

Российская академия наук  
Суперкомпьютерный консорциум университетов России

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ (ПаВТ'2019)

Короткие статьи и описания плакатов

г. Калининград, 2–4 апреля 2019 г.

Челябинск,  
Издательский центр ЮУрГУ  
2019

УДК 004.75

П 18

Параллельные вычислительные технологии – XIII международная конференция, ПаВТ'2019, г. Калининград, 2–4 апреля 2019 г. Короткие статьи и описания плакатов. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2019. 477 с.

ISBN 978-5-696-05020-1

Данный сборник содержит статьи, включенные в программу Международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2019». Конференция проходила 2–4 апреля 2019 года в Балтийском федеральном университете (г. Калининград). Подробную информацию о конференции можно найти в сети Интернет по адресу <http://agora.guru.ru/pavt>.

Отпечатано с авторских оригиналов.

Одобрено Советом Высшей школы электроники и компьютерных наук ЮУрГУ

Рецензент:

В.В. Воеводин, член-корреспондент РАН

Ответственные за выпуск:

Л.Б. Соколинский, доктор физ.-мат. наук,

Я.А. Краева

Конференция проводится при поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований

ISBN 978-5-696-05020-1

© Издательский центр ЮУрГУ, 2019

## **ПЛАТИНОВЫЙ СПОНСОР**

Корпорация Intel

## **ЗОЛОТЫЕ СПОНСОРЫ**

Группа компаний РСК

Корпорация Hewlett Packard Enterprise

## **СЕРЕБРЯНЫЕ СПОНСОРЫ**

Компания Т-Платформы

Корпорация AMD

## **СПОНСОР СЕКЦИИ**

Компания IBS

## **ИНФОРМАЦИОННАЯ ПОДДЕРЖКА**

Информационно-аналитический центр Parallel.ru

Газета «Поиск»

Международный информационно-аналитический журнал

«CAD/CAM/CAE Observer»

Информационно-аналитический журнал «Rational Enterprise  
Management»

## НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЙ СОВЕТ

Бердышев В.И., академик РАН, директор ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург  
Ершов Ю.Л., академик РАН, председатель ОУС по математике и информатике, г. Новосибирск  
Минкин В.И., академик РАН, научный руководитель ЮФУ, г. Ростов-на-Дону  
Моисеев Е.И., академик РАН, декан факультета ВМК МГУ, г. Москва  
Савин Г.И., академик РАН, научный руководитель МСЦ РАН, г. Москва  
Садовничий В.А., академик РАН, ректор МГУ, г. Москва  
Четверушкин Б.Н., академик РАН, научный руководитель ИПМ РАН, г. Москва  
Шокин Ю.И., академик РАН, научный руководитель ИВТ СО РАН, г. Новосибирск

## ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

### **Председатель программного комитета:**

Садовничий В.А., академик РАН, ректор МГУ, г. Москва

### **Сопредседатели программного комитета:**

Воеводин В.В., чл.-корр. РАН, НИВЦ МГУ, г. Москва  
Донгарра Дж., PhD, Университет Теннесси, США  
Соколинский Л.Б., д.ф.-м.н., НИУ ЮУрГУ, г. Челябинск

### **Ученый секретарь программного комитета:**

Цымблер М.Л., к.ф.-м.н., НИУ ЮУрГУ, г. Челябинск

### **Члены программного комитета:**

Абламейко С.В., чл.-корр. НАН РБ, БГУ, г. Минск, Республика Беларусь  
Акимова Е.Н., д.ф.-м.н., ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург  
Андреяк А., PhD, Гейдельбергский университет, Германия  
Афанасьев А.П., д.ф.-м.н., ИСА РАН, г. Москва  
Балайи П., PhD, Аргоннская национальная лаборатория, США  
Болдырев Ю.Я., д.т.н., НИУ СПбГПУ, г. Санкт-Петербург  
Виржиковский Р., PhD, Ченстоховский технологический университет, Польша  
Газизов Р.К., д.ф.-м.н., УГАТУ, г. Уфа  
Гергель В.П., д.т.н., НИУ ННГУ, г. Нижний Новгород  
Глинский Б.М., д.т.н., ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск  
Горячев В.Д., д.т.н., ТГТУ, г. Тверь  
Ильин В.П., д.ф.-м.н., ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск  
Карретеро Х., PhD, Мадридский университет имени Карлоса III, Испания  
Кобаяши Х., PhD, Университет Тохоку, Япония  
Кюнсел Й., PhD, Гамбургский университет, Германия  
Лабарта Х., PhD, Суперкомпьютерный центр Барселоны, Испания  
Ластовецкий А.Л., д.ф.-м.н., Университетский колледж Дублина, Ирландия  
Лыкосов В.Н., чл.-корр. РАН, ИВМ РАН, г. Москва  
Людвиг Т., PhD, Германский вычислительный центр климата, Германия  
Маллманн Д., Исследовательский центр г. Юлиха, Германия  
Мальшкин В.Э., д.т.н., ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск  
Михалевич М., PhD, Вычислительный центр Агентства по научно-технологическим исследованиям, Сингапур  
Модорский В.Я., д.т.н., НИУ ПГТУ, г. Пермь  
Ситоле Х., PhD, Центр НРС, ЮАР  
Старченко А.В., д.ф.-м.н., НИУ ТГУ, г. Томск  
Стерлинг Т., PhD, Индианский университет, США

Тауфер М., PhD, Делавэрский университет, США  
Турлапов В.Е., д.т.н., НИУ ННГУ, г. Нижний Новгород  
Шамакина А.В., к.ф.-м.н., Суперкомпьютерный центр Штутгарта, ФРГ  
Шумяцкий П., PhD, Университет г. Бразилиа, Бразилия  
Якобовский М.В., чл.-корр. РАН, ИПМ РАН, г. Москва  
Ямазаки Е., PhD, Университет г. Пелотас, Бразилия

## ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

### **Председатель организационного комитета:**

Ерохин Г.Н., директор НИИ ПИиМГ БФУ, г. Калининград

### **Заместитель председателя организационного комитета:**

Демин М.В., и.о. проректора по научной работе БФУ, г. Калининград

### **Секретарь организационного комитета:**

Белова А.В., зам. руководителя Службы организации НИД БФУ, г. Калининград

### **Члены организационного комитета:**

Антонов А.С., в.н.с. НИВЦ МГУ, г. Москва

Антонова А.П., программист НИВЦ МГУ, г. Москва

Бардина М.Г., программист ЛСМ ЮУрГУ, г. Челябинск

Воеводин Вад.В., с.н.с. НИВЦ МГУ, г. Москва

Данилин А.Н., с.н.с. НИИ ПИиМГ БФУ, г. Калининград

Краева Я.А., программист ЛСМ ЮУрГУ, г. Челябинск

Никитенко Д.А., с.н.с. НИВЦ МГУ, г. Москва

Островских Н.О., программист ЛСМ ЮУрГУ, г. Челябинск

Пестов Л.Н., зав. лабораторией трехмерной сейсморазведки НИИ ПИиМГ БФУ, г. Калининград

