratsuka, Japan; takakura@tokai-u.jp

Unsteady flows about a moving body are computed numerically with the body moving in most methods. On the contrary, in the moving-coordinate method presented by the author [1, 2], the coordinate system is fixed to the individual moving body, where each moving body stands still with the corresponding grid stationary. The advantages of the moving-coordinate method are that the boundary conditions become almost the same as those when the object is at rest, and that troubles of grid generation and occurrence of the error due to the object movement disappear, and therefore the effect is considered remarkable at the long distance travel.

In the early moving-coordinate method [1], each accelerating frame for the corresponding grid domain had only translational velocity relative to the inertial frame, and further in [2] it was extended to have relative velocity for translation and rotation. By this generalization, it became possible to numerically compute flow-fields about an object with arbitrary motion by the moving-coordinate method.

In this lecture, the followings will be shown:

1) The governing equations of the moving-coordinate method with exchange formulae of momentum and energy between the accelerating frame and the inertial frame. Although in the continuum mechanics, the formula for momentum was shown by the classical physics [3], here that for energy was derived in order to apply the moving-coordinate methods to the compressible flows.

2) The governing equations of the moving-coordinate method in conservative form, derived from the those of the conservative form in general coordinate system in the inertial frame, through the ALE (Arbitrary Lagrangian–Eulerian) method.
Although those were derived in [4] in the special case with only the relative translation velocity included, here those were shown in general case with relative velocity for translation and rotation.

3) Applications:
a) Within an apparatus of ballistic range, when a flying projectile was injected from the launch tube by high pressure air, the interacting phenomena were numerically captured between the supersonic flow-field around the projectile and the blast wave from the launch tube, with prediction of flight velocity.
b) When a planetary probe reentered the atmosphere with a supersonic parachute opening, the two-dimensional flow-fields about simply modeled bodies were numerically captured, with prediction of flight velocity and trajectory.

REFERENCES

1. *Takakura Y., Higashino F., Ogawa S.,* “Unsteady flow computations on a flying projectile within a ballistic range,” Comput. Fluids, **27**, No. 5–6, 645–650 (1998).
2. *Nomura M., Takakura Y.,* “Highly-accurate computation of supersonic flows around a concave body (II. Motion analysis by moving-coordinate method),” ICCFD9 (9th International Conference on Computational Fluid Dynamics) Proceedings, ICCFD9–2016–326 (2016).
3. *Spurk J. H.,* “2.4 momentum and angular momentum in an accelerating frame,” in: Fluid Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1997, pp. 47–56.
4. *Takakura Y.,* “Methods for computing flows with moving boundaries: governing equations, geometric conservation laws and application of moving coordinate method” (Japanese), Comput. Fluid Dyn., **8**, No. 3, 117–129 (2000).

A NUMERICAL MODEL FOR COMPUTATIONS OF COMPRESSIBLE TURBULENT MIXING OF MISCIBLE FLUIDS

Thornber B.[1], Groom M.[1], Youngs D. L.[2]

[1] *University of Sydney, Sydney, Australia;* ben.thornber@sydney.edu.au
[2] *University of Strathclyde, Glasgow, United Kingdom;* david.youngs@strathclyde.ac.uk

Typical multispecies compressible Navier–Stokes computations employ conservative equations for mass fraction transport. However, it has been known for more than three decades that such discretizations produce unphysical oscillations when advecting a contact surface between two differing gases through a mesh.

The unphysical oscillations can be large relative to the background pressure, and cause three key undesirable effects, namely (i) spreading and diffusion of the contact surface, (ii) pollution of the pressure field in the solution which may mask weaker waves such as acoustics and (iii) slowing the convergence of the numerical solution.

In the inviscid, or multiphase, applications, this problem has been circumvented with the introduction of an additional quasi-conservative equation for volume fraction. This permits a closure for the mixture equation of state where the individual fluids are not assumed to have equal temperatures.

Following a similar philosophy, a system of equations may be developed which utilize quasi-conservative equations for number fraction transport which remove the spurious numerically generated oscillations, and are applicable to miscible fluids with diffusion, viscosity and heat conduction [1]. For zero viscosity, diffusivity and conductivity, this model is equivalent to the five-equation model for immiscible fluids, thus it is suitable for both sharp and diffuse interfaces.

The presentation will outline the derivation and thermodynamic closure of the resultant system of equations. A discretization is proposed, and the order of accuracy demonstrated for benchmark cases. In these test cases, the new model has between 2 and 10 times lower error for a given grid size. This represents an ≈ 40 times lower computational cost for an equivalent error in two-dimensional computations. Computations of mixing due to a Richtmyer–Meshkov instability will be presented as an application of the new model.

REFERENCES

1. *Thornber B., Groom M., Youngs D. L.* "A five-equation model for the simulation of miscible and viscous compressible fluids," J. Comput. Phys., **372**, 256–280 (2018).

NUMERICAL METHODS FOR MODEL KINETIC EQUATIONS AND THEIR APPLICATION TO EXTERNAL HIGH-SPEED FLOWS

Titarev V. A.

Federal Research Center “Computer Science and Control”, Moscow, Russia;
titarev@ccas.ru

During last ten years the author has been developing a discrete-velocity-type numerical method to solve model kinetic equation with the E. M. Shakhov collision integral [1] for three-dimensional flows [2, 3]. The method combines a high-order TVD advection scheme for arbitrary spatial meshes, unstructured mesh in velocity space with adaptation for high-speed flows and one-step LU-SGS implicit time evolution method. These features allow applications to industrial-type problems with complex geometries.

The numerical method is implemented into the software package “Nesvetay” developed by the author. The code is written in Fortran 2003 programming language. For the efficient use of modern parallel computers a two-level MPI+OpenMP parallel implementation of the numerical method with decomposition of both physical and velocity meshes has been developed and implemented. Usually, the velocity mesh is divided between MPI processes whereas the spatial mesh is split into block for the intra-node calculation with OpenMP. This allows good scalability up to 256 cluster nodes.

This presentation is a review of all recent developments of this numerical method for high-speed flows, which have been carried out by the author alone or with the collaborators from the Russian Academy of Sciences [4–6]. These developments primarily concern various studies of the stationary high-speed flows up to free-stream Mach number $M_\infty = 25$ as well as comparison of kinetic and direct simulation Monte-Carlo (DSMC) solutions. Possible extension to diatomic gases will also be discussed.

The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-08-00501). Calculations have been run on supercomputers, installed at Joint Supercomputing Center of the Russian Academy of Sciences and Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University. The author would also like to thank Dr. A. A. Frolova for many useful discussions.

REFERENCES

1. *Shakhov E. M.,* “Generalization of the Krook kinetic relaxation equation,” Fluid Dyn., **3**, No. 5, 95–96 (1968).
2. *Titarev V. A.,* “Implicit numerical method for computing three-dimensional rarefied gas flows using unstructured meshes,” Comput. Math. Math. Phys., **50**, No. 10, 1719–1733 (2010).
3. *Titarev V. A.,* “Efficient deterministic modelling of three-dimensional rarefied gas flows,” Commun. Comput. Phys., **12**, No. 1, 161–192 (2012).
4. *Titarev V. A.,* “Application of model kinetic equations to hypersonic rarefied gas flows,” Comput. Fluids, **169**, 62–70 (2018).
5. *Frolova A. A., Titarev V. A.,* “Recent progress on supercomputer modelling of high-speed rarefied gas flows using kinetic equations,” Supercomputing Frontiers and Innovations, **5**, No. 3, 117–121 (2018).
6. *Titarev V.A., Frolova A.A., Rykov V.A., Vashchenkov P.V., Shevyrin A.A., Bondar Ye.A.,* “Comparison of the Shakhov kinetic equation and DSMC method as applied to space vehicle aerothermodynamics,” J. Comput. Appl. Math., submitted.

GODUNOV METHODS

Toro E.

University of Trento, Trento, Italy; eleuterio.toro@unitn.it

I first briefly review the classical Godunov method [1–2] for solving hyperbolic conservation laws. Then I discuss the relationship between the Godunov scheme and other classical numerical methods, such as Glimm's method and the Lax–Friedrichs method. There follows a brief review of solvers for the classical Riemann problem to obtain the Godunov numerical flux [3].

To conclude I discuss possible extensions of the Godunov method to obtain high-order of accuracy, for smooth solutions, in both space and time. I focus on the ADER framework presented in Oxford in 1999, on occasion of Professor Godunov's 70th birthday [4–5], and subsequent developments in the last 20 years [6–7].

REFERENCES

1. *Godunov S. K.*, “A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics” (Russian), Mat. Sb., N. Ser., **47(89)**, No. 3, 271–306 (1959).
2. *Godunov S. K., Zabrodin A. V., Prokopov G. P.*, “A computational scheme for two-dimensional non stationary problems of gas dynamics and calculation of the flow from a shock wave approaching a stationary state,” USSR Comput. Math. Math. Phys., **1**, No. 4, 1187–1219 (1962).
3. *Toro E. F.*, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction, Springer, third edition (2009).
4. *Toro E. F., Millington R. C., Nejad L. A. M.*, “Towards very high-order Godunov schemes,” in: Godunov Methods, Springer, Boston, 2001, pp. 897–902.
5. *Toro E. F. (ed.)*, Godunov Methods: Theory and Applications, Springer (2001).
6. *Toro E. F., Titarev V. A.*, “Solution of the generalized Riemann problem for advection-reaction equations,” Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, **458**, 271–281 (2002).
7. *Dumbser M., Balsara D., Toro E. F., Munz C. D.*, “A unified framework for the construction of one-step finite-volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes,” J. Comput. Phys., **227**, 8209–8253 (2008).

SYSTEMS OF TWO-PHASE MIXTURE BALANCE LAWS WITH PHASE TRANSITIONS

Warnecke G.[1], **Hantke M.**[2], **Matern C.**[3]

[1] *Otto von Guericke University Magdeburg, Magdeburg, Germany;*
warnecke@ovgu.de
[2] *Martin Luther University of Halle-Wittenberg, Halle (Saale), Germany;*
maren.hantke@mathematik.uni-halle.de
[3] *Otto von Guericke University Magdeburg, Magdeburg, Germany;*
christoph.matern@ovgu.de

A model consisting of balance laws for two-phase mixture flows with phase transitions is considered. It was derived by averaging techniques. The model equations are first order systems of partial differential equations with source terms. They are weakly hyperbolic, i.e. they have real eigenvalues but not a full set of eigenvectors. After a short introduction of the model we consider sub-models. We consider an isothermal subsystem of conservation laws that is also weakly hyperbolic. A further difficulty is that real applications with gas and liquid flow need appropriate equations of state. What this means for the Riemann initial value problem is discussed in more detail in a talk given by Christoph Matern.

The work was supported by the DFG research training group GRK 1554 *Micro-Macro-Interactions in Structured Media and Particle Systems.*

REFERENCES

1. *Dreyer W., Hantke M., Warnecke G.*, "Bubbles in liquids with phase transition – part 2: on balance laws for mixture theories of disperse vapor bubbles in liquid with phase change," Contin. Mech. Thermodyn., **26**, 521–549 (2014).

SPURIOUS NUMERICS IN HIGH ORDER METHOD SIMULATIONS FOR FLOWS WITH STIFF SOURCE TERMS AND DISCONTINUITIES

Yee H. C.[1], Kotov D. V.[2], Wang W.[3], Shu Ch.-W.[4]

[1] *NASA Ames Research Center, Moffett Field, USA;* Helen.M.Yee@nasa.gov1
[2] *Thalmic Labs, Kitchener, Canada;* dmitry.kotov84@gmail.com
[3] *Florida International University, Miami, USA;* weiwang1@fiu.edu
[4] *Brown University, Providence, USA;* shu@dam.brown.edu

The goal of this paper is to relate numerical dissipations that are inherited in high order shock-capturing schemes with the onset of wrong propagation speed of discontinuities. For pointwise evaluation of the source term, previous studies indicated that the phenomenon of wrong propagation speed of discontinuities is connected with the smearing of the discontinuity caused by the discretization of the advection term. The present study focuses only on solving the reactive system by the fractional step method using the Strang splitting. Studies shows that the degree of wrong propagation speed of discontinuities is highly dependent on the accuracy of the numerical method. The manner in which the smearing of discontinuities is contained by the numerical method and the overall amount of numerical dissipation being employed play major roles. Depending on the combination of numerical method, time step and grid spacing, the numerical simulation may lead to (a) the correct solution (within the truncation error of the scheme), (b) a divergent solution, (c) a wrong propagation speed of discontinuities solution or (d) other spurious solutions that are solutions of the discretized counterparts but are not solutions of the governing equations. The findings might shed some light on the reported difficulties in numerical combustion and problems with stiff nonlinear (homogeneous) source terms and discontinuities in general.

СЕКЦИОННЫЕ УСТНЫЕ И СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ

Тезисы

SHORT COMMUNICATIONS AND POSTERS

Abstracts

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ИДЕАЛЬНОЙ МГД НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Авдеева Е. Н.[1], **Лукин В. В.**[2]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;* lena.avdeeva177@mail.ru

[2] *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;* vvlukin@gmail.com

Модели, построенные на основе уравнений идеальной магнитной гидродинамики (МГД), играют важнейшую роль в исследовании ряда проблем геофизики и астрофизики. При численном исследовании таких моделей важно учитывать свойство бездивергентности магнитного поля [1–3], которое может не выполняться при расчете с использованием разностных схем. Одним из подходов к решению этой проблемы является использование смещенных сеток, при котором газовые переменные относятся к центрам разностных ячеек, а магнитное поле задается своими нормальными компонентами на ребрах.

Модель идеальной МГД включает в себя законы сохранения массы газа, его импульса и полной энергии, а также уравнение Фарадея для эволюции магнитного поля [1]: $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, где вектор консервативных переменных $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^{\mathrm{T}}$, вектор потока $\mathbf{F} = [\rho u, \rho u^2 + p - B_x^2, \rho v u - B_x B_y, \rho w u - B_x B_z, (e+p)u - B_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})]^{\mathrm{T}}$, ρ — плотность, $\mathbf{v} = [u, v, w]^{\mathrm{T}}$ — скорость среды, $\mathbf{B} = [B_x, B_y, B_z]^{\mathrm{T}}$ — вектор индукции магнитного поля, $e = \frac{p_{\mathrm{gas}}}{\gamma - 1} + \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2}$ — полная энергия и $p = p_{\mathrm{gas}} + \frac{\mathbf{B}^2}{2}$ — полное давление.

Для получения численного решения на новом временном слое используется следующий алгоритм решения:

1. Пересчет газовых переменных с использованием приближенного решения задачи Римана для уравнений МГД методом HLLD, включая учет действия на газ электромагнитных сил [4]: $(\mathbf{U}, \mathbf{B}) \mapsto \hat{\mathbf{U}}$.

2. Решение уравнения Фарадея с использованием теоремы Стокса [3] для автоматического выполнения условия $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$: $(\hat{\mathbf{U}}, \mathbf{B}) \mapsto \hat{\mathbf{B}}$.

Для оценки свойств построенной схемы рассмотрено несколько характерных тестовых задач идеальной МГД, подробно описанных в литературе [1, 3]. Результаты тестовых расчетов показали надежность и эффективность построенной разностной схемы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-31-20020, 18-01-00252).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. *Лукин В. В., Шаповалов К. Л.* Применение RKDG метода второго порядка для решения двумерных уравнений идеальной магнитной гидродинамики // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. Спец. вып. 2: Математическое моделирование в технике. С. 98–108.
3. *Галанин М. П., Лукин В. В.* Разностная схема для решения двумерных задач идеальной МГД на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2017. 29 с.
4. *Miyoshi T., Kusano K.* A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics // J. Comput. Phys. 2015. V. 208. P. 315–344.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

Аверина Т. А.[1], **Косачев И. М.**[2], **Чугай К. Н.**[3]

[1] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* ata@osmf.sscc.ru
[2] *Военная академия Республики Беларусь, Минск, Республика Беларусь;* kosachev1301@mail.ru
[3] *НИИ Вооруженных Сил Республики Беларусь, Минск, Республика Беларусь;* konstantin.ch40@gmail.com

В настоящее время широкое распространение получили динамические системы со случайными изменениями условий функционирования и возмущений, приводящими к внезапному изменению структуры в целом — к структурной неопределенности. Систематическое изложение таких задач и методов их анализа дано в работах И. Е. Казакова, В. М. Артемьева, В. А. Бухалева [1]. Аналитическому моделированию стохастических систем посвящена монография И. М. Косачева, М. Г. Ерошенкова [2].

Примерами систем со случайной структурой могут служить системы управления сближением летательных аппаратов, системы поиска и захвата информационного сигнала в задачах навигации и управления полетом летательных аппаратов, системы комбинированного наведения на цель, а также системы с возможными нарушениями и отказами.

Разработанная в Военной академии Республики Беларусь методика [2, 3] построения имитационной и аналитической модели исследуемой динамической системы позволяет проводить ее высокоточный анализ.

Разработанные в ИВМиМГ СО РАН вычислительные алгоритмы [4, 5] позволяют проводить статистический анализ систем со случайной структурой, исследовать и оптимизировать параметры и структуру моделей, они незаменимы при проведении численных экспериментов.

Проверка адекватности разработанной аналитической модели динамической системы осуществляется путем сравнения результатов аналитического математического моделирования с аналогичными результатами статистического моделирования имитационной математической модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А.* Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993.
2. *Косачев И. М., Ерошенков М. Г.* Аналитическое моделирование стохастических систем. Минск: Наука и техника, 1993.
3. *Косачев И. М., Чугай К. Н.* Имитационное математическое моделирование контура наведения зенитной телеуправляемой ракеты зенитного ракетного комплекса с комплексированной информационной системой // Вестн. Воен. Акад. Респ. Беларусь. 2017. Т. 57, № 4. С. 25–32.
4. *Аверина Т. А.* Статистический алгоритм моделирования динамических систем с переменной структурой // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 5, № 1. С. 1–10.
5. *Аверина Т. А.* Использование модификаций метода максимального сечения для моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2016. Т. 19, № 3. С. 235–247.

ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ РАЗРУШЕНИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Айтжанов С. Е.[1], Жанузакова Д. Т.[2]

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан;
[1]Aitzhanov.Serik81@gmail.com, [2]Dinara.Zhan07@gmail.com

Исследуется обратная задача определения правой части для псевдопараболического уравнения с интегральным условием переопределения. Получены достаточные условия “разрушения” решения за конечное время, а также получена оценка снизу разрушения решения. Рассматриваются вопросы асимптотического поведения решений при больших значениях времени T. Получены достаточные условия локализации решения за конечное время.

Исследование начально-краевых задач псевдопараболического типа началось в 1980-х годах. Вопросам существования и дифференциальным свойствам решений для уравнений псевдопараболического типа (называемых также уравнениями соболевского типа) посвящено большое количество работ, основы которых заложены в работах С. Л. Соболева, А. П. Осколкова, С. Н. Антонцева, А. И. Кожанова, М. О. Корпусова, А. И. Свешникова, R. E. Showalter. Исследованию обратных задач для уравнений псевдопараболического типа посвящены работы А. И. Кожанова, А. Асанова, Е. Р. Атаманова, С. Г. Пяткова, Б. С. Аблабекова, А. Ш. Любановой, Х. Хомпыша, M. Yaman и др.

Для цилиндра $Q = \{(x,t):\ x \in \Omega,\ t > 0\}$ рассмотрим следующую обратную задачу для псевдопараболического уравнения: определить пару функций $(u(x,t), f(t))$, удовлетворяющих уравнениям

$$u_t - \chi\Delta u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{\sigma-2}\nabla u) - u^q u_{x_1} + g(x,t,u\nabla u) = |u|^{\beta-2}u + f(t)h(x),\ x \in \Omega,\ t > 0;$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ в } \Omega,\ \ u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0;$$

$$\int\limits_{\Omega} u(x,t)h(x)dx = 1,\ \ t > 0.$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^1$, σ, q, β — положительные константы, $h(x), u_0(x)$ — известные функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP05132041).

ВЫЧИСЛЕНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПО РАСХОДУ РЕСУРСА УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Александров В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
vladalex@math.nsc.ru

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in D$, где u — m-мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям $|u_j| \leqslant M_j$, $j = \overline{1,m}$. Предполагается, что система полностью управляема и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий D.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за время $T = t_k - t_0$ (где $T \geqslant T_0$) систему из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$ и минимизирующее функционал $J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^{m} |u_j(\tau)| d\tau$. Здесь T_0 — время оптимального по быстродействию перевода системы.

Разработан новый метод решения задачи минимизации расхода ресурса управления. Он основан на разделении вычислительных затрат на: 1) предварительные вычисления и 2) вычисления в процессе управления. Предварительные вычисления состоят в построении аппроксимирующей конструкции, дающей приближенное решение задачи минимизации для любого начального условия x_0 из ограниченной области начальных условий D [1]. Вычисления в процессе управления начинаются с момента задания конкретного начального условия x_0 и заключаются в уточнении полученного приближенного решения. Построение аппроксимирующей конструкции основано на делении области начальных условий на области достижимости за различные времена. Каждая область достижимости аппроксимируется семейством гиперплоскостей, проходящих через различные комбинации граничных точек. Рассмотрена процедура выделения подмножества начальных условий, которому принадлежит заданное x_0, и определения опорной гиперплоскости. К каждой граничной точке "прикрепляем" найденные предварительно значения оптимального по расходу ресурса управления [2, 3]. Разработан итерационный алгоритм вычисления оптимального по расходу ресурса управления, использующий полученное приближенное решение. Приведены результаты моделирования и численных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00754).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Построение аппроксимирующей конструкции для вычисления и реализации оптимального управления в реальном времени // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 1–19.
2. *Александров В. М.* Вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурса // Сиб. журн. вычисл. математики. 2016. Т. 19, № 1. С. 5–18.
3. *Александров В. М.* Общее решение задачи минимизации расхода ресурса // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 1383–1409.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОГРУЖЕНИЯ ОТКРЫТОЙ ТРУБЫ С ГРУНТОВОЙ ПРОБКОЙ

Александрова Н. И.

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, Новосибирск, Россия;
nialex@misd.ru

Бестраншейные технологии прокладки подземных коммуникаций широко используются в строительстве. В настоящее время часто применяется метод, основанный на погружении обсадной трубы в грунтовый массив с открытым передним торцом. В этой технологии во внутреннюю полость трубы поступает разрушенный грунт, который образует грунтовую пробку.

В настоящей работе с помощью конечно-разностного метода рассчитывается горизонтальный процесс ударного погружения в грунт открытой трубы, взаимодействующей с грунтовой пробкой. Процесс предполагается осесимметричным. Внутри трубы длины L_1 содержится грунтовая пробка длины L_2. Труба погружена в грунт на глубину L_0. По торцу трубы производятся множественные продольные удары массой M_0, движущейся со скоростью V_0. Движения трубы и пробки описываются одномерными волновыми уравнениями относительно перемещений. Взаимодействие трубы, пробки и внешнего грунта описывается законом сухого трения Кулона, т. е. сила трения пропорциональна знаку относительной скорости трубы и среды, коэффициенту трения и нормальному давлению среды.

Проведено исследование влияния параметров трубы и пробки на процесс погружения открытой трубы в грунт.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-77-20049).

КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ

Анашкин О. В.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия; oanashkin@yandex.ru

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием [1] (импульсные системы) являются адекватным инструментом моделирования эволюционных процессов, подвергающихся воздействиям импульсного характера. Математические модели, построенные на основе импульсных систем указанного вида, находят применение в механике, технике, математической биологии и других отраслях науки и техники. Важной задачей является исследование устойчивости стационарного решения импульсной системы в критическом случае, когда характер устойчивости линейного приближения не дает достаточной информации об устойчивости полной (нелинейной) системы. Насколько нам известно, эта задача изучена ещё весьма недостаточно. Мы рассмотрим класс периодических импульсных систем второго порядка

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad t \neq \tau_k, \quad x(t+0) = H_k x(t) + g_k(x(t)), \quad t = \tau_k, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $x(t+0)$ — правое предельное значение $x(t)$ в точке t, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ — моменты импульсного воздействия, $\tau_{k+1} = \tau_k + \theta_k$, A, H_k — постоянные матрицы, ряды $f(x) = \sum_{|m|\geq 2} F_m x^m$, $g_k(x) = \sum_{|m|\geq 2} G_m^k x^m$ абсолютно сходятся в окрестности нуля (здесь $m = (m_1, m_2) \geq 0$ — мультииндекс, $|m| = m_1 + m_2$, $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$, $F_m, G_m^k \in \mathbb{R}^2$) и выполнено условие периодичности: последовательность положительных чисел $\{\theta_k\}$ является p-периодической для некоторого $p \in \mathbb{N}$ и $H_k = H_{k+p}$, $G_m^k = G_m^{k+p}$ для любого $k \in \mathbb{Z}$.

Известны различные методы решения задачи об устойчивости в критических случаях [2–6], и все они достаточно трудоемкие. В докладе производится сравнение различных подходов и формулируются новые достаточные условия устойчивости для некоторых классов импульсных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987.
2. *Бабенко С. В., Слынько В. И.* Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием второго порядка // Докл. НАН Украины. 2008. № 6. С. 46–52.
3. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 70–80.
4. *Анашкин О. В., Митько О. В.* Достаточные условия устойчивости для нелинейных систем с импульсным воздействием // Динамические системы. 2011. Т. 1(29), № 1. С. 5–14.
5. *Анашкин О. В., Митько О. В.* Исследование критического случая устойчивости для одного семейства импульсных систем. I // Динамические системы. 2014. Т. 4(32), № 1–2. С. 153–162.
6. *Анашкин О. В., Митько О. В.* Исследование критического случая устойчивости для одного семейства импульсных систем. II // Динамические системы. 2014. Т. 4(32), № 3–4. С. 267–278.

МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ГИПЕРУПРУГОЙ СРЕДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ МЕРЫ ДЕФОРМАЦИЙ

Аннин Б. Д.[1,2], **Багров К. В.**[2]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* annin@hydro.nsc.ru

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* k.bagrov@g.nsu.ru

Традиционные методы исследования деформаций гиперупругих сред обладают некоторыми существенными недостатками, такими как сильная связанность получаемых соотношений [1] и сложность экспериментального измерения материальных параметров. Данная работа развивает идею применения QR-разложения, представленную в [2], для построения новой меры деформаций.

Построение проводится в определенной фиксированной системе координат $\vec{e}_i$, в которой компоненты градиента деформации образуют невырожденную матрицу F_{ij}. Для данной матрицы определено ее QR-разложение $F = Q\tilde{F}$. В качестве параметров деформации применяются величины $\xi_1 = \ln \tilde{F}_{11}$, $\xi_2 = \ln \tilde{F}_{22}$, $\xi_3 = \ln \tilde{F}_{33}$, $\xi_4 = \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}}$, $\xi_5 = \frac{\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{11}}$, $\xi_6 = \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{22}}$.

В работе [2] было показано, что $\tilde{F}^T\tilde{F} = F^TF = C$, т. е. новую меру деформаций можно получить как разложение Холецкого для меры деформаций Грина. Такое соответствие позволяет выразить потенциал гиперупругой среды $\psi(C)$ как функцию $\psi(\xi_i)$ компонент новой меры деформаций.

При использовании полученной меры деформаций тензор напряжений выражается в виде $T_{ij} = \frac{1}{J}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}A_{ij}^{(k)}$, где $J = \det F = \det\tilde{F} = \tilde{F}_{11}\tilde{F}_{22}\tilde{F}_{33}$, а тензоры $A^{(k)}$ выражаются через тензор F и векторы $\vec{e}_i' = Q\vec{e}_i$. Важным свойством полученной системы тензоров является ее “почти ортогональность” — именно, из всех попарных сверток $A_{ij}^{(k)}A_{ij}^{(l)}$, $k \neq l$, ненулевой является только свертка $A_{ij}^{(4)}A_{ij}^{(5)}$.

Авторами была построена численная модель для трехмерного случая, аналогичная работе [3]. Модель основана на явной записи уравнений равновесия для каждого узла тетраэдрической сетки, с функциями формы, основанными на барицентрических координатах, и выражением упругих усилий в виде $\vec{F}_{el} = -\sum_p V_p \frac{\partial\psi_p}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial C_{kl}}\frac{\partial C_{kl}}{\partial P_j'}$, где суммирование по p соответствует суммированию по всем элементам, содержащим данный узел, V_p — объем элемента, P_j' — искомые координаты вершин деформированного элемента, а $\frac{\partial\xi_i}{\partial C_{kl}}$ выражается аналитически из разложения Холецкого (формула здесь не приводится ввиду ее объема).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00511 А).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Freed A. D., Srinivasa A. R.* Logarithmic strain and its material derivative for a QR decomposition of the deformation gradient // Acta Mech. 2015. V. 226, No. 8. P. 2645–2670.
2. *Srinivasa A. R.* On the use of the upper triangular (or QR) decomposition for developing constitutive equations for Green-elastic material // Int. J. Eng. Sci. 2012. V. 60. P. 1–12.
3. *Саламатова В. Ю., Васильевский Ю. В., Вонг Л.* Конечно-элементные модели для гиперупругих материалов с использованием новой меры деформации // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 7. С. 988–995.

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аристов А. И.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; ai_aristov@mail.ru

Работа посвящена построению точных решений уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u - u\right) + \Delta u + \operatorname{div}\left(u \nabla u\right) = 0.$$

Это уравнение описывает нестационарные процессы в полупроводнике [1].

Отметим, что качественным свойствам решений нелинейных уравнений, содержащих смешанные производные по времени и по пространственным переменным высоких порядков, посвящены обширные исследования (например, [1]), тогда как в литературе о точных решениях подобные уравнения встречаются довольно редко.

В данной работе построено 10 классов точных решений названного уравнения. Использованы метод бегущей волны, метод обобщенного разделения переменных, поиск решений специального вида [2]. Некоторые вычисления были автоматизированы с помощью системы компьютерной математики Maple.

Теорема. *Существуют как обращающиеся в бесконечность на конечных промежутках времени (разрушающиеся) решения названного уравнения, так и ограниченные глобально по времени.*

Справедливость этого утверждения вытекает из анализа построенных точных решений.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (проект № МК-1829.2018.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
2. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.

ВОЗВРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФОРМУЛЫ КАРДАНО В ЗАДАЧАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Астапов Н. С.[1,2], **Астапов И. С.**[3]

[1]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[2]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* nika@hydro.nsc.ru
[3]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* velais@imec.msu.ru

В физико-технических расчетах часто возникает необходимость явного символьного (не численного) выражения корней алгебраических уравнений через буквенные коэффициенты этих уравнений для последующего исследования физических закономерностей. В задачах устойчивости стержней, пластин и оболочек появляются алгебраические уравнения третьей–восьмой степени. Однако в практически важных задачах возникают именно такие кубические уравнения, все три корня которых являются вещественными числами. А в этом случае известные способы решения (формулы Ферро – Тартальи, формулы Феррари – Кардано и др.) оказываются компьютерно трудно реализуемыми, так как не существует алгоритма извлечения кубического корня из произвольного комплексного числа. Поэтому приходится обращаться к тригонометрической форме записи корней (формулы Виета), которая является громоздкой для последующего применения в аналитических выкладках. В частных случаях, когда коэффициенты исходных уравнений связаны какими-либо дополнительными соотношениями, иногда удается выразить корни уравнений через коэффициенты более просто, чем это может быть выполнено с помощью формул Кардано.

В основном в работе исследуются разложения на множители полиномов пятой и шестой степени специального вида. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы выполнялось равенство*

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = (x^3 + px + g)(x^3 + mx + n)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$g(c^2 - 4e) - cdf + d^2e + f^2 = 0.$$

Даны разложения на множители полинома шестой степени, у которого только один коэффициент параметрически зависит от остальных произвольных коэффициентов. Указаны разложения на множители некоторых полиномов высоких степеней. Исследование буквенных решений возвратного уравнения шестой степени привело к построению новых алгоритмов для решений уравнений третьей и четвертой степени. Эти алгоритмы используют решения других уравнений, дискриминанты и резольвенты которых отличаются от дискриминантов и резольвент исходных уравнений. Предложены способы сведения уравнений третьей и четвертой степени к возвратным уравнениям. Особое внимание уделено уравнениям, разрешимым в квадратных радикалах. Эффективность предложенных способов проиллюстрирована сравнением с решениями, генерируемыми пакетом прикладных программ Mathematica.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00528).

НАХОЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Балакина Е. Ю.[1,2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
balakina@math.nsc.ru

Рассмотрим нестационарное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial f(t,r,\omega,E)}{\partial t} + \omega\cdot\nabla_r f(t,r,\omega,E) + \mu(t,r,E)f(t,r,\omega,E) = J(t,r,\omega,E).$$

Это уравнение описывает, в частности, процесс переноса частиц сквозь среду. Здесь t — временная переменная, $t\in[0,T]$; r — пространственная переменная, $r\in G\subset\mathbb{R}^3$, G — выпуклая ограниченная область; $\omega\in\Omega=\{\omega\in\mathbb{R}^3:|\omega|=1\}$; $E\in I=[E_1,E_2]$, $E_1>0$, $E_2<\infty$. Функция $f(t,r,\omega,E)$ интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени t в точке r с энергией E, летящих в направлении ω. Функции μ и J характеризуют среду G.

К уравнению добавляются начальное и краевые условия: определяется плотность падающего потока h и усреднённая плотность выходящего потока H — при этом известной считается только функция H.

Рассматривается задача о нахождении поверхностей разрывов коэффициентов уравнения μ и J. Иными словами, ставится вопрос об определении внутренней структуры среды G. Такая постановка является продолжением цикла исследований Д. С. Аниконова [1].

Для решения поставленной проблемы сначала исследуется прямая задача о нахождении плотности потока f при заданных начальном условии и плотности падающего потока h (такая же постановка, но в случае непрерывных коэффициентов, была рассмотрена А. И. Прилепко [2]). Затем рассматривается специальная функция

$$Ind(r) = \left|\ \nabla\int\limits_d^T\int\limits_\Omega H(t, r+d(r,\omega)\omega,\omega)d\omega dt\ \right|,$$

зависящая от известных данных, функция $d(r,\omega)$ — расстояние от точки r до границы ∂G в направлении ω, d — диаметр области G. Доказывается, что функция Ind принимает неограниченное значение только на искомых поверхностях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
2. *Прилепко А. И., Иванков А. Л.* Обратные задачи определения коэффициента и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса по переопределению в точке // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 109–119.

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИНТЕРФЕЙСНОЙ ТРЕЩИНЕ

Безродных С. И., Власов В. И., Скороходов С. Л.

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия; vlasov@ccas.ru

Определим область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с треугольной трещиной $\mathcal{K}$, лежащей в плоскости $\mathcal{P}_0 := \{x_3 = 0\}$ с комплексной координатой $w = x_1 + ix_2$, следующим образом. Пусть гомеоморфная шару область $\Omega_0 \ni \{0\}$ в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой липшицевой границей разделяется плоскостью $\mathcal{P}_0$ на две области, Ω^+ и Ω^-, принадлежащие тому же классу областей, что и Ω_0. Области Ω^+ и Ω^- соединяются через плоскую жорданову с кусочно-гладкой липшицевой границей область $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_0$. Лежащий в $\mathcal{P}_0$ угол $\mathcal{K}_0 := \{\arg w \in [0, \alpha]\}$, где $\alpha \in (0, \pi)$, разделяет $\mathcal{P}$ на угловую область $\mathcal{K}$, играющую роль треугольной трещины, и $\mathcal{K}^1$; обе области принадлежат тому же классу, что и $\mathcal{P}$. Тогда область Ω определяется как объединение $\Omega^+ \cup \Omega^- \cup \mathcal{K}^1$. Ее граница состоит из (двусторонней) поверхности $\mathcal{K}$ и остальной поверхности Γ.

Рассматриваемая краевая задача состоит в нахождении функции $\psi(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, которая: 1) удовлетворяет в Ω уравнению Лапласа, т. е. $\Delta\psi^{\pm}(x) = 0$, $x \in \Omega^{\pm}$, где $\psi^{\pm}$ — сужения ψ на $\Omega^{\pm}$; 2) отвечает на интерфейсной поверхности $\mathcal{K}^1$ условиям трансмиссии: $\psi^+(x) = \psi^-(x)$ и $\varkappa^+\partial_\nu\psi^+(x) = \varkappa^-\partial_\nu\psi^-(x)$, $x \in \mathcal{K}^1$, где $\varkappa^+$ и $\varkappa^-$ — заданные положительные константы, ∂_ν — нормальная производная; 3) соответствует на границе $\partial\Omega$ следующим краевым условиям: i) $\psi(x) = 0$, $x \in \mathcal{K}$; ii) $\psi(x) = h(x)$, $x \in \Gamma$. Эта задача рассматривается в подходящих пространствах Соболева – Слободецкого [1, 2] в обобщенной постановке, т. е. ее решение $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, \mathcal{K})$ удовлетворяет интегральному тождеству $\int_\Omega \varkappa(x)\big(\nabla\psi(x), \nabla\eta(x)\big)dx = 0$ для всех пробных функций $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$, где $\varkappa(x) = \varkappa^{\pm}$, $x \in \Omega^{\pm}$, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Решение основано на построении и использовании аппроксимативной системы функций, записываемых в сферических координатах в виде $\Psi_k(r, \theta, \varphi) = r^\mu U(\mu; \theta, \varphi)$, где $\mu = \mu(k)$, $k = 1, 2, \dots$ (см. [3]). Здесь $\mu(k)$ — собственные значения, а $U(\mu(k); \theta, \varphi)$ — собственные функции для угловой части оператора $\operatorname{div}(\varkappa\nabla\psi)$ в области $\mathcal{S} = \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{K}_0$ на сфере, удовлетворяющие условиям трансмиссии на интерфейсной линии $\mathcal{L} := \big(\mathbb{S}^2 \cap \mathcal{P}_0\big) \setminus \mathcal{K}_0$ и однородному условию Дирихле на дуге $\mathbb{S}^2 \cap \mathcal{K}_0$. Обобщенное решение U этой задачи понимается в смысле интегрального тождества $\int_\mathcal{S} \varkappa\big(\nabla_\mathcal{S} U, \nabla_\mathcal{S} V\big)ds = \mu(\mu + 1)\int_\mathcal{S} UV ds$ для всех V из соответствующего соболевского пространства, где $\nabla_\mathcal{S}$ — касательная к $\mathcal{S}$ компонента градиента. Решение этой спектральной задачи в $\mathcal{S}$ строится блочно-проекционным методом с использованием функций вида $u^m(\mu; \widetilde{\theta}, \widetilde{\varphi}) = \mathrm{P}_\mu^{-m/2}(\cos\widetilde{\theta})\sin(m\widetilde{\theta}/2)$, где $\mathrm{P}_\mu^\lambda(t)$ — присоединенные функции Лежандра на разрезе, а $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\varphi})$ — нужным образом ориентированные угловые координаты на сфере $\mathbb{S}^2$. Метод был численно реализован, и, в частности, получена зависимость $\mu(k)$, т. е. показателей сингулярностей в вершине трещины от раствора ее угла и отношения $\varkappa^+/\varkappa^-$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
2. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
3. *Власов В. И.* Метод решения краевых задач для уравнения Лапласа в областях с конусами // Докл. АН. 2004. Т. 397, № 5. С. 571–574.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ УСЛОВНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Белозуб В. А., Козлова М. Г.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия; art-inf@mail.ru

К интегральным, функциональным и дискретным уравнениям типа Урысона приводит широкий класс задач моделирования косвенных измерений, дистанционного зондирования, сейсмо-, георазведки и др. Непосредственное решение таких уравнений является некорректной задачей. Учет априорной и другой информации о решении, модели измерения, способа сканирования приводит к различным экстремальным задачам с условиями в виде исходных уравнений. Выбор регуляризирующих функционалов приводит к различным алгоритмам восстановления решений. В качестве примера рассмотрены одномерный случай определения формы геологической аномалии и ее характеристик по результатам измерений на поверхности земли, а также система уравнений типа Урысона, возникающая в задаче определения поверхности по результатам сканирования.

Соответствующие интегральные операторы содержат свертку по пространственной переменной и дельтообразное ядро, задающее форму сканирующего сигнала.

Модельными являются следующие экстремальные задачи [1]:

$$f_0(z) \equiv \|z\|^2 \to inf,$$

$$A_i z \equiv \int_a^b k_i(x-s) n_i(t-z(s)) ds = u_i(x,t), \quad i = \overline{1,m}, \quad c \le t \le d,$$

с дельтаобразным ядром $n(t)$, а также их дискретные аналоги [2].

Рассмотрены регуляризирующие итерационные алгоритмы, учитывающие различную информацию о решении или близкие решения, как результат сканирования по близкой траектории. Приведены модельные эксперименты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белозуб В. А., Козлова М. Г., Лукьяненко В. А.* Уравнения типа Урысона в задачах восстановления точек поверхности // Соболевские чтения. Международная школа-конференция: Тез. докл. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. С. 35–36.
2. *Белозуб В. А., Козлова М. Г., Лукьяненко В. А.* Модели дискретной оптимизации в прикладных задачах восстановления изображений // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов научно-практической конференции МИКМО–2017 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике. Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2017. С. 103–108.

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Беляева Н. А.

Сыктывкарский государственный университет, Сыктывкар, Россия;
belyayevana@mail.ru

Исследования по рассматриваемой тематике в рамках несвязанной теории термовязкоупругости проводились автором в предшествующие годы. К примеру, в работах [1–4] исследуются процессы формирования цилиндрических и сферических изделий при различных условиях (объемный, фронтальный режимы) проведения реакции отверждения.

Представленная в данной работе модель строится в условиях связанной теории. Рассматривается процесс отверждения (полимеризации) жидкой среды в форме плоской пластины в условиях неоднородного распределения температуры $T = T\,(x, t)$, глубины полимеризации $\alpha = \alpha\,(x, t)$. Источниковая функция в уравнении теплового баланса состоит из двух компонент: химической, обусловленной процессом полимеризации, и механической, обусловленной возникающими в ходе отверждения вязкоупругими напряжениями и деформациями.

Для описания вязкоупругого поведения материала используется нормальная модель вязкоупругого тела — параллельное соединение среды Гука и Максвелла. Вязкость среды предполагается зависящей от температуры. На границах пластины заданы условия конвективного теплообмена с окружающей средой. Уравнение неразрывности в рассматриваемой модели служит для определения изменяющейся плотности материала.

Проводится широкий численный эксперимент на основе варьирования параметров задачи. Анализируется пространственно-временное распределение температуры, глубины полимеризации, напряженное состояние. Анализ сопровождается соответствующими графиками функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляева Н. А.* Деформирование вязкоупругих структурированных систем. LAP Lambert Academic Publishing, 2011.
2. *Беляева Н. А., Худоева Е. Е.* Вычислительный комплекс “Термовязкоупругие модели отверждения осесимметричных изделий” // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 14. С. 125–146.
3. *Беляева Н. А.* Математическое моделирование. Учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета, 2014.
4. *Беляева Н. А., Довжко Е. С.* Объемное формирование цилиндрического изделия с учетом давления // Изв. Коми научного центра УрО РАН. 2014. № 4(20). С. 5–11.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ДИХОТОМИИ МАТРИЧНОГО СПЕКТРА

Бибердорф Э. А.[1,2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
biberdorf@ngs.ru

Одним из достижений научной школы академика С. К. Годунова является новая формулировка спектральной проблемы в виде задачи дихотомии матричного спектра. Заметим, что хотя идея такого подхода является довольно естественной для приложений, в частности, для теории устойчивости, она оказалась слишком революционной для того, чтобы получить широкое распространение.

В работе [1] возможности метода дихотомии демонстрировались на примерах исследования явления флаттера крыла, а также устойчивости турбинных лопастей. Также оказалось (см. [2]), что метод дихотомии может эффективно применяться в задаче разложения полинома на множители.

В недавнем времени начата работа по адаптации метода дихотомии к задачам об устойчивости течений. В первую очередь было исследовано плоскопараллельное течение Пуазейля вязкой несжимаемой жидкости [3]. Для этих целей потребовалось создать модификацию метода дихотомии относительно мнимой оси для матриц с большой нормой, так как матрицы, представляющие собой дискретные аналоги производных, отличаются большой нормой.

Далее было изучено пристеночное течение Блазиуса. Особенность этой задачи в том, что дискретизация краевого условия на бесконечности приводит к нелинейной зависимости матрицы дискретизированного оператора от спектрального параметра. С помощью замены удалось получить линейную спектральную задачу, однако после замены области устойчивости и неустойчивости разграничивались гиперболой [4]. Это послужило стимулом к созданию единого подхода к дихотомии спектров матричных пучков кривыми второго порядка. Оказалось, что, например, одномерные спектральные портреты, полученные относительно семейств кривых второго порядка, обладают целым рядом особенностей, происхождение которых было объяснено на простых примерах.

В целом можно заключить, что, во-первых, метод дихотомии матричного спектра имеет большой потенциал развития, а во-вторых, может успешно применяться при решении прикладных задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00791).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буньков В. Г., Годунов С. К., Курзин В. Б., Садкейн М.* Применение нового математического аппарата “Одномерные спектарльные портреты матриц” к решению проблемы аэроупругих колебаний решеток лопастей // Ученые записки ЦАГИ. 2009. Т. XL, № 6. С. 5–13.
2. *Бибердорф Э. А.* Критерий дихотомии корней полинома единичной окружностью // Сиб. журн. индустр. математики. 2000. Т. 3, № 1. С. 16–32.
3. *Бибердорф Э. А., Блинова М. А., Попова Н. И.* Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости // Сиб. журн. вычисл. математики. 2018. Т. 21, № 2. С. 139–154.
4. *Блинова М. А., Попова Н. И., Бибердорф Э. А.* Приложение дихотомии матричного спектра к исследованию устойчивости течений // Марчуковские научные чтения – 2017. Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2017. С. 106–112.

ВИХРЕВЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ТЕЧЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ

Блохин А. М.[1,2], **Семенко Р. Е.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
`blokhin@math.nsc.ru, r.semenko@g.nsu.ru`

Сложная молекулярная структура жидких полимерных материалов сильно затрудняет задачу о построении математических моделей динамики полимерных сред. На сегодняшний день предложено большое количество таких моделей, использующих различные подходы и предположения. Однако имеющиеся математический результаты для значительной части этих моделей пока достаточно ограничены. Одной из сравнительно новых моделей динамики жидких полимеров является обобщенная реологическая модель Покровского – Виноградова, использующая мезоскопический подход к выводу математических соотношений. Новизна и недостаточная изученность этой модели делает целесообразным исследование известных типов течений вязких жидкостей в применении к модели.

Нами рассматривается задача о вихревом движении несжимаемой полимерной жидкости в рамках обобщенной реологической модели Покровского – Виноградова. Мы ищем решения, описывающие течение слоя полимерной жидкости, расположенного над вращающейся горизонтальной бесконечной пластиной. Для поиска решений мы используем известное “кармановское” представление искомых функций [1, 2]. В предположении о заданном постоянном давлении жидкости мы численно строим примеры стационарных решений задачи в зоне вблизи оси вращения пластины.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00791А) и при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН I.1.5 (проект № 0314-2016-0013).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stewartson K.* On rotating laminar boundary layers // Grenzschichtforschung / Boundary Layer Research. Berlin: Springer, 1957. P. 59–71.
2. *Кострыкин С. В.* Режимы стационарных течений в задаче об интенсивной ветровой циркуляции в тонком слое вязкой вращающейся жидкости // ЖЭТФ. 2018. Т. 154, № 1. С. 193–205.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Бобоев К. С.

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, Новосибирск, Россия; boboev@mail.ru

Рассматривается конечно-разностный способ решения прямой и обратной задачи для нестационарного кинетического уравнения переноса нейтронов на основе метода сферических гармоник.

Различные постановки решения прямой задачи рассматривались в работах [1, 2], где разложением по сферическим функциям из кинетического уравнения переноса получена система метода сферических гармоник в P_n-приближении при диссипативных граничных условиях типа Владимирова – Маршака.

Определение коэффициентов симметрической гиперболической системы метода сферических гармоник по некоторой дополнительной информации о решении прямой задачи основано на идеи обращения разностной схемы [3, 4].

Доказана сходимость предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О диссипативности граничных условий В. С. Владимирова для симметрической системы метода сферических гармоник // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 3. С. 688–704.
2. *Султангазин У. М.* Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука, 1979.
3. *Романов В. Г., Кабанихин С. И., Бобоев К. С.* Обратная задача для P_n-приближения кинетического уравнения переноса // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 2. С. 296–299.
4. *Бобоев К. С.* Обоснование сходимости для конечно-разностного решения одной обратной задачи для P_n-приближения кинетического уравнения переноса // Труды международной конференции "Вычислительная математика и математическая геофизика", посвященной 90-летию со дня рождения академика А. С. Алексеева. Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2018. С. 68–71.

ПРЕДОПРЕДЕЛЕННОСТЬ СИНГУЛЯРНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ

Богданов А. Н.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; bogdanov@imec.msu.ru

Последовательными этапами развития модели трансзвукового течения были учет сжимаемости [1], нестационарности [2] и вязких эффектов [3].

Для нестационарного трансзвукового течения определяющее уравнение было выведено В. Линем, Э. Рейсснером и С. Цянем [2] (уравнение ЛРЦ) с использованием так называемого трансзвукового разложения. Для этого искомые функции были разложены в ряды по малому параметру, за который было выбрано отклонение характерного значения числа Маха потока от единицы. Уравнение охватило многие, присущие трансзвуковому течению свойства — нелинейность, нестационарность, пространственную неодномерность. Полученное богатство решений заслонило, однако, сингулярность полученной модели. Выяснилось [4], что околозвуковой характер течения предопределил наличие в задаче двух качественно различных скоростей — очень малой для слабых возмущений вверх по потоку и конечной для слабых возмущений, сносящихся по потоку. Выбор за характерную первой из скоростей и масштабирование ее до конечного значения привел к тому, что классическая модель не позволяла правильно описать распространение всех слабых нестационарных возмущений, но это обстоятельство было проигнорировано.

В этой связи была предложена модифицированная модель, заключающаяся в сохранении (возникающего естественным образом) в уравнении ЛРЦ при его выводе члена со второй производной по времени [2]. Полученное уравнение позволяет рассматривать возмущения, распространяющиеся во всех направлениях. Их рост или затухание может быть совершенно различным и определяющим образом влиять, в частности, на устойчивость течения.

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-29-01092-офи_м, 18-01-00793-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* О газовых струях. М.: Унив. тип., 1902.
2. *Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S.* On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Math. Phys. 1948. V. 27, No. 3. P. 220–231. (Перевод: *Тзян Х. Ш., Лин Ц. Ц., Рейснер Е.* О двумерном неустановившемся движении тонкого тела в сжимаемой жидкости // Газовая динамика (Сб. статей). М.: Изд-во иностр. лит., 1950. С. 183–196.)
3. *Рыжов О. С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236, № 5. С. 1091–1094.
4. *Богданов А. Н.* Высшие приближения трансзвукового разложения в задачах нестационарных трансзвуковых течений // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 798–811.

РАЗРЫВНЫЙ МЕТОД ЧАСТИЦ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Богомолов С. В.[1], Кувшинников А. Е.[2]

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* bogomo@cs.msu.su

[2] *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;* kuvsh90@yandex.ru

Доклад посвящён развитию одного из классов дискретных методов решения уравнений в частных производных, а именно, метода частиц, разрывного его варианта [1, 2]. Методы частиц представляют искомую функцию в виде набора δ-функций с их дальнейшей аппроксимацией классическими функциями. В настоящей момент большой популярностью пользуются методы типа SPH (гидродинамики сглаженных частиц), в которых аппроксимирующие функции (функции ядра) являются достаточно гладкими. Подход разрывного метода частиц, как следует из названия, отличается от подхода метода SPH и основан на специальном выборе аппроксимации δ-функций последовательностью прямоугольных фигур.

Для одномерного случая алгоритм разрывного метода частиц состоит из трех этапов: инициализация, сдвиг частицы, перестройка частицы. Первый этап выполняется только один раз, остальные — каждый шаг по времени. На первом этапе получаем начальные значения ширины, высоты и центра всех частиц. Далее явным методом Эйлера решается уравнение движения частиц. Из-за разницы скоростей после второго этапа между частицами образуются пересечения или зазоры. Они представляют собой ошибку аппроксимации плотности. Необходимо минимизировать ошибку, для чего будем изменять ширину частицы, тем самым подбирая правильную аппроксимацию δ-функций. С учётом сохранения площади высота частицы также будет изменяться. Таким образом, мы получаем значения искомой плотности на новом шаге по времени.

Подобным способом ранее были решены одномерные задачи для квазилинейного уравнения переноса, уравнения Бюргерса, системы уравнений мелкой воды и системы уравнений газовой динамики [3]. В качестве примера использования данного метода в двумерном случае была выбрана задача для двумерного квазилинейного уравнения переноса. При расширении разрывного метода частиц на многомерный случай расчетная область разбивается на подобласти, где происходит поиск ближайших частиц. Полученные результаты свидетельствуют, что разрывный метод корректно решает задачу Коши для квазилинейного уравнения переноса. В дальнейшем данный метод предлагается использовать для решения многомерных задач системы уравнений газовой динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов С. В., Кузнецов К. В.* Метод частиц для системы уравнений газовой динамики // Мат. моделирование. 1998. Т. 10, № 7. С. 93–100.
2. *Богомолов С. В., Звенков Д. С.* Явный метод частиц, несглаживающий газодинамические разрывы // Мат. моделирование. 2007. Т. 19, № 3. С. 74–86.
3. *Богомолов С. В., Кувшинников А. Е.* Разрывный метод частиц на газодинамических примерах // Мат. моделирование. 2019. Т. 31, № 2. С. 63–77.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Богульский И. О.[1], **Волчков Ю. М.**[2,3]

[1] *Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск, Россия;*
bogul.io@ya.ru@660099
[2] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[3] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
volk@hydro.nsc.ru

В докладе излагаются процедуры построения численных алгоритмов повышенной точности интегрирования одномерных и многомерных задач динамического деформирования твердых тел на основе нескольких аппроксимаций каждой из неизвестных функций [1]. Принципы формулировки излагаемых алгоритмов были инициированы идеями С. К. Годунова, реализованными им при создании схем численного решения квазилинейных гиперболических систем, основанных на расщеплении решения многомерной задачи на ряд одномерных задач о распаде разрыва и введении в схемы “больших” и “маленьких” величин.

В докладе приводятся примеры решения прямых задач упругопластического деформирования твердых тел с использованием разработанных алгоритмов, а также примеры решения обратных задач геофизики, основанные на многократном применении алгоритмов решения прямых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д.* Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002.

РАВНОМЕРНЫЕ АТТРАКТОРЫ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД С ПАМЯТЬЮ

Болдырев А. С.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
al-boldyrev@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — ограниченная область с гладкой границей Γ. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \mathrm{Div}\mathcal{E}(v) - \mu_1 \mathrm{Div} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\, ds = -\mathrm{grad}\, p + f, \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega, \quad (2)$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x)) ds, \quad t,\tau \in [0,+\infty),\ x \in \overline{\Omega}, \quad (3)$$

$$v\Big|_\Gamma = 0, \quad v(0,x) = v^0(x),\ x \in \Omega, \quad \int_\Omega p\, dx = 0. \quad (4)$$

Здесь $v(t,x)$ — вектор-функция скорости движения частиц среды в точке $x \in \Omega$ в момент времени t; $p(t,x)$ — давление; $f(t,x)$ — плотность внешних сил; $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\lambda > 0$ — некоторые константы; $\mathcal{E}(v)(t,x)$ — тензор скоростей деформации.

Разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи (1)–(4) установлена в работе [1]. Для установления существования равномерных аттракторов данной неавтономной задачи применялась теория траекторных аттракторов неинвариантных траекторных пространств (см., например, [2–4]).

Определение. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}^+_\sigma$ задачи (1)–(4), соответствующей символу $\sigma \in \Sigma = \{T(h)f = f(\cdot + h),\ \forall\, h \geqslant 0\}$, примем множество функций $v \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V)$ с производной $v' \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^*)$, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ является решением задачи (1)–(4) с σ вместо f в правой части, и с некоторым $v^0 \in H$, и при любом $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\|v\|^2_{L_\infty(t,t+1;H)} + \int_0^t e^{-2\gamma(t-s)} \|v(s)\|^2_V\, ds \leqslant C_1^2 \left(1 + \|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+,H)} e^{-2\gamma t}\right)$$

с некоторыми постоянными $C_1 > 0$ и $0 < \gamma < \lambda^{-1}$, зависящими от μ_0, μ_1, $\|f\|_{L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,V^*)}$ и не зависящими от v, v^0.

Теорема. *Пусть* $f \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, V^*)$ *и* $\mu_0 - \mu_1\lambda > 0$. *Тогда существует минимальный равномерный траекторный аттрактор* $\mathcal{U}$ *и равномерный глобальный аттрактор* $\mathcal{A}$ *семейства траекторных пространств* $\{\mathcal{H}^+_\sigma \colon \sigma \in \Sigma\}$ *задачи* (1)–(4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 14.Z50.31.0037).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zvyagin V. G., Orlov V. P.* Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory // Nonlinear Anal. 2018. V. 172. P. 73–98.
2. *Звягин В. Г., Кондратьев С. К.* Аттракторы для уравнений моделей движения вязкоупругих сред. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2010.
3. *Zvyagin V. G., Vorotnikov D. A.* Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics. Ser. Nonlinear Anal. Appl., vol. 12. Berlin: De Gruyter, 2008.
4. *Zvyagin A. V.* Attractors for model of polymer solutions motion // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. A. 2018. V. 38, No. 12. P. 6305–6325.

КРИТЕРИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ОЦЕНКИ НА ВОЗМУЩЕНИЯ

Бондарь А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
anna.alex.bondar@gmail.com

Рассматривается система линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами

$$y_{n+1} = (A(n) + B(n))y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $A(n)$ — невырожденные матрицы размера $m \times m$ и матричная последовательность $\{A(n)\}$ — N-периодическая, т. е. $A(n+N) = A(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Последовательность $\{B(n)\}$ — N-периодическая последовательность возмущений. Предполагается, что система

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

экспоненциально дихотомична. Как показано в работе [1], это эквивалентно тому, что существуют эрмитовы матрицы $H(0), H(1), \ldots, H(N-1)$ и матрица P, удовлетворяющие следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = \Big(U_l^*\Big)^{-1} P^* U_l^* U_l P U_l^{-1} \\ -\Big(U_l^*\Big)^{-1} (I-P)^* U_l^* U_l (I-P) U_l^{-1}, \quad l = 0, 1, \ldots, N-1, \\ H(0) = H(N) > 0, \\ H(0) = P^* H(0) P + (I-P)^* H(0)(I-P), \\ P^2 = P, \quad PU_N = U_N P, \end{cases} \tag{2}$$

где U_l — матрица Коши. Данный критерий является аналогом критерия Крейна для автономных систем [2].

С помощью (2) можно оценить нормы матриц $B(n)$, при которых система (1) будет экспоненциально дихотомичной. Исследование является продолжением [1, 3–5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Бондарь А. А.* Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1240–1254.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
3. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1227–1237.
4. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // J. Comput. Math. Optim. 2010. V. 6, No. 1. P. 1–12.
5. *Demidenko G. V.* On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 2016. V. 6, No. 1. P. 63–74.

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Бондарь Л. Н.[1,2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
b_lina@ngs.ru

В докладе речь пойдет об одном классе краевых задач в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$ для эллиптических систем (см., например, [1]):

$$\begin{cases} L(D_x)U = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \\ B(D_x)U\big|_{x_n=0} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Рассматриваемые краевые задачи удовлетворяют условию Лопатинского, операторы $L(D_x)$ и $B(D_x)$ являются однородными.

Исследуется вопрос о разрешимости краевой задачи (1) в $W^l_p(\mathbb{R}^n_+)$, $1 < p < \infty$. Хорошо известно [2, 3], что краевая задача (1) однозначно разрешима в $W^l_p(\mathbb{R}^n_+)$ при $lp' < n$, $p' = p/(p-1)$. В работах [2, 4] показано, что для разрешимости краевой задачи (1) в $W^l_p(\mathbb{R}^n_+)$ при $lp' \geq n$ необходимо накладывать некоторые дополнительные условия на $F(x)$. Выписан явный вид этих условий в случае, когда $(l-1)p' < n \leq lp'$. Показано, что эти условия являются необходимыми и достаточными для разрешимости в $W^l_p(\mathbb{R}^n_+)$. Из [2] следует, что для разрешимости задачи (1) в $W^l_p(\mathbb{R}^n_+)$ при $(l-2)p' < n \leq (l-1)p'$ достаточно потребовать от $F(x)$ следующих условий: $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} F(x)\,dx = 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^\nu F(x)\,dx = 0$, $|\nu| = 1$. В работе [5] указываются необходимые условия разрешимости краевой задачи (1) в $W^l_p(\mathbb{R}^n_+)$, $1 < p \leq 2$, при $(l-2)p' < n \leq (l-1)p'$. Отметим, что полученные условия зависят от вида граничного оператора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 3. С. 373–416.
2. *Демиденко Г. В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.
3. *Demidenko G. V.* On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in $\mathbb{R}^n_+$ // J. Anal. Appl. 2006. V. 4, No. 1. P. 1–11.
4. *Бондарь Л. Н.* Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем в полупространстве // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 341–350.
5. *Бондарь Л. Н.* О необходимых условиях разрешимости одного класса эллиптических систем в полупространстве // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 8–23.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНФИГУРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ С ДИАМАГНИТНЫМ УДЕРЖАНИЕМ ПЛАЗМЫ

Боронина М. А.[1]**, Генрих Е. А.**[2]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]boronina@ssd.sscc.ru, [2]mesyats@gmail.com

В докладе представлена двумерная гибридная численная модель открытой плазменной ловушки с диамагнитным удержанием плазмы. Этот новый режим удержания плазмы предложен в ИЯФ СО РАН [1]. В этом режиме давление плазмы близко к давлению магнитного поля, магнитное поле в области, занимаемой плазмой, близко к нулю, а в тонком слое на границе плазмы диамагнитный “пузырь” быстро увеличивается. В случае успешной реализации такой режим дает возможность улучшения параметров плазмы в линейных магнитных системах для термоядерного синтеза.

Разработанная численная модель основана на кинетическом приближении для ионов и МГД приближении для электронов. На основе гибридной модели создан двумерный алгоритм исследования динамики инжектированных частиц в поле ловушки. Для расчета магнитного поля и электронной компоненты плазмы используются конечно-разностные схемы. Движение ионной компоненты рассчитывается методом частиц в ячейке (PIC). На основе разработанного алгоритма создан программный код для изучения процессов формирования согласованной с движением плазмы конфигурации магнитного поля. Проведено тестирование разработанного кода на задаче разлета плазменного облака в поле ловушки. Проведено сравнение полученных результатов с результатами с инжекцией частиц. Получены результаты зависимости динамики течения плазмы от параметров плазмы и магнитного поля ловушки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00314).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beklemishev A. D.* Diamagnetic “bubble” equilibria in linear traps // Phys. Plasmas. 2016. V. 23, Article ID 082506.

ВЫСОКОТОЧНЫЕ БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СКВОЗНОГО СЧЕТА ДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛН

Брагин М. Д.[1,2], **Рогов Б. В.**[1,2]

[1]*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;*

[2]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия;*

michael@bragin.cc, rogov.boris@gmail.com

Течения многокомпонентных химически реагирующих газов, в частности, процессы детонации, нередко характеризуются широким диапазоном временных и пространственных масштабов. Это обстоятельство создает трудности при численном моделировании таких течений, поскольку для разрешения всех этих масштабов требуются очень подробные сетки, подразумевающие чрезвычайно большие объемы вычислений в многомерном случае. Как правило, расчеты ведутся на относительно грубых сетках по явным схемам. Со времен работы [1] известно, что такой подход приводит к физически неверному воспроизведению детонационных волн. По этой причине было разработано множество специальных методов коррекции, позволяющих решить данную проблему для некоторых частных постановок, см., например, обзор в работе [2].

В докладе рассматривается неявная схема расщепления по физическим процессам для жесткой системы многомерных газодинамических уравнений Эйлера с химическими источниками. Конвекция рассчитывается по бикомпактной схеме четвертого порядка аппроксимации по пространству и третьего порядка аппроксимации по времени [3–5]. Эта высокоточная схема L-устойчива по времени. Химические реакции считаются по L-устойчивой схеме Рунге – Кутты второго порядка. Приводятся результаты тестирования данной схемы расщепления на задачах о распространении детонационных волн в газах с разными числами компонент и химических реакций. Обсуждаются преимущества бикомпактных схем по сравнению с популярными явными схемами типа MUSCL и WENO5 в контексте сквозного счета детонационных волн.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00045).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Colella P., Majda A., Roytburd V.* Theoretical and numerical structure for reacting shock waves // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1986. V. 7, No. 4. P. 1059–1080.
2. *Wang W., Shu C.-W., Yee H. C., Sjögreen B.* High order finite difference methods with subcell resolution for advection equations with stiff source terms // J. Comput. Phys. 2012. V. 231. P. 190–214.
3. *Брагин М. Д., Рогов Б. В.* Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 6. С. 958–972.
4. *Брагин М. Д., Рогов Б. В.* Консервативная монотонизация бикомпактных схем // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2019. № 8. 26 с.
5. *Брагин М. Д., Рогов Б. В.* Бикомпактные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа на декартовых сетках с адаптацией к решению // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2019. № 11. 27 с.

МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБО СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Будникова О. С.[1], **Botороева М. Н.**[2]

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;
[1]osbud@mail.ru, [2]masha888888@mail.ru

В докладе рассмотрена система

$$A(t)x(t) + \int\limits_0^t s^{-a}K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad 0 \le s \le t \le 1, \quad a \in (0,1),$$

с условием

$$\det A(t) \equiv 0,$$

здесь $A(t)$, $K(t,s)$ — заданные $(n{\times}n)$– матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ — n-мерные известная и искомая вектор-функции, которую принято называть интегро-алгебраическим уравнением (ИАУ) со слабой особенностью.