Самусев И.Г., зам. директора ИФМНИИТ БФУ, г. Калининград

Соболев С.И., с.н.с. НИВЦ МГУ, г. Москва

Филатова В.М., с.н.с. НИИ ПИиМГ БФУ, г. Калининград

Цымблер М.Л., нач. отдела ЛСМ ЮУрГУ, г. Челябинск

Юров А.В., директор ИФМНИИТ БФУ, г. Калининград

## ЭКСПЕРТЫ ПаВТ

Аксенов А.А., ТЕСИС, г. Москва

Алеева В.Н., ЮУрГУ, г. Челябинск

Алсынбаев К.С., БФУ, г. Калининград

Антонов А.С., НИВЦ МГУ, г. Москва

Баландин Д.В., ННГУ, г. Нижний Новгород

Баркалов К.А., ННГУ, г. Нижний Новгород

Березовская Ю.В., САФУ, г. Архангельск

Березовский В.В., САФУ, г. Архангельск

Болдарев А.С., ИПМ РАН, г. Москва

Бородулин К.В., ЮУрГУ, г. Челябинск

Брыксин В.М., БФУ, г. Калининград

Ваганова Н.А., ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург

Варламов Д.А., ИЭМ РАН, г. Черногоровка

Верман П.Г., ЮУрГУ, г. Челябинск

Воеводин Вад.В., НИВЦ МГУ, г. Москва  
Волохов В.М., ИПХФ РАН, г. Черноголовка  
Вшивков В.А., ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск  
Гасилов В.А., ИПМ РАН, г. Москва  
Голодов В.А., ЮУрГУ, г. Челябинск  
Губайдуллин И.М., ФГБУН ИНК РАН, г. Уфа  
Гудков В.А., ЮНЦ РАН, г. Таганрог  
Данилин А.Н., БФУ, г. Калининград  
Дацюк В.Н., ЮГИНФО ЮФУ, г. Ростов-на-Дону  
Дацюк О.В., ЮГИНФО ЮФУ, г. Ростов-на-Дону  
Демяненко Я.М., ИММКН ЮФУ, г. Ростов-на-Дону  
Долганина Н.Ю., ЮУрГУ, г. Челябинск  
Дордопуло А.И., ЮНЦ РАН, г. Таганрог  
Ерохин Г.Н., БФУ, г. Калининград  
Жегалина Л.Ф., БФУ, г. Калининград  
Жуматий С.А., НИВЦ МГУ, г. Москва  
Затуливетер Ю.С., ИПУ РАН, г. Москва  
Зинин Л.В., БФУ, г. Калининград  
Иванова О.Н., ЮУрГУ, г. Челябинск  
Игумнов А.С., ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург  
Камышников А.И., БФУ, г. Калининград  
Карпенко А.П., МГТУ, г. Москва  
Козинов Е.А., ННГУ, г. Нижний Новгород  
Конюхов В.М., КФУ, г. Казань  
Корабельщикова С.Ю., САФУ, г. Архангельск  
Костенецкий П.С., ЮУрГУ, г. Челябинск  
Кремлев А.Н., БФУ, г. Калининград  
Крюков В.А., ИПМ РАН, г. Москва  
Лазарева С.А., ЮГИНФО ЮФУ, г. Ростов-на-Дону  
Лалин А.В., КФУ, г. Казань  
Левин И.И., НИИ МВС ЮФУ, г. Таганрог  
Легалов А.И., СФУ, г. Красноярск  
Линёв А.В., ННГУ, г. Нижний Новгород  
Лиходед Н.А., БГУ, г. Минск  
Лукашук С.Ю., УГАТУ, г. Уфа  
Маковецкая Т.Ю., ЮУрГУ, г. Челябинск  
Манштейн Ю.А., БФУ, г. Калининград  
Марчевский И.К., МГТУ, г. Москва  
Мееров И.Б., ННГУ, г. Нижний Новгород  
Мисилов В.Е., ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург  
Муратова Г.В., ЮФУ, г. Ростов-на-Дону  
Никитенко Д.А., МГУ, г. Москва  
Никитина А.В., ЮФУ, г. Ростов-на-Дону  
Пан К.С., Cloudflare, г. Лондон  
Пестов Л.Н., БФУ, г. Калининград  
Пилиди В.С., ИММКН ЮФУ, г. Ростов-на-Дону  
Половинкин А.Н., ННГУ, г. Нижний Новгород  
Проценко Е.А., ТГПИ (филиал РГЭУ (РИНХ)), г. Таганрог  
Радченко Г.И., ЮУрГУ, г. Челябинск  
Розенберг В.Л., ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург  
Романов С.Ю., НИВЦ МГУ, г. Москва  
Рябченко С.В., САФУ, г. Архангельск  
Сальников А.Н., ВМК МГУ, г. Москва

Свешников В.М., ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск  
Сидорякина В.В., ТГПИ (филиал РГЭУ (РИНХ)), г. Таганрог  
Соболев С.И., НИВЦ МГУ, г. Москва  
Созыкин А.В., ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург  
Степаненко В.М., НИВЦ МГУ, г. Москва  
Стефанов К.С., НИВЦ МГУ, г. Москва  
Сухинов А.И., ДГТУ, г. Ростов-на-Дону  
Сухорослов О.В., ИППИ РАН, г. Москва  
Толстых М.А., ИВМ РАН, г. Москва  
Филатова В.М., БФУ, г. Калининград  
Федянина Р.С., ЮУрГУ, г. Челябинск  
Харченко С.А., ТЕСИС, г. Москва  
Чеверда В.А., ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск  
Чистяков А.Е., ДГТУ, г. Ростов-на-Дону  
Шабас И.Н., ЮГИНФО ЮФУ, г. Ростов-на-Дону  
Шалаев В.И., МФТИ, г. Москва  
Шишня А.В., ЮГИНФО ЮФУ, г. Ростов-на-Дону  
Штейнберг Б.Я., ИММКН ЮФУ, г. Ростов-на-Дону

# Решение обратной задачи гравиметрии методом Монте-Карло на суперкомпьютере с использованием распределённых вычислений\*

М.А. Марченко<sup>1</sup>, С.Я. Серовайский<sup>2</sup>, Д.Д. Смирнов<sup>1</sup>, М.О. Кенжебаева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского  
отделения Российской академии наук,

<sup>2</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби

При решении обратной задачи гравиметрии с целью восстановления плотности подземной аномалии важную роль играет численный анализ модельной обратной задачи. Для тестовой постановки путём применения методов Монте-Карло и распределённых вычислений показано удовлетворительное совпадение результатов численного моделирования с известным решением обратной задачи.