Данная задача при определенных условиях может быть рассмотренна как интегральный аналог дифференциально-алгебраического уравнения:

$$t^a Ax'(t) + B(t)x(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad 0 < t \le 1, \quad 0 < a < 1.$$

Для численного решения выделенного класса ИАУ [1], имеющих единственное достаточно гладкое решение, предложены многошаговые методы, основанные на экстраполяционных формулах, явных методах Адамса и на формуле интегрирования произведения:

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j} + \sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-51-54001_Вьет_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brunner H., Bulatov M. V.* On singular systems of integral equations with weakly singular kernels // Optimization Methods and their Applications, Proceeding of the 11-th Baikal International School Seminar, 1998. P. 64–67.

О ВЫБОРЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРИ РАНДОМИЗАЦИИ ПРИКЛАДНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Булгакова Т. Е.[1], **Войтишек А. В.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* tatyana.bulgakova@gmail.com

[2] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* vav@osmf.sscc.ru

В докладе представлена общая схема рандомизации математических (в том числе численных) стохастических прикладных моделей (см. также раздел 3.2 книги [1]). Основой рандомизации является введение (выбор) случайного параметра ξ с заданной плотностью распределения $f_\xi(u)$.

Отмечено, что в ряде приложений принято использовать в качестве функции $f_\xi(u)$ плотности бета-, гамма- или нормального распределений с соответствующим выбором параметров. На основе проведенных нами тестовых вычислений показано, что из-за относительно высокой трудоемкости многократных обращений к генератору стандартных случайных чисел и вычислений логарифмических, степенных и тригонометрических функций в случайных точках, известные моделирующие формулы и алгоритмы для бета-, гамма- или нормального распределений (см. разделы 12 и 13.1 книги [1]) являются неэффективными (неэкономичными). Поэтому использования этих распределений при рандомизации численных стохастических моделей желательно (если это возможно) избегать.

В качестве альтернативы предложено либо выбирать $f_\xi(u)$ из некоторого “банка” элементарных (эффективно моделируемых) вероятностных плотностей, формируемого с помощью специальных технологий (см. работу [2] и раздел 14 книги [1]), либо использовать кусочно-постоянные версии плотности $f_\xi(u)$ (гистограммы или приближения сложно моделируемых плотностей) и соответствующие варианты модифицированного метода дискретной суперпозиции (см. работу [2] и разделы 11.2–11.4 книги [1]).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0315-2016-0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войтишек А. В.* Лекции по численным методам Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2018.
2. *Бессмельцев М. В., Войтишек А. В.* Модификации геометрических программных модулей, связанные с построением моделируемых вероятностных плотностей // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, № 4. С. 19–36.

ПРАКТИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

Булгакова Т. Е.[1], **Войтишек А. В.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* tatyana.bulgakova@gmail.com
[2] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* vav@osmf.sscc.ru

В докладе представлены новые (по сравнению с работами [1–4]) результаты по теории и приложениям рандомизированных функциональных численных алгоритмов приближения решения $\varphi(x)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = \int k(x', x)\varphi(x')\,dx' + f(x). \tag{1}$$

Во-первых, существенно расширен обзор используемых в прикладных задачах ядер $k(x', x)$ уравнения (1). Показано, что в подавляющем числе случаев функция $k(x', x)$ имеет особенности (вплоть до дельта-функций), что существенно затрудняет ее вычисление, а значит и применение рандомизированных сеточных функциональных численных алгоритмов [2–4]. В свою очередь, проекционные функциональные алгоритмы [2–4] обладают численной неустойчивостью (это показывают проведенные нами тестовые эксперименты). Поэтому особую роль при решении прикладных задач вида (1) может сыграть использование проекционно-сеточных функциональных алгоритмов [2–4].

Во-вторых, отмечены возможности применения соображений из теории "ядерных" оценок вероятностных плотностей (см., например, [5]) для развития теории рандомизированных проекционно-сеточных функциональных численных алгоритмов приближения решения $\varphi(x)$ уравнения (1) [1].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0315-2016-0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войтишек А. В.* Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2007.
2. *Voytishek A. V., Shipilov N. M.* On randomized algorithms for numerical solution of applied Fredholm integral equations of the second kind // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1907, Article ID 030015.
3. *Войтишек А. В.* Разработка и оптимизация рандомизированных функциональных численных методов решения практически значимых интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 2. С. 32–45.
4. *Войтишек А. В.* Классификация и возможности практического применения рандомизированных функциональных численных алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 155. С. 3–19.
5. *Епанечников В. А.* Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14, вып. 1. С. 156–161.

О ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ КАК ЦЕЛЬНОМ КРЕАТИВНОМ РАЗДЕЛЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ВОЛН И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Бырдин В. М.

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия;
V_M_Byrdin@mail.ru

В ряде областей теоретической и математической физики, связанных с современной теорией волн, выделяются дисперсионные уравнения. Эти уравнения (в узком смысле $D(k;\nu)=0$; k — волновое число, ν — частота), как и дисперсионные функции, и кривые $k(\nu)$ описывают законы дисперсии в многопрофильной теории волн. Дисперсионные уравнения (включая виртуальные (см. в [4]), численные и экспериментальные, и подкласс анизотропных систем, $\nu(k_1,k_2,k_3)$, ...) вполне определяют волновую кинематику, целый спектр явлений и свойств, важные параметры и характеристики волнового процесса. Это азбучные, фазовая и групповая (энерго-) скорости, задержка, в анзаце, показатель преломления, угол отражения, доплеровский сдвиг, диссипативное затухание, условия излучения и другое. В силу компьютерной экспансии, основным научным трендом выступают численные методы, аналитики намного меньше. Автором развит метод анализа дисперсионных уравнений, основанный на теории неявных функций и других положениях комплексного анализа. Пионер метода — В. И. Кейлис-Борок [1], затем идут [2, 3]. Эффективность метода — в редукции трансцендентных функций к алгебраическим. Наиболее типичным элементом дисперсионных и, вообще, трансцендентных функций и кривых является извилина, с перегибом меж гладкими дугами (в той же синусоиде). Мною изучены извилины, кратные ветвления, петли, кресты, пики и другие особые фигуры. Эффективна асимптотика обратных волн, узкополосных по частоте и сингулярных в целом (см. в [3, 4] и др.). Подчеркнём, что обратноволновая тематика смежно с метаматериалами крайне перспективна, с широко известными “сказками-в-жизнь”, хайтеками “плаща-невидимки” и бесшумных машин (см. [4–6] и многие др.). По сравнению с дифференциальными уравнениями и краевыми условиями, дисперсионные уравнения вполне инвариантны физической природе — откуда полная универсальность для волн любого типа. Таким образом, выделяется новый цельный креативный раздел и тренд математической физики, включая вузовские курсы (сравните [5] и в отличие от уже “школярских” тем ещё XVII века, типа упругой струны).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кейлис-Борок В. И.* Уравнение частот многослойной среды // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87, № 1. С. 25–28.
2. *Краснушкин П. Е., Фёдоров Е. Н.* О кратности волновых чисел нормальных волн в слоистых средах // Радиотехника и электроника. 1972. № 6. С. 1129–1140.
3. *Бырдин В. М.* Условия излучения для некоторых краевых задач с уравнениями Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 2. С. 293–295.
4. *Бырдин В. М.* Дифракция нормальных волн в пластине, погруженной в жидкость: модель уровнемера, модификация метода факторизации и волноводные квазирезонансы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2017. № 3. С. 83–99.
5. *Дубинов А. Е., Мытарева Л. А.* Элементы физики “плаща-невидимки”. Учеб. пособие. Саров: СарФТИ, 2009.
6. *Liu R., Ji Ch., Zhao Zh., Zhou T.* Metamaterials: reshape and rethink // Engineering. 2015. V. 1, No. 2. P. 179–184.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ СКВАЖИН

Васин В. В.[1,2], **Скорик Г. Г.**[1,2]

[1] *Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;*

[2] *Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия;*

vasin@imm.uran.ru, skorik@imm.uran.ru

При описании процессов в скважине в ходе проведения гидродинамических тестов возникает уравнение Вольтерра первого рода

$$Ag \equiv \int_0^t q(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \Delta p(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{1}$$

Уравнение (1) вытекает из принципа Дюамеля, согласно которому изменение давления $\Delta p(t) = p_0 - p(t)$ есть свертка скорости потока жидкости с импульсной функцией $g(t)$ отклика резервуара. Здесь p_0 — начальное давление резервуара в невозмущенном состоянии, $p(t)$ — давление, измеряемое, например, на поверхности ствола скважины. Импульсная функция $g(t)$ подлежит определению из уравнения (1) по измеренным с ошибками $\Delta p(t)$ и $q(t)$. Хорошо известно, что полученные в результате решения уравнения (1) функции $v(t) = tg(t)$ и $w = \int_0^t g(\tau)\,d\tau$ в логарифмической шкале содержат важную информацию о системе скважина-резервуар и широко используются инженерами-исследователями при решении задачи идентификации.

Уравнение (1) применительно к скважинным тестам имеет существенную специфику, которая заключается в следующем: 1) реальные экспериментальные данные $q(t, p(t), p_0)$ содержат большие ошибки (до 15%); 2) исходные данные $p(t)$, $q(t)$ и особенно решение могут иметь значительные вариации на малых временных участках (разномасштабность). При этих условиях традиционные методы, включая классические регуляризующие алгоритмы, не позволяют построить устойчивые приближенные решения некорректно поставленной задачи (1), пригодные для интерпретации скважинных тестов. При определенных допущениях на систему скважина-резервуар искомая функция $g(t)$ удовлетворяет следующей бесконечной системе линейных неравенств:

$$(-1)^k d^k g(t)/dt^k \ge 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \ge 0. \tag{2}$$

В работе предложены и исследованы высокоточные методы решения задачи деконволюции (1), учитывающие всю полноту априорной информации о решении (2), которые позволяют получить вполне удовлетворительные результаты при максимальных погрешностях входных данных и построить приближенное решение с требуемыми свойствами гладкости и точности [1]. Обсуждается более общая постановка задачи об идентификации системы скважин в рамках общего резервуара.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00024).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skorik G. G., Vasin V. V., Kuchuk F.* A new technique for solving pressure-rate deconvolution problem in pressure transient testing // J. Eng. Math. 2016. V. 101, No. 1. P. 189–200.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТСЛОЕНИЯ ТЕРМОБАРЬЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ ПРИ ТЕПЛОВОМ УДАРЕ

Ватульян А. О.[1], Нестеров С. А.[2]

[1]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия;*
`vatulyan@math.rsu.ru`
[2]*Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН,*
Владикавказ, Россия; `1079@list.ru`

Для обеспечения способности различных технических устройств функционировать в широком диапазоне температур широко используются термобарьерные функционально-градиентные покрытия — композиты с непрерывным изменением по глубине покрытия термомеханических характеристик. Неоднородность материала заключается в зависимости коэффициентов дифференциальных операторов термоупругости от координат.

Многие технологические процессы изготовления функционально-градиентных материалов предполагают возникновение полей предварительных напряжений, которые могут привести к появлению участков отслоения покрытия и потери устойчивости. Вопросам отслоения покрытий и потери устойчивости посвящено большое количество работ. Однако в этих работах система "покрытие-подложка" чаще всего состояла из однородных материалов и не учитывалось влияние температурного фактора на критические параметры. В случае неоднородного покрытия исследования проводились только на основе метода конечных элементов.

В работе рассмотрена задача связанной термоупругости для системы функционально-градиентное покрытие – однородная подложка. Эта система моделируется вытянутом в горизонтальном направлении прямоугольником. В результате теплового удара по поверхности покрытия на границе раздела возникает небольшая область отслоения. Рассмотрена задача потери устойчивости отслоившегося функционально-градиентного покрытия. Для получения приближенного полуаналитического решения сформулированы гипотезы о распределении температуры и вертикального перемещения для покрытия и подложки. Отслоившийся участок покрытия, свободный от теплового нагружения, моделируется двумерным объектом в рамках модифицированной теории тонких пластин. Проведено сравнение решения по предложенному методу с решением, полученным методом конечных элементов. Определены границы применимости предлагаемой методики.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 18-11-00069).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕГИДРИРОВАНИЯ ПРОПАН-ИЗОБУТАНОВОЙ СМЕСИ В РЕАКТОРЕ С КИПЯЩИМ СЛОЕМ

Верниковская Н. В.[1], **Пахомов Н. А.**[2]

[1] *Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;* vernik@catalysis.ru
[2] *Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), Санкт-Петербург, Россия;* npakhomov@mail.ru

Математические модели, описывающие процессы тепло- и массопереноса в гетерогенных каталитических реакторах при протекании реакций на поверхности катализатора, часто могут быть записаны в виде нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) с двумя переменными и с производной не выше первого порядка по одной из переменных. При численном решении такой системы хорошо зарекомендовал себя подход, изложенный в работе [1]. Он заключается в использовании: интегро-интерполяционного метода, обеспечивающего выполнение дискретных аналогов законов сохранения, при переходе к дискретным уравнениям; метода прямых, позволяющего свести систему ДУЧП к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ); L-устойчивого метода типа Розенброка 2-го порядка точности с автоматическим выбором шага интегрирования для решения получающейся системы ОДУ [2].

В данной работе рассмотрены особенности применения этого подхода к задаче численного моделирования процесса дегидрирования пропан-изобутановой смеси в реакторе с кипящим слоем по стационарной двухфазной модели по веществу и однофазной по теплу в одномерном приближении. Роль переменной, по которой производные имеют первый порядок, выполняет время, если решать нестационарную задачу методом стационирования.

Особенностью реактора является подача горячего катализатора после регенерации в верхнюю часть реактора и наличие секционирующих решеток, замедляющих обратное перемешивание катализатора, что приводит к существованию аксиального градиента температуры в реакторе. Цель моделирования состояла в оценке преимуществ добавления пропана в изобутан, подаваемый на вход реактора, с точки зрения обеспечения стабильности и максимальных выходов целевых олефинов в процессе дегидрирования в промышленном реакторе с кипящим слоем. Хорошее описание экспериментальных данных позволяет говорить об адекватности математической модели моделируемому реактору и корректности решения уравнений модели [3].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института катализа СО РАН (проект № АААА-А17-117041710076-7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vernikovskaya N. V.* An equation-oriented approach to modeling heterogeneous catalytic reactors // Chem. Eng. J. 2017. V. 329. P. 15–24.
2. *Новиков Е. А.* Численные методы решения дифференциальных уравнений химической кинетики // Математические методы в химической кинетике. Новосибирск: Наука, 1990. С. 53–68.
3. *Vernikovskaya N. V., Savin I. G., Kashkin V. N., Pakhomov N. A., Ermakova A., Molchanov V. V., Nemykina E. I., Parahin O. A.* Dehydrogenation of propane-isobutane mixture in a fluidized bed reactor over Cr2O3/Al2O3 catalyst: experimental studies and mathematical modelling // Chem. Eng. J. 2011. V. 176–177. P. 158–164.

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ СИСТЕМЫ ДАРБУ

Волокитин Е. П.[1,2]**, Чересиз В. М.**[1]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
volok@math.nsc.ru, vladimir.cheresiz@gmail.com

Пусть имеется плоская полиномиальная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x,y),\ \ \dot{y} = Q(x,y), \tag{S}$$

где $P(x,y), Q(x,y)$ — действительные многочлены от двух переменных x, y.

Функция $\rho(x,y)$, непрерывно дифференцируемая и не обращающаяся в нуль в области $U \subset \mathbb{R}^2$, называется интегрирующим множителем системы (S), если

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho(x,y)P(x,y)) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho(x,y)Q(x,y)) = 0.$$

С использованием интегрирующего множителя первый интеграл системы (S) $H(x,y)$ восстанавливается из соотношений

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = \rho(x,y)Q(x,y),\ \ \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} = -\rho(x,y)P(x,y).$$

Наличие первого интеграла системы позволяет нам описать фазовый портрет, поскольку все траектории определяются множествами уровня $H(x,y) = \mathrm{const}$.

Системой типа Дарбу мы называем систему ОДУ вида

$$\dot{x} = P(x,y) \equiv x + P_n(x,y),\ \ \dot{y} = Q(x,y) \equiv y + Q_n(x,y), \tag{D}$$

где $P_n(x,y), Q_n(x,y)$ — однородные многочлены степени $n \geq 2$.

Теорема. *Система* (D) *имеет интегрирующий множитель вида*

$$\rho(x,y) = \mu\left(\frac{y}{x}\right).$$

Используя сформулированную теорему, мы нашли первые интегралы некоторых классов систем типа Дарбу и построили их глобальные фазовые портреты.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проекты № 0314-2016-0007, № 0314-2016-0013), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00057).

ГИБРИДНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ПЛАЗМЫ

Вшивков В. А., Вшивкова Л. В., Дудникова Г. И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
vsh@ssd.sscc.ru, gdudnikova@gmail.com

В данном докладе предлагается новая численная модель течения плазмы в осесимметричной открытой ловушке, основанная на кинетическом приближении для ионной компоненты плазмы и МГД приближении для замагниченной электронной компоненты (гибридная модель с использованием метода частиц). Хорошо известные преимущества открытых ловушек, связанные с высоким значением отношения давления плазмы к давлению удерживающего магнитного поля (параметра бета) и относительная простота их геометрии, делают принципиально возможным создание на их основе компактного термоядерного реактора. Использование диамагнитного удержания потенциально позволяет кардинально улучшить параметры термоядерной системы, поэтому исследование таких его свойств, как эффективность запирания плазмы, возможности развития магнитогидродинамических и кинетических неустойчивостей и методов их стабилизации является актуальной задачей. Стандартной моделью для решения задач физики разреженной плазмы является математическая модель, состоящая из уравнений Власова для каждой компоненты плазмы (электроны и ионы разных сортов) и уравнений Максвелла для электромагнитных полей. Для численного решения задач с использованием этой модели наиболее эффективен метод частиц в ячейках в связи с его универсальностью для широкого диапазона физических параметров. Однако применение метода частиц требует больших вычислительных ресурсов — памяти и быстродействия ЭВМ. Для уменьшения требований к вычислительным ресурсам используются гибридные модели, в которых электронная компонента рассматривается в гидродинамическом приближении, а ионная, по-прежнему, в кинетическом. Однако гибридные модели менее устойчивы, поэтому требуется их совершенствование. Новая гибридная модель имеет более широкие границы применимости. В докладе приведены результаты экспериментов для исследования возможностей диамагнитного удержания и нагрева плазмы в открытых ловушках.

Работа выполнена в рамках темы 0315-2019-0009 ИВМиМГ СО РАН и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-21025).

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕННОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В СЛУЧАЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА

Галанин М. П.[1,2], Лукин В. В.[1,2,3], Родин А. С.[1,2]

[1]*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;*
[2]*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;*
[3]*Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Москва, Россия;* vvlukin@gmail.com

В работе представлены результаты исследования численной методики решения сопряженной задачи обтекания и теплопроводности для летательного аппарата, движущегося в атмосфере со сверхзвуковыми скоростями. Необходимость решать задачу в связанной постановке продиктована влиянием на решение точности моделирования теплообмена на поверхности обтекаемого тела. В то же время эффективное решение уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности требует применения различных численных алгоритмов с различными параметрами расчета (в частности, с существенно различными шагами по времени) и различных расчетных модулей в составе единого программного комплекса [1].

Рассмотрена методика и описан программный комплекс, включающий в себя аэродинамический и тепловой решатели, а также систему взаимодействия указанных модулей в ходе итераций. Тепловой решатель реализует метод конечных элементов применительно к задаче теплопроводности внутри летательного аппарата. Аэродинамический решатель построен на основе разрывного метода Галеркина [2–3] и направлен на численное решение системы уравнений динамики вязкого сжимаемого газа.

Исследованы варианты организации итерационного процесса, возникающего при попытке учесть условия идеального теплового контакта на поверхности обтекаемого тела. Показано, что два варианта организации итерационного процесса: с передачей из газа температуры и из тела теплового потока и наоборот — являются дополнительными относительно друг друга, из них сходится только один. Какой именно вариант сходится в конкретной задаче, зависит от соотношения коэффициентов теплопроводности материалов. Приведены результаты численного моделирования для одномерной и полной трехмерной постановок, подтверждающие сделанные на основе теоретического анализа возникающих разностных схем выводы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-20020).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Galanin M. P., Zhukov V. T., Klyushnev N. V., Kuzmina K. S., Lukin V. V., Marchevsky I. K., Rodin A. S.* Implementation of an iterative algorithm for the coupled heat transfer in case of high-speed flow around a body // Comput. Fluids. 2018. V. 172. P. 483–491.
2. *Cockburn B.* An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // Lecture Notes in Mathematics, vol. 1697. Berlin: Springer-Verlag, 1998. P. 150–268.
3. *Лукин В. В., Шаповалов К. Л.* Применение RKDG метода второго порядка для решения двумерных уравнений идеальной магнитной гидродинамики // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. Спец. вып. 2: Математическое моделирование в технике. С. 98–108.

О ЧИСЛЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОДЗЕМНОГО ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ

Гальцев О. В.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия; galtsev_o@bsu.edu.ru

В настоящее время для описания процесса выщелачивания горных пород существует большой спектр математических моделей, описывающих рассматриваемые физические процессы опосредовано на макроскопическом уровне. Эти модели основаны на законе Дарси и различных модификациях уравнения диффузии [1–3], где основные параметры имеют неясный физический смысл и дифференциальные уравнения выведены на базе умозрительных заключений.

Работа посвящена численной аппроксимации новых математических моделей подземного выщелачивания, описанных в [4], где, в первую очередь, процесс описывается на микроскопическом уровне (в масштабе пор и трещин) с использованием фундаментальных законов механики сплошных сред и теоретической химии. Затем математическая модель упрощается и выводится точное асимптотическое приближение, адекватно описывающее рассматриваемый физический процесс на макроскопическом уровне. В виду громоздкости вычислений, поиск решения проводится в двумерной области с использованием различных технологий: явные и неявные разностные схемы, конечные элементы, альтернирующий метод Шварца. Наличие свободной границы и дополнительного условия на ней требует использования адаптивных сеток [5]. Чтобы гарантировать разумный уровень численных артефактов, в данном случае применяется интерполяция на основе быстрого преобразования Фурье.

Полученные результаты позволяют оценить выбранный набор малых параметров, масштабировать их и сделать соответствующие изменения в исходных моделях, чтобы сохранить основные физические свойства пластовых потоков. Так, например, на микроскопическом уровне монотонное возрастание значения коэффициента в скорости химических реакций при фиксированном значении концентрации на подающей скважине не означает монотонного поведения концентрации реагента на свободной границе, где наблюдаются колебания. В свою очередь, для макроскопической модели концентрации реагента и продуктов химических реакций на добывающей скважине монотонно зависят от константы в скорости химических реакций и концентрации на подающей скважине.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00042).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bommer P. M., Schechter R. S.* Mathematical modeling of in-situ uranium leaching // SPE Journal. 1979. V. 19, No. 6. P. 393–400.
2. *Schmidt R. D., Follin S. E., Peterson K. A., Level E. V.* Geochemical kinetics model for in situ leach mining // IC 8852. Bureau of Mines Information Circular, 1981. P. 86–107.
3. *Кричевец Л. Н.* Математические модели и программы для гидрогеологических и геотехнологических расчетов на ЭВМ. М.: МГРИ, 1987.
4. *Meirmanov A. M., Galtsev O. V., Zimin R. N.* Free boundaries in rock mechanics. Berlin: De Gruyter, 2017.
5. *Chardaire-Riviere C., Chavent G., Jafre J., Liu J.* Multiscale representation for simultaneous estimation of relative permeabilities and capillary pressure // Society of Petroleum Engineers. 1990. P. 303–312.

О НЕСКОЛЬКИХ СЕТОЧНЫХ РЕАЛИЗАЦИЯХ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ

Гласко Ю. В.

Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; glaskoyv@mail.ru

В докладе мы рассмотрим процесс диффузии в рамках метода установления [1]. Развивающийся во времени нестационарный процесс распределения масс, описываемый параболическим уравнением с начальным условием 1-го рода и граничным условием 2-го рода, приводит к стационарному процессу, описываемому задачей Дирихле. Предложены 2D и 3D модели процесса выметания, описывающего перераспределение массы из заданной области в ее окрестность, ограниченную априори заданной областью.

Для численной реализации диффузионного процесса в 3D случае используются 2 подхода. Первый из них основан на конечно-разностной схеме второго порядка точности по координатам и первого по времени [1, 4] в сеточном гильбертовом пространстве. После покомпонентного расщепления по пространственным переменным задача решается посредством методов прогонки. Второй подход базируется на сеточной реализации альтернирующего метода Шварца для составных и многосвязных выпуклых областей [2, 3, 5]. В последнем случае в итерационном цикле удобно использовать семиточечную схему типа “крест”. Эта схема в итерационном цикле описывает процесс перераспределения масс на сетке из центрального узла. Таким образом, альтернирующий метод Шварца обобщается до balayage-метода А. Пуанкаре.

В качестве стационарного состояния рассматривается случай, когда вся масса перераспределена из области, где она сосредоточена в начале процесса, в другую область либо на заранее заданную поверхность, охватывающую источник.

Рассматриваемая здесь задача концентрации плотностей так же является устанавливающимся процессом, поскольку когда найдено аномалиеобразующее тело, то поле, им создаваемое, описывается задачей Дирихле для уравнения Пуассона. При математическом моделировании устанавливающегося процесса имеет смысл использовать задачу Стефана. В качестве объемлющей области используется куб. Для численной реализации на основе описанных выше сеточных методов мы используем интерпретацию наблюденного поля. Обратный выметанию итерационный процесс на основе семиточечной схемы оставляет плотности во внутренних узлах.

Методика концентрации использована при интерпретации локального гравитационного поля для определения области, содержащей нефть, и определения плотности нефти.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
3. *Зидаров Д.* О решении некоторых обратных задач потенциальных полей и их применение к вопросам геофизики. София: БАН, 1968.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
5. *Glasko Yu. V.* Interpretation algorithms for hydrocarbon deposits // Practical and Theoretical Aspects of Geological Interpretation of Gravitational, Magnetic and Electric Fields. Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. Switzerland, Cham: Springer, 2019. P. 113–125.

О РАБОТАХ СЕМИНАРА ПО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ ПОД РУКОВОДСТВОМ С. К. ГОДУНОВА

Гордиенко В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
gordienk@math.nsc.ru

В середине 70-х в НГУ начал работать семинар по гиперболическим уравнениям под руководством С. К. Годунова.

Был поставлен вопрос: всегда ли уравнение высокого порядка, гиперболическое по Петровскому, может быть сведено к симметрической системе первого порядка, гиперболической по Фридрихсу. Доказательство того, что гиперболическое уравнение с двумя пространственными переменными сводится к симметрической системе, оказалось нетривиальным. Оно было сделано С. К. Годуновым и В. И. Костиным [1]. Далее В. И. Костиным и Т. Ю. Михайловой было показано, что к симметрической системе сводятся также гиперболические уравнения, инвариантные относительно вращений, и все достаточно близкие к ним. Но в общем виде ответ на вопрос об эквивалентности двух определений гиперболичности оказался отрицательным. В. В. Иванов [2] построил гиперболическое уравнение четвёртого порядка с четырьмя пространственными переменными, которое не сводилось к симметрической гиперболической по Фридрихсу системе первого порядка. Однако, до сих пор неизвестно: может, в случае трёх пространственных переменных определения всё-таки эквивалентны?

Параллельно общим вопросам участники семинара С. К. Годунова занимались исследованием корректности граничных задач. Дело в том, что если гиперболическое уравнение сводилось к симметрической системе, то всегда неединственным способом. Это предлагалось использовать в теории краевых задач. Гиперболическое уравнение с краевым условием требовалось так свести к симметрической системе, чтобы поставленное граничное условие было диссипативным. При этом мы не ограничивались формулировкой корректности задачи в терминах корней полиномов, а стремились сформулировать её в терминах коэффициентов граничного условия, то есть решали соответствующую проблему Рауса – Гурвица [3–5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К., Костин В. И.* Приведение гиперболического уравнения к симметрической гиперболической системе в случае двух пространственных уравнений // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 6. С. 3–20.
2. *Иванов В. В.* Строго гиперболические полиномы, не допускающие гиперболической симметризации // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1986. С. 84–93.
3. *Годунов С. К., Гордиенко В. М.* Смешанная задача для волнового уравнения // Дифференциальные уравнения с частными производными. Труды семинара С. Л. Соболева. 2. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1977. С. 5–32.
4. *Gordienko V. M.* Un probleme mixte pair l'eqution vectorielle des ondes: Cas de dissipation de l'energie; Cas mal poses // C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A. 1979. V. 288, No. 10. P. 547–550.
5. *Гордиенко В. М.* Диссипативность граничного условия в смешанной задаче для трехмерного волнового уравнения // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 311–323.

ЧИСЛЕННЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗА НА ПЛАСТИНЕ

Григорьев Ю. Н.[1], **Ершов И. В.**[2]

[1]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;* grigor@ict.nsc.ru

[2]*Новосибирский государственный аграрный университет, Новосибирск, Россия;* i_ershov@ngs.ru

В докладе на основе численного моделирования и асимптотического подхода исследованы характеристики устойчивости сверхзвукового пограничного слоя колебательно возбужденного молекулярного газа на плоской пластине. Уравнения линейной теории устойчивости получены из уравнений релаксационной газодинамики посредством линеаризации последних относительно стационарного течения. В качестве стационарного течения принималось решение автомодельных уравнений пограничного слоя для совершенного газа. Показано, что при этом исключается влияние объемной вязкости и релаксация связана только с колебательным возбуждением молекул газа. Учитывались возмущения коэффициентов переноса, которые могут оказывать существенное влияние на результаты расчетов. Рассматривались двумерные дозвуковые возмущения в виде бегущих плоских волн.

Асимптотическое разложение линеаризованной системы по малому параметру $1/\mathrm{Re}_\delta$ выделяет "невязкие" и "вязкие" линейно независимые решения. В нулевом приближении система уравнений для невязких возмущений сводится к линейному уравнению второго порядка для возмущения давления. Из него численным интегрированием находились значения "невязкого" решения на пластине. В качестве начального условия использовалось асимптотическое разложение в окрестности критического слоя, построенное методом Фробениуса. Для "вязких" решений система после ряда упрощений была приведена к системе шестого порядка, аналогичной системе Дана – Линя. Входящие в нее уравнения импульсов и температур сводились к уравнениям Эйри. В результате убывающие к верхней границе пограничного слоя "вязкие" решения были представлены через обобщенные функции Эйри. Найденные асимптотические решения подставлялись в секулярное (характеристическое) уравнение, выражающееся через определитель третьего порядка однородной системы линейных алгебраических уравнений. Использование функций Эйри позволило выразить "вязкую" часть уравнения через функцию Титьенса и ее производную.

Для конечных чисел Рейнольдса спектральная задача решалась численно с использованием QZ-алгоритма. На основе асимптотического и прямого численного решения в плоскости переменных $(\mathrm{Re}_\delta, \alpha)$ строились кривые нейтральной устойчивости для первой и второй мод возмущения. Показано, что при максимальном уровне колебательного возбуждения критические числа Рейнольдса превышают соответствующие значения для совершенного газа примерно на 12 %. Рассчитанные на основе асимптотического подхода кривые нейтральной устойчивости хорошо согласуются с результатами численного решения полной спектральной задачи, а полученные при этом значения критических чисел Рейнольдса меньше соответствующих значений из численных расчетов примерно на 15 %.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00209а).

О ДВУХПОТОКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ ВЛАСОВА – ПУАССОНА

Губарев Ю. Г.[1,2]

[1]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
gubarev@hydro.nsc.ru

Модель безграничной бесстолкновительной электронейтральной плазмы в электростатическом приближении — плазмы Власова – Пуассона — продолжает оставаться одной из базовых математических моделей современной физики плазмы. Это обусловлено как простотой и наглядностью данной модели, так и очевидной ее полезностью для решения проблемы управляемого термоядерного синтеза.

Как известно, разрешение последней проблемы невозможно без решения проблемы устойчивости плазменных равновесий. Отсюда вытекает, что развитие математической теории устойчивости занимает центральное положение в изучении плазмы и ее свойств.

Ранее в процессе рассмотрения устойчивости состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона был установлен целый ряд результатов фундаментального характера.

Именно, получено достаточное условие Ньюкомба – Гарднера – Розенблюта линейной устойчивости состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона, которое выделяет монотонно убывающие ("одногорбые") функции распределения частиц плазмы. Более того, с помощью этого условия сформулирована и доказана теорема Ньюкомба – Гарднера, запрещающая нарастающие по времени малые возмущения в виде нормальных волн для состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона с монотонно убывающими ("одногорбыми") функциями распределения частиц плазмы. Наконец, установлен спектральный критерий Пенроуза линейной устойчивости состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона, который справедлив не только для монотонно, но и, что принципиально, для немонотонно убывающих ("многогорбых") функций распределения частиц плазмы.

В данной работе исследуется задача линейной устойчивости одномерных состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона, содержащей в себе электроны и один сорт ионов. Прямым методом Ляпунова доказана абсолютная неустойчивость этих состояний равновесия относительно одномерных же малых возмущений в случае, когда стационарные функции распределения электронов и ионов изотропны по физическому пространству, но неизотропны по скоростям. Обращено достаточное условие линейной устойчивости Ньюкомба – Гарднера – Розенблюта и строго описана область его применимости. Получены достаточные условия линейной практической неустойчивости. Для растущих со временем одномерных малых возмущений указаны начальные данные и сконструирована априорная экспоненциальная оценка снизу. Выявлен формальный характер теоремы Ньюкомба – Гарднера и критерия Пенроуза, что позволило построить к этим спектральным результатам аналитический контрпример.

В завершение, обсуждаются установленные в работе достаточные условия линейной практической неустойчивости и присущее им свойство конструктивности, которое дает возможность использовать эти условия в качестве механизма тестирования и контроля при реализации физических экспериментов, выполнении численных расчетов, осуществлении технологических процессов (в частности, управляемого термоядерного синтеза) и т. д. и т. п.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА НА ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКАХ

Дедок В. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
dedok@math.nsc.ru

Рассмотрим динамическую систему уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot} H = \varepsilon(x)\frac{\partial E}{\partial t} + \delta(x-y)g(t), \quad \mathrm{rot} E = -\mu_0\frac{\partial H}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0, \tag{1}$$

с нулевыми начальными данными

$$(E,H)_{t<0} = 0.$$

В этой системе $\mu_0 > 0$ — постоянный коэффициент магнитной проницаемости, $\varepsilon(x)$ — коэффициент диэлектрической проницаемости. Предположим также, что коэффициент диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$ — бесконечно дифференцируемая положительная функция, которая совпадает с заданной положительной постоянной ε_0 вне $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 |\, |x| < R_0, R_0 > 0\}$, а носитель разности $\varepsilon(x) - \varepsilon_0$ содержится внутри Ω_0.

Работа посвящена исследованию бесфазной обратной задачи для системы уравнений (1), аналогичной [1–2], в которой инициирующие электромагнитные колебания волны вызваны точечными источниками, приложенными вне области Ω_0. В формальной постановке обратная задача состоит в нахождении ε внутри Ω_0 по функции $f(x,\omega,y) = |\tilde{E}(x,\omega,y) + \tilde{E}(x,\omega,z(y))|^2$, заданной для всех $y \in S$, всех $x \in S(y)$, всех $\omega \geq \omega_0 > 0$ и $z(y) = -y\ell$.

Решение обратной задачи состоит в сведении ее к обратной кинематической задаче (показана связь асимптотики функции $f(x,\omega,y)$ с функцией $\tau(x,y)$, описывающей время пробега волны между точками границы).

В работе предъявлен численный алгоритм решения указанной обратной задачи для случая нескольких неоднородностей, имеющих точечную структуру. Исследуется влияние формы неоднородностей на точность численного решения. Тестирование разработанных алгоритмов производится на симулированных данных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00120, 19-41-540007), интеграционного проекта СО РАН 0314-2018-0009.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В. Г.* Обратные задачи без фазовой информации, использующие интерференцию волн // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 626–638.
2. *Карчевский А. Л., Дедок В. А.* Восстановление коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электрического поля // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 3. С. 50–59.

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Дедок В. А.[1], Фадеев С. А.[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
dedok@math.nsc.ru
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
stepan-fadeev@mail.ru

Квантовые графы одномерных проводников, соединённых в узлах, были введены более полувека назад для моделирования физических систем. Впервые они появились в задаче моделирования свободных электронов органических молекул. Каждая молекула являлась набором атомов в фиксированных точках, соединённых рёбрами, на которых свободные электроны подчиняются одномерному уравнению Шрёдингера с соответствующим потенциалом. В последние годы интерес к метрическим графам проявился во многих областях физики, в частности, в физике плотных сред [1].

Основным объектом исследований является одномерное стационарное уравнение Шрёдингера для каждой дуги метрического графа

$$-\frac{d^2\psi_i}{dx^2} + u\psi_i = k^2\psi_i.$$

Добавляя к данным уравнениям набор граничных условий в вершинах: непрерывность волновой функции и сохранение потока, получим самосопряжённый оператор. Краевые условия могут быть интерпретированы как законы Кирхгофа для метрических графов [2].

Основными целями данной работы являются изучение спектральных свойств гамильтониана компактных графов [3], а также изучение задачи рассеяния на метрических графах.

Используемый в работе подход основан на последовательном приближении рассеивающего потенциала более простыми функциями, а также изменении данных рассеяния при подобных приближениях. Для решения задачи использован метод последовательного конструирования потенциала на графах специального вида: петлях с n полубесконечными рёбрами, кольцах с n полубесконечными рёбрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kurasov P., Stenberg F.* On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. V. 35. P. 101–121.
2. *Kostrykin V., Schrader R.* Kirchhoff’s rule for quantum wires // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. P. 595–630.
3. *Kottos T., Smilansky U.* Periodic orbit theory and spectral statistics for quantum graphs // Ann. Phys. 1999. V. 247, No. 1. P. 76–124.

О ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ В ТРУБЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Демьянко К. В.[1,2]

[1]*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;*
[2]*Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия;* kirill.demyanko@yandex.ru

Устойчивость сдвиговых течений в каналах и трубах существенно зависит от различных факторов, включая форму поперечного сечения, соотношение масштабов течения в направлении, перпендикулярном направлению основного течения, а также наличия податливости стенки (см., например, [1–3]).

В докладе обсуждается численная модель для исследования линейной устойчивости течения Пуазейля в трубе эллиптического сечения, в том числе при наличии податливости стенки. Данная модель позволяет эффективно рассчитывать максимально возможную амплификацию средней плотности кинетической энергии возмущений, оптимальные возмущения (на которых достигается максимальная амплификация), энергетическое критическое число Рейнольдса, определяющее границу монотонной устойчивости, нейтральные кривые и соответствующие линейные критические числа Рейнольдса, определяющие границу асимптотической устойчивости по Ляпунову [1, 4]. Для расчета перечисленных характеристик устойчивости используются эффективные алгоритмы, предложенные и обоснованные в работах [5–7]. Важной особенностью численной модели является использование спектральной редукции, которая заключается в проектировании на инвариантное подпространство ведущих мод и позволяет не только сократить вычислительные затраты, но и избавиться от нефизичных возмущений, обусловленных погрешностью аппроксимации.

Приводятся результаты численных экспериментов, в том числе обсуждается влияние отношения полуосей эллиптического сечения на максимальную амплификацию средней плотности кинетической энергии возмущений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-71-20149).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boiko A. V., Dovgal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V.* Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2012.
2. *Demyanko K. V., Nechepurenko Yu. M.* Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular duct // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2013. V. 28, No. 2. P. 125–148.
3. *Carpenter P. W., Garrad A. D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien–Schlihting instabilities // J. Fluid Mech. 1985. V. 155. P. 465–510.
4. *Schmid P. J., Henningson D. S.* Stability and transition in shear flows. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
5. *Boiko A. V., Nechepurenko Yu. M.* Numerical spectral analysis of temporal stability of laminar duct flows with constant cross sections // Comput. Math. Math. Phys. 2008. V. 48, No. 10. P. 1–17.
6. *Nechepurenko Yu. M., Sadkane M.* A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2011. V. 32, No. 2. P. 349–363.
7. *Nechepurenko Yu. M.* On the dimension reduction of linear differential-algebraic control systems // Dokl. Math. 2012. V. 86, No. 1. P. 457–459.

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ИОНОСФЕРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ, ЗАМЫКАЮЩИХ ГЛОБАЛЬНУЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ЦЕПЬ

Денисенко В. В.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия;
denisen@icm.krasn.ru

Глобальная электрическая цепь порождена грозами, которые выносят заряды в ионосферу. Поскольку назад на землю заряды стекают по всей атмосфере, необходимо некоторое электрическое поле в ионосфере, которое обеспечивает существование токов из областей над грозами в удаленные части ионосферы. В рамках квазистационарной модели проводника, состоящего из атмосферы и ионосферы, построена математическая модель распределения электрического потенциала, который порождает эти ионосферные токи. Используется двумерная модель ионосферного проводника, основанная на высокой проводимости среды в направлении геомагнитного поля.

В математическом отношении модель представляет собой эллиптическую краевую задачу с несимметричным оператором. Такие задачи за счет перехода к потенциалам специального вида удалось переформулировать в виде задач с симметричными операторами и свести их решение к минимизации квадратичных функционалов энергии [1]. На этой основе создан многосеточный вариационно-разностный метод [2], который в настоящее время доработан для решения задач теории глобальной электрической цепи. Мы используем блочно-структурированные сетки и кусочно-линейные аппроксимирующие функции. Условия минимума функционала энергии формируют систему линейных алгебраических уравнений для узловых значений искомых потенциалов. Матрица этой системы симметрична и положительно определена. Для решения системы используем многосеточный метод.

Созданный математический аппарат позволил описать проводимость ионосферы более адекватно, поскольку не требуются существенные упрощения, использованные, например, в известной модели [4]. Первые результаты моделирования представлены в статье [3]. В нашей модели ионосферные электрические поля получаются на порядок меньшими, чем это полагалось до настоящего времени с момента создания модели [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-05-00195).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денисенко В. В.* Краевая задача для двумерного эллиптического уравнения с несимметричными тензорными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 554–565.
2. *Денисенко В. В.* Энергетические методы для эллиптических уравнений с несимметричными коэффициентами. Новосибирск: Издательство СО РАН, 1995.
3. *Denisenko V. V., Rycroft M. J., Harrison R. G.* Mathematical simulation of the ionospheric electric field as a part of the global electric circuit // Surv. Geophys. 2019. V. 40, No. 1. P. 1–35.
4. *Roble R. G., Hays P. B.* A quasi-static model of global atmospheric electricity. 2. Electric coupling between the upper and lower atmosphere // J. Geophys. Res. 1979. V. 84, No. A12. P. 7247–7256.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПОСТАНОВКАХ И ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧ ТЕНЗОРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Деревцов Е. Ю.[1,2], **Волков Ю. С.**[1,2], **Schuster T.**[3]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
dert@math.nsc.ru, volkov@math.nsc.ru
[3] *Saarland University, Saarbrücken, Germany;*
thomas.schuster@num.uni-sb.de

Интегральные операторы играют основополагающую роль в постановках, исследовании и методах решения задач интегральной геометрии и томографии. В этих операторах отражена суть методов томографии, заключающаяся в неразрушающем объекты получении информации, накапливающейся вдоль лучей. Интегральные операторы можно охарактеризовать и как инструменты математических моделей, построенных на основе реальных физических принципов сбора томографических данных. Хороший пример такого оператора — широко известное преобразование Радона. В настоящее время список интегральных операторов, описывающих исходные данные в задачах интегральной геометрии и томографии, весьма обширен [1]. Это операторы обобщенных преобразований Радона, весовых лучевых преобразований вдоль геодезических римановой метрики, действующих на тензорные поля [2–4].

Вторая группа интегральных операторов предназначена для исследований и решения задач интегральной геометрии и тесно связанных с ними задач рефракционной тензорной томографии [2]. При решении задачи определения функции по ее преобразованию Радона на основе формул обращения используются, в частности, операторы обратной проекции, потенциал Рисса, преобразования Фурье и Гильберта. Обобщение оператора обратной проекции привело к понятию угловых моментов экспоненциальных лучевых преобразований функций и симметричных тензорных полей.

Установлены свойства экспоненциальных лучевых преобразований с весом и угловых моментов лучевых преобразований тензорных полей. Доказаны теоремы единственности краевых задач и задач Коши, поставленных в стационарном и нестационарном случаях [4]. Отмечены тесные связи экспоненциальных лучевых преобразований с задачами интегральной геометрии тензорных полей с весом и задачами томографии в различных постановках.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Немецкого научно-исследовательского общества (проект № 19-51-12008).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарафутдинов В. А.* Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.
2. *Svetov I. E., Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.* A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium // Math. Comput. Simul. V. 97. P. 207–223.
3. *Derevtsov E. Yu., Svetov I. E.* Tomography of tensor fields in the plane // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, No. 2. P. 24–68.
4. *Деревцов Е. Ю.* Об одном обобщении экспоненциального лучевого преобразования в томографии // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 29–41.

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И СВЯЗАННОЕ С НЕЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЕСЯ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА

Дженалиев М. Т.[1]**, Рамазанов М. И.**[2]**, Ергалиев М. Г.**[1]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан;*
muvasharkhan@gmail.com, ergaliev.madi.g@gmail.com
[2]*Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Республика Казахстан;* ramamur@mail.ru

В области $G = \{(x,y,t): x^2+y^2<t^2,\, 0<t<T\}$ мы изучаем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

с граничным условием на поверхности конуса

$$u(x,y,t) = u_c(x,y,t),\ \sqrt{x^2+y^2}=t,\ 0<t<T, \tag{2}$$

где $u_c(x,y,t)$ — заданная функция.

В случае осевой симметрии для вырождающейся области G решение задачи (1)–(2) сводим к изучению следующего интегрального уравнения:

$$t\,\varphi(t) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)d\,\tau}{\sqrt{t-\tau}} = f(t),\ 0<t<T<\infty, \tag{3}$$

где λ — заданная положительная постоянная величина, $\{f(t),\ t\in(0,T)\}$ — заданная функция.

Для осесимметричного случая имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $t^{-1/2}u_1(t) \equiv t^{-1/2}u_c(x,y,t)\big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} \in L_\infty(0,T)$. *Тогда граничная задача* (1)–(2) *имеет общее решение*

$$u(x,y,t) = Cu_{hom}(x,y,t) + u_{part}(x,y,t) \in L_\infty(G;(x^2+y^2)^{-1/4}),$$

$$\text{т. е. } (x^2+y^2)^{-1/4}u(x,y,t)\in L_\infty(G),\ C=const,$$

где $u_{hom}(x,y,t)$ *и* $u_{part}(x,y,t)$ *являются решениями соответственно однородного (при* $u_c(x,y,t)\equiv 0$*) и неоднородного граничных задач* (1)–(2).

Доказательство теоремы 1 основано на следующей теореме 2 о разрешимости интегрального уравнения (3).

Теорема 2. *Пусть* $t^{-1/2}f(t)\in L_\infty(0,T)$. *Тогда интегральное уравнение* (3) *имеет общее решение* $\varphi(t) = C\varphi_{hom}(t)+\varphi_{part}(t)\in L_\infty(0,T);t^{-1/2})$, *т. е.* $t^{-1/2}\varphi(t)\in L_\infty(0,T)$, $C=const$, *где* $\varphi_{hom}(t)$ *и* $\varphi_{part}(t)$ *являются решениями соответственно однородного (при* $f(t)\equiv 0$*) и неоднородного интегральных уравнений* (3).

Работа выполнена при поддержке грантов AP05130928, AP05132262 и BR05236693 КН МОН РК.

ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО СЕТОЧНЫМ ДАННЫМ

Егоршин А. О.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
egorshin@math.nsc.ru

1. Рассматриваются вариационные задачи оптимизации приближений (сглаженных последовательностей) $\widehat{\mathbf{y}}$ к исходным $(L+1)$-последовательностям $\mathbf{y}$ отсчетов функций на заданной сетке решениями обыкновенных линейных дифференциальных или разностных уравнений. Коэффициенты уравнений считаются постоянными. Они могут быть неизвестны. Тогда осуществляется их оптимизация. Она выполняется на основе критериев наилучшей аппроксимации заданных последовательностей отсчетов функций или наблюдаемых сигналов решениями указанных уравнений в конечных интервалах: $J = \|\mathbf{y}-\widehat{\mathbf{y}}\|^2$. Здесь $\sum_0^n \widehat{y}_{i+k}\alpha_i^* = 0$, $k = \overline{1, N}$, $N = L - n$.

Идентификация дифференциальных уравнений по исходным данным в виде упорядоченной последовательности $\mathbf{y}$ отсчетов их решений на сетках (с возможными ошибками регистрации этих отсчетов) состоит из двух этапов. Первый этап есть вариационная идентификация указанной последовательности $\mathbf{y}$ отсчетов решения ДУ. Результатом решения задачи идентификации является показанное разностное уравнение (вектор его коэффициентов $\widehat{\alpha}$) и одно из его решений $\widehat{\mathbf{y}}$.

Завершающий этап идентификации ДУ есть вычисление коэффициентов ДУ по коэффициентам полученного в результате указанной идентификации РУ. Этот этап называется дифференциальной аппроксимацией РУ. Дифференциальная аппроксимация РУ также исследуется в докладе.

2. Большинство известных и применяемых на практике методов оценивания (идентификации) коэффициентов обыкновенных линейных разностных стационарных уравнений моделей указанного класса относятся к числу так называемых алгебраических или разомкнутых методов. Алгебраические методы основаны на минимизации невязок (ошибок) уравнений моделей при подстановке исходных данных $\mathbf{y} = \{y_i\}_0^L$ в уравнения. Простота и линейность алгебраических методов идентификации для представленного выше класса моделей обеспечили их широкое распространение и известность.

Практика применения таких методов, экспериментальные их исследования подтверждают, что алгебраические методы идентификации, минимизирующие невязки по независящей от их коэффициентов мере, в непростых условиях (значительные ошибки и незначительный объем данных) неработоспособны.

Объясняется это тем, что в алгебраических (разомкнутых) методах идентификации, разностное уравнение рассматривается как совокупность N независимых алгебраических соотношений. Таким образом, в этих методах не учитываются, во-первых, заранее известные взаимные зависимости между этими соотношениями. Уже пренебрежение этой априорной информацией уменьшает устойчивость результатов оценивания к ошибкам в исходных данных.

Во-вторых, в разомкнутых методах не учитываются обратные связи, замкнутость динамических моделей. Они показаны в представленном выше уравнении и учтены в изучаемой постановке вариационной задачи. Замкнутость, обратные связи в динамических моделях повышают устойчивость задач оценивания векторов их коэффициентов α к ошибкам в исходных данных $\mathbf{y} = \{y_i\}_0^L$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00754).

НОВЫЙ ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА RTH: СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Ерохин Г. Н.

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия;
GErokhin@kantiana.ru

Метод Reverse Time Holography (RTH) основывается на идеях “сейсмоголографии”, развиваемых в 80-х годах прошлого столетия в школах выдающих советских ученых академиков А. С. Алексеева, М. М. Лаврентьева и С. В. Гольдина. Метод RTH обеспечивает пересчет исходных сейсмических данных формата Common Depth Point (CDP) в векторные данные “общей точки изображения” (CIG — Common Image Gathers) с сохранением детальной информации об амплитудах, фазах и частотах кругового вращения двух взаимосвязанных векторов: вектора падающей волны и вектора обращенной во времени “обратной” волны (данные VDCIG — Vector Domain Common Image Gathers) [1–3]. Пересчитанные векторные данные VDCIG имеют существенно больший, чем исходные данные, CDP объем (в среднем на три порядка), но позволяют делать одномоментные построения с помощью специального вида “Условий Изображения” (Imaging Condition), высокоточных атрибутов, которые включают, как частный случай, все известные атрибуты глубинной миграции, Amplitude Versus Offset (AVO): рефлекторы, дифракторы, изображения на дуплексных волнах, углы наклонов, анизотропию рассеяния, азимутальную анизотропию, AVO атрибуты, скоростной разрез и пр. Одновременно с ними естественным образом возникают совершенно новые атрибуты сейсмических разрезов, связанные со статистической оценкой многомерных распределений (дисперсия, асимметрия, эксцесс, ковариация и пр.).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-29-15090).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Erokhin G., Pestov L., Danilin A., Kozlov M., Ponomarenko D.* Interconnected vector pairs image conditions: new possibilities for visualization of acoustical media // SEG Technical Program Expanded Abstracts 2017. Society of Exploration Geophysicists. P. 4624–4629.
2. *Erokhin G., Danilin A., Kozlov M.* Extension of the common image gathers by VPRTM method // SEG Technical Program Expanded Abstracts 2018. Society of Exploration Geophysicists. P. 4438–4442.
3. *Erokhin G., Danilin A., Kozlov M.* Visualization of Ultra-Weak Diffractors based on Vector Pair RTM // 80th EAGE Conference and Exhibition 2018.

СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ С РАЗНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ГЕНЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛАЗМЕ С ДВУМЯ ВСТРЕЧНЫМИ ПУЧКАМИ

Ефимова А. А.[1], **Берендеев Е. А.**[2]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]efimova@ssd.sscc.ru, [2]berendeev@ssd.sscc.ru

В настоящее время быстроразвивающимся направлением в физике является разработка новых источников терагерцового излучения, которые могут быть использованы в фундаментальных исследованиях и практических приложениях в области медицины, информатики, томографии. Одним из методов получения мощного электромагнитного излучения терагерцового диапазона частот является его генерация в процессе взаимодействия электронного пучка с плазмой. Однако, выход генерируемого излучения, частота которого близка к плазменной, ограничен эффектом плазменной экранировки, что крайне существенно для систем с поперечным размером плазмы, существенно превышающим длину излучаемых электромагнитных волн. Увеличить частоту генерируемого излучения до двойной плазменной частоты можно в режиме инжекции двух встречных пучков в однородную плазму.

Трудности определения в рамках точной кинетической теории наиболее подходящих для генерации излучения параметров плазмы и инжектируемых пучков связаны с нелинейным турбулентным характером протекающих процессов. Именно поэтому важным шагом на пути решения этой проблемы является численное моделирование. В данной работе решение задачи генерации высокочастотного электромагнитного излучения в результате взаимодействия встречных релятивистских электронных пучков в однородной плазме получено на основе 2D3V кинетической численной модели. Рассматриваются модели с периодическими граничными условиями и с открытыми границами, обеспечивающими непрерывный ввод пучков в полностью ионизованную плазму и позволяющие исследовать процессы генерации и выхода электромагнитного излучения. Используемые параметры плазмы и релятивистского электронного пучка соответствуют условиям лабораторных экспериментов на установке ГОЛ3 (ИЯФ СО РАН). Разработанная модель с открытыми границами также может быть использована для моделирования терагерцового излучения при взаимодействии с плазмой лазерных импульсов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-07-00446).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РЕАГИРУЮЩЕГО ГАЗА С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Жалнин Р. В.[1], Масягин В. Ф.[2], Пескова Е. Е.[3]

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, Саранск, Россия;
[1]zhrv@mrsu.ru, [2]masyaginvf@mrsu.ru, [3]e.e.peskova@mail.ru

В настоящее время численное моделирование течений многокомпонентного реагирующего газа является актуальной задачей, оно позволит исследовать данные явления при различных условиях протекания реакций. Также при исследовании большинства химико-технологических процессов необходимо учитывать влияние дополнительных источников энергии (подвод тепла, излучение), которые влияют на характер и скорость протекания химических превращений.

Исследование посвящено построению математической модели и вычислительного алгоритма для исследования динамики многокомпонентного реагирующего газа с учетом теплового и лазерного излучений. Данная работа является продолжением работы [1], в которой авторы разработали и успешно верифицировали численный алгоритм на основе схемы WENO для моделирования течения многокомпонентного реагирующего газа с учетом теплового излучения.

В работе исследуются газовые течения с малыми числами Маха, что обуславливает использование модификации уравнений Навье – Стокса, представленной в работах [2, 3]. Используется процедура расщепления по физическим процессам. Сначала проводится расчет уравнений химической кинетики с помощью экономичной схемы второго порядка точности, предложенной Н. Н. Калиткиным в работе [4]. Затем интегрируются законы сохранения с использованием начального поля давления. На основе найденных значений концентраций, плотности, температуры и предварительного поля скорости рассчитываются поправки к давлению и скорости газового потока. Учет эффектов от поглощения лазерного излучения проводится при решении уравнений неразрывности для каждой компоненты газовой смеси. Проведена серия тестовых расчетов.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.6958.2017/8.9), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00102), регионального гранта РФФИ (проект № 18-41-130001) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-2007.2018.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жалнин Р. В., Пескова Е. Е., Стадниченко О. А., Тишкин В. Ф.* Моделирование течения многокомпонентного реагирующего газа с использованием алгоритмов высокого порядка точности // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2017. Т. 27, № 4. С. 608–617.
2. *Almgren A. S., Bell J. B., Colella P., Howell L. H., Welcome M. L.* A conservative adaptive projection method for the variable density incompressible Navier–Stokes equations // J. Comput. Phys. 1998. V. 142, No 1. P. 1–46.
3. *Day M. S., Bell J. B.* Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // Combust. Theory Model. 2000. V. 4, No. 4. P. 535–556.
4. *Белов А. А., Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В.* Моделирование химической кинетики в газах // Мат. моделирование. 2016. Т. 28, № 8. С. 46–64.

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Жанатауов С. У.

Казахский национальный аграрный университет,
Алматы, Республика Казахстан; sapagtu@mail.ru

Решена новая спектральная задача — ОСЗ 6, обратная к Прямой Спектральной Задаче. ПСЗ: $R_{nn} \Rightarrow (C_{nn}, \Lambda_{nn})$ имеет единственное решение с точностью до ортогонального преобразования. Для ПСЗ разработаны несколько ОСЗ. Рассмотрим ОСЗ 6 [1]: для известных значений собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\Lambda_{nn} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, таких, что $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n > 0$, известных и заданных значений некоторых компонент n собственных векторов $c_1, \ldots, c_n$ из матрицы $C_{nn} = [c_1|\ldots|c_n]$ найти: 1) новые модельные значения известных компонент n псевдособственных векторов $c_1^+, \ldots, c_n^+$, $c_j^+ = (c_{1j}^+, \ldots, c_{nj}^+)^T$, $j = 1, \ldots, n$, из новой матрицы $C^{nn} = C_{nn}^+ = [c_1^+|\ldots|c_n^+]$ псевдособственных векторов; 2) полученная матрица собственных чисел Λ_{nn}^+ должна иметь значения, равные 1: $\Lambda_{nn}^+ = diag(1, \ldots, 1) = I_{nn}$; 3) полученные полные матрица собственных чисел Λ_{nn}^+ и матрица псевдособственных векторов C^{nn} должны удовлетворять соотношениям: $C_{nn}^{+T} C_{nn}^+ \neq I_{nn}$, $C_{nn}^+ C_{nn}^{+T} = I_{nn}$, $C_{nn}^+ \Lambda_{nn}^+ C_{nn}^{+T} = I_{nn}$, $c_j^+ \Lambda_{nn}^+ c_j^{+T} = 1$, $c_j^+ \Lambda_{nn}^+ c_j^{+T} = r_{ij}^+ = 0$, $r_{ij}^+ = r_{ji}^+ = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, а корреляционная матрица $R_{nn}^+ = C_{nn}^+ \Lambda_{nn}^+ C_{nn}^{+T} = I_{nn}$ должна иметь новые матрицы псевдособственных векторов $C_{nn}^+ \neq I_{nn}$ и собственных чисел $\Lambda_{nn}^+ = I_{nn}$. Указаны отличия ОСЗ 1 [2] и ОСЗ 6 [1] друг от друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhanatauov S. U.* A matrix of values the coefficients of combinational proportionality // Theor. Appl. Sci. 2019. V. 71, No. 3. P. 401–419.
2. *Chalmers C. P.* Generation of correlation matrices with a given eigen-structure // J. Stat. Comput. Simulation. 1975. V. 4, No. 2. P. 133–139.

ЯВНО-ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

Жуков В. Т.[1], **Феодоритова О. Б.**[2]

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия; [1]zhukov@kiam.ru, [2]feodor@kiam.ru

Предложена новая явно-итерационная схема интегрирования по времени трехмерных уравнений Навье – Стокса, описывающих течения сжимаемого теплопроводного газа. Схема основана на расщеплении расчета одного шага по времени на конвективный и диффузионный этапы. Конвективный этап реализуется по схеме С. К. Годунова, диффузионный — по явно-итерационной схеме ЛИ-М [1], особенность которой — отсутствие ограничения на шаг по времени. Эта схема построена как модификация схемы [2] решения краевых задач для уравнений параболического типа. Расчетная схема для исходной системы обеспечивает выполнение основных законов сохранения. Подход, сочетающий принцип расщепления и свойства схемы ЛИ-М, изложен в [3]. Алгоритмическая реализация проведена на неструктурированных сетках в рамках комплекса программ [4].

В упрощенном изложении диффузионный этап состоит в интегрировании на отрезке $[t,\ t+\tau]$ двух подсистем дифференциально-разностных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_h^U\ U, \qquad \frac{\partial E}{\partial t} = L_h^E\ E$$

с шагом τ, определенным на конвективном этапе. Первая подсистема описывает вязкие процессы, вторая — теплопроводные, L_h^U, L_h^E — линейные самосопряженные неотрицательно-определенные эллиптические операторы. Их возможная зависимость от U, E учитывается с нижнего слоя по времени. Здесь $U = (u, v, w)$, E — вектор скорости и температура (или внутренняя энергия). Алгоритм схемы ЛИ-М построен на основе многочленов Чебышева I рода степени p. Такой многочлен на текущий момент дискретного времени определяется однозначно шагом по времени τ и верхней границей λ_{max} разностного эллиптического оператора $L_h = [L_h^U,\ L_h^E]$. Степень p многочлена определяется параболическим числом Куранта $K = \tau\lambda_{max}$, $p = 0.25\pi\sqrt{K}$. Каждый шаг схемы ЛИ-М состоит из $q = 2p-1$ итераций, алгоритмически эквивалентных явной схеме счета. Результаты расчетов демонстрируют хорошую эффективность по точности и объему вычислительных затрат. Явный характер вычислений гарантирует эффективность использования схемы в параллельных технологиях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-71-30014).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков В. Т.* О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Мат. моделирование. 2010. Т. 22, № 10. С. 127–158.
2. *Локуциевский В. О., Локуциевский О. В.* О численном решении краевых задач для уравнений параболического типа // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 540–544.
3. *Жуков В. Т., Феодоритова О. Б., Дубень А. П., Новикова Н. Д.* Явное интегрирование по времени уравнений Навье – Стокса с помощью метода локальных итераций // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2019. № 12.
4. *Абалакин И. В., Бахвалов П. А., Горобец А. В., Дубень А. П., Козубская Т. К.* Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13, вып. 3. С. 110–125.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ДРОБНОЙ АЛЬФА-МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Звягин А. В.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
zvyagin.a@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Исследуется следующая начально-краевая задача, являющая альфа-моделью [1] для дробной вязкоупругой жидкости Фойгта [2]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\lambda} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))\, ds + \nabla p = f;$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x))\, ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \overline{\Omega};$$

$$u = (I - \alpha^2 \Delta)^{-1} v, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega;$$

$$\mathrm{div}\, v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega; \qquad v|_{\partial\Omega} = 0, \qquad v|_{t=0} = v_0.$$

Здесь, v — вектор-функция скорости движения частицы среды, u — вектор-функция модифицированной скорости движения частицы среды, p — функция давления, f — функция плотности внешних сил, $z(\tau; t, x)$ — траектория частицы среды, $\mathcal{E}$ — тензор скоростей деформации, $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция Эйлера, $\alpha > 0$, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $0 < \lambda < 1$ — некоторые константы.

Теорема. *Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^0$. Тогда исследуемая начально-краевая задача имеет хотя бы одно слабое решение $v \in W = \{v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0),\ v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\}$. Кроме того, если рассмотреть семейство изучаемых альфа-моделей, зависящих от параметра α_m, то при $\alpha_m \to 0$ существует последовательность решений v_m, которая сходится к слабому решению $v \in W$ классической начально-краевой задачи для дробной модели вязкоупругой среды Фойгта.*

Доказательство данной теоремы основано на аппроксимационно-топологическом подходе к исследованию задач гидродинамики [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 14.Z50.31.0037).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Звягин А. В., Звягин В. Г., Поляков Д. М.* Разрешимость альфа-моделей гидродинамики // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2016. № 2. С. 72–93.
2. *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. A. 2018. V. 38, No. 12. P. 6327–6350.
3. *Zvyagin V. G.* Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics // J. Math. Sci. 2014. V. 201, No. 6. P. 830–858.

ДИНАМИКА ПЛАСТИНЫ С УПРУГО ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ

Звягин А. В.[1], **Садыгова Н. Э.**[2]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

[1]zvyagin.aleksandr2012@yandex.ru, [2]nigu_s@hotmail.com

В работе рассматривается задача о динамической нагрузке балки ударяющим телом в присутствии промежуточного демпфера — пружины заданной жёсткости. Необходимо определить совместное движение механической системы: балка – пружина – тело, пренебрегая массой пружины. Движение балки моделируется уравнениями цилиндрических колебаний пластины. Получена система уравнений для совместного движения системы балка – пружина – тело, состоящая из уравнений для прогиба балки и уравнения движения тела, с учётом жёсткости пружины. Система уравнений, моделирующая движение, состоит из уравнений в частных производных четвёртого порядка по координате и второго порядка по времени, одним из граничных условий является обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по времени (уравнение движения тела). Задача решается методом интегрального преобразования Лапласа по времени [1]. Найдено аналитическое решение для образов. Для обращения полученного решения используется численный метод (метод Дурбина [2, 3]). Метод протестирован сверкой с точным решением для малых начальных времён. Проведен анализ поведения во времени основных искомых функций. Построены иллюстрирующие графики. Также показана зависимость искомых функций от основных параметров задачи: жёсткости пружины и изгибной жёсткости балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. М.: ГИТТЛ, 1951.
2. *Крылов В. И.* Методы приближенного преобразования Фурье обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974.
3. *Durbin F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate’s method // Comput. J. 1974. V. 17, No. 4. C. 371–376.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Зикиров О. С., Сагдуллаева М. М.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; zikirov@yandex.ru

В работе изучается нелокальная начально-краевая задача для уравнения в частных производных третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u = f(x,t), \qquad (1)$$

где $c(x,t)$, $f(x,t)$ — заданные функции в области.