*Ключевые слова:* метод Монте-Карло, обратная задача гравиметрии, метод градиентного спуска, распределённые вычисления, универсальные библиотеки программ.

## 1. Введение

В настоящее время большинство добываемых крупных месторождений нефти и газа практически исчерпали свою нефтеносность. В связи с этим появился высокий интерес к небольшим "законсервированным" месторождениям. Благодаря научно-техническому прогрессу трудоёмкость добычи углеводородного сырья из таких месторождений во много раз уменьшилась.

В период эксплуатации нефтегазовых месторождений возникают проблемы с извлечением нефти. Нефть может "передвигаться" с места на место. И в процессе эксплуатации точное местоположение нефти сложно определить. Так как разведка месторождения происходит на начальном этапе проектирования, то далее в процессе добычи уже не происходит анализ изменения местоположения в связи с изменившейся ситуацией. Повторный поиск не производится в связи с большими финансовыми затратами на разведку.

Решая обратную задачу гравиметрии для нефтегазового месторождения, возможно достаточно точно обнаружить нефть и газ без больших финансовых затрат, что значительно упростило бы процесс добычи и принятия решения о применяемых методах эксплуатации скважин.

Основы обратных задач геофизики хорошо описаны в работах [1, 2]. В работе [3] подробно описаны основы большинства прикладных обратных задач. Даны основные понятия о физической постановке задаче гравиметрии, описаны принципы решения прямых и обратных задач гравиразведки, имеются аналитические способы решения обратных задач для простых форм аномалии. В работе [4] рассматривается аномалия в двухслойной среде. Дан краткий обзор подходов к построению итерационных процессов ньютоновского и градиентного типов. Сам автор и его ученики преимущественно рассматривают интегральные уравнения для постановки обратных задач гравиметрии.

В работах [5, 6] более подробно описана математическая модель постановки прямой задачи, проведён анализ эффектов поведения потенциала гравитационного поля и его градиента рядом с граничными условиями при решении прямой задачи гравиметрии.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект № 17-01-00698 А и гранта РФФИ проект № 18-01-00599 А.



## 2. Постановка задачи

### 2.1 Обратная задача гравиметрии

Известно местоположение аномалии под землёй. Необходимо определить её плотность. Прямая задача заключается в нахождении значения потенциала гравитационного поля на всей исследуемой области при заданной плотности аномалии.

В пространственной области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq L\}$  прямая задача имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial y^2} = -k\psi(x, y) \text{ в области } \Omega, \quad (1)$$

$$\eta(x, y) = g(x, y) \text{ на границе } \partial\Omega, \quad (2)$$

задавая правую часть в виде:

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \psi_0, & (x, y) \in \Omega_0 \\ 0, & (x, y) \in \Omega / \Omega_0 \end{cases}, \quad (3)$$

и граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} \eta(x, y)|_{y=0} &= \eta_1(x) \\ \eta(x, y)|_{y=L} &= 0 \\ \eta(x, y)|_{x=0} &= 0 \\ \eta(x, y)|_{x=L} &= 0 \end{aligned}, \quad (4)$$

где  $\Omega_0$  – область аномалии, получаем прямую задачу. Функция  $\eta(x, y)$  – разность потенциалов гравитационных полей. Можно посчитать  $\eta(x, y)$  в любой точке рассматриваемой области, при условии, что задано  $\psi(x, y)$  – разность плотностей неоднородности и рассматриваемой области.  $\eta_1(x), \eta_2(x)$  – значения наблюдений гравиметрических показаний (потенциал гравитационного поля и его градиент).

Обратная задача заключается в поиске плотности аномалии на основе результатов измерения потенциала гравитационного поля и его градиента на поверхности земли. Для этого необходимо ввести функционал, используя квадратичное отклонение в качестве параметра минимизации.

В пространственной области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq L\}$  обратная задача решается следующим образом: задаётся начальное приближение  $\psi_0$ , задаётся дополнительное граничное условие для градиента (производная по направлению) в виде:

$$\frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} |_{y=0} = \eta_2(x), \quad (5)$$

с заданным начальным приближением  $\psi_0$  решается прямая задача (1) – (4), но не на всей области  $\bar{\Omega}$ , а на некотором удалении  $\delta$  от поверхности земли в глубину, затем оценивается градиент следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{\eta}(x, y)}{\partial y} |_{y=0} = \frac{\eta(x, y+\delta) - \eta(x, y)}{\delta},$$

далее проверяется условие минимизации функционала  $I(\psi_0)$  заданного в виде:

$$I(\psi_0) = \int_0^L \left( \frac{\partial \tilde{\eta}(x, y)}{\partial y} |_{y=0} - \eta_2(x) \right)^2 dx, \quad (6)$$

то есть задаётся значение  $\varepsilon > 0$  и проверяется условие  $I(\psi_0) < \varepsilon$  – это условие минимизации функционала  $I(\psi_0)$ . Если условие минимизации функционала  $I(\psi_0)$  не выполняется, то с помощью метода градиентного спуска находим следующее приближение  $\psi_0$ :

$$\psi_0 := \psi_0 - \alpha I'(\psi_0),$$

где  $I'(\psi_0)$  это производная функционала  $I(\psi_0)$ , которая имеет следующий вид:

$$I'(\psi_0) = k \iint_{\bar{\Omega}} p(x, y) dx dy, \quad (7)$$

и эту последовательность действий продельваем до тех пор, пока не выполнится условие минимизации функционала  $I(\psi_0)$ . Значение  $\psi_0$ , при котором выполнится условие минимизации функционала  $I(\psi_0)$ , является решением обратной задачи.

Примечание:  $p(x, y)$  это решение сопряженной задачи, которая в пространственной области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq L\}$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 p(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x,y)}{\partial y^2} = 0 \text{ в области } \Omega, \quad (8)$$

и граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} p(x,y)|_{y=0} &= \left( \frac{\partial \tilde{\eta}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_2(x) \right) \\ p(x,y)|_{y=L} &= 0 \\ p(x,y)|_{x=0} &= 0 \\ p(x,y)|_{x=L} &= 0 \end{aligned}, \quad (9)$$

## 2.2 Вычисление производной функционала

Вспользуемся определением производной Гато:

$$I'(\psi_0, h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0)}{\sigma} \right). \quad (10)$$

Так как функционал связан с плотностью  $\psi_0$  через уравнение состояния потенциала гравитационного поля (1), то введём дополнительные обозначения.

Пусть плотность  $\psi_0$  переводит потенциал поля  $\eta(x, y)$  в  $v(x, y)$ , а плотность  $\psi_0 + \sigma h$  переводит потенциал поля  $\eta(x, y)$  в  $q(x, y)$ . Тогда функционал  $I(\psi_0) = \int_0^L \left( \frac{\partial \tilde{v}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_2(x) \right)^2 dx$ ,

а функционал  $I(\psi_0 + \sigma h) = \int_0^L \left( \frac{\partial \tilde{q}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_2(x) \right)^2 dx$ . Разность  $I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0)$  равна

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[ \left( \frac{\partial \tilde{q}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_2(x) \right)^2 - \left( \frac{\partial \tilde{v}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_2(x) \right)^2 \right] dx \text{ или равна} \\ &\int_0^L \left( \frac{\partial \tilde{q}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial \tilde{v}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - 2\eta_2(x) \right) \left( \frac{\partial \tilde{q}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial \tilde{v}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) dx. \end{aligned}$$

Пусть  $q(x, y) = v(x, y) + \eta(x, y)$ , тогда  $\frac{\partial \tilde{q}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \tilde{v}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial \tilde{\eta}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0}$ , в итоге разность равна

$$\int_0^L 2 \left( \frac{\partial \tilde{v}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \tilde{\eta}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx + \int_0^L \left( \frac{\partial \tilde{\eta}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^2 dx. \quad (11)$$

Далее мы должны найти предел по формуле (10), но уравнение (11) не зависит от  $\sigma$  явно.  $\sigma$  связано с уравнением (11) через уравнение состояния системы (1) – (4).

Запишем постановку задачи (1) – (4) через введённые функции  $v(x, y)$  и  $q(x, y)$ . В пространственной области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq L\}$  будет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = -k\psi(\psi_0) \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial^2 q(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q(x,y)}{\partial y^2} = -k\psi(\psi_0 + \sigma h) \text{ в } \Omega,$$

правая часть:

правая часть:

$$\psi(\psi_0) = \begin{cases} \psi_0, & \text{в } \Omega_0 \\ 0, & \text{в } \Omega / \Omega_0 \end{cases}, \quad \psi(\psi_0 + \sigma h) = \begin{cases} \psi_0 + \sigma h, & \text{в } \Omega_0 \\ 0, & \text{в } \Omega / \Omega_0 \end{cases},$$

и граничные условия:

и граничные условия:

$$\begin{aligned} v(x,y)|_{y=0} &= \eta_1(x) & q(x,y)|_{y=0} &= \eta_1(x) \\ v(x,y)|_{y=L} &= 0 & q(x,y)|_{y=L} &= 0 \\ v(x,y)|_{x=0} &= 0 & q(x,y)|_{x=0} &= 0 \\ v(x,y)|_{x=L} &= 0 & q(x,y)|_{x=L} &= 0 \end{aligned}.$$

Возьмём разность этих уравнений, тогда получим следующее:

$$\frac{\partial^2 \eta(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta(x,y)}{\partial y^2} = -k[\psi(\psi_0 + \sigma h) - \psi(\psi_0)],$$

Пусть  $\tilde{\psi} = \psi(\psi_0 + \sigma h) - \psi(\psi_0)$ , тогда постановка задачи будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \eta(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta(x,y)}{\partial y^2} = -k\tilde{\psi}, \quad (12)$$

правая часть:

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \sigma h, & \text{в } \Omega_0 \\ 0, & \text{в } \Omega / \Omega_0 \end{cases}, \quad (13)$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} \eta(x, y)|_{y=0} &= 0 \\ \eta(x, y)|_{y=L} &= 0 \\ \eta(x, y)|_{x=0} &= 0, \\ \eta(x, y)|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Умножив уравнение (12) на любое  $\lambda(x, y)$  и проинтегрировав по всей области  $\bar{\Omega}$  получим:

$$\int_0^L \int_0^L \lambda(x, y) \left( \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial y^2} \right) dx dy = -k \int_0^L \int_0^L \lambda(x, y) \tilde{\psi} dx dy = -k\sigma h \int_0^L \int_0^L \lambda(x, y) dx dy. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^L \int_0^L \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x^2} dx dy = \\ &= \int_0^L \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^L - \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \eta(x, y) \Big|_0^L + \int_0^L \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x^2} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Слагаемое  $\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \eta(x, y) \Big|_0^L$  равно нулю, так как на границе области  $\eta(x, y)$  равно нулю. Тогда

$$I_1 = \int_0^L \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^L + \int_0^L \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x^2} dx \right) dy$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^L \int_0^L \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial y^2} dx dy = \\ &= \int_0^L \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_0^L - \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \eta(x, y) \Big|_0^L + \int_0^L \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial y^2} dy \right) dx. \end{aligned}$$

Слагаемое  $\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \eta(x, y) \Big|_0^L$  равно нулю, так как на границе области  $\eta(x, y)$  равно нулю. Тогда

$$I_2 = \int_0^L \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_0^L + \int_0^L \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial y^2} dy \right) dx.$$

Выражения для  $I_1$  и  $I_2$  подставим в уравнение (15) и получим следующее:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^L \eta(x, y) \left( \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial y^2} \right) dx dy + \int_0^L \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=L} dx - \int_0^L \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx + \\ \int_0^L \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^L dy = -k\sigma h \int_0^L \int_0^L \lambda(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, мы получили явную зависимость выражения (16) от  $\sigma$ . Чтобы выражение (11) явно зависело от  $\sigma$ , требуется как-то связать выражения (16) и (11).

Так как функция  $\lambda(x, y)$  произвольная, мы можем её подобрать так, чтобы уравнение (16) совпадало с уравнением (11). Заметим, что выполняется следующее равенство

$$\int_0^L \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = \int_0^L 2 \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx,$$

если положить  $\lambda(x, y) = 2 \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_2(x) \right)$ .

Пусть  $\lambda(x, y) = p(x, y)$ , тогда  $p(x, 0) = 2 \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_2(x) \right)$ .

С учётом такой замены, упростим уравнение (16), обнулив всё лишнее, и получим следующее выражение:

$$\frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial y^2} = 0 \text{ в области } \Omega,$$

и граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} p(x, y)|_{y=0} &= \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_2(x) \right) \\ p(x, y)|_{y=L} &= 0 \\ p(x, y)|_{x=0} &= 0 \\ p(x, y)|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad ,$$

Таким образом, мы получили сопряжённую задачу (уравнение Лапласа с граничными условиями). Решив эту сопряжённую задачу, находим  $p(x, y)$ . Вычислим производную Гато:

$$I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0) = k\sigma h \iint_{\bar{\Omega}} p(x, y) dx dy + \int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^2 dx,$$

Тогда

$$(I'(\psi_0), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0)}{\sigma} \right) = k \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy \cdot h$$

Следовательно, производная Гато равна

$$I'(\psi_0) = k \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy.$$

Примечание: в интеграле  $\int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^2 dx$  есть зависимость от  $\sigma^2$ , поэтому в пределе при  $\sigma \rightarrow 0$  этот интеграл, делённый на  $\sigma$ , равен нулю.