Уравнения в частных производных третьего порядка лежат в основе математических моделей различных физических явлений и процессов.

Например, уравнение

$$\nu\,\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

описывает распространение плоской волны в вязкоупругом твердом теле или в сжимаемой вязкой жидкости с незначительной удельной теплопроводностью [1].

Для уравнения (1) в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\, 0 < t < T\}$ рассмотрим нелокальную задачу в следующей постановке: найти регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), непрерывное в $\overline{D}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (2)$$

$$u(0,t) = \lambda(t)\int_0^l u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau + \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (3)$$

$$u_x(l,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad (4)$$

здесь $\varphi_i(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = 1,2)$, $\lambda(t)$ и $\rho(t,\tau)$ — заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_1'(l) = \mu_2(0), \quad \varphi_1(0) = \lambda(0)\int_0^l \varphi_1(x)dx + \mu_1(0).$$

В поставленной задаче в краевых условиях содержится нелокальность по времени, что впервые рассмотрено в работе А. И. Кожанова [2].

При определенных условиях гладкости на заданные функции доказывается регулярная разрешимость поставленной нелокальной задачи (1)–(4).

Работа выполнена при поддержке Межгосударственного Российско – Узбекского проекта MRU–OT–1/2017.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.
2. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.

МУЛЬТИ-ПРЕДОБУСЛОВЛЕННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ КРЫЛОВА

Ильин В. П.[1,2]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
ilin@sscc.ru

Рассматриваются итерационные методы в подпространствах Крылова для решения больших систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными плохо обусловленными матрицами, симметричными и несимметричными, вещественными и комплексными, возникающими при аппроксимациях многомерных краевых задач на неструктурированных сетках. Исследуются семейства вариационных схем с разными свойствами ортогональности, биортогональнсти и полусопряжённости, в том числе с несколькими предобуславливающими матрицами на каждом шаге, динамически меняющимися от итерации к итерации. Проводится анализ алгебраических методов декомпозиции областей и многосеточных алгоритмов, а также других подходов к ускорению итерационных процессов, основанных на грубосеточной коррекции, дефляции, агрегации и малоранговых аппроксимациях исходных матриц, основанных на пополнениях пространств Крылова. Рассматриваются многоуровневые крыловские алгоритмы с рестартами и применением методов наименьших квадратов во избежание деградации скорости сходимости итераций. Обсуждаются вопросы масштабируемого распараллеливания алгоритмов на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной и иерархической общей памятью. Формулируются основные теоремы о свойствах предлагаемых итерационных процессов, а их эффективность и производительность демонстрируются результатами численных экспериментов.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Кабанихин С. И.[1,2,3], **Шишленин М. А.**[1,2,3]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[3]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
Kabanikhin@sscc.ru, Maxim.Shishlenin@sscc.ru

В докладе представлены методы определения функции потока $k(x)$ и $f(u)$ в скалярном гиперболическом законе сохранения [1–3]

$$u_t + \Big(k(x)f(u)\Big)_x = 0$$

по некоторой дополнительной информации о решении $u(x,t)$ задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0) = u_0.$$

Обсуждаются алгоритмы восстановления функций $k(x)$ и $f(u)$. В случае модели транспортных потоков на автомагистралях $u(x,t)$ обозначает плотность автомобилей в момент времени t в точке x, произведение $k(x)f(u(x,t))$ представляет поток автомобилей, которые пересекают каждую точку x в момент времени t за единицу времени, а функция $k(x)$ описывает конкретные характеристики дороги в точке x. В этом случае обратная задача заключается в определении неизвестных свойств k и f рассматриваемой дороги по результатам мониторинга результирующей плотности движения автомобилей.

Наряду с оптимизацией рассматриваются метаэвристические алгоритмы. Проведен сравнительный анализ численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berres S, Bürger R., Coronel A., Sepúlveda M.* Numerical identification of parameters for a strongly degenerate convection-diffusion problem modelling centrifugation of flocculated suspensions // Appl. Numer. Math. 2005. V. 52, No. 4. P. 311–337.
2. *Fernández–Berdaguer E. M., Savioli G. B.* An inverse problem arising from the displacement of oil by water in porous media // Appl. Numer. Math. 2009. V. 59, No. 10. P. 2452–2466.
3. *Castro C., Zuazua E.* Flux identification for 1-d scalar conservation laws in the presence of shocks // Math. Comput. 2011. V. 80, No. 276. P. 2025–2070.

ТЕПЛОВАЯ ВОЛНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ: ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Лемперт А. А.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; kazakov@icc.ru

Рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности со степенной нелинейностью [1] при наличии источника [2], которое в случае пространственных симметрий может быть записано в следующем виде:

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2 + \frac{\nu}{\rho}uu_\rho + F(u). \tag{1}$$

Здесь u — искомая функция (коэффициент теплопроводности); t — время; ρ — пространственная координата; $\sigma > 0$ — константа, характеризующая свойства среды; ν — константа, принимающая значения $0, 1, 2$ в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно; $F(u), F(0) = 0$ — функция источника или строка (в зависимости от знака функции). Уравнение (1) также иногда называют уравнением нелинейной фильтрации [3].

Содержательным классом решений уравнения (1) являются тепловые волны, движущиеся по абсолютно холодному фону с конечной скоростью [2, 3]. Распространение возмущений с конечной скоростью, как известно, нетипично для параболических уравнений. Причиной возникновения подобного эффекта, по-видимому, является вырождение типа уравнения (1) при $u = 0$, т. е. на фронте тепловой волны. К такого рода решениям приводит, в частности, задание для уравнения (1) следующего граничного условия:

$$u(t,\rho)|_{\rho=R(t)} = f(t),\ R(t) > 0,\ f(0) = 0,\ f'(0) \geq 0,\quad [f'(0)]^2 + [R'(0)]^2 \neq 0. \tag{2}$$

Ранее авторами рассматривалась задача (1), (2) при $F(u) \equiv 0$, т. е. когда источник отсутствует. Были доказаны теоремы существования и единственности аналитических решений [4], а также построены специальные классы точных решений для случая $f(t) \equiv 0$ [5].

В рамках настоящего исследования эти результаты переносятся на случай $F \not\equiv 0$: доказывается теорема существования и единственности аналитического решения задачи (1), (2) с построением решения в виде степенного ряда с рекуррентно определяемыми коэффициентами, а также ищутся новые точные решения задачи (1), (2) при $f(t) \equiv 0$, относящиеся к классам обобщенно-автомодельных и обобщенных бегущих волн, построение которых сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
2. *Самарский А. А. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
3. *Сидоров А. Ф.* Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
4. *Казаков А. Л., Лемперт А. А.* О существовании и единственности краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
5. *Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С.* Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 544–560.

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ БАЗИСОВ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ОТРЕЗКЕ

Казанцев С. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kazan@math.nsc.ru

В работе предложен метод построения базисных полиномов в пространствах Соболева на отрезке $[-1,1]$. Рассмотрим несколько вариантов граничных условий

$P: u^{(j)}(1)=u^{(j)}(-1),\ j=0,1,\ldots,m-1,\ \int_{-1}^{1}u(x)\,\mathrm{d}x=0$ (условие периодичности);

$AP: u^{(j)}(1)=-u^{(j)}(-1),\ j=0,1,\ldots,m-1$ (условие антипериодичности);

$D: u^{(2j)}(1)=u^{(2j)}(-1)=0,\ j=0,1,\ldots,\left[\dfrac{m-1}{2}\right]$ (условие Дирихле);

$N: u^{(2j+1)}(1)=u^{(2j+1)}(-1)=0,\ j=0,1,\ldots,\left[\dfrac{m-2}{2}\right],\ \int_{-1}^{1}u(x)\,\mathrm{d}x=0$

(условие Неймана);

$DN: \begin{cases} u^{(2j)}(-1)=0, & j=0,1,\ldots,\left[\frac{m-1}{2}\right] \\ u^{(2j+1)}(1)=0, & j=0,1,\ldots,\left[\frac{m-2}{2}\right] \end{cases}$ (условие Дирихле – Неймана).

Введем соответствующие этим условиям пространства Соболева (см. [1]).

$H(X,m)=\{u(x): u^{(m)}\in L_2(-1,1), u(x)$ удовлетворяет граничному условию $X\}$.

Здесь условие X может быть, например, одним из выше рассмотренных граничных условий. $H(X,m)$ будет гильбертовым пространством со скалярным произведением $(u,v)_m=\int_{-1}^{1}u^{(m)}(x)v^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x$.

Пусть P_N — полином Лежандра степени N. Полиномиалный базис в $H(X,m)$ строится через решение краевой задачи $u^{(m)}(t)=P_N(t),\ t\in(-1,1)$, с соответствующими краевыми условиями X. Для базисного полинома u степени $m+N$ определяются все значения производных на концах отрезка $[-1,1]$ из системы

$$2\mathrm{i}^{m+N}\left(\frac{\mathrm{j}_N(z)}{z^m}\right)_0+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k u^{(k)}(1)+u^{(k)}(-1)}{(k+1)!}=\int_{-1}^{1}u(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$2\mathrm{i}^{m+N}\left(\frac{\mathrm{j}_N(z)}{z^m}\right)_{-\ell}+\sum_{k=\ell-1}^{m-1}\frac{(-1)^k u^{(k)}(1)+(-1)^\ell u^{(k)}(-1)}{(k-\ell+1)!}=0,\ \ell=1,\ldots,m,$$

где $\mathrm{j}_N(z)$ — сферическая функция Бесселя и $\left(\frac{\mathrm{j}_N(z)}{z^m}\right)_{-\ell}$ — коэффициент при $(\mathrm{i}z)^{-\ell}$ в главной части разложения Лорана $\frac{\mathrm{j}_N(z)}{z^m}=\sum_{\ell=-m}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{j}_N(z)}{z^m}\right)_\ell(\mathrm{i}z)^\ell$. После определения производных $u^{(k)}(\pm1)$ полином можно записать в виде суммы Тейлора

$$u(x)=\sum_{k=0}^{m+N}\frac{u^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k=\sum_{k=0}^{m+N}\frac{u^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yamagishi H., Kametaka Y., Nagai A., Watanabe K., Takemura K.* Riemann zeta function and the best constants of five series of Sobolev inequalities (Expansion of integrable systems) // RIMS Kokyuroku Bessatsu. 2009. B13. P. 125–139.

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ФИЗИКИ АТМОСФЕРЫ

Калинин А. В.[1], Тюхтина А. А.[2], Изосимова О. А.[3]

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия;
[1]avk@mm.unn.ru, [2]kalinmm@yandex.ru, [3]izosimova93@yandex.ru

К основным квазистационарным приближениям для системы уравнений Максвелла относятся магнитное нерелятивистское приближение и электрическое нерелятивистское приближение [1]. Оба этих приближения обусловлены достаточной медленностью процессов, но выбор того или иного из них зависит от физических свойств среды и, в частности, от её проводимости.

Магнитное нерелятивистское приближение [2–4] заключается в пренебрежении током смещения и применяется для описания медленных процессов в средах с достаточно высокой проводимостью. Электрическое нерелятивистское приближение применяется для описания медленных процессов в средах с малой проводимостью, в частности, при моделировании электромагнитных процессов в нижних слоях атмосферы. В этом приближении ток смещения сохраняется, но электрическое поле считается потенциальным.

В реальных задачах весьма распространенным случаем являются существенно неоднородные среды: рассматриваемая область может содержать проводящие, непроводящие и слабопроводящие подобласти. Примером служит атмосфера Земли, проводимость которой экспоненциально возрастает в зависимости от высоты [5, 6].

В настоящей работе приводится формулировка квазистационарного приближения для системы уравнений Максвелла, обусловленного лишь медленностью процессов и пригодного для описания неоднородных сред, включающих в себя области с высокой и малой проводимостью. Исследуются постановки задач для возникающей системы дифференциальных уравнений, устанавливается близость квазистационарных решений к решениям соответствующих нестационарных задач при условии медленности процессов. В качестве примера применения данного приближения обсуждается вопрос о моделировании глобальной электрической цепи в атмосфере Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Толмачев В. В., Головин А. М., Потапов В. С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
3. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
4. *Alonso Rodriguez A., Valli A.* Eddy current approximation of Maxwell equations. Theory, algorithms and applications. Milan: Spriner-Verlag, 2010.
5. *Мареев Е. А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180, № 5. С. 527–534.
6. *Kalinin A. V., Slyunyaev N. N.* Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 450, No. 1. P. 112–136.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В НЕДИВЕРГЕНТНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Камынин В. Л.

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия; vlkamynin2008@yandex.ru

В докладе рассматриваются две обратные задачи одновременного определения коэффициентов перед u и u_x в параболическом уравнении с двумя независимыми переменными.

Обратная задача 1.

Определить тройку функций $\{u(t,x), b(x), c(x)\}$, удовлетворяющих в $Q \equiv [0,T]\times[-l,l]$ уравнению

$$\rho u_t - u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u = f(t,x), \quad (t,x)\in Q;$$

краевым условиям

$$u(0,x) = u_0(x),\ x\in[-l,l]; \quad u(t,-l) = \mu_1(t),\ u(t,l) = \mu_2(t),\ t\in[0,T];$$

и условиям интегрального наблюдения

$$\int_0^T u(t,x)\omega(t)\,dt = \varphi(x),\ \int_0^T u(t,x)\chi(t)dt = \psi(t), \quad x\in[-l,l].$$

Обратная задача 2.

Определить тройку функций $\{u(t,x), b(t), d(t)\}$, удовлетворяющих в Q уравнению

$$u_t - a(t,x)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + d(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x)\in Q;$$

краевым условиям

$$u(0,x) = u_0(x),\ x\in[-l,l]; \quad u(t,-l) = u(t,l) = 0,\ t\in[0,T];$$

и условиям интегрального наблюдения

$$\int_{-l}^{l} u(t,x)\omega(x)\,dx = \varphi(t),\ \int_{-l}^{l} u_x(t,x)\omega(x)\,dx = \psi(t), \quad t\in[0,T].$$

В обоих случаях рассматриваются обобщенные решения: $u(t,x)\in W_2^{1,2}(Q)$, функции b и c ограничены, соответственно, на $[-l,l]$ в случае обратной задачи 1 и на $[0,T]$ в случае обратной задачи 2.

Доказаны теоремы существования и единственности решения данных обратных задач.

Для каждой из рассматриваемых обратных задач мы также получаем оценки максимумов модулей неизвестных коэффициентов уравнения с константами, явно выписанными через входные данные обратных задач.

Кроме того, приводятся нетривиальные примеры обратных задач, к которым применимы доказанные теоремы существования и единственности.

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентноспособности Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ” (Московского инженерно-физического института), проект № 02.а03.21.0005 от 27.08.2013.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Кангужин Б. Е.[1,2], **Жапсарбаева Л. К.**[1,2]

[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан;*
[2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан;*
kanbalta@mail.ru, leylazhk67@gmail.com

В данной работе изучается вопрос восстановления граничных условий дифференциального оператора по заданным спектральным данным. Задачи восстановления коэффициентов дифференциального выражения, порождающего оператор, достаточно хорошо исследованы [1–4]. Граничные обратные задачи в отличие от коэффициентных обратных мало изучены [5]. В данной работе рассматриваются обратные задачи спектрального анализа дифференциальных операторов высших порядков с интегродифференциальными условиями.

Пусть $b < \infty$. Рассматривается спектральная задача

$$l(y) \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)}(x) = \lambda y(x),\ p_k \in C^k[0,b],\ k = 0,1,\dots,n-1, \qquad (1)$$

$$U_\nu(y) \equiv y^{(\nu-1)}(0) - \int_0^b l(y)\overline{\sigma_\nu(x)}dx = 0,\ \nu = 1,\dots,n. \qquad (2)$$

Требуется восстановить граничные условия (2) по набору спектра и коэффициентам $p_k(x), k = 0,1,\dots,n-1$. Задача идентификации граничных функций $\overline{\sigma_\nu(x)}$, $\nu = 1,\dots,n$, эквивалентна восстановлению матрицы, составленной из граничных условий задачи (1), (2). В [6] определены a) невырожденные по В. А. Марченко краевые условия, а также в монографии [7] выделены b) регулярные по Биркгофу краевые условия. Таким образом, получение перечисленных усиленно-регулярных граничных условий a), b) для рассматриваемого дифференциального оператора позволяет восстановить граничные условия (2).

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов КН МОН РК (проекты № AP05131845 и № AP05131292).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, вып. 4. С. 309–360.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М.: Наука, 1984.
3. *Лейбензон З. Л.* Обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков // Тр. Моск. мат. о-ва. 1966. Т. 15. С. 70–144.
4. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2006.
5. *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009.
6. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

КЛАСС ЗАДАЧ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Карачик В. В.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
karachik@susu.ru

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, а $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера, где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. В S рассмотрим класс краевых задач типа Неймана $\mathcal{N}_k$ для однородного полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = 0, \quad x \in S;$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\Big|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \nu^{k+1}}\Big|_{\partial S} = \varphi_2(s), \ldots, \frac{\partial^{k+m-1} u}{\partial \nu^{k+m-1}}\Big|_{\partial S} = \varphi_m(s), \quad s \in \partial S,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ — внешняя нормальная производная к единичной сфере, функции $\varphi_i(s)$ при $i = 1, \ldots, m$ определены на ∂S. Класс задач $\mathcal{N}_k$ является частным случаем краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными высокого порядка в граничных условиях, рассмотренных в [1]. Задача $\mathcal{N}_0$ является задачей Дирихле [2], которая безусловно разрешима, а задача $\mathcal{N}_1$ совпадает с задачей Неймана [3]. Имеются и другие постановки задач типа Неймана [4]. Следующее утверждение основано на результатах работы [5].

Теорема. *Пусть функции $\varphi_i(s)$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ такие, что решение $u(x)$ задачи $\mathcal{N}_k$ для однородного полигармонического уравнения существует и оно такое, что $u \in C^{k+m-1}(\bar{S})$. Тогда при всяком $l \in \mathbb{N}_0$ таком, что $l < k$, должны быть выполнены следующие условия ортогональности*

$$\int_{\partial S} H_l(x)\Big(p_1^{(m-\lambda)}\varphi_{\delta_\lambda+1}(s)+\ldots+p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)}\varphi_{m-\sigma_\lambda}(s)\Big)\, ds_x = 0,\ \lambda = \overline{\lambda_0, \min\{k-l, m\} - 1},$$

$$\int_{\partial S} H_l(x)\varphi_i(s)\, ds_x = 0, \quad i = \max\{2m + l - k, 0\} + 1, \ldots, m,$$

где $\lambda_0 = [(k-l)/2]$, $H_l(x)$ — произвольный однородный гармонический полином степени l, коэффициенты $p_j^{(i)}$ имеют вид

$$p_j^{(i)} = (-1)^{i-j}\binom{2i-j-1}{j-1}\frac{(2i-2j+1)!!}{2i-2j+1},$$

$\delta_\lambda = 2\lambda - k + l + 1$, $\sigma_\lambda = k - l - \lambda - 1$. Число полученных условий при $l < k$ равно $\min\{[(k-l+1)/2], m\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карачик В. В.* Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 5. С. 51–58.
2. *Карачик В. В.* Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 1038–1047.
3. *Карачик В. В.* Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 11. С. 1455–1461.
4. *Карачик В. В.* Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Мат. тр. 2016. Т. 19, № 2. С. 86–108.
5. *Карачик В. В.* Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 533–551.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДАННЫМИ НА ВРЕМЕНИПОДОБНОЙ ГРАНИЦЕ

Карчевский А. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
karchevs@math.nsc.ru

В работе представлено усовершенствование метода нагреваемой тонкой фольги, который позволяет изучать стационарные и нестационарные процессы переноса в области контактной линии "твердое тело – воздух – жидкость". Математически задачи сводятся к решению задачи Коши для эллиптического уравнения и решению уравнения теплопроводности с данными на времениподобной границе. Предложенные методы решений апробированы на реальных данных, полученных в ходе лабораторных экспериментов. Результаты опубликованы [1–7].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00538).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karchevsky A. L.* Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2013. V. 1, No. 2. P. 4–20.
2. *Marchuk I., Karchevsky A., Surtaev A., Kabov O.* Heat flux at the surface of metal foil heater under evaporating sessile droplets // International Journal of Aerospace Engineering. 2015. V. 2015, Article ID 391036.
3. *Karchevsky A. L., Marchuk I. V., Kabov O. A.* Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line // Appl. Math. Model. 2016. V. 40, No. 2. P. 1029–1037.
4. *Cheverda V. V., Marchuk I. V., Karchevsky A. L., Orlik E. V., Kabov O. A.* Experimental investigation of heat transfer in a rivulet on the inclined foil // Thermophysics and Aeromechanics. 2016. V. 23, No. 3. P. 415–420.
5. *Cheverda V., Karchevsky A.* The heat flux near the contact line of the droplets on heated foil // MATEC Web Conf. 2016. V. 84, Paper Number 00007.
6. *Cheverda V. V., Karchevsky A. L., Marchuk I. V., Kabov O. A.* Heat flux density in the region of droplet contact line on a horizontal surface of a thin heated foil // Thermophysics and Aeromechanics. 2017. V. 24, No. 5. P. 803–806.
7. *Karchevsky A. L.* Development of the heated thin foil technique for investigating nonstationary transfer processes // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2018. V. 6, No. 3. P. 179–185.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОСОГО СОУДАРЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Киселев С. П.[1], **Мали В. И.**[2]

[1] *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия;* kiselev@itam.nsc.ru

[2] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* mali@hydro.nsc.ru

В докладе представлены результаты экспериментов и численного моделирования методом молекулярной динамики (МД) косого соударения медных и алюминиевых пластин при различных углах и скорости соударения. В экспериментах структура течения определялась с использованием рентгено-импульсных установок. Численное моделирование выполнялось методом молекулярной динамики (МД) с использованием многочастичных ЕАМ потенциалов взаимодействия атомов. Детали численного моделирования описаны в работе [1]. В результате проведенного численного моделирования дано объяснение явления волнообразования при косом соударении металлических пластин. Показано, что образование волн на поверхности контакта пластин обусловлено неустойчивостью косого симметричного соударения пластин. В области контакта пластин развивается неустойчивость, приводящая к образованию момента сил, колебания которого приводят к колебанию контактной поверхности. Возникшие автоколебания поддерживаются за счет кинетической энергии соударяющихся пластин, а длина волны определяется вязким взаимодействием струй в области контакта пластин. При малых значениях скорости соударения U металлы проявляют упругие свойства без остаточных деформаций и кумулятивной струи. Подтверждено существование критического значения числа Рейнольдса порядка 2, при котором происходит зарождение кумулятивной струи. При больших числах Рейнольдса значения скорости кумулятивной струи, рассчитанные по модели МД, близки к значениям скорости струи, определенным по модели идеальной жидкости. Результаты расчетов, выполненные при близких значениях безразмерных параметров соударения, качественно верно описывают основные закономерности, наблюдаемые в эксперименте.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00292-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К., Киселев С. П., Куликов И. М., Мали В. И.* Моделирование ударноволновых процессов в упругопластических материалах на различных (атомный, мезо и термодинамический) структурных уровнях. Москва – Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2014.

АЛГОРИТМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

Ковеня В. М.[1], **Бабинцев П. В.**[2]

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]kovenya@ict.nsc.ru, [2]maskot.g@gmail.com

Для численного решения уравнений Эйлера и Навье – Стокса сжимаемого теплопроводного газа предложен класс неявных конечно-объемных алгоритмов предиктор-корректор, основанных на расщеплении уравнений [1, 2]. На этапе предиктора вводятся различные формы расщепления уравнений, что позволяет свести решение исходной системы уравнений на дробных шагах к неявному решению отдельных уравнений, а на этапе корректора аппроксимировать исходные уравнения в консервативной форме и реализовывать их по явным формулам. Среди рассмотренных форм расщепления выбраны те из них, которые обеспечивают максимальную устойчивость схем при минимальном влиянии расщепления на ее свойства. В отличие от классических неявных схем расщепления по направлениям (ADI методов, реализуемых векторными прогонками) этот подход позволяет построить более экономичные алгоритмы по числу операций на отдельную ячейку, сведя их реализацию к скалярным прогонкам или схемам бегущего счета, а по скорости сходимости к стационарному решению он приближается к ADI схемам. Получаемые схемы консервативны, что позволяет использовать их при решении как стационарных, так и нестационарных задач, и обладают вторым (или более высоким) порядком аппроксимации. Исследованы свойства алгоритмов, получены оценки по их точности и скорости сходимости при нахождении стационарного решения методом установления. Найдены численные решения двумерных и пространственных задач аэродинамики и проведено тестирование алгоритма в задачах: взаимодействия ударных волн большой интенсивности; сверхзвуковых течений газа в сужающемся канале при регулярном и нерегулярном отражении скачка уплотнения от плоскости симметрии; течений в канале с уступом в приближении уравнений Эйлера [2]. Проведенные расчеты иллюстрируют возможности рассмотренных алгоритмов и позволяют сделать заключение об их эффективности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковеня В. М.* Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014.
2. *Ковеня В. М., Бабинцев П. В.* Применение алгоритмов расщепления в методе конечных объемов для численного решения уравнений Навье – Стокса // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 3. С. 60–73.

О МОНОТОННОСТИ И ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЁТА

Ковыркина О. А.[1], **Остапенко В. В.**[1,2]

[1]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* olyana@ngs.ru

[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* ostapenko_vv@ngs.ru

Предложен метод построения комбинированных разностных схем сквозного счета, которые с повышенной точностью локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн. В этих схемах используются немонотонная базисная схема, которая с повышенной точностью передает условия Гюгонио через фронт ударной волны, и внутренняя монотонная схема повышенного порядка, которая сглаживает нефизические осцилляции, возникающие в базисной схеме. Приведены две конкретные комбинированные схемы, в первой из которых [1] в качестве базисной используется неявная компактная схема третьего порядка слабой аппроксимации, а во второй [2] — явная схема Русанова третьего порядка классической аппроксимации. В качестве внутренней схемы в обоих случаях используется монотонная модификация схемы CABARET второго порядка [3]. Тестовые расчеты показали, что комбинированные схемы, в отличие от схем типа TVD и WENO, не только обеспечивают монотонность профиля локализованной ударной волны, но также сохраняют повышенную точность в области её влияния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478, № 5. С. 517–522.
2. *Зюзина Н. А., Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482, № 6. С. 639–643.
3. *Kovyrkina O. A., Ostapenko V. V.* Monotonicity of the CABARET scheme approximating a hyperbolic system of conservation laws // Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58, No. 9. P. 1435–1450.

РАВНОМЕРНАЯ ПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИСТЕМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Козлов А. А.[1], **Туфик И. М.**[2]

[1]*Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь;* kozlov@tut.by
[2]*Green Space School, Бейрут, Ливан;* touficissa0@gmail.com

Рассмотрим линейное дифференциальное управляемое уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)v, \quad x \in \mathfrak{H}_1, \quad v \in \mathfrak{H}_2, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_1$. Линейную оператор-функцию $A(\cdot) : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ будем считать интегрально ограниченной, т. е. для нее выполняется неравенство $\sup\limits_{t\geqslant 0} \int_t^{t+1} \|A(\tau)\|\, d\tau \leqslant a$, (под нормой оператора $C : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ подразумевается величина $\|C\| = \sup\Big\{\|Cy\|_2/\|y\|_1,\ y \in \mathfrak{H}_1,\ y \neq 0\Big\}$, где $\|\cdot\|_k$ — норма в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_k$, $k = 1, 2$). Линейную оператор-функцию $B(\cdot) : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_1$ будем полагать непрерывной и ограниченной. В качестве допустимых управлений $v(\cdot)$ в уравнении (1) будем рассматривать измеримые по Лебегу и ограниченные на всей своей области определения функции.

Определение 1. *Оператором управляемости* (*оператором Калмана*) уравнения (1) на отрезке $[t_0, t_1]$ назовем оператор $\mathfrak{W}(t_0, t_1) : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ вида

$$\mathfrak{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} U(t_0, \tau) B(\tau) B^*(\tau) U^*(t_0, \tau)\, d\tau,$$

где $U(t, \tau)$, $t, \tau \geqslant 0$, — эволюционный (разрешающий) оператор [1, с. 147] линейного уравнения (1) с нулевым управлением $v(\cdot)$; символ $*$ означает операцию сопряжения.

Определение 2. [1, с. 50] Оператор $H : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ называют *равномерно положительным,* если его форма (Hx, x) равномерно положительна на единичной сфере $S = \{x,\ \|x\| = 1\}$ в $\mathfrak{H}_1$.

Определение 3. [2, с. 90]. Уравнение (1) называется *равномерно вполне управляемым,* если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ найдется допустимое управление $v : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathfrak{H}_2$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma\|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ уравнения (1) в ноль на этом отрезке.

Теорема. *Уравнение* (1) *σ-равномерно вполне управляемо в том и только в том случае, когда для любого $t_0 \geqslant 0$ оператор Калмана равномерно положителен на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$.*

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция–2020” (подпрограмма 1, задание № 1.2.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Макаров Е. К., Попова С. Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЁРКИНА

Корчагова В. Н.[1,2], Фуфаев И. Н.[3], Сауткина С. М.[2], Марчевский И. К.[1,2], Лукин В. В.[1,2,3]

[1]*Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Москва, Россия;* v.korchagova@ispras.ru
[2]*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;* iliamarchevsky@mail.ru
[3]*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;* vvlukin@gmail.com

В промышленных приложениях (проектирование ракет и стартовых столов, автомобилестроение и пр.) часто встречаются задачи, которые решают в осесимметричной постановке для быстрого получения первичных оценок характеристик течений. К примеру, к таким задачам относится моделирование сверхзвуковых турбулентных газовых струй: безусловно, для получения полной картины атомизации струи необходимо проводить трехмерное моделирование процесса, но для первичного анализа параметров струи (например, давления струи на преграду), можно решить задачу в осесимметричной постановке.

Кроме того, в подобных задачах важным является получение достаточно точного решения на относительно грубой сетке. Для этого используют методы высокого порядка точности, но при их использовании возникает проблема выигрыша во времени: расчет одного шага по времени может быть весьма длительным, что в конечном итоге может привести к более медленному решению полной задачи по сравнению с использованием метода первого-второго порядка точности на более подробной сетке.

Данная работа посвящена разработке эффективной численной схемы на основе разрывного метода Галёркина (DG) для моделирования осесимметричных задач. Ранее авторами были проведены исследования схем RKDG для одномерных и двумерных задач [1, 2], демонстрирующие способности метода к решению задач как с гладким решением, так и с решением, содержащем сильные разрывы. В рамках исследований был создан прототип программного комплекса на языке C++, в котором был реализован модуль для решения осесимметричных задач.

Реализованная численная схема была протестирована на ряде тестовых задач, основанных на основе экспериментов NASA по исследованию сверхзвуковых струй [3]. Показано хорошее соответствие с экспериментом в части моделирования первых "бочек" струй. Также было проведено сопоставление времени расчетов, проведенных с использованием пакета OpenFOAM и разработанной схемы, и точность каждого расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галепова В. Д., Лукин В. В., Марчевский И. К., Фуфаев И. Н.* Сравнительное исследование лимитеров семейства WENO и Hermite WENO для расчета одномерных течений газа методом RKDG // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2017. № 131.
2. *Korchagova V. N., Fufaev I. N., Sautkina S. M., Lukin V. V.* On 2D gas dynamics simulation using RKDG method on structured rectangular meshes // Proc. ISP RAS. 2018. V. 30, No. 2. P. 285–300.
3. *Ladenburg R., van Voorhis C., Winkler J.* Interferometric studies of faster than sound phenomena. Part II. Analysis of supersonic air jets // Phys. Rev. 1949. V. 76, No. 7. P. 662–677.

НОВЫЙ ЭФФЕКТИВНЫЙ ПРЕДОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Костин В. И.[1], **Ключинский Д. В.**[2]

[1] *Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия;* KostinVI@ipgg.sbras.ru

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* dmitriy_klyuchinskiy@mail.ru

Производится моделирование распространения волн в ограниченной среде с условием излучения на бесконечности. Распространение волн описывается уравнением Гельмгольца

$$Lu = \Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(x,y,z)} u = f(x_s, y_s, z_s)$$

в параллелепипеде фиксированного размера $L_x \times L_y \times L_z$. Здесь Δ — оператор Лапласа, ω — угловая частота, $c(x,y,z)$ — скорость звука в среде, f — функция источника. На границе области поставлено нулевое краевое условие Дирихле. Предприняты специальные меры для уменьшения отражений волн от границ.

Для численного решения краевой задачи производится ее аппроксимация разностной схемой. В результате получается СЛАУ $Au = F$ с разреженной матрицей коэффициентов, для решения которой используется технология предобуславливания. Предобуславливатель возьмем в виде

$$L_0 = \Delta + (1 + i\beta)\frac{\omega^2}{c_0^2(x,z)}.$$

Здесь функция $c_0(x,z)$ выбирается близкой к исходной функции $c(x,y,z)$. Оператор L представляется как возмущение оператора L_0, т. е. $L = L_0 - \delta L$. Тогда исходная задача сводится к решению двух уравнений

$$(I - \delta L L_0^{-1})\widetilde{u} = f, u = L_0^{-1}\widetilde{u},$$

первое из которых будет решаться итерационным методом GMRES.

Применение оператора L_0^{-1} к произвольному вектору $\widetilde{u}$ выполняется путем понижения размерности с помощью преобразования Фурье, которое применяется вдоль направления y к функциям решения системы u и правой части f. Для экономии вычислительных ресурсов и повышения скорости обращения оператора L_0 предлагается аппроксимировать внедиагональные блоки разреженной матрицы системы с помощью технологии сжатия данных HODLR.

Идея алгоритма была заимствована в статье [1]. Отличия заключаются в применении одномерного преобразования Фурье вместо двумерного для дальнейшего решения серии СЛАУ большей размерности с использованием технологии сжатия данных с целью получения лучшей производительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belonosov M., Dmitriev M., Kostin V., Neklyudov D., Cheverda V.* An iterative solver for the 3D Helmholtz equation // J. Comput. Phys. 2017. V. 345. P. 330–344.

О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В. Н. ВРАГОВА ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Кошанов Б. Д.[1,2], **Султангазиева Ж. Б.**[2]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан;*
[2] *Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Республика Казахстан;*
koshanov@list.ru, zhanat_87@mail.ru

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с гладкой компактной границей $\Gamma = \partial\Omega$. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$, $S = \Gamma \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv (-1)^p D_t^{2p} u + \Delta u - \lambda u = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, Δ — оператор Лапласа, λ — действительный параметр, $f(x,t)$ — заданная функция.

Краевая задача $I_{p,\lambda}$. Требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q такое, что

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \ k = m, \ldots, m+p, \ x \in \Omega, \tag{3}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \ k = m+1, \ldots, m+p-1, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Постановка краевых задач для таких операторов (1) впервые была предложена В. Н. Враговым [1, 2]. Дальнейшие исследования для подобных операторов связаны с работами [3–6]. Одним из основных условий корректности в этих работах было условие неотрицательности параметра λ.

В данной работе будут проанализированы случаи неотрицательности и положительности параметров λ. Будет также доказано, что однородная задача (1)–(4) имеет линейно независимые решения. Обычно это не имеет места для гиперболического оператора.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-51-41009) и гранта AP 05135319 МОН РК.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
2. *Врагов В. Н.* О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа // Матем. анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5–13.
3. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
4. *Кожанов А. И., Шарин Е. Ф.* Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Укр. мат. висник. 2014. Т. 11, № 2. С. 181–202.
5. *Pinigina N. R.* On the well-posedness of boundary value problems for nonclassical differential equations of higher order // Asian-Eur. J. Math. 2017. V. 10, No. 3. Article ID 1750059.
6. *Кожанов А. И., Пинигина Н. Р.* Краевые задачи для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 101, вып. 3. С. 403–412.

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Кузнецов П. А.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
kuznetcovpa@susu.ru

Одним из наиболее удобных и универсальных численных методов решения задач газовой динамики является метод крупных частиц [1] (МКЧ), использующий принцип расщепления по физическим процессам. МКЧ имеет достаточно простой алгоритм, что определило его широкое распространение. Однако при математическом моделировании течений с большими градиентами параметров приходится вводить “искусственную” вязкость [1, 2] и снижать сеточное число Куранта. В последние годы появились новые модификации МКЧ, например [3], призванные повысить устойчивость расчетов задач волновой динамики. Однако эти модификации не позволяют устранить основной недостаток МКЧ — неустойчивый счет ударных волн в областях нулевых скоростей.

Для повышения устойчивости счета МКЧ в зонах нулевой скорости в данной работе была предложена следующая модификация метода. На эйлеровом этапе для определения давления и скорости на границах ячеек в зонах сжатия следует использовать соотношения на ударной волне, по аналогии с методом В. Ф. Куропатенко [4]. Остальные значения эйлерового этапа определяются согласно [3]. Лагранжев и заключительный этапы проводятся аналогично базовому МКЧ.

Для верификации предложенной модификации были решены следующие модельные задачи: расчет распада произвольного разрыва, а также распространение стационарной ударной волны с отражением от жесткой стенки. Полученные результаты сравнивались с работами [2, 3]. При решении задачи об отражении стационарной ударной волны от жесткой стенки модифицированным МКЧ [3] возникают сильные осцилляции за фронтом УВ. При использовании псевдовязкости, предложенной в работе [2], осцилляции гасятся. Однако, использование псевдовязкости требует подбора эмпирических констант для каждой конкретной решаемой задачи. На этом фоне более универсальной является предложенная в данной работе модификация с расчетом предварительных значений эйлерового этапа на ударной волне из соотношений Гюгонио [4]. В этом случае нет необходимости подбирать эмпирические константы. Отметим, что предложенная в данной работе модификация МКЧ позволяет получать устойчивые расчеты при больших числах Куранта: до $K = 2$ для решенных задач, что является большим преимуществом данной модификации при решении более сложных задач, требующих больших временных затрат по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
2. *Ивандаев А. И.* Об одном способе введения “псевдовязкости” и его применении к уточнению разностных решений уравнений гидродинамики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 2. С. 523–527.
3. *Гришин Ю. А., Зенкин В. А.* Повышение устойчивости вычислительного алгоритма метода крупных частиц // Наука и образование. 2011. № 13. С. 41.
4. *Куропатенко В. Ф.* Метод расчета ударных волн // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133, № 4. С. 771–773.

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА VM2D ПО РЕШЕНИЮ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ И ГИДРОУПРУГОСТИ ВИХРЕВЫМИ МЕТОДАМИ

Кузьмина К. С.[1,2], **Марчевский И. К.**[1,2], **Рятина Е. П.**[1,2]

[1]*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;*
[2]*Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Москва, Россия;*
kuz-ksen-serg@yandex.ru, iliamarchevsky@mail.ru,
evgeniya.ryatina@yandex.ru

Сопряженные задачи гидроупругости возникают во многих инженерных приложениях, при этом не всегда можно ограничиться упрощенными моделями, например, расчетом присоединенных масс или использовать стационарные аэродинамические коэффициенты обтекаемых тел. При существенно нестационарных режимах течения, сопровождающихся интенсивным вихреобразованием, необходимо прямое моделирование течения и расчет действующих на обтекаемую поверхность гидродинамических нагрузок.

Задачи вычислительной гидродинамики сложны с вычислительной точки зрения, поэтому поиск экономичных методов расчета гидродинамических нагрузок и разработка их программных реализаций являются актуальными направлениями исследований. В ряде случаев могут быть эффективными бессеточные лагранжевы вихревые методы. Благодаря переходу от переменных скорость-давление к завихренности, вычислительные ресурсы в вихревых методах “сосредоточены” в сравнительно небольшой области течения — вблизи обтекаемого профиля и в области вихревого следа.

Авторами разработан программный комплекс VM2D [1] с открытым исходным кодом, позволяющий решать различные задачи гидродинамики, в том числе задачи гидроупругости вихревыми методами. В основе комплекса лежит метод вязких вихревых доменов [2] и собственные разработки авторов. Программный комплекс написан на языке C++, имеет модульную структуру и является кроссплатформенным. В VM2D реализованы алгоритмы параллельных вычислений для ЭВМ с общей памятью (OpenMP), кластеров (MPI), графических ускорителей (CUDA), а также имеется возможность их совместного использования. Возможно моделирование внешнего обтекания неподвижных или движущихся (вращающихся, колеблющихся) профилей, некоторых внутренних течений, расчет гидродинамических нагрузок, действующих на обтекаемые профили, а также расчет давления и скоростей в области течения.

Экономичность бессеточных вихревых методов в совокупности с реализованными вычислительными алгоритмами делает использование программного комплекса VM2D для некоторых классов задач эффективной альтернативой широко используемым программным пакетам, реализующим сеточные методы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00245).

ЛИТЕРАТУРА

1. *VM2D: Open-Source Code for 2D Flow Simulation by Using Meshless Lagrangian Vortex Methods.* URL: https://github.com/vortexmethods/VM2D
2. *Андронов П. Р., Гувернюк С. В., Дынникова Г. Я.* Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛОБАЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩИХ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Кучер Н. А.[1], **Жалнина А. А.**[2]

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
[1]`nakycher@rambler.ru`, [2]`qwert1776@yandex.ru`

Разнообразные технологические процессы протекают с участием многокомпонентных химически активных потоков, и потому существует потребность исследования математической структуры и свойств решений соответствующих уравнений.

Для описания движения многокомпонентной химически реагирующей смеси сжимаемых вязких жидкостей (газов) в общем случае используется полная система уравнений Навье – Стокса, дополненная уравнениями реакции-диффузии [1–3]. Эта система уравнений выражает физические законы сохранения массы, импульса, полной энергии смеси, а также баланса масс компонентов.

Результаты о свойствах математических моделей таких смесей в настоящее время сильно не дотягивают до результатов, полученных для классической модели Навье–Стокса вязкой сжимаемой жидкости и моделей многоскоростной смеси [4]. Работы [5, 6] содержат отдельные результаты на эту тему.

В докладе предполагается представить результаты о существовании глобально определенных обобщенных решений начально-краевой задачи для системы уравнений бинарной химически реагирующей смеси вязких сжимаемых жидкостей в случае двумерного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chapman S., Cowling T.* The mathematical theory of non-uniform gases. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases. London: Cambridge University Press, 1970.
2. *Giovangigli V.* Multicomponent flow modeling. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Boston: Birkhauser Boston Inc., 1999.
3. *Waldmann L., Trubenbacher E.* Formale kinetische theorie von gasgemischen aus anregbaren molekulen // Z. Naturforsch. 1962. V. 17a. P. 363–376.
4. *Kucher N. A., Zhalnina A. A.* On the existence of global solutions to equations for mixtures of compressible viscous fluids // J. Phys., Conf. Ser. 2017. V. 894, No. 1. Article ID 012048.
5. *Zatorska E.* On a steady flow of multicomponent, compressible, chemically reacting gas // Nonlinearity. 2011. V. 24, No. 11. P. 3267–3278.
6. *Zatorska E.* On the flow of chemically reacting gaseous mixture // J. Differ. Equations. 2012. V. 253, No. 7. P. 3471–3500.

МОДЕЛЬ ИСПАРЕНИЯ ВОЛЬФРАМА ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКЕ

Лазарева Г. Г.[1], **Максимова А. Г.**[1], **Аракчеев А. С.**[2]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* `lazareva@ssd.sscc.ru`, `maksimova@oapmg.sscc.ru`

[2]*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия;* `asarakcheev@gmail.com`

На экспериментальном стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН, получены новые результаты нагрева вольфрамовой пластины под действием на нее электронного пучка [1]. Натурный эксперимент постоянно сопровождается численным [2]. Модель испарения вольфрама основана на решении в области образца двухфазной задачи Стефана для температуры и уравнений электродинамики, на решении в области над образцом уравнений газовой динамики. В данной работе рассматривается частный случай, когда уравнения на поля и токи выписаны для образца вольфрама в цилиндрической системе координат. Предполагается, что характерное время изменения велико по сравнению со временем установления равновесия уравнений электродинамики. Учитывается, что в металлах заряд не накапливается в объёме и выполнено условие квазинейтральности. Большое влияние на решение задачи оказывают разрывные нелинейные по времени и пространству граничные условия, описывающие нагрев и испарение материала. Экспериментальное обнаружение параллельных поверхности трещин на срезах образцов после облучения привело к предположению, что рядом с трещинами происходит перегрев материала из-за ослабленного наличием параллельных поверхности трещин отвода тепла. Для проверки этой гипотезы проведен расчет распространения тепла от нагреваемой поверхности в материале с препятствиями для теплоотвода в виде трещин [3]. Целью исследования является моделирование эрозии поверхности образца в результате испарения и проникновения теплового потока вглубь материала с учетом неоднородностей (микротрещин). Практическая направленность работы требует, чтобы постановка модельной задачи как можно точно соответствовала условиям эксперимента. Известные результаты и пакеты программ не могут быть использованы из-за специфичности постановки задачи (диапазон температур и давлений, пространственная и временная шкала). Результаты расчетов коррелируют с экспериментальными данными, полученными на экспериментальном стенде BETA в ИЯФ СО РАН.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0315-2016-0009).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunev Y., Vasilyev A.* Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1771, Article ID 060004.
2. *Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Lazareva G. G., Maksimova A. G., Popov V. A., Snytnikov A. V., Trunev Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N.* Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam // Fusion Eng. Design. 2018. V. 132. P. 13–17.
3. *Lazareva G. G., Arakcheev A. S., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Maksimova A. G., Popov V. A., Shoshin A. A., Snytnikov A. V., Trunev Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N.* Calculation of heat sink around cracks formed under pulsed heat load // J. Phys., Conf. Ser. 2017. V. 894, Article ID 012120.

ОБРАТНЫЙ ГИСТЕРЕЗИС И АВТОКОЛЕБАНИЯ В РЕАКЦИИ ОКИСЛЕНИЯ ОКСИДА УГЛЕРОДА НА ПАЛЛАДИИ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАСКАДА РЕАКТОРОВ ИДЕАЛЬНОГО СМЕШЕНИЯ

Лашина Е. А.[1,3]**, Чумакова Н. А.**[1,3]**, Чумаков Г. А.**[2,3]

[1]*Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[3]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
lashina@catalysis.ru, chum@catalysis.ru, chumakov@math.nsc.ru

В данной работе рассматривается математическая модель, описывающая динамику реакции окисления монооксида углерода на палладиевых катализаторах в каскаде реакторов идеального смешения. Рассматриваемая модель является системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{dX^n}{dt} = F(X^n, P^n, k(T)), \qquad \frac{dP^n}{dt} = \left(\frac{\tau}{N}\right)^{-1}(P^{n-1} - P^n) - aG(X^n, P^n, T), \quad (1)$$

где $n = 1, \ldots, N$ — номер ректора в каскаде.

В работе проводится анализ стационарных и осциллирующих решений системы (1). При этом учитывается, что если $n > 1$, то соответствующая система не является автономной и содержит внешнее воздействие, выраженное слагаемым $P^{n-1}(t)$. В частности, рассматривается случай, когда при некотором $n = n^*$ функция $P^{n^*-1}(t)$ является периодической, тогда при увеличении $n > n^*$ в системе (1) при некоторых значениях параметров зарождаются нерегулярные колебания.

Кроме того, рассматривается случай, когда поверхность катализатора может реконструироваться в условиях химической реакции. Это выражается в скачкообразном изменении параметров $k(T)$. Тогда система (1) является дискретно-непрерывной, и описывает обратный гистерезис на кривых зависимости степени превращения монооксида углерода от температуры T. При этом температура катализатора как параметр управления изменяется в достаточно широком интервале. При обратном гистерезисе (гистерезис “против часовой стрелки”) скорость реакции при нагреве выше скорости реакции при охлаждении [2, 3].

Работа выполнена в рамках гос. задания Института катализа им. Г.К. Борескова СО РАН (проекты АААА-А17-117041710084-2, АААА-А17-117041710076-7) и Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект I.1.5.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lashina E. A., Slavinskaya E. M., Chumakova N. A., Stadnichenko A. I., Chumakov G. A., Boronin A. A.* Inverse hysteresis in the CO oxidation over palladium: influence of the convection on the dynamics // Book of abstracts of Mackie–2018 International conference. Ghent, Belgium, 2018. P. 40–41.
2. *Bykov V. I., Tsybenova S. B., Yablonsky G.* Chemical complexity via simple models: modelics. De Gruyter, 2018.
3. *Субботин А. Н., Гудков Б. С., Якерсон В. И.* Явление температурного гистерезиса в гетерогенном катализе // Изв. РАН. Сер. хим. 2000. № 8. С. 1379–1385.

БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ В РЕАЛИЗАЦИИ ВИХРЕВЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Леонова Д. Д.[1], **Марчевский И. К.**[1,2], **Рятина Е. П.**[1,2]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;* daria.denisovna9713@gmail.com

[2] *Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Москва, Россия;* iliamarchevsky@mail.ru, evgeniya.ryatina@yandex.ru

Для расчета вихревого влияния при моделировании двумерных течений несжимаемой среды, а также вычисления гидродинамических нагрузок, действующих на обтекаемые профили, могут эффективно применяться лагранжевы вихревые методы. Они позволяют избежать необходимости перестроения сетки на каждом шаге по времени при моделировании обтекания подвижных или деформируемых профилей, не требуют искусственного ограничения расчетной области при моделировании внешних течений, а также имеют малую схемную вязкость и позволяют решать актуальные для практических приложений задачи с меньшими затратами вычислительных ресурсов по сравнению с сеточными методами. Первичной расчетной величиной в вихревых методах является завихренность $\vec{\Omega}(\vec{r})$, знание распределения которой позволяет восстановить поле скоростей с помощью закона Био – Савара

$$\vec{V}(\vec{r}) = \int\limits_S \frac{\vec{\Omega}(\vec{\xi}) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dS_\xi + \vec{V}_\infty.$$

Распределение завихренности моделируется точечными вихрями (вихревыми элементами), вычисление их скоростей требует учета взаимных влияний между всеми парами вихревых элементов, что по вычислительной сложности аналогично решению гравитационной задачи N тел. В данной работе представлены и реализованы два быстрых метода, имеющих логарифмическую вычислительную сложность $O(N \log N)$, где N — число вихревых элементов.

Первый метод представляет собой адаптацию к вихревым методам [1] известного метода Барнса – Хата. Для него построены оценки вычислительной сложности, исследованы точность и время вычислений в зависимости от параметров метода, а также предложены параллельные реализации.

Второй метод основан на решении вспомогательной задачи Пуассона для функции тока с помощью быстрого преобразования Фурье [2]. Для него также построены оценки вычислительной сложности, исследованы зависимости точности и производительности от числа вихревых элементов и размера сетки, приведены результаты времени расчетов для параллельных реализаций метода, в том числе адаптированной для расчета на графических картах.

Оба метода при оптимальных параметрах обеспечивают приемлемую для практических целей погрешность порядка $\delta = 0.2\,\%$, при этом метод на основе БПФ обеспечивает существенно более высокую производительность.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-31-20051).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дынникова Г. Я.* Использование быстрого метода решения “задачи N тел” при вихревом моделировании течений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1458–1465.
2. *Morgenthal G., Walther J. H.* An immersed interface method for the Vortex-In-Cell algorithm // Comput. Struct. 2007. V. 85. P. 712–726.

СХОДИМОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ломов А. А.[1,2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
lomov@math.nsc.ru

Рассматривается задача аппроксимации сеточной функции $x \in \mathbb{R}^N$ решениями $z \doteq [z_1; \ldots; z_N] \in \mathbb{R}^N$ однородного разностного уравнения с вещественными коэффициентами: подбираются начальные условия $z_1, \ldots, z_n$ и коэффициенты $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ с целью минимизации функционала $J = (x-z)^\top (x-z)$ при условии $\gamma_0 z_k + \gamma_1 z_{k+1} + \ldots + \gamma_n z_{k+n} = 0$, $k = \overline{1, N-n}$. К этой задаче сводится известный в литературе модифицированный метод Прони для выделения экспонент и затухающих синусоид из наблюдений [1, 3, 4]. Функционал J отличается сложным характером изоповерхностей [4].

Минимизация J по $z_1, \ldots, z_n$ приводит к выражению [2, 5] $J = \gamma^\top V^\top C V \gamma$, $\gamma \doteq [\gamma_0; \ldots; \gamma_{n-1}; 1]$, $C \doteq \left(G^\top G\right)^{-1}$, $G^\top \doteq \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$, $V \doteq \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N-n} & \ldots & x_N \end{bmatrix}$. Пусть $\lambda_1(Q)$ и $p_1(Q)$ — минимальное собственное число и соответствующий собственный вектор матрицы $Q \doteq V^\top C V$. Предполагается, что число $\lambda_1(Q)$ — некратное (условие полноты наблюдения x). Алгоритм [1]: $\gamma_{[k+1]} = p_1(Q(\gamma_{[k]}))$, $k \geqslant 0$. Алгоритм [2]: $\gamma_{[k+1]} = \tau / \|\tau\|$, $\tau = \left(Q(\gamma_{[k]})\right)^{-1} \gamma_{[k]}$, $k \geqslant 0$. Пусть $p_0(B)$ — собственный вектор матрицы $B(\gamma) = \left(Q - L^\top L\right)$, соответствующий собственному числу с наименьшим модулем, $J' = B(\gamma)\gamma$, $L^\top = \begin{bmatrix} l_1 & \ldots & l_{N-n} & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & l_1 & \ldots & l_{N-n} \end{bmatrix}$, $[l_1; \ldots; l_{N-n}] = CV\gamma$ — вектор множителей Лагранжа. Алгоритм [3]: $\gamma_{[k+1]} = p_0(B(\gamma_{[k]}))$, $k \geqslant 0$.

В докладе в предположении малости ошибок наблюдений $\sqrt{\min J} \ll \|x\|$ представлены условия глобальной сходимости алгоритмов [1, 2] в малую окрестность глобального минимума J и условия полулокальной сходимости алгоритма [3] к точкам локального минимума. Получены оценки точности алгоритмов [1, 2] в зависимости от уровня возмущений $\sqrt{\min J}$. Приведены экспериментальные результаты по сходимости алгоритмов [1–3] в условиях теорем [5] и при больших возмущениях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00754).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Osborne M. R.* A class of nonlinear regression problems // Data Representation. St. Lucia: University of Queensland Press, 1970. P. 94–101.
2. *Егоршин А. О., Будянов В. П.* Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ // Автометрия. 1973. № 1. С. 78–82.
3. *Osborne M. R.* Some special nonlinear least squares problems // SIAM J. Numer. Anal. 1975. V. 12. P. 571–592.
4. *Petersson J., Holmström K.* A review of the parameter estimation problem of fitting positive exponential sums to empirical data // Appl. Math. Comput. 2002. V. 126, No. 1. P. 31–61.
5. *Ломов А. А.* О сходимости алгоритма с обратными итерациями в модифицированном методе Прони // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 1513–1529.

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ЗАДАЧЕ ТИПА КАРЛЕМАНА

Лукьяненко В. А.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия; art-inf@yandex.ru

Уравнение плавного перехода, впервые введенное Ю. И. Черским [1], сводится к краевой задаче Карлемана теории аналитических функций. Метод конформного склеивания позволяет свести ее к эквивалентной задаче Римана и тем самым получить решение в квадратурах. При некоторых дополнительных предположениях решение задачи Карлемана для полосы находится методом факторизации. Многоэлементные задачи Карлемана допускают решение в квадратурах только в частных случаях [1–3].

В работе рассматриваются некоторые задачи на условный экстремум, сводящиеся к краевым задачам типа Карлемана. Например, задачи вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Phi(x+iy)|^2 dy \to inf, \quad A\Phi(x) - G(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

для искомых функций $\Phi(z)$, аналитических в полосе $\alpha \leq \operatorname{Im} z < \beta$.

С помощью аналогов формул Ю. В. Сохоцкого устанавливается связь интегральных уравнений типа свертки и задач типа Карлемана [4, 5]. Экстремальные задачи используются также для приближенного решения задач факторизации, приближенного решения обобщенных задач типа Карлемана и соответствующих им интегральных уравнений типа плавного перехода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1976.
2. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.
3. *Лукьяненко В. А.* Обобщенная задача Карлемана // Динамические системы. 2005. № 19. С. 129–144.
4. *Лукьяненко В. А.* Интегральные уравнения и краевые задачи для функций от двух переменных // Динамические системы. 2014. Т. 4 (32), № 1–2. С. 143–152.
5. *Лукьяненко В. А.* Аналогии формул Сохоцкого и их приложения // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов научно-практической конференции МИКМО–2017 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике. Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2017. С. 75–80.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ, ПОРОЖДАЮЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ

Люлько Н. А.[1,2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
natlyl@mail.ru

Для линейной автономной гиперболической системы рассмотрим в полуполосе $\Pi = \{(x,t):\, 0<x<1,\, t>0\}$ смешанную задачу

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad u(0) \in L^2(0,1) \quad (0<t<\infty), \tag{1}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — n-мерная вектор-функция, $n \geq 2$, и

$$A : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1) : \qquad (Au)(x) = -a(x)u_x + b(x)u,$$

$$D(A) = \{u \in L^2(0,1):\, u_x \in L^2(0,1),\, u_{in} = Pu_{out}\}.$$

Здесь a, $b \in C^1[0,1]$ — диагональные матрицы размерности $n\times n$, при этом первые m элементов матрицы a положительны, а остальные — отрицательны, $0 \leq m \leq n$. Постоянная матрица P задает для задачи (1) граничные условия отражения, где $u_{in} = (u_1(0), \ldots, u_m(0), u_{m+1}(1), \ldots, u_n(1))$, $u_{out} = (u_1(1), \ldots, u_m(1), u_{m+1}(0), \ldots, u_n(0))$.

Известно [1], что задача (1) корректна и при некоторых граничных условиях является *сверхустойчивой*, т. е. все решения этой задачи убывают быстрее экспоненты в любой степени [2]. Исследование спектра и резольвенты оператора A позволяет доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Задача* (1) *сверхустойчива* $\Leftrightarrow$ *когда она обладает конечным временем стабилизации всех решений к нулю (причем это время не зависит от начальных данных* $u(0)$*).*

Теорема 2. *Задача* (1) *сверхустойчива* $\Leftrightarrow$ *когда спектр оператора* A *пустой.*

Теорема 3. *Задача* (1) *сверхустойчива для любых матриц* a *и* b $\Leftrightarrow$ *когда матрица, составленная из абсолютных значений матрицы* P*, является нильпотентной.*

Как показано в [1], гиперболические системы, которые являются возмущенными к распавшимся системам (1) и имеют вид

$$\partial_t u + a(x)\partial_x u = (b(x) + \tilde{b}(x,t))u, \quad (x,t) \in \Pi,$$

где $\tilde{b}$ — матрица размерности $n \times n$, обладают рядом важных свойств, если задача (1) сверхустойчива. Доказано, что если возмущение $\tilde{b}$ мало, то возмущенная задача будет экспоненциально устойчива в $L^2(0,1)$ (теорема 2.3); если же возмущение имеет определенную структуру, то рассматриваемая возмущенная задача обладает свойством повышения гладкости из $L^2(0,1)$ в $C^1[0,1]$ (теорема 2.5). В [1] показано, как полученные результаты используются для анализа асимптотической устойчивости математических моделей из химической кинетики и теории управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kmit I., Lyul'ko N.* Perturbations of superstable linear hyperbolic systems // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460, No. 2. P. 838–862.
2. *Balakrishnan A. V.* Superstability of systems // Appl. Math. Comput. 2005. V. 164, No. 2. P. 321–326.

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К СЛУЧАЮ ГОРНЫХ ПОРОД

Мартемьянов А. Н.[1], Петров Ю. В.[1,2]

[1] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия;* st021087@student.spbu.ru
[2] *Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия;* y.v.petrov@spbu.ru

В настоящее время функция разрушений Качанова – Работнова широко используется в задачах математического моделирования формирования и распространения трещин для различного рода материалов. Поведение же самого параметра в ходе процесса часто контролируется эмпирическим соотношением.

В работах [1–3] был проведен анализ условий формирования разрушения в среде на основе уравнений баланса массы и энергии, а также понятия функции разрушения. В качестве критерия разрушения был использован предложенный в работах Ю. В. Петрова и Н. Ф. Морозова структурно-временной критерий на основе понятия инкубационного времени [4–7]. В результате чего удалось получить нелинейное дифференциальное уравнение, контролирующее процессы возникновения и развития разрушения в однородном материале.

Решение данного уравнения было получено численно с применением метода Годунова. Проверена устойчивость и сходимость этой схемы. Для одномерного случая, соответствующего распространению макротрещины в предположении “независимой” релаксации микроразрушения, уравнение решено численно. Процесс зарождения динамической макротрещины был смоделирован с использованием экспериментальных данных, связанных со временем начала трещины и начальной скоростью трещины. Модель также описывает распространение трещины после стадии зарождения.

Разработанная численная модель была использована для анализа особенностей распространения трещин в образцах известняка.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы” по Соглашению № 14.578.21.0246
(ун. идент. RFMEFI57817X0246).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kashtanov A. V., Petrov Yu. V.* Energy approach to determination of the instantaneous damage level // Tech. Phys. 2006. V. 51, No. 5. P. 604–608.
2. *Kashtanov A. V., Petrov Yu. V.* Kinetic description of incubation processes under dynamic fracture // Dokl. Phys. 2007. V. 52, No. 5. P. 270–273.
3. *Kashtanov A. V., Petrov Yu. V., Pugno N., Carpinteri A.* Dynamic fracture as a process of nonlinear damage wave propagation // Int. J. Fract. 2008. V. 150, No. 1–2. P. 227–240.
4. *Petrov Yu. V., Utkin A. A.* Dependence of the dynamic strength on loading rate // Material Science. 1989. V. 25, No. 2. P. 153–156.
5. *Petrov Yu. V.* Quantum analogy in the mechanics of fracture of solids // Phys. Solid State. 1996. V. 38, No. 11. P. 1846–1850.
6. *Petrov Yu. V.* Incubation time criterion and the pulsed strength of continua: fracture, cavitation, and electrical breakdown // Dokl. Phys. 2004. V. 49. P. 246–249.
7. *Petrov Yu. V., Morozov N. F.* On the modeling of fracture of brittle solids // J. Appl. Mech. 1994. V. 61. P. 710–712.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВИХРЕВЫМИ МЕТОДАМИ И РАСЧЕТ ДЕЙСТВУЮЩИХ НА НИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Марчевский И. К.[1,2], **Щеглов Г. А.**[1,2]

[1]*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;*
[2]*Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Москва, Россия;* iliamarchevsky@mail.ru, shcheglovga@bmstu.ru

Рассмотрена задача об определении гидродинамических нагрузок, действующих на тело при его пространственном обтекании потоком несжимаемой среды. Введено допущение о малой вязкости среды, влияние которой проявляется только как причина возникновения завихренности вблизи обтекаемой поверхности и причина перезамыкания вихревых нитей в области течения. Для моделирования течения применяется лагранжев бессеточный вихревой метод [1, 2] в котором в качестве первичной расчетной величины рассматривается завихренность. По ее распределению в соответствии с законом Био – Савара восстанавливается поле скоростей, а при помощи аналога интеграла Коши – Лагранжа [3] — поле давления. Граничное условие на теле удовлетворяется генерацией завихренности на обтекаемой поверхности. Эволюция завихренности в области течения описывается при помощи вихревых петель — замкнутых вихревых нитей одинаковой циркуляции, моделируемых ломаными линиями из вихревых отрезков.

Рассмотрены два способа восстановления распределения плотности потенциала двойного слоя, определяющего положения генерируемых на поверхности тела вихревых петель: из условия равенства нулю нормальной либо касательной компоненты скорости на поверхности тела. Второй путь представляется более перспективным, поскольку обеспечивает значительно большую точность. Интенсивность вихревого слоя предполагается кусочно-постоянной, соответствующее граничное интегральное уравнение решается методом Галёркина. Разработана полуаналитическая процедура вычисления коэффициентов возникающей СЛАУ [4]. Использование метода наименьших квадратов позволяет восстановить распределение потенциала двойного слоя и обеспечить бездивергентность вихревого слоя.

Разработанный метод реализован в виде прототипа программного комплекса, представляющего собой параллельную программу-решатель; в качестве постпроцессора использован открытый пакет Paraview.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-01468).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский С. М. (ред.)* Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы. М.: ЦАГИ, 2000.
2. *Cottet G.-H., Koumoutsakos P.* Vortex methods: theory and practice. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
3. *Dynnikova G. Ya.* The integral formula for pressure field in the nonstationary barotropic flows of viscous fluid // J. Math. Fluid Mech. 2014. V. 16, No. 1. P. 145–162.
4. *Marchevsky I. K., Shcheglov G. A.* Semi-analytical influence computation for vortex sheet with piecewise constant intensity distribution in 3D vortex methods // Proc. of 6th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6) and 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD 7), June 11–15, 2018, Glasgow, UK. 12 p.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДАВЛЕНИЯ ВОЛНЫ ЦУНАМИ ПОДВОДНЫМ БАРЬЕРОМ

Марчук Ан. Г.[1]**, Важенин А. П.**[2]**, Хаяши К.**[2]

[1] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* mag@omzg.sscc.ru
[2] *University of Aizu, Aizu-Wakamatsu, Japan;* apvazhenin@gmail.com

В настоящее время практически единственным способом защититься от атаки волны цунами (или хотя бы её ослабить) являются массивные защитные стены при входе в порты и бухты или отделяющие территорию порта от городских кварталов. Однако, такие стены, возвышающиеся над водой, часто опрокидываются под действием напора воды во время сильных цунами, не выполнив своей защитной функции. Нагрузка на подводный барьер в таких случаях значительно меньше, что существенно повышает его устойчивость к опрокидыванию. На основе соотношений между параметрами течения в распространяющейся длинной волне предложен простой метод численного моделирования частичного отражения волны цунами от затопленного вертикального барьера. Он заключается в постановке простых внутренних граничных условий непосредственно за барьером. Тестирование метода на одномерных расчётах показали хорошее соответствие результатов с измерениями высоты волн при лабораторном моделировании в гидродинамическом лотке. Проведено численное моделирование распространения волны цунами над подводным барьером в двумерной области с реальной батиметрией. При помощи такого численного моделирования проведена оценка защитных свойств (в отношении волн цунами) затопленных вертикальных барьеров, установленных у входа в бухты и морские порты. Результаты показали, что подводный вертикальный барьер высотой, составляющей половину глубины в месте его постановки, способен снизить высоту цунами у берега на 20-30 процентов, что критически важно в случае катастрофических цунами. При этом такие барьеры обладают значительно большей устойчивостью к опрокидыванию.

НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Марчук Н. Г.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия;
nmarchuk@mi-ras.ru

Несколько слов о работе в период 1974–1980 г. математического семинара в Новосибирском государственном университете, которым руководил Сергей Константинович Годунов. Там были выработаны математические идеи, которые, в конечном счете, позволили сформировать некоторый новый взгляд на уравнения теории поля [1].

Мы используем математический аппарат генформ, который вобрал в себя основные черты аппарата дифференциальных форм и алгебры Клиффорда. Множество генформ псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ обозначаем через $\Lambda^{[h]}(\mathbb{R}^{p,q})$. Для генформ определены операции внешнего умножения и клиффордова умножения. Также для генформ определены дифференциальные операторы первого порядка $d, \delta, \eth = d + \delta$.

Вводится класс симметрических инвариантных систем уравнений

$$\eth U + Q(U) = W, \qquad (1)$$

где $U = U(x)$ — неизвестная генформа из $\Lambda^{[h]}(\mathbb{R}^{p,q})$, а $W = W(x)$ — известная генформа правой части; младшие члены имеют вид $Q(U) = \sum_{k=1}^{N} A_k U B_k$. Доказано, что в случае псевдоевклидовых пространств $\mathbb{R}^{1,n-1}$ системы уравнений (1) можно записать в виде симметрических гиперболических по Фридрихсу систем уравнений первого порядка.

Доказано, что задача Коши для системы уравнений Максвелла сводится к (симметризованной) задаче Коши для симметрической инвариантной системы уравнений вида (1).

Доказано, что система уравнений Дирака – Хестенеса может быть записана в виде симметрической инвариантной системы уравнений.

С этой же точки зрения можно рассмотреть систему уравнений Дирака – Хестенеса – Максвелла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марчук Н. Г.* Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. М.: ЛЕНАНД (URSS), 2018.

ТИПОВЫЕ ОПЕРАЦИИ С МАТРИЦАМИ В КЛЕТОЧНО-АВТОМАТНОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Матюшкин И. В.[1], **Кожевников В. С.**[2]

[1] *НИИ молекулярной электроники, Москва, Россия;* imatyushkin@niime.ru
[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия;* vladislavkozhevnikov@gmail.com

В связи с возросшим в последнее время интересом к вычислительным системам с параллельной архитектурой [1–3] предлагается ряд клеточно-автоматных (КА) алгоритмов, реализующих базовые векторные и матричные операции. Выбор именно операций над матрицами обусловлен повсеместностью их использования в качестве основы для более сложной обработки информации.

В алгоритмах используются КА на квадратной решётке размера $n \times n$ с замкнутыми границами (тороидальная структура) или естественными границами и окрестностью фон Неймана (Н) или Мура (М). Останов автомата происходит двумя способами: естественным (будем называть его кодовым словом *idem*), т. е. по установившейся глобальной конфигурации, и по стоп-значению, возникающему в некоторой выделенной клетке. Состояние клетки в автомате определяется набором компонент, подразделяемых на память и управляющие флаги.

В приведённой таблице представлены основные характеристики найденных КА алгоритмов.

№	Операция	Флаги	Сложность	Останов	Границы	Шаблон
1	Отражение	2 бита	n	по знач.	естеств.	Н
2	Отражение	2 бита	$2n-4$	*idem*	замкнут.	Н
3	Отражение	бит + трит	$\left[\frac{3}{2}n-\frac{3}{2}\right]$	*idem*	замкнут.	Н
4	Поэлементная	1 бит	$2\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]$	*idem*	замкнут.	Н, М
5	Транспон-е	1 трит	n	*idem*	естеств.	М
6	Транспон-е	2 бита	$2n-1$	*idem*	замкнут.	Н
7	Умножение на столбец	1 трит	$2n-2$	*idem*	замкнут.	Н
8	Умножение на матрицу	4 сост.	$2n-1$	*idem*	замкнут.	Н
9	Определитель	5 сост.	$3n-4$	*idem*	замкнут.	Н
10	Определитель	11 сост.	n^2	*idem*	замкнут.	Н
11	Поразрядное умножение	2 бита	$2n-2$	*idem*	естеств.	Н
12	Пермутация	4 сост.	НОК$(3,\ldots,2n-1)$	—	естеств.	Н

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thakur C. et al.* Large-scale neuromorphic spiking array processors: a quest to mimic the brain // Frontiers in Neuroscience. 2018. V. 12, No. 891.
2. *Матюшкин И. В., Заплетина М. А.* Отражение и транспонирование данных в матрице клеточно-автоматного вычислителя // Изв. вузов. Микроэлектроника. 2019. Т. 24, № 1. С. 51–63.
3. *Матюшкин И. В., Кожевников В. С.* Клеточно-автоматные алгоритмы пермутации матриц // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 1.

МОДЕЛЬ ФУНКЦИИ НАДЁЖНОСТИ ИЗДЕЛИЙ В ФИЗИКО-СТАТИСТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

Матюшкин И. В.[1], Черняев Н. В.[1], Кожевников В. С.[2]

[1]*НИИ молекулярной электроники, Москва, Россия;* imatyushkin@niime.ru
[2]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия;*
vladislavkozhevnikov@gmail.com

Вопросы надежности и отказов как отдельных элементов, так функциональных блоков СБИС всегда занимали центральное место при их проектировании. До настоящего времени доминирует подход физики отказов (physics-of-failure approach), подразумевающий нахождение конкретных физических причин. Однако и абстрактный взгляд на надежность породил ряд общих понятий: интенсивность отказов, деградация, время наработки до отказа и, наконец, функции риска и надежности. Будем использовать физико-статистический аналог уравнения непрерывности в теории надёжности, предложенный И. Т. Алексаняном и Н. В. Черняевым [1]:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(f(\mathbf{x},t)\cdot \mathbf{c}(\mathbf{x},t)\right) = -q(t)f(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

где $\mathbf{c}(\mathbf{x},t)$ — скорость деградации (изменения) вектора характеристик изделия $\mathbf{x}$, $q(t)$ — интенсивность случайных отказов, т. е. не связанных с деградацией. В дальнейшем будем считать, что $q(t)\equiv 0$, так как правая часть (1) исключается заменой $f(\mathbf{x},t) = z(\mathbf{x},t)\exp\left(-\int\limits_0^t q(\tau)d\tau\right)$.

Уравнение (1) сводится к системе ОДУ:

$$dt/d\xi = 1,\ d\mathbf{x}/d\xi = \mathbf{c}(\mathbf{x},t),\ df/d\xi = -f\nabla\mathbf{c}(\mathbf{x},t). \tag{2}$$

Через первые интегралы $v_1(\mathbf{x},t,f),\ldots,v_{n+1}(\mathbf{x},t,f)$ системы (2) выражается решение $f = f(\mathbf{x},t)$ ДУ (1) из уравнения (3) при произвольной гладкой функции Φ:

$$\Phi\left(v_1(\mathbf{x},t,f),\ldots,v_{n+1}(\mathbf{x},t,f)\right) = 0. \tag{3}$$

Уравнение непрерывности удаётся решить аналитически в одномерном стационарном ($\mathbf{c}(\mathbf{x},t) = c(x)$) случае для постоянной, линейной и квадратичной скорости деградации $c(x)$. Ниже представлены результаты для этих случаев при начальном условии $f(x,0) = f_0(x)$.

1. $c(x) = c = \mathrm{const} \Rightarrow f(x,t) = f_0(x - c\cdot t)$.
2. $c(x) = ax + b,\ a \neq 0 \Rightarrow f(x,t) = \mathrm{e}^{-at} f_0\left(x\mathrm{e}^{-at} + \frac{b}{a}\left(\mathrm{e}^{-at} - 1\right)\right)$.
3. $c(x) = ax^2 + bx + c,\ b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow f(x,t) = \frac{F\left(t - \frac{2}{D}\arctan\left(\frac{2ax+b}{D}\right)\right)}{ax^2+bx+c}$, где $D = \sqrt{4ac - b^2}$, F — произвольная гладкая функция. Задача Коши в этом случае разрешима однозначно лишь при $0 < t < \frac{2}{D}\arctan\left(\frac{2ax+b}{D}\right) + \frac{\pi}{D}$. В остальной области решение не определено; физический смысл в ней имеет лишь решение $f(x,t) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексанян И. Т., Черняев Н. В.* Выражения для основных количественных показателей надежности в физико-статистическом подходе // Петербургский журнал электроники. 1994. № 1 (4). С. 56–58.

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ПРЯМОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СИСТЕМЫ ЗАХАРОВА – ШАБАТА

Медведев С. Б.[1,2], **Васева И. А.**[1], **Чеховской И. С.**[1,2], **Федорук М. П.**[1,2]

[1]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
medvedev@ict.nsc.ru

Рассматривается система Захарова – Шабата

$$\dot{\mathbf{\Psi}}(t) = Q(t)\mathbf{\Psi}(t), \tag{1}$$

где точка означает дифференцирование по t, $\Psi(t)$ — комплексная вектор-функция от вещественного аргумента t, $Q(t)$ — комплексная матрица:

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} -i\zeta & q(t) \\ -\sigma q^*(t) & i\zeta \end{pmatrix}.$$

Здесь $q(t)$ — заданная комплексная функция, ζ — спектральный параметр, $\sigma = \pm 1$ и * означает комплексное сопряжение.

Для системы Захарова – Шабата (1) строятся разностные одношаговые схемы [1–2]

$$\mathbf{\Psi}_{n+1} = T\mathbf{\Psi}_n, \tag{2}$$

где $\mathbf{\Psi}_n = \mathbf{\Psi}(t_n)$, $t_n = n\tau$, τ — шаг равномерной сетки. Разлагая (2) в точке t, такой что $t_n = t - (1-s)\tau$, $t_{n+1} = t + s\tau$, нетрудно получить условия, при которых матрица T аппроксимирует решение уравнения (1) с заданным порядком точности.

Теорема. *Любая одношаговая разностная схема* (2) *аппроксимирует уравнение* (1) *с четвертым порядком точности по* τ, *если и только если разложение переходного оператора* T *для фиксированного* s *имеет вид*

$$T = E + \tau Q + \tau^2 T_2 + \tau^3 T_3 + \tau^4 T_4 + O(\tau^5),$$

где

$$T_2 = \frac{2s-1}{2!}Q_2 - (s-1)Q^2,$$

$$T_3 = \frac{3s^2-3s+1}{3!}Q_3 - \frac{(s-1)^2}{2!}QQ_2 - \frac{(2s-1)(s-1)}{2!}Q_2Q + (s-1)^2Q^3,$$

$$T_4 = \frac{(2s-1)(2s^2-2s+1)}{4!}Q_4 - \frac{(s-1)^3}{3!}QQ_3 - \frac{(s-1)^2}{2!}T_2Q_2 - (s-1)T_3Q$$

и коэффициенты Q_k *выражаются через матрицу* Q *и ее производные:*

$$Q_2 = Q^{(1)} + Q^2, \quad Q_3 = Q^{(2)} + 2Q^{(1)}Q + QQ^{(1)} + Q^3,$$

$$Q_4 = Q^{(3)} + 3Q^{(2)}Q + QQ^{(2)} + 3(Q^{(1)})^2 + 3Q^{(1)}Q^2 + 2QQ^{(1)}Q + Q^2Q^{(1)} + Q^4.$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-72-30006).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M.* Novel numerical algorithm with fourth-order accuracy for the direct Zakharov–Shabat problem // arXiv:1902.09736 (2019).
2. *Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M.* Numerical algorithm with fourth-order accuracy for the direct Zakharov–Shabat problem // Optics Letters. 2019. V. 44, No. 10.

О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С СИНГУЛЯРНЫМ СТОКОМ НА ВЕРШИНЕ ВЫСТУПА НА ДНЕ

Местникова А. А.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; mestnikova@hydro.nsc.ru

Рассматривается двумерная стационарная задача о течении идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью сверху. Течение вызвано сингулярным стоком, расположенным на вершине треугольного выступа. Нижняя граница предполагается непроницаемой всюду кроме одной точки, в которой расположен сток заданной интенсивности. Предполагается, что поле скорости потенциально. Верхняя граница является неизвестной и должна быть определена в процессе решения задачи.

В работах [1, 2] в случае горизонтального дна был применен метод Леви-Чивиты, который удалось модифицировать для случая с выступом. Получено уравнение типа уравнения Некрасова на единичной окружности, которое точно описывает форму свободной поверхности. Показано, что для чисел Фруда, превышающих некоторое конкретное значение, существует единственное решение задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00069).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mestnikova A. A., Starovoitov V. N.* Free-surface potential flow of an ideal fluid due to a singular sink // J. Phys., Conf. Ser. 2016. V. 722, Article ID 012035.
2. *Mestnikova A. A., Starovoitov V. N.* Steady free surface potential flow of an ideal fluid due to a singular sink on the flat bottom // Nonlinear Anal., Real World Appl. 2019. V. 49. P. 111–136.

МОНОТОННЫЕ СХЕМЫ КУБИЧЕСКОЙ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

Мирошниченко В. Л.[1,2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
miroshn@math.nsc.ru

Пусть требуется найти решение уравнения

$$L[y(x)] \equiv y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad x \in [a,b], \tag{1}$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2. \tag{2}$$

Введем на $[a,b]$ сетку $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Согласно методу сплайн-коллокации [1, 2] будем искать приближенное решение задачи (1), (2) в виде кубического сплайна $S(x)$ класса C^2 на сетке Δ, коэффициенты которого определяются из условий коллокации

$$L[S(\xi_k)] = r(\xi_k), \quad \xi_k \in [a,b], \quad k = 0,\ldots,n, \tag{3}$$

и краевых условий

$$\alpha_1 S(a) + \beta_1 S'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 S(b) + \beta_2 S'(b) = \gamma_2. \tag{4}$$

Конкретный вид системы (3), (4), а также её разрешимость зависят от выбранного способа представления сплайна $S(x)$ и от расположения узлов коллокации ξ_k.

Метод сплайн-коллокации при $\xi_k = x_k$, $k = 0,\ldots,n$, может быть использован в качестве одного из способов построения разностных схем [1]. Такие схемы обладают рядом полезных свойств, в частности, они имеют одинаковый порядок точности на равномерных и неравномерных (произвольных!) сетках. При этом эта точность $O(H^2)$, $H = \max_i h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,\ldots,n$, достигается при меньших требованиях к гладкости точного решения задачи (1), (2) по сравнению с классическими трехточечными разностными схемами. Кроме того, в методе сплайн-коллокации отсутствует проблема аппроксимации краевых условий (2) любого вида, так как порядок аппроксимации первой производной на произвольной сетке для кубических сплайнов выше порядка аппроксимации второй производной. Однако подход к реализации схем метода сплайн-коллокации сведением их к разностным схемам не исчерпывает всех возможностей, заложенных в этом методе. Наиболее полно они могут быть реализованы только при использовании аппарата B-сплайнов [1]. В частности, можно оптимизировать расположение узлов коллокации и построить, наряду со схемами точности $O(H^2)$, схемы повышенной точности.

К недостаткам метода сплайн-коллокации можно отнести возможное нарушение свойства монотонности схем при обычном требовании $q(x) \leq 0$ в (1) для грубых сеток. А именно, для монотонности схемы требуется, чтобы H было достаточно мало. Способы устранения этого “дефекта” метода сплайн-коллокации обсуждаются в данном докладе.

Изложение сопровождается численными примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.

О МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Мусабеков К. С.

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, Кокшетау, Республика Казахстан; it.kgu@mail.ru

Рассмотрим задачу оптимального управления процессом в неадиабатическом трубчатом реакторе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = a \cdot \dfrac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} - c \cdot v_1 \cdot f(v_2), \\ \dfrac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = b \cdot \dfrac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} + k \cdot v_1 \cdot f(v_2) + g \cdot (v_3(t) - v_2(x,t)), \\ \dfrac{dv_3(t)}{dt} = p \cdot \left(\displaystyle\int_0^1 v_2(x,t)dx - v_3(t) \right) + u(t) \cdot (E - v_3(t)), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} a \cdot \dfrac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} - v_1(0,t) = -1, \quad \dfrac{\partial v_1(1,t)}{\partial x} = 0, \\ b \cdot \dfrac{\partial v_2(0,t)}{\partial x} - v_2(0,t) = -1, \quad \dfrac{\partial v_2(1,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$v_1(x,0) = v_{10}(x), \quad v_2(x,0) = v_{20}(x), \quad v_3(0) = v_{30}, \tag{3}$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma/v_2(x,t))$; a, b, c, Γ, k, g, p, E, v_{30} — константы, положительные параметры системы; $u(t)$ — управляющая функция (управление); $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$, $v_3(t)$ — функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно, $(x,t) \in \overline{Q}_T$, $Q_T = (0,1) \times (0,T)$.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T v_1(1,t)dt, \tag{4}$$

т. е. суммарного за время T количества непрореагировавшего вещества на выходе реактора при условиях (1)–(3) и следующих ограничениях на управление $u(t)$ и функцию $v_2(x,t)$:

$$0 \le u(t) \le u_0 = \text{const}, \tag{5}$$

$$v_2(x,t) \le v_2^* = \text{const}. \tag{6}$$

Для каждого измеримого управления $u(t)$, удовлетворяющего условию (5), система (1)–(3) имеет [1] единственное классическое решение. В данной работе осуществляется регуляризация функционала (4). Такая регуляризация позволяет осуществлять поиск оптимального управления в задаче (1)–(6) с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусабеков К. С.* Существование оптимального управления в одной регуляризованной задаче с фазовым ограничением // Вестн. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 2. С. 71–84.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВОЛНОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Назаренко С. В.[1], **Семисалов Б. В.**[2,3], **Гребенев В. Н.**[2], **Медведев С. Б.**[2]

[1]*University of Warwick, Coventry, United Kingdom;*
S.V.Nazarenko@warwick.ac.uk

[2]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;*
vibis@ngs.ru, vngrebenev@gmail.com, serbormed@gmail.com

[3]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

В понимании природы конденсата Бозе – Эйнштейна важную роль играет описание случайных взаимодействий нелинейных волн (волновая турбулентность бозе-газа). Анализ уравнения Гросса – Питаевского в приближении слабой нелинейности в соответствии с [1] позволяет сформулировать задачу Коши для интегродифференциального уравнения, описывающего эволюцию спектра волнового действия $n(k,t)$ системы бозонов. Здесь k — переменная пространства Фурье, t — время ($t < t^*$); t^* — момент времени, в котором возбуждаются все моды $n(k,t)$. Для автомодельного решения вида $n(k,t) = f(\eta)/\tau^a$ с переменной $\eta = k/\tau^b \geq 0$, где $\tau = t^* - t$, $a > 0$, $b = a - 0.5 > 0$, получаем уравнение

$$\begin{aligned} F(\eta) = \frac{a}{b} f(\eta) + \eta \frac{df(\eta)}{d\eta} = \frac{1}{b\sqrt{\eta}} \int\limits_{\Delta_\eta} \min\{\sqrt{\eta}, \sqrt{\eta_2+\eta_3-\eta}, \sqrt{\eta_2}, \sqrt{\eta_3}\} \\ \times f(\eta)f(\eta_2+\eta_3-\eta)f(\eta_2)f(\eta_3)\left(\frac{1}{f(\eta)} + \frac{1}{f(\eta_2+\eta_3-\eta)} - \frac{1}{f(\eta_2)} - \frac{1}{f(\eta_3)}\right) d\eta_2 d\eta_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\forall \eta \ f(\eta) \geq 0$, $0 \leq \lim\limits_{\eta \to 0} f(\eta) < \infty$; $\Delta_\eta = \{(\eta_2, \eta_3) : \eta_2 > 0, \ \eta_3 > 0, \ \eta_2+\eta_3-\eta > 0\}$.

Для $f(\eta)$ ставится спектральная задача: найти все $x \in [1, 1.5]$, для которых существуют решения (1) с асимптотикой $f(\eta) \sim C\eta^{-x}$ при $\eta \to \infty$, $C = \text{const}$. При $a = \frac{x}{2(x-1)}$ ($x = \frac{a}{b}$) это равносильно условию $\lim\limits_{\eta\to\infty} F(\eta) = 0$, которое заменено в расчётах равенствами $F(\eta_M) = 0$, $f(\eta) = C\eta^{-x}$ при $\eta > \eta_M$, η_M — большое число.

В предположении, что имеют место так называемые нелокальные взаимодействия, показано, что при малых η решение (если оно существует) имеет вид $f = \frac{A}{b(x-B/b)} + \tilde{C}\eta^{(B/b)-x}$, где A, B — интегральные выражения определённого вида, $A > 0$, $x - B/b > 0$, $\tilde{C} = \text{const}$. Условие ограниченности f в нуле даёт $\tilde{C} = 0$.

Для поиска решений (1) построена раскройка области Δ_η по особенностям подынтегральной функции; предложена новая квадратурная формула, аппроксимирующая интегралы вида $\int\limits_{-1}^{1} (1 \pm y)^p g(y)dy$ с экспоненциальным порядком сходимости, где $p > -1$, $g(y) \in C^\infty[-1, 1]$; на основе отображения из [2] разработаны сверхсходящиеся кубатурные формулы в треугольнике; предложены обобщения метода из [3] для интегрирования в неограниченных областях.

Решение спектральной задачи для (1) ищется с применением методов последовательных приближений и установления, а также спектральных разложений, учитывающих особенности $f(\eta)$ и подынтегральной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nazarenko S. V.* Wave turbulence. Heidelberg: Springer, 2011.
2. *Hossain M. A., Islam Md. Sh.* Generalized composite numerical integration rule over a polygon using Gaussian quadrature // Dhaka Univ. J. Sci. 2014. V. 62, No. 1. P. 25–29.
3. *Takahasi H., Mori M.* Quadrature formulas obtained by variable transformation // Numer. Math. 1973. V. 21. P. 206–219.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Нещадим М. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
neshch@math.nsc.ru

Рассматривается одномерное уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U\psi.$$

Здесь t — время, x — одномерная пространственная переменная, $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса, i — мнимая единица, $i^2 = -1$, $\psi = \psi(t,x)$ — волновая функция, $U = U(t,x)$ — потенциал. Волновая функция $\psi(t,x)$ представляется в виде

$$\psi(t,x) = R(t,x)e^{iS(t,x)},$$

где $R(t,x)$ и $S(t,x)$ — вещественнозначные функции (амплитуда и фаза, соответственно). В работе, на основе теории совместности [1, 2] приведения в инволюцию переопределенной системы, получены дифференциальные соотношения $C_1[U,R]$, содержащие только функции U, R, и соотношения $C_2[U,S]$, содержащие только функции U, S. Переход от соотношения $C_1[U,R]$ к соотношению $C_2[U,S]$ осуществляется введением дифференциальных соотношений для функции S и, фактически, представляет собой преобразования Бэклунда [3]. Обратный переход от соотношения $C_2[U,S]$ к соотношению $C_1[U,R]$ осуществляется введением дифференциальных соотношений для функции R и представляет собой обратное преобразование Бэклунда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.
3. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Никитенко Е. В.

Рубцовский индустриальный институт (филиал) Алтайского государственного технического университета им. И. И. Ползунова, Рубцовск, Россия; evnikit@mail.ru

В работе рассматривается первая краевая задача для неоднородного уравнения внутренних волн

$$\begin{aligned} &\Delta u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t>0,\ x=(x', x_3) \in \mathbb{R}^3_+, \\ &u|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ &u_t|_{t=0} = \varphi_2(x), \\ &u|_{x_3=0} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3_+)$, $\lambda \geq 0$ — параметр.

Опираясь на результаты, полученные в работе [1], были установлены следующие асимптотические оценки при $t \to \infty$ решений $u(t,x,\lambda)$ в зависимости от значений параметра λ.

Теорема 1. *Пусть $\lambda > 1$, тогда на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^3_+$ для решения задачи* (1) *имеет место оценка*

$$\left| u(t,x,\lambda) + e^{i\lambda t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi} \frac{\hat{g}(\xi)}{(|\xi'|^2 - \lambda^2 |\xi|^2)} d\xi \right| \leq \frac{c(K,\lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1,$$

где $|\xi'|^2 = \sum\limits_{i=1}^{2} \xi_i^2$, $g(x)$ — нечетное продолжение $f(x)$ на $\mathbb{R}^3$, $c(K,\lambda)$ — константа, зависящая от K и λ.

Теорема 2. *Пусть $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, тогда на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^3_+$ справедлива асимптотическая оценка*

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{2} D^2_{x_i} - \lambda^2 \Delta \right) u(t,x,\lambda) - e^{i\lambda t} f(x) \right| \leq \frac{c(K,\lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никитенко Е. В.* Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения внутренних волн // Динамические системы. 2018. Т. 8(36), № 2. С. 139–147.

$(\overline{\partial} u)^n$- И УРАВНЕНИЕ МОНЖА – АМПЕРА НА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОТОКАХ ВЫСШЕЙ БИСТЕПЕНИ

Никитина Т. Н.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия; AANick@yandex.ru

Изучаются индуцированные $(\overline{\partial} u)^k$- и уравнение Монжа – Ампера на потоке на комплексном многообразии. Показывается, что L^2-оценки выполняются для $(\overline{\partial} u)^k$- и уравнения Монжа – Ампера на замкнутом потоке бистепени $(1,1)$ в псевдовыпуклой области из $\mathbb{C}^n$.

Разрешимость $(\overline{\partial} u)^k$- и уравнений Монжа – Ампера изучалась в работах [1–4].

Пусть M — комплексное многообразие и T — положительный поток на M. Пусть u и f — гладкие дифференциальные формы на M. Говорят, что

$$(\overline{\partial} u)^k = f \text{ на } T, \text{ если } (\overline{\partial} u)^k \wedge T = f \wedge T.$$

Основной технический результат — следующее обобщение тождества Кодаиры – Накано – Хермандера.

Теорема 1. *Пусть $T \geq 0$ — $(1,1)$-поток в области D из $\mathbb{C}^{nk+1}$ такой, что $i\partial\overline{\partial}T$ имеет измеримые коэффициенты. Пусть ω — кэлерова форма в D. Пусть, наконец, g — основная форма бистепени (pk,qk) с носителем в D, и предположим, что $\varphi \in C^2(D)$. Тогда, если $i\partial\overline{\partial}T$ — строго отрицательный и $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \omega$, и, более того, $dT = 0$, то*

$$(n-p-q)k||g||^2$$
$$-c_{(p+q)k+1}\int(\partial_{-\varphi}g)_{pk+1} \wedge (\overline{\partial_{-\varphi}\widehat{g}})_{pk+1} \wedge \omega_{(n-p-q)k-1} \wedge Te^{\varphi}$$
$$-c_{(p+q)k-1}\int \widehat{\vartheta_{-\varphi}\widehat{g}} \wedge \overline{\widehat{\vartheta_{-\varphi}g}} \wedge \omega_{(n-p-q)k+1} \wedge Te^{\varphi} \leq (\widehat{\overline{\partial}g}, \overline{\partial}\widehat{g}).$$

Теорема 2. *Пусть $T \geq 0$ — замкнутый $(1,1)$-поток в $\mathbb{C}^{nk+1}$, и пусть $\omega = i\partial\overline{\partial}|z|^2$ — кэлерова форма евклидовой метрики в $\mathbb{C}^{nk+1}$. Пусть φ — плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^{nk+1}$, удовлетворяющая $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \omega$. Тогда для любой $\overline{\partial}_w$-замкнутой $(nk-pk,qk)$-формы f на T с $(q-p)k \geq 1$ существует $(n-p,q-1)$-форма u на T такая, что $(\overline{\partial}_w u)^k = f$ на T и*

$$\int |u \wedge (\overline{\partial} u)^{k-1}|^2_{\omega,T}\sigma_T e^{-\varphi} \leq \frac{1}{((q-p)k)}\int |f|^2_{\omega,T}\sigma_T e^{-\varphi}.$$

Замечание. Приведены примеры разрешимости и неразрешимости $(\overline{\partial} u)^k$- и уравнения Монжа – Ампера на положительных потоках высшей бистепени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никитина Т. Н.* Устранимые особенности на границе и $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение CR-форм с особенностями на порождающем многообразии. Новосибирск: Наука, 2008.
2. *Никитина Т. Н.* О $\overline{\partial}\partial$-уравнении на положительном потоке // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 2. С. 38–50.
3. *Никитина Т. Н.* Уравнение Монжа – Ампера на положительных потоках высшей бистепени // Соболевские чтения. Международная школа-конференция. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2018. С. 132.
4. *Berndtsson B., Sibony N.* The $\overline{\partial}$-equation on a positive current // Invent. Math. 2002. V. 147. P. 371–428.

РЕДУКЦИИ И СЕМЕЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

Орлов Св. С.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;
s.orlov@icc.ru

Рассмотрим квазилинейное уравнение типа конвекции–диффузии [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(l(u)u\big)+m(u), \tag{1}$$

в котором искомая функция $u=u(t,x)\colon \Omega\to[0;+\infty)$ определена и непрерывна на множестве $\Omega\subset[0;+\infty)\times\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$. В настоящей работе изучается случай, когда $k(u)\in \mathrm{C}^2_{(0;+\infty)}\cap \mathrm{C}_{[0;+\infty)}$ и $l(u)$, $m(u)\in \mathrm{C}^1_{(0;+\infty)}\cap \mathrm{C}_{[0;+\infty)}$. Кроме того, будем предполагать, что $k(0)=l(0)=m(0)=0$ и $k=k(u)$ — монотонная неотрицательная функция. Введённые ограничения позволяют отнести (1) к классу неявно вырождающихся параболических уравнений.

Используя замену $u=\varphi(v)$, где $\varphi=k^{-1}$ (обратная функция k^{-1} существует в силу монотонности k), приведём (1) к эквивалентному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t}=v\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+f(v)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2+g(v)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}+h(v), \tag{2}$$

где

$$f(v)=\frac{v\varphi''(v)}{\varphi'(v)}+1,\quad g(v)=-\big(\varphi(v)l'(\varphi(v))+l(\varphi(v))\big),\quad h(v)=\frac{m(\varphi(v))}{\varphi'(v)}.$$

В настоящей работе получены следующие результаты:

1. При помощи так называемого прямого метода Кларксона – Крускала [2] найдены редукции уравнения (2) к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка типа Льенара. При этом анзац

$$v=V(t,x,w(s)),\quad x\triangleq(x_1,\ldots,x_n)$$

рассматривается отдельно в классическом ($s=s(t,x)$) и неявном ($s=s(t,x,v)$) вариантах [3].

2. С использованием найденных редукций построены семейства точных решений уравнения (2), удовлетворяющих краевому условию

$$v(t,x)\big|_{\partial\Omega}=0$$

с неизвестной (свободной) границей $\partial\Omega=\{(t,x)\colon s(t,x)=0\}$. Вид уравнения свободной границы $s(t,x)=0$ определяется в процессе нахождения точных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2015.
2. *Clarkson P. A., Kruskal M. D.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. 1989. V. 30, No. 10. P. 2201–2213.
3. *Hood S.* On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function — generalizations of Clarkson’s and Kruskal’s method // IMA J. Appl. Math. 2000. V. 64, No. 3. P. 223–244.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Палин В. В.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; grey_stranger84@mail.ru

Рассматривается задача Римана для системы законов сохранения

$$U_t + (F(U))_x = 0,\ U|_{t=0} = U_- + (U_+ - U_-)\theta(x),$$

где $U(t,x)$ — неизвестная вектор-функция, U_- и U_+ — заданные постоянные векторы, $\theta(x)$ — функция Хевисайда. В случае, когда матрица $DF(U) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial U_j}\right)$ имеет полный базис из вещественных собственных векторов, а левое и правое начальные состояния достаточно близки, известен [1] метод построения решений. В докладе рассматривается случай, когда все собственные значения матрицы $DF(U)$ вещественны, но на некотором критическом многообразии Σ в фазовом пространстве у матрицы $DF(U)$ возникает присоединенный вектор. К задачам такого типа относится, например, двухкомпонентная модификация системы уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \phi_t + u_x = 0, \\ u_t + (\frac{1}{2}u^2 + \phi)_x = 0, \\ w_t + (\frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{c_0}\phi)_x = 0, \end{cases}$$

где c_0 — заданная константа.

Определение. Системы законов сохранения, для которых матрица $DF(U)$ имеет полный базис из вещественных собственных векторов, будем называть гиперболическими по Фридрихсу, а те системы законов сохранения, для которых все собственные значения матрицы $DF(U)$ вещественны — гиперболическими по Петровскому.

Будем рассматривать класс задач, гиперболических по Петровскому, но не гиперболических по Фридрихсу, для которых матрица $DF(U)$ имеет блочный вид, т. е.

$$\frac{\partial F_j(U)}{\partial U_n} = 0,\ j < n,\ F_n(U) = G(U_1, \dots, U_{n-1}) + \Phi(U_n).$$

Тогда задача Римана для системы законов сохранения допускает расщепление и в случае близких левого и правого начальных состояний сводится к задаче для функции U_n:

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi(U_n) + f(\frac{x}{t})\right) = 0,\ U_n|_{t=0} = U_n^- + (U_n^+ - U_n^-)\theta(x),$$

где $f(\frac{x}{t})$ — разрывная функция, если начальным состояниям соответствует хотя бы одна ударная волна или контактный разрыв. Для построения обобщенного кусочно-гладкого решения последней задачи предлагается новый метод.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лакс П. Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. Ижевск: НИЦ “РХД”, 2010.

РЕОЛОГИЯ МАТЕРИАЛА СТЕНКИ ЦЕРЕБРАЛЬНЫХ АНЕВРИЗМ — ЭКСПЕРИМЕНТЫ, МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Паршин Д. В.[1,2], Липовка А. И.[1,2], Юношев А. С.[1,2], Дубовой А. В.[3], Чупахин А. П.[1,2]

[1]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* parshin@hydro.nsc.ru
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[3]*Федеральный центр нейрохирургии, Новосибирск, Россия*

На протяжении последнего десятилетия патологии сердечно-сосудистой системы остаются самой распространенной причиной смертности населения. Одной из таких патологий является аневризма головного мозга или церебральная аневризма (ЦА) — выпячивание стенки сосуда. Ее разрыв влечёт за собой крайне тяжелые последствия — летальный исход в 30% случаев или тяжелые неврологические нарушения. По статистике в среднем у 1 из 50 человек есть церебральная аневризма, однако риск её разрыва достаточно низок (1 из 200) и сопоставим с риском развития постоперационных осложнений. Поэтому для хирурга важно понимать вероятность разрыва аневризмы для каждого конкретного случая, чтобы суметь назначить наиболее подходящее лечение.

На данный момент, несмотря на множество исследований в этой области, механизм возникновения и разрыва аневризмы остаётся неясен. Одним из подходов, дающим возможность получить представление о характере протекающих изменений в тканях, является численное и математическое моделирование стенок сосудов и аневризмы. Такое моделирование может в перспективе дать хирургам инструмент для формирования тактики лечения.

Строение стенки церебральной аневризмы сильно отличается от здорового сосуда и является более сложным, так как часть слоев ткани деградирует, а оставшиеся имеют неупорядоченную многослойную структуру. С этим связаны сложности в моделировании подобной патологической сосудистой ткани. Известно, что при растяжении тканей основная нагрузка приходится на эластин и коллагеновые волокна стенки купола аневризмы.

Для построения модели нами предварительно были проведены эксперименты по одноосному нагружению образцов 8-ми аневризм, а также ткани здоровой церебральной артерии на разрывной машине Zwick&Roell Z10. На основе полученных экспериментальных данных был проведён анализ возникающих возмущений — скачков на stress-strain диаграммах, и изучено предположение, что возникающие скачки являются следствием последовательного разрыва слоёв эластина. Проведён анализ распределения амплитуд скачков в зависимости от статуса аневризмы, который подтверждает гипотезу о физически обусловленном характере скачков.

Кроме того, для каждого этапа эксперимента были построены 3 и 5 параметрические модели Муни – Ривлина, модель Йо и модель Нео-Гука. Проведён статистический анализ коэффициентов моделей и значений предельного напряжения и деформации для двух когорт аневризм: разорвавшихся и неразорвавшихся. Обозначены преимущества каждой из рассмотренных моделей для моделирования ткани аневризмы определенного статуса в случае специфических возможных деформаций тканей (малые, средние, большие).

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (проект № 14.W03.31.0002).

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ АЛГОРИТМАМИ НА ОСНОВЕ АНСАМБЛЕЙ РЕШЕНИЙ СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Пененко А. В.[1,2]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
aleks@ommgp.sscc.ru

В работе изучается подход к решению обратных задач, предложенный Г. И. Марчуком [1] и состоящий в том, что для каждого элемента данных измерений решается сопряженная задача, и затем из полученного ансамбля решений сопряженных уравнений строится оператор чувствительности. Операторы чувствительности позволяют преобразовать обратную задачу, сформулированную в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений, к квазилинейному операторному уравнению. Для его решения применяется алгоритм типа Ньютона – Канторовича с использованием r-обратных операторов. Для работы с данными типа изображений решение сопряжённых задач для каждого пикселя изображения может быть затруднительным с вычислительной точки зрения. Поэтому сначала необходимо провести их редукцию к относительно небольшому числу параметров.

Рассматриваются обратные задачи для моделей адвекции–диффузии–реакции с приложением к задачам химии атмосферы и биологии развития. Искомыми являются правые части уравнений [2, 3] и коэффициенты моделей [4]. В качестве данных измерений мы рассматриваем как точечные измерения значений функции состояния модели [5], так и данные типа изображений: временные ряды [3, 4] и "снимки" значений функции состояния модели [2, 4].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-71-10184) в части разработки алгоритмов для работы с данными типа изображений и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-07-01135) в части разработки алгоритмов для коэффициентных задач с данными точечных измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марчук Г. И.* О постановке некоторых обратных задач // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, № 3. С. 503–506.
2. *Penenko A., Zubairova U., Mukatova Z., Nikolaev S.* Numerical algorithm for morphogen synthesis region identification with indirect image-type measurement data // J. Bioinform. Comput. Biol. 2019. V. 17, No. 1. Article ID 1940002.
3. *Пененко А. В.* Метод Ньютона – Канторовича для решения обратных задач идентификации источников в моделях продукции–деструкции с данными типа временных рядов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2019. Т. 22, № 1. С. 57–79.
4. *Пененко А. В., Николаев С. В., Голушко С. К., Ромащенко А. В., Кирилова И. А.* Численные алгоритмы идентификации коэффициента диффузии в задачах тканевой инженерии // Математическая биология и биоинформатика. 2016. Т. 11. С. 426–444.
5. *Пененко А. В.* Согласованные численные схемы для решения нелинейных обратных задач идентификации источников градиентными алгоритмами и методами Ньютона – Канторовича // Сиб. журн. вычисл. математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 99–116.

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В РЕАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Пененко В. В., Цветова Е. А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; penenko@sscc.ru

Качество воздуха в Новосибирске, Красноярске, как и во многих других сибирских и уральских городах, оставляет желать много лучшего. Поэтому проблемы качества атмосферы рассматриваются как самые актуальные в социальном плане задачи охраны окружающей среды.

Наши исследования посвящены созданию математических моделей, методов и алгоритмов для их реализации, а также технологий математического моделирования, чтобы с помощью виртуальных численных экспериментов с использованием суперЭВМ получить ответы на широкий спектр вопросов, касающихся охраны окружающей среды, таких как оценка качественного состава атмосферы, его изменчивость при различных сочетаниях погодных факторов, естественных и техногенных воздействий, действенность природоохранных стратегий и т. д.

Для достижения этих целей мы развиваем математическую концепцию природоохранного прогнозирования и проектирования, разрабатываемую в ИВМиМГ СО РАН, в том числе и с ориентацией на решение проблем, возникающих в городских агломерациях. Концепция основана на применении вариационного подхода и совместном использовании моделей гидротермодинамики, химии атмосферы и данных наблюдений [1]. Основное преимущество нашего подхода — построение согласованных аппроксимаций прямых и сопряженных задач разномасштабных процессов и разработка численных алгоритмов, обладающих свойствами монотонности, транспортивности, устойчивости и достаточной для таких задач точности. В частности, для операторов конвекции–диффузии–реакции, которые являются основными в задачах рассматриваемого класса, с помощью вариационной методики и фундаментальной концепции сопряженных интегрирующих множителей мы построили дискретно-аналитические численные схемы [2]. Эти схемы, кроме “аналитической” точности в классе задач с кусочно-постоянными коэффициентами в пределах одного шага сеточной области, обеспечивают точный учет краевых условий первого, второго и третьего рода, а также условий периодичности. Кроме самого решения, алгоритм позволяет одновременно вычислить его производные на границах интервалов декомпозированной области. Наши подходы достаточно универсальны, поэтому разрабатываемые методы и алгоритмы могут использоваться для широкого спектра задач математической физики.

Работа в части развития базовых математических моделей выполняется в рамках темы государственного задания ИВМиМГ СО РАН № 0315-2016-0004, а проведение исследований для городских агломераций осуществляется при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00137).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пененко В. В., Пененко А. В., Цветова Е. А.* Вариационный подход к исследованию процессов геофизической гидротермодинамики с усвоением данных наблюдений // Прикл. механика и техн. физика 2017. Т. 58, № 5 (345). С. 17–25.
2. *Penenko V. V., Tsvetova E. A., Penenko A. V.* Variational approach and Euler's integrating factors for environmental studies // Comput. Math. Appl. 2014. V. 67, No. 12. P. 2240–2256.

ТЕОРИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ ПЕРРОНА – ФРОБЕНИУСА И ОЦЕНКИ МАТРИЧНОЙ (ОПЕРАТОРНОЙ) ЭКСПОНЕНТЫ

Перов А. И.[1], **Коструб И. Д.**[2], **Клещина О. И.**[3]
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
[1]anperov@mail.ru,[2]ikostrub@yandex.ru,[3]avdeeva.olga.official@yandex.ru

Рассматриваются оценки матричной (операторной) экспоненты. Логарифмическая норма матрицы $\mathbf{A}$: $||\mathbf{A}||_{\log} = \lim_{0<t\to 0} (||\mathbf{I} + t\mathbf{A}|| - ||\mathbf{I}||)/t$ (она может быть отрицательна). Из нее получаем оценку матричной экспоненты $||\exp(t\mathbf{A})|| \leq \exp(ta)$ $(0 < t < +\infty)$, $a = ||\mathbf{A}||_{\log}$ — наилучшая константа. Оценка спектральной абсциссы матрицы $\mathbf{A}$: spa $\mathbf{A} \leq ||\mathbf{A}||_{\log}$, если $||\mathbf{A}||_{\log} < 0$, то $\mathbf{A}$ — гурвицева. Спектральная абсцисса матрицы $\mathbf{A}$: spa $\mathbf{A} = \max\{\mathrm{Re}\lambda\colon \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$, $\sigma(\mathbf{A})$ — спектр матрицы $\mathbf{A}$ (см. [1–3]). Формулы без изменения переносятся на случай линейного ограниченного оператора $\mathbf{A}$ в банаховом пространстве [4].

Пусть L_α — банахово пространство последовательностей с $||x||_0 = \sup_j |x_j|$ $(\alpha = 0)$; $||x||_\alpha = (\sum_j |x_j|^{1/\alpha})^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$. В [3, 4] приведены формулы для логарифмической нормы $||\mathbf{A}||_{\log}$ для $\alpha = 0; 1; 1/2$. В [5, 6] даны оценки спектральной абсциссы $||\mathbf{A}||_{\alpha \log} \leq \sup_j\{\mathrm{Re}\ a_{jj} + (1-\alpha)\sum_{k\neq j} |a_{jk}| + \alpha \sum_{k\neq j} |a_{kj}|\}$ для $0 < \alpha < 1$. Абсолютная логарифмическая норма: $|\mathbf{A}|_{\log} = \lim_{0<t\to 0}(|\mathbf{I} + t\mathbf{A}| - |\mathbf{I}|)/t$ (см. [7]). Если $\mathbf{C} = |\mathbf{A}|_{\log}$, то $c_{jj} = \mathrm{Re}\ a_{jj}$ $(1 \leq j \leq n)$ и $c_{jk} = |a_{jk}|$ $(j \neq k)$. Тогда $|\mathbf{A}|_{\log}$ — вещественная внедиагонально неотрицательная матрица, теория их может быть выведена из теории Перрона – Фробениуса [8]. Справедливы формулы $|e^{t\mathbf{A}}| \leq e^{t\mathbf{C}}$ $(0 \leq t < +\infty)$ (впервые появилась в [9]) и spa $\mathbf{A} \leq$ spa $\mathbf{C} \leq ||\mathbf{A}||_{\log}$.

Пусть $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \oplus ... \oplus \mathbb{B}_n$ — банахово пространство; $\mathbf{I} = \mathbf{P}_1 \oplus ... \oplus \mathbf{P}_n$ и $\mathbf{P}_j^2 = \mathbf{P}_j$, $\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k = 0$ $(j \neq k)$. Линейный ограниченный оператор $\mathbf{A}$, согласно разложению, приводит к операторной матрице $\mathbb{A} = (\mathbf{A}_{jk})$, где $\mathbf{A}_{jk}\colon \mathbb{B}_k \to \mathbb{B}_j$ — линейный ограниченный оператор: $\mathbf{A}_{jk} = \mathbb{B}_j|\mathbf{P}_j\mathbf{A}\mathbf{P}_k|\mathbb{B}_k$ $(1 \leq j, k \leq n)$. Определим $||\mathbb{A}|| = (||\mathbf{A}_{jk}||)$ и $\pmb{|}\mathbf{A}\pmb{|} = ||\mathbb{A}||$; $\pmb{|}\mathbf{A}\pmb{|}_{\log} = \lim_{0<t\to 0}(\pmb{|}\mathbf{I} + t\mathbf{A}\pmb{|} - \pmb{|}\mathbf{I}\pmb{|})/t$. Если $\mathbf{C} = \pmb{|}\mathbf{A}\pmb{|}_{\log}$, то $c_{jj} = ||\mathbf{A}_{jj}||_{\log}$ $(1 \leq j \leq n)$; $c_{jk} = ||\mathbf{A}_{jk}||$ $(j \neq k)$. Справедливы оценки $\pmb{|}e^{t\mathbf{A}}\pmb{|} \leq e^{t\mathbf{C}}$ $(0 \leq t < +\infty)$ и spa $\mathbf{A} \leq$ spa $\mathbf{C} \leq ||\mathbf{A}||_{\log}$ (см. [10]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лозинский С. М.* Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Изв. вузов. Матем. 1958. № 5. С. 52–90.
2. *Dahlquist G.* Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations // Tekniska Högskolans Handlingar. 1959. V. 130. 85 p.
3. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
5. *Перов А. И., Коструб И. Д.* О спектральной абсциссе и логарифмической норме // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 4. С. 562–575.
6. *Клещина О. И.* Норма и логарифмическая норма бесконечных матриц // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2018. Т. 23, № 123. С. 424–430.
7. *Перов А. И., Коструб И. Д., Клещина О. И., Дикарев Е. Е.* Абсолютная логарифмическая норма // Изв. вузов. Матем. 2018. № 4. С. 70–85.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
9. *Перов А.И.* Новые признаки устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 2014. № 9. С. 49–58.
10. *Перов А. И.* Об условиях обратимости и гурвицевости // Функцион. анализ и его прил. 2017. Т. 51, вып. 4. С. 84–89.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИЕ ОЦЕНКИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Перцев Н. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, Омск, Россия; homlab@ya.ru

В работе рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t) - (\mu + g(t, x_t))x(t),\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \psi(t),\ t \in I_\omega = [-\omega, 0]. \tag{2}$$

В уравнениях системы (1) и начальных условиях (2) принято, что

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))^T,\ \psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))^T,$$

$$f(t, x_t) = (f_1(t, x_t), \ldots, f_m(t, x_t))^T,$$

$$g(t, x_t) = \operatorname{diag}\bigl(g_1(t, x_t), \ldots, g_m(t, x_t)\bigr),\ \mu = \operatorname{diag}\bigl(\mu_1, \ldots, \mu_m\bigr),$$

где $x(t)$ — искомая функция, $x_t : I_\omega \to \mathbb{R}^m$ — запаздывающая переменная, определенная по правилу: $x_t(\theta) = x(t+\theta),\ \theta \in I_\omega$, $t \geqslant 0$, $\psi(t)$ — непрерывная начальная функция с неотрицательными компонентами, $f_i(t, x_t)$, $g_i(t, x_t)$ — некоторые отображения, $\mu_i = \text{const} > 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. В уравнениях системы (1) под $dx(t)/dt$ понимается правосторонняя производная (по-компонентно). Задача Коши (1), (2) возникает при разработке математических моделей живых систем.

Решением задачи Коши (1), (2) на промежутке $[0, \infty)$ будем называть функцию $x(t)$, непрерывную на промежутке $I_\omega \cup [0, \infty)$, имеющую непрерывную производную на промежутке $[0, \infty)$, удовлетворяющую начальному условию (2) и уравнениям системы (1) для всех $t \in [0, \infty)$.

В работе приведены базовые и дополнительные условия относительно отображения $f(t, x_t)$ и диагональной матрицы $g(t, x_t)$, обеспечивающих существование, единственность и неотрицательность (по-компонентно) решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) на промежутке $[0, \infty)$.

На основе предположения относительно линейной мажорируемости $f(t, x_t)$ по одной части компонент и ограниченности $f(t, x_t)$ по оставшейся части компонент получены условия, при которых для решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) имеют место оценки

$$0 \leqslant x_i(t) \leqslant c_i\, e^{-r\,t},\ 1 \leqslant i \leqslant k, \tag{3}$$

$$0 \leqslant x_j(t) \leqslant p_j/\mu_j,\ k+1 \leqslant j \leqslant m,\ t \in [0, \infty), \tag{4}$$

где $r > 0$, $c_i > 0$, $p_j > 0$ — некоторые константы, $1 \leqslant i \leqslant k,\ k+1 \leqslant j \leqslant m$. Константы r, c_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, находятся как решение нелинейной системы неравенств, построенной на основе предположения относительно линейной мажорируемости $f(t, x_t)$ по части компонент.

Представлены примеры математических моделей живых систем в форме задачи Коши (1), (2), для решений которых справедливы оценки (3), (4): распространение эпидемии в изолированном регионе, динамика ВИЧ-1 инфекции в организме человека, процесс кроветворения в условиях аплазии костного мозга.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

К ВОПРОСУ О РОБАСТНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Петренко П. С.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; petrenko_p@mail.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений первого порядка

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \in I = [0, +\infty), \tag{1}$$

где $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $U(t) \in \mathbb{R}^{n\times l}$ — заданные матрицы, причем $\det A(t) \equiv 0$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестная функция состояния системы, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ — управляющее воздействие. Такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Мерой неразрешенности ДАУ (1) относительно производных служит целочисленная величина, называемая индексом (неразрешенности) системы.

Исследуется робастная управляемость ДАУ [1]. Пусть система (1) полностью (R- или дифференциально (см. [1–3])) управляема на некотором отрезке $T \subset I$. Задача робастной управляемости заключается в нахождении условий, при которых возмущенная система

$$A(t)x'(t) + (B(t) + \Delta_B(t))x(t) + (U(t) + \Delta_U(t))u(t) = 0$$

останется по-прежнему полностью (R- или дифференциально) управляемой на этом отрезке. Здесь $\Delta_B(t)$ и $\Delta_U(t)$ — неизвестные матрицы (матрицы возмущения), которые удовлетворяют некоторым условиям малости на T.

Анализ проводится в предположении существования линейного дифференциального оператора вида

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} + \ldots + R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r, \tag{2}$$

который обладает левым обратным на I (здесь r — индекс ДАУ). Оператор (2) преобразует ДАУ (1) к структурной форме с разделенными “алгебраической” и “дифференциальной” подсистемами, которая обладает теми же решениями на I, что и ДАУ (1) [3].

Получены достаточные условия робастной управляемости (полной, R- и дифференциальной) ДАУ (1) индекса неразрешенности 1 и 2 с неструктурированным возмущением (ограниченными по норме матрицами возмущения).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-20030).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dai L.* Singular control systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 118. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.
2. *Щеглова А. А., Петренко П. С.* R-наблюдаемость и R-управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем // Изв. вузов. Матем. 2012. № 3. С. 74–91.
3. *Щеглова А. А.* Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. 2008. № 10. С. 57–80.

К ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В ВАРИАЦИОННО-СЕТОЧНОМ МЕТОДЕ ГЕОКАРТИРОВАНИЯ

Плавник А. Г.[1,2]**, Сидоров А. Н.**[3]

[1] *Западно-Сибирский филиал Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Тюмень, Россия;*
[2] *Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия;*
plavnikag@ipgg.sbras.ru
[3] *Научно-аналитический центр рационального недропользования им. В. И. Шпильмана, Тюмень, Россия;* sidorov@crru.ru

Решение вопросов определения модельных условий на основе наблюдаемых данных во многом зависит от реализуемых подходов к описанию пространственных закономерностей. В вариационно-сеточном методе геокартирования модельные условия формулируется в достаточно общей постановке — в виде уравнений в частных производных до второго порядка включительно. С одной стороны это дает возможность решения широкого круга геологических задач, связанных с картопостроением ([1, 2] и др.). Но, с другой, существенно затрудняет решение обратной задачи — установление аналитического вида закономерностей, соответствующих имеющимся данным.

В данной работе восстановление модельных условий в рамках вариационно-сеточного метода геокартирования предлагается осуществлять на основе определения двух или более согласованных с данными ортогональных гиперплоскостей в пространстве значений картируемой функции и ее частных производных. Однако, непосредственная реализация такого решения практически не осуществима вследствие отсутствия необходимой информации о значениях производных в точках наблюдения.

В этих условиях предложено использование итерационного подхода, на начальном шаге которого осуществляется картирование с применением априорных модельных условий и определение по построенной поверхности первого приближения значений производных. Последующие итерационные циклы включают: расчет нового приближения модельных условий; решение задачи геокартирования с этими условиями; определение новых приближений для значений производных, используемых в качестве входных данных на следующем шаге итерации.

Метод апробирован на примерах восстановления модельных условий, соответствующих серии периодических решений. Расчеты показали, что за несколько итераций точность восстановления модельных условий увеличивается в сотни раз, а результирующие карты с использованием полученных уравнений по своему виду практически соответствуют точным уже на второй итерации в областях расположения точек с фактическими данными и на четвертой итерации для всей области картирования.

Работа выполнена при поддержке проекта ФНИ № 0331-2019-0024.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плавник А. Г., Сидоров А. Н.* Картирование свойств геологических объектов с учетом анизотропии на основе моделирования деформационного преобразования // Мат. моделирование. 2018. Т. 30, № 3. С. 19–36.
2. *Sidorov A. N., Plavnik A. G., Sidorov A. A., Shutov M. S.* Use of variational methods in geological mapping // Mathematics of Planet Earth. Proceedings of the 15th Annual Conference of the International Association for Mathematical Geosciences. Madrid: Springer, 2014. P. 325–328.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ 2D ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Полякова А. П.[1], **Hahn B.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* apolyakova@math.nsc.ru

[2] *Вюрцбургский университет, Вюрцбург, Германия;* bernadette.hahn@mathematik.uni-wuerzburg.de

Задачи томографии становятся динамическими, если одной из целей восстановления изучаемого объекта являются его характеристики, существенно изменяющиеся со временем. Подобные постановки возникают, например, в медицине при исследовании сердца или легких. Методы решения задач традиционной томографии разработаны в предположении, что объект неподвижен, поэтому в динамическом случае напрямую они не применимы, но требуют, по меньшей мере, существенной модификации.

В работе предлагается алгоритм восстановления двумерного векторного поля, которое вместе с носителем изменяется во времени по известному закону. В качестве исходных данных используются значения продольного лучевого преобразования, измеренные вдоль прямых, параллельных направлению $\theta = (\cos\phi t, \sin\phi t)$, где ϕ — постоянная угловая скорость источника излучения, $t \in [0, T]$ — время [1].

В основе предлагаемого алгоритма лежит метод сингулярного разложения оператора динамического лучевого преобразования, действующего на векторное поле. Как и в стационарном случае, для построения базисных векторных полей в исходном пространстве используются гармонические полиномы и полиномы Якоби. В пространстве образов лучевого преобразования базисные функции строятся с использованием гармонических полиномов и полиномов Гегенбауэра [2–3].

Установлена связь между динамическим преобразованием Радона потенциала соленоидального векторного поля и динамическим продольным лучевым преобразованием соленоидального векторного поля, построенного на основе этого потенциала. Показано, что при одинаковом выборе базисных векторных полей в исходном пространстве сингулярные числа оператора продольного лучевого преобразования в стационарном и динамическом случаях совпадают.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Немецкого научно-исследовательского общества (проект № 19-51-12008).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hahn B.* Null space and resolution in dynamic computerized tomography // Inverse Probl. 2016. V. 32, Article ID 025006.
2. *Derevtsov E. Yu., Efimov A. V., Louis A. K., Schuster T.* Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 19. P. 689–715.
3. *Светов И. Е., Полякова А. П.* Сравнение двух алгоритмов численного решения задачи двумерной векторной томографии // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 90–108.

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ l-ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С УПРАВЛЕНИЕМ

Постнов С. С.

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия;
`postnov.sergey@inbox.ru`

Рассматривается постановка и решение l-проблемы моментов для интегро-дифференциальных уравнений, моделирующих динамику линейных систем дробного порядка с управлением. Известно, что к данной проблеме может быть сведена задача поиска оптимального управления, обладающего минимальной нормой при заданном времени управления, или обеспечивающем минимальное время управления при заданном ограничении на норму управления [1]. Исследуются системы как с сосредоточенными, так и с распределёнными параметрами. Анализируются особенности постановки и свойства решений l-проблемы моментов, обусловленные типом операторов дробного интегро-дифференцирования.

Системы с сосредоточенными параметрами заданы уравнениями вида:

$$ {}_0D_t^{\rho_i} q_i(t) = a_{ij}q_j(t) + b_{ij}u_j(t) + f_i(t), \quad i,j=1,\ldots,N, \quad t \in (0,T], \quad T>0, $$

где функции $q_i(t)$, $u_i(t)$ и $f_i(t)$ определяют состояние, управление и возмущение соответственно; a_{ij} и b_{ij} — коэффициенты (вообще говоря, зависящие от времени); по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Оператор дробного дифференцирования ${}_0D_t^{\rho_i}$ здесь понимается в смысле Хильфера [2], Эрдейи – Кобера [3] или Сайго [3], при этом индекс ρ_i является составным и включает набор параметров соответствующего оператора. Управления $u_i(t)$ считаются элементами пространства $L_p(0,T)$, $1 < p \leq \infty$. Для рассматриваемых систем получены условия, определяющие возможность постановки и разрешимость l-проблемы моментов. В ряде случаев построены точные аналитические решения данной проблемы и исследованы их свойства.

Рассматриваются также системы с распределёнными параметрами, описываемые диффузионно-волновым уравнением с дробной производной по времени:

$$ \begin{gathered} r(x)\, {}_0D_t^{\rho} Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)Q(x,t) \\ +f(x,t) + u(x,t), \qquad t \geq 0, \quad x \in [0,L], \end{gathered} $$

где $Q(x,t)$ — состояние системы, $f(x,t)$ — возмущение, $u(x,t)$ — распределённое управление. Функции $r(x) > 0$, $w(x) > 0$ и $q(x)$ считаются непрерывными на отрезке $[0,L]$. Оператор дробного дифференцирования здесь понимается в смысле Хильфера [2]. Для таких систем сформулирована бесконечномерная l-проблема моментов, получены условия её постановки и разрешимости, а также построены приближённые аналитические решения поставленной проблемы и исследованы их свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
2. *Hilfer R.* Fractional time evolution // Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific, 2000. P. 87–130.
3. *Kiryakova V.* Generalized fractional calculus and applications. Harlow: Longman Scientific & Technical; New York: John Wiley & Sons, 1994.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОДВИЖНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Постнова Е. А.

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия;
postnova@ipu.ru

В работе проведено численное решение задачи подвижного управления для систем дробного порядка, а именно исследовалось поведение систем, описываемых уравнениями типа уравнения диффузии:

$$ {}_0D_t^\alpha Q(x,t) = K\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) + u(x,t), \quad t>0, \quad 0<x<L, $$

где функции $Q(x,t) \in AC((0,T]\times(0,L])$ и $u(x,t) \in L_p(0,T]$, $p>1$, определяют состояние и управление системы соответственно; $f(x,t)$ — возмущающая функция; K — коэффициент диффузии; ${}_0D_t^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования Капуто [1] порядка α, $0<\alpha<1$. При этом начальное и конечное условия задавались следующим образом:

$$ Q(x,0) = Q_0(x), \quad Q(x,T) = Q^*(x), \quad T>0. $$

В случае подвижного управления $u(x,t)$ будет иметь следующий вид:

$$ u(x,t) = I(t)\psi[x - x_0(t), \sigma(t)], $$

где функция $I(t) \in L_p[0,T]$ определяет интенсивность управляющего воздействия; функция $\psi[x-x_0(t),\sigma(t)]$ отвечает за форму пространственного распределения управляющего воздействия, при этом $\sigma(t)$ является параметром формы распределения, а $x_0(t) \in L_p[0,T]$, $1<p<\infty$, задаёт закон движения управляющего воздействия.

Задача оптимального управления ставится аналогично случаю систем с сосредоточенными параметрами [2], где отличие заключается лишь в определении управляющего воздействия.

Задача подвижного управления сведена к нелинейной бесконечномерной проблеме моментов следующего вида:

$$ \int\limits_0^T g_n(t,T)I(t)X_n[x_0(t)]dt = Q_n^* - Q_{0n}E_\alpha(-\mu_n T^\alpha), $$

где $g_n(t,T) = -\mu_n E_{\alpha,\alpha}[-\mu_n(T-t)^\alpha](T-t)^{\alpha-1}$; $X_n[x_0(t)]$ и μ_n — собственные функции и собственные значения соответствующей краевой задачи, Q_n и Q_{0n} — коэффициенты разложения соответствующих величин по системе собственных функций.

Для поставленной проблемы моментов исследовано приближенное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. *Постнова Е. А.* Оптимальное управление движением системы, моделируемой двойным интегратором дробного порядка // Проблемы управления. 2018. № 2. С. 40–46.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Прилепко А. И.[1], Костин А. Б.[2]

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* prilepko.ai@yandex.ru

[2] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия;* abkostin@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Рассматривается обратная задача нахождения пары функций $\{u(x,t); f(x)\}$ из условий:

$$\rho(x)\, u_t - \Delta\, u - c(x)\, u = h(x,t) f(x) + g(x,t), \quad (x,t) \in Q := \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x,t) = \Psi(x,t), \quad (x,t) \in S := \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

$$\mathbf{l}(u) := u(x,T) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Все остальные функции, входящие в (1)–(3), считаются заданными и достаточно гладкими, а Δ — это оператор Лапласа. Решение ищется в классе $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $f \in L_2(\Omega)$. В классах Гёльдера задача исследовалась в работах В. М. Исакова (1982, 1991) и А. И. Прилепко, В. В. Соловьёва (1987). Обобщённым решениям в классах С. Л. Соболева посвящены работы А. И. Прилепко, А. Б. Костина (1992, 1993, 2013), где установлено, что при выполнении неравенств

$$c(x) \leqslant 0, \quad |\mathbf{l}(h)(x)| \geqslant \delta > 0,\ x \in \Omega; \quad \frac{h(x,t)}{\mathbf{l}(h)(x)} \geqslant 0,\ \frac{h_t(x,t)}{\mathbf{l}(h)(x)} \geqslant 0,\ (x,t) \in Q, \tag{4}$$

обобщённое решение обратной задачи существует и единственно. Известно, что задача (1)–(3) эквивалентна операторному уравнению второго рода с вполне непрерывным в $L_2(\Omega)$ оператором $\mathcal{B}$. В работах Прилепко, Костина (1993, 2013) установлено, что спектральный радиус оператора $\mathcal{B}$ меньше единицы. Это даёт возможность обосновать сходимость метода итераций построения решения обратной задачи. Обозначим через $u^0(x,t)$ решение прямой задачи (1)–(2) с $f = 0$. Пара $\{u; f\}$ является решением (1)–(3) только тогда, когда пара $\{u - u^0; f\}$ — решение задачи вида (1)–(3), в которой $g = u_0 = \Psi = 0$, а вместо функции $\chi(x)$ в условии (3) стоит функция $\chi(x) - u^0(x,T)$. Это позволяет свести исследование задачи (1)–(3) к случаю $g = u_0 = \Psi = 0$. Кроме того, при условии $|\mathbf{l}(h)(x)| \geqslant \delta > 0$ в Ω, без ограничения общности можем считать, что $\mathbf{l}(h)(x) \equiv 1$ в Ω. Введём обозначение $u(x,t;f)$ для решения прямой задачи (1)–(2), в которой $g = u_0 = \Psi = 0$, а функция $f \in L_2(\Omega)$ известна.

При выполнении условий (4) последовательность $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$, построенная по правилу

$$f_0 = 0, \quad f_{k+1} = -\Delta\, \chi(x) - c(x)\, \chi(x) + \rho(x)\, u_t(x,T;f_k)$$

сходится в $L_2(\Omega)$ к функции $f(x)$. При этом пара $\{u(x,t;f); f(x)\}$ является решением обратной задачи (1)–(3), в которой $g = u_0 = \Psi = 0$. Аналогичные результаты о сходимости метода итераций имеют место для нелинейных обратных задач восстановления коэффициентов $c(x)$ и $\rho(x)$ по условию финального наблюдения, а также для задач с условием наблюдения общего вида

$$\mathbf{l}(u) \equiv \int_0^T u(x,t)\, d\mu(t) = \chi(x), \quad x \in \Omega,$$

с функцией $\mu \in BV([0,T])$ (см. Костин 2013 – 2017).

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ (проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013).