## 2.3 Параллельный метод Монте-Карло (метод статистического моделирования)

### 2.3.1 Численное решение уравнения Пуассона методом статистического моделирования.

Уравнение Пуассона является уравнением эллиптического типа. В двумерном случае внутри области  $\Omega$  уравнение Пуассона имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial y^2} = -k\psi(x, y),$$

и, если задано граничное условие в виде:

$$\eta(x, y) = g(x, y),$$

на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ , то задачу называют задачей Дирихле для уравнения Пуассона.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в пространственной области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq L\}$  – квадратная область со стороной длины  $L$ . В этой пространственной области введём сетку с шагами  $h_x = \frac{L}{N_x}$  и  $h_y = \frac{L}{N_y}$ .

$$\omega_{h_x h_y} = \{x_i = ih_x, i = \overline{0, N_x}; y_j = jh_y, j = \overline{0, N_y}\}.$$

На введённой сетке, задав шаги  $h_x = h_y = h$ , аппроксимируем внутри области  $\Omega$  уравнение Пуассона следующим образом:

$$\frac{\eta_{i-1, j} - 2\eta_{i, j} + \eta_{i+1, j}}{h} + \frac{\eta_{i, j-1} - 2\eta_{i, j} + \eta_{i, j+1}}{h} = -k\psi_{i, j},$$

на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ :

$$\eta_{i, j} = g_{i, j},$$

Тогда внутри области  $\Omega$  значение  $\eta_{i, j}$  определяется следующим образом:

$$\eta_{i, j} = 0,25(\eta_{i-1, j} + \eta_{i+1, j} + \eta_{i, j-1} + \eta_{i, j+1}) + 0,25h^2 k\psi_{i, j}, \quad (17)$$

Здесь  $\eta_{i, j}$  есть приближённое значение для  $\eta(x_i, y_j)$  в точке  $(x_i, y_j)$ , если эта точка лежит внутри области  $\Omega$ . Если же точка  $(x_i, y_j)$  лежит на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ , то значение  $\eta_{i, j}$  известно и равно  $g(x_i, y_j)$ . Значение  $\psi_{i, j}$  равно  $\psi(x_i, y_j)$ . Для того, чтобы найти численное решение данной задачи в заданной точке  $(x_i, y_j)$  области  $\Omega$  применяется алгоритм случайного блуждания по решётке [7]. В отличие от обычных матричных методов преимущество данного метода нахождения численного решения задачи в том, что не нужно вычислять решение задачи во всех точках области для того, чтобы найти решение в заданной точке области, что существенно уменьшает время счёта программы. Для нашей задачи, где нужно найти численное решение уравнения Пуассона только на одном слое  $\{(x, y): 0 \leq x \leq L; y = h\}$ , этот метод актуален. Выражение (17) имеет вид полного математического ожидания. Такому уравнению удовлетворяет среднее значение случайной величины  $T$ , реализация которой строится следующим образом:

1. Выбирается точка  $(x_i, y_j)$ , в которой нужно найти численное решение уравнения Пуассона  $\eta_{i, j}$ . В этой точке случайной величине  $T$  присваивается начальное значение  $0,25h^2 k\psi_{i, j}$ .
2. С вероятностью 0,25 происходит переход из точки  $(x_i, y_j)$  либо в точку  $(x_{i-1}, y_j)$  и тогда к имеющемуся значению случайной величины  $T$  прибавляется значение  $0,25h^2 k\psi_{i-1, j}$ , либо в точку  $(x_{i+1}, y_j)$  и тогда к имеющемуся значению случайной величины  $T$  прибавляется значение  $0,25h^2 k\psi_{i+1, j}$ , либо в точку  $(x_i, y_{j-1})$  и тогда к имеющемуся значению случайной

величины  $T$  прибавляется значение  $0,25h^2k\psi_{i,j-1}$ , либо в точку  $(x_i, y_{j+1})$  и тогда к имеющемуся значению случайной величины  $T$  прибавляется значение  $0,25h^2k\psi_{i,j+1}$ .

3. Пункт 2) продолжается до тех пор, пока точка не выйдет на границу  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ .
4. На границе к уже имеющемуся накопленному значению случайной величины  $T$  прибавляется соответствующее значение  $g_{i,j}$  и траектория обрывается, в результате получаем одну реализацию случайной величины  $T$ . Таким образом,  $m$  – ую реализацию случайной величины  $T$  можно записать в виде:

$$T(m) = g_{i(N),j(N)} + 0,25h^2k \sum_{s=1}^{N-1} \psi_{i(s),j(s)},$$

где  $N$  – количество шагов случайного блуждания по решётке от заданной точки до выхода на границу области,  $s$  – номер шага случайного блуждания по решётке и, соответственно,  $i(s)$  и  $j(s)$  – номера узла решётки, в котором находится случайное блуждание по решётке на шаге  $s$ .

5. Построив достаточно большое количество реализаций, численное решение данной задачи в заданной точке  $(x_i, y_j)$  находится по формуле:

$$\eta_{i,j} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M T(m),$$

где  $M$  – количество реализаций.

### 2.3.2 Распределённое статистическое моделирование

Как было сказано в предыдущем параграфе, численное решения уравнения Пуассона в заданной точке области находится с помощью моделирования реализаций случайного блуждания по решётке с дальнейшим усреднением по всему количеству реализаций. При этом, чем больше количество реализаций случайного блуждания по решётке, тем точнее получается оценка среднего, следовательно, точнее получается численное решение уравнения Пуассона в заданной точке области. Статистическая погрешность оценки среднего убывает обратно пропорционально квадратному корню от количества реализаций случайного блуждания по решётке [7]. В дальнейших работах будет подробное исследование погрешности в зависимости от шага дискретизации для разностной схемы уравнения Пуассона и количества реализаций случайного блуждания. Стоит подчеркнуть, что реализации случайного блуждания по решётке независимы. Из всего это следует, что для достижения заданного уровня статистической погрешности оценки среднего нужно распараллеливать статистическое моделирование, что приведёт к существенному уменьшению времени счёта программы.

Распараллеливание статистического моделирования состоит в распределении моделирования независимых реализаций по вычислительным ядрам с периодическим осреднением полученных выборочных значений по статистически эффективной формуле следующего вида:

$$\bar{\zeta} = \left[ \sum_{k=1}^K M_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^K M_k \bar{\zeta}_k.$$

Здесь  $K$  – общее число ядер,  $M_k$  – количество реализаций, полученное на  $k$  – ом ядре,  $\bar{\zeta}_k$  – оценка среднего, полученная на  $k$  – ом ядре. При распараллеливании статистического моделирования допустимо использовать вычислительные ядра с разной производительностью. При этом обмен данными можно свести к минимуму, допуская только начальную "загрузку" вычислительных ядер и финальное получение оценок средних. Действуя так, можно добиться обратно пропорциональной зависимости величины трудоемкости "распределенной" случайной оценки от числа ядер, при условии, что используемые ядра имеют одинаковую производительность [8]. Как правило, при параллельной реализации необходимый объём выборки базовых случайных чисел очень велик, поэтому целесообразно использовать длиннопериодные псевдослучайные последовательности. А именно, предлагается использовать 128 – битный конгруэнтный генератор псевдослучайных чисел с длиной периоды  $L = 2^{126} \approx 10^{38}$  [8].

### 2.3.3 Комплекс программ SIPG для распределённого статистического моделирования.

Для решения обратной задачи гравиметрии на базе комплекса программ AMKS [9] создан комплекс программ SIPG (Solving the Inverse Problem of Gravimetry) с удобным пользовательским интерфейсом, с помощью которого можно проводить расчёты как на персональном ком-

пьютере, так и на суперкомпьютере даже для тех пользователей, которые не знают технологии параллельного программирования и, в общем, имеют начальный уровень знаний программирования. Для использования комплекса программ SIPG пользователь должен иметь доступ к суперкомпьютеру (private\_key, login, passphrase). Соединение персонального компьютера с суперкомпьютером происходит с помощью интерфейса комплекса программ SIPG, который расположен на персональном компьютере пользователя. Ядром комплекса программ SIPG является библиотека PARMONC, с помощью которой делается распараллеливание статистического моделирования. Общая структура программ для статистического моделирования, в упрощенном виде показана на Рис. 1 (в нотации языка C++) [8]:

```
void main( void )
{
  long int i, M;
  TypeRL RL, SUBT;
  SUBT = 0.0;
  // цикл по реализациям
  for( i = 0; i < M; i++ ) {
    // далее идут операторы, вычисляющие реализацию
    RL
    ...
    SUBT= SUBT + RL;
  }
  SUBT = SUBT / M;
}
```

Рис. 1. Общая структура программ для статистического моделирования

Здесь  $M$  – общее число независимых реализаций случайного объекта, задаваемое композитным типом данных TypeRL; реализации RL моделируются внутри цикла по переменной  $i$ . Полученные таким образом реализации RL (статистически независимые в совокупности) добавляются к "счётчику" SUBT и по выходу из цикла усредняются, что дает статистическую оценку искомого математического ожидания случайного объекта. При распараллеливании последовательных программ с помощью PARMONC определяется процедура realization (моделирующая подпрограмма), возвращающая одну реализацию RL (возвращение – через аргумент процедуры). При этом считается, что моделирующая подпрограмма использует потоки псевдослучайных чисел, генерируемых внешней по отношению к ней подпрограммой. С учётом такой взаимосвязи цикл по независимым реализациям и финальное осреднение заменяются вызовом библиотечной процедуры следующего вида: parmoncc ( realization, M, SUBT , ... ); здесь имя моделирующей подпрограммы и общее число независимых реализаций передаются в библиотечную процедуру parmoncc в качестве входных аргументов; выборочное среднее будет возвращаться в переменную SUBT; для простоты остальные аргументы процедуры parmoncc пока опущены и заменены многоточием. Процедура parmoncc автоматически распределяет моделирование независимых реализаций по вычислительным ядрам. Все остальные операторы пользовательской программы остаются без изменений. В итоге имеем следующий код, показанный на Рис. 2, который пригоден для компиляции и сборки с помощью библиотеки PARMONC:

```
void main( void )
{
  TypeRL SUBT;
  parmoncc (realization, M, SUBT , ... );
}
void realization( TypeRL RL ){
  // далее идут операторы моделирующей подпрограммы
  ...
  // вычисленная реализация возвращается в
  переменную RL
}
```

Рис. 2. Общая структура программы для компиляции и сборки с помощью библиотеки PARMONC

В процессе распределённых вычислений на каждом ядре используются потоки независимых псевдослучайных чисел, получаемые в результате работы подпрограммы, реализующей параллельный генератор из предыдущего параграфа. В процедуре realization библиотечный параллельный генератор вызывается следующим образом:  $a = \text{rnd128}()$ , которая возвращает псевдослучайное число, равномерно распределённое в интервале (0,1). Инициализация параллельного генератора производится автоматически при запуске программы, скомпилированной и собранной с помощью библиотеки PARMONC. Таким образом, библиотечные подпрограммы применяются без явного использования команд MPI.

Комплекс программ SIPG соответствует модели "клиент-сервер" и состоит из управляющего программного блока ("клиент") и вычислительного программного блока ("сервер"). Взаимодействие между блоками происходит с помощью протоколов ssh, scp, sftp. С помощью протокола ssh передаются соответствующие команды, показанные на Рис. 3.

```
plink.exe -ssh supercomputer.ru -i private_key.ppk -l PetrovPP -pw PaCT2019  
mpiicc -o /ifs/storage/mydirectory/PetrovPP/Program -L$PRMCLIB -I$PRMCINC  
/ifs/storage/mydirectory/PetrovPP/Program.c -lparmonc (компиляция програм-  
мы, в которой используется библиотека PARMONC)  
plink.exe -ssh supercomputer.ru -i private_key.ppk -l PetrovPP -pw PaCT2019  
qsub /ifs/storage/mydirectory/PetrovPP/torun
```

Рис. 3. Пример взаимодействия по ssh протоколу

С помощью протоколов scp и sftp передаются файлы, как показано на Рис. 4.

```
pscp.exe -i private_key.ppk -pw PaCT2019 Pe-  
trovPP@supercomputer.ru:/ifs/storage/ mydirecto-  
ry/PetrovPP/parmonc_data/results/func_ci.dat D:\Output\func_ci.dat.
```

Рис. 4. Пример взаимодействия по scp протоколу

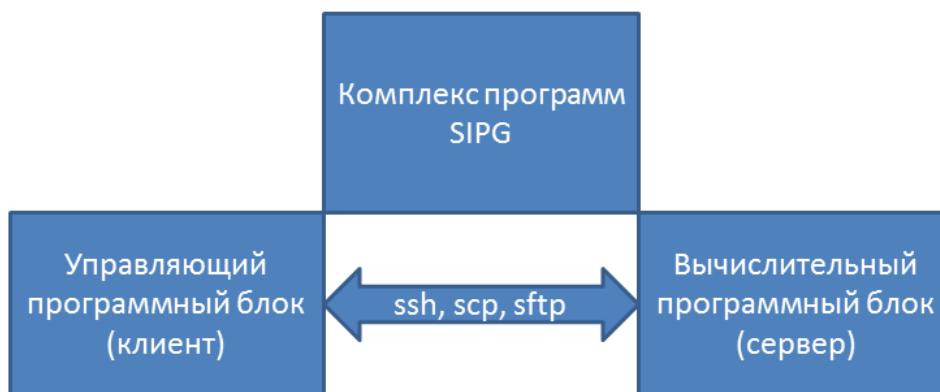


Рис. 5. Взаимодействие между блоками

Схематически это взаимодействие между блоками изображено на Рис. 5. Эти команды выполняются при нажатии соответствующих кнопок на интерфейсе комплекса программ SIPG после введения им соответствующих параметров, таких как private\_key, login, passphrase. Таким образом, пользователю не требуются знания по работе с ssh, scp, sftp протоколами.

Управляющий блок устанавливается на персональном компьютере и состоит из двух объектов: объект "Задача" и объект "Расчёт". В объект "Задача" входят данные о параметрах поставленной задачи: границы пространственной области, шаги дискретизации по пространственным переменным, граничные условия, правая часть уравнения Пуассона, начальное приближение и точность для метода градиентного спуска, количество моделируемых реализаций для случайного блуждания по решётке и т.д. В объект "Расчёт" входят данные о количестве процессоров для запуска поставленной задачи на суперкомпьютере, максимальное время рабо-

ты программы, номер под последовательности для параллельного генератора псевдослучайных чисел. Вычислительный блок устанавливается на персональный компьютер или на суперкомпьютер (содержит библиотеку PARMONC) и производит расчёт задачи, подготовленной в управляемом блоке. Вся информация об объектах "Задача" и "Расчёт" сохраняются в управляющем блоке на жёстком диске. Открытие, просмотр и редактирование сохраненной информации осуществляется в управляющем блоке с помощью интерфейса комплекса программ SIPG.

Одному объекту "Задача" может соответствовать несколько объектов "Расчёт" (при каждом запуске на счёт используются данные только одного из объектов "Расчёт"). При этом из управляющего блока возможно независимо определять и запускать на счет несколько задач, для которых контроль исполнения и обработка результатов также осуществляются независимо друг от друга.

Для объекта "Расчёт" и соответствующего ему объекта "Задача" пользователь сначала выбирает, где будет производиться данный расчёт: на персональном компьютере или суперкомпьютере.

Для объекта "Расчёт" определяется вид расчёта: "Новый" или "Продолжение". Вид расчёта "Новый" применяется в случае, когда нужно получить новые результаты расчётов для поставленной задачи, а полученные ранее результаты (для завершённой задачи) можно не учитывать. Вид расчёта "Продолжение" применяется в случае, когда необходимо для завершённой задачи с целью уменьшения статистической погрешности полученных ранее оценок моделировать новые независимые реализации.

После определения данных для объектов "Задача" и "Расчёт" пользователь в разделе меню "Команды" отдаёт команду "запустить программу на счёт на персональном компьютере", "запустить программу на счёт на суперкомпьютере". В управляющем блоке автоматически формируются программа, соответствующая вычислительной системе и файлы с входными параметрами.

Задача считается завершённой, если соответствующие объектам "Задача" и "Расчёт" вычисления на персональном компьютере и суперкомпьютере закончены и их результаты сохранены в управляющем блоке.

В разделе меню "Команды" для пользователя есть возможность следить за ходом выполнения поставленной задачи на суперкомпьютере: просматривать очередь заданий на суперкомпьютере, просматривать содержимое рабочего каталога задачи, контролировать статистическую погрешность оценок среднего в процессе расчётов. Если пользователю необходимо получить промежуточные результаты расчётов, то по соответствующей команде в управляющий блок копируются файлы с результатами расчётов из вычислительного блока, количество и состав которых определяются методологией библиотеки PARMONC.

После обработки полученных результатов счёта пользователь может посмотреть файлы с результатами расчётов как в виде числовых данных, так и в графическом виде.

Для решения каждой поставленной задачи автоматически создается отдельный рабочий каталог для размещения параллельной программы, файлы с входными параметрами, а также файлы с результатами расчётов. После запуска задачи на счёт в вычислительном блоке, пользователь может закрыть комплекс программ SIPG в управляющем блоке, при этом счёт на суперкомпьютере для запущенной задачи будет продолжаться. После завершения счёта пользователь, используя команду "Получить результаты расчёта", получает файлы с результатами расчёта для дальнейшей обработки и визуализации.

## 2.4 Результаты численных экспериментов

Численные расчёты для уравнения Пуассона проводились в пространственной области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ . Задавались следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\eta(x, y)|_{y=0} &= \eta_1(x), \\ \eta(x, y)|_{y=1} &= 0, \\ \eta(x, y)|_{x=0} &= 0, \\ \eta(x, y)|_{x=1} &= 0,\end{aligned}$$

и правая часть:



$$\psi(x, y) = \begin{cases} k = 1, \\ \psi_0 = -16, (x, y) \in \Omega_0, \\ 0, (x, y) \in \Omega / \Omega_0 \end{cases},$$

где  $\Omega_0 = \{(x, y): 0,4 \leq x \leq 0,6; 0,4 \leq y \leq 0,6\}$

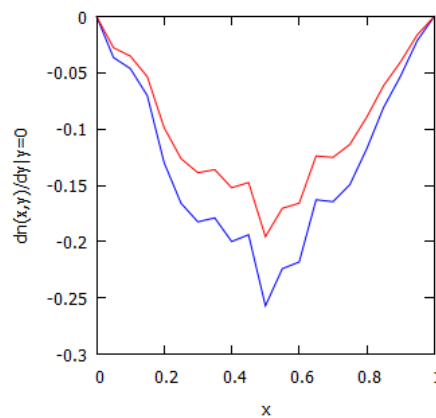
и дополнительно для решения обратной задачи задавалась производная по направлению  $\frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} |_{y=0} = \eta_2(x)$ .

Шаги по пространственным переменным  $h_x = h_y = h = 0,05$ .

**Таблица 1.** Время счёта программы, зависящее от количества реализаций и значений  $\varepsilon$  для условия минимизации функционала

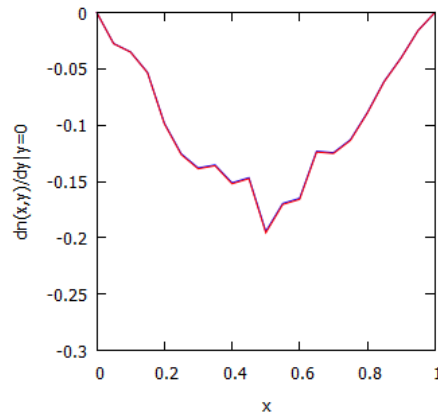
	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
$M = 10^4$	0,03	0,99	1,17	1,27
$M = 10^5$	0,29	10,02	11,85	20,32

На пересечении строки и столбца Таблица 1 время счёта  $t$  программы в часах, где  $M$  – количество реализаций,  $\varepsilon$  – значение для условия минимизации функционала  $I(\psi_0)$ .



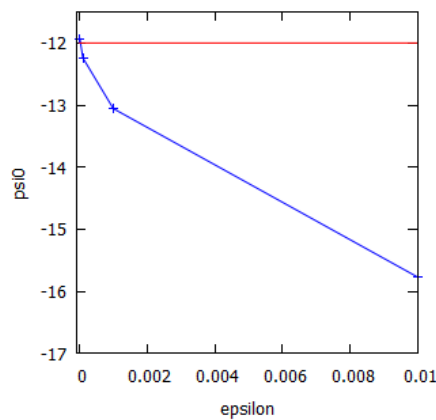
**Рис. 6.** Производная по направлению  $\frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} |_{y=0}$  для точного значения  $\psi_0$  и найденного значения  $\widetilde{\psi}_0$  при  $\varepsilon = 10^{-2}$

На Рис. 6 красным цветом график  $\frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} |_{y=0}$  для точного значения  $\psi_0 = -12$ , а синим цветом график  $\frac{\partial \widetilde{\eta}(x, y)}{\partial y} |_{y=0}$  для найденного значения  $\widetilde{\psi}_0 = -15,775$ , при котором выполнено условие, что функционал  $I(\widetilde{\psi}_0) < \varepsilon = 10^{-2}$ . В этом случае абсолютная погрешность найденного решения обратной задачи равна  $\delta_{abs} = |\widetilde{\psi}_0 - \psi_0| = 3,775$  и относительная погрешность найденного решения обратной задачи равна  $\delta_{rel} = \frac{\delta_{abs}}{|\psi_0|} \cdot 100\% = 31,46\%$ .



**Рис. 7.** Производная по направлению  $\frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0}$  для точного значения  $\psi_0$  и найденного значения  $\widetilde{\psi}_0$  при  $\varepsilon = 10^{-5}$

На Рис. 7 красным цветом график  $\frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0}$  для точного значения  $\psi_0 = -12$ , а синим цветом график  $\frac{\partial \widetilde{\eta}(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0}$  для найденного значения  $\widetilde{\psi}_0 = -11,929$ , при котором выполнено условие, что функционал  $I(\widetilde{\psi}_0) < \varepsilon = 10^{-5}$ . В этом случае абсолютная погрешность найденного решения обратной задачи равна  $\delta_{abs} = |\widetilde{\psi}_0 - \psi_0| = 0,071$  и относительная погрешность найденного решения обратной задачи равна  $\delta_{rel} = \frac{\delta_{abs}}{|\psi_0|} \cdot 100\% = 0,59\%$ . Как видно на Рис. 7, красный и синий графики практически совпадают. То есть мы получили почти точное решение при  $\varepsilon = 10^{-5}$ .



**Рис. 8.** График точного значения  $\psi_0 = -12$  и график зависимости найденного значения  $\widetilde{\psi}_0$  от  $\varepsilon$

На Рис. 8 красным цветом точное значение  $\psi_0 = -12$ , а синим цветом значение  $\widetilde{\psi}_0$ , при котором выполнено условие, что функционал  $I(\widetilde{\psi}_0) < \varepsilon$ .

**Таблица 2.** Время счёта программы, эффективность, ускорение в зависимости от количества процессоров

	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$	$n = 128$
$T_n$	2,8	1,41	0,72	0,36	0,19
$S$	7,26	14,4	28,1	55,2	106,7
$E$	0,91	0,9	0,87	0,86	0,83

Для  $M = 10^5$  и  $\varepsilon = 10^{-5}$  время счёта последовательной программы  $T_1 = 20,32$  часов. В таблице 2 в первой строке количество процессоров  $n$ , во второй строке время счёта программы  $T_n$  в часах, в третьей строке ускорение  $S = \frac{T_1}{T_n}$ , в четвёртой строке эффективность  $E = \frac{T_1}{n \cdot T_n}$ .

### 3. Заключение

Как видно из графиков, чтобы приблизиться с высокой точностью к истинному значению  $\psi_0$ , необходимо выбрать достаточно малое значение  $\varepsilon$  (условие минимизации функционала  $I(\psi_0)$ ), что увеличивает количество итераций от исходного значения  $\psi_0$  в методе градиентного спуска и соответственно увеличивает время счёта программы. Так как в данной задаче на каждой итерации требуется найти численное решение уравнения Пуассона только на одном слое, а не во всей области, то целесообразно применять метод статистического моделирования. Для нахождения численного решения уравнения Пуассона методом статистического моделирования в заданной точке области не требуется вычислять решение в других точках области, что невозможно в различных матричных методах для численного решения уравнения Пуассона. Кроме того, алгоритмы статистического моделирования очень хорошо распараллеливаются, так как на разных процессорах моделируются независимые между собой реализации случайного блуждания. Всё это существенно уменьшает время счёта программы, что позволяет с большей точностью решать обратные задачи гравиметрии за приемлемое время. Для расчётов использовался комплекс программ SIPG, с помощью которого проводились многочасовые расчёты данной задачи на гибридных кластерах НКС-30Т и НКС-1П [10].

### Литература

1. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. Москва: Наука, 1991. 304 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. 458 с.
3. Кабанихин С.И., Искаков К.Т., Бектемесов М.А., Шишленин М.А. Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач. Астана: Изд-во ЕНУ им. Гумилева, 2011. 328 с.
4. Васин В.В., Акимова Е.Н., Миниэхметова А.Ф. Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник ЮУрГУ, 2013. №3. С. 26–37.
5. Serovajsky S.Ya., Kenzhebayeva M.O. Modeling of the potential of the gravitational field at the upper boundary of the region with the existence of a subterranean anomaly // International Journal of Mathematics and Physics. 2018. No. 1. P. 20–26.
6. Kenzhebayeva M.O. The restoration of the density of a homogeneous anomaly from the measurement of the gravitational potential and its derivative on the earth's surface: International conference Inverse problems in Finance, Economics and Life Sciences (Almaty, 26 – 28 December 2017 г.) // Almaty: Conf. org., 2017. P. 16.
7. Михайлов Г.А. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. Москва: Издательский центр "Академия", 2006. 368 с.
8. Марченко М.А. Библиотека PARMONC для решения «больших» задач по методу Монте-Карло // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. С. 392–397.
9. Марченко М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Комплекс программ AMIKS для численного решения СДУ методом Монте-Карло на суперкомпьютерах // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22. № 3. С. 61–70.
10. Сибирский Суперкомпьютерный Центр ИВМиМГ СО РАН.  
URL: <http://www.sccc.icmmg.nsc.ru/hardware.html> (дата обращения: 14.02.2019).