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ В МЕХАНИКЕ НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

Пухначев В. В.[1,2]

[1]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
pukhnachev@gmail.com

Рассмотрены одномерные задачи с плоскими и цилиндрическими волнами в моделях несжимаемых вязкоупругих сред Максвелла, Кельвина – Фойхта и в модели движения водных растворов полимеров Войткунского – Амфилохиева – Павловского. В двух последних случаях уравнения движения совпадают с уравнениями акустики вязкого газа. Устанавливается соответствие между параметрами газа и вязкоупругой среды. Уравнения одномерного движения несжимаемой среды Максвелла тождественны уравнениям невязкого газа с невыпуклым уравнением состояния. Это приводит к отличиям в решении задачи о распаде произвольного разрыва от классического решения.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С ТОЧЕЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Пятков С. Г.[1,2]

[1] *Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;*
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
pyatkov@math.nsc.ru

Мы рассматриваем вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида в параболическом уравнении

$$u_t - L_0 u = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

где $L_0 u = \Delta u - b(x)\cdot\nabla u - a(x)u$, Ω — ограниченная или неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n = 1,2,3)$ с границей Γ и δ — дельта-функция Дирака. Здесь неизвестными являются функция $u(x,t)$ — концентрация загрязняющего вещества в водоеме или воздухе, точки $x_i \in \Omega$ — точечные источники и $N_i(t)$ — их интенсивности. Чтобы определить неизвестные источники, уравнение (1) дополняется краевыми и начальными условиями

$$Bu|_\Gamma = \varphi(t), \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u$, и условиями переопределения вида

$$u(y_j,t) = \psi_j(t), \quad j = 1,2,\ldots,s. \tag{3}$$

Обратная задача состоит в нахождении неизвестных функций $N_i(t)$, числа m и неизвестных источников $\{x_i\}$. Имеется большое количество работ, посвященных задачам такого вида как в одномерном, так и в многомерном случае. В случае нескольких загрязняющих компонент подобные задачи возникают и для систем. Однако, подавляющее большинство работ посвящено численному решению этой задачи, очень часто без нужного обоснования численных процедур. Основным используемым методом является метод наименьших квадратов, т. е. задача сводится к некоторой задаче управления и минимизации некоторого квадратичного функционала.

Задача (1)–(3) является некорректной в смысле Адамара. Мы приводим условия разрешимости задачи (1)–(3), условия единственности и неединственности решений. Доказательства основаны на применении преобразования Лапласа и затем на исследовании асимптотики решений эллиптической задачи

$$\lambda\hat{u} - L_0\hat{u} = \sum_{i=1}^{m} \hat{N}_i(t)\delta(x - x_i), \quad B\hat{u}|_\Gamma = 0$$

по комплексному параметру λ. Здесь $\hat{u} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}u(t)\,dt$ — преобразование Лапласа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00620).

ГРАНИЦЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ

Рогалев А. Н.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия;
rogalyov@icm.krasn.ru

В докладе рассматриваются характеристики областей и границ областей решений дифференциальных уравнений. Эти области решений появляются тогда, когда в параметрах поставленной задачи присутствует неопределенность (известны лишь неравенства для данного параметра). Возможен также случай, когда правая часть зависит от управляющего воздействия. При этом важно оценивать и анализировать поведение областей точных решений и их границ в задачах практической (технической) устойчивости, что означает равномерную ограниченность решений относительно множества начальных значений и совокупности возмущающих воздействий на конечном интервале времени. Вопрос об устойчивости на конечном интервале времени возникает для систем, не имеющих установившегося режима — режима, теоретически реализуемого на бесконечном интервале времени, например, ракета и ее система управления [1]. В докладе представлены новые результаты применения гарантированных методов [2–6], основанных на символьном представлении формул решений, в типичных задачах накопления возмущений, при этом учитываются свойства граничных элементов точек множеств в каждый момент времени. Показана связь значений граничной траектории в произвольный момент времени со значениями границ множеств начальных данных. Тем самым повышается точность построения символьных формул приближенных решений $\mathrm{S}^{\mathrm{n}}(\mathrm{Y}^0) \circ \mathrm{S}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{Y}^0) \circ \ldots \circ \mathrm{S}^1(\mathrm{Y}^0)$, где вектор Y^0 — вектор начальных значений, рассматриваемых как символьные величины. Более точно вычисляются границы области значений S_{y} символьных формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абгарян К. А.* Об устойчивости движения на конечном промежутке времени // Докл. АН СССР. 1968. Т. 13, № 3. С. 527–530.
2. *Новиков В. А., Рогалёв А. Н.* Влияние эффекта “раскрутки” на получение верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 10. С. 1593–1596.
3. *Рогалев А. Н.* Символьные вычисления в гарантированных методах, выполненные на нескольких процессорах // Вестн. НГУ. Серия: Информационные технологии. 2006. Т. 4, вып. 1. С. 56–62.
4. *Рогалев А. Н., Рогалев А. А.* Численный расчет включений фазовых состояний в задачах наблюдения за движением самолета // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева. 2012. № 1(41). С. 53–57.
5. *Рогалев А. Н.* Границы решений дифференциальных уравнений в задаче максимальных отклонений // Математика в современном мире. Международная конференция, посвященная 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева: тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. С. 242.
6. *Doronin S., Rogalev A.* Numerical approach and expert estimations of multi-criteria optimization of precision constructions // Proceedings of the School-Seminar on Optimization Problems and their Applications (OPTA-SCL 2018). Omsk, Russia, July 8–14, 2018. CEUR-WS.org/Vol-2098. P. 323–337.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ТИПА ЧАПЛЫГИНА

Сабитов К. Б.[1,2]

[1] *Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;*

[2] *Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ, Стерлитамак, Россия;* sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - bK(y)u = F(x,y) = \begin{cases} f_1(x)g_1(y), & y > 0, \\ f_2(x)g_2(y), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\, 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $K(y) = (\operatorname{sign} y)|y|^n$, n, l, α и β — заданные положительные числа, а b — любое заданное действительное число, и следующие задачи.

Задача 1. Найти функции $u(x,y)$ и $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$, удовлетворяющие условиям: $u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$, $f_i(x) \in C(0,l) \cap L_2[0,l]$, $Lu(x,y) \equiv F(x,y)$, $(x,y) \in D_+ \cup D_-$, $u(0,y) = u(l,y) = 0$, $-\alpha \le y \le \beta$, $u(x,\beta) = \varphi(x)$, $u(x,-\alpha) = \psi(x)$, $u_y(x,-\alpha) = g(x)$, $0 \le x \le l$, где $g_1(y)$, $g_2(y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Задача 2. Найти функции $u(x,y)$ и $f_i(x)$, $i = 1,2$, удовлетворяющие условиям задачи 1 и $u_y(x,\beta) = f(x)$, $0 \le x \le l$, где $g_1(y)$, $g_2(y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ — известные функции.

В статьях [1–5] исследованы обратные задачи 1 и 2 для уравнения (1) при $n = 0$, т. е. для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева – Бицадзе. В этих работах установлен критерий единственности решения задач 1 и 2, и решения построены в виде суммы рядов по системе корневых функций соответствующих одномерных спектральных задач.

В данном докладе приводятся результаты по исследованию задач 1 и 2, т. е. рассматривается уравнение смешанного типа (1) со степенным вырождением на переходной линии, которое имеет также важные приложения в газовой динамике в теории околозвуковых течений жидкостей и газов. Здесь также установлен критерий единственности решения задач 1 и 2 при всех $n > 0$. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций. Дано обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений уравнения (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-020516).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабитов К. Б., Хаджи И. А.* Краевая задача для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с неизвестной правой частью // Изв. вузов. Матем. 2011. № 5. С. 44–52.
2. *Хаджи И. А.* Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева – Бицадзе // Мат. заметки. 2012. Т. 91, вып. 6. С. 908–919.
3. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Изв. вузов. Матем. 2011. № 2. С. 71–85.
4. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 633–647.
5. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* Нелокальная обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева – Бицадзе в прямоугольной области // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2013. Т. 15, № 2. С. 73–86.

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН

Савельев Л. Я.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
savelev@math.nsc.ru

Марковской называется последовательность случайных переменных, у которых при известном настоящем прошлое и будущее стохастически независимы. Когда множество значений случайных переменных конечно, то совместные распределения их конечных семейств задаются произведениями матриц начальных и переходных вероятностей. Значения, как и аргументы, удобно нумеровать. Благодаря произвольному выбору значений переменных и нумерации аргументов, марковские модели могут достаточно адекватно описывать широкий круг явлений и процессов любой природы. В частности, сложных систем трещин в различных средах.

Кроме описания состояния системы в каждый момент, марковская модель позволяет описывать динамику процесса и прогнозировать ее. Возможность прогнозировать процесс является одним из самых важных свойств марковских моделей. Выбор небольшого числа значений дает возможность иметь надежную статистику и получать точные формулы нужных вероятностей.

В докладе рассматривается простейший, но очень важный случай двоичной марковской последовательности со значениями 0 и 1. Она позволяет моделировать обладающий марковским свойством процесс, состояния которого разбиты на два класса (например, существенные и нет). Описываются совместные распределения характеристик серий в реализациях процесса (функционалов на его траекториях). Выделяются исследовавшиеся в [1–2] число единиц, число серий единиц и максимум их длин. К ним добавляется новый функционал: длина последней серии. Он играет существенную техническую роль и вместе с максимумом длин серий позволяет описывать экстремальные свойства процесса развития рассматривающейся системы трещин. Можно оценить критические моменты развития процесса (например, разрушение трещинами данной конструкции).

Пусть система моделируется двоичной марковской последовательностью случайных переменных $\xi(k)$, $k \geqslant 0$, с множеством значений $C = \{1, 0\}$, вектором $A = \{a, 1-a\}$ начальных и матрицей $Q = \{\{p, 1-p\}, \{1-q, q\}\}$ переходных вероятностей ($0 < p, q < 1$). Кроме того, $d = p + q - 1$, $b = (1-q)/(1-d)$, $c = (a-b)/(1-d)$, $-1 < d < 1$. Ключевыми являются равенства для вероятностей значений 1 и 0 в момент k: $p_k = b + (a-b)d^k$ и $q_k = 1 - b - (a-b)d^k$.

Так как $|d| < 1$, то $p_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} p_k = b$ и $q_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} q_k = 1 - b$. Погрешность приближения оценивается $|d|^k$. Будет составлена и решена методом производящих функций система рекуррентных уравнений для совместного распределения длины последней серии единиц и максимума длин таких серий. Дифференцирование производящих функций дает нужные средние значения и дисперсии. С помощью полученных рекуррентных уравнений удобно производить конкретные вычисления. Найденные вероятности позволяют выявлять критические моменты рассматриваемого процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Савельев Л. Я.* Простые стохастические модели трещин // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 2. С. 97–106.
2. *Савельев Л. Я.* Распределение числа состояний в двоичных марковских стохастических моделях // Сиб. журн. вычисл. математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 191–200.

ОБОСНОВАНИЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Сакабеков А. С.[1], Аужани Е. А.[2]

Satbayev University, Алматы, Республика Казахстан;
[1]auzhani@gmail.com, [2]erkawww@gmail.com

Многие задачи динамики разреженного газа требуют решения той или иной задачи для уравнения Больцмана. Прогнозирование аэродинамических характеристик летательных аппаратов при очень высоких скоростях и на больших высотах является важной проблемой аэрокосмической техники. В случае течения газа около твердого тела или внутри области, ограниченной твердой поверхностью, граничные условия описывают взаимодействие молекул газа с твердыми стенками. К сожалению, теоретических и экспериментальных исследований о взаимодействиях газа с поверхностью проведено мало. Аэродинамические характеристики летательных аппаратов при очень высоких скоростях и на больших высотах могут быть определены методами теории разреженного газа [1]. Для анализа аэродинамических характеристик летательных аппаратов в переходном режиме используется полное интегродифференциальное уравнение Больцмана с соответствующими граничными условиями. Граничные условия, которым должна удовлетворять функция распределения частиц на границе области, где происходит движение рассматриваемых частиц, зависят от состояния граничной поверхности, ее температуры и от степени шероховатости и чистоты. Определение граничных условий на поверхностях, обтекаемых разреженным газом, является одним из важнейших вопросов кинетической теории газов. В высотной аэродинамике важную роль играет взаимодействие газа с поверхностью обтекаемого тела [2]. Граничное условие Максвелла для решения конкретных задач более точно описывает взаимодействие молекул газа с поверхностью [1, 3]. Одним из приближенных методов решения начально-краевой задачи для уравнения Больцмана является моментный метод. С помощью моментного метода можно определить аэродинамические характеристики летательных аппаратов, такие как атмосферные параметры, скорость полета, геометрические параметры и тому подобное. В [4] приведена аппроксимация микроскопического граничного условия Максвелла, когда часть молекул отражается от поверхности зеркально, а часть — диффузно с максвелловским распределением. Макроскопические граничные условия для моментной системы уравнений Больцмана получаются из микроскопических граничных условий Максвелла. При этом мы получим начально-краевую задачу для нелинейной гиперболической системы уравнений. В данной работе дано обоснование корректности начально-краевой задачи для системы моментных уравнений Больцмана и доказано существование единственного решения в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственным переменным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
2. *Баранцев Р. Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975.
3. *Cercignani C.* Theory and application of the Boltzmann equation. Edinburgh: Scottish Academic Press; New York: Elsevier, 1975.
4. *Sakabekov A. S., Auzhani Y. A.* Boundary conditions for the one-dimensional nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system equations // J. Math. Phys. 2014. V. 55, Article ID 123507.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛИМИТЕРОВ ДЛЯ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ПРИ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Сауткина С. М.[1], Корчагова В. Н.[1,2], Фуфаев И. Н.[3], Марчевский И. К.[1,2], Лукин В. В.[1,2,3]

[1]*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;* iliamarchevsky@mail.ru

[2]*Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Москва, Россия;* v.korchagova@ispras.ru

[3]*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;* vvlukin@gmail.com

В последние годы идет активное развитие численных схем на основе разрывного метода Галёркина (Discontinuous Galerkin, DG). Этот подход часто используется при решении задач аэроакустики и газовой динамики, так как он позволяет обеспечить высокий порядок точности численного решения на достаточно компактном шаблоне аппроксимации и имеет хорошую разрешающую способность на участках, где решение претерпевает разрыв.

Для подавления нефизичных осцилляций решения, возникающих в окрестностях разрывов, разработано множество различных подходов к монотонизации решения — так называемых лимитеров. Идея применения лимитера заключается в анализе вида решения на соседях рассматриваемой ячейки и при необходимости уменьшение наклона решения.

Для большинства ограничителей до недавних пор использовался стандартный компактный шаблон, состоящий из соседей текущей ячейки через ребра. Однако в последние годы появляются лимитеры с расширенным шаблоном, включающим в себя также соседей ячейки через ее вершины [1]. Такие лимитеры находят успешное применение при решении задач на двумерных треугольных и трехмерных тетраэдральных сетках.

В работе проведен сравнительный анализ технологий монотонизации решения, основанных на локальном принципе максимума. Получены результаты при использовании различных шаблонов на двумерных сетках с ячейками смешанного типа (треугольными и четырехугольными). Рассматриваемые схемы лимитирования реализованы в рамках прототипа программного комплекса, используемого для моделирования двумерных газодинамических задач на неструктурированных сетках [2]. Исследование показало, что дополнение шаблона лимитирования соседями ячейки через вершины дает возможность лучше разрешать контактный разрыв.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Giuliani A., Krivodonova L.* Analysis of slope limiters on unstructured triangular meshes // J. Comput. Phys. 2018. V. 374. P. 1–26.
2. *Korchagova V. N., Fufaev I. N., Lukin V. V., Sautkina S. M.* Numerical modelling of two-dimensional perfect gas flows using RKDG method on unstructured meshes // AIP Conf. Proc. 2018. V. 2027, No. 1. P. 1–9.

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕНЗОРНОЙ ТОМОГРАФИИ В $\mathbb{R}^3$ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ

Светов И. Е.[1], **Мальцева С. В.**[1], **Луис А. К.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* svetovie@math.nsc.ru, maltsevasv@math.nsc.ru

[2] *Университет Саарланда, Саарбрюккен, Германия;* louis@num.uni-sb.de

В данной работе задача трехмерной тензорной томографии рассматривается в следующей постановке. Пусть некоторое векторное или симметричное 2-тензорное поле v задано в единичном шаре. Требуется восстановить это поле по его известным значениям лучевого преобразования $\mathcal{I}$. Лучевое преобразование $\mathcal{I}$ в $\mathbb{R}^3$ преобразует поле v в функцию $[\mathcal{I}v]$, определенную на множестве ориентированных прямых.

Задачи восстановления векторных и симметричных 2-тензорных полей по лучевому преобразованию единственного решения не имеют. Именно, потенциальные поля, потенциал которых обращается в нуль на границе области — единичной сфере, лежат в ядре лучевого преобразования [1]. Поэтому только соленоидальная часть ${}^s v$ поля v может быть восстановлена по $[\mathcal{I}v]$. Задача переопределена по размерности, так как необходимо восстановить функции ${}^s v_j(x)$ или ${}^s v_{ij}(x)$, где $x \in \mathbb{R}^3$, по функции $[\mathcal{I}v]$, определенной на четырехмерном множестве ориентированных прямых. Поэтому естественно рассматривать задачу восстановления ${}^s v$ по неполным данным $[\mathcal{I}v]|_{M^3}$, где M^3 — некоторое трехмерное множество ориентированных прямых.

В работе [2] предложены формулы обращения для восстановления соленоидальной части векторного и симметричного 2-тензорного полей по их известным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль всех прямых, параллельных одной из координатных плоскостей. На основе этих формул для векторного случая был разработан и реализован численный алгоритм [3].

В данной работе предлагаются алгоритмы восстановления соленоидальной части векторных и симметричных 2-тензорных полей по их известным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль всех прямых, параллельных одной из координатных плоскостей. Алгоритм основан на методе приближенного обращения, который ранее был успешно применен при решении двумерных задач векторной и тензорной томографии [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ и ННИО (проект № 19-51-12008).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sharafutdinov V. A.* Integral geometry of tensor fields. Utrecht: VSP, 1994.
2. *Sharafutdinov V. A.* Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data // Inverse Probl. 2007. V. 23. P. 2603–2627.
3. *Svetov I. E.* Reconstruction of the solenoidal part of a three-dimensional vector field by its ray transforms along straight lines parallel to coordinate planes // Numer. Analysis Appl. 2012. V. 5, No. 3. P. 271–283.
4. *Derevtsov E. Yu., Louis A. K., Maltseva S. V., Polyakova A. P., Svetov I. E.* Numerical solvers based on the method of approximate inverse for 2D vector and 2-tensor tomography problems // Inverse Probl. 2017. V. 33, No. 12. Article ID 124001.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПРОТЯЖЕННЫХ СИСТЕМАХ

Свешников В. М.[1,2]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
victor@lapasrv.sscc.ru

Протяженную расчетную область можно разбить на две подобласти: в первой из них формируется интенсивный пучок, во второй — происходит его доускорение и транспортировка. Продольные размеры первой подобласти намного меньше размеров второй. В целом расчетная область характеризуется значительной разномасштабностью, что порождает особенности в решении следующих проблем: построение конечно-разностной сетки, на которой проводятся расчеты, выделение сингулярности на катоде при решении самосогласованных задач, расчет протяженных траекторий движения заряженных частиц. В докладе рассматривается каждая из них применительно к расчету протяженных систем. Даются примеры практических расчетов.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования и Президиума СО РАН (Междисциплинарный интеграционный проект СО РАН № 10).

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ ЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В ОКРЕСТНОСТИ НЕУСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Седипков А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
sedipkov@gmail.com

Настоящая работа связана с изучением возможности управления решениями математических моделей эволюционных процессов, имеющих режимы, соответствующие неустойчивым стационарным решениям. Нередко такие режимы являются наиболее выгодными с точки зрения приложений. Поэтому возникает вопрос, какими параметрами и как нужно управлять, чтобы решение нестационарной задачи сколь угодно долго оставалось в малой окрестности неустойчивого стационарного режима. В работе предложен способ управления стационарными решениями, зависящими от параметра, на уровне модельной задачи для линейного оператора в конечномерном пространстве. Эта идея основана на эффекте "удаления" решения с течением времени от неустойчивого стационарного решения.

Рассматривется управляемый процесс, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнением
$$y'(t) = A(y(t) - v), \tag{1}$$
где $y(t)$ — фазовая переменная со значениями в $\mathbb{R}^n$, характеризующая состояние процесса в момент времени t; v — управляющий параметр со значениями в $\mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор.

Пусть имеется управляющий субъект — оператор, который в любой момент времени может мгновенно переключить параметр v, придав ему произвольное новое значение, причем интервалы времени между соседними переключениями должны быть не меньше наперед заданного положительного числа τ, т. е. класс допустимых управлений состоит из кусочно постоянных функций вида
$$v(t) \equiv v^s \text{ при } t_s < t < t_{s+1}, \text{ где } \inf\{t_{s+1} - t_s \mid s \in \mathbb{N}\} \geq \tau > 0,\ t_0 = 0.$$
Непрерывная функция $y(t)$ считается решением уравнения (1) с допустимым управлением $v(t)$, если на каждом из интервалов (t_s, t_{s+1}) существует производная $y'(t)$ и выполняется равенство $y'(t) = A(y(t) - v^s)$. Известно, что ровно k собственных чисел оператора A положительны и различны, а остальные $n - k$ расположены в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

В работе доказано, что для любой окрестности V фиксированной точки v^0 найдется такое открытое подмножество W, что для всякого начального состояния $y^0 \in W$ существует допустимое управление $v(t)$, при котором решение задачи Коши
$$\begin{aligned}
&y'(t) = A(y(t) - v(t)),\ t \in (t_s, t_{s+1}),\ s \in \mathbb{N},\\
&\lim_{t \to t_{s+1}-0} y(t) = \lim_{t \to t_{s+1}+0} y(t),\\
&y(0) = y^0
\end{aligned}$$
не выйдет из окрестности V в течение сколь угодно долгого времени.

Работа выполнена в рамках базового проекта ИМ СО РАН (№ 0314-2016-0012) и при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 18-01-00649).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ И ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В АНАЛИЗЕ КАЧЕСТВЕННОГО ПОВЕДЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Седова Н. О.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия;
sedovano@ulsu.ru

В работе развиваются методы анализа многомерных непрерывных систем с запаздыванием с некоторыми дополнительными предположениями относительно характера связей между подсистемами. При этом специальное представление функционалов, определяющих динамику системы, позволяет применять методы декомпозиции и линейной оптимизации для анализа асимптотического поведения решений системы.

В частности, в терминах системы линейных матричных неравенств получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения для системы, представимой в виде:

$$\dot{z}(t) = \sum_{k=1}^{p} \mu_1^k(t, z_t, y_t)\big(A_1^k z(t) + A_{1\tau}^k z(t - \tau_1(t))\big) + g(t, z_t, y_t),$$

$$\dot{y}(t) = \sum_{k=1}^{p} \mu_2^k(t, z_t, y_t)\big(A_2^k y(t) + A_{2\tau}^k y(t - \tau_2(t))\big).$$

Здесь $z \in D_z \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in D_y \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$; функции $z_t \in C(z) := C([-r_1, 0], D_z)$ и $y_t \in C(y) := C([-r_2, 0], D_y)$ определяются равенствами $z_t(s) = z(t + s)$, $s \in [-r_1, 0]$, $y_t(s) = y(t + s)$, $s \in [-r_2, 0]$, Предполагается также, что g непрерывна на множестве $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty) \times C(z) \times C(y)$, $g_k(z_t, 0) = 0$, $\tau_i(t) : \mathbb{R}^+ \to [0, r_i]$ — кусочно-непрерывные функции, A_i^k, $A_{i\tau}^k$ — постоянные матрицы подходящей размерности, $\mu_i^k(t, z_t, y_t) \in C(\mathbb{R}^+ \times C(z) \times C(y), [0, 1])$, $\sum_{k=1}^{p} \mu_i^k(t, z_t, y_t) = 1$ для всех $(t, z_t, y_t) \in \mathbb{R}^+ \times C(z) \times C(y)$ $(k = 1, \ldots, p,\ i = 1, 2)$. Обоснованы также достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости для систем с возмущениями, удовлетворяющими некоторым условиям.

Рассмотренная структура охватывает достаточно широкой класс систем с запаздыванием, рассматриваемых в ограниченной области. Свойство же глобального притяжения начала координат предложенным методом удается обосновать лишь при дополнительных довольно жестких ограничениях на правую часть системы. В более общем случае в виде задачи полуопределенного программирования удается сформулировать задачу построения гарантированной эллипсоидальной оценки области притяжения, а также достаточные условия предельной ограниченности решений системы, в том числе при постоянно действующих возмущениях.

Результаты получены с применением функций Ляпунова с условиями Разумихина [1]. Модификация этих условий и использование пространств с исчезающей памятью позволяет получить некоторые результаты для системы аналогичной структуры, но без условия ограниченности запаздываний. Рассмотрены приложения полученных результатов к анализу нелинейных уравнений динамики ряда механических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Разумихин Б. С.* Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СКАЧКА В СДВИГОВОЙ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ С УЧЕТОМ ВЯЗКОСТИ

Семенко Е. В.[1], **Семенко Т. И.**[2]

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия;
[1]semenko54@gmail.com, [2]semenko_ti@mail.ru

Сдвиговая теория мелкой воды аналогична классической (уравнения Сен-Венана), но с добавлением дополнительных членов, учитывающих завихренность течения. Эта теория была впервые предложена в статье В. М. Тешукова [1] и затем развита во многих работах, см., например [2, 3].

В настоящей работе для моделирования гидравлического скачка в сдвиговую модель мелкой воды добавляются вязкие члены, т. е. в качестве исходной системы уравнений рассматриваются уравнения Навье – Стокса. Гидравлический скачок рассматривается как очень узкий переходный слой с большими градиентами искомых величин в перпендикулярном к слою направлении. Изучается модельный одномерный случай.

Исследование производится классическим методом, подробно изложенным, в частности, в книге [4]. В результате задача в переходном слое сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. На этой основе удается смоделировать процессы внутри гидравлического скачка, в частности, обосновать постановку условий сопряжения (условий Гюгонио), объяснить особенности перехода и установить динамику искомых величин внутри переходной зоны.

Основные выводы:

1. Источником гидравлического скачка является вязкость, достаточно малая, но положительная: нет вязкости — нет гидравлического скачка.

2. Скачок всегда переводит сверхкритическое состояние течения в докритическое.

3. Физически процесс перехода состоит в том, что вязкое торможение приводит к уменьшению средней скорости, что при сохранении потока ведет к подъему уровня жидкости.

4. В гидравлическом скачке завихренность вначале быстро возрастает и достигает максимума в точке, в которой состояние жидкости становится критическим, далее завихренность убывает вплоть до достижения конечного докритического состояния, но итоговая завихренность в конечном состоянии остается большей, чем в первоначальном сверхкритическом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тешуков В. М.* Газодинамическая аналогия для вихревых течений со свободной границей // Прикл. механика и техн. физика. 2007. Т. 48, № 3. С. 8–15.
2. *Richard G. L., Gavrilyuk S. L.* The classical hydraulic jump in a model of shear shallow-water flows // J. Fluid Mech. 2013. V. 725. P. 492–521.
3. *Semenko E. V.* The analytic description of hydraulic jump in the linear theory of the shear shallow-water flows // Phys. Fluids. 2019. V. 31. P. 016101–016123.
4. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М: Наука, 1966.

ЭФФЕКТ ПРЕИМУЩЕСТВЕННО ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ВРАЩЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Сенницкий В. Л.[1,2]

[1]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
`sennitskii@yandex.ru`

Теоретические и экспериментальные исследования динамики гидромеханических систем при колебательных воздействиях привели к обнаружению ряда эффектов среднего движения (см., например, [1–3] и представленную там литературу). Развитие исследований в данной области нашло отражение, в частности, в настоящей работе.

Поставлена и решена новая задача о периодическом по времени движении вязкой несжимаемой жидкости в присутствии твердого тела и идеального газа. Твердое тело ограничено изнутри круговой цилиндрической поверхностью Γ_1 радиусом R_1. Газ ограничен извне круговой цилиндрической поверхностью Γ_2 радиусом R_2. В каждый момент времени оси поверхностей Γ_1, Γ_2 находятся на оси Z цилиндрической системы координат R, θ, Z; жидкость занимает область $R_2 < R < R_1$ ($0 \le \theta < 2\pi$, $-\infty < Z < \infty$). Твердое тело вращается и пульсирует; угловая скорость Ω вращения твердого тела вокруг оси Z и радиус R_1 заданным образом периодически изменяются со временем (среднее значение скорости Ω равно нулю).

Постановка задачи включает в себя уравнения Навье – Стокса и неразрывности, условия на свободной и твердой границах жидкости, а также условие постоянства разности $R_1^2 - R_2^2$.

Установлено наличие следующего эффекта. Гидромеханическая система, подвергающаяся колебательным воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве, производит однонаправленные отклики, реакции на воздействия, выражающиеся в том, что свободные части системы — слои жидкости — на фоне колебаний совершают однонаправленное стационарное вращательное движение. В частности, преимущественно однонаправленное вращательное движение совершает жидкий слой, граничащий с газом.

Результаты работы могут найти применение в исследованиях необычной динамики гидромеханических систем, а также использоваться при создании устройств, гидромеханических систем, обладающих заданными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сенницкий В. Л.* Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
2. *Сенницкий В. Л.* О заданной ориентации твердого включения в вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 1. С. 123–128.
3. *Сенницкий В. Л.* Преимущественно однонаправленное вращение твердого тела и вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ТАЮЩЕМ СНЕГЕ

Сибин А. Н.[1], **Папин А. А.**[2]

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;
[1]sibin_anton@mail.ru, [2]papin@math.asu.ru

Большой класс задач фильтрации с фазовыми переходами составляют задачи тепломассопереноса в тающем снежно-ледовом покрове. Эти задачи востребованы для расчетов и прогноза гидрографов весеннего половодья и качества воды в водоемах-приемниках. Основы теории изотермического движения воды и воздуха в снеге заложены в работах S. C. Colbeck [1] и его последователей [2, 3]. Модели тающего снега как многофазной среды и с учетом фазовых переходов рассматривались в [4, 5].

В докладе рассматривается математическая модель снежного покрова как трехфазной среды, состоящей из воды, воздуха и льда, составляющего твердый пористый скелет. В основу модели положены уравнения сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов, уравнения двухфазной фильтрации для воды и воздуха [6], уравнения теплового баланса [4]. Предложен алгоритм численного решения начально-краевой задачи тепломассопереноса в тающем снеге и проведены тестовые численные расчеты. Рассматриваемая модель откалибрована путем сравнения расчетов с экспериментальными данными [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Colbeck S. C.* A theory of water percolation in snow // Journal of Glaciology. 1972. V. 11, No. 63. P. 369–385.
2. *Sellers S.* Theory of water transport in melting snow with a moving surface // Cold Regions Science and Technology. 2000. V. 31. P. 47–57.
3. *Gray J. M. N. T.* Water movement in wet snow // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1996. V. 354. P. 465–500.
4. *Кучмент Л. С., Демидов В. Н., Мотовилов Ю. Г.* Формирование речного стока. Физико-математические модели. М.: Наука, 1983.
5. *Papin A. A.* Solvabilitity of a model problem of heat and mass transfer in thawing snow // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2008. V. 49, No. 4. P. 527–536.
6. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983.
7. *Waldner P. A., Schneebeli M., Schultze-Zimmermann U., Fluhler H.* Effect of snow structure on water flow and solute transport // Hydrol. Process. 2004. V. 18. P. 1271–1290.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Сидоров С. Н.[1,2]

[1] *Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ, Стерлитамак, Россия;*

[2] *Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;* stsid@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - bt^n u, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b(-t)^m u, \end{cases} \qquad F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\}$, где $n > 0$, $m > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные действительные числа и b — заданное любое действительное число, и поставим следующие задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям: $u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-)$; $Lu(x,t) \equiv F(x,t)$, $(x,t) \in D_+ \cup D_-$; $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $-\alpha \le t \le \beta$; $u(x,-\alpha) = 0$, $0 \le x \le l$, где $F(x,t)$ — заданная достаточно гладкая функция, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. Найти функции $u(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям задачи 1 и $g_1(t) \in C[0,\beta]$, $g_2(t) \in C[-\alpha,0]$, $u(x_0,t) = h(t)$, $0 < x_0 < l$, $-\alpha \le t \le \beta$, здесь $f_i(x)$, $i = 1,2$, $h(t)$ — известные функции, x_0 — заданная точка из интервала $(0,l)$.

Отметим, что начально-граничная задача 1 для уравнения (1) изучена в работах [1, 2] при $n \ge 0$ и $m \ge 0$. В статьях [3, 4] рассмотрена обратная задача 2 для уравнения (1), когда $n > 0$, $m = 0$ и $n = 0$, $m > 0$ соответственно.

В данной работе изучена обратная задача 2, исследование которой проводится на основе решения прямой начально-граничной задачи 1. Решение этой задачи построено в виде суммы ортогонального ряда, при обосновании сходимости которого возникает проблема малых знаменателей. В связи с этим установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволяют обосновать сходимость ряда в классе регулярных решений уравнения (1). На основе формулы решения задачи 1 решение обратной задачи 2 эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений, доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач и указаны явные формулы решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабитов К. Б.* Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016.
2. *Sabitov K. B., Sidorov S. N.* Initial-boundary-value problem for inhomogeneous degenerate equations of mixed parabolic-hyperbolic type // J. Math. Sci., New York. 2019. V. 236, No. 6. P. 603–640.
3. *Сидоров С. Н.* Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 144–157.
4. *Сидоров С. Н.* Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // Уфимск. мат. журн. 2019. Т. 11, № 1. С. 72–86.

ОБ УСТОЙЧИВЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ, ИМЕЮЩИМ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

Сказка В. В.[1,2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
skazka@math.nsc.ru

В комплексном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ рассматривается следующая задача Коши:

$$B\frac{du}{dt} = iAu + \varepsilon\cos(\omega t)Pu, \quad u|_{t=0} = u_0. \tag{1}$$

Здесь A — самосопряженный оператор, B — ограниченный положительно определенный оператор, т. е. $(Bu,u) \geq \delta(u,u)$, $\delta > 0$, P — ограниченный.

Работа является продолжением исследований, начатых в работах, опубликованных ранее в журнале "Математический сборник" и посвященных вопросам о влиянии непрерывного спектра на явление параметрического резонанса в дифференциальных уравнениях.

Под решением уравнения (1) мы будем понимать решение следующего интегрального уравнения:

$$u(t) = u_0 + \varepsilon\int_0^t e^{iB^{-1}A(t-\tau)}B^{-1}\cos(\omega\tau)Pu(\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

Введем следующее банахово пространство аналитических в правой полуплоскости функций GH с нормой $[\![\varphi]\!]_H = \sup\limits_{x>0}\int_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(x+iy)\|_H^2\,dy$.

Пусть выполнены следующие предположения ($\lambda = x+iy$, $x>0$):

1. Для любой $\psi \in H$ справедливо: $\left[\!\left[P(\lambda B - iA)^{-1}\psi\right]\!\right]_H \leq K\|\psi\|_H$.
2. Для любой $\varphi \in GH$ справедливо: $\int_{-\infty}^{\infty}\left\|P(\lambda B - iA)^{-1}\varphi(\lambda)\right\|_H^2\,dy \leq K\int_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(\lambda)\|_H^2\,dy$.
3. Для любой $\varphi \in GH$ справедливо: $\left\|\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda t}(\lambda B - iA)^{-1}\varphi(\lambda)\,dy\right\|_H^2 \leq Ke^{2xt}\int_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(\lambda)\|_H^2\,dy$.

Теорема. *При вышеперечисленных условиях существуют $\varepsilon_0 > 0, C > 0$ такие, что для любых ε, ω, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $\omega \in \mathbb{R}$, для решения уравнения* (2) *справедливо:* $\|u(t)\|_H \leq C\|u_0\|_H$.

В качестве примера можно рассмотреть модельное для линейных уравнений акустики и теории упругости уравнение в $L_2(\mathbb{R}^3)$

$$\frac{du(x,t)}{dt} = i\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\;u + \varepsilon\cos(\omega t)\iiint_{\mathbb{R}^3}K(x,y)u(y,t)\,dy.$$

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5., проект № 0314-2016-0012.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Скворцова М. А.[1,2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
sm-18-nsu@yandex.ru

В работе рассматривается модель динамики клеточной популяции, предложенная Н. В. Перцевым. Модель описывается системой дифференциальных уравнений с двумя положительными запаздываниями

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = f(u(t-\tau_1), w(t-\tau_2)) - \mu x(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}u(t) = \alpha_1 x(t) - \mu_1 u(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}w(t) = \alpha_2 x(t) - \mu_2 w(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)$ — численность популяции, $u(t)$ — стимулятор роста популяции, $w(t)$ — ингибитор роста популяции. Функция $f(u, w)$ непрерывна, неотрицательна, не убывает по u и не возрастает по w. Все коэффициенты системы предполагаются положительными.

В работе изучается устойчивость положений равновесия системы (1). Получены условия на параметры системы, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми. Установлены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и указаны оценки на области притяжения. Результаты получены с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ВОДЫ В АТМОСФЕРЕ ПО СПЕКТРАМ ПРОПУСКАНИЯ СОЛНЕЧНОГО СВЕТА

Скорик Г. Г.[1,2], **Васин В. В.**[1,2]

[1] *Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;*
[2] *Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия;*
skorik@imm.uran.ru, vasin@imm.uran.ru

В данном докладе рассматривается обратная задача восстановления высотных профилей относительной концентрации молекул HDO в водяном паре по ИК-спектрам пропускания солнечного света. Исследуемая задача сводится к решению нелинейного операторного уравнения

$$P(z) = \bar{P}, \tag{1}$$

где $\bar{P}$ — ИК-спектр солнечного света, измеренный Фурье-интерферометром FTIR (Fourier Transform InfraRed “Bruker” IFS 125M) наземного базирования, z — составной вектор, основанный на значениях концентраций H_2O и HDO на заданной сетке высот, P — нелинейный оператор, вычисляющий модельный спектр по заданному z. Оператор P строится на основе данных, полученных в результате работы программы FIRE-ARMS, решающей прямую задачу вычисления модельного спектра по известным профилям концентрации газов, давления и температуры, полученных из реанализа метеоданных на момент измерения спектра.

Решение задачи (1) сильно чувствительно к ошибкам измерения спектра, поэтому вначале применяется тихоновская регуляризация в форме

$$\min\{||P(z) - \bar{P}||^2 + \alpha\langle B(z - z^0), z - z^0\rangle : \; z \in \mathbb{R}^n\}, \tag{2}$$

где $B = (K+\varepsilon I)^{-1}$, K — ковариационная матрица, ε — малый положительный параметр. Для аппроксимации решения z_α задачи (2) используется итерационный процесс, предложенный в [1]:

$$z^{k+1} = z^k - [\Phi'(z^k) + \alpha B + \beta I]^{-1}(\Phi(z^k) + \alpha B(z^k - z^0)),$$

где $\Phi(z) = P'(z)^{\mathrm{T}}(P(z) - \bar{P})$, β — параметр prox-метода для (2).

Теорема. *Пусть $\Phi'(z)$ — симметричная матрица с собственными значениями, не меньшими, чем $-\gamma$, $\gamma > 0$, $\mu - \gamma \geq \bar{\mu} > 0$, $\mu = \alpha/(||K|| + \varepsilon)$, и выполняется условие $||z_\alpha - z^0|| \leq r$, $r = \bar{\mu}/N$, где N — константа в неравенстве $||\Phi(z_1) - \Phi(z_2)|| \leq N||z_1 - z_2||$. Тогда справедлива оценка*

$$||z^k - z_\alpha|| \leq q^k r, \quad q = (\beta + \bar{\mu}/2)/(\beta + \bar{\mu}) < 1.$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00024).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skorik G. G.* Reconstruction of vertical profiles of heavy water in atmosphere by IR-spectra of the solar light transmission // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2018. V. 6, No. 1. P. 56–64.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ФОРМ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОТОЧНОГО ТРАКТА ГИДРОТУРБИН

Скороспелов В. А.[1], **Турук П. А.**[2], **Чирков Д. В.**[3], **Щербаков П. К.**[4]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
vskrsp@math.nsc.ru
[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
turuk@math.nsc.ru
[3]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;*
chirkov@ict.nsc.ru
[4]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;*
1doffys@gmail.com

В настоящее время весьма активно развиваются методы проектирования оптимальных форм элементов проточного тракта гидротурбин на основе численного моделирования течений и прочностных характеристик с использованием методов многокритериальной оптимизации.

Рабочее колесо и отсасывающая труба гидротурбины — основные элементы ее проточной части, определяющие производительность турбины, ее прочностные, кавитационные и весовые характеристики. Поэтому проектирование оптимальных форм этих элементов — весьма актуальная задача. Важным аспектом этой проблемы является методика генерации допустимого множества форм проектируемого элемента в качестве области для поиска оптимального. Предлагается подход, основанный на вариации формы исходного элемента — прототипа. Вариация поверхности лопасти рабочего колеса осуществляется путем вариации ее срединной поверхности и поверхности толщин. Поверхность отсасывающей трубы представляется в виде поверхности, зависящей от определенного числа параметров, и вариация ее формы осуществляется путем вариации ее параметров.

Предлагается методика генерации конечно-объемных сеток для численного моделирования течения в области каждого из рассматриваемых элементов проточного тракта гидротурбины. Для расчета прочностных характеристик рабочего колеса предложены методы построения конечно-элементных сеток.

Численное моделирование течения осуществляется путем решения системы осредненных по Рейнольдсу трехмерных уравнений Навье – Стокса, замкнутых двухпараметрическими моделями турбулентности. Расчет прочностных характеристик реализуется методом конечных элементов.

Для решения многокритериальной оптимизационной задачи используются генетические алгоритмы оптимизации. Предложенная методика проектирования оптимальных форм элементов проточного тракта гидротурбин реализована в программном комплексе CADRUN. Его практическое использование позволило улучшить энергетические показатели и прочностные характеристики ряда реальных ГЭС.

Часть результатов опубликована в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чирков В. В., Щербаков П. К., Черный С. Г., Скороспелов В. А., Турук П. А.* Численное исследование влияния вдува воздуха на кавитационное течение в радиально-осевой гидротурбине // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 5. С. 711–723.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ

Смирнов Д. Д.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; smirnovdd@mail.ru

Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными (СДУЧП) являются очень хорошим инструментом для описания многих процессов и явлений, происходящих в физических системах, так как в СДУЧП учитывается влияние случайных факторов на физическую систему [1]. Решением СДУЧП является случайное поле, для описания которого применяются различные вероятностные характеристики. Так как в большинстве случаев не удаётся найти аналитическое решение СДУЧП, то для описания случайного поля, являющегося решением СДУЧП, применяются оценки различных вероятностных характеристик, которые получены с помощью метода численного статистического моделирования [2]. Для нахождения оценок вероятностных характеристик случайного поля, являющегося решением СДУЧП, с высокой точностью требуется моделировать большое количество реализаций этого случайного поля и каждую реализацию моделировать с очень малыми шагами дискретизации в заданной пространственно-временной области. Обычный компьютер с такой задачей не справляется за приемлемое время, поэтому требуется использовать суперкомпьютер, на котором реализуются параллельные алгоритмы для решения данной задачи. Распараллеливание по реализациям проводилось с помощью библиотеки PARMONC [3]. В данной работе все расчёты проводились на кластерах НКС-30Т и НКС-1П с использованием ресурсов ЦКП Сибирский Суперкомпьютерный Центр ИВМиМГ СО РАН.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00698 и № 18-01-00599).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артемьев С. С., Марченко М. А., Корнеев В. Д., Якунин М. А., Иванов А. А., Смирнов Д. Д.* Анализ стохастических колебаний методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2016.
2. *Михайлов Г. А., Войтишек А. В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Издательский центр Академия, 2006.
3. *Марченко М. А.* Библиотека PARMONC для решения "больших" задач по методу Монте-Карло // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2012. С. 392–397.

О ПОВЫШЕНИИ ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ДВУМЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ МЕТОДАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Солдатова И. А.[1], **Марчевский И. К.**[1,2]

[1]*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;* i-soldatova@bk.ru

[2]*Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Москва, Россия;* iliamarchevsky@mail.ru

Проблема повышения точности расчетов течений с использованием вихревых методов является актуальной; наиболее существенным фактором является точность моделирования процесса генерации завихренности на границе обтекаемого профиля. Математическая модель представляет собой граничное интегральное уравнение, при этом исходная задача может быть сведена как к сингулярному уравнению 1-го рода, так и к уравнению 2-го рода с ограниченным ядром вида

$$\oint_K \frac{(\vec{r}-\vec{\xi}\,)\cdot\vec{n}(\vec{r}\,)}{|\vec{r}-\vec{\xi}\,|^2}\gamma(\vec{\xi}\,)dl_\xi - \frac{\gamma(\vec{r}\,)}{2} = f_\tau(\vec{r}\,), \quad \vec{r}\in K. \tag{1}$$

Второй путь позволяет строить численные схемы более высокой точности; в уравнении (1) $\vec{n}(\vec{r}\,)$ — орт внешней нормали к профилю, $\gamma(\vec{r}\,)$ — искомая интенсивность вихревого слоя; $f_\tau(\vec{r}\,)$ — правая часть, зависящая от формы обтекаемого профиля, набегающего потока и распределения завихренности в области течения.

В работе [1] подробно описана процедура построения численных схем 1-го и 2-го порядка точности для численного решения уравнения (1) на основе подхода Галёркина с кусочно-постоянными и кусочно-линейными базисными функциями. При этом установлено, что для обеспечения 2-го порядка требуется учет криволинейности границы профиля. Кроме того, он необходим в случае, когда соседние панели (участки дискретизации) профиля существенно различаются по длине.

В настоящей работе данная методика обобщена на случай использования кусочно-квадратичных базисных функций. Получены приближенные аналитические выражения для коэффициентов СЛАУ, представляющей собой дискретный аналог уравнения (1); обеспечение 3-го порядка точности потребовало при вычислении интегралов вида

$$\int_{K_i}\varphi_i^p(\vec{r}\,)dl_r\int_{K_j}\frac{(\vec{r}-\vec{\xi}\,)\cdot\vec{n}(\vec{r}\,)}{|\vec{r}-\vec{\xi}\,|^2}\varphi_j^q(\vec{\xi}\,)dl_\xi$$

учета слагаемых, пропорциональных L_i^4, где L_i — длины панелей; $\{\varphi_i^p\}_{i=1}^N$ — семейства ортогональных кусочно-постоянных ($p=0$), кусочно-линейных ($p=1$) и кусочно-квадратичных ($p=2$) базисных функций на панелях профиля.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00245).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marchevsky I. K., Kuzmina K. S., Soldatova I. A.* Improved algorithm of boundary integral equation approximation in 2D vortex method for flow simulation around curvilinear airfoil // Mathematics and Mathematical Modeling. 2018. No. 6. P. 22–51.

КОЛЛОКАЦИОННО-ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Соловарова Л. С.[1], **Булатов М. В.**[2]

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;
[1]`soleilu@mail.ru`, [2]`mvbul@icc.ru`

В докладе рассмотрена задача

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t),\ x(0) = x_0,\ t \in [0, 1],$$

где $A(t)$, $B(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ — заданная и искомая n-мерные вектор-функции, элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ достаточно гладкие, и

$$\det A \equiv 0.$$

Такие задачи принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Предполагается, что начальное условие задано корректно, а из исходной задачи и r ее производных путем элементарных преобразований можно выделить классическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений $x'(t) + \bar{B}(t)x(t) = \bar{f}(t)$. Значение r принято называть индексом рассматриваемой задачи. Многие известные неявные методы могут порождать неустойчивый процесс или принципиально неприменимы для ДАУ. Авторы для таких задач предлагают коллокационно-вариационные разностные схемы, которые имеют принципиальное отличие от классических алгоритмов. Описаны общий подход к созданию коллокационно-вариационных разностных схем и конкретные алгоритмы с одной и двумя точками коллокации. Приведены результаты численных расчетов. Данное исследование продолжает работы [1–2].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-51-54001, № 18-29-10019, № 18-01-00643).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булатов М. В., Горбунов В. К., Мартыненко Ю. В., Нгуен Д. К.* Вариационные подходы к численному решению дифференциально-алгебраических уравнений // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 5. С. 3–13.
2. *Bulatov M. V., Solovarova L. S.* Collocation-variation difference schemes for differential-algebraic equations // Math. Methods Appl. Sci. 2018. V. 41, No. 18. P. 9048–9056.

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ ДИЗАЙНА СЛОИСТЫХ МАГНИТНЫХ МАСКИРОВОЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

Спивак Ю. Э.[1,2]

[1]*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;*
[2]*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия;*
uliyaspivak@gmail.com

В течение последних нескольких лет интенсивно развиваются и предлагаются эффективные методы и технологии дизайна функциональных устройств (например, маскировочных оболочек), обеспечивающих невидимость материальных тел от их обнаружения различными средствами локации. В хронологическом порядке первые работы в указанной области были посвящены электромагнитной маскировке [1], далее — акустической [2], а позже полученные результаты были распространены на случай маскировки от статических магнитных, электрических и тепловых полей [3–5].

Следует, однако, отметить, что техническая реализация решений, полученных в цитируемых работах, связана с существенными трудностями [1–5], поскольку такие решения предполагают использование несуществующих в природе метаматериалов. Существует несколько способов преодоления указанных трудностей реализации решений, среди которых отметим оптимизационный метод [6–8].

В настоящей работе рассматривается обратная задача магнитостатики, возникающая при проектировании многослойных двумерных маскировочных оболочек, служащих для управления магнитными полями. В общем случае такие оболочки состоят из конечного числа слоев, каждый из которых заполнен однородной изотропной либо анизотропной средой. С помощью оптимизационного метода рассматриваемая обратная задача сводятся к задаче управления [7, 8]. Для численного решения поставленной задачи предлагается алгоритм, основанный на использовании метода глобальной оптимизации — метода роя частиц. Выполняется цикл вычислительных экспериментов в широком диапазоне изменения параметров задачи, обсуждаются и анализируются полученные результаты.

Работа выполнена при поддержке программы “Приоритетные научные исследования в интересах комплексного развития ДВО РАН” (проект № 18-5-064).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pendry J. B., Shurig D., Smith D. R.* Controlling electromagnetic fields // Science. 2006. V. 312. P. 1780–1782.
2. *Cummer S. A., Shurig D.* One path to acoustic cloaking // New J. Phys. 2007. V. 9, Article ID 45. P. 1–8.
3. *Wood B., Pendry J. B.* Metamaterials at zero frequency // J. Phys.: Condens. Matter. 2007. V. 19. Article ID 076208.
4. *Gömöry F., Ŝolovyov M., Souc J. et al.* Experimental realization of a magnetic cloak // Science. 2012. V. 335. P. 1466–1468.
5. *Guenneau S., Amra C., Veynante D.* Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux // Opt. Express. 2012. V. 20. P. 8207–8218.
6. *Алексеев Г. В.* Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе. Владивосток: Дальнаука, 2016.
7. *Алексеев Г. В., Лобанов А. В., Спивак Ю. Э.* Оптимизационный метод в задачах акустической маскировки материальных тел // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, № 9. С. 1477–1493.
8. *Алексеев Г. В., Спивак Ю. Э.* Теоретический анализ задачи магнитной маскировки на основе оптимизационного метода // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 9. С. 1155–1166.

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ГИДРОУДАРА И САМОПОДРЫВ РДТТ

Сухинин С. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; sukhinin@hydro.nsc.ru

Термин гидроудар широко распространен и впервые использован в классической работе Н. Е. Жуковского [1] для описания гидроупругих волн в трубопроводных системах. В настоящей работе терминология гидроудар и продольные гидроупругие волны используются как синонимы. В более общем виде продольные волны в каналах с упругими стенками, заполненных жидкой средой, описаны при помощи квазилинейных гиперболических систем уравнений в работе [2]. Существенным для описания реальных явлений является то, что скорость волн всегда меньше скорости волн, распространяющихся по газу. Это означает, что в рамках этих предположений в механических системах возможно описание образования сильных разрывов для слабо-сжимаемой жидкой среды в канале с упругими стенками.

Настоящая работа посвящена математическим вопросам, связанным с описанием распространения нелинейных и разрывных волн в каналах с упругими стенками, заполненных невязкой сжимаемой жидкой средой. Для удобства изложения эти волны будут называться гидроупругими волнами. В рамках длинноволнового приближения предложена система уравнений для описания этих волн.

Показано, что эта система является квазилинейной и гиперболической. Описаны скорости распространения волн в каналах с упругими стенками. Скорость распространения гидроупругих волн меньше скорости распространения волн по сжимаемой жидкой среде, заполняющей канал с упругими стенками. Найдены инварианты Римана. Получены условия на сильных разрывах и описаны разрывные решения — аналог ударных волн в газе. Показано, что возможны разрывные решения с повышением и понижением давления за разрывом. Получено уравнение Риккати, описывающее распространение слабых разрывов гидроупругих волн по каналу [3–4]. Уравнение Риккати позволяет описать возникновение градиентных катастроф гидроупругих волн. Проведены численно-аналитические исследования образования и распространения сильных разрывов с повышением и понижением давления за разрывом.

Предложенная теория распространения гидроупругих волн может быть использована для определения места расположения течи в трубопроводных системах. В настоящей работе эта теория использована для прогнозирования разрушения РДТТ разрывной гидроупругой волной на стадии запуска. При помощи методов теории распространения слабых разрывов [3, 4] и образования градиентных катастроф определены условия самоподрыва РДТТ на старте.

На основе проведенных исследований разработаны методы борьбы с самоподрывом современных РДТТ на старте.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
2. *Лайтхилл Д.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
3. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М.: Наука, 1978.
4. *Gavrilyuk S. L., Makarenko N. I., Sukhinin S. V.* Waves in continuous media. Springer, 2017.

"БУДУЩЕЕ ЗЕМЛИ" И МАТЕМАТИКА В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Сушкевич Т. А.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия; tamaras@keldysh.ru

Посвящается академику Годунову Сергею Константиновичу в год его 90-летия с глубокой благодарностью за поддержку и полезные научные уроки, начиная с 1961 года в Институте Келдыша!

Глобальный вызов "Повестки XXI-го века" — это не имеющая аналогов по масштабам в истории цивилизации всемирная научная ПРОГРАММА "Будущее Земли" (Future Earth) [1, 2], созданная для координации международных исследований по устойчивому развитию окружающей среды и общества по совместной инициативе Международного совета по науке (ICSU) и Международного научного совета по общественным наукам (ISSC) при поддержке ЮНЕСКО, Программы Объединенных Наций по окружающей среде (ЮНЕП), Международного университета ООН и Международной метеорологической организации (WMO).

Фундаментальные основы ПРОГРАММЫ заложены в XX-м веке благодаря изобретению компьютера и выхода человека в космос. Сложнейшие задачи эволюции, климата, экологии, глобального мониторинга и дистанционного зондирования Земли с гиперспектральными подходами и нанодиагностикой природной среды и объектов рассматриваются как сопряженные. Электромагнитное излучение — единое физическое поле, объединяющее радиационное поле Земли с радиационно-активными компонентами. Непреодолимая сложность проблемы в том, что для исследований планеты не допустимы натуральные эксперименты и возможны только наблюдения разными средствами. При этом на момент измерений невозможно восстановить весь набор оптико-геофизических и оптико-метеорологических параметров Земли, от которых зависит радиация, и невозможно повторить условия наблюдений, так как среда непрерывно изменяется и никогда не повторяется. И только математическое моделирование "больших" прямых и обратных задач теории переноса излучения с параллельным суперкомпьютингом позволяет провести теоретико-расчетные исследования столь сложных проблем и получить качественные и количественные оценки для анализа и прогнозов, а также для разных тематических приложений на основе "сценариев". В монографии [3] содержится около 400 ссылок на работы автора, а первая статья по теории переноса излучения вышла 55 лет назад [4].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-01-00609, № 17-01-00220).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Future Earth. Global Research Projects.* http://futureearth.org (дата обращения: 25.03.2019)
2. *Постановление Президиума РАН № 103 от 29.05.2018 «О создании Комитета РАН по международной программе "Будущее Земли"».* http://www.ras.ru/presidium/documents/directions.aspx?ID=de903350-994f-4474-ad66-3aec0db3dd44 (дата обращения: 25.03.2019).
3. *Сушкевич Т. А.* Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
4. *Масленников М. В., Сушкевич Т. А.* Асимптотические свойства решения характеристического уравнения теории переноса излучения в сильно поглощающих средах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 1. С. 23–34.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Талышев А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
tal@academ.org

При построении моделей, инвариантных относительно некоторой группы преобразований, выбираются пространства зависимых и независимых переменных, представление группы в декартовом произведении этих пространств, продолжение группы в пространство полилинейных отображений (на производные зависимых от независимых переменных) до заданного порядка, и, наконец, строится система уравнений — инвариантное многообразие в продолженном пространстве [1].

Описанный способ решения задачи для модели динамики материальных точек в случае преобразований Лоренца не проходит, потому что в качестве зависимых переменных здесь следует взять пространственные координаты материальных точек, а в качестве независимой — временну́ю переменную. Но в рамках точечных преобразований пара разноместных и одновременных событий относительно подвижной системы отсчета будет неодновременной, т. е. здесь не удается построить представление группы в выбранном пространстве. В работе [2] эту проблему удалось преодолеть в рамках преобразований Ли-Беклунда. В работе [3] предпринята попытка приближенного решения определяющей системы, построенной в [2].

В работе [4] рассматривалась задача расширения представления группы Пуанкаре с пространства независимых переменных (t, x, y, z) на векторные зависимые переменные (полевые переменные). Показано, что векторных переменных должно быть четное число. При этом при подходящем выборе базиса переменные могут быть разбиты на независимые пары и каждая пара преобразуется как электромагнитное поле.

В настоящей работе рассматривается задача построения дифференциально-инвариантных решений относительно группы Пуанкаре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Талышев А. А.* О построении инвариантных относительно группы Пуанкаре моделей динамики частиц // Современный групповой анализ. М.: МФТИ, 1993. С. 84–88.
3. *Talyshev A. A.* On models of dynamics material points that are invariant with respect to the Poincaré group // Abstracts of the International Conference “Modern Treatment of Symmetries, Differential Equations and Applications (Symmetry 2019)” dedicated to the 100th anniversary of L. V. Ovsyannikov. Thailand, Nakhon Ratchasima, January 14–18, 2019. P. 45.
4. *Талышев А. А.* О расширениях группы Пуанкаре // Международная школа-конференция “Соболевские чтения”, посвященная 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 10–16 декабря 2018 г.): тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2018. С. 170.

О НЕПРЕРЫВНЫХ ПО ЛИПШИЦУ РЕШЕНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Терсенов Ал. С.[1], **Терсенов Ар. С.**[2]

[1] *Университет Крита, Ираклион, Греция;* `tersenov@uoc.gr`
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* `aterseno@math.nsc.ru`

В докладе будет рассмотрена первая краевая задача, а также задача Коши для анизотропных параболических уравнений вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)(|u_{x_i}|^{p_i(t)-2}u_{x_i})_{x_i} = f(t, x, u, \nabla u) \quad \text{в} \quad \Omega_T = \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

где Ω — ограниченная область. Уравнения вида (1) принадлежат к широкому классу уравнений, часто называемых уравнениями с нестандартными условиями роста. Как известно, при исследовании этих уравнений широко применяются методы вариационного исчисления, которые встречают серьезные трудности в случае, когда правая часть зависит от градиента решения. Классическими методами исследования являются различные аппроксимационные методы [1].

Мы рассматриваем уравнение, в котором показатели $p_i(t) > 1$ зависят от времени. В случае, когда Ω — выпуклая область и функция f зависит линейно от градиента, мы доказали существование непрерывного по Липшицу по пространственным переменным и непрерывного по Гёльдеру по времени слабого решения, удовлетворяющего уравнению (1) в интегральном смысле. Доказательство существования решения указанной гладкости является новым результатом для уравнений вида (1). Существование решений доказывается путем регуляризации исходного уравнения и построении решения как предела классических решений регуляризованной задачи.

В случае сильных градиентных нелинейностей одной из принципиальных сложностей является переход к пределу в нелинейных членах. С помощью теории вязких по Лионсу решений нам удалось доказать существование решения в выпуклых областях в случае градиентных нелинейностей, не удовлетворяющих условию Бернштейна, которое является непрерывным по Гёльдеру по t и липшицевым по пространственным переменным.

В случае, когда f не зависит от градиента и показатели p_i являются постоянными, нам удалось показать липшицевость решений по всем переменным, включая переменную t, в выпуклых областях. Причем липшицевость по времени можно получить в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы [2]. Более того, решения указанной гладкости можно получать и при наличии градиентных нелинейностей в случае невыпуклых областей, но при дополнительном ограничении на разброс показателей анизотропности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Antontsev S., Shmarev S.* Evolution PDEs with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness, localization, blow-up. Series: Atlantis Studies in Differential Equations, vol. 4. Paris: Atlantis Press, 2015.
2. *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* Existence of Lipschitz continuous solutions to the Cauchy–Dirichlet problem for anisotropic parabolic equations // J. Funct. Anal. 2017. V. 272, No. 10. P. 3965–3986.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Тихонова И. М.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; Irinamikh3007@mail.ru

Локальные и нелокальные краевые задачи для различных уравнений с частными производными достаточно хорошо исследованы. В настоящее время активно изучается разрешимость нелокальных по времени краевых задач для параболических, гиперболических, эллиптических уравнений. В настоящей работе будет рассмотрена нелокальная по времени краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка [1].

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка

$$Lu \equiv k(t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

с достаточно гладкими коэффициентами.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

$$u(x,0) = \int_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau, \quad u_t|_{\overline{P}_0^+} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_T^-} = 0,$$

где $\overline{P}_0^{\pm}$, $\overline{P}_T^{\pm}$ — множества на основаниях цилиндра, где старший коэффициент $k(x,t)$ меняет знак.

Для данной задачи доказываются теоремы единственности и существования регулярного решения.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.6069.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров И. Е., Тихонова И. М.* Модифицированный метод Галеркина для задачи Врагова // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 114–144.

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТОДОМ ЧИСЛЕННОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Трачева Н. В.[1], Корда А. С.[2], Ухинов С. А.[3]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]tnv@osmf.sscc.ru, [2]asc@osmf.sscc.ru, [3]sau@osmf.sscc.ru

В данном докладе описывается ряд численных статистических методов, построенных авторами для решения некоторых прямых и обратных задач теории переноса излучения в атмосфере с учетом поляризации.

Для решения задачи восстановления матрицы аэрозольного рассеяния атмосферы по наземным наблюдениям поляризационных характеристик излучения в альмукантарате Солнца предлагаются алгоритмы, основанные на адаптивном и комбинированном способах моделирования рассеяния в атмосфере при больших оптических толщах аэрозоля. С помощью численного статистического моделирования была исследована эффективность этих способов в методе “предиктор-корректор” восстановления первых двух компонент матрицы рассеяния [1].

Изучение временных характеристик поляризованного излучения также является важной задачей для атмосферной оптики (например, для развития приложений дистанционного зондирования). Для оценки параметров временных характеристик потока поляризованного излучения предлагается использовать весовой алгоритм метода Монте-Карло на основе ортонормированного полиномиального разложения временной плотности распределения потока излучения по базису функций, полученных из полиномов Лагерра [2].

Для оценки двунаправленных поляризационных характеристик проходящего и отраженного плотными слоями вещества рассеянного излучения авторами были разработаны алгоритмы метода Монте-Карло, основанные на двумерном проекционном разложении соответствующего поверхностного углового распределения по базису полусферических гармоник специального вида [3], а также разработаны векторные алгоритмы метода Монте-Карло на основе 2-мерных статистических ядерных оценок с прямоугольным ядром. С помощью численного статистического моделирования проведено исследование влияния оптических параметров среды и поляризации на двумерные угловые распределения интенсивности и степени поляризации в не осесимметричном случае.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00823, № 18-01-00356, № 18-31-00213).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Korda A. S., Ukhinov S. A.* Monte-Carlo algorithms for defining the components of the aerosol scattering matrix // Proceedings of SPIE, 24th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics. 2018. V. 10833, Article ID 1083324. P. 1–10.
2. *Tracheva N. V., Ukhinov S. A.* A new Monte Carlo method for estimation of time asymptotic parameters of polarized radiation // Math. Comput. Simul. 2019. V. 161. P. 84–92.
3. *Tracheva N. V., Ukhinov S. A.* On the evaluation of spatial-angular distributions of polarization characteristics of scattered radiation // Stat. Pap. 2018. V. 59, No. 4. P. 1541–1557.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ФЛОРИНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Тураев Р. Н.

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Республика Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru

В настоящей работе рассматривается нелокальная задача Флорина для квазилинейного уравнения диффузии с учетом нелинейной конвекции.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \le T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$ такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \le N$, $s(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \le T,\ 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = a(t,x,u_x)u_{xx} + bu_x^2, \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям:

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0,$$

$$u_x(t,0) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$\alpha u(t,x_0) = u(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u_x(t,s(t)) = \omega(t), \quad 0 \le t \le T.$$

В одномерном пространстве уравнение диффузии–реакции–конвекции с нелинейным членом может быть записано в следующем общем виде [1]: $u_t = au_{xx} + (b(u))_x + c(u)$. В этой формулировке представлен коэффициент диффузии a, $b(u)$ — нелинейная функция конвективного потока, $b'(u)$ может рассматриваться как нелинейная скорость, $c(u)$ обозначает член реакции. Нелинейные задачи диффузии с условиями на свободной границе обычно используются для описания распространения биологических видов или химических веществ, а свободная граница используется для представления границы этого распространения [1]. В нашем случае в уравнении (1) коэффициент диффузии $a(t,x,u_x)$ задан в нелинейной форме, а также присутствует нелинейный поток $u_x^2(t,x)$.

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача сводится к задаче типа Стефана и доказывается их эквивалентность. Далее устанавливаются априорные оценки решений и их производных в норме Гёльдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи. Существование решения вспомогательной и первоначальной задач доказывается при помощи метода неподвижной точки Шаудера [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wang R.-H., Wang L., Wang Zh.-Ch.* Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 467, No. 2. P. 1233–1257.
2. *Turaev R. N.* A nonlocal problem with a free boundary for the quasilinear diffusion equation // Uzbek Math. J. 2018. No. 3. P. 165–174.

ПРИСТЕННАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ: ВОЗМОЖНОСТИ И ВЫЗОВЫ

Утюжников С. В.[1,2]

[1] *Университет Манчестера, Манчестер, Великобритания;*
[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия;*
s.utyuzhnikov@manchester.ac.uk

Моделирование турбулентных течений около стенки является одним из наиболее актуальных направлений современной вычислительной механики жидкости и газа. Достаточно точное разрешение пристенной области требует около 90 % всего вычислительного времени несмотря на то, что размер такой области на два порядка меньше размера всей задачи. До сих пор это требование является значительным препятствием для применения высокоточного моделирования турбулентных течений в промышленных задачах, в особенности при оптимальном проектировании, когда требуется проводить серийные расчеты. Стандартный инженерный подход, основанный на пристенных функциях, представляет собой простейший вид декомпозиции, в котором влияние стенки заменяется приближенным полуэмпирическим условием сопряжения 1-го рода. Хотя такой подход позволяет значительно сократить затраты вычислительных ресурсов, он имеет довольно ограниченную область применимости из-за невысокой точности, обусловленной, в том числе, неопределенностью в выборе свободных коэффициентов.

Метод декомпозиции без пересечения областей, разработанный в [1, 2] и других работах, предоставляет собой более универсальную возможность для решения рассматриваемой задачи. Он основан на переносе граничного условия со стенки на границу сопряжения. При этом в пристенной области рассматриваются уравнения движения в приближении тонкого слоя. В результате условия сопряжения в полной постановке получаются нелокальными по пространству и времени [2, 3]. Данный подход не содержит свободных параметров, а граничные условия сопряжения не зависят от сетки, в отличие от пристенных функций. Как показано в [4], алгоритм позволяет аффективно реализовать оптимизационный баланс между затратами времени и точностью посредством выбора положения границы сопряжения. При этом допущение погрешности в несколько процентов позволяет сократить затраты машинного времени на порядок.

В докладе дается обзор решенных с помощью описанного метода задач, а также направлений развития на настоящее и обозримое время.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00098).

REFERENCES

1. *Utyuzhnikov S.* Domain decomposition for near-wall turbulent flows // Comput. Fluids. 2009. V. 38, No. 9. P. 1710–1717.
2. *Utyuzhnikov S.* Interface boundary conditions in near-wall turbulence modeling // Comput. Fluids. 2012. V. 68, No. 9. P. 186–191.
3. *Utyuzhnikov S.* Towards development of unsteady near-wall interface boundary conditions for turbulence modelling // Comput. Phys. Commun. 2014. V. 185, No. 11. P. 2879–2884.
4. *Jones A., Utyuzhnikov S.* Application of a near-wall domain decomposition method to turbulent flows with heat transfer // Comput. Fluids. 2015. V. 119. P. 87–100.

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Учайкин В. В.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия;
vuchaikin@gmail.com

Два последних десятилетия отмечены широким распространением в теоретическом описании естественных процессов дробно-дифференциального аппарата. Замена целочисленного порядка производной вещественным (а то и комплексным) числом открывает широкое поле новых дифференциальных уравнений (а, стало быть, и процессов), в котором стандартный набор уравнений (волновое, диффузионное и пр.) представлен отдельными колосками в точках с целочисленными координатами — значениями порядков пространственно-временных производных. Но что физически значат производные дробных порядков? Каковы общие причины появления дробных производных в уравнениях? Можно ли заранее предсказать появление дробных операторов в той или иной задаче? Вопросы эти пока не сняты с повестки дня и остаются в центре внимания каждой из конференций, посвящённых теории и применению этого аппарата. Эта тема развивается и в настоящем докладе. Целью его является демонстрация дробно-дифференциального аппарата в наиболее, если можно так выразиться, классической области теоретической физики — гидродинамике. В обзоре рассматриваются гидромеханические задачи, в которых естественным образом возникает потребность в производных дробного порядка: движение тел в вязкой жидкости, гидромеханика турбулентности, турбулентная диффузия. Показано, как дробно-дифференциальное исчисление рождается на классическом поле гидродинамических задач под пером Гейзенберга, Вайцзеккера, Колмогорова, Обухова, Монина — теоретиков, которых невозможно заподозрить в некритическом отношении к математическому аппарату. Собственно, весь обзор является непрерывным обсуждением “неизбежности странного мира” дробного исчисления [1–2], и то, что это обнаруживается уже “в стенах” классической гидродинамики, только усиливает убедительность этой неизбежности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008.
2. *Uchaikin V. V.* Fractional derivatives for physicists and engineers. Vol. I–II. Heidelberg: Springer-Verlag; Beijing: Higher Educaton Press, 2013.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В МИКРОГЕНЕРАТОРЕ ТАКТОВОЙ ЧАСТОТЫ С РАЗЛИЧНЫМИ ВАРИАНТАМИ ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Фадеев С. И.[1,2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия;*
fadeev@math.nsc.ru

Рассматривается математическая модель микрогенератора тактовой частоты, в котором возбуждение колебаний подвижного элемента происходит в среде с сопротивлением под воздействием последовательности электростатических импульсов постоянной длительности. При этом моменты воздействия импульсов согласуются с колебаниями. Модель представлена задачей Коши для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной правой частью, описывающей импульсное воздействие с различными вариантами согласования.

При исследовании периодических колебаний используется представление периодического решения задачи Коши в виде решения краевой задачи для уравнения с разрывной правой частью. Согласование импульсного воздействия с колебаниями потребовало преобразования, после которого краевая задача формулируется для системы из пяти дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывными правыми частями, что позволяет применить при численном исследовании метод продолжения решения по параметру. Этим способом определена область в пространстве параметров модели с устойчивыми к внешним возмущениям предельными циклами. Полученные результаты могут быть полезны для оценок параметров приборов при разработке микрогенераторов указанного типа.

Автор выражает благодарность Э. Г. Косцову [1], который предложил рассмотреть модель микрогенератора по аналогии с моделью простейшей схемы часов со спусковым ударным механизмом [2], а также В. В. Когаю, принимавшему участие в проведении численных экспериментов с использованием метода продолжения решения по параметру [3].

Работа выполнена в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта (№ 273) “Разработка физико-технических принципов создания генератора тактовой частоты, устойчивого к сверхвысоким инерциальным перегрузкам”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Косцов Э. Г., Фадеев С. И.* Новые электромеханические резонаторы для гигогерцевых частот // Автометрия. 2013. Т. 10, № 2. С. 115–122.
2. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.
3. *Фадеев С. И., Когай В. В.* Линейные и нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Учебное пособие. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018.

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ДВУСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ДЕФЕКТА

Фанкина И. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; fankina.iv@gmail.com

Исследуется задача, описывающая равновесие двуслойной конструкции. Слоями конструкции являются упругие пластины, поведение которых моделируется в рамках плоской задачи теории упругости. Пластины контактируют по заданной линии, на которой задается условие равенства перемещений пластин. Вдоль линии контакта в одном из слоев имеется дефект. На берегах дефекта задаются нелинейные краевые условия, исключающие взаимное проникание противоположных берегов дефекта друг в друга. При этом краевые условия содержат параметр повреждаемости, характеризующий дефект: чем больше его значение, тем слабее сцепление берегов дефекта.

Для задачи равновесия установлено существование решения. В задаче осуществлен предельный переход при стремлении параметра повреждаемости к нулю и к бесконечности. Кроме того, получена и проанализирована предельная задача равновесия при стремлении жесткости одного из слоев к бесконечности.

МЕТОД РАСЧЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ

Фатьянов А. Г.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; fat@nmsf.sscc.ru

Специальные функции имеют фундаментальное значение в математической физике. Однако, например, существующая библиотека в Intel Fortran позволяет вычислять функции Бесселя только для сравнительно небольших значений аргументов и индексов цилиндрических функций [1]. Для расчета же волновых полей для тел космических размеров, например Земли и Луны, требуется единый метод вычисления цилиндрических функций для произвольных аргументов и индексов. Такого метода в настоящее время не существует.

В работе получено новое дифференциальное и соответствующее ему рекуррентное соотношение для вспомогательных цилиндрических функций. Полученное рекуррентное соотношение имеет вид разностного уравнения (для разных значений индексов цилиндрических функций). Это позволило для его исследования использовать теорию разностных уравнений. На основе [2] показана устойчивость нового рекуррентного соотношения для цилиндрических функций. В итоге с учетом классического рекуррентного соотношения получен новый единый вычислительно устойчивый метод получения значений цилиндрических функций для широкого диапазона значений их индексов и аргументов.

В работе проведено тестирование нового рекуррентного метода вычисления цилиндрических функций без использования асимптотических представлений. Тестирование осуществлено в несколько этапов. Сначала проведено сравнение с известными методами для сравнительно небольших значений аргументов и индексов [1]. Поскольку в работе значения цилиндрических функций насчитываются рекуррентно, не будет использоваться значение вронскиана. Поэтому тестирование в области, где известные методы не работают, проведено на основе аналитического выражения для вронскиана. Далее проведено количественное сравнение волновых полей для шара небольших размеров в случае использования стандартных и новых алгоритмов вычисления цилиндрических функций. В случае небольших размеров шара (в длинах волн) будут небольшие значения аргументов и индексов и можно использовать стандартные процедуры вычисления цилиндрических функций.

В итоге получен и протестирован новый вычислительно устойчивый метод получения значений цилиндрических функций для широкого диапазона значений их индексов и аргументов без использования асимптотики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhang Sh., Jin J.* Computation of special functions: with over 100 computer programs in FORTRAN. New York: John Wiley & Sons, 1996.
2. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977.

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Финогенко И. А.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; fin@icc.ru

Метод эквивалентного управления, известный для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью (см. [1, стр. 64]), распространяется на дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F(t,x) + B(t,x)u, \tag{1}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — управляющее воздействие на систему сигнатурного типа, $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями, $B(t,x)$ — $n \times m$ непрерывная матрица. Далее описываются уравнения скользящих режимов системы (1) в виде

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) + G(t,x)\tilde{u}, \\ \tilde{u} \in \tilde{U}^{eq}(t,x), \end{cases} \tag{2}$$

где $G(t,x)$ — некоторая $n \times m$ матрица и $U^{eq}(t,x)$ — подлежащее определению многозначное эквивалентное управление. Устанавливаются взаимосвязи скользящих режимов (2) с импульсно-скользящими режимами при условии, что u рассматривается, как импульсное позиционное управление [2, 3]. Последнее позволяет использовать комбинации обычных разрывных обратных связей с ограниченными ресурсами и импульсных воздействий на систему, когда этих ресурсов недостаточно, для решения задач управления системами вида (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00371).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсно-скользящие режимы в нелинейных динамических системах // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 5. С. 790–799.
3. *Финогенко И. А., Пономарев Д. В.* О дифференциальных включениях с позиционными разрывными и импульсными управлениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 284–299.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ОБ ОТСЛОЕНИИ ТОНКОГО ПРЕПЯТСТВИЯ ОТ ПЛАСТИНЫ

Фурцев А. И.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; al.furtsev@mail.ru

Рассматривается задача о равновесии пластины Тимошенко, взаимодействующей с тонким упругим препятствием вдоль прямой линии. Предполагается, что на одной части линии пластина сцеплена с препятствием, а на другой части — отслаивается. На части сцепления задаются условия равенства соответствующих прогибов, а на части отслоения — условия непроникания вида неравенств. При помощи вариационного метода доказано существование решения рассматриваемой задачи, исследованы ее качественные свойства. В частности, изучен предельный переход к бесконечности по параметру, описывающему жесткость препятствия, и найдена постановка задачи, полученной в результате указанного предельного перехода.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам при Президенте РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (проект № МК-52.2019.1).

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Хазова Ю. А.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия; hazova.yuliya@hotmail.com

Рассматривается смешанная краевая задача для нелинейного параболического уравнения в круге [1]

$$v_t + v - D\triangle v + K\gamma \sin w\, Qv = K\gamma((\cos w(\cos Qv - 1) - \sin w(\sin Qv - Qv))$$

с условиями Неймана на границе при $r = r_1$, $\frac{\partial v(r_1,\varphi,t)}{\partial r} = 0$, условиями периодичности $v(r,\varphi,t) = v(r, 2\pi + \varphi, t)$, условиями ограниченности в начале координат $|v(0,\varphi,t)| \le c < \infty$ и начальным условием $v(r,\varphi,0) = v_0(r,\varphi)$.

Лемма. *Линейный оператор* $L = 1 - D\triangle + K\gamma \sin w\, Q$ *имеет собственные функции вида* $X_{km}(r,\varphi) = \{J_k(\lambda^c_{km} r)\cos k\varphi, J_k(\lambda^s_{km} r)\sin k\varphi\}$, *которым соответствуют собственные значения* $\lambda^c_{km} = D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2 + (-1)^k K\gamma \sin\omega + 1$, $\lambda^s_{km} = D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2 + (-1)^{k+1} K\gamma \sin\omega + 1$, $k = 0,1,2,\ldots$, $m = 1,2,\ldots$, *где* $J_k(x)$ *— функция Бесселя,* μ_{km} *— корни уравнения* $J'_k(\mu_{km}) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$, $m = 1,2,\ldots$.

Для анализа структуры решения в зависимости от параметра D необходимо оценить собственные значения.

Переобозначим $\Lambda = -K\gamma \sin w$. Выберем $\Lambda = \Lambda(K,\gamma) < -1$.

При $D_1 = \frac{-1-\Lambda}{\left(\frac{\mu^c_{11}}{r_1}\right)^2}$, λ^c_{11} может менять знак при уменьшении D. Значит от нулевого решения в результате бифуркации типа “вилка” ответвляется пара пространственно неоднородных стационарных решений.

Теорема. *Существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что если* $0 < D - D_1 < \delta_0$, *то исходное уравнение имеет два асимптотически устойчивых пространственно неоднородных стационарных решения:*

$$v^{\pm}(r,\varphi,D) \approx \pm\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)^{1/2} J_1(\lambda^c_{11} r)\cos\varphi$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)\frac{\Lambda}{2} ctg\,\omega((\lambda^c_{10} - 2\lambda^c_{11})^{-1} + (\lambda^c_{12} - 2\lambda^c_{11})^{-1}\cos 2\varphi)J_1^2(\lambda^c_{11} r)$$

$$\pm\frac{1}{3!}\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)^{3/2}(\lambda^c_{13} - 3\lambda^c_{11})^{-1}\left(\frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4}\Lambda^2 ctg^2\,\omega(\lambda^c_{12} - 2\lambda^c_{11})^{-1}\right)$$

$$\times J_1^2(\lambda^c_{11} r) J_3(\lambda^c_{11} r)\cos 3\varphi,$$

где

$$c_1(D) = \left[\frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4}(\Lambda ctg\,\omega)^2\left((\lambda^c_{10} - 2\lambda^c_{11})^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda^c_{12} - 2\lambda^c_{11})^{-1}\right)\right] J_1^2(\lambda^c_{11} r) < 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хазова Ю. А.* Интегральное представление приближенных решений параболического уравнения // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2018. Т. 6, № 6. С. 384–386.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 2-D ДИФРАКЦИИ ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ УПРУГОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ N-СЛОЙНОЙ СРЕДЫ С СОСТАВНЫМИ ИЕРАРХИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Хачай А. Ю.[1], **Хачай О. А.**[2]

[1] *Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия;* andrey.kahachay@gmail.ru
[2] *Институт геофизики им. Ю. П. Булашевича УрО РАН, Екатеринбург, Россия;* olgakhachay@yandex.ru

Разработан новый подход к интерпретации волновых полей для определения контуров или поверхностей составных локальных иерархических объектов. Разработан итерационный процесс решения теоретической обратной задачи для случая определения конфигураций 2D иерархических включений l-го, m-го и s-го рангов, расположенных друг над другом в разных слоях N-слойной среды, и различных физико-механических свойств для акустического мониторинга. При интерпретации результатов мониторинга необходимо использовать данные таких систем наблюдения, которые могут быть настроены на исследование иерархической структуры среды [1]. К таким системам относятся акустические (в динамическом варианте) и электромагнитные мониторинговые системы [2]. Иерархичность структуры геологической среды отчетливо видна при анализе образцов горных пород, отобранных в рудных шахтах [3]. С другой стороны, чем сложнее среда, тем каждое волновое поле привносит свою информацию о ее внутренней структуре, поэтому интерпретацию сейсмического и электромагнитного поля необходимо вести раздельно, не смешивая эти базы данных. Этот результат содержится в явном виде уравнений теоретической обратной задачи для 2D электромагнитного поля (E и H поляризация), а также для распространения линейно поляризованной упругой волны при возбуждении N-слойной проводящей или упругой среды с иерархическим проводящим или упругим включением, расположенным в ν-ом слое. В настоящей работе рассмотрена обратная задача для усложненной иерархической модели включений: пластическая иерархическая неоднородность l-го ранга будет расположена в слое $\nu - 1$, максимальное значение l-го ранга равно L, начальное значение l-го ранга равно $ll = 1$; упругая иерархическая неоднородность m-го ранга расположена в слое ν, максимальное значение m-го ранга равно M, начальное значение m-го ранга равно $mm = 1$ и аномально напряженная иерархическая неоднородность s-го ранга расположена в слое $\nu + 1$, максимальное значение s-го ранга равно S, начальное значение s-го ранга равно $ss = 1$. Мы рассмотрим алгоритм восстановления 2D поверхностей иерархических неоднородностей для случая, когда $L < M < S$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козырев А. А., Савченко С. Н., Панин В. И., Мальцев В. А.* Особенности прогноза и профилактики мощных динамических явлений в природно-технических системах // Международная конференция "Геодинамика и напряженное состояние недр Земли" (2–4 октября, 2001). Новосибирск: СО РАН, 2001. С. 326–334.
2. *Кочарян Г. Г., Спивак А. А.* Динамика деформирования блочных массивов. М.: ИКЦ "Академкнига", 2003.
3. *Панин В. Е. (ред.)* Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. Т. 1. Новосибирск: Наука, 1995.

ВЛИЯНИЕ ОБЛАСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ПАР ЧАСТИЦ НА РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

Хисамутдинов А. И.[1,2]

[1]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[2]*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия;*
KhisamutdinovAI@ipgg.sbras.ru

В докладе рассматривается система частиц, моделирующая разреженный газ в соответствии с нелинейным сглаженным уравнением Больцмана; рассматриваются система управляющих уравнений марковской эволюции этой системы и соответствующие методы Монте-Карло. Анализируются и численно сравниваются методы для стационарных многомерных проблем уравнения Больцмана, для стационарных течений в областях достаточно больших размеров. Рассматриваем, во-первых, Имитационный с расщеплением метод (ИРМ), основывающийся на расщеплении оператора системы управляющих уравнений процесса “по группам частиц” или “по подобластям” [1, 2]. Введенный тип расщепления отличен от хорошо известного типа “по соударениям и сдвигам”, являющегося атрибутом известных методов “Прямого статистического моделирования” (ПСМ), развитых Г. Бердом. Вторым атрибутом последних является “сетка ячеек взаимодействий”, совершенно отсутствующая в имитационных методах; в последних взаимодействие произвольной пары зависит от разностей координат частиц пары. Во-вторых, помимо метода ПСМ рассматриваем также “близкий” к нему метод, в котором сохранен марковский характер эволюции скоростей в ячейках и который реализован в комплексе программ [3]. Особое внимание уделяется задаче о продольном обтекании плоской пластины гиперзвуковым потоком; именно на ней, как на примере, производились сравнения представляемых численных результатов, полученных посредством как ИРМ, так и посредством двух других вышеуказанных методов.

В методе ИРМ используются граничные условия те же, что и для исходной системы управляющих уравнений. Возможен метод, в котором исходные граничные условия дополняются (переменными) граничными условиями между подобластями ИРМ. И, таким образом, приходим к подходу, в котором производится “итерирование по подобластям” течения газа. Последний используют, например, для задач уравнения переноса; и этот подход был намечен еще в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khisamutdinov A. I.* On connection between “Continuous time” and “Direct simulation” Monte Carlo methods for Boltzmann equation and on some new approximate methods // Monte Carlo Methods Appl. 2000. V. 6, No. 4. P. 323–340.
2. *Khisamutdinov A. I., Velker N. N.* Algorithms and numerical implementation of imitation Monte Carlo methods with splitting for problems of the Boltzmann equation // J. Comput. Theor. Transp. 2016. V. 45, No. 3. P. 230–241.
3. *Ivanov M. S., Kashkovsky A. V., Gimelshein S. F., et al.* SMILE System for 2D/3D DSMC computations // Proc. 25th Int. Symp. RGD. Novosibirsk, 2007. P. 539–544.
4. *Хисамутдинов А. И.* Алгоритмы с “разновременными координатами” методов Монте-Карло для нелинейного “сглаженного” уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316, № 4. С. 829–833.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Чанышев А. И.[1,2], **Белоусова О. Е.**[1]

[1] *Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, Новосибирск, Россия;* o.e.belousova@mail.ru

[2] *Новосибирский государственный университет экономики и управления, Новосибирск, Россия;* a.i.chanyshev@gmail.com

Решение задач математической физики представляется суммой голоморфной и неголоморфной (с полюсами) функций. Неголоморфная часть считается известной, поэтому в граничных условиях задачи для определения голоморфного слагаемого вычитается все то, что относится к неголоморфной части. Для определения аналитического слагаемого ставятся классические постановки: Дирихле, Неймана, Робена. Решение каждой из этих задач для аналитического слагаемого существует и в известной степени единственно.

Неголоморфная часть соответствует дефектам, но в задачах горного дела они неизвестны. Для их определения, то есть для отыскания голоморфного и неголоморфного слагаемого предлагается неклассическая постановка [1–3] (задача Коши), когда на одной и той же известной границе тела (при неизвестных других границах) задаются одновременно и условие Дирихле, и условие Неймана. Как показывается в работе, решение такой задачи существует и единственно. Для иллюстрации рассматривается волновое уравнение. В одномерном случае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

На границе полубесконечного стержня $x \geq 0$ ставится условие

$$u|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{a}\dot{\beta}(t). \tag{2}$$

Тогда решение (1) при условии (2) записывается как

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\alpha\left(t-\frac{x}{a}\right) - \beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\alpha\left(t+\frac{x}{a}\right) + \beta\left(t+\frac{x}{a}\right)\right]. \tag{3}$$

Как следует из (3), для исследования того, что происходит в сечении $x = \mathrm{const}$ во времени t необходимо от времени t отступить назад и вперед на величину x/a (время прихода волны с поверхности $x = 0$ в сечение $x = \mathrm{const}$) и выпустить две характеристики, далее составить сумму (3). При этом возникает предубеждение, что волна движется в “отрицательное” время. На самом деле, это не так. В работе решаются двумерные и трехмерные волновые уравнения (для полуплоскости и полупространства), строятся явные численные схемы 2-го порядка точности, решение сравнивается с тестовыми решениями. Обсуждаются вопросы, связанные с поиском дефектов.

Работа выполнена в рамках проекта ФНИ № АААА-А17-117122090002-5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
2. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

АНАЛИЗ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА

Чеботарев А. Ю.[1], **Гренкин Г. В.**[2]

[1]*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;*
cheb@iam.dvo.ru

[2]*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия;*
g.sobak@yandex.ru

Анализ моделей сложного теплообмена в рассеивающих средах с отражающими границами представляет интерес в силу своей прикладной значимости. Имеется значительное число работ по численному моделированию процессов диффузионного и радиационного переноса тепла в сплошных средах. В то же время проблемы теоретического и численного анализа обратных задач для моделей, включающих в себя уравнение переноса тепла и уравнение, описывающее перенос теплового излучения, являются в основном открытыми.

Рассматривается квазистационарная модель радиационного теплообмена в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с отражающей границей:

$$\partial\theta/\partial t - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \tag{1}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \;\; a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0 \;\text{ на } \Gamma = \partial\Omega. \tag{2}$$

Здесь θ — температура, φ — интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Физические параметры a, b, κ_a и α описывают термические и радиационные свойства среды [1]. Функции θ_0, θ_b задают начальное и граничные значения температуры.

В докладе формулируются обратные задачи для нелинейной системы (1), (2), состоящие в определении неизвестной правой части в уравнении теплопроводности, либо неизвестной функции γ в краевом условии, по дополнительной информации о решении, заданной в виде интегрального переопределения, либо в виде дополнительного краевого условия для температуры [2, 3]. Представлены новые априорные оценки решений обратных задач, на основе которых доказаны нелокальные теоремы разрешимости. Найдены условия единственности решений. Предложены алгоритмы решения обратных задач, проиллюстрированные численными примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chebotarev A. Y., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM, Math. Model. Numer. Anal. 2017. V. 51, No. 6. P. 2511–2519.
2. *Chebotarev A. Y., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460, P. 737–744.
3. *Chebotarev A. Y., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472, No. 1. P. 314–327.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПИТАНИЯ РАСТЕНИЙ

Четырбоцкий В. А.

АО "Апатит", Центр Инноваций, Москва, Россия;
Vchetyrbotskiy@phosagro.ru

В практике математического моделирования распределения в прикорневой почвенной зоне растений элементов их питания в качестве таковых рассматриваются, как правило, азот и кислород. В меньшей степени это касается фосфора, который входит в состав различных органоидов и ядер клеток, а также способствует развитию корневой системы растений. В существующих моделях непропорционально мало уделяется внимания динамике элементов питания и их усвоение растениями, механизмам воздействия температуры и влажности в ризосфере на рост растений. Цель предлагаемой здесь модели состоит в частичном решении этих вопросов.

Уравнения предлагаемой модели динамики питания растений принимают такую запись:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = f_B(T,W)[\mu_{B0} + F_{BS}(M_S) + F_{BP}(M_P) - \beta_B B - d_B]B \\ \frac{\partial Y}{\partial t} = f_Y(T,W)[\mu_{Y0} + \mu_{Y0} B - \beta_Y Y]Y + \nabla\cdot(D_{YB} Y \cdot \nabla B) + \nabla\cdot(D_Y \nabla Y) \\ \frac{\partial M_S}{\partial t} = f_S(T,W)[Q_S d_B Y - \gamma_s F_{BS}(M_S)]B + F_S(M_S) \\ \frac{\partial M_P}{\partial t} = f_P(T,W)[Q_P d_B Y - \gamma_P F_{BP}(M_P)]B + F_P(M_P) \\ \frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T \\ \frac{\partial W}{\partial t} = D_W \nabla^2 W \\ \vec{n}\cdot\nabla B = \vec{n}\cdot\nabla M_S = \vec{n}\cdot\nabla M_P = \vec{n}\cdot\nabla T = \vec{n}\cdot\nabla W = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ B(0,X) = B_0(X), Y(0,X) = Y_0(X), M_S(0,X) = M_{S,0}(X), M_P(0,X) = M_{P,0}(X) \\ T(0,X) = T_0(X), W(0,X) = W_0(X) \\ X = (x,y,z), \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \text{ и } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{cases}$$

где B — биомасса растений; M_P — масса фосфора; P — давление; T — температура; W — влагосодержание; $f_B(T,W)$, $f_Y(T,W)$, $f_S(T,W)$ и $f_P(T,W)$ — функции, задающие текущее состояние ризосферы; M_S — масса основных, кроме фосфора, остальных элементов питания растений; μ_{B0} — коэффициент прироста биомассы при отсутствии минерального питания; $F_{BS}(M_S)$ — интенсивность усвоения растением минерального питания, кроме фосфора; $F_{BP}(M_P)$ — интенсивность усвоения растением фосфора; β_B — коэффициент отражения конкуренции растений; d_B — коэффициент интенсивности отмирания биомассы; Y — биомасса микроорганизмов в ризосфере; Q_S и Q_P — константы, которые характеризуют содержания минералов в клетках отмерших растений; $F_S(M_S)$ и $F_P(M_P)$ характеризуют массу/концентрацию минеральных удобрений, которые вносятся в ризосферу; D_T, D_W — коэффициенты температуропроводности и диффузии влаги в ризосфере; μ_{Y0}, μ_{YB}, β_Y, D_{YB}, D_Y, d_B, γ_S, Q_P, d_B, γ_P — коэффициенты, которые основываются на вычислительных экспериментах.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОЙ МАССЫ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

Чуев Н. П.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия; n_chuev44@mail.ru

В работе рассматривается нестационарная задача со свободной поверхностью для системы уравнений газовой динамики, описывающей движение изэнтропического, самогравитирующего и изолированного конечного объёма идеального газа. Пусть в момент $t = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана область Ω_0, заполненная идеальным разреженным изэнтропическим газом, частицы которого притягиваются друг к другу по закону Ньютона. Задача о движении газа в силовом поле сводится к определению области $\Omega_t \in \mathbb{R}^4$, занимаемой газом в момент времени t, а также вектора скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих в области $\mathbf{x} \in \Omega_t$, $t \in (0, T)$, системе уравнений газовой динамики в форме Л. Эйлера [1]:

$$\frac{d\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x},t),$$

$$\frac{d\rho(\mathbf{x},t)}{dt} = -\rho(\mathbf{x},t)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

при условиях, что при $t = 0$ в каждой точке $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ области Ω_0 известны распределения: вектора скорости $\mathbf{u}_0 = \{u_0,\ v_0,\ w_0\}$ частиц газа, плотности $\rho = \rho_0(\mathbf{x})$, а также $\rho(\mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x} \in \Gamma_t$ при $t \geq 0$, где Γ_t — граница области Ω_t течения газа.

Функции $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \rho_0(\mathbf{x})$ и замкнутая граница области Γ_0 задаются в пространстве $C^\infty(\overline{\Omega}_0)$ бесконечно-дифференцируемых функций в области $\overline{\Omega}_0$.

Сила ньютоновского притяжения в правой части векторного уравнения системы (1) равна [2–3]

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \nabla G \iiint\limits_{\Omega_t} \frac{\rho(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'.$$

Применяя лагранжевы координаты $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$, в работе доказана лемма об эквивалентности системы (1) системе в форме Лагранжа.

Затем эта система преобразуется к эквивалентной системе интегральных уравнений типа Вольтерра:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t) = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\xi})t + \int_0^t (t-\tau)\mathbf{F}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},\tau),\tau)d\tau. \tag{2}$$

Доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для интегрального уравнения типа Вольтерра (2) методом последовательных приближений. Преобразование (2) позволяет определить переменную область Ω_t как образ Ω_0, а при $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_0$ формула (2) при $t > 0$ определяет закон движения свободной границы Γ_t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
2. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала. М.: ОГИЗ, 1953.
3. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ РАЗНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Чуйко С. М.

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина;
chujko-slav@inbox.ru

Исследована задача о построении ограниченных решений [1–3]

$$z(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

системы линейных разностно-алгебраических уравнений [4]

$$A(k)z(k+1) = B(k)z(k) + f(k), \quad k \in \mathbb{N}; \tag{2}$$

здесь $A(k),\ B(k) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — ограниченные матрицы и $f(k)$ — действительные ограниченные вектор-столбцы. Матрицу $A(k)$ предполагаем, вообще говоря, прямоугольной, либо квадратной, но вырожденной.

Интерес к изучению разностно-алгебраических систем вида (1) связан с многочисленными применениями подобных систем в экономике, механике, теории управления, а также при изучении динамики популяций. Характерной особенностью задачи Коши для линейной разностно-алгебраической системы (1), существенно отличающей ее от традиционной задачи Коши для линейной разностной системы [1, 2, 5], является, вообще говоря, ее неразрешимость для произвольной функции $f(k)$ и произвольного начального значения; в случае разрешимости задачи Коши для линейной разностно-алгебраической системы (1) ее решение в общем случае зависит от произвольной ограниченной вектор-функции.

Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши для линейной разностно-алгебраической системы (1). Предложена оригинальная классификация, а также единая схема построения решений разностно-алгебраической системы (1). Найденные условия разрешимости разностно-алгебраической системы (1) не предполагают использования центральной канонической формы [6], а являются перенесением результатов исследования дифференциально-алгебраических систем [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 1977.
2. *Бойчук А. А.* Краевые задачи для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. 1997. Т. 49, № 6. С. 832–835.
3. *Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного разностного уравнения // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 1 (26). С. 104–116.
4. *Campbell S. L.* Limit behavior of solutions of singular difference equations // Linear Algebra Appl. 1979. V. 23. P. 167–178.
5. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова думка, 1972.
6. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. San Francisco, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980.
7. *Chuiko S. M.* On a reduction of the order in a differential-algebraic system // J. Math. Sci. 2018. V. 235, No. 1. P. 2–18.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ГЛАДКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ И С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА, ТЕРМИНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЗАВИСИТ ТОЛЬКО ОТ МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Шабуров А. А.

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия; alexandershaburov@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления [1] с интегральным выпуклым критерием качества [2], зависящим только от медленных переменных, для линейной системы с быстрыми и медленными переменными [3, 4] в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1 u, & t \in [0,T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2 u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, \end{cases}$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i, $i,j = 1,2$, — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная функция в смысле выпуклого анализа. Получено полное асимптотическое разложение вектора сопряженной системы, определяющего оптимальное управление [5–7]. Главной отличительной особенностью задачи от задач, рассмотренных в [8, 9], является более общий вид управляемой системы.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физ.-мат. наук, профессору Данилину Алексею Руфимовичу за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.* Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
2. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
3. *Дончев А.* Системы оптимального управления: возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.
4. *Kokotovic P. V., Haddad A. H.* Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Autom. Control. 1975. V. 20, No. 1. P. 111–113.
5. *Данилин А. Р., Коврижных О. О.* О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
6. *Данилин А. Р., Парышева Ю. В.* Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 55–65.
7. *Калинин А. И., Семенов К. В.* Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
8. *Шабуров А. А.* Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве $\mathbb{R}^n$ с интегральным выпуклым критерием качества // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 303–310.
9. *Шабуров А. А.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 280–289.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Шамолин М. В.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Работа представляет собой качественное и численное исследование в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой. Исследуемые задачи описываются динамическими системами со знакопеременной диссипацией (т. е. в системе присутствует как подкачка, так и рассеяние энергии) [1, 2].

При этом изучаются неконсервативные системы, для которых классическая методика исследования, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле “в лоб” исследовать уравнения динамики.

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию исследования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается не только численно, но и качественно найти, например, полный набор первых интегралов через конечные комбинации элементарных функций [3, 4].

В работе получено множество результатов как по качественному и численному исследованию, так и по интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом во множестве случаев интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (например, притягивающих и/или отталкивающих фокусов).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
2. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 3. С. 3–237.
3. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16, № 4. С. 3–229.
4. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фунд. и прикл. математика. 2015. Т. 20, № 4. С. 3–231.

РАЗРЕШИМОСТЬ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Шеметова В. В.[1], **Орлов С. С.**[2]

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;
[1]`valentina501@mail.ru`, [2]`orlov_sergey@inbox.ru`

Пусть E_1 и E_2 — вещественные банаховы пространства, u — неизвестная, а f — заданная функции действительного аргумента t и со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$Bu'(t) = A_1u(t) + A_0u(t-h) + f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

где B, A_1 и A_0 — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем оператор B непрерывно обратим, и справедливо включение $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$. Для уравнения (1) зададим начальное условие вида

$$u(t) = \varphi(t), \quad -h \leq t < 0; \quad u(0) = u_0. \tag{2}$$

Здесь $\varphi(t) \in C\left([-h;0], E_1\right)$ и $u_0 \in E_1$ предполагаются известными, и $u_0 \neq \varphi(0)$. Начальные задачи в подобных постановках для уравнений с запаздыванием в абстрактных пространствах рассматривались, например, в [1].

Определение. *Классическим решением* начальной задачи (1), (2) назовем функцию $u(t) \in C\left([-h;0) \cup (0;+\infty), E_1\right) \cap C^1\left((0;+\infty), E_1\right)$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (2).

Исследование проблемы однозначной разрешимости начальной задачи (1), (2) выполняется методами теории распределений Соболева – Шварца со значениями в банаховых пространствах [2]. *Фундаментальное решение* дифференциального оператора, соответствующего уравнению (1), построено с помощью специальной оператор-функции, которая содержит коммутаторы операторов A_1B^{-1} и A_0B^{-1}, что позволило отказаться от условия коммутативности их композиции. Доказана теорема существования и единственности *обобщенного решения* (в классе $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем) начальной задачи (1), (2), и получена явная формула решения. Показано, что при $f(t) \in C\left([0;+\infty), E_2\right)$ это решение является регулярным распределением и порождено обычной функцией $u = u(t)$, которая задана кусочно на полуинтервалах $[(k-1)h; kh)$, где $k \in \mathbb{N}$, имеет разрыв в точке $t = 0$, сильно непрерывна в точке $t = h$, а в остальных точках интервала $(0;+\infty)$ сильно непрерывно дифференцируема.

Теорема. *Пусть $f(t) \in C\left([0;+\infty), E_2\right)$, тогда для того чтобы начальная задача (1), (2) имела единственное классическое решение, необходимо и достаточно, чтобы $\big(u_0 - \varphi(0)\big) \in N(A_0)$, где $N(A_0)$ — нуль-пространство (ядро) оператора A_0.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-01-00643 А и № 18-51-54001 Вьет_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lizama C., Poblete F.* A characterization of well-posedness for abstract Cauchy problems with finite delay // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 457, No. 1. P. 410–435.
2. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПО ДВУСВЯЗНЫМ ОБЛАСТЯМ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА ТРЕНИЯ

Шишканова А. А.

Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина;
shyshkan@gmail.com

Современный уровень техники характеризуется разнообразием форм контактного взаимодействия, которое сопровождается или возможно только при наличии трения. Нагрузка, приводящая к разрушению, в значительной степени зависит от трения. В связи с возникающими математическими трудностями часто рассматривают упрощенные постановки таких задач, где используется учет трения в линейной форме, однако нелинейные законы трения являются актуальными для реальных задач [1]. Математической моделью контакта деталей сложной конфигурации может быть контакт с упругим полупространством штампов, имеющих двусвязные основания [1, 2].

Рассматривается задача о движении жесткого штампа с двусвязным основанием по границе упругого полупространства с учетом нелинейного закона трения. На штамп действуют вертикальная и горизонтальная силы, последняя уравновешивается силой трения. Действующие на штамп силы обеспечивают состояние равновесия или равномерного движения. Под действием нагрузки штамп переместится поступательно и совершит поворот. Данная задача сводится к решению системы уравнений равновесия и основного интегрального уравнения краевого условия для перемещений [1]. Регуляризация основного уравнения приводит к решению уравнения второго рода. В качестве параметра регуляризации предлагается рассматривать коэффициент шероховатости, при этом мы пренебрегаем вертикальными перемещениями микровыступов, обусловленных действием касательной силы.

С помощью применения разложения по малому параметру двумерных интегралов со слабой особенностью разработан метод решения контактных задач для нелинейных законов трения. Предлагается разложение в ряд потенциала простого слоя, распределенного по двусвязной области, на внутреннюю точку этой области с использованием преобразования полюса ядра интегрального оператора. Использовано разложение потенциала простого слоя для области в форме кругового кольца, когда плотность не обладает симметрией. Отдельные случаи такого разложения предложены в [2].

Определены функции распределения нормального давления, величины заглубления штампа и углов поворота. Решены конкретные примеры, из которых видно, что наличие трения, соотношение координат точек приложения сил и размеров штампа влияет на несимметричность распределения давления, которая при определенных условиях может привести к отрыву или опрокидыванию штампа. Найдены предельные значения указанных величин. Для малых коэффициентов трения получены первые два приближения аналитического решения задачи с учетом степенного закона трения для двусвязной области контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горячева И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
2. *Шишканова Г. А., Мелешко В. В.* Розв'язання двовимірного інтегрального рівняння зі слабкою особливістю для двозв'язних областей // Прикл. проблеми мех. і мат. 2007. № 5. С. 178–185.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ДУАЛЬНЫМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Штабель Н. В.

Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия; nadino2000@mail.ru

Аппарат дифференциальных форм оптимально отвечает задачам анализа и построения вычислительных схем в электромагнетизме [1]. Электрическое поле описывается дифференциальными формами первого порядка внутренней ориентации. Для магнитного поля необходимо использовать дифференциальные формы первого порядка внешней ориентации. Для построения вычислительной схемы для моделирования магнитного поля необходимо построить сеточное разбиение, отвечающее принципу двойственности Пуанкаре по отношению к симплициальному разбиению. Такое сеточное разбиение назовем дуальной сеткой, состоящей из дуальных элементов.

Вариационный метод, использующий методологию метода конечных элементов и построенный на дуальной сетке, назовем методом дуальных элементов. Для построения вычислительной схемы для магнитного поля необходимо определить геометрический носитель (полиэдр) и базисные функции на этом носителе. Полиэдральное разбиение строится через барицентры тетраэдров по принципу дуальности к симплициальной сетке, на которой аппроксимированно электрическое поле. Такой подход позволяет получить наиболее общий алгоритм, способный работать с любой симплициальной сеткой [2].

Построение базиса на полиэдрах основано на определении функции формы путем решения ряда локальных задач в многомасштабной идеологии. Для того чтобы определить функцию формы φ на дуальном ребре необходимо решить следующую задачу на полиэдре [3]:

$$\text{в векторном виде } \operatorname{rot}\operatorname{rot}\tilde{\varphi} = 0, \ \text{ или в дифференциальных формах } \mathrm{d}\star\mathrm{d}\varphi = 0,$$

$$\vec{\varphi}|_{l_i} = 1, \quad \vec{\varphi}|_{l_j} = 0, \quad j \neq i,$$

где φ — искомая функция формы, l_i — ребро, ассоциированное с $\vec{\varphi}$. Вычисление локальных базисных функций на каждом полиэдре происходит независимо и может выполняться параллельно.

В работе построена и реализована вычислительная схема на базе дуального метода конечных элементов для моделирования магнитного поля в областях без локального источника. Проведены расчеты на ряде модельных задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект офим № 16-29-15094).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Desbrun M., Kanso E., Tong Y.* Discrete differential forms for computational modeling // Discrete Differential Geometry, Oberwolfach Seminars. 2008. V. 38. P. 287–323.
2. *Штабель Н. В.* Алгоритм построения двойственности Пуанкаре для симплициальных сеток // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники. Сборник трудов всероссийской конференции. Алтайский государственный университет, 2015. С. 139–145.
3. *Shtabel N. V.* Modeling of a magnetic field on dual elements // 14th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE–2018) – 44894: Proceedings. 2018. V. 1. Part 4. P. 276–279.

НОВЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ЭКСПЕРТИЗЫ ДОРОЖНО-ТРАНСПОРТНЫХ ПРОИСШЕСТВИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ФОТОГРАММЕТРИИ

Шумилов Б. М.[1], **Эшаров Э. А.**[2], **Титов А. В.**[3]

Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томск, Россия;
[1]sbm05@yandex.ru, [2]elzare78@mail.ru, [3]avtitov@sibmail.com

Актуальность проблемы. Дорожно-транспортные происшествия являются одной из самых распространенных причин смертности в мире. Ежегодно погибает более 1,35 миллиона человек, что приводит к потере около 3% валового внутреннего продукта (ВВП) [1]. В мировой практике экспертиза этих аварий выполняется с помощью методов энергетического баланса [2]. Основным источником ошибок при этом являются традиционные методы сбора данных, которые основаны на измерениях, проводимых вручную в полевых условиях.

Цель работы. Представлен новый подход к энергетическому анализу дорожно-транспортных происшествий с использованием фотограмметрии [3]. Основное преимущество разработанного подхода связано с качеством трехмерных фотограмметрических моделей, которые позволяют проводить объективные и точные измерения. Результаты этих измерений далее подставляются в математические уравнения для вычисления скорости столкновения по энергии, поглощенной во время аварии. В результате органы дорожной инспекции могут реконструировать аварию простым и надежным способом, не требующим применения электронных таблиц или удаленных вычислений, и таким образом избежать субъективности и неточностей традиционного протокола. Полученные результаты на каждом этапе экспертизы архивируются, и в дальнейшем могут представлять надежную доказательную базу для судебных дел, которые устанавливают ответственность за превышение скорости на городских и магистральных дорогах.

В данном сообщении анализируется реальная авария автомобиля, явившаяся результатом наезда на стационарный элемент дороги (бетонное ограждение), в результате чего обнаруживаются значительные расхождения с традиционным протоколом касательно поглощенной энергии и скорости столкновения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Томской области (проект № 16-41-700400 р_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Global status report on road safety 2018.* Available online: http://www.who.int/violence_injury_prevention/road_safety_status/2018/en/ (accessed on 25 March 2019).
2. *Morales A., Sanchez-Aparicio L. J., Gonzalez-Aguilera D., Gutierrez M. A, Lopez A. I., Hernandez-Lopez D., Rodriguez-Gonzalvez P.* A new approach to energy calculation of road accidents against fixed small section elements based on close-range photogrammetry // Remote Sensing. 2017. V. 9, No. 12. Article ID 1219. P. 1–18.
3. *Gonzalez-Aguilera D., Lopez-Fernandez L., Rodriguez-Gonzalvez P., Hernandez-Lopez D., Guerrero D., Remondino F., Menna F., Nocerino E., Toschi I., Ballabeni A., Gajani M.* GRAPHOS — open-source software for photogrammetric applications // The Photogrammetric Record. 2018. V. 33, No. 161. P. 11–29.

ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОФИЗИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ В ОБЪЕКТАХ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Шурина Э. П.[1,2], Иткина Н. Б.[1], Штанько Е. И.[2], Добролюбова Д. В.[2], Кутищева А. Ю.[1,2], Марков С. И.[1,2], Архипов Д. А.[2]

[1] *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия;* shurina@online.sinor.ru

[2] *Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия;* MihaylovaEI@ipgg.sbras.ru

Современные прикладные задачи характеризуются: 1) многофизичностью; 2) геометрической многомасштабностью области моделирования; 3) многообразными сложными математическими моделями; 4) специальными условиями согласования различных физических процессов; 5) временной разномасштабностью физических процессов. Такие особенности порождают определенные требования к численным методам решения многофизичных проблем. Общепризнанным фактом стала идея использования специальной группы методов, обеспечивающих на функциональном (математическом) уровне физическую релевантность дискретного аналога исходной непрерывной модели. Конечно-элементные многомасштабные неконформные методы позволяют на базе единой процедуры геометрической аппроксимации области моделирования реализовать эффективные численные алгоритмы, ассоциированные с взаимосвязанными физическими процессами, а именно: движение флюида в пористой трещиноватой породе, тепло-массообмен в многофазных средах, развитие трещиноватости, геомеханика. Предлагается использование XFEM (расширенный метод конечных элементов) для решения задачи упругой деформации; DGFEM (разрывный метод Галеркина) для решения задачи просачивания флюида в пористой среде и движения флюида в трещинах и кавернах, моделирования электромагнитных процессов; HFEM (гетерогенный метод конечных элементов) для оценивания эффективных характеристик сложнопостроенной среды. Численные эксперименты показали высокую точность и эффективность разработанных схем. Верификация проведена на классе модельных задач и задач, “приближенных к реальным”.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (тема 615, ОФИ-М, код проекта 16-29-15094), Комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН (тема КП-32.3); Программы президиума РАН № 27; Проектов ФНИ (№ 0331-2019-0015 и 0266-2019-0007).

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ыскак Т. К.[1,2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
istima92@mail.ru

В данной работе рассматривается следующая система нейтрального типа с распределенным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}\big(y(t)+D(t)y(t-\tau)\big)=A(t)y(t)+\int\limits_{t-\tau}^{t}B(t,t-s)y(s)ds,\quad t>0, \tag{1}$$

где $\tau>0$ — константа, $A(t)$, $D(t)$ — квадратные матрицы порядка n с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,\xi)$ — квадратная матрица порядка n с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е. $B(t,\xi)\equiv B(t+T,\xi)$.

В работе получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения и указаны оценки решений исследуемой системы, которые характеризуют скорость убывания при $t\to\infty$. При исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения использована модификация функционала Ляпунова – Красовского, введенная в [1, 2]:

$$V(t,y)=\langle H(t)\big(y(t)+D(t)y(t-\tau)\big),\big(y(t)+D(t)y(t-\tau)\big)\rangle$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle K(t-s,s)y(s),y(s)\rangle\,dsd\eta+\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle M(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds.$$

В работах [1, 2] исследован случай дифференциального уравнения нейтрального типа с сосредоточенным запаздыванием. В [3] рассмотрена система (1) в случае $D=0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
2. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, No. 3. P. 119–130.
3. *Yskak T.* Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Funct. Differ. Equ. 2018. V. 25, No 1–2. P. 97–108.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СКВОЗЬ УПРУГИЙ ПОРИСТЫЙ СКЕЛЕТ

Янченко А. А.[1], Роменский Е. И.[2], Чупахин А. П.[1]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* arseny@pm.me, chupakhin@hydro.nsc.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* evrom@math.nsc.ru

Рассматривается модель течения сжимаемой жидкости сквозь упругий пористый скелет, разработанная с применением метода гиперболических термодинамически согласованных систем законов сохранения [1]. Данный подход успешно применялся для построения моделей течения двухфазных жидкостей. При использовании этого подхода все уравнения системы имеют дивергентный вид, она может быть приведена к симметричной форме и является гиперболической при условии выпуклости порождающего потенциала [2], что позволяет применять современные высокоточные методы для исследования и моделирования описываемого этой системой процесса.

Разработанный (двумерный) численный метод основан на методе конечных объемов. Для дискретизации по пространству применяется WENO/THINC (Tangent of Hyperbola for Interface Capturing)-алгоритмы, для дискретизации по времени — метод Рунге-Кутты. Граничные условия реализованы при помощи метода характеристической декомпозиции [3].

Особенностью модели является наличие контактных разрывов. Классические shock-capturing схемы, примененные к контактным разрывам, приводят к излишней диффузии, вдобавок к этому осцилляции в скорости и давлении, возникающие из-за потери механического равновесия на контактном разрыве, могут приводить к расходимости расчета [4]. Для решения данной проблемы уравнение для объемной концентрации записывается в неконсервативном виде, а разностная схема, аппроксимирующая это уравнение, строится таким образом, чтобы однородный фон в начальных данных сохранялся при наличии скачка объемных концентраций. Кроме того, в области контактного разрыва используется специальная реконструкция переменных THINC, которая существенно уменьшает размазывание разрыва. Разработанная схема относится к классу Volume-Of-Fluid методов.

Приведены результаты тестовых расчетов.

Разработка математической модели (Е. И. Роменский) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 19-01-00347), разработка численного алгоритма и проведение численных экспериментов (А. А. Янченко, А. П. Чупахин) поддержана Российским научным фондом (проект № 17-11-01156).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роменский Е. И.* Термодинамически согласованная система законов сохранения течения сжимаемой жидкости в пористой упругой среде // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 86–97.
2. *Годунов С. К., Роменский Е. И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. *Yanchenko A. A., Romenski E., Khe A. K.* Numerical modeling of compressible fluid flow through elastic porous medium // J. Phys., Conf. Ser. 2017. V. 894. Article ID 012113.
4. *Saurel R., Pantano C.* Diffuse-interface capturing methods for compressible two-phase flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2018. V. 50. P. 105–130.

3D METHOD AND CODES FOR SIMULATION DYNAMIC FSI PROBLEMS IN EULER VARIABLES USING MULTI MESH ALGORITHMS BASED ON A UNIFIED HIGH ORDER MODIFICATION OF GODUNOV SCHEME ON COMPACT STENCIL FOR CFD AND CSD

Abuziarov K. M., Abuziarov M. H., Glazova E. G., Kochetkov A. V., Krylov S. V.

Scientific Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia; abouziar@mech.unn.ru

To model both the dynamics of media and deformable solids, the Godunov scheme of high-order accuracy in Euler–Lagrange variables is used, which is the same for both the Euler equations and the Euler–Cauchy equations describing the deformation of solids. The improving of the accuracy of the scheme is achieved by using the 3D and time-dependent Riemann solver. The same solution is used to calculate the interaction between the fluids and the solids (FSI problem). In the calculation process, three types of difference grids are used. The first is a mobile surface grid in the form of a continuous set of triangles (STL file), which defines and accompanies the computational bodies and two kinds of three-dimensional 3D grids. This is the basic Cartesian fixed grid embeded in each body, and the movable local Euler–Lagrangian grid associated with the surface grid, which also accompanies the contact boundaries. The physical quantities in these grids are connected by mutual interpolation. A detailed description of the procedure was given in [1]. The codes does not require complex 3D mesh generators, only the surfaces of the calculating objects as the STL files created by means of engineering graphics are given by the user, which greatly simplifies the preparing of the task and makes it convenient to use by the user or even directly by the designer at the design stage. The method and codes are used to simulate shock wave and explosive loading and deep penetration problems of FSI. The processes of propagation of detonation waves from the initiation zones of explosives and the effect of nonlinear behaviour of the material and the deforming of bodies on contact forces and the interaction process are taken into account. Three-dimensional processes of interaction of detonations with elastic plastic bodies located near the charges are considered. The bodies (cylinders, cubes, tetrahedrons) are strongly and irreversibly deformed, the streams of detonation products move much faster, and gas jets are formed around the cubes. The strong influence of geometry and density of the bodies is demonstrated. Three-dimensional processes of deep penetration of solid to solid and solid to fluid of cylinder impactors are simulated. The strong influence of the angle and velocity of penetration is demonstrated.

The authors were supported by the RFBR and NSFC according to the research project no. 19-58-53005 and goszadaniya Minobrnauki RF 9.7057.2017/BCh.

REFERENCES

1. *Abuziarov K. M., Abuziarov M. H., Kochetkov A. V.*, “3D fluid structure interaction problem solving method in Euler variables based on the modified Godunov scheme,” Materials Physics and Mechanics, **28**, No. 1/2, 1–5 (2016).

MODELING THE EVOLUTION OF A RANDOM TURBULENT FIELD BY USING THE RANDOMIZED SPECTRAL METHOD

Alexandrov A. V.[1], Dorodnicyn L. W.[2], Duben A. P.[1]

[1]*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia;*
alexandrov@imamod.ru, alexey.duben@gmail.com
[2]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;*
dorodn@cs.msu.su

Presently, in numerical simulations of complex turbulent flows the use of synthetic turbulent fields is permanently growing. Typically such fields are needed when an inflow boundary condition is specified for the LES zone. The history of synthetic turbulence models starts from the 1970s work [1]. However, their practical implementation is troublesome due to high computational cost and strong requirements to the artificial fields in the view of physical relevance.

In this study a stochastic spectral method of homogeneous isotropic turbulent velocity fields generation, designed previously [2] for aeroacoustics, is generalized for the 3D case. The technique is based on Randomized Spectral Method stated in [3].

The initial turbulent fields generated by this method are shown, both analytically and numerically, to match the statistical and spectral properties of physical sources. In order to account time dependence, we consider various ways to specify the evolution of random fields and analyze if they maintain the form of autocorrelation function.

As a validation of the technique developed here, LES-based computations have been conducted. In particular, the generated turbulent fields are specified as initial conditions for the numerical simulation of homogeneous turbulence decay. The results exhibit a good agreement with the experimental data from [4].

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00726).

REFERENCES

1. *Kraichnan R.,* "Diffusion by a random velocity field," Phys. Fluids, **13**, No. 1, 22–31 (1970).
2. *Borovskaya I. A., Kozubskaya T. K., Kurbanmuradov O., Sabelfeld K. K.,* "On modelling of homogeneous random fields and signals and their applications in aeroacoustics problems," Mat. Mod., **19**, No. 10, 76–88 (2007).
3. *Kurbanmuradov O., Sabelfeld K., Kramer P. R.,* "Randomized spectral and Fourier-Wavelet methods for multidimensional Gaussian random vector fields," J. Comput. Phys., **245**, 218–234 (2013).
4. *Comte-Bellot G., Corrsin S.,* "Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated 'isotropic' turbulence," J. Fluid Mech., **48**, No. 2, 273–337 (1971).

A NONLINEAR VISCOELASTIC PLATE EQUATION WITH $\overrightarrow{p}(x,t)$-LAPLACE OPERATOR: BLOW UP OF SOLUTIONS WITH NEGATIVE INITIAL ENERGY

Antontsev S. N.[1,2]

[1]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2]*University of Lisbon, Lisbon, Portugal;*
antontsevsn@mail.ru

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, be a bounded domain with Lipschitz-continuous boundary $\Gamma = \partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$. This talk concerns about the following initial-boundary value problem

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_{\overrightarrow{p}(x,t)} u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \epsilon \Delta u_t + f(u) = 0 \text{ in } Q_T,$$

$$u = \partial u/\partial \nu = 0, \ \Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega,$$

where

$$\Delta_{\overrightarrow{p}(x,t)} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i(x,t)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \overrightarrow{p}(x,t) = (p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

called the $\overrightarrow{p}(x,t)$-Laplace operator, $g \geq 0$ is a memory kernel that decays exponentially and $f(u)$ is a nonlinear function. Here $\epsilon \geq 0$ is a constant and $\partial u/\partial\nu$ denotes the normal derivative directed outside of Ω. Under suitable conditions on g, $f(u)$ and the variable exponent of $\overrightarrow{p}(x,t)$-Laplace operator, it is proved that any weak solution with negative initial energy blows up in finite time, assuming a strong damping $\epsilon\Delta u_t$ ($\epsilon \geq 0$) acting in the domain Q_T. The detailed proofs can be found in [1–3].

This is the joint work with J. Ferreira, Fluminense Federal University, Brazil.

The author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00069).

REFERENCES

1. *Antontsev S., Shmarev S.,* Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up, Atlantis Press, Paris (2015).
2. *Antontsev S. N., Ferreira J.,* "Existence, uniqueness and blowup for hyperbolic equations with nonstandard growth conditions," Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods, **93**, 62–77 (2013).
3. *Antontsev S. N., Ferreira J.,* "On a viscolelastic plate equation with strong damping and perturbation of $\overrightarrow{p}(x,t)$-Laplacian: existence, and uniqueness," Differ. Integral Equ., **27**, No. 11–12, 1147–1170 (2014).

ERROR STRUCTURE ANALYSIS FOR LINEAR NUMERICAL SCHEMES WITH SEVERAL DEGREES OF FREEDOM FOR THE TRANSPORT EQUATION

Bakhvalov P. A.[1], **Surnachev M. D.**[2]

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia;
[1]bahvalo@mail.ru, [2]peitsche@yandex.ru

Consider the model problem $\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = 0$, $t > 0$, $u(t,x) = u(t,x+1)$, with smooth initial conditions $u(0,x) = u_0(x)$. It is well known that the solution error by finite-difference schemes on uniform meshes grows linearly in time until it reaches the magnitude of the solution itself. On the other hand, for the DG scheme the solution error has the following estimate [1]:

$$\|\varepsilon_h(t,u_0)\|_2 \le C_1 h^{k+1} + C_2 h^{2k+1} t.$$

Consider numerical schemes of the form

$$\sum_{\zeta=-M}^{M} Z_\zeta \frac{du_{\eta+\zeta}}{dt}(t) + \frac{1}{h} \sum_{\zeta=-M}^{M} L_\zeta u_{\eta+\zeta}(t) = 0,$$

where $\eta \in \mathbb{Z}$ – cell index and u_η – finite set of values at one cell. I assume that the scheme is L_2-stable and the operator in front of the time derivative has bounded inverse. Initial conditions are prescribed by $u_\eta(0) = (\Pi_h u_0)_\eta$ where Π_h is of the form

$$(\Pi_h f)_{\eta,\xi} = \int f(h(r+\eta))d\mu_\xi(x), \qquad \int d\mu_\xi(x) = 1.$$

Here ξ is the index of a variable in cell and μ_ξ is a measure with finite support and finite total variation.

Theorem. *The following two statements are equivalent.*
1. In the sense of Π_h the estimate

$$\|\varepsilon_h(t,u_0)\|_2 \le C_1 h^P \|\nabla^P u_0\|_\infty + C_2 t h^Q \|\nabla^{Q+1} u_0\|_\infty \tag{1}$$

is valid for all initial conditions u_0 and $t, h > 0$.
2. There exist $\mathfrak{C}_\xi^{(m)} \in \mathbb{R}$ such that the scheme possesses truncation error of order Q in the sense of $\tilde{\Pi}_h$ defined as

$$\left(\tilde{\Pi}_h f\right)_{\eta,\xi} = (\Pi_h f)_{\eta,\xi} + \sum_{m=P}^{Q} h^m \mathfrak{C}_\xi^{(m)} \left(\Pi_h \frac{d^m f}{dx^m}\right)_{\eta,\xi}.$$

This theorem reduces the problem of obtaining estimates (1) to checking the consistency of a system of linear algebraic equations.

REFERENCES

1. *Cao W., Zhang Z., Zou Q.*, "Superconvergence of discontinuous Galerkin methods for linear hyperbolic equations," SIAM J. Numer. Anal., **52**, No. 5, 2555–2573 (2014).

THE METHOD OF THE POLYNOMIALS OF PRINCIPAL MINORS IN THE CALCULATIONS OF THE ACOUSTIC STRESSES OF LAYERED MEDIA

Belyayev Yu. N.

Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia; ybelyayev@mail.ru

Acoustic stresses in a solid medium depend on the type of elastic waves. As a result of an elastic wave action on an anisotropic layered structure (the density and elastic parameters of the medium depend only on one coordinate x_3 along the normal to the layers) in every layer six waves are formed. The stress-strain state of an anisotropic layered medium is described by the system of equations of motion and Hooke's law, which is reduced to the matrix differential equation $d\Psi/dx_3 = W\Psi$. Here $\Psi = \|u_2 \quad \sigma_{23} \quad u_1 \quad u_3 \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}\|$; u_1, u_2, u_3 are projections of displacement vector on the Cartesian axis x_1, x_2, x_3 and σ_{13}, σ_{23}, σ_{33} are components of stress tensor; the elements of the matrix W depend on the thickness d, density, and components of the elastic compliance tensor of the layer, as well as on the angles of incidence. The solution of the above equation for the structure of N homogeneous layers is $\Psi(d) = \prod_{j=N}^{1} T_j \Psi(0)$, where transfer matrices $T_j = \exp(W_j d_j)$ are calculated by means of polynomials of principal minors of the matrices $W_j d_j$ [1] and does not require finding the eigenvalues of the matrices W_j. This method provides a more accurate and reliable calculation of the transfer matrix of the N-layer medium in comparison with other known algorithms.

The amplitudes of the waves scattered by the anisotropic layer are expressed in terms of the elements of the transfer matrix $T(d)$. The distribution of acoustic stresses σ_{i3}, $i = 1, 2, 3$, along the thickness x_3 of an anisotropic layer is determined by the amplitudes of the scattered waves and the elements of the corresponding transfer matrices $T(x_3)$. This method of calculating acoustic stresses is demonstrated for the incident SH-, SV- and P-type waves on the three-layer model: isotropic layer-a crystal layer-isotropic layer.

REFERENCES

1. *Belyayev Yu. N.*, “Calculation of the six-beam diffraction in layered media using polynomials of principal minors,” J. Theor. Comput. Acoust., **26**, No. 2, Article ID 1850017, 1–21 (2018).

PARALLEL-IN-TIME EXPONENTIAL TIME INTEGRATION BASED ON KRYLOV SUBSPACES

Botchev M. A.[1], **Geurts B. J.**[2,3], **Kooij G. L.**[2]

[1]*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia;* botchev@ya.ru
[2]*University of Twente, Enschede, the Netherlands;*
[3]*Eindhoven University of Technology, Eindhoven, the Netherlands;*
b.j.geurts@utwente.nl, gijskooij@gmail.com

Exponential time integration (i.e., time integration involving the matrix exponential) has gained a lot of interest recently. Often, actions of the matrix exponential on vectors are computed by Krylov subspace techniques. In this talk we discuss how a parallelism in time can be achieved within the exponential Krylov subspace time integration framework. Some advances reviewed include a time-parallel method PARAEXP [1] and an exponential block Krylov (EBK) subspace scheme [2]. One disadvantage of the PARAEXP method is that it requires an employment of a regular time integration scheme which restricts its parallelism in time. We explain how these the two approaches (PARAEXP and EBK) can be combined into a time parallel scheme [3] which does not involve regular time integration and, hence, possesses an enhanced time parallelism. Furthermore, a recent time-parallel extension of the PARAEXP-EBK scheme to the incompressible Navier–Stokes equation [4] is discussed.

REFERENCES

1. *Gander M. J., Güttel S.*, "PARAEXP: A parallel integrator for linear initial-value problems," SIAM J. Sci. Comput., **35**, No. 2, C123–C142 (2013).
2. *Botchev M. A.*, "A block Krylov subspace time-exact solution method for linear ordinary differential equation systems," Numer. Linear Algebra Appl., **20**, No. 4, 557–574 (2013).
3. *Kooij G. L., Botchev M. A., Geurts B. J.*, "A block Krylov subspace implementation of the time-parallel Paraexp method and its extension for nonlinear partial differential equations," J. Comput. Appl. Math., **316**(C), 229–246 (2017).
4. *Kooij G. L., Botchev M. A., Geurts B. J.*, "An exponential time integrator for the incompressible Navier–Stokes equation," SIAM J. Sci. Comput., **40**, No. 3, B684–B705 (2018).

AN ORDER-ADAPTIVE COMPACT APPROXIMATION TAYLOR METHOD FOR SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS

Carrillo H.[1], **Parés C.**[1], **Zorío D.**[2]

[1] *University of Málaga, Málaga, Spain;* hugo.carrillo@uma.es, pares@uma.es
[2] *University of Concepción, Concepción, Chile;* dzorio@ci2ma.udec.cl

We present an order-adaptive finite difference numerical method for systems of conservation laws. The method, called Adaptive Compact Approximation Taylor method (ACAT), uses centered $(2p+1)$-point stencils, where p may take values in $\{1, 2, \ldots, p_{max}\}$ according to a family of smoothness indicators in the stencils. The method is a combination between a robust first order scheme and $2p$-order generalized Lax-Wendroff methods, so that it is first order near shocks and of order $2p$ in smooth regions, where $(2p+1)$ is the size of the biggest stencil in which large gradients are not detected. A new class of smooth indicators and the stability analysis (based on [1]) will be presented.

For nonlinear problems, the original LW procedure requires the conversion of the time derivatives to spatial derivatives through the so-called Cauchy-Kovalevskaya process, what may increase dramatically the computational cost (see [2]). To avoid this, we adapt the Compact Approximate Taylor Method (CAT) introduced in [3], by including an adaptive formulation in the numerical differentiation formulas plus a new class of smoothness indicators. In comparison with the Approximate Taylor methods presented in [4], WENO flux reconstructions are not needed and values of the CFL parameter close to 1 can be used, which reduces significantly the computational cost. The general structure of the method and a number of numerical tests will be shown, in which the results are compared with those provided by standard WENO methods (see [5]) and the Approximate Taylor methods introduced in [3] and [4].

REFERENCES

1. *Li J., Yang Z.*, "The von Neumann analysis and modified equation approach for finite difference schemes," Appl. Math. Comput., **225**, 610–612 (2013).
2. *Qiu J., Shu C.-W.*, "Finite difference WENO schemes with Lax–Wendroff-type time discretizations," SIAM J. Sci. Comput., **24**, No. 6, 2185–2198 (2003).
3. *Carrillo H., Parés C.*, "Compact Approximate Taylor methods for systems of conservation laws," in progress.
4. *Zorio D., Baeza A., Mulet P.*, "An approximate Lax–Wendroff-type procedure for high order accurate schemes for hyperbolic conservation laws," J. Sci. Comput., **71**, No. 1, 246–273 (2017).
5. *Shu C.-W.*, "Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws," NASA/CR-97-206253, ICASE Report No. 97-65 (1997).

HYPERBOLIC MODEL FOR FREE SURFACE SHALLOW WATER FLOWS WITH EFFECTS OF DISPERSION, VORTICITY AND TOPOGRAPHY

Chesnokov A. A.[1,2], **Nguyen T. H.**[2]

[1]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
chesnokov@hydro.nsc.ru, trieu.science@gmail.com

We derive a hyperbolic system of equations approximating the two-layer dispersive shallow water model for shear flows recently proposed in [1]. The use of this system for modelling the evolution of surface waves makes it possible to avoid the major numerical challenges in solving dispersive shallow water equations, which are connected with the resolution of an elliptic problem at each time instant and realization of non-reflecting conditions at the boundary of the calculation domain. It also allows one to reduce the computation time. We compare the numerical solutions of the derived hyperbolic system with the dispersive model solutions and show that they almost coincide for large time intervals. The system obtained is applied to study of non-hydrostatic shear flows over a local obstacle and non-stationary undular bores produced after interaction of a uniform flow with an immobile wall. Note that the proposed approach can be used to obtain hyperbolic approximations of various dispersive models, in particular, non-hydrostatic equations of the shear flow of a two-layer stratified fluid [2].

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00498).

REFERENCES

1. *Gavrilyuk S. L., Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A.,* “Spilling breakers in shallow water: applications to Favre waves and to the shoaling and breaking of solitary waves,” J. Fluid Mech., **808**, 441–468 (2016).
2. *Gavrilyuk S. L., Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A.,* “Interaction of a subsurface bubble layer with long internal waves,” Eur. J. Mech. B-Fluid, **73**, 157–169 (2019).

THERMAL MOTION OF GAS IN A RAREFIED SPACE

Chirkunov Yu. A.

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia; e-mail chr101@mail.ru

The main models of the motion of the gas in three-dimensional space were obtained in [1]. The model describing motion of the gas in the rarefied space got unlucky number 13 in the list of these models. This model can be used, in particular, in the study of the processes taking place inside of tornado. For a given initial pressure distribution, a special choice of mass Lagrangian variables leads to the system describing this motion for which the number of independent variables is less by one [2]. Consequently, there is foliation of gas in the rarefied space with respect to the pressure. In the rarefied space for any given initial distribution of the pressure, all the gas particles are localized on the two-dimensional surface. This surface over time moves in this space. At each point of the surface, the vector of acceleration is collinear to the vector of normal to this surface. We found some exact solutions of the obtained system that describe the processes taking place inside of the tornado [3, 4]. For this system we found all nontrivial conservation laws of the first order. In addition to the classical conservation laws the system has else one conservation law, which generalizes the energy conservation law. With the additional condition we found another one generalized energy conservation law.

REFERENCES

1. *Ovsyannikov L. V.*, "The "PODMODELI" program. Gas dynamics," J. Appl. Math. Mech., **58**, No. 4, 601–627 (1994).
2. *Chirkunov Yu. A.*, "The conservation laws and group properties of the equations of gas dynamics with zero velocity of sound," J. Appl. Math. Mech., **73**, No. 4, 421–425 (2009).
3. *Chirkunov Yu. A.*, "Exact solutions of the system of the equations of thermal motion of gas in the rarefied space," Int. J. Non-Linear Mech., **83**, 9–14 (2016).
4. *Chirkunov Yu. A., Pikmullina E. O.*, "Invariant submodels of the model of thermal motion of gas in a rarefied space," Int. J. Non-Linear Mech., **95**, 185–192 (2017).

NONLINEAR MODEL OF HYDROACOUSTICS OF KHOKHLOV–ZABOLOTSKAYA–KUZNETSOV

Chirkunov Yu. A.[1], **Belmetsev N. F.**[2]

[1]*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia;* chr101@mail.ru
[2]*Tyumen State University, Tyumen, Russia;* weqsmachine@gmail.com

We study three-dimensional Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov (KZK) model of the nonlinear hydroacoustics with dissipation. This model is described by third order quasilinear partial differential equation of the (KZK). We obtained that the (KZK) equation admits an infinite Lie group of the transformations, depending on the three arbitrary functions. The submodels of the (KZK) model are described by the invariant solutions of the (KZK) equation. The invariant solutions of rank 0 and 1 are found either explicitly, or their search is reduced to the solution of the nonlinear integro-differential equations. For example, we obtained the invariant solutions that we called “Ultrasonic knife” and “Ultrasonic destroyer”. The submodel “Ultrasonic knife” have the following property: at each fixed moment of time near a some plane the pressure increases indefinitely and becomes infinite on this plane. The submodel “Ultrasonic destroyer” contains a countable number of “Ultrasonic knives”. The presence of the arbitrary constants in the integro-differential equations that determine invariant solutions of rank 1 provides a new opportunities for analytical and numerical study of the boundary value problems for the received submodels, and, thus, for the original (KZK) model. With a help of these invariant solutions we researched a propagation of the intensive acoustic waves (one-dimensional, axisymmetric and planar) for which the acoustic pressure, speed and acceleration of its change, or the acoustic pressure, speed and acceleration of its change in the radial direction, or the acoustic pressure, speed and acceleration of its change in the direction of one of the axes are specified at the initial moment of the time at a fixed point. Under the certain additional conditions, we established the existence and the uniqueness of the solutions of boundary value problems describing these wave processes. Mechanical relevance of the obtained solutions is as follows: 1) these solutions describe nonlinear and diffraction effects in ultrasonic fields of a special kind, 2) these solutions can be used as a test solutions in the numerical calculations performed in studies of ultrasonic fields generated by powerful emitters. Application of the obtained formula generating the new solutions for the found solutions gives families of the solutions containing three arbitrary functions.

REFERENCES

1. *Chirkunov Yu. A., Belmetsev N. F.*, “Invariant submodels and exact solutions of Khohlov–Zabolotskaya–Kuznetsov model of nonlinear hydroacoustics with dissipation,” Int. J. Non-Linear Mech., **95**, 216–223 (2017).

THE MOTION OF A LIQUID OR GAS IN POROUS MEDIUM IN THE PRESENCE OF A SOURCE OR ABSORPTION

Chirkunov Yu. A.[1], **Skolubovich Yu. L.**[2]

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia;
[1]chr101@mail.ru, [2]skolubovich@sibstrin.ru

We study a general three-dimensional nonlinear diffusion model of porous medium with non-stationary source or absorption. We found nine basic models of the original model of the porous medium with non-stationary source or absorption, having different symmetry properties. For the model, admitting the widest group Lie of the transformations we found all invariant submodels. We found explicitly all essentially distinct invariant solutions describing invariant submodels of rank 0 of this model. In particular, we obtained the solutions, which we called "a layered circular pie", "a layered spiral pie", "a layered plane pie" and "a layered spherical pie". The solution "a layered circular pie" describes a motion of the liquid or gas in a porous medium, for which at each fixed moment of a time at all points of each circle from the family of concentric circles a pressure is the same. The solution "a layered spiral pie" describes a motion of the liquid or gas in a porous medium, for which at each fixed moment of a time at all points of each logarithmic spiral, from the obtained family of logarithmic spirals a pressure is the same. The solution "a layered spherical pie" describes a motion of the liquid or gas in a porous medium, for which at each fixed moment of a time at all points of each sphere, from the family of concentric spheres a pressure is the same. A set of the solutions "a layered circular pie", "a layered spiral pie" and "a layered spherical pie" contains the solutions describing a distribution of the pressure in a porous medium after a point blast or a point hydraulic shock. Also this set contains the solutions describing a stratified with respect to the pressure a motion of liquid or gas in a porous medium, with a very high pressure at infinity in a presence of a very strong absorption at a point. The solution "a layered plane pie" describes a motion of the liquid or gas in a porous medium, for which at each fixed moment of a time at all points of each plane, from the family of parallel planes a pressure is the same. A set of the solutions "a layered plane pie" contains the solutions describing a motion of the liquid or gas in a porous medium with a very high pressure near a fixed plane in a presence of a very strong absorption at infinity. Also this set contains the solutions describing a motion of the liquid or gas in a porous medium with a very high pressure at infinity in a presence of a very strong absorption on a fixed plane. The obtained results can be used to study the processes associated with a underground fluid or gas flow, with water filtration, with the engineering surveys in the construction of the buildings, and also with shale oil and gas production.

REFERENCES

1. *Chirkunov Yu. A., Skolubovich Yu. L.*, "Nonlinear three-dimensional diffusion models of porous medium in the presence of non-stationary source or absorption and some exact solutions," Int. J. Non-Linear Mech., **106**, 29–37 (2018).

SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN DIFFERENTIAL ALGEBRAIC EQUATIONS BY THE LEAST SQUARES METHOD

Chistyakov V. F.[1], **Chistyakova E. V.**[2]

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia;
[1]chist@icc.ru, [2]elena.chistyakova@icc.ru

In this talk, we consider higher order differential algebraic equations of the form

$$\Lambda_k x := \sum_{i=0}^{k} A_i(t)x^{(i)}(t) = f(t),\ t \in T = [\alpha, \beta], \tag{1}$$

where $A_i(t)$ are $n \times n$-matrices, $x(t)$ and $f(t)$ are the desirable and the given n-dimensional vector-functions, correspondingly; $x^{(i)} = d^{(i)}x(t)/dt^{(i)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, and it is assumed that

$$\det A_k(t) = 0\ \forall t \in T,$$

A set of boundary value conditions is given

$$Cy(\alpha) + Dy(\beta) = a,\ y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x^1(t) \\ \vdots \\ x^{k-1}(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

where a is a given constant vector from $\mathbb{R}^m$, C and D are given constant matrices from $\mathbb{R}^{m\times nk}$.

We perform a qualitative analysis of the boundary value problem (1), (2), prove the existence theorem and propose a numerical solution on the basis of the least squares method.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-29-10019, 18-01-00643).

STATIONARY SOLUTIONS IN POPULATION DYNAMICS AND THEIR OPTIMIZATION

Davydov A. A.[1,2,3], **Platov A. S.**[4]

[1]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;* davydov@mi.ras.ru
[2]*National University of Science and Technology MISiS, Moscow, Russia;*
[3]*International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria;*
[4]*Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia;* platovmm@mail.ru

We consider an exploited population with dynamic described by the equation

$$x_t(t,l)+[g(l,E(t,l))x(t,l)]_l = -[\mu(l,E(t,l))+u(l)]x(t,l).$$

Here $x(t,l)$ is the density of individuals of size l at the moment t; g and μ are growth and death rates, respectively, and u stands for exploitation intensity. The competition level E could have symmetric or asymmetric form. In the asymmetric case, for example, it could be defined as

$$E(t,l) = \int\limits_l^L \chi(l)x(t,l)dl$$

with some non-negative function χ being integrable on interval $[0,L], L > 0$, where we manage and exploit the population. It is also assumed that the inflow of new generation (of individuals of size 0) is defined by equation

$$x(t,0) = \int\limits_0^L r(l,E(t,l))x^{\beta}(t,l)dl + p_0.$$

with some $\beta \in (0,1)$, birth rate $r \geq 0$ and industrial population renewal $p_0 \geq 0$.

Under the natural assumptions on the model parameters we prove the existence of a positive stationary solution and optimal among them, providing the maximum benefit from the exploitation for different objective functionals.

The authors were supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00223).

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS, DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BIOLOGICAL PROBLEMS

Demidenko G. V.[1,2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
demidenk@math.nsc.ru

In the present paper we consider systems of ordinary differential equations

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{n-1}{\tau_1}x_1 + \dfrac{n-1}{\tau_2}x_2 + g(t, x_n), \\ \dfrac{dx_j}{dt} = \dfrac{n-1}{\tau_1}x_{j-1} - \left(\dfrac{n-1}{\tau_1} + \dfrac{n-1}{\tau_2}\right)x_j + \dfrac{n-1}{\tau_2}x_{j+1}, \quad j = 2, \dots, n-2, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = \dfrac{n-1}{\tau_1}x_{n-2} - \left(\dfrac{n-1}{\tau_1} + \dfrac{n-1}{\tau_2}\right)x_{n-1}, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = \dfrac{n-1}{\tau_1}x_{n-1} - \theta x_n, \quad x|_{t=0} = x^0, \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 \le \infty, \quad \theta \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

Systems of such type arise in many biological and chemical problems [1, 2]. In particular, such systems are used when modeling multistage substance synthesis [2], where n is the number of stages, $x_j(t)$ is the substance concentration on the jth stage.

If the number n of the stages is very large, then we are faced with a "problem of high dimension" of finding solutions to (1). In the case of $\tau_2 = \infty$ this problem was discussed in [3]. Developing the approach [3], we can solve this problem in the case $\tau_1 < \tau_2 \le \infty$. In the beginning we prove the limit theorem (see [3, 4]): $x_n(t) \to y(t)$, $n \to \infty$, where $y(t)$ is the solution to the problem for delay differential equation

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau = (\tau_1^{-1} - \tau_2^{-1})^{-1}, \\ y(t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le \tau, \quad \varphi(\tau + 0) = a. \end{cases} \tag{2}$$

Then we solve the boundary value problem for partial differential equation

$$\begin{aligned} &u_t + (\tau_1^{-1} - \tau_2^{-1})\, u_z - (\tau_1^{-1} + \tau_2^{-1})/(2(n-1))\, u_{zz} = 0, \quad t > 0, \quad z \in (0,1), \\ &u|_{t=0} = u^0(z), \quad B_1 u|_{z=0} = \varphi_1(t), \quad B_2 u|_{z=0} = \varphi_2(t), \end{aligned} \tag{3}$$

where function u^0 is defined by initial conditions in (1), boundary operators B_j and functions φ_j are defined by equations in (1) and the solution to (2). Using the solutions to (2), (3) we obtain $x_k(t) \approx u(t, z_k)$, $z_k = (k-1)/(n-1)$, $k = 1, \dots, n$, $n \gg 1$.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-29-10086).

REFERENCES

1. *Murray J. D.*, Lectures on Nonlinear Differential Equation Models in Biology, Clarendon Press, Oxford (1977).
2. *Likhoshvai' V. A., Demidenko G. V., Kolchanov N. A., Matushkin Yu. G., Fadeev S. I.*, "Mathematical modeling of regular contours of gene networks," Comput. Math. Math. Phys., **44**, No. 12, 2166–2183 (2004).
3. *Demidenko G. V.*, "On classes of systems of differential equations of higher dimension and delay equations" (Russian), in: Itogi Nauki. Yug Rossii. Ser. Mat. Forum, vol. 5, YuMI VNTs RAN i RSO-A, Vladikavkaz, 2011, pp. 45–56.
4. *Demidenko G. V.*, "Systems of differential equations of higher dimension and delay equations," Sib. Math. J., **53**, No. 6, 1021–1028 (2012).

MOTION OF THE INVERTED PENDULUM WITH A VIBRATING SUSPENSION POINT

Demidenko G. V.[1,2], **Dulepova A. V.**[2]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
demidenk@math.nsc.ru, a.dulepova@g.nsu.ru

Under study it is the stability of the inverted pendulum motion whose suspension point oscillates sinusoidally along a straight line having a small angle α with the vertical. The equation of motion of the pendulum has the form

$$\varphi'' + \varepsilon\varphi' + \frac{g - a\omega^2 \sin(\omega t)\cos\alpha}{l}\sin\varphi - \frac{a\omega^2\sin(\omega t)\sin\alpha}{l}\cos\varphi = 0,$$

where $\varphi = \varphi(t)$ is the angle of deviation of the pendulum from the lower vertical position of equilibrium, ε is the friction coefficient, l is the length of the pendulum, g is the acceleration of gravity, a is the amplitude of the suspension point oscillations and ω is its oscillation frequency.

In case when $\alpha = 0$ it is well known, that if the amplitude of the suspension point oscillations is small enough $\frac{a}{l} \ll 1$, then at a sufficiently high frequency ω the upper equilibrium position of the pendulum becomes stable. For the first time such a result was predicted in 1908 by A. Stephenson [1]. The rigorous proof of this fact was obtained by N. N. Bogolyobov [2]. Currently, there are different approaches to the proof of this fact (see, for example, [3]).

In papers [4, 5] the problem of stability of the inverted pendulum motion in case when $\alpha \geq 0$ is solved with the use of a special boundary value problem for the Lyapunov differential equation, and the principle of contracting mapping, wherein it is possible to obtain the estimate of the stabilization rate at $t \to \infty$. Developing the approach [4, 5] and using the technique described in [6], we also obtain results on the robust stability of the inverted pendulum motion with a vibrating suspension point.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-29-10086).

REFERENCES

1. *Stephenson A.*, “On a new type of dynamical stability,” Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society, **52**, No. 8, 1–10 (1908).
2. *Bogolyubov N. N.*, “Perturbation theory in nonlinear mechanics” (Russian), Sbornik Trudov Instituta Stroitel’noy Mekhaniki AN SSSR, **14**, 9–34 (1950).
3. *Arnold V. I.*, Mathematical Understanding of Nature: Essays on Amazing Physical Phenomena and Their Understanding by Mathematicians, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2014).
4. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.*, “On stability of solutions to quasilinear periodic systems of differential equations,” Sib. Math. J., **45**, No. 6, 1041–1052 (2004).
5. *Demidenko G. V., Dulepova A. V.*, “On stability of the inverted pendulum motion with a vibrating suspension point,” J. Appl. Ind. Math., **12**, No. 4, 607–618 (2018).
6. *Demidenko G. V.*, “Systems of differential equations with periodic coefficients,” J. Appl. Ind. Math., **8**, No. 1, 20–27 (2014).

A NONLINEAR CONSERVATIVE SYSTEM FOR DESCRIBING HIGHLY NONLINEAR ACOUSTIC WAVES IN HETEROGENEOUS MEDIA

Diaz M. A.[1,2], Solovchuk M. A.[2,3], Sheu T. W. H.[3]

[1] *Institut Jean Le Rond d'Alambert, Sorbonne Université, CNRS, Paris, France;*
[2] *Institute of Biomedical Engineering and Nanomedicine, National Health Research Institutes, Zhunan, Taiwan;*
[3] *National Taiwan University, Taipei, Taiwan;*
manuel.ade@dalembert.upmc.fr, solovchuk@nhri.org.tw, twhsheu@ntu.edu.tw

A new system of hyperbolic PDEs capable of describing the nonlinear nature of acoustic fluctuations that propagate over inhomogeneous and heterogeneous fluid media is formulated. This novel system model is initially derived by using the traditional principles of nonlinear acoustics [1], i.e. the *finite-amplitude* methodology, to yield a general system for describing acoustic fluctuations from the Navier–Stokes–Fourier equations. Here, by incorporating the special substitution technique of [2], it is found that the classical result can be closed into a conservative system of nonlinear PDEs. However, the resulting system is then found to be in a general form of the conservation laws, namely the *capacitive-conservative differential form* [3]. A closer look at the Rankine–Hugoniot relations that result from the system's associated flux function indicates that the system model is consistent with physical the expectations inside the acoustic regime. As a result, we extend the high-order shock-capturing numerical approach used in [4, 5] so that the nonlinear nature of the acoustic propagation in heterogeneous fluid media (including shocks) can be captured without numerical artifacts while keeping any numerical dissipation to a minimum. To verify and illustrate the capabilities of the proposed nonlinear system model, one- and two-dimensional benchmark problems of the linear acoustic literature [3, 6] are revisited under our new formulation.

REFERENCES

1. *Hamilton M. F., Blackstock D. T.,* Nonlinear Acoustics, Academic Press, San Diego (1998).
2. *Christov I., Christov C. I., Jordan P. M.,* "Modeling weakly nonlinear acoustic wave propagation," Q. J. Mech. Appl. Math., **60**, No. 4, 473–495 (2007).
3. *LeVeque R. J.,* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
4. *Diaz M. A., Solovchuk M. A., Sheu T. W. H.,* "A conservative numerical scheme for modeling nonlinear acoustic propagations in thermoviscous homogeneous media," J. Comput. Phys., **363**, 200–230 (2018).
5. *Diaz M. A., Solovchuk M. A., Sheu T. W. H.,* "High-performance multi-GPU solver for describing nonlinear acoustic waves in homogeneous thermoviscous media," Comput. Fluids, **173**, 195–205 (2018).
6. *LeVeque R. J.,* "Wave propagation algorithms for multidimensional hyperbolic systems," J. Comput. Phys., **131**, No. 2, 327–353 (1997).

SIMULATION OF NON-NEWTONIAN FLUID FLOWS IN COMPOSITE MICROSTRUCTURES

Dimitrienko Yu. I.[1], Li Sh.[2]

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;
[1]dimit.bmstu@gmail.com, [2]shuguangli2008@gmail.com

Many processes in polymer composites, textiles, food and pharmaceutical industries involve the flow of non-Newtonian fluids in porous media. The paper proposes a physical and mathematical model of local transport for non-Newtonian incompressible fluid in a porous composite structure. The model is based on the asymptotic homogenization method of the three-dimensional Navier–Stokes equations with the non-Newtonian Carreau–Yasuda viscosity. A numerical algorithm for solving local problems of non-Newtonian fluid flow in periodic cells of a composite structure, and the distribution of single hole velocity, pressure and non-Newtonian viscosity was obtained. The algorithm for calculating the permeability tensor is developed. The simulation results of the distribution relationship between the norm of the macroscopic pressure gradient and the average velocity are obtained.

REFERENCES

1. *Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O.,* Dynamics of Polymeric Liquids: Vol. 1, Fluid Mechanics, John Wiley & Sons, New York (1987).
2. *Dimitrienko Yu. I.,* Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations, Springer (2010).
3. *Dimitrienko Yu. I.,* Thermomechanics of Composite Structures under High Temperatures, Springer (2016).
4. *Dimitrienko Yu. I., Dimitrienko I. D.,* “Simulation of local transfer in periodic porous media,” Eur. J. Mech. B-Fluid, **37**, No. 1, 174–179 (2013).
5. *Dimitrienko Yu. I., Li Sh.,* “Mathematical simulation of non-isothermal steady flow of non-Newtonian fluid by finite element method,” Math. Model. Comput. Methods, No. 2, 70–95 (2018).
6. *Dimitrienko Yu. I., Li Sh.,* “Modeling the effective permeability for the flow of non-Newtonian fluids in three-dimensional composite structures,” Math. Model. Comput. Methods (2019).
7. *Orgéas L., Geindreau C., Auriault J. L., Bloch J. F.,* “Upscaling the flow of generalized Newtonian fluids through anisotropic porous media,” J. Non-Newton. Fluid, **145**, No. 1, 15–29 (2007).
8. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z.,* The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Elsevier (2005).

SEPARATION PRINCIPLE FOR QUASI-ONE-SIDED LIPSCHITZ NONLINEAR SYSTEMS WITH TIME-DELAY

Dong W.[1], **Hu G.**[2], **Cong Y.**[3]

[1] *Shanghai University, Shanghai, China;* dongwenqiangshu@163.com
[2] *Shanghai University, Shanghai, China;* ghu@hit.edu.cn
[3] *Shanghai Customs College, Shanghai, China;* yhcong@shu.edu.cn

This paper deals with output stabilization for a class of nonlinear time-delay systems described as

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + A_\tau x_\tau + Bu + \phi(x, x_\tau), \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $y \in \mathbb{R}^p$ is the output vector, $u \in \mathbb{R}^m$ is the control input vector, $A, A_\tau \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ are the constant matrices of appropriate dimensions, $x_\tau = x(t-\tau)$ and τ is the positive constant time-delay. $\phi(x, x_\tau)$ is a nonlinear function with respect to x, x_τ.

Consider an observer of the following form

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + A_\tau x_\tau + Bu + \phi(\hat{x}, \hat{x}_\tau) + L(y - C\hat{x}) + L_\tau(y - C\hat{x}_\tau), \\ \hat{y} = C\hat{x}, \end{cases} \tag{2}$$

where $L, L_\tau \in \mathbb{R}^{n\times p}$ are observer gain matrices to be determined later.

Firstly, the sufficient condition that observer (2) yields an asymptotic estimate for nonlinear time-delay systems (1) is proposed. We emphasize the fact that an observer can be designed by meaning of the quasi-one-sided Lipschitz condition even though the linear part of nonlinear time-delay systems is not detectable. Furthermore, the result is as follows: the quasi-one-sided Lipschitz condition is less conservative than the Lipschitz condition [1] and the one-sided Lipschitz condition [2].

For systems (1), let a state feedback controller be of the form

$$u = -Kx - K_\tau x_\tau, \tag{3}$$

where the gain matrices $K, K_\tau \in \mathbb{R}^{m\times n}$. From (1) and (3), we obtain the closed-loop systems

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + (A_\tau - BK_\tau)x_\tau + \phi(x, x_\tau) \\ y = Cx. \end{cases}$$

Then, a state feedback controller is designed to stabilize the nonlinear time-delay systems (1) by LMI approach. The sufficient condition of controller design for systems (1) remain valid even though the linear part of systems is not stabilizable.

Subsequently, a separation principle is derived for stabilization of nonlinear time-delay systems. That is to say, the observer and controller can be designed separately.

Finally, an illustrative numerical example is given to show the feasibility and superiority of the proposed methods.

REFERENCES

1. *Zemouche A., Boutayeb M.,* “Observer synthesis method for Lipschitz nonlinear discrete-time systems with time-delay: an LMI approach,” Appl. Math. Comput., **218**, No. 2, 419–429 (2011).
2. *Dong Y., Liu W., Liang S.,* “Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems with time-varying delay and uncertainties,” Int. J. Robust Nonlinear Control, **27**, No. 11, 1974–1998 (2017).

ON THE GENERALIZATION OF THE GAUSS–JORDAN METHOD FOR SOLVING THE INFINITE SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

Fedorov F. M.[1], **Pavlov N. N.**[2], **Ivanova O. F.**[3], **Potapova S. V.**[4]

M. K. Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia;
[1]foma_46@mail.ru, [2]pnn10@mail.ru, [3]o_buskarova@mail.ru, [4]sargyp@mail.ru

It is known that for solving various problems of natural science and technology, a class of infinite systems of linear algebraic equations has received an extensive application. For example, from the beginning of the last century to the present, infinite systems are used to solve various problems of the static theory of elasticity. Various problems of the theory of diffraction, the theory of electrical circuits, the theory of waveguides, the variety of problems in the theory of cybernetic systems, in the theory of mass service, in quantum chemistry, etc. have been solved and are solved using infinite systems. But, for mathematical modeling of these problems only special infinite systems are used, such as regular systems and systems with difference indexes.

The further wide practical application of the infinite systems is greatly limited by the insufficient development of the theory of these systems and methods for solving general systems.

In the proposed report, the classical Gauss–Jordan method for solving finite systems of linear algebraic equations is generalized to infinite systems. The generalization is based on a new theory of general infinite systems, proposed by us, which gives an exact analytical solution of infinite systems in the form of a series. Moreover, the algorithm for the numerical implementation of a new approach to solving infinite systems can be used to generalize to the infinite case not only the Gauss–Jordan method, but any converging numerical methods for solving finite systems. A numerical comparison with an exact solution is given, which shows acceptable accuracy.

The authors were supported by the Grant of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (no. 1.6069.2017/8.9).

EXACT SOLUTIONS OF STATIONARY EQUATIONS OF IDEAL MAGNETOHYDRODYNAMICS IN THE NATURAL COORDINATE SYSTEM

Golovin S. V.[1,2], **Toledo Sesma L.**[2]

[1]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
golovin@hydro.nsc.ru, ltoledo@fisica.ugto.mx

Equations of ideal magnetohydrodynamics that describe stationary flows of an inviscid ideally electrically conducting fluid are considered. Classes of exact solution of these equations are described. With the use of the natural curvilinear coordinate system, where the streamlines and magnetic force lines play the role of the coordinate curves, the model equations are partially integrated and converted to the form that is more convenient for the description of the magnetic lines and streamlines of particles. As the coordinate system used is related to the initial coordinate system by a nonlocal transformation, the group admitted by the system can change. An infinite-dimensional (containing three arbitrary functions of time) group of symmetries is calculated for the system in the natural coordinates. An optimal system of subgroups of dimensions 1 and 2 is constructed for this group. For one of the optimal system subgroups, an invariant exact solution is found, which describes the electrically conducting fluid flow of the vortex source type with swirling magnetic lines and streamlines.

ON CYCLES OF BLOCK-LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

Golubyatnikov V. P.[1], **Gradov V. S.**[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* golubyatn@yandex.ru

[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;* gnets2008@outlook.com

We consider 5-dimensional block-linear dynamical systems of the type

$$\frac{dx_1}{dt} = L(x_5) - x_1; \quad \frac{dx_j}{dt} = L(x_{j-1}) - x_j; \quad j = 2, 3, 4, 5; \tag{1}$$

similarly other-dimensional systems can be studied, see [1, 2]; L is a step function:

$$L(x) = a > 1 \ \text{ for } \ 0 \le x < 1; \quad L(x) = 0 \ \text{ for } \ 1 \le x.$$

Hyperplanes $x_j = 1$ decompose the domain $Q := [0, a] \times [0, a] \times [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ to 32 blocks. As in [2, 3], we denote them by multi-indices $\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\} := \{X \in Q \mid \varepsilon_j = 0, \ \text{for} \ 0 \le x_j < 1; \ \varepsilon_j = 1, \ \text{for} \ 1 \le x_j\}$. Consider the following unions of the blocks in Q:

$$W_3^1 := \{11110\} \cup \{11100\} \cup \{11101\} \cup \{11001\} \cup \{11011\} \cup \{10011\}$$
$$\cup \{10111\} \cup \{00111\} \cup \{01111\} \cup \{01110\};$$
$$W_3^* := \{11100\} \cup \{11000\} \cup \{11001\} \cup \{10001\} \cup \{10011\} \cup \{00011\}$$
$$\cup \{00111\} \cup \{00110\} \cup \{01110\} \cup \{01100\};$$
$$W_3^0 := \{10000\} \cup \{10001\} \cup \{00001\} \cup \{00011\} \cup \{00010\} \cup \{00110\}$$
$$\cup \{00100\} \cup \{01100\} \cup \{01000\} \cup \{11000\}.$$

Theorem 1. *For $2 < 2a < 5 - \sqrt{5}$, the domain W_3^0 contains exactly one Piece-wise Linear cycle $\mathcal{C}_2$ of the system* (1)*, such that $\mathcal{C}_2$ is symmetric with respect to the cyclic permutation σ of the variables: $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to x_1$.*

Theorem 2. *For $5 + \sqrt{5} < 2a$, the domain W_3^1 contains exactly one PL cycle $\mathcal{C}_3$ of the system* (1)*, such that $\mathcal{C}_3$ is symmetric with respect to the permutation σ.*

Remark 1. For all values of the parameter a, the domain W_3^* does not contain cycles of the system (1) which are symmetric with respect to σ.

Remark 2. It was shown in [2] that the system (1) has one more cycle contained in the union of 10 blocks $\{10101\} \cup \{00101\} \cup \{01101\} \cup \{01001\} \cup \{01011\} \cup \{01010\} \cup \{11010\} \cup \{10010\} \cup \{10110\} \cup \{10100\}$ which is disjoint with $W_3^1 \cup W_3^0$.

Analogous results hold for other odd-dimensional dynamical systems (smooth and block-linear) similar to (1), see [2, 3].

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00057) and SB RAS (project no. 0314-2018-0011).

REFERENCES

1. *Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P.*, “On the uniqueness of a cycle in an asymmetric three-dimensional model of molecular repressilator,” J. Appl. Ind. Math., **8**, No. 2, 1–6 (2014).
2. *Golubyatnikov V. P., Ivanov V. V.*, “Cycles in odd-dimensional models of circular gene networks,” J. Appl. Ind. Math., **12**, No. 4, 648–657 (2018).
3. *Golubyatnikov V. P., Kirillova N. E.*, “On cycles in models of circular gene networks functioning” (Russian), Sib. Zh. Chist. Prikl. Matem., **18**, No. 1, 54–63 (2018).

ON PELL–PADOVAN SEQUENCE

Goy T. P.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine;
tarasgoy@yahoo.com

The *Pell–Padovan sequence* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ is the sequence of integers defined by a third-order recurrence equation

$$P_n = 2P_{n-2} + P_{n-3},$$

for $n \geq 3$, where $P_0 = P_1 = P_2 = 1$. The first few values of Pell–Padovan numbers are $1, 1, 1, 3, 3, 7, 9, 17, 25, 43, 67, 111, 177, 289, \ldots$ (see, for example, [1]).

We investigate some families of Toeplitz–Hessenberg determinants the entries of which are Pell–Padovan numbers. As a result, we obtain new identities involving sums of products of these numbers and multinomial coefficients. In particular we obtain some connection formulas between Pell–Padovan and Fibonacci numbers.

Our approach is similar in spirit to [2–4].

Recall that the Fibonacci sequence $\{F_n\}_{n\geq 0}$ is defined by the initial values $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and the recurrence relation

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Theorem. *Let $n \geq 2$, except when noted otherwise. Then*

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_1^{s_1} P_2^{s_2} \cdots P_n^{s_n} = 2(-1)^n F_{n-2},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_2^{s_1} P_3^{s_2} \cdots P_{n+1}^{s_n} = (-1)^{\left\lfloor \frac{4n+1}{3} \right\rfloor} + (-1)^{\left\lfloor \frac{4n+2}{3} \right\rfloor},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_3^{s_1} P_4^{s_2} \cdots P_{n+2}^{s_n} = 2(-1)^n F_{2n},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_3^{s_1} P_5^{s_2} \cdots P_{2n+1}^{s_n} = -2F_{n-4}, \qquad n \geq 4,$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_0^{s_1} P_2^{s_2} \cdots P_{2n-2}^{s_n} = 2F_{n-1} - 2^{n-1}, \qquad n \geq 1,$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_2^{s_1} P_4^{s_2} \cdots P_{2n}^{s_n} = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} (-1)^{j+1} \binom{n-1}{3j+1},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} m_n(s) P_4^{s_1} P_6^{s_2} \cdots P_{2n+2}^{s_n} = (-1)^{\left\lfloor \frac{5n-2}{3} \right\rfloor} + (-1)^{\left\lfloor \frac{5n-1}{3} \right\rfloor},$$

where $\lfloor \cdot \rfloor$ is the floor function, $\sigma_n = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$, $|s| = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$, $m_n(s) = \frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!}$ is the multinomial coefficient, and the summation is over integers $s_i \geq 0$ satisfying $s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n$.

REFERENCES

1. *Atanassov K., Dimitrov D., Shannon A.*, "A remark on ψ-function and Pell–Padovan's sequence," Notes Number Theory Discrete Math., **15**, No. 2, 1–44 (2009).
2. *Goy T.*, "On identities with multinomial coefficients for Fibonacci–Narayana sequence," Ann. Math. Inform., **49**, 75–84 (2018).
3. *Goy T.*, "Some families of identities for Padovan numbers," Proc. Jangjeon Math. Soc., **21**, No. 3, 413–419 (2018).
4. *Goy T. P.*, "On some fibinomial identities" (Russian), Chebyshevskii sbornik, **19**, No. 2, 56–66 (2009).

A NUMERICAL METHOD FOR TWO PHASE FLOWS WITH PHASE TRANSITION INCLUDING PHASE CREATION

Hantke M.[1], **Thein F.**[2]

[1]*Martin Luther University of Halle-Wittenberg, Halle (Saale), Germany;*
maren.hantke@mathematik.uni-halle.de
[2]*Otto von Guericke University Magdeburg, Magdeburg, Germany;*
ferdinand.thein@ovgu.de

Two phase flows including phase transition, especially phase creation, with a sharp interface remain a challenging task for numerics. We consider the isothermal Euler equations with phase transition between a liquid and a vapor phase. The phase interface is modeled as a sharp interface and the mass transfer across the phase boundary is modeled by a kinetic relation [1, 2]. Existence and uniqueness results were proven in [2–4]. We present a method to obtain the numerical solution for associated Riemann problems. In particular we show how the cases of nucleation and cavitation may be treated. The calculated results will be compared to the exact solutions. Therefore we will highlight the major difficulties and propose possible strategies to overcome these problems.

REFERENCES

1. *Dreyer W., Duderstadt F., Hantke M., Warnecke G.,* “Bubbles in liquids with phase transition,” Contin. Mech. Thermodyn., **24**, No. 4–6, 461–483 (2012).
2. *Thein F.,* Results for Two Phase Flows with Phase Transition (Thesis), Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg (2018).
3. *Hantke M., Thein F.,* “A general existence result for isothermal two-phase flows with phase transition,” arXiv:1703.09431 (2017).
4. *Hantke M., Dreyer W., Warnecke G.,* “Exact solutions to the Riemann problem for compressible isothermal Euler equations for two phase flows with and without phase transition,” Q. Appl. Math., **71**, 509–540 (2013).

NUMERICAL METHOD OF EXPANSION OF A FUNCTION IN A GENERALIZED TAYLOR SERIES

Ivanov A. V.[1], **Trofimov S. P.**[2]

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia;
[1]av.ivanov.2014@yandex.ru, [2]tsp61@mail.ru

We consider the problem of numerical expansion of an infinitesimal univariate function into a generalized Taylor series in the form

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i x^{p_i} + o(x^{p_n}),$$

where $C_i \in R$ and $p_i \in R_+$ are coefficients and exponents of monomials. The generalized Taylor series expansion is more difficult than ordinary Taylor series expansion. The main problem is a necessity of finding out the unknown fractional monomial exponents. A similar problem is the expansion of a function in a Puiseux series, in which the sequence of exponents is a known arithmetic progression.

The necessity of using generalized Taylor series arises in such problems as fractional polynomial regression [1–2], finding fractional multiplicity of the root [3], analysis of optimization programs with a nonzero duality gap [4].

We develop and study three automated algorithms based on estimation of parameters of a logarithmic slope, which obtained after the transition to the logarithmic image of the function. Finally, we report several numerical examples of the expansion of the infinitesimal functions with fractional monomials.

The algorithms are applied to the expansion of multivariate functions. We find posynomials with fractional and integer orders and the coefficients. The algorithm allows to find several posynomials of different orders. Quadratic form defined by Hessian has view of convex drop-liked figures that touch at the origin. This approach allows to visualize posynomial of high orders of the two- or three-variable functions. Coefficients of proportionality are represented in polar coordinate system. Polar surface of the coefficients can be obtained using Discrete Fourier Transform. It leads to new approaches for computing Hessians and other high-order Gateaux derivatives. Finding of these characteristics with using finite-difference formulas lead to numerical errors. The proposed approach makes it easy to verify the optimal properties of stationary points.

REFERENCES

1. *Ambler G., Royston P.*, “Fractional polynomial model selection procedures: investigation of type I error rate,” J. Stat. Comput. Simulation, **69**, No. 1, 89–108 (2001).
2. *Cetisli B., Kalkan H.*, “Polynomial curve fitting with varying real powers,” Electron. Electr. Eng., **112**, No. 6, 117–122 (2011).
3. *Trofimov S. P.*, “Numerical method for determining the order of smallness of the infinitesimal,” Bulletin of Ural Institute of Economics, Management and Law, **32**, No. 3, 12–17 (2015).
4. *Trofimov S., Fettser Yu., Ivanov A.*, “An infinitesimal approach for analysis of convex optimization problem with duality gap,” CEUR Workshop Proceedings, **1987**, 570–577 (2017).

POST-PROCESSING TECHNIQUES FOR WIND SPEED PREDICTION

Ivanov T. B.[1], **Lyutskanova-Zhekova G. S.**[2]

Sofia University, Sofia, Bulgaria;
[1]tbivanov@fmi.uni-sofia.bg, [2]g.zhekova@fmi.uni-sofia.bg

Wind power is considered among the most promising sustainable energy sources. There has been a considerable growth in the installed electricity generation capacity worldwide in the last decades. For the successful exploitation of this technology, however, accurate forecasts of wind speed and other quantities, describing the atmospheric conditions, are needed.

If one needs to obtain reliable long-term forecasts, then physically-based models are used in order to predict the behaviour of the atmosphere. In mathematical terms, those models comprise of PDE systems, based on conservation laws as well as empirical evidence, that are solved numerically. They, however, are known to exhibit systematic over- or underestimation of the wind, because of sub-grid atmospheric processes that cannot be resolved in the numerical model.

Therefore, further improvement of the forecast should be searched for. For this purpose, local measurements can be used and based on them post-processing of the numerical results from the physically-based models can be carried.

In the present work, we shall give a broad overview of the mathematical modelling of meteorological processes. Then, we shall focus on proposing an ensemble of post-processing techniques, based on appropriately constructed Kalman filters, various fitting techniques, etc. Numerical experiments will be presented in order to validate the applicability of the proposed methods. Based on them, conclusions will be made for the accuracy of the obtained wind speed forecasts.

STABLE PERTURBATIONS OF BOUNDARY PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kanguzhin B. E.[1], **Seitova A. A.**[2]

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan;
[1]kanbalta@mail.ru, [2]function05@mail.ru

In this paper, we expand the class of nondegenerate two-point boundary value problems for the Sturm–Liouville equation, which have a complete system of eigenfunctions and associated functions in special function spaces. Such spaces depend on the length of support of the potential of the Sturm–Liouville equation. The formulated results clarify well-known results of V. A. Marchenko [1]. Two-point boundary value problems for the Sturm–Liouville equation are divided into degenerate and nondegenerate boundary conditions in the sense of V. A. Marchenko. The main result of V. A. Marchenko asserts that systems of eigenfunctions and associated functions of nondegenerate boundary value problems for the Sturm–Liouville equation form a complete system of functions in the space of square-summable functions. In this paper, the result of V.A. Marchenko is clarified in the following direction [2–4]. There are operators with a complete system of eigenfunctions and associated functions in the space of square-summable functions among the degenerate boundary value problems in the sense of V.A. Marchenko. The presence of the completeness property depends on the length of support of the measure which is antisymmetry to the potential of the Sturm–Liouville equation.

This research is financially supported by the grant no. AP05131292 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

1. *Marchenko V. A.,* The Sturm–Liouville Operators and Their Applications (Russian), Naukova Dumka, Kiev (1977).
2. *Jumabayev S. A., Nurakhmetov D. B.,* “On Volterra three-point problems for the Sturm–Liouville operator related to potential symmetry,” Math. Notes, **104**, No. 4, 612–616 (2018).
3. *Kalmenov T. Sh., Shaldanbaev A. A.,* “On the structure of the spectrum of the Sturm–Liouville boundary value problem on a finite time interval,” Izvestiya AN RK. Seriya Fiziko-Matematicheskaya, **3**, 29–34 (2000).
4. *Sadovnichy V. A., Kanguzhin B. E.,* “On the relationship between the spectrum of a differential operator with symmetric coefficients and boundary conditions,” Dokl. Akad. Nauk SSSR, **267**, No. 2, 310–313 (1982).

MULTIANISOTROPIC INTEGRAL OPERATORS DEFINED BY REGULAR EQUATIONS

Karapetyan G. A., **Petrosyan H. A.**

Russian-Armenian University, Yerevan, Republic of Armenia;
heghine.petrosyan@rau.am

In the paper, applying the special integral representation of functions obtained in [1], the correct solvability of the Dirichlet problem for regular equations in $\mathbb{R}^n_+$ is studied in special weighted spaces. In particular, as in the quasi-elliptic case (see [2]), a scale of such weighted spaces is constructed.

Consider the differential operator $P(D_x, D_{x_n})$ in $\mathbb{R}^n_+$ with constant real coefficients a_j $(j = 1, \ldots, M)$

$$P(D_x, D_{x_n}) = D^{2m}_{x_n} + \sum_{j=1}^{M} a_j D^{\alpha^j}. \tag{1}$$

The operator (1) is a regular operator, i.e. $P(\xi, \xi_n) \neq 0$, when $|\xi + \xi_n| \neq 0$.

In $\mathbb{R}^n_+$ consider the following Dirichlet problem:

$$P(D_x, D_{x_n})U = f(x, x_n), \quad x \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^j U}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{3}$$

For $1 < p < \infty$ denote by $\chi := |\mu^0| \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, where $\mu^0 = \left(\mu^0_1, \ldots, \mu^0_{n-1}, \mu^0_n\right) = (1/l_1, \ldots, 1/l_{n-1}, 1/(2m))$ and $c_0 := \min\limits_j \left(\min\limits_l \mu^l_j / \max\limits_l \mu^l_j\right)$.

In this paper we study the solvability of problem (2), (3), namely, the following theorems will be proved.

Theorem 1. *Let $|\mu^0| > 1$, $1 - \chi < \sigma < \min\{2c_0, |\mu^0|/p\}$. Then for any function $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+) \cap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$ the problem (2), (3) has a unique solution $U \in W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$, moreover, with some constant $C > 0$ the following inequality holds:*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} + \|f\|_{L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n_+)}).$$

Theorem 2. *Let $\sigma < \min\{2c_0, |\mu^0|/p\}$, $1 \geq |\mu^0| > 1 - L\mu^0_{min}$, $\mu^0_{min} := \min\limits_{j=1,\ldots,n} \mu^0_j$, L is a positive integer such that $1 - \chi - (L-1)\mu^0_{min} \geq \sigma > 1 - \chi - L\mu^0_{min}$. Then for any function $f \in \mathfrak{L}_{p,\sigma,L}(\mathbb{R}^n_+)$ ther is a unique solution $U \in W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$ to the Dirichlet problem (2), (3), and with some constant $C > 0$ the following estimate holds:*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} + \left\| (1 + \rho_{\mathfrak{M}}(x, x_n))^{\sigma + L \max\limits_{j=1,\ldots,I_{n-2}} |\mu^j|} f(x, x_n) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n_+)} \right).$$

REFERENCES

1. *Karapetyan G. A.*, "Integral representation of functions and embedding theorems for n-dimensional multianisotropic spaces with one vertex of anisotropicity," Sib. Math. J., **58**, No. 3, 445–460 (2017).
2. *Demidenko G. V.*, "Integral operators defined by quasi-elliptic equations II," Sib. Math. J., **35**, No. 1, 41–65 (1994).

THE PHASE PORTRAITS OF THE GENE NETWORK MODELS

Kirillova N. E.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; kne@math.nsc.ru

We consider the following dynamical system as a model of circular gene network:

$$\dot{x}_j = L_j(x_{j-1}) - k_j x_j,\ j = 1,5,8; \quad \dot{x}_j = \Gamma_j(x_{j-1}) - k_j x_j,\ j = 2,3,4,6,7,9. \qquad (1)$$

Here, monotonically decreasing functions L_j and monotonically increasing functions Γ_j are smooth and describe negative, respectively, positive feedbacks in the gene network, $x_j(t)$ are concentrations of the proteins and corresponding mRNAs, the positive constants k_j characterize the rates of degradation and synthesis of proteins and mRNAs, see [1, 2]. We assume that $j-1=9$ for $j=1$. Similarly, one can study n-dimensional systems of the type (1) with an arbitrary order of the equations with the functions L_j, Γ_j, we denote these systems by $\{L\Gamma\}$.

For the system (1), let $A_j := \frac{L_j(0)}{k_j}$, if $j = 1,5,8$; and $A_j := \frac{k_j}{k_{j-1}} A_{j-1}$, if $j \neq 1,5,8$; $Q^9 := \prod_{j=1}^{j=9}[0, A_j] \subset \mathbb{R}^9_+$.

Lemma 1. *Q^9 is a positively invariant domain of the system* (1).

Lemma 2. *The system* (1) *has a unique equilibrium point $S_0 \in Q^9$.*

The hyperplanes parallel to the coordinate ones and containing $S_0 = \{x_1^0, \dots, x_9^0\}$ subdivide Q^9 to 2^9 blocks; as in [1,3], we enumerate them by binary multi-indices: $\epsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_9\}$ where $\varepsilon_j = 1$ if for all points of the block $x_j > x_j^0$, otherwise $\varepsilon_j = 0$.

For each pair of adjacent blocks ϵ_1, ϵ_2 the trajectories of the system (1) pass from block to block only in one direction, either $\epsilon_1 \to \epsilon_2$, or $\epsilon_2 \to \epsilon_1$. We say that the block ϵ has valency V if the number of its adjacent blocks ϵ_m such that $\epsilon \to \epsilon_m$ equals V.

Theorem. *If S_0 is a hyperbolic equilibrium point of the system* (1), *then the invariant domain Q^9 contains at least one cycle which travels from block to block according to the diagram composed by blocks with valency* 1:

$$\{000011101\} \to \{000011100\} \to \{100011100\} \to \{110011100\} \to \{111011100\} \to \{111111100\} \to \{111101100\} \to \{111100100\} \to \{111100000\} \to \{111100010\} \to \{111100011\} \to \{011100011\} \to \{001100011\} \to \{000100011\} \to \{000000011\} \to \{000010011\} \to \{000011011\} \to \{000011111\} \to \{000011101\} \to \dots \qquad (2)$$

The diagram (2) shows location of this cycle in the domain Q^9.

For any n-dimesional system of form $\{L\Gamma\}$ when the number of decreasing functions L_j is odd, we elaborate an algorithm of construction of a diagram composed by blocks with the valency 1 similar to (2). If the number of the functions L_j is even then the domain Q^n does not contain blocks with odd valency.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00057).

REFERENCES

1. *Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P., Kazantsev M. V.*, “On existence of cycle in one asymmetric model of molecular repressilator,” Numer. Analysis Appl., **10**, No. 2, 101–107 (2017).
2. *Golubyatnikov V. P., Kazantsev M. V., Kirillova N. E., Bukharina T. A.*, “Mathematical and numerical models of two asymmetric gene networks,” Sib. Electron. Math. Reports, **15**, 1271–1283 (2018).
3. *Golubyatnikov V. P., Kirillova N. E.*, “On cycles in models of circular gene networks functioning” (Russian), Sib. Zh. Chist. Prikl. Matem., **18**, No. 1, 54–63 (2018).

APPLICATION OF INTERPOLATION DIFFERENCE SCHEMES OF A HIGH ORDER FOR ELECTROMAGNETIC PROBLEMS

Kravchenko O. V.[1], **Egorov D. P.**[2], **Diaz M. A.**[3]

[1]*Federal Research Center “Computer Science and Control” RAS, Moscow, Russia;*
olekravchenko@gmail.com
[2]*Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics RAS, Moscow, Russia;*
egorov.dp@ntcup.ru
[3]*Institut Jean Le Rond d'Alambert, Sorbonne Université, CNRS, Paris, France;*
manuel.ade@gmail.com

Recently the difference schemes of interpolation type were applied to simulate electromagnetic waves propagation both in homogeneous and inhomogeneous media. These schemes are based on a constrained interpolation profile (CIP) method [1] which is based on the Hermite interpolation in space. This allows developing the difference schemes of upwind type of a high order by increasing the order of derivatives taken into account. The main advantage of CIP approach is increased stability in comparison with the original finite-difference time domain technique (FDTD). In addition, the CIP method allows to resolute discontinuous solution more accurate. It has the most impact in the case of dispersive media or in the case of composite media with different properties [2].

In the present paper a scope of difference schemes of CIP type has been considered. These schemes were derived on an extended stencil. It has been shown that the CIP schemes didn't produce significant oscillations in simulation of the Maxwell equations as far as the FDTD method was obtained to generate the oscillations. A comparison between CIP and FDTD approaches on the example of simulation of the electromagnetic wave propagation in the dispersive medium has been conducted. It has been obtained that the CIP calculations of the fifth order approximate a discontinuity more accurate than the calculations of the third order; at the same time the difference between CIP calculations of the fifth and nine orders is insignificant. All considered CIP schemes were shown to give more accurate and less oscillatory numerical solutions than the FDTD scheme. In addition, the resonant peaks were approximated with appropriate accuracy in the case of material contrast to background medium.

REFERENCES

1. *Okubo K., Takeuchi N.*, “Analysis of an electromagnetic field created by line current using constrained interpolation profile method,” IEEE Trans. Antennas Propag., **55**, No. 1, 111–119 (2007).
2. *Maeda H.*, “Numerical technique for electromagnetic field computation including high contrast composite material,” in: Optical Communication, IntechOpen, 2012, pp. 41–54.

USING THE GODUNOV METHOD FOR NUMERICAL SIMULATION OF INTERACTING GALAXIES ON MASSIVE-PARALLEL SUPERCOMPUTERS

Kulikov I. M.

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia; kulikov@ssd.sscc.ru

Implementation of a new vectorized high-order accuracy numerical method for solving gravitational hydrodynamics equations on massive-parallel supercomputers equipped with Intel Xeon Phi accelerators is presented in the paper. Combination of the Godunov method, the Harten–Lax–Van Leer method and the piecewise parabolic method on local stencil is at the basis of the method, that allows achieving high-order accuracy for smooth solutions and low dissipation on discontinuities. Numerical experiment results, which describe the mechanism of collision of different types of galaxies, are shown.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-01-00166, 18-07-00757 and 18-41-543012).

WELL-BALANCED SCHEMES VIA FLUX GLOBALIZATION

Kurganov A.

Southern University of Science and Technology, Shenzhen, China;
alexander@sustech.edu.cn

I will present a new method of constructing well-balanced schemes for hyperbolic systems of balance laws. Our approach is based on incorporating the source terms into the fluxes. This leads to flux globalization as the rewritten system becomes a system of conservation–not balance–laws, but with a global flux, which makes it quite complicated to design an upwind scheme. It is not difficult, however, to construct Riemann-problem-solver-free central-upwind and relaxation schemes for the systems with global fluxes.

Our new approach will be demonstrated on several shallow water models (including rotating thermal shallow water equations) and Euler equations with gravitation.

The talk will be based on several recent works [1–4].

REFERENCES

1. *Cheng Y., Chertock A., Herty M., Kurganov A., Wu T.*, “A new approach for designing moving-water equilibria preserving schemes for the shallow water equations,” J. Sci. Comput., **80**, 538–554 (2019).
2. *Chertock A., Cui S., Kurganov A., Özcan Ş. N.*, “Well-balanced schemes for the Euler equations with gravitation: conservative formulation using global fluxes,” J. Comput. Phys., **358**, 36–52 (2018).
3. *Liu X., Chen X., Jin S., Kurganov A., Yu H.*, “Moving-water equilibria preserving partial relaxation scheme for the Saint-Venant system,” SIAM J. Sci. Comput., submitted.
4. *Kurganov A., Liu Y., Zeitlin V.*, “A well-balanced central-upwind scheme for the thermal rotating shallow water equations,” J. Comput. Phys., submitted.

FAST NUMERICAL SOLUTION TO SHALLOW WATER SYSTEM FOR TSUNAMI DANGER EVALUATION

Lavrentiev M. M.[1,2], Lysakov K. F.[1,2], Marchuk An. G.[1,3], Oblaukhov K. K.[2], Shadrin M. Yu.[1,2]

[1]*Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, Russia;* mmlavrentiev@gmail.com
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;* mikesha@sl.iae.nsk.su
[3]*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* mag@omzg.sscc.ru

The problem of timely warning about the danger of nearfield tsunami after the strong offshore earthquake is still unresolved, even if the number of publications is substantional, see, for example, [1]. For the coast of Japan it takes nearly 20 minutes for tsunami wave to approach the nearest dry land after offshore seismic event. Robust evaluation of tsunami wave danger should be based on correct process simulation: wave generation, propagation, and inundation to a dry land. There are several tools to calculate the wave propagation over the real digital bathymetry, see [2–3].

In this paper we study the influence of the exact tsunami source location on maximal wave heights distribution along the nearest shore line. For the typical initial sea bed displacement at tsunami source the large (say, over 10 m) wave heights are localized at rather narrow areas along the coastline. So, for the same seismic event one point at coast could be safe, while the closely located part should be evacuated.

We use Mac-Cormack scheme for numerical treatment of the shallow water system. Specialized "Calculator", based on FPGA (Field-Programmable Gate Array), microchip Xilinx Virtex-7 VC709, was used for numerical tests. The Calculator architecture is described in [4]. The Calculator with a regular modern PC needs 25 sec to simulate wave propagation over the considered water area. The "real" travel time for the wave is evaluated as 3200 sec.

Results of numerical test with real bathymetry at southern part of Japan are presented. Digital bathymetry is based on Japan Oceanographic Data Center (JODC) 500m Gridded Bathymetry Data. Realistic tsunami source approximately 100×200 km was used. As was numerically observed, rather small move of tsunami source (compared to 100 km) change the coastal zone, subject of dangerous tsunami wave amplitude.

The authors were supported by the Russian Federal Targeted Program Grant 14.574.21.0145. Unique project ID – RFMEFI57417X0145.

REFERENCES

1. *Tsushima H., Ohta Y.*, "Review on near-field tsunami forecasting from offshore tsunami data and onshore GNSS data for tsunami early warning," J. Disaster Res., **9**, No. 3, 339–357 (2014).
2. *Giga E., Spillane M., Titov V., Chamberlin C., Newman J.*, "Development of the forecast propagation database for NOAA's short-term inundation forecast for tsunamis (SIFT)," NOAA Technical Memorandum (2008).
3. *Yalciner A. C., Alpar B., Altinok Y., Ozbay I., Imamura F.*, "Tsunamis in the Sea of Marmara: historical documents for the past, models for future," Marine Geology, **190**, No. 1–2, 445–463 (2002).
4. *Lavrentiev M. M., Romanenko A. A., Oblaukhov K. K., Marchuk An. G., Lysakov K. F., Shadrin M. Yu.*, "Implementation of Mac-Cormack scheme for the fast calculation of tsunami wave propagation," Proceedings Oceans'17 MTS/IEEE, Aberdeen (2017).

ON RULES FOR GRID CLUSTERING IN THE ZONES OF BOUNDARY AND INTERIOR LAYERS

Liseikin V. D.[1], **Kudryavtsev A. N.**[2], **Paasonen V. I.**[1], **Karasuljic S.**[3], **Mukhortov A. V.**[4]

[1]*Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia;* liseikin.v@gmail.com, viki48@mail.ru
[2]*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* alex@itam.nsc.ru
[3]*University of Tuzla, Tuzla, Bosnia and Herzegovina;* samir.karasuljic@gmail.com
[4]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;* a.mukhortov@g.nsu.ru

This paper describes new forms of layer-damping functions eliminating singularities of solutions to singularly-perturbed problems and corresponding layer-resolving grids. These functions are constructed by using four basic local transformations $x_i(\xi,\varepsilon,b,k)$, $i=1,2,3,4$, having the following form: $x_1(\xi,\varepsilon,b,k)=-\dfrac{\varepsilon^k}{b}\ln(1-d\xi)$, $k>0$, $b>0$; $x_2(\xi,\varepsilon,b,k)=\varepsilon^k\big((1-d\xi)^{-1/b}-1\big)$, $k>0$, $b>0$; $x_3(\xi,\varepsilon,b,k)=(\varepsilon^{kb}+d\xi)^{1/b}-\varepsilon^k$, $k>0$, $1>b>0$; $x_4(\xi,\varepsilon,b,k)=\varepsilon^k((1+\varepsilon^{-k})^{b\xi}-1)$, $k>0$, $b>0$. The transformation $x_1(\xi,\varepsilon,b,k)$, for $k=1$, was introduced in [1], while the transformations $x_i(\xi,\varepsilon,b,k), i=2,3,4$, were introduced in [2].

The first transformation is aimed at dealing with exponential-type layers only, typically represented by functions $\exp(-bx/\varepsilon^k)$ occurring in problems for which the solutions of reduced ($\varepsilon=0$) problems do not have singularities.The second transformation is aimed at dealing with both exponential- and power-type of kind 1 layers, engendered by a function $\varepsilon^{rk}/(\varepsilon^k+x)^r$, $r>0$, for which the solutions of reduced problems have singularities as well. The third example is aimed at dealing with power-type of kind 2 layers, represented by functions $(\varepsilon^k+x)^r$, $0<r<1$, for which the solutions of reduced problems have singularities. The fourth transformation is aimed at dealing with logarithmic-type layers, represented by functions $\ln(\varepsilon^k+x)/\ln\varepsilon^k$. These transformations are used as reference elements to construct explicitly global layer-damping coordinate mappings $x(\xi,\varepsilon)$ generated via standard procedures of shifting, blending, scaling, inverting, composing, reflecting, and matching them to each other and to polynomials and corresponding layer-resolving grids by the formula $x_i=x(i/N,\varepsilon)$.

It seems that the new layer-resolving grids described in the paper should empower researchers to solve broader and more important classes of problems having not only exponential-, but power-, logarithmic-, and mixed-type boundary and interior layers [3].

The paper also demonstrates applications of such layer-resolving grids and high-order schemes to numerical solutions for certain boundary-value problems having diverse types of boundary and interior layers.

REFERENCES

1. *Bakhvalov N. S.*, “On optimization of the methods of the numerical solution of boundary value problems with boundary layers,” USSR Comput. Math. Math. Phys., **9**, No. 4, 139–166 (1969).
2. *Liseikin V. D.*, Layer Resolving Grids and Transformations for Singularly-Perturbed Problems, VSP, Utrecht (2001).
3. *Liseikin V. D.*, Grid Generation Methods; third edition; Springer, Berlin (2017).

THE STABILIZATION OF THE SOLUTION OF AN INVERSE PROBLEM FOR THE PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Lyubanova A. Sh.[1], **Velisevich A. V.**[2]

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia;
[1]lubanova@mail.ru, [2]velisevich94@mail.ru

In this work we study the stabilization of the strong solution of the inverse problem for the pseudoparabolic equation (Problem 1) to the solution of the appropriate stationary inverse problem (Problem 2) as $t \to +\infty$.

Problem 1. For given functions $f(t,x)$, $U_0(x)$, $\beta(t,x)$, $\omega(t,x)$, $\varphi(t)$ and a constant η find the pair of unknown functions $\{u(t,x), k(t)\}$ satisfying the equation

$$(u - \eta \operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u) + m(x)u)_t - \operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u) + m(x)u + k(t)u = f,$$

the initial data

$$(u - \eta \operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u) + m(x)u)|_{t=0} = U_0(x),$$

the boundary condition

$$u|_{\partial\Omega} = \beta(t,x)$$

and the condition of overdetermination

$$\int_{\partial\Omega} \Big\{\eta \frac{\partial u_t}{\partial \overline{N}} + \frac{\partial u}{\partial \overline{N}}\Big\} \omega(t,x)\,ds = \varphi(t).$$

Here $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with a boundary $\partial\Omega$, $t \in (0,T)$, $\mathcal{M}(x) \equiv (m_{ij}(x))$ is a matrix of functions $m_{ij}(x)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$; $\frac{\partial}{\partial \overline{N}} = (\mathcal{M}(x)\nabla, \mathbf{n})$, $\mathbf{n}$ is the unit vector of the outward normal to the boundary $\partial\Omega$. The operator $M = -\operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + m(x)I$ is supposed to be elliptic and selfadjoint (I is the identity operator).

The stationary inverse problem corresponds to Problem 1 in the case of the steady-state process.

Problem 2. For given functions $f^\infty(x)$, $\beta^\infty(x)$, $\omega^\infty(x)$ and a constant μ^∞ find the pair of function $u^\infty(x)$ and constant k^∞ satisfying the equation

$$-\operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u^\infty) + m(x)u^\infty + k^\infty u^\infty = f^\infty,$$

the boundary condition

$$u^\infty|_{\partial\Omega} = \beta^\infty(x)$$

and the condition of overdetermination

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^\infty}{\partial \overline{N}} \omega^\infty(x)\,ds = \mu^\infty.$$

Under certain assumptions on the input data for Problems 1 and 2, the stabilization of Problem 1 is proved in the sense that $\|u - u^\infty\|_{W_2^2(\Omega)} \to 0$ and $|k(t) - k^\infty| \to 0$ as $t \to +\infty$. Estimates

$$\|u - u^\infty\|_{W_2^2(\Omega)} \le c_1 \exp^{-c_2 t}$$

$$|k(t) - k^\infty| \le c_3 \exp^{-c_2 t}$$

holds with positive constants c_i, $i = 1,2,3$.

Applications of such problems deal with the recovery of unknown parameters indicating physical properties of a medium. In particular, the lowest coefficient k specifies, for instance, the catabolism of contaminants due to chemical reactions or the absorption (also known as potential) in the diffusion and acoustics problems.

GENERALIZED LUBRICATION APPROACH APPLIED TO THE BRETHERTON PROBLEM FOR THE MOTION OF LONG BUBBLES IN TUBES

Lyutskanova-Zhekova G. S.[1,2], **Danov K. D.**[3]

[1]*Sofia University, Sofia, Bulgaria;* g.zhekova@fmi.uni-sofia.bg
[2]*Institute of Mathematics and Informatics of Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria;* g.zhekova@math.bas.bg
[3]*Sofia University, Sofia, Bulgaria;* kd@lcpe.uni-sofia.bg

The problem of motion of axisymmetric long bubble in capillary for small capillary numbers, Ca, is known as the classical Bretherton problem, which is solved for the first time by using asymptotic analysis [1]. Extensions of the solutions, accounting more precisely for the geometry and magnitudes of Ca, are reported in the literature [2, 3]. The hydrodynamic problem in the case of Taylor bubbles is solved numerically, using a CFD-generated database [4].

We developed a generalized second-order lubrication approach and solved the respective hydrodynamic Stokes problems analytically. The solutions give the pressure distributions along the arbitrary bubble surface for the both cases of free surface and tangentially immobile interfaces. Subsequently, the boundary value problem for the shape is solved numerically with initial conditions in the cylindrical part of bubbles, which correspond to the Landau–Levich type solution of the linearized problem. Phase diagrams for the regions of the possible solutions are obtained in terms of system parameters (capillary numbers, flow rates, and Bond numbers). The high accuracy and efficiency of the modeling is achieved, using the Runge–Kutta method of 14^{th} order. The obtained results from our approach are compared with available experimental data for Taylor and rising bubbles. The excellent agreement between theory and experiments and the very fast numerical solution of the boundary value problem make this approach suitable for data processing of more complex systems.

REFERENCES

1. *Bretherton F. P.*, “The motion of long bubbles in tubes,” J. Fluid Mech., **10**, No. 2, 166–188 (1961).
2. *Ratulowski J., Chang H.-C.*, “Transport of gas bubbles in capillaries,” Phys. Fluids, A, **1**, No. 10, 1642–1655 (1989).
3. *Klaseboer E., Gupta R., Manica R.*, “An extended Bretherton model for long Taylor bubbles at moderate capillary numbers,” Phys. Fluids, **26**, No. 3, Article ID 032107 (2014).
4. *Langewisch D.R., Buongiorno J.*, “Prediction of film thickness, bubble velocity, and pressure drop for capillary slug flow using a CFD-generated database,” Int. J. Heat Fluid Flow, **54**, 250–257 (2015).

COMPUTING DEPTH MAP FROM STEREO IMAGES

Malyshev A. N.

University of Bergen, Bergen, Norway; malyshev@math.nsc.ru

A variational model for depth estimation from a pair of stereo images will be presented in the talk as well as a numerical method for computation of the depth map. Depth is inferred by matching the pixels in two images. This is known as the correspondence problem — that is, to determine for each point in one image its corresponding point in the other image. Solution of the correspondence problem is called the disparity map. The depth and disparity maps are related as disparity = focus × camdistance/depth, where camdistance is the distance between two parallel stereo cameras both having the same focus.

Our variational model combines intensity based energy functionals with the total variation regularization. Namely, the model is given by the minimization problem

$$\min_{a \le u(x) \le b} \int_\Omega F(x, u(x))dx + \alpha \int_\Omega |u_x(x)|dx,$$

where the unknown function $u\colon \Omega \to [a,b]$ possesses bounded variation, $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times \dots \times [0, L_n]$ is a rectangular domain in $\mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ is a regularization parameter, $|u_x(x)| = \sqrt{u_{x_1}^2 + \ldots + u_{x_n}^2}$ is the length of the gradient $u_x = [u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}]$.

Proper choice of function $F(x,t)$ allows one to model solutions to many problems of image processing. For example, $F(x_1, x_2, t) = |L(x_1, x_2) - R(x_1 - t, x_2)|$ can be used as a dissimilarity function in computing the disparity map for rectified stereo images $L(x)$ and $R(x)$.

In general, the function $F(x,t)$ is not convex for the variable t, and the above formulated initial minimization problem is not convex too. However, it is possible to prove that its solution $u(x)$ equals $\int_a^b \phi(x,t)dt$, where $\phi(x,t)$ is a solution of the convex minimization problem

$$\min_{\phi,p} \int_{[a,b]\times\Omega} F_t(x,t)\phi(x,t)dxdt + \alpha \int_{[a,b]\times\Omega} |p_1(x,t)|dxdt$$

with the following convex constraints: $p_0 = \phi_t \le 0$, $p_1 = \phi_x$, $\phi(x,a) = 1$, $\phi(x,b) = 0$. Such a convex minimization problem is referred to as a convex relaxation of the initial minimization problem.

The convex relaxation problem can be solved by means of the augmented Lagrangian method combined with the splitting with respect to the variables ϕ and $p = (p_0, p_1)$. The most time and memory consuming part of the algorithm is solution of a three-dimensional Poisson equation for the function $\phi(x,t)$, where $x = (x_1, x_2)$. Note that typical lengths of discretized variables x_1, x_2 and t are 512, 512 and 256 so that only discretization of ϕ requires computer memory equal to a half of Gigabyte. Moreover, the Poisson equation must be solved several dozen or hundred times.

The Poisson equation of moderate size is solved by the fast Poisson solvers based on the fast discrete cosine and sine transforms. The Poisson equation of large size is solved by the so-called narrow band approach, where the solution is computed on a sequence of multiple grids within a narrow band in a vicinity of the true solution. The Poisson equation being discretized in a narrow band is solved by the conjugate gradient method using preconditioning by the fast Poisson solvers.

The variational models and numerical solution can be extended in order to incorporate matching feature points in the images $L(x)$ and $R(x)$.

The author was supported by the Research Executive Agency of the European Commission (project no. 778035 – PDE-GIR – H2020-MSCA-RISE-2017).

THE RIEMANN PROBLEM FOR A WEAKLY HYPERBOLIC TWO-PHASE FLOW MODEL OF A DISPERSED PHASE IN A CARRIER FLUID

Matern C.[1], Hantke M.[2], Warnecke G.[3]

[1] *Otto von Guericke University Magdeburg, Magdeburg, Germany;*
christoph.matern@ovgu.de
[2] *Martin Luther University of Halle-Wittenberg, Halle (Saale), Germany;*
maren.hantke@mathematik.uni-halle.de
[3] *Otto von Guericke University Magdeburg, Magdeburg, Germany;*
gerald.warnecke@ovgu.de

We consider Riemann problems for a two-phase isothermal flow model of a dispersed phase in a compressible carrier phase. It is a weakly hyperbolic system of conservative partial differential equations. This model is the conservation part of a more complete physical model proposed by Hantke et al. [1] which involves phase transitions in case both phases are of the same material. One purpose of this talk is to better understand the mathematical properties of the simplified model. We investigate the characteristic structure of the Riemann problems and show their exact solutions [2]. Solutions may contain delta shocks or vaporless states. We give examples for initial data corresponding to a system of water bubbles dispersed in liquid water. It turns out that, due to the equations of state for the carrier phase, droplets or solid particles in a gas are a mathematically simpler case than gas bubbles or solids in a liquid.

Furthermore, we use Godunov's scheme and construct a new HLL-type Riemann solver to perform numerical simulations on the homogeneous part of the model. In each time step an approximate MUSCL-Hancock finite volume scheme is used in which intercell Riemann problems are solved using the new GHLL-solver [3]. We would also like to present some recent results on numerical simulations of the complete model and different approaches concerning the missing eigenvector of the linearized system.

The authors were supported by the GRK 1554 (Micro-Macro-Interactions of structured Media and Particle Systems).

REFERENCES

1. *Dreyer W., Hantke M., Warnecke G.,* “Bubbles in liquids with phase transition – part 2: on balance laws for mixture theories of disperse vapor bubbles in liquid with phase change,” Contin. Mech. Thermodyn., **26**, No. 4, 521–549 (2014).
2. *Hantke M., Matern C., Ssemaganda V., Warnecke G.,* “The Riemann problem for a weakly hyperbolic two-phase flow model of a dispersed phase in a carrier fluid,” in progress (2019).
3. *Hantke M., Matern C., Warnecke G.,* “Numerical solutions for a weakly hyperbolic dispersed two-phase flow model,” in: Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems I, Springer, Aachen, 2016, pp. 665–675.

ON EXPONENTIAL STABILITY OF SOLUTIONS TO SOME CLASSES OF TIME-DELAY SYSTEMS

Matveeva I. I.[1,2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
matveeva@math.nsc.ru

We consider some classes of nonautonomous time-delay systems

$$\frac{d}{dt}y(t) = f\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right). \tag{1}$$

This paper presents a continuation of our works on stability of solutions to delay differential equations (for example, see [1–7]). We establish conditions under which the zero solution to (1) is exponentially stable. We obtain estimates characterizing exponential decay of solutions to (1) at infinity and estimates for attraction sets of the zero solution. These results are extended to time-delay systems with one time-varying delay and several delays. We use Lyapunov–Krasovskii functionals of special forms.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-29-10086).

REFERENCES

1. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.*, “Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms,” Sib. Math. J., **48**, No. 5, 824–836 (2007).
2. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.*, “On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients,” Sib. Math. J., **55**, No. 5, 866–881 (2014).
3. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.*, “Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays,” Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **2015**, No. 83, 1–22 (2015).
4. *Matveeva I. I.*, “On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems,” Sib. Math. J., **58**, No. 2, 264–270 (2017).
5. *Matveeva I. I.*, “On the exponential stability of solutions of periodic systems of the neutral type with several delays,” Differ. Equations, **53**, No. 6, 725–735 (2017).
6. *Matveeva I. I.*, “Estimates of exponential decay of solutions to linear systems of neutral type with periodic coefficients” (Russian), Sib. Zh. Ind. Mat., **22**, No. 3, 96–103 (2019).
7. *Matveeva I. I.*, “On exponential stability of solutions to linear periodic systems of neutral type with time-varying delay” (Russian), Sib. Electron. Math. Reports, **16**, 748–756 (2019).

LOCALIZATION OF INFORMATIVE POINTS OF MEDICAL SIGNALS WITH CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM

Mishchenko E. V.[1], **Vozhdaeva D. A.**[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* eugenia-m@academ.org
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;* daria-vozhdaeva@yandex.ru

The subject of the research is application of the continuous wavelet transform [1] for localization of the informative points (extrema and inflection points) for signals of medical nature (pulse wave).

Some assertions which state the connection between extremum/inflection points and zeros of wavelet coefficients of signals were proven. A numerical algorithm to find extremum/inflection points based on these assertions was elaborated, realized, tested on some model signals and then applied to analysis of pulse waves.

The elaborated algorithm showed its efficiency; it possesses certain advantages in comparison to the existed methods [2, 3].

The algorithm was realized in two ways: with the use of standard functions in Matlab and with the use of Python. The first variant shows that the Haar wavelet (respectively, the Gauss wavelet) is more effective for the search of extrema (inflection points). The second realization has better accuracy of informative points localizaton due to appropriate choice of algorithm parameters.

REFERENCES

1. *Chui C. K.*, An Introduction to Wavelets, Academic Press, San Diego (1992).
2. *Antoshchuk S. G., Nikolenko A. A.*, “On extremum searching method under hindranced conditions” [in Russian], Radio Electronics, Computer Science, Control, No. 2, 43–47 (2005).
3. *Boronoyev V. V., Rinchinov O. S.*, “Methods of spline approximation in the problem of amplitude-time analysis of a pulse wave,” Radiophys. Quantum Electron., **41**, No. 8, 706–715 (1998).

MODELLING GEOPHYSICAL FLOWS UNDER SHALLOW HYPOTHESIS

Morales de Luna T.[1], **Castro M. J.**[2], **Escalante C.**[3], **Fernández-Nieto E. D.**[4]

[1] *University of Córdoba, Córdoba, Spain;* tomas.morales@uco.es
[2] *University of Málaga, Málaga, Spain;* castro@anamat.cie.uma.es
[3] *University of Málaga, Málaga, Spain;* escalante@uma.es
[4] *University of Seville, Sevilla, Spain;* edofer@us.es

Shallow water type models have been successfully applied to many real life situations for the simulation of geophysical flows: river floods, sediment transport, tsunami modelling, etc. Although these models are based on an averaged process on the vertical direction, recent techniques based on a multilayer approach allows to overcome this simplification and to better describe the flow and vertical effects therein.

Nevertheless, such models are based on the assumption of hydrostatic pressure. In recent years there has been an increasing interest on including the so-called dispersive or non-hydrostatic effects into the model.

We propose here to study non-hydrostatic shallow water type systems. We propose first to study a one layer depth-integrated non-hydrostatic system [1]. An efficient numerical scheme will be proposed in order to solve such system. The dispersive relations of the system can be improved by extending the system to two or several layers [2], where again we will focus on the efficient algorithms that will allow us to solve the system for real life applications.

Finally, non-hydrostatic shallow models will be adapted for the simulation of sediment transport [3], where such effects may have an important impact onto the sediment layer.

The authors were supported by the by the Spanish Government and FEDER (projects no. MTM 2015-70490-C2-1-R and MTM 2015-70490-C2-2-R).

REFERENCES

1. *Escalante C., Morales de Luna T., Castro M. J.*, "Non-hydrostatic pressure shallow flows: GPU implementation using finite volume and finite difference scheme," Appl. Math. Comput., **338**, 631–659 (2018).
2. *Escalante C., Fernández-Nieto E. D., Morales de Luna T., Castro M. J.*, "An efficient two-layer non-hydrostatic approach for dispersive water waves," J. Sci. Comput., **79**, No. 1, 273–320 (2019).
3. *Escalante C., Fernández-Nieto E. D., Morales de Luna T., Narbona-Reina G.*, "A two-layer shallow water model for bedload sediment transport: convergence to Saint-Venant-Exner model," arXiv:1711.03592 (2017).

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF POSITIVE SOLUTIONS OF SINGULAR ELLIPTIC QUASILINEAR PROBLEMS WITH KPZ-NONLINEARITIES IN UNBOUNDED CYLINDRICAL DOMAINS

Muravnik A. B.

JSC "Concern "Sozvezdie", Voronezh, Russia; amuravnik@yandex.ru

Consider the problem

$$\Delta u + \frac{\alpha}{u}|\nabla u|^2 - a(x')u^p = 0,\ x' := (x_1, \dots, x_n) \in \Omega,\ x_{n+1} \geq 0, \tag{1}$$

$$u^\alpha \frac{\partial u}{\partial n} = 0,\ x' \in \partial\Omega,\ x_{n+1} \geq 0, \tag{2}$$

where Ω is a bounded domain with a Lipschitz boundary in $\mathbb{R}^n$, a is a measurable, bounded, and nonnegative function, $\int\limits_\Omega a(x')dx' > 0$, $-1 < \alpha \neq 0$, and $p > 1$.

The following assertion is presented.

Theorem. *If $u(x)$ is a positive solution of problem* (1)–(2), *satisfying the limit relation* $\lim\limits_{x_{n+1}\to\infty} \dfrac{1}{x_{n+1}} \int\limits_\Omega u^{\alpha+1}(x')dx' = 0$, *then* $\lim\limits_{x_{n+1}\to\infty} x_{n+1}^{\frac{2(\alpha+1)}{p-1}} u^{\frac{1}{\alpha+1}}(x)$ *exists for each x' from Ω, this limit is uniform with respect to x' from Ω, and this limit is equal either to zero or to* $\left(\dfrac{2(2\alpha+p+1)\mathrm{mes}\Omega}{(\alpha+1)^2 \int\limits_\Omega a(y)dy\,[(\alpha+1)a(x')-1]^2}\right)^{\frac{\alpha+1}{p-1}}$.

The *semilinear* case, i. e., the case where $\alpha = 0$, is investigated in [1].

The considered *quasilinear* term arises in various applications (see, e. g., [2] and references therein) and is important from the purely theoretical viewpoint because the second power of the first derivative of the desired function is the limit case in a way: this is the greatest power such that Bernstein-type conditions for the corresponding elliptic problem provide the presence of a priori L_∞-estimates for first-order derivatives of the solution via the L_∞-norm of the solution itself (see, e. g., [3–5]).

The author was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on the program to improve the competitiveness of Peoples' Friendship University (RUDN University) among the world's leading research and education centers in the 2016–2020, by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00401), and by the President Grant for the Government Support of the Leading Scientific Schools of the Russian Federation (no. 4479.2014.1).

REFERENCES

1. *Kondratiev V. A., Véron L.*, "Asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations," Asymptotic Anal., **14**, No. 2, 117–156 (1997).
2. *Muravnik A. B.*, "On absence of global positive solutions of elliptic inequalities with KPZ-nonlinearities," Complex Var. Elliptic Equ., **64**, No. 5, 736–740 (2019).
3. *Amann H., Crandall M. G.*, "On some existence theorems for semi-linear elliptic equations," Indiana Univ. Math. J., **27**, 779–790 (1978).
4. *Kazdan J. L., Kramer R. J.*, "Invariant criteria for existence of solutions to second-order quasilinear elliptic equations," Commun. Pure Appl. Math., **31**, No. 5, 619–645 (1978).
5. *Pokhozhaev S. I.*, "On equations of the form $\Delta u = f(x, u, Du)$" (Russian), Mat. Sb., N. Ser., **113(155)**, No. 2(10), 324–338 (1980).

ADAPTIVE MULTI-RESOLUTION INTERFACE METHOD FOR THREE DIMENTIONAL REACTING FLOW

Ni G.[1], **Ying W.**[2], **Ma W.**[2], **Xiao M.**[1], **Niu X.**[1]

[1]*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China;*
gxni@iapcm.ac.cn, nixiaomini08@yeah.net,niuxiao17@gscaep.ac.cn
[2]*Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China;*
wying@sjtu.edu.cn,jamesmwh@sjtu.edu.cn

In this work, the Euler equations with chemical reaction is solved in Euler grids, we illustrate an adaptive multi-resolution method for reactive multifluids with sharp interface. Pyramid data structure is used in the adaptive multi-resolution technique for efficiency, a conservative interface method is obtained by updating both reactive and unreactive fluids individually, and the detonation and the deflagration interface is captured by the level set method and the ghost fluid method, small cut cells are treated as that in the previous work of N. A. Adams and X. Y. Hu [2]. To get the numerical fluxes across the reactive interface, Riemann problems for reactive fluids are considered [1, 4]. With the help of adaptive multi-resolution algorithms, the method achieves high accuracy with more details and high computational efficiency. The adaptive MR method for reacting fluid can be extended to high dimension conveniently and general equation of states [3, 5]. Numerical examples in two or three-dimension are carried out to demonstrate the potential and robustness of this method.

REFERENCES

1. *Fedkiw R. P., Aslam T., Xu Sh.,* “The ghost fluid method for deflagration and detonation discontinuities,” J. Comput. Phys., **154**, No. 2, 393–427 (1999).
2. *Hu X. Y., Khoo B. C., Adams N. A., Huang F. L.,* “A conservative interface method for compressible flows,” J. Comput. Phys., **219**, No. 2, 553–578 (2006).
3. *Ni G. X., Jiang S., Wang S. H.,* “A remapping-free, efficient Riemann-solvers based, ALE method for multi-material fluids with general EOS,” Comput. Fluids, **71**, 19–27 (2013).
4. *Zhenhuan T., Chorin A. J., Liu T. P.,* “Riemann problems for reacting gas, with applications to transition,” SIAM J. Appl. Math., **42**, No. 5, 964–981 (1981).
5. *Zeng X. Y., Xiao M., Ni G. X.,* “An efficient numerical method for reactive flow with general equation of states,” Int. J. Numer. Methods Fluids, **82**, No. 10, 631–645 (2016).

GLOBAL EXISTENCE AND NONEXISTENCE FOR A CLASS OF FOURTH ORDER PARABOLIC EQUATIONS WITH STRAIN AND VISCOUS TERMS

Niu Y., Zheng Y.

Shandong Normal University, Jinan, China; niuyi@sdnu.edu.cn

This paper deals with the initial boundary value problem for a class of fourth order parabolic equations with the nonlinear strain term and viscous damping term. Through analyzing the initial space of the proposed equations, the initial data which belong to three different spaces at the same time are divided into subcritical, critical and supercritical initial energy levels from potential well method. For the subcritical and critical initial energy levels, the global existence, asymptotic behavior and blow up in finite time of solutions are obtained by Galerkin approximation and the concave method. Furthermore, the global nonexistence solution is revealed at supercritical initial energy level.

The authors were supported by the National Natural Science Foundation of China [No. 61572300; No. 81871508; No. 61773246], the Taishan Scholar Program of Shandong Province of China [No. TSHW201502038] and the Major Program of Shandong Province Natural Science Foundation [No. ZR2018ZB0419].

MORPHOLOGY OF GE QUANTUM DOTS ARRAYS ON PREPATTERNED SI SUBSTRATES – MOLECULAR DYNAMICS SIMULATIONS

Novikov P. L.[1,2], **Pavsky K. V.**[1,2], **Baranov A. A.**[2], **Dvurechenskii A. V.**[1,2]

[1]*Rzhanov Institute of Semiconductor Physics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
novikov@isp.nsc.ru, pkv@isp.nsc.ru
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
anatolij.baranov.a@gmail.com

Creation of space-arranged arrays of semiconductor quantum dots is a challenge in the field of material science [1–3]. These arrays can be formed by growth on prepatterned substrates. At present time mechanism of atomic surface diffusion and nucleation of 3D islands in grooves and pits, strain in prepatterned substrates and non-equilibrium distribution of chemical potential are not studied. The suitable method to solve such kind of problems is molecular dynamics simulations (MD).

In the present work the arrays of Ge nanoislands on Si prepatterned substrates are studied by MD simulations. Morphologies with more than one nanoisland per a pit were considered. In particular, substrates with square-shaped pits, crossing at their conners, were studied. Conditions are determined, at which thermodynamically favorable morphology is the one with nanoislands either at pit bottoms or at edges, respectively.

The search of the nearest neighbors for each atom of Ge/Si heterostructure occupies up to 95 % of computing time in MD simulations. Parallel algorithms of neighbor search in a mesh of atoms were developed and realized for computing systems (CS) with shared and distributed memory using Verlet lists [4] in MPI and OpenMP standards. Efficiency of their performance on CS is shown.

The authors were supported by Presidium of Russian Academy of Science (grant no. 0306-2018-0012) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-41-540005).

REFERENCES

1. *Zhong Zh., Bauer G.,* "Site-controlled and size-homogeneous Ge islands on prepatterned Si (001) substrates," Appl. Phys. Lett., **84**, No. 11, 1922–1924 (2004).
2. *Leite M. S. et al.,* "Evolution of thermodynamic potentials in closed and open nano-crystalline systems: Ge-Si:Si(001) islands," Phys. Rev. Lett., **100**, No. 22, Article ID 226101 (2008).
3. *Jovanovic V. et al.,* "n-Channel MOSFETs fabricated on SiGe dots for strain-enhanced mobility," IEEE Electron Device Lett., **31**, No. 10, 1083–1085 (2010).
4. *Verlet L.,* "Computer "Experiments" on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard–Jones molecules," Phys. Rev., **159**, 98–103 (1967).

VIBRATIONS OF A MICROELECTROMECHANICAL RESONATOR OF THE PLATFORM TYPE MADE OF POWER-LAW MATERIALS

Nurakhmetov D. B.[1], Skrzypacz P. S.[2], Wei D.[3]

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Republic of Kazakhstan;
[1]dauletkaznu@gmail.com, [2]piotr.skrzypacz@nu.edu.kz,
[3]dongming.wei@nu.edu.kz

We study the vibrations of a microelectromechanical resonator of the platform type made of nonlinear materials. The design of such micro-resonator was proposed by E. G. Kostsov and S. I. Fadeev [1–3]. In contrast to their works, we consider in our model the micro-cantilever beam made of a power-law material. The sufficient conditions for the existence of periodic solutions to the lumped model equation are proved analytically and verified numerically by ODE solvers.

The authors were supported by the Nazarbayev University ORAU grant "Modeling and Simulation of Nonlinear Material Structures for Mechanical Pressure Sensing and Actuation Applications".

REFERENCES

1. *Kostsov E. G., Fadeev S. I.*, "New microelectromechanical cavities for gigahertz frequencies," Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, **49**, No. 2, 204–210 (2013).
2. *Kostsov E. G., Fadeev S. I.*, "On the functioning of a VHF microelectromechanical resonator" (Russian), Sib. Zh. Ind. Mat., **16**, No. 4, 75–86 (2013).
3. *Fadeev S. I., Kostsov E. G., Pimanov D. O.*, "Study of the mathematical model for a microelectromechanical resonator of the Platform type" (Russian), Computational Technologies, **21**, No. 2, 63–87 (2016).

ON APPROXIMATION OF ENTROPY SOLUTIONS TO ANISOTROPIC NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS

Panov E. Yu.

Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russia; Eugeny.Panov@novsu.ru

We study the Cauchy problem for a degenerate parabolic equation

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} (f_i(u)_{x_i} - g_i(u)_{x_i x_i}) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{T}^n), \tag{1}$$

where $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ is an n-dimensional torus. The flux functions $f_i(u) \in C(\mathbb{R})$ are supposed to have bounded variation in any segment while the diffusion functions $g_i(u)$ are continuous nondecreasing functions. In the case when $g_i(u) \equiv 0$ equation (1) reduces to a multidimensional conservation law

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} f_i(u)_{x_i} = 0. \tag{1a}$$

We can represent the flux functions $f_i(u)$, $i = 1, \dots, n$, as the differences $f_i(u) = f_i^+(u) - f_i^-(u)$ of nondecreasing functions. For a fixed $\varepsilon > 0$ we introduce the nondecreasing functions $h_{\varepsilon i}^\pm(u) = f_i^\pm(u) + \frac{1}{\varepsilon} g_i(u)$ and define the approximate solution $u = u(t,x;\varepsilon)$ of (1) as a solution of ODE

$$\dot{u} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} [h_{\varepsilon i}^+(u(t, x - \varepsilon e_i)) + h_{\varepsilon i}^-(u(t, x + \varepsilon e_i))$$

$$-h_{\varepsilon i}^+(u(t,x)) - h_{\varepsilon i}^-(u(t,x))], \quad u(0) = u_0, \tag{2}$$

considered in the Banach space $L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Here e_i, $i = 1, \dots, n$, is the standard basis in $\mathbb{R}^n$.

Theorem. *There exists a unique solution $u(t,x;\varepsilon) \in C^1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{T}^n))$ of problem* (2). *Moreover, $\|u(t,\cdot,\varepsilon)\|_\infty \le \|u_0\|_\infty$, and the map $u_0 \to u(t,\cdot,\varepsilon)$ is monotone and nonexpansive in $L^1(\mathbb{T}^n)$. As $\varepsilon \to 0$ the approximate solutions $u(t,x;\varepsilon) \to u(t,x)$ in $C(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{T}^n))$, where $u(t,x)$ is a unique entropy solution of problem* (1) *in the sense of* [1, 2].

In the isotropic case $g_i = g(u)$, $i = 1, \dots, n$, the presented results were established in [3], for conservation laws (1a) see the earlier paper [4].

The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 18-01-00258-a).

REFERENCES

1. *Carrillo J.*, “Entropy solutions for nonlinear degenerate problems,” Arch. Ration. Mech. Anal., **147**, No. 4, 269–361 (1999).
2. *Chen G.-Q., Perthame B.*, “Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations,” Ann. Inst. Henri Poincaré, **20**, No. 4, 645–668 (2003).
3. *Abreu E., Colombeau M., Panov E. Yu.*, “Approximation of entropy solutions to degenerate nonlinear parabolic equations,” Z. Angew. Math. Phys., **68**, No. 6, Article ID 133 (2017).
4. *Abreu E., Colombeau M., Panov E. Yu.*, “Weak asymptotic methods for scalar equations and systems,” J. Math. Anal. Appl., **444**, No. 2, 1203–1232 (2016).

SHTC EQUATIONS AS HAMILTONIAN MECHANICS

Pavelka M.[1], **Peshkov I. M.**[2]

[1] *Charles University, Prague, Czech Republic;* pavelka@karlin.mff.cuni.cz
[2] *Paul Sabatier University, Toulouse, France;* peshenator@gmail.com

We discuss Hamiltonian structure of the Symmetric Hyperbolic Thermodynamically Compatible (SHTC) formulation for continuum mechanics [3] which originates from the work [7] by S. K. Godunov. By transformation to the Eulerian frame, the Poisson bracket for the reversible part of the unified formulation of continuum fluid and solid mechanics [1] in the SHTC framework is derived, which expresses kinematics of the density, momentum density, entropy density and distortion field (inverse deformation gradient). The reversible part of the model is thus Hamiltonian. In particular, it fulfills Jacobi identity, which expresses self-consistency of the model (geometric, hyperbolicity, invariance). Finally, we show the Lie-algebraic [2] structure of the Poisson bracket, which leads to a natural generalization by means of semidirect product. The geometric and Hamiltonian structure of the reversible part of the model will be demonstrated.

Moreover, the irreversible part of the SHTC equations is usually constructed as algebraic dissipation (not involving any spatial gradients). The dissipation can be seen as a realization of gradient dynamics generated by a dissipation potential [3, 4]. This paves a way to introducing fluctuations to the model [5].

In summary, the reversible part of the SHTC model is Hamiltonian and the irreversible part represents gradient dynamics. The model can be thus consistently incorporated into the framework of General Equation for Non-Equilibrium Reversible-Irreversible Coupling (GENERIC) [4, 6].

This is a joint work with Miroslav Grmela and Evgeniy Romenski.

The authors were supported by Czech Grant Agency (project no. 17-15498Y), Multiscale Non-equilibrium Thermodynamics and by ANR-11-LABX-0040-CIMI within the program ANR-11-IDEX-0002-02.

REFERENCES

1. *Dumbser M., Peshkov I. M., Romenski E. I., Zanotti O.,* “High order ADER schemes for a unified first order hyperbolic formulation of continuum mechanics: viscous heat-conducting fluids and elastic solids,” J. Comput. Phys., **314**, 824–862 (2016).
2. *Arnold V. I.,* “Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimensioninfini et ses applications dans l’hydrodynamique des fluides parfaits,” Ann. Inst. Fourier, **16**, No. 1, 319–361 (1966).
3. *Peshkov I. M., Pavelka M., Romenski E. I., Grmela M.,* “Continuum mechanics and thermodynamics in the Hamilton and the Godunov-type formulations,” Contin. Mech. Thermodyn., **30**, No. 6, 1343–1378 (2018).
4. *Pavelka M., Klika V., Grmela M.,* Multiscale Thermo-Dynamics, de Gruyter, Berlin (2018).
5. *Mielke A., Peletier M. A., Renger D. R. M.,* “On the relation between gradient flows and the large-deviation principle, with applications to Markov chains and diffusion,” Potential Anal., **41**, No. 4, 1293–1327 (2014).
6. *Öttinger H. C.,* Beyond Equilibrium Thermodynamics, John Wiley & Sons, New Jersey (2005).
7. *Godunov S. K.,* “An interesting class of quasilinear systems”, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **139**, No. 3, 521–523 (1961).

MATHEMATICAL MODELING OF HETEROGENEOUS MEDIA WITH SMALL-SCALE FRACTURING

Perepechko Yu. V.[1], **Romenski E. I.**[2], **Reshetova G. V.**[3]

[1] *V. S. Sobolev Institute of Geology and Mineralogy SB RAS, Novosibirsk, Russia;* perep@igm.nsc.ru

[2] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* evrom@math.nsc.ru

[3] *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* kgv@nmsf.sscc.ru

This work presents a model of a saturated porous medium in the presence of small-scale fracturing described in the continual approximation. Petroleum reservoirs in shale rocks represent a relevant example of systems characterized by the anomalous properties of media they are composed. Small-scale fracturing is one of the important features of shale rocks, leading to a strong variation of their rheological properties. An adequate model of shale reservoirs may be a model of multiphase flow in viscous-plastic fractured-porous matrices. In this work, the description of the heterogeneous media is based on the method of thermodynamically compatible systems of conservation laws [1], ensuring the hyperbolicity and divergence form of the governing equations of the model and application of effective high accuracy numerical methods developed for solving systems of hyperbolic equations [2]. The introduction of an additional parameter of state characterizing the small scale fracturing [3] allows taking into account the dependence of kinetic and thermodynamic parameters on the pressure and stress tensor in fractured porous medium and the mutual dependence of the volume fractions of the multiphase medium and stress field. The proposed model allows studying the flows of multiphase mixtures in fractured-porous medium and its influence on the evolution of small-scale fracturing. The work also considers the propagation of acoustic waves in a rheologically nonlinear saturated porous medium described by the proposed model.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-29-15131).

REFERENCES

1. *Godunov S. K., Romenskii E. I.,* Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2003).
2. *Perepechko Yu. V., Romenski E. I., Reshetova G. V.,* "Modeling of multiphase flows in finite-deformed porous media," 11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, ECCM 2014, 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD 2014, 4630–4641 (2014).
3. *Resnyansky A. D., Romensky E. I., Bourne N. K.,* "Constitutive modeling of fracture waves," J. Appl. Phys., **93**, No. 3, 1537–1545 (2003).

TWO-PHASE COMPUTATIONAL MODEL FOR SMALL AMPLITUDE WAVE PROPAGATION IN A SATURATED POROUS MEDIUM

Romenski E. I.[1], Reshetova G. V.[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* evrom@math.nsc.ru
[2]*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* kgv@nmsf.sscc.ru

The new two-phase model for a compressible fluid flow in deforming porous media is presented. The derivation of the model is based on the symmetric hyperbolic thermodynamically compatible systems theory, which is developed with the use of the first principles and fundamental laws of thermodynamics. The proposed model is an extension of the unified model of continuum mechanics proposed in [1]. The governing PDEs form the first order hyperbolic system and can be used for studying a wide variety of processes in saturated porous media, including small amplitude wave propagation. The theory predicts the three types of waves: fast and slow pressure waves and a shear wave, as it is in Biot's model. The material constants of the model are fully determined by the properties of the solid and the fluid phases, and unlike Biot's model do not contain empirical parameters. The governing PDEs for small amplitude wave propagation in a saturated porous medium are presented, and the efficient numerical method has been developed for solving these PDEs, based on the finite difference staggered-grid scheme of fourth order spatial accuracy with modified coefficients to provide approximation in inhomogeneous media. An application of the developed computational framework to solving a series of test problems confirms the robustness and efficiency of the approach presented.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00347).

REFERENCES

1. *Dumbser M., Peshkov I. M., Romenski E. I., Zanotti O.*, "High order ADER schemes for a unified first order hyperbolic formulation of continuum mechanics: viscous heat-conducting fluids and elastic solids," J. Comput. Phys., **314**, 824–862 (2016).

MODELLING OF BONDED ELASTIC STRUCTURES BY A VARIATIONAL METHOD: THEORETICAL ANALYSIS AND COMPUTATIONAL ALGORITHM

Rudoy E. M.[1,2], **Furtsev A. I.**[1]

[1]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
rem@hydro.nsc.ru, al.furtsev@mail.ru

In the framework of two-dimensional elasticity, a problem of a bonded structure of two bodies along a common interface called an adhesive layer is considered. It is assumed that there exists a delamination crack in the adhesive layer. The bodies are clamped on parts of their external boundaries. The structure is in equilibrium under the action of surface forces applied to the rest parts of the external boundaries.

The main objective of the work is to conduct a comprehensive study of the problem of bonded bodies: to construct a mathematical model that adequately describes the bonded structure, taking into account the presence of the delamination crack; derive the boundary conditions and give them a mechanical interpretation; derive the Griffith formula and obtain an analog of the Cherepanov–Rice integral (J-integral); construct a numerical algorithm for solving the problem and prove its convergence; conduct numerical experiments showing the efficiency of the algorithm.

We use a spring type interface model to describe the interaction of bodies. When simulating such an interaction, undesirable effects may occur, such as the mutual penetration of bodies. In order to exclude such nonphysical phenomenon, we impose unilateral conditions on the displacements of bodies in the interaction region. Such conditions are called non-penetration conditions and are defined as a system of equalities and inequalities. In addition, on the whole gluing interface, including the crack, so-called the Treska friction law is imposed, which is an approximation of the Coulomb's friction law. As a result, the model becomes nonlinear, and the area of possible contact of bodies is not known in advance.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-51-50004).

VERY WEAK SOLUTIONS OF WAVE EQUATION FOR LANDAU HAMILTONIAN

Ruzhansky M. V.[1], **Tokmagambetov N. E.**[2]

[1]*Ghent University, Ghent, Belgium;* michael.ruzhansky@ugent.be
[2]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan;* tokmagambetov@math.kz

Here, we study the Cauchy problem for the Landau Hamiltonian wave equation, with time dependent irregular (distributional) electromagnetic field and similarly irregular velocity. For such equations, we describe the notion of a 'very weak solution' adapted to the type of solutions that exist for regular coefficients. The construction is based on considering Friedrichs-type mollifier of the coefficients and corresponding classical solutions, and their quantitative behaviour in the regularising parameter. We show that even for distributional coefficients, the Cauchy problem does have a very weak solution, and that this notion leads to classical or distributional type solutions under conditions when such solutions also exist.

The second author was supported by the Grant of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (no. AP05130994).

STOCHASTIC SIMULATION METHODS IN PHYSICS OF SEMICONDUCTORS

Sabelfeld K. K.

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia; sabelfeld.karl@yahoo.de

In this talk, stochastic numerical methods we have recently developed for simulation of different processes in semiconductor physics are presented. Here we focus mainly on the following problems: (1) annihilation of spatially separate electrons and holes in a disordered semiconductor assuming radiative and nonradiative recombination by tunneling as well as their diffusional mobility, (2) construction of cathodoluminescence maps for a semiconductor with a set of threading dislocations under the assumption of a piezoelectric capture field in the vicinity of dislocations, and (3) solving three-dimensional drift-diffusion-recombination transport equations for excitons with the flux and electron beam induced current evaluation for the imaging of defects and dislocations. These fields attracted considerable experimental and theoretical interest during the past three decades since the optoelectronic properties of technologically important materials have been found to be controlled by the electron-hole recombination dynamics. To simulate the electron-hole transport and recombinations, we used stochastic simulation methods developed in [1, 2].

The governing integro-differential equations for the concentration of electrons $n(\mathbf{r},t)$ and holes $p(\mathbf{r},t)$ have the form [2]

$$\frac{\partial n(\mathbf{r};t)}{\partial t} = D_n \Delta n(\mathbf{r};t) + \mathbf{v}\cdot\nabla n - n(\mathbf{r};t)\int B(|\mathbf{x}|)p(\mathbf{r}+\mathbf{x};t)d\mathbf{x} - \alpha n(\mathbf{r},t)\,p(\mathbf{r},t)$$
$$-n(\mathbf{r};t)\int b_n(|\mathbf{x}|)N^+(\mathbf{r}+\mathbf{x};t)d\mathbf{x}, \tag{1}$$
$$\frac{\partial p(\mathbf{r};t)}{\partial t} = D_p \Delta p(\mathbf{r};t) + \mathbf{v}\cdot\nabla p - p(\mathbf{r};t)\int B(|\mathbf{x}|)n(\mathbf{r}+\mathbf{x};t)d\mathbf{x} - \alpha n(\mathbf{r},t)\,p(\mathbf{r},t)$$
$$-p(\mathbf{r};t)\int b_p(|\mathbf{x}|)[N(\mathbf{r}+\mathbf{x}) - N^+(\mathbf{r}+\mathbf{x};t)]\,d\mathbf{x}. \tag{2}$$

The number of recombination centers N^+ waiting for an electron is reduced when the electron is captured, and increased when the hole is captured:

$$\frac{\partial N^+(\mathbf{r};t)}{\partial t} = -n(\mathbf{r};t)\int b_n(|\mathbf{x}|)N^+(\mathbf{r}+\mathbf{x};t)d\mathbf{x}$$
$$+p(\mathbf{r};t)\int b_p(|\mathbf{x}|)[N(\mathbf{r}+\mathbf{x}) - N^+(\mathbf{r}+\mathbf{x};t)]\,d\mathbf{x}.$$

Here D_n, D_p are the electron and hole diffusion coefficients, $\mathbf{v}$ is a drift velocity vector caused by an external electric field, and the radiative recombination of spatially separate electron-hole pairs is due to tunneling with the rate $B(r) = B_0 \exp(-r/a)$, where r is the distance between electron and hole, and a is a mean tunneling capture distance. The same exponential laws are valid for recombinations with the non-radiative centers $N(\mathbf{r})$. In the equations (1)–(2), α is the diffusional capture rate.

REFERENCES

1. *Sabelfeld K. K.*, Monte Carlo Methods in Boundary Value Problems, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1991).
2. *Sabelfeld K., Brandt O., Kaganer V.*, “Stochastic model for the fluctuation limited reaction-diffusion kinetics in inhomogeneous media based on the nonlinear Smoluchowski equations,” J. Math. Chemistry, **53**, No. 2, 651–669 (2015).

AXIOMATIZATION OF MACHINE ARITHMETICS FOR SPECIFICATION AND VERIFICATION OF THE STANDARD MATHEMATICAL FUNCTIONS

Shilov N. V.[1], **Anureev I. S.**[2], **Bodin E. V.**[2], **Kondratyev D. A.**[2], **Shilova S. O.**[3], **Faifel B. L.**[4]

[1]*Innopolis University, Innopolis, Russia;* `shiloviis@mail.ru`
[2]*A.P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS, Novosibirsk, Russia;* `anureev@iis.nsk.su`, `bodin@iis.nsk.su`, `apple-66@mail.ru`
[3]*Novosibirsk, Russia;* `shilov61@mail.ru`
[4]*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia;* `catstail@yandex.ru`

Research project “Platform-independent approach to formal specification and verification of standard mathematical functions” is aimed onto a development of an incremental combined approach to the specification and verification of the standard mathematical functions like `sqrt`, `cos`, `sin`, etc. Platform-independence means that we attempt to design a relatively simple axiomatization of the computer arithmetic in terms of real, rational, and integer arithmetic (i.e. the fields $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Q}$ of real and rational numbers, the ring $\mathbb{Z}$ of integers) but don't specify neither base of the computer arithmetic, nor a format of numbers' representation. Incrementality means that we start with the most straightforward specification of the simplest easy to verify algorithm in real numbers and finish with a realistic specification and a verification of an algorithm in computer arithmetic. We call our approach combined because we start with a manual (pen-and-paper) verification of some selected algorithm in real numbers, then use these algorithm and verification as a draft and proof-outlines for the algorithm in computer arithmetic and its manual verification, and finish with a computer-aided validation of our manual proofs with some proof-assistant system (to avoid appeals to “obviousness” that are very common in human-carried proofs). In the talk we present axiomatization of the machine arithmetic (fix-point and floating-point) with different modes of rounding, proof of its soundness, and how it is used in platform-independent incremental combined approach for specification and verification of the standard functions `sqrt`, `cos` and `sin` that implement mathematical functions $\sqrt{\ldots}$, cos and sin. (In papers [1–2] axiomatization of the machine arithmetics uses a single rounding mode — gaussian mode to the nearest representable number.)

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00789).

REFERENCES

1. *Shilov N. V., Kondratyev D. A., Anureev I. S., Bodin E. V, Promsky A. V.,* “Platform-independent specification and verification of the standard mathematical square root function,” Model. Anal. Inform. Syst., **25**, No. 6, 637–666 (2018).
2. *Shilov N. V., Faifel B. L., Shilova S. O., Promsky A. V.,* “Towards platform-independent specification and verification of the standard trigonometry functions,” arXiv:1901.03414 (2019).

ON HYPERBOLIC SINGULAR VALUE DECOMPOSITION AND APPLICATIONS

Shirokov D. S.[1,2]

[1]*National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia;*
[2]*Institute for Information Transmission Problems RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia;* dm.shirokov@gmail.com

We present a new formulation [1] of the hyperbolic singular value decomposition (HSVD) [2–4] for an arbitrary complex (or real) matrix without using the concept of hyperexchange matrices and using only the concept of pseudo-unitary (or pseudo-orthogonal) matrices. The new formulation allows us to present an algorithm for computing HSVD in the general case. The new formulation is more natural and useful for some applications. We use it to obtain some new results for the Yang–Mills equations [5].

The author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-71-00010).

REFERENCES

1. *Shirokov D. S.*, "A note on the hyperbolic singular value decomposition without hyperexchange matrices," arXiv:1812.02460 (2018).
2. *Onn R., Steinhardt A. O., Bojanczyk A. W.*, "The hyperbolic singular value decomposition and applications," IEEE Trans. Signal Process., **39**, 1575–1588 (1991).
3. *Zha H.*, "A note on the existence of the hyperbolic singular value decomposition," Linear Algebra Appl., **240**, 199–205 (1996).
4. *Levy B. C.*, "A note on the hyperbolic singular value decomposition," Linear Algebra Appl., **277**, 135–142 (1998).
5. *Shirokov D. S.*, "All constant solutions of SU(2) Yang–Mills equations in Euclidean space $\mathbb{R}^n$," arXiv:1804.04620 (2018).

GLOBAL ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF SINGULAR ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS WITH NONSTANDARD GROWTH

Shmarev S. I.

University of Oviedo, Oviedo, Spain; shmarev@uniovi.es

We present recent results on the higher regularity of solutions of singular elliptic and parabolic equations with nonstandard growth conditions. We consider the homogeneous Dirichlet problem for the equation

$$u_t - \operatorname{div}\left((\epsilon^2 + |\nabla u|^{\frac{p(x,t)-2}{2}})\nabla u\right) = f \quad \text{in } Q_T = \Omega \times (0,T], \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain, $\epsilon \geq 0$ a constant parameter, $p(x,t) : Q_T \mapsto (\frac{2n}{n+2}, 2)$ is a given function. Equations of the type (1) do not admit classical solutions. The solution is understood in a weak sense and its time derivative is a distribution which does not belong to any of the Lebesgue spaces. We find conditions on $\partial\Omega$, $p(x,t)$, $u(x,0)$ and f which guarantee the existence of strong solutions with $u_t \in L^2(Q_T)$ and study their regularity properties. It is shown that under certain conditions on the data the problem admits solutions with $D^2_{x_i x_j} u \in L^{p(\cdot)}(Q_T) \cap L^2(Q_T \cap \{t > \delta\})$, $u_t \in L^2(Q_T)$ and $|\nabla u| \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$. Moreover, the time derivative may be Hölder or Lipschitz-continuous.

Similar regularity properties are estabilshed for solutions of the elliptic counterpart of equation (1). The results are partly published in [1–3].

REFERENCES

1. *Antontsev S., Kuznetsov I., Shmarev S.,* “Global higher regularity of solutions to singular $p(x,t)$-parabolic equations,” J. Math. Anal. Appl., **466**, No. 1, 238–263 (2018).
2. *Antontsev S., Shmarev S.,* “Higher regularity of solutions of singular parabolic equations with variable nonlinearity,” Appl. Anal., **98**, No. 1–2, 310–331 (2017).
3. *Shmarev S.,* “On the continuity of solutions of the nonhomogeneous evolution $p(x,t)$-Laplace equation,” Nonlinear Anal., **167**, 67–84 (2018).

MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES IN THE SYSTEM "BLOOD CAPILLARY – INTERSTITIUM – LYMPHATIC CAPILLARY"

Shvab I. V.[1,3], **Nimaev V. V.**[2,3]

[1]*Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia;* Schwab_Irina@mail.ru

[2]*Research Institute of Clinical and Experimental Lymphology SB RAS, Novosibirsk, Russia;* nimaev@gmail.com

[3]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

Metabolic processes are in a constant redistribution of substances between the blood capillary, interstitium and lymphatic capillaries. It is important to build complex models that take into account the interconnection of processes occurring all parts of the microvasculature. It is known that the structure of the wall of the arterial, venous and lymphatic capillaries, as well as the state of the interstitial intercellular matrix, has a significant effect on microcirculatory transport. The interaction of components involved in the system is an important basis for maintaining homeostasis from the point of view of physiologically occurring processes. Changes in their structural and functional properties can be a triggering factor for disturbed fluid balance, the emergence and development of a number of pathological processes, syndromes and diseases.

The paper presents new approach to construction of mathematical models of metabolic processes occurring in microcirculation level. It includes the following interrelated processes: the flow of blood in capillaries and transcapillary exchange, the movement of fluid in the interstices, the exchange of substances between the interstitial fluid and tissue cells, drainage into the lymphatic capillaries. We will consider a system consisting of a blood capillary, tissue surrounding this one and an initial part of lymphatic system of this area with the following processes [1]: blood flow in the blood capillary; filtration and reabsorption of fluid through the wall of the arterial capillary into the surrounding tissue and from this one back to the venous capillary; movement of fluid in the tissue; drainage of fluid from tissue into the lymphatic system. The mathematical model takes into account that microcirculatory processes are influenced by capillary dimensions (radius and length), hydrostatic pressure in the blood capillary at the arterial and venous ends, resulting in oncotic pressure, blood viscosity, hydraulic permeability of the blood capillary wall. The dependence of the lymph drainage on the pressure of the interstitial fluid and the change in volume and pressure of the interstitial fluid after pressure sudden change jump in the capillary were obtained using the proposed model. The presence of lymphatic drainage has been shown reduces pressure in the tissue and leads to an intensification of metabolic processes. Consequently, the lymphatic system makes a significant contribution to the parameters of microcirculation such as the regulation of proteins, the volume and the pressure of the interstitial fluid.

The authors were partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00422).

REFERENCES

1. *Shvab I. V., NimaevV. V.*, "Mathematical modeling of microcirculatory processes", SIBIRCON: Proc. Int. Conf., 531–533 (2017).

INVARIANT SOLUTIONS OF 1D-SYSTEM OF TWO-TEMPERATURE RELAXATION GAS DYNAMICS

Siriwat P.[1], **Grigoryev Yu. N.**[2], **Meleshko S. V.**[3]

[1]*Mae Fah Luang University, Chiang Rai, Thailand;* piyanuch.sir@mfu.ac.th
[2]*Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia;* grigor@ict.nsc.ru
[3]*Institute of Science, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand;* sergey@math.sut.ac.th

In flows of molecular gases behind strong shock waves, in the nozzles of gas-turbines engines or in gas-dynamic lasers, relaxation process associated with the appearance of thermal nonequilibrium of the vibrational degrees of freedom of molecules is observed. If the characteristic time of such a process is commensurable with the characteristic time of the flow, then relaxation can strongly affect the flow characteristics. In this case gas flows are described by a system of equations of two-temperature relaxation gas dynamics. In the one-dimensional formulation with the plane symmetry the system has the next dimensionless form

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad \rho(u_t + uu_x) + \rho_x T + T\rho_x = 0,$$

$$T_t + uT_x + (\gamma - 1)Tu_x + \gamma_v(T - T_\nu) = 0, \quad T_{\nu t} + uT_{\nu x} = T - T_\nu.$$

In the paper a complete group classification of the equations is provided. The admitted Lie group of the system is constructed. The corresponding Lie algebra L_5 defines by the basis generators

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_t,\ X_3 = t\partial_x + \partial_u,\ X_4 = 2T_\nu\partial_{T_\nu} + 2T\partial_T + u\partial_u + x\partial_x,\ X_5 = \rho\partial_\rho.$$

The optimal system of one-dimensional subalgebras of the Lie algebra L_5 consists of the following subalgebras:

$$\{X_1+\beta X_5\},\ \{X_3+\beta X_5\},\ \{X_2+\beta X_5\},\ \{X_3+X_2+\beta X_5\},\ \{X_4+\alpha X_2+\beta X_5\},\ \{X_5\}.$$

The representation of invariant solutions and reduced (factor) systems are obtained for each one-dimensional subalgebra. Some invariant solutions are found in explicit form. All invariant solutions are analyzed and their comparison with the known invariant solutions of the ideal gas dynamics system is presented. The found exact solutions can be used as tests for checking numerical schemes.

APPLICATION OF THE EXACT GEOMETRIC METHOD FOR FINDING COMPLEX ROOTS FOR THE ANALYSIS OF STATIONARY POINTS

Trofimov S. P.

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia; s.p.trofimov@urfu.ru

The exact geometric method [1] for finding the complex roots of polynomials allows us to represent all the roots of a polynomial on one plane. Particularly clearly the method looks like for a cubic polynomial. We briefly describe this method and apply it to the analysis of the optimality of stationary points of a polynomial.

We consider cubic polynomial $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ and show how to solve a cubic equation $f(x) = \Delta$ for any $\Delta \in \mathbb{R}$ and to draw complex and real roots on the same real plane. Let us define two auxiliary functions: conjugate function $f_S(x) = f(-2x - a_1)$, and carrier function $f_N(x) = \pm\sqrt{f'(x)} = \pm\sqrt{3x^2 + 2a_1x + a_2}$. We prove that conjugate function $f_S(x)$ passes through extreme points of $f(x)$, if they exist. Let gluing set S_f is graph of conjugate function $f_S(x)$ except of a closed graph fragment between extreme points of $f(x)$. Algorithm.

1. Find an intersection of graph $y = f(x)$ and line $y = \Delta$. There are two possible cases:
   (a) The intersection consists of 3 points, of which two or three can coincide when the function graph and the line are touched. Then the abscissas z_1, z_2, z_3 of these points are obviously real roots (possibly multiples) of the equation. The algorithm is complete.
   (b) The intersection consists of one point. The abscissa z_1 of this point is the unique real root of the equation. To find other two complex roots, go to step 2.
2. Find an intersection point of line $y = \Delta$ and gluing set S_f. This point is unique. Its abscissa a is real part of complex roots.
3. Find an intersection of vertical line $x = a$ and graph of f_N. This intersection consists of two different points. Their ordinates are equal to $+b$ and $-b$, where $b \geq 0$ and are imaginary components of complex roots.
4. Thus, we have obtained two real numbers a and b, which yield complex conjugate roots of the equation. The algorithm is complete.

This algorithm was obtained with the help of application, which plots graphs of complex functions of a complex variable. Exact geometric algorithm is valid for polynomials with order $n \leq 10$.

Usually, higher order derivatives are used to verify the optimality of stationary points. For this we use the complex roots of the first derivative. The geometric method makes this analysis clear and effective. As a rule, the concept of a local extremum x^* is defined in terms of the values of the function $f(x)$ in the local neighborhood of the point x^*. Instead, we suggest using stationarity property of the point x^* and its behavior under perturbation of the function $f(x)$ by linear functions $\alpha \cdot x$ for small α.

REFERENCES

1. *Trofimov S. P.*, “An algorithm for exact geometric search of polynomials complex roots,” CEUR Workshop Proceedings, **2076**, 130–139 (2018).

QUASILINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL RICCATI-TYPE EQUATIONS

Vaskevich V. L.[1,2], **Scherbakov A. I.**[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* vask@math.nsc.ru
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;* Aishcherbakovn@yandex.ru

Equations under study have the form in which the time derivative of an unknown function is expressed by the linear combination of the function and a double integral over the space variables from the weighted quadratic expression of the same function:

$$\frac{du}{dt}(t,k) = b(t)u(t,k) + k^{\omega} \iint\limits_{P(k)} W(k,k_1,k_2)u(t,k_1)u(t,k_2)dk_1dk_2. \qquad (\mathbf{RTE})$$

Here $k > 0$, $\omega \geq 0$, function $b(t)$ is continuous, and domain $P(k)$ is unbounded. Moreover $P(k)$ does not depend on time, but depends on the spatial variable k. For example the integration domain $P(k)$ may be written as follows

$$P(k) = \{(k_1,k_2) \mid k_2 > k_1 - k, \quad k_2 < k_1 + k, \quad k_1 + k_2 \geq k\}.$$

The properties of solutions to the equation (RTE) are determined by the kernel $W(k,k_1,k_2)$ of the integral operator in the right-hand side, as well as the behavior of the solution $u(t,k)$ as $k \to +0$ and $k \to +\infty$.

It is assumed that the kernel $W(k,k_1,k_2)$ of the equation (RTE) is a continuous function in the first octant of $\mathbb{R}^3$ and

$$\sup_{k \geq 0} \iint\limits_{P(k)} |W(k,k_1,k_2)|\, dk_1dk_2 \leq M < +\infty.$$

We introduce special functional classes associated with the equation under study and consider the Cauchy problem with initial data on the positive semi axis $k > 0$. In application to the Cauchy problem, we consider the method of successive approximations. We found the estimation of the successive approximation quality which depends on the number of the iterated solution.

In [1] integro-differential equations closed to (RTE) were considered and the existence and uniqueness theorems were proved in application to the Cauchy problem with initial data on the positive semi axis.

The authors were partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00422).

REFERENCES

1. *Vaskevich V. L., Scherbakov A. I.,* "Convergence of the successive approximation method in the Cauchy problem for an integro-differential equation with quadratic nonlinearity," Sib. Adv. Math., **29**, No. 2, 128–136 (2019).

ANALYTICAL SOLUTION FOR A PROBLEM OF HELIUM ADSORPTION BY MICROSPHERES AND ITS ANALYSIS

Vereshchagin A. S., Fomin V. M., Zinovyev V. N., Kazanin I. V., Pak A. Yu., Lebiga V. A.

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia; vereshchag@itam.nsc.ru

Membrane-adsorption method of enrichment helium from natural gas is a new approach (patents of RF no. 2161527, 2291740, 2508156) which is based on using hollow microspherical membranes. The microspheres wall is highly selective for gases with a small kinetic radius such as helium. The main driving force of the process is a pressure drop inside and outside of the particle [1].

The main problem of the work is to obtain the adsorbent parameters on the basis of experimental adsorption dependencies [2]. The main idea of it is to divide the adsorption volume into subvolumes by the value of the adsorption rate of a certain subvolume. Each part of adsorption volume has its own unique adsorption rate and a unique saturation time for helium. The aim of the work is the analysis of experimental adsorption dependencies of microspheres or composite adsorbent for obtaining saturation times for each subvolume.

Integrating the equations of the mathematical model [3] analytical solution for the problem of helium adsorption by microspheres under the condition of microspheres parameters dispersed distribution using matrix exponent [4] is acquired. It is shown that time dependency of helium mass in free volume could be decomposed into the sum of harmonics and a constant. Number of harmonics equals to the number of microsphere groups. The harmonics decomposition of experimental data for helium adsorption by microspheres of different type was made. Characteristic times for adsorption process for different microspheres were obtained.

This work was supported by Russian Foundation For Basic Research (project no. 18-41-540012), Complex Program of Fundamental Research SB RAS “Interdisciplinary integration studies” on 2018–2020 years (project no. 0323-2018-0023) and Program of Fundamental Scientific Research of the state academies of sciences in 2013–2020 (project no. AAAA-A17-117030610134-9).

REFERENCES

1. *Vereshchagin A. S.*, “Glass spheres for solar gas,” Science First Hand, **27**, No. 3, 44–49 (2010).
2. *Vereshchagin A. S., Fomin V. M., Zinovyev V. N., Kazanin I. V., Pak A. Yu., Lebiga V. A.*, “Obtaining helium permeability of microspheres on the basis of sorption experimental data,” AIP Conf. Proc., **2027**, Article ID 030130 (2018).
3. *Vereshchagin A. S., Zinoviev V. N., Fomin V. M., Lebiga V. A., Pak A. Yu., Fomina A. F., Kazanin I. V.*, “Mathematical model of permeability of microspheress with allowance for their size distribution,” J. Appl. Mech. Tech. Phys., **54**, No. 2, 88–96 (2013).
4. *Godunov S. K.*, Ordinary Differential Equations with Constant Coefficient (Translations of Mathematical Monographs), American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1997).

A POSITIVITY-PRESERVING PYRAMID SCHEME FOR ANISOTROPIC DIFFUSION PROBLEMS ON GENERAL HEXAHEDRAL MESHES

Wang S.[1], **Hang X.**[2], **Yuan G.**[3]

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China;
[1]`wang_shuai@iapcm.ac.cn`, [2]`hang_xudeng@iapcm.ac.cn`,
[3]`guangwei@iapcm.ac.cn`

Radiation hydrodynamics play an important role in ICF, HDEP. In this paper, a new cell-centered positivity-preserving pyramid scheme (called P^3-scheme) is proposed for anisotropic diffusion problems in radiation hydrodynamics. It can be regarded as a development of the O-scheme [1] for general hexahedral meshes with nonplanar cell-faces. In the P^3-scheme, the flux on the nonplanar cell-face is approximated by the so called effective directional flux. Compared with the O-scheme, the P^3-scheme is much more robust with respect to the distortion of the meshes, and has lower cost in computation and storage, hence suitable for the computation of radiation hydrodynamics problems. Being different from the P-scheme [2], the P^3-scheme is positivity-preserving and can be applied to anisotropic diffusion problems [3]. Numerical results are presented to show the performance of P^3-scheme on various kinds of distorted meshes for problems with continuous and discontinuous diffusion coefficients.

REFERENCES

1. *Wang S., Hang X., Yuan G.*, "A positivity-preserving finite volume scheme for diffusion equations on polyhedral meshes," Math. Numer. Sin., **37**, No. 3, 247–263 (2015).
2. *Wang S., Hang X., Yuan G.*, "A pyramid scheme for three-dimensional diffusion equations on general polyhedral meshes," J. Comput. Phys., **350**, 590–606 (2017).
3. *Wang S., Hang X., Yuan G.*, "A positivity-preserving pyramid scheme for anisotropic diffusion problems on general hexahedral meshes with nonplanar cell faces," J. Comput. Phys., **371**, 152–167 (2018).

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MIXED TYPE EQUATION WITH A SINGULAR COEFFICIENT

Zaitseva N. V.

Kazan Federal University, Kazan, Russia; n.v.zaiceva@yandex.ru

Boundary value problems for mixed type equations are one of the most important topics of the modern theory of partial differential equations. Interest in the degenerate equations is caused not only by the need to solve applied problems, but also by the intense development of the theory of mixed type equations. The first boundary value problem for degenerate partial differential equations of elliptic type with variable coefficients was initially studied in [1]. The research of equations which contains the Bessel differential operator holds a special place in this theory. The study of this class of equations was begun by Euler, Poisson, Darboux. An extensive study of B-hyperbolic equations or hyperbolic equations with Bessel operator is presented in [2]. The boundary value problems for parabolic equations with Bessel operator are studied in the monograph [3], a rather complete review of the papers, devoted to boundary value problems for elliptic equations with singular coefficients is given in monograph [4].

Let $D = \{(x,y)|\, 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$ be a rectangular domain of coordinate plane Oxy, where l, α, β are given positive real numbers, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$. In the domain D we consider the elliptic-hyperbolic equation

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0, \tag{1}$$

where $p \geq 1$ is a given positive real number.

We study the following problem when $p \geq 1$ for equation (1) in the domain D: we need to find function $u(x,y)$ which satisfies the following conditions:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-),$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-,$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\int\limits_0^l x^p u(x,y)\,dx = A = \text{const}, \quad -\alpha \leq y \leq \beta,$$

where A is a given real number, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ are given smooth enough functions.

We establish the uniqueness criterion and prove the solution existence and stability theorems. The solution of the problem was constructed explicitly and proof of convergence of the series in the class of regular solutions was built.

REFERENCES

1. *Keldysh M. V.*, "On some cases of degeneracy of elliptic-type equations on the boundary of a domain," Dokl. Akad. Nauk SSSR, **77**, No. 2, 181–183 (1951).
2. *Carroll R. W., Showalter R. E.*, Singular and Degenerate Cauchy Problems, Academic Press, New York (1976).
3. *Muravnik A. B.*, "Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem," J. Math. Sci., **216**, No. 3, 345–496 (2016).
4. *Katrakhov V. V., Sitnik S. M.*, "The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations" (Russian), Contemporary Mathematics, Fundamental Directions, **64**, No. 2, 211–426 (2018).

PHASE-FIELD MODELS FOR PHASE TRANSITIONS WITH APPLICATIONS TO MATERIALS GENOME INITIATIVE

Zhu P.

Shanghai University, Shanghai, China; pczhu@t.shu.edu.cn

Though Phase-field method is young, it has now emerged as a powerful tool in theoretical and numerical analyses of various phenomena at the meso-scale. In this talk, we are interested in its applications to the Materials Genome Initiative (MGI). Thanks to that advanced materials play an important role in economic and national security and human well-being, then US President Obama launched in 2011 the MGI that is a novel and multi-stakeholder effort so that discovery and deployment of advanced materials can be significantly accelerated while the cost can be considerably reduced. Integrated computation is a key tool of MGI, thus mathematical models are crucial to the success of MGI.

Two new types of phase-field models, with an order parameter that is conserved or not conserved, have been formulated by Alber and the speaker of this talk (see [1–3]), for solid-solid phase transitions driven by configurational forces. They can be applied to describe martensitic phase transitions in, e.g. smart materials like shape memory alloys, and to model sintering which is a process in, for instance, powder metallurgy. Taking as an example, we state our model in the case that the order parameter is not conserved, which reads

$$S_t = -c\,(\psi_S - \nu\Delta_x S)|\nabla_x S|, \tag{1}$$

here $S = S(t, x)$ is the unknown order parameter. ψ_S is the derivative of the free energy function ψ with respect to S. S_t denotes temporal derivative of S, and Δ_x, ∇_x are the Laplacian and gradient operators, respectively. $|\nabla_x S| = (\sum_{i=1}^{3} |\partial_{x_i} S|^2)^{\frac{1}{2}}$. The parameters c, ν are assumed to be positive constants.

Equation (1) differs from the famous Allen–Cahn model by the nonlinear gradient term $|\nabla_x S|$. If the order parameter is conserved, then our model differs, by the term $|\nabla_x S|$, from the Cahn–Hilliard equation. This nonlinear term leads to difficulties of mathematical and numerical studies of these two models. Mathematical investigations (including the existence, regularity of weak/special solutions to initial boundary value problems) and numerical simulations have been carried out by Alber, Fang, Kawashima, Ou, Sheng, Tang, Zhao, Zhu, et al., see, e.g. [1–5]. Some open problems are listed in [5]. Finally we shall also discuss phase-field crystal method which can be regarded as an extension of phase-field approach, and has applications to MGI.

REFERENCES

1. *Alber H. D., Zhu P.,* "Solutions to a model with non-uniformly parabolic terms for phase evolution driven by configurational forces," SIAM J. Appl. Math., **66**, No. 2, 680–699 (2006).
2. *Alber H. D., Zhu P.,* "Evolution of phase boundaries by configurational forces," Arch. Ration. Mech. Anal., **185**, No. 2, 235–286 (2007).
3. *Alber H. D., Zhu P.,* "Solutions to a model for interface motion by interface diffusion," Proc. R. Soc. Edinburgh, **138**, No. 5, 923–955 (2008).
4. *Sheng W., Zhu P.,* "Viscosity solutions to a model for solid-solid phase transitions driven by material forces," Nonlinear Anal., Real World Appl., **39**, 14–32 (2018).
5. *Zhu P.,* Solid-Solid Phase Transitions Driven by Configurational Forces: A Phase-Field Model and Its Validity, Lambert Academy Publishing, Saarbrücken (2011).

AUTHOR INDEX

Научное издание

МАТЕМАТИКА В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Международная конференция
в честь 90-летия
Сергея Константиновича Годунова

4–10 августа 2019, Новосибирск, Россия

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Подписано в печать 08.07.2019 Формат 70×108 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 27,3. Уч.-изд. л. 19,5. Тираж 300 экз. Заказ № 187

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре НГУ,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия.