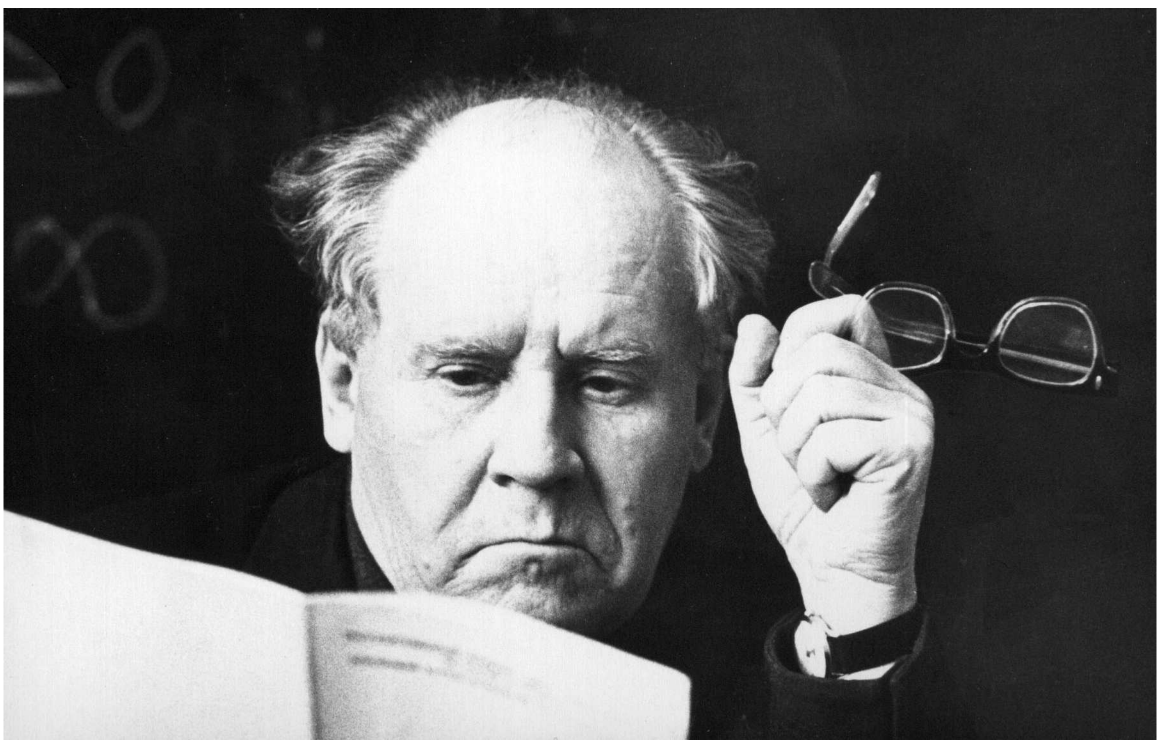
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

# (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2019)



**Материалы конференции**

**Часть 1**

**Аналитическая теория дифференциальных уравнений**
**Асимптотическая теория дифференциальных уравнений**
**Качественная теория дифференциальных уравнений**
**Теория устойчивости и управления движением**

**МИНСК 2019**

**УДК 517.9**
**ББК 22.161.6я43**
**Д25**

Редакторы:
А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров

Д25 **XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2019):** материалы Международной научной конференции. Могилев, 14 – 17 мая 2019 г. — Часть 1. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2019. — 144 с.

**ISBN 978-985-7160-11-2 (Часть 1)**
**ISBN 978-985-7160-13-6**

Сборник содержит доклады, представленные на XIX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2019) по вопросам аналитической, асимптотической и качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и управления движением.

ISBN 978-985-7160-11-2 (Часть 1)
ISBN 978-985-7160-13-6

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $k$-ГО ПОРЯДКА

**В.А. Акимов**

В результате опыта работы с дифференциальными операторами [1] автор приходит к следующим утверждениям.

**Теорема 1.** *Частное решение дифференциального уравнения произвольного порядка* $(d_x^2/\delta_n^2+1)^k * f(x) = \sin\delta_n x$ *имеет вид:* $f^*(x) = A_k x^k \sin\delta_n x$, *если* $k$ *– четное и* $f^*(x) = A_k x^k \cos\delta_n x$, *если* $k$ *– нечетное натуральное число.*

Доказательство данной теоремы основано на следующей лемме.

**Лемма.** *Если* $1 \leqslant m \leqslant k-1$, *то* $(d_x^2/\delta_n^2+1)^k * [x^m \cos\delta_n x] = 0$.

Доказательство леммы базируется на том, что после однократного применения оператора, стоящего в круглых скобках, степень полинома понижается на единицу.

Доказательство основной теоремы проведем по индукции, считая для определенности $k$ нечетным. При $k=1$ исходное уравнение имеет вид $(d_x^2/\delta_n^2+1) * f(x) = \sin\delta_n x$. Так как

$$(d_x^2/\delta_n^2+1)*[A_1 x\cos\delta_n x] = A_1[-(2/\delta_n)\sin\delta_n x - x\cos\delta_n x + x\cos\delta_n x] = -(2A_1/\delta_n)\sin\delta_n x,$$

то получим $-(2A_1/\delta_n)\sin\delta_n x = \sin\delta_n x$, откуда определяем $A_1 = -\delta_n/2$.

Предположим теперь, что данное высказывание верно для произвольного натурального нечетного числа $k: (d_x^2/\delta_n^2+1)^k * [A_k x^k \cos\delta_n x] = \sin\delta_n x$. Легко показать, что тогда оно верно и для $k+2$, т.е.

$$(d_x^2/\delta_n^2+1)^{k+2} * [A_k x^{k+2}\cos\delta_n x] = \sin\delta_n x,$$

где $A_k = -\delta_n^k/(2^k k!)$.

Здесь было учтено, что на основании леммы первое слагаемое в квадратных скобках обращается в нуль после воздействия на него оператора, степень которого больше чем степень $x$. На основании теоремы 1 можно сформулировать теорему 2.

**Теорема 2.** *Общее решение дифференциального уравнения* $(d_x^2/\delta_n^2+1)^k * f(x) = \sin\delta_n x$ *имеет вид*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin\delta_n x + D_m \cos\delta_m x) + A_k x^k \sin\delta_n x,$$

*если* $k$ *– четное и*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin\delta_n x + D_m \cos\delta_m x) + A_k x^k \cos\delta_n x,$$

*если* $k$ *– нечетное натуральное число, причем* $A_k = (-1)^k \delta_n^k/(2^k k!)$.

Доказательство этой теоремы основано на решении однородного уравнения

$$\left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1\right)^k * f(x) = 0. \qquad (1)$$

Так как соответствующее характеристическое уравнение имеет чисто комплексные корни $\pm i\delta_n$ кратности $k$, то в соответствии с [2], решение уравнения (1) имеет вид

$$\overline{f}(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin \delta_n x + D_m \cos \delta_n x),$$

что и доказывает первую часть нашего утверждения. Доказательство второй части теоремы, т.е. нахождение частного решения, полностью основано на теореме 1. Попутно заметим, что именно в этом и заключается роль первой теоремы, так как нахождение частного решения, например, методом вариации произвольной постоянной [2], носит весьма проблематичный характер.

**Литература**

1. Акимов В. А. *Операторный метод решения задач теории упругости.* Мн.: УП «Технопринт», 2003.

2. Смирнов В. И. *Курс высшей математики.* Т. 2. М., 1974.

## О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФУКСА

**В.В. Амелькин, М.Н. Василевич**

Пусть $X = \mathbb{CP}^1$ – комплексная проективная прямая, $M = \{1, i, -1, -i\}$ – множество точек прямой $X$.

На открытом множестве $X \setminus M$ рассмотрим уравнение Фукса

$$dY = \left(\frac{U_1}{z-1}+\frac{U_2}{z-i}+\frac{U_3}{z+1}+\frac{U_4}{z+i}\right) Y\,dz \qquad (1)$$

с постоянными матрицами

$$U_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \theta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j=\overline{1,3}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} \xi_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где

$$\xi_4 = -\sum_{j=1}^{3} \xi_j, \qquad (3)$$

а

$$\sum_{j=1}^{3} \theta_j = 0. \qquad (4)$$

Условия (4), (4) означают (согласно теореме о сумме вычетов), что точки $z=\infty$ нет среди особых точек матричного уравнения (1).

Отметим, что уравнение (1) является модельным уравнением при решении одной из задач аналитической теории дифференциальных уравнений, связанной с задачей

Римана–Гильберта о построении на сфере Римана уравнения Фукса по заданным особым точкам и заданной группе монодромии.

**Теорема 1.** *Уравнение (1) с матрицами-вычетами (2) вполне интегрируемо.*

**Теорема 2.** *Если собственные значения матриц-вычетов (2) уравнения (1) удовлетворяют условию (4), где* $\xi_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,3}$, *а параметры* $\theta_j$, $j = \overline{1,3}$, *удовлетворяют соотношению (4), то фундаментальная матрица* $\Phi(z)$ *уравнения (1) имеет вид*

$$\Phi(z) = E + \sum_{j=1}^{4} \phi_j(z) U_j,$$

*где*

$$\phi_j(z) = \upsilon(z) \int \frac{dz}{(z-\alpha_j)\upsilon(z)}, \quad j = \overline{1,4},$$

$$\upsilon(z) = \prod_{j=1}^{4} (z - \bar{\alpha}_j)^{\xi_j},$$

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = -i$, *и является нормированной в точке* $z_0 = \infty$.

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ БЕЗ ПОДВИЖНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

**Т.К. Андреева, Н.С. Березкина, В.А. Пронько**

Рассмотрим систему

$$x' = P(x,y,z), \quad y'' = Q(x,y,z), \tag{1}$$

где

$$P(x,y,z) = \left(\sum_{i=0}^{m+s} a_i x^{m+s-i} y^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^{m-j} y^j\right)^{-1},$$

$$Q(x,y,z) = \left(\sum_{i=0}^{m+s} \alpha_i x^{m+s-i} y^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} \beta_j x^{m-j} y^j\right)^{-1},$$

$a_i$, $b_j$, $\alpha_i$, $\beta_j$, – аналитические функции по $z$ в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$, $s \in \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$. Найдем необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений системы (1). Пенлеве-анализ системы (1) при $s = 1$ выполнен в [1].

Пусть $s = 0$. Выполнив в (1) замену $x = \varepsilon X$, $y = \varepsilon Y$, $z = z_0 + \varepsilon t$, при $\varepsilon = 0$ получим упрощенную систему

$$\dot{X} = P(X,Y,z_0), \quad \ddot{Y} = 0. \tag{2}$$

Для отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений системы (2), необходимо чтобы она имела вид

$$\dot{X} = \frac{e_0 X^2 + e_1 XY + e_2 Y^2}{Y^2}, \quad \ddot{Y} = 0, \tag{3}$$

где $e_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2$. Из второго уравнения системы (4) найдем: $Y = C(t - t_0)$, где $C, t_0$ – произвольные постоянные, а уравнение для $X$ примет вид

$$\dot{X} = \frac{e_0}{C^2(t-t_0)^2}X^2 + \frac{e_1}{C(t-t_0)}X + e_2. \tag{4}$$

Пусть $e_0 \neq 0$. Положим в (4) $X = -\dfrac{C^2(t-t_0)^2}{e_0}\dfrac{\dot{u}}{u}$. Для $u$ получим уравнение

$$\ddot{u} = \frac{e_1 - 2C}{C(t-t_0)}\dot{u} - \frac{e_0 e_2}{C^2(t-t_0)^2}u,$$

общее решение которого

$$u = (t-t_0)^{(e_1-C)/(2C)}\left(K_1(t-t_0)^{\sqrt{(e_1-C)^2-4e_0e_2}/(2C)} + K_2(t-t_0)^{-\sqrt{(e_1-C)^2-4e_0e_2}/(2C)}\right),$$

где $K_1$, $K_2$ – произвольные постоянные. Точка $t = t_0$ не является точкой ветвления для функции $X$, только если $e_1 = e_2 = 0$.

Пусть $e_0 = 0$. Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$X = \frac{e_2 C(t-t_0)}{C - e_1} + K(t-t_0)^{e_1/C}, \tag{5}$$

где $K$ – произвольная постоянная. Для однозначности функции $X$ необходимо требовать $e_1 = 0$.

Пусть $s \geqslant 2$. Выполнив в (1) замену $x = \varepsilon^{-1}X$, $y = \varepsilon^{-1}Y$, $z = z_0 + \varepsilon^{s-1}t$, при $\varepsilon = 0$ получим упрощенную систему (2). Для наличия свойства Пенлеве, необходимо чтобы она имела вид

$$\dot{X} = e_0 Y^{s-2}X^2 + e_1 Y^{s-1}X + e_2 Y^s, \quad \ddot{Y} = 0,$$

где $e_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2$. Таким образом, справедлива

**Теорема.** *Для отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений системы* (1) *необходимо, чтобы при* $s = 0$ *она имела один из двух видов:*

$$x' = a(z), \quad y'' = Q(x, y, z)$$

*или*

$$x' = a(z)\frac{x^2}{y^2}, \quad y'' = Q(x, y, z),$$

*а при* $s \geqslant 2$ *имела вид*

$$x' = c_0(z)y^{s-2}x^2 + c_1(z)y^{s-1}x + c_2(z)y^s, \quad y'' = Q(x, y, z),$$

*где* $a(z)$, $c_k(z)$, $k = 0, 1, 2$ *– аналитические функции по* $z$ *в некоторой области* $D \subset \mathbb{C}$.

Далее проводится Пенлеве-анализ полученных систем при $s = 0$.

**Литература**

1. Андреева Т. К., Березкина Н. С., Пронько В. А. *Об одном классе систем двух дифференциальных уравнений первого и второго порядков со свойством Пенлеве* // Еругинские чтения–2018. XVIII Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям: матер. конф. Гродно, 15–18 мая 2018 г., ГрГУ им. Я.Купалы, 2018. С. 3–4.

# О СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ЯБЛОНСКОГО–ВОРОБЬЕВА

**В.И. Громак**

В настоящей работе мы рассматриваем свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве [1–4]

$$\widetilde{P}_2^{[2N]} \equiv \left(\frac{d}{dz} + 2w\right)\widetilde{L}_N[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \quad N = 1, 2, \dots \tag{1}$$

где оператор $\widetilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\widetilde{L}_{N+1}[u] = \left(\frac{d^3}{dz^3} + (4u + \beta_N)\frac{d}{dz} + 2u_z\right)\widetilde{L}_N[u], \quad \widetilde{L}_1[u(z)] = u(z), \quad N = 1, 2, \dots \tag{2}$$

Первый член этой иерархии, т.е. уравнение $\widetilde{P}_2^{[2]}$, есть второе уравнение Пенлеве $w'' = 2w^3 + zw + \alpha$, а последующие уравнения называют высшими аналогами второго уравнения Пенлеве. Иерархия (1), (2) обобщает известную иерархию второго уравнения Пенлеве [5–8], получаемую при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\dots$, $\beta_{N-1} = 0$ в (2), и связана с иерархией уравнения Кортевега–де Фриза. В уравнении (1) $\alpha$ и $\beta$ – комплексные параметры.

Решение уравнения (1) может иметь лишь простые полюсы с вычетами $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$. Из характера разложений в окрестностях полюсов следует, что рациональное решение необходимо имеет вид

$$w^{[N]}(z) = \sum_{k=1}^{N} k\left(\sum_{j=1}^{l_k^+}\frac{1}{z - z_{kj}} - \sum_{i=1}^{l_k^-}\frac{1}{z - z_{ki}}\right) = \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{\mathbf{P}_k'(z)}{\mathbf{P}_k(z)} - \frac{\mathbf{Q}_k'(z)}{\mathbf{Q}_k(z)}\right), \tag{3}$$

где $l_k^{\pm} \in \mathbb{Z}_+$ – количество полюсов $z_{kj}$, $z_{ki}$ рационального решения $w^{[N]}(z)$ с вычетами $k$ и $-k$ соответственно, а полиномы $\mathbf{P}_k(z)$ и $\mathbf{Q}_k(z)$ не имеют общих множителей и представимы в виде

$$\mathbf{P}_k(z) = \prod_{j=1}^{l_k^+}(z - z_{kj}), \quad \mathbf{Q}_k(z) = \prod_{i=1}^{l_k^-}(z - z_{ki}). \tag{4}$$

Относительно рациональных решений уравнения (1) справедлива*

**Теорема 1.** *Для существования рациональных решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ и для каждого целого $\alpha$ и фиксированного $\beta$ рациональное решение единственно.*

Рациональное решение уравнения (1) при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ также может быть представлено в виде $(Q_n(z) := Q_n^{[N]}(z))$

$$w^{[N]}(z) = \frac{Q_{n-1}'(z)}{Q_{n-1}(z)} - \frac{Q_n'(z)}{Q_n(z)} = \frac{d}{dz}\left(\ln\frac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)}\right), \tag{5}$$

а для $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, $w(z, \alpha, \beta) = -w(z, -\alpha, \beta)$, $w(z, 0, \beta) = 0$. Представление (5) называют представлением Яблонского–Воробьева. Относительно обобщенных полиномов $Q_n(z)$ Яблонского–Воробьева, которые в общем случае не являются взаимно простыми, доказаны следующие утверждения.

*Здесь и далее $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{N-1})$.

**Теорема 2.** *Полиномы* $Q_n(z)$, *дающие представление рационального решения (5) при* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *с начальными полиномами* $Q_0 = 1$, $Q_1 = z$, *удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$Q_{n-1}Q'_{n+1} - Q'_{n-1}Q_{n+1} = (2n+1)Q_n^2, \tag{6}$$

$$Q_{n+1}Q_{n-1} = zQ_n^2 - 2Q_n^2\widetilde{L}_N[2Q_n^{-2}(Q_nQ''_n - (Q'_n)^2)]. \tag{7}$$

Доказано, что полиномы $Q_n(z)$ могут быть определены из соотношения (7) с начальными полиномами $Q_0(z) = 1$, $Q_1(z) = z$. При этом построено уравнение, которому удовлетворяют полиномы $Q_n(z)$. Также доказано, что степень полинома $Q_n(z)$ равна $m = n(n+1)/2$ и не зависит от $N$, т.е. от выбора уравнения из иерархии (1).

**Теорема 3.** *Полиномы Яблонского–Воробьева для обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве имеют структуру*

$$Q_n^{[N]}(z) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}_k^{(k^2-k)/2}\mathbf{Q}_k^{(k^2+k)/2}.$$

Число полюсов рационального решения (5) уравнения (1) при $\alpha = n$ с различными вычетами определяется постоянными $l_k^{\pm} \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют равенствам

$$\sum_{k=1}^{N} k(l_k^+ - l_k^-) = -\alpha, \quad \sum_{k=1}^{N} k^2(l_k^+ + l_k^-) = \alpha^2.$$

При этом достаточно рассмотреть только положительные $\alpha$, так как при отрицательных $\alpha$ число полюсов рациональных решений такое же, как и при положительных, а вычеты меняются на противоположные.

Введем в рассмотрение серию $B$-полиномов, заданных рекуррентным соотношением

$$B_n^{[N]}(\beta) = k_n^{-1}\,\mathrm{Resultant}\,[Q_{n-1}(z), Q_n(z), z], \quad B_0^{[N]} = 1, \quad \alpha = n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $k_n \neq 0$ – нормирующие постоянные. Ясно, что полиномы $B_n^{[N]}(\beta)$ определяют значения параметра $\beta$, при которых полиномы $Q_{n-1}(z)$, $Q_n(z)$ имеют общие корни, что равносильно наличию у рационального решения $w(z, n, \beta)$ полюсов с вычетами из множества $\{\pm 2, \pm 3, \ldots, \pm N\}$. Имеет место следующая

**Теорема 4.** *Если* $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, *а для параметра* $\beta$ *выполнено условие* $B_{|n|}^{[N]}(\beta) \neq 0$, *то рациональное решение* $w(z, n, \beta)$ *не имеет полюсов с вычетами из множества* $\{\pm 2, \pm 3, \ldots, \pm N\}$, *при этом справедливо распределение* $l_1^+ = \alpha(\alpha-1)/2$, $l_1^- = \alpha \times$ $\times\,(\alpha+1)/2$, $l_k^{\pm} = 0$, $k \in \{2, \ldots, N\}$.

**Литература**

1. Kudryashov N.A. *Amalgamations of the Painlevé equations* // J. of Math. Phys. 2003. V. 44. № 12. P. 6160–6178.

2. Sakka A. *Linear problems and hierarchies of Painlevé equations* // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. 025210. P. 1–19.

3. Громак В.И. *О решений уравнений Пенлеве высших порядков* // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. междунар. науч. семинара. 11–14 сент. 2012 г. Минск, Беларусь / под ред. С.В. Рогозина. Мн., 2012. С. 27.

4. Голубева Л.Л., Зенченко А.С. *Некоторые свойства решений уравнения* $({}_4\widetilde{P}_2)$ // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2004. Т. 12. № 2. С. 54–56.

5. Airault H. *Rational Solutions of Painlevé equations* // Stud. Appl. Math. 1979. V. 61. P. 31–53.
6. Кудряшов Н.А. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.* Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
7. Clarkson P.A., Joshi N., Pickering A. *Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach* // Inverse Problems. 1999. V. 15. P. 175–187.
8. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane.* Berlin, New-York: De Gruyter Studies in Mathematics 28, 2002.

## О СВОЙСТВЕ ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

**Е.Е. Кулеш**

В работе [1] получены 7 обыкновенный дифференциальных уравнений пятого порядка со свойством Пенлеве. В рамках решения задачи классификации дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка по свойству Пенлеве будем строить на основе этих ОДУ дифференциальные уравнения в частных производных и исследовать их на наличие свойства Пенлеве. В работах [2, 3] исследованы два из них. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y^{(5)}+5yy^{(4)}+15y'y'''+10y^2y'''+10y''^2+50yy'y''+10y^3y''+15y'^3+30y^2y'^2+5y^4y'=0. \quad (1)$$

Построим на его основе дифференциальное уравнение в частных производных

$$(w_{xxxxx}+5ww_{xxxx}+15w_xw_{xxx}+10w^2w_{xxx}+10w_{xx}^2+50ww_xw_{xx}+10w^3w_{xx}+ \\ +15w_x^3+30w^2w_x^2+5w^4w_x)_x=F, \quad (2)$$

где $w=w(x,t)$, а $F$ содержит слагаемые меньшего веса с производными по $x$ и по $t$ с аналитическими коэффициентами от $(x,t)$. Ставится задача исследовать уравнение (2) на наличие свойства Пенлеве и исследовать некоторые аналитические свойства его решений.

Применим метод резонансов. Будем искать решение уравнения (1) в виде ряда

$$w=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\varphi^{k-1}, \quad (3)$$

где $\varphi=\varphi(x,t)$, $u_k=u_k(t)$. Определив резонансную структуру $(u_0;r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6)$ уравнения (2), получим следующие наборы: $(1;-1,1,2,3,5,6)$, $(2;-1,-2,1,2,5,6)$, $(3;-1,-2,-3,1,5,6)$ и $(4;-1,-2,-3,-4,5,6)$. Подберем коэффициенты правой части уравнения (2) так, чтобы резонансные коэффициенты ряда (4) и функция $\varphi$ были произвольными.

**Теорема.** *Если уравнение (2) имеет вид*

$$w_{xxxxxx}+20w_xw_{xxxx}+5ww_{xxxxx}+10w^2w_{xxxx}+35w_{xx}w_{xxx}+70ww_xw_{xxx}+ \\ +10w^3w_{xxx}+90w^2w_xw_{xx}+95w_x^2w_{xx}+5w^4w_{xx}+50ww_{xx}^2+60ww_x^3+20w^3w_x^2= \\ =A(w_{xxxxx}+4ww_{xxxx}+14w_xw_{xxx}+6w^2w_{xxx}+10w_{xx}^2+36ww_xw_{xx}+4w^3w_{xx}+ \\ +12w_x^3+12w^2w_x^2)+B(w_{xxxx}+3ww_{xxx}+9w_xw_{xx}+3w^2w_{xx}+6ww_x^2)+ \\ +C(w_{xxx}+2ww_{xx}+2w_x^2)+Dw_{xx}+Ew_{xt}+G, \quad (4)$$

*где $A,B,\ldots,G$ – аналитические функции от $t$, то оно проходит тест Пенлеве.*

Выполнив в уравнении (4) замену $w = u_x/u$ и проинтегрировав два раза по $x$, можно привести его к линейному виду

$$u_{xxxxx} = Au_{xxxx} + Bu_{xxx} + Cu_{xx} + Du_x + Eu_t + Hu, \quad H_{xx} = G.$$

**Литература**

1. Exton H. *On non-linear ordinary differential equations with fixed critical points* // Rendiconti di Matematica 1971. V. 4. № 3. P. 385–448.

2. Кулеш Е. Е., Мартынов И. П. *Об одном дифференциальном уравнении в частных производных шестого порядка* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2018. № 1. С. 7–19.

3. Кулеш Е. Е., Мартынов И. П. *О свойствах решений одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка* // Весн. Гродненск. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. 2018. Т. 8. № 2. С. 19–25.

# ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**В.С. Немец**

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$w'' = \sum_{i=1}^{n} A_i(z) \exp(B_i(z)) w^{\nu_i}, \tag{1}$$

где $A_i(z) \not\equiv 0$ и $B_i(z)$, $i = \overline{1, n}$, – полиномы комплексного переменного $z$. Числа $\nu_i$ – целые неотрицательные.

Решения уравнения (1) будем искать в виде целых трансцендентных решений с конечным числом нулей (или без нулей) конечного типа, т.е. в виде

$$w\colon z \to P(z) \exp Q(z), \tag{2}$$

где $P$ – полином, $Q$ – целая функция.

В монографии [1] достаточно подробно изложены и систематизированы исследования свойств целых решений у алгебраических дифференциальных уравнений общего вида. В основном изучался рост решений на бесконечности, определялся порядок и тип. Так же исследовалось наличие целых трансцендентных решений у таких уравнений в зависимости от характеристик самого уравнения.

В настоящем докладе предлагается изучать свойства целых трансцендентных решений у неалгебраических дифференциальных уравнений в зависимости от наличия у этих решений нулей (в частности, целых трансцендентных решений с конечным числом нулей). Такая постановка задачи продолжает исследования, начатые в работах [2, 3].

Справедлива

**Теорема 1.** *Любое целое решение уравнения (1) вида (2) будет таким, что целая функция $Q$ является полиномом.*

Далее решения (2) уравнения (1) подразделяются на два класса: особые и неособые экспоненциальные части – и исследования проводятся для каждого класса отдельно.

Устанавливаются свойства полиномов $P$ и $Q$: степени, коэффициенты при старших степенях, их структура. В частности, в случае неособой экспоненциальной части имеет место

**Теорема 2.** *Если целая функция (2), с неособой экспоненциальной частью является решением уравнения (1), то полном $Q$ определяется одним из равенств*

$$Q(z) = \frac{1}{1-\nu_i} B_i(z) + C_i, \quad \nu_i \neq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

### Литература


1. Горбузов В. Н. *Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений.* Гродно: ГрГУ, 2006.

2. Горбузов В. Н., Немец В. С. *К вопросу экспоненциально-полиномиальных решений нелинейного дифференциального уравнения* // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30. № 4. С. 297–300.

3. Горбузов В. Н., Немец В. С. *Целые функции-решения дифференциального уравнения первого порядка с обобщенными квазиполиномиальными коэффициентами* // Punime Matematike. 1988. № 3. С. 23–34.


## СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

**В. М. Пецевич, А. О. Селивёрстова**

Целью данной работы является поиск необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у решений системы двух дифференциальных уравнений

$$x'^2 = (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 +$$

$$+ (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00},$$

$$y'^2 = x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00}, \tag{1}$$

с аналитическими по $t$ коэффициентами, где

$$|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0. \tag{2}$$

Запись $P \neq 0$, здесь и далее означает, что коэффициенты полинома $P$ одновременно не обращаются в нуль в некоторой области $D$.

Исключая из системы (1) компоненту $x$, относительно компоненты $y$ построим уравнение

$$(2y'y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0)^2 = \beta_8(y')^8 + \beta_6(y')^6 + \beta_4(y')^4 + \beta_2(y')^2 + \beta_0,$$

где $a_i$, $\beta_j$ однозначно определяются через коэффициенты системы (1). Требуя выполнение леммы из [1, 2], для наличия свойства Пенлеве получим 27 условий на коэффициенты системы (1). Разрешая их, найдем, что для наличия свойства Пенлеве у решений системы (1) с условиями (2) необходимо, чтобы она принимала один из следующих видов:

$$x'^2 = (K_2y^2 + K_1y + x)(a_{03}x^2 + a_{02}x + a_{01}), \quad y'^2 = K_2y^2 + K_1y + x,$$

где $K_2 \neq 0$ (здесь и в дальнейшем $K_i \in \mathbb{C}$ будем считать произвольными постоянными), $|a_{03}| + |a_{02}| + |a_{01}| \neq 0$;

$$x'^2 = (x + K_1 y)((a_{13}x^2 + a_{12}x + a_{11})y + a_{03}x^2 + a_{02}x + a_{01}), \quad y'^2 = K_1 y + x,$$

где $K_1 \neq 0$, $|a_{13}| + |a_{12}| + |a_{11}| \neq 0$;

$$x'^2 = (a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x)y^2 + (a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x)y + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x, \quad y'^2 = x,$$

где $|a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| \neq 0$.

С помощью метода малого параметра, метода резонансов, метода сравнения с классическими уравнениями P-типа, показываем, что справедлива

**Теорема.** *Для того, чтобы дифференциальная система (1) при условии (2) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она дробно-линейным преобразованием $x$, $y$ и аналитической заменой независимой переменной $t$ приводилась к одному из следующих видов:*

$$x'^2 = a_{02}(K_2 y^2 + x)(x + K_1), \quad y'^2 = K_2 y^2 + x,$$

*где* $K_2 \neq 0$, $a_{02} \neq 0$;

$$x'^2 = a_{01}(K_2 y^2 + x), \quad y'^2 = K_2 y^2 + x,$$

*где* $K_2 \neq 0$, $a_{01} \neq 0$;

$$x' = \varepsilon\sqrt{a_{02}}(x + K_1 y), \quad y'^2 = x + K_1 y,$$

*где* $K_1 \neq 0$, $a_{02} \neq 0$, $\varepsilon^2 = 1$;

$$x'^2 = \frac{xy^2(x + K_1)}{(K_2 t + K_3)^2}, \quad y'^2 = x,$$

*где* $|K_2| + |K_3| \neq 0$. *В последнем случае решения выражаются через решения третьего уравнения Пенлеве.*

**Литература**

1. Cosgrove C. M., Scoufis G. *Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree* // Stud. Appl. Math. 1993. V. 88. P. 25–87.

2. Пецевич В. М., Пронько В. А. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени* // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 2 (35). С. 69–75.

# ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ПУАССОНА ПОСТРОЕНИЯ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

**А.Ф. Проневич**

Рассмотрим гамильтонову дифференциальную систему с $n$ степенями свободы

$$\frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} H(t,q,p), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\,\partial_{q_i} H(t,q,p), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $q = (q_1, \ldots, q_n)$ и $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – точки из пространства $\mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, а дважды непрерывно дифференцируемая на области $D = T \times G$, $T \subset \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^{2n}$ функция $H\colon D \to \mathbb{R}$.

Среди общих методов построения первых интегралов системы Гамильтона (1) особое значение имеет метод Пуассона. Он дает возможность по двум первых интегралам системы (1) находить третий первый интеграл этой системы, а значит, в определенных случаях строить интегральный базис системы (1). Благодаря этому свойству метод Пуассона вошел практически во все монографии и учебники по аналитической механике (см., например, [1, с. 240; 2, 184; 3, с. 100]) и сформулирован в виде следующего утверждения.

**Теорема 1** (теорема Пуассона). *Пусть функции* $\mathrm{g}_k \in C^2(D')$, $k = 1, 2$, *являются первыми интегралами на области* $D' \subset D$ *гамильтоновой системы (1). Тогда скобка Пуассона*

$$\mathrm{g}_{12}\colon (t, q, p) \to [\mathrm{g}_1(t, q, p), \mathrm{g}_2(t, q, p)] \quad \forall (t, q, p) \in D' \tag{2}$$

*от функций* $\mathrm{g}_1$ *и* $\mathrm{g}_2$ *будет первым интегралом гамильтоновой системы (1).*

В данной работе изучен вопрос о том, какие именно интегральные характеристики гамильтоновой системы (1) определяет скобка Пуассона (2) в случае, когда функции $\mathrm{g}_1$ и $\mathrm{g}_2$ определяют интегральные многообразия гамильтоновой системы (1).

Основной результат работы содержит

**Теорема 2** (обобщенная теорема Пуассона). *Пусть функции* $\mathrm{g}_k \in C^2(D')$, $k = 1, 2$, *определяют интегральные многообразия гамильтоновой системы* (1) *такие, что*

$$\mathfrak{G}\mathrm{g}_k(t, q, p) = \Phi_k(t, q, p), \quad \Phi_k(t, q, p)\big|_{\mathrm{g}_k(t,q,p)=0} = 0 \quad \forall (t, q, p) \in D' \subset D, \quad k = 1, 2,$$

*где оператор*

$$\mathfrak{G}(t, q, p) = \partial_t + \sum_{i=1}^{n} (\partial_{p_i} H(t, q, p) \partial_{q_i} - \partial_{q_i} H(t, q, p) \partial_{p_i}) \quad \forall (t, q, p) \in D.$$

*Тогда функция*

$$\mathrm{g}\colon (t, q, p) \to [\mathrm{g}_1(t, q, p), \mathrm{g}_2(t, q, p)] - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau \quad \forall (t, q, p) \in D'$$

*будет первым интегралом системы* (1), *если и только если имеет место тождество*

$$[\mathrm{g}_1(t, q, p), \Phi_2(t, q, p)] - [\mathrm{g}_2(t, q, p), \Phi_1(t, q, p)] = \varphi(t) \quad \forall (t, q, p) \in D', \quad \varphi \in C(T).$$

Из теоремы 2 при $\varphi(t) = 0$ $\forall t \in T$ получаем основной результат работы [4].

### Литература


1. Якоби К. *Лекции по динамике.* Л.; М.: Главная редакция общетехнической литературы, 1936.
2. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1974.
3. Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике.* М.: Наука, 1966.
4. Pranevich A. The generalized Jacobi–Poisson theorem of building first integrals for Hamiltonian systems // Qualitative Theory of Differential Equations: proceedings of International Workshop QUALITDE–2018 / Editorial board I. Kiguradze, R.P. Agarwal, R. Hakl et al. Tbilisi, 2018. P. 147–149.

# НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ПАР ФУНКЦИЙ

**Л.А. Хвощинская**

Пусть при обходе вокруг точек $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\infty$ комплексной плоскости вектор-функция $Y(z) = (y_1(z), y_2(z))$ испытывает линейное преобразование с помощью постоянных невырожденных матриц $V_k$, $k = 1, \ldots, 4$, $V_1V_2V_3V_4 = E$, т.е. $Y \to V_kY$. Матрицы $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ образуют группу монодромии.

Рассматривается невырожденный случай, когда матрицы $V_1$, $V_2$, $V_3$ не приводятся одним преобразованием подобия к треугольному виду. При решении задачи применяется «метод логарифмирования произведения матриц» (см. [1]).

Обозначим через $\alpha_k$ и $\beta_k$ характеристические числа матриц $V_K$, $k = 1, \ldots, 4$; $\alpha_{j,j+1}$, $\beta_{j,j+1}$ – характеристические числа матриц $V_jV_{J+1}$, $j = 1, 2$, а $\rho_k = (2\pi i)^{-1} \ln \alpha_k$, $\sigma_k = (2\pi i)^{-1} \ln \beta_k$, $\rho_{j,j+1} = (2\pi i)^{-1} \ln \alpha_{j,j+1}$, $\sigma_{j,j+1} = (2\pi i)^{-1} \ln \beta_{j,j+1}$. Здесь ветви логарифмов выбраны из условий $|\mathrm{Re}\,(\rho_k - \sigma_k)| < 1$, $|\mathrm{Re}\,(\rho_{j,j+1} - \sigma_{j,j+1})| < 1$, причем $\Sigma_{k=1}^4(\rho_k + \sigma_k) = 1$ (соотношение Фукса),

$$\rho_{12} + \sigma_{12} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2, \quad \rho_{23} + \sigma_{23} = \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3.$$

Числа $\rho_{13}, \sigma_{13}$ находим из системы уравнений

$$\rho_{13} + \sigma_{13} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_3 + \sigma_3,$$

$$\rho_4(\sigma_4 - 1) = \rho_{12}\sigma_{12} + \rho_{23}\sigma_{23} + \rho_{13}\sigma_{13} - \rho_1\sigma_1 - \rho_2\sigma_2 - \rho_3\sigma_3.$$

В общем случае решение задачи в окрестности каждой особой точки $a_k$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{3} (z - \alpha_k)^{\rho_k} D_k \begin{pmatrix} u_k(z) \\ v_k(z) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, 3,$$

где $D_k$ – матрица, приводящая матрицу $V_k$ к нормальной жордановой форме, $u_k(z)$, $v_k(z)$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения Фукса второго порядка

$$u'' + \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{1 + \rho_k - \sigma_k}{z - \alpha_k} - \frac{1}{z - b}\right)u' +$$

$$+ \left(\prod_{k=1}^{3}(z - \alpha_k)\right)^{-1} \left(\rho\sigma z - b\rho - \sum_{k=1}^{3} \tau_k\alpha_k + \frac{q}{z - b}\right)u = 0,$$

$\rho = \sum_{k=1}^{4} \rho_k$, $\sigma = \sigma_4 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k$, $\tau_1 = \rho_{23}\sigma_{23} - (\rho_2 + \rho_3)(\sigma_2 + \sigma_3)$, $\tau_2 = \rho_{13}\sigma_{13} - (\rho_1 + \rho_3)(\sigma_1 + \sigma_3)$, $\tau_3 = \rho_{12}\sigma_{12} - (\rho_1 + \rho_2)(\sigma_1 + \sigma_2)$, а акцессорные параметры явно выражаются через параметры $\rho_k$, $\sigma_k$ $(k = 1, \ldots, 4)$, $\rho_{j,j+1}$, $\sigma_{j,j+1}$ $(j = 1, 2)$ и точки $a_1$, $a_2$, $a_3$.

Исследования показали, что если матрица $D_4$ приводящая матрицу $V_4$ к нормальной жордановой форме, приводит какую-либо матрицу $V_k$ $(k = 1, 2, 3)$ к треугольному виду, то $b = a_k$, $q = 0$, и дифференциальное уравнение упрощается. В частности, имеет место

**Утверждение.** *Если матрица $D_4$ приводит матрицу $V_1$ к треугольному виду, то фундаментальное уравнение (1) в окрестности точки $a_1$ имеет вид*

$$u_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - a_1)^n, \quad v_1(z) = (z - a_1)^{1+\sigma_1-\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z - a_1)^n,$$

*а коэффициенты $A_n$, $B_n$ рядов находится из рекуррентных соотношений*

$$A_{n+1} = \frac{1}{p'_n}(r_n A_n + s_n A_{n-1}), \quad B_{n+1} = \frac{1}{p'_n}(r'_n A_n + s'_n B_{n-1}),$$

*где*

$$p_n = (n+1)(\rho_1 - \sigma_1 + n), \quad p'_n = (n+1)(2 + \sigma_1 - \rho_1 + n),$$

$$r_n = \sum_{j=2}^{3} \frac{(\rho_{1j} - \rho_1 - \rho_j + n)(\sigma_{1j} - \rho_1 - \rho_j + n)}{a_1 - a_j},$$

$$r'_n = \sum_{j=2}^{3} \frac{(\rho_{1j} - \sigma_1 - \rho_j + n + 1)(\sigma_{1j} - \sigma_1 - \rho_j + n + 1)}{a_1 - a_j},$$

$$s_n = \frac{(\rho + n - 1)(\sigma + n - 1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \quad s'_n = \frac{(\rho + \sigma_1 - \rho_1 + n - 1)(\sigma_1 + \sigma_1 - \rho_1 + n - 1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}.$$

Аналогичные утверждения имеют место и в случаях, когда матрица $D_4$ приводит матрицу $V_2$ или $V_3$ к треугольному виду.

### Литература

1. Хвощинская Л.А. *О применении логарифмирования произведения матриц к решению проблемы Римана* // Математические методы в технике и технологиях (ММТТ–28): сб. тр. XXVII Междунар. науч. конф. Т. 7. Рязань, 2015. С. 28–31.

## О РЕШЕНИЯХ СЕМЕЙСТВА ТРЕХМЕРНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

**В.В. Цегельник**

В докладе представлены результаты исследования аналитических свойств решений консервативных систем

$$\dot{x} = y^2 + ky, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \tag{1}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \tag{2}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \tag{3}$$

$$\dot{x} = yz + x, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = x. \tag{4}$$

$$\dot{x} = yz + y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \tag{5}$$

$$\dot{x} = yz + y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \tag{6}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = x. \tag{7}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = y. \tag{8}$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = x. \tag{9}$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = y. \tag{10}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x + y. \tag{11}$$

В системах (1)–(11) $x$, $y$, $z$ – неизвестные функции независимой переменной $t$; $k$ – параметр.

Системы (1)–(11) принадлежат [1] к классу консервативных динамических систем третьего порядка (содержащих четыре компоненты) с квадратичными нелинейностями без хаотического поведения. Указанный класс включает 7 семейств систем в зависимости от количества констант и нелинейностей в каждой из них.

В предположении, что переменная $t$ является константой и с учетом [2, 3] доказаны

**Теорема 1.** *Ни одна из систем (1)–(3), (6), (7), (9), (11) не является системой Пенлеве-типа.*

**Теорема 2.** *Системы (4), (5), (8), (10) являются системами Пенлеве-типа.*

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция–2020» (подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем»).

**Литература**

1. Heidel J., Zhang Fu. *Nonchaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems II. The conservative case* // Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 617–633.

2. Айнс Э. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ГНТИУ, 1939.

3. Cosgrove C. M. *Chazy classes IX-XII of third order differential equations* // Stud. Appl. Math. 2000. V. 104. P. 171–228.

# О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

**Б. Чжан**

Если для уравнения

$$P(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y) = 0, \tag{1}$$

где $P(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y)$ – полином с постоянными коэффициентами, искать решение в виде ряда Лорана

$$y = h_0 t^{-s} + \ldots + h t^{r-s} + \ldots, \quad t = z - z_0, \quad s \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

то для однозначности решений уравнения (1), согласно работам [1–3], резонансы $r$ должны быть целыми и различными, причем один из них равен $-1$ [2]. Решениям вида (2) будем сопоставлять наборы

$$(s; h_0; -1, r_1, \ldots, r_{n-1}). \tag{3}$$

В работе [4] приведен класс дифференциальных уравнений третьего порядка, удовлетворяющих необходимым условиям наличия свойства Пенлеве. Однако семь уравнений с целыми резонансами в [4] отсутствуют. Запишем эти уравнения с соответствующими наборами вида (4):

$$y''' = 2\frac{y'y''}{y} - \frac{(y')^3}{y^2} + 3y^2y', \quad (1; \alpha; -1, 2, 3), \quad \alpha^2 = 1; \tag{4}$$

$$y''' = \frac{y'y''}{y} + yy'' + 2y^2y', \quad (1;-1;-1,2,3), \quad (1;2;-1,2,6); \tag{5}$$

$$y''' = 3\frac{y'y''}{y} - 6yy', \quad (2;1;-1,-2,6); \tag{6}$$

$$y''' = 5\frac{y'y''}{y} - 4\frac{(y')^3}{y^2} - 2yy', \quad (2;1;-1,-2,2); \tag{7}$$

$$y''' = 6\frac{y'y''}{y} - 6\frac{(y')^3}{y^2} - 6y^2, \quad (3;1;-1,-2,-3); \tag{8}$$

$$y''' = 4\frac{y'y''}{y} - 2\frac{(y')^3}{y^2} + 30y^2, \quad (3;1;-1,-5,6); \tag{9}$$

$$y'y''' = yy'y'' + 4(y')^3 + \gamma y^2(yy'' - 2(y')^2),$$
$$(1;-1;-1,2,3)\ \ (\gamma=1), \quad (1;-1;-1,1,6)\ \ (\gamma=-1), \quad (1;-1;-1,-2,-3)\ \ (\gamma=11). \tag{10}$$

**Теорема 1.** *Уравнения (4)–(9) имеют соответственно первые интегралы*

$$y'' = \frac{(y')^2}{y} + y^3 + C, \quad \frac{y''}{y} = y' + y^2 + C, \quad \frac{y''}{y^3} = \frac{6}{y} + C,$$
$$\frac{y''}{y^3} = \frac{(y')^2}{y^4} + \frac{2}{y} + C, \quad y'' = 2\frac{(y')^2}{y} - 6(z-C)y^2,$$
$$3(yy'y'' - 2(y')^3 - 30y^4)^2 + 2(yy'' - 2(y')^2)^3 = Cy^6,$$

*где произвольная постоянная интегрирования $C$ отвечает соответственно резонансам*

$$r=3, \quad r=2, \quad r=-2, \quad r=-2, \quad r=-1, \quad r=6.$$

**Замечание 2.** В работе [5] содержатся уравнения (4)–(9), где показано, что решения их мероморфны.

**Теорема 2.** *Общие решения уравнений (4), (5) мероморфны.*

В справедливости теоремы 2 убеждаемся, заметив, что первые интегралы уравнений (4), (5) являются уравнениями второго порядка типа Пенлеве [6, с. 446, с. 450]. Решения указанных уравнений не имеют других подвижных особенностей, кроме однозначных полюсов.

**Теорема 3.** *Общее решение уравнения (10) имеет логарифмические точки ветвления.*

Доказательство теоремы 3 основано на теореме из [7] о разложении решений уравнения, содержащего малый параметр при старшей производной, по степеням этого параметра.

**Теорема 4.** *Уравнения (6) и (7) имеют двухпараметрическое рациональное решение*

$$y = \frac{1}{(z-z_0)^2 - h}, \quad \forall z_0, h; \tag{11}$$

*уравнение (9) имеет двухпараметрическое рациональное решение*

$$y = \frac{(z-z_0)^2}{(z-z_0)^5 - h}, \quad \forall z_0, h. \tag{12}$$

В справедливости теоремы 4 убеждаемся непосредственной подстановкой функции (11) в уравнения (6) и (7), а функции (12) – в (9).

**Литература**

1. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. *A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I* // J. Math. Phys. 1980. V. 21. № 4. P. 715–721.

2. Мартынов И.П. *О дифференциальных уравнениях с подвижными критическими особыми точками* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 10. С. 1780–1791.

3. Андреева Т.К., Мартынов И.П., Пронько В.А. *О нулевых резонансах обыкновенных дифференциальных уравнений* // Весн. Гродзенскага дзярж. ўн-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2010. Т. 102. № 3. С. 29–36.

4. Mugan U., Jrad F. *Non-polynomial third order equations which pass the Painleve test* // Z. Naturforsch. A. 2004. V. 59a. № 3. P. 163–180.

5. Ванькова Т.Н. *Аналитические свойства решений некоторых классов дифференциальных уравнений третьего и высших порядков.* Дис. … канд. физ.-мат. наук. Гродно, 2013.

6. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ГНТИ, 1939.

7. Соболевский С.Л. *Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* Мн., БГУ, 2006.

## О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ

**Б. Чжан, Я. Чэнь, И.П. Мартынов, В.А. Пронько**

Рассмотрим два дифференциальных уравнения с подвижной особой линией из работ [1] и [2] соответственно:

$$x''' = \frac{(x'' - 2xx')^2}{x' - x^2} + 4xx'' - 2(x')^2, \tag{1}$$

$$y''' = 12yy'' - 18(y')^2. \tag{2}$$

В работе [3] приведены следующие преобразования Беклунда между уравнениями (1) и (2):

$$6y = \frac{x'' - 2x^3}{x' - x^2}, \quad x^3 - 3x^2y + 3xy' - \frac{1}{2}y'' = 0. \tag{3}$$

Запишем двухпараметрические рациональные решения уравнений (1) и (2)

$$x = -\frac{1}{z - z_1} - \frac{a}{(z - z_1)^2}, \quad y = -\frac{1}{z - z_1} - \frac{b}{(z - z_1)^2}, \quad \forall z_1, a, b, \tag{4}$$

и выясним, при каких условиях эти решения могут быть получены из общих решений уравнений (1) и (2).

Если общее решение уравнения (2) искать в виде

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \rho, \tag{5}$$

то получим

$$b_{k+1} = \frac{6}{k(k^2 - 1)} \sum_{m=1}^{k} m(5m - 3k - 2) b_m b_{k-m}, \quad k = 2, 3, \ldots, \quad \forall b_0, b_1, b_2.$$

Имеют место следующие леммы.

**Лемма 1.** *Если* $|b_k| \leqslant \delta^{k+1}/40$ *при* $k = 0, 1, 2,$ *то* $|b_n| \leqslant \delta^{n+1}/40, \ \forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Лемму 1 можно использовать при построении мажорантной функции для ряда (5) с целью оценки его радиуса сходимости.

**Лемма 2.** *Если* $b_k = (c - (k+1)b)/c^{k+2}$ *при* $k = 0, 1, 2;$ $b, c \in \mathbb{C},$ $c \neq 0,$ *то* $b_n = (c - (n+1)b)/c^{n+2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Справедлива

**Теорема 1.** *Если*

$$b_k = \frac{c - (k+1)b}{c^{k+2}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

*то ряд (5) определяет рациональное решение* $y$ *из (4), причем* $z_1 = c + z_0, \ \ \rho = |c|$.

**Следствие 1.** *Чтобы рациональное решение уравнения (2) было задано рядом (5), необходимо и достаточно коэффициенты* $b_0, b_1, b_2$ *подчинить условию*

$$(b_2 - 3b_0 b_1 + 2b_0^3)^2 = 4(b_0^2 - b_1)^3.$$

Положим

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \rho_1. \tag{7}$$

Подставляя (5) и (7) в равенство $6y(x' - x^2) = x'' - 2x^3$, т.е. в первое соотношение из (4), получим

$$6 \sum_{m=0}^{k} (m+1) a_{m+1} b_{k-m} = (k+1)(k+2) a_{k+2} +$$

$$+ 2 \sum_{m=0}^{k} \sum_{l=0}^{m} a_l a_{m-l} (3b_{k-m} - a_{k-m}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

При $k = 0$ получим

$$3(a_1 - a_0^2) b_0 = a_2 - a_0^3. \tag{9}$$

Полагая

$$a_k = \frac{c - (k+1)a}{c^{k+2}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

из (9) найдем

$$a = 3b. \tag{11}$$

Подставляя $b_k$ и $a_k$ из (6) и (10) с учетом (11) в равенство (8), получим тождество

$$6 \sum_{m=0}^{k} (m+1)(c - bc(k + 2m + 7) + 3b^2(km - m^2 - m + 2k + 2)) =$$

$$= (k+1)(k+2)(c^2 - 3bc(k+3)) + 4 \sum_{m=0}^{k} \sum_{l=0}^{m} (c^2 - 3bc(m+2) + 9b^2(ml - l^2 + m + 1)).$$

**Теорема 2.** *Функция (7) при условии (10) определяет рациональное решение* $x$ *из (4), причем*

$$z_1 = c + z_0, \quad \rho_1 = |c|.$$

**Следствие 2.** *Чтобы рациональное решение уравнения (1) было задано рядом (7), необходимо и достаточно коэффициенты* $a_0, a_1, a_2$ *подчинить условию*

$$(a_2 - 3a_0 a_1 + 2a_0^3)^2 = 4(a_0^2 - a_1)^3.$$

**Литература**

1. Мартынов И. П. *Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 764–771.
2. Chazy J. *Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes* // Acta Math. 1911. V. 34. P. 317–385.
3. Чэнь Ян. *Аналитические свойства решений системы Дарбу третьего порядка* // Весн. Гродзенскага дзярж. ўн-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2018. Т. 8. № 2. С. 26–31.

## ON SOLUTION OF A CASE OF $\mathbb{R}$-LINEAR CONJUGATION PROBLEM BY THE METHOD OF MATRIX-FUNCTIONS FACTORIZATION

**S.V. Rogosin, L.P. Primachuk, M.V. Dubatovskaya**

A generalization of G.P. Chebotarev approach to the factorization of triangular matrix functions [1] was recently proposed by first two authors [6]. Later, it was discovered that this generalized method can be applied to the factorization of more general matrix-functions. In our report we describe how this method can be used for vector-matrix form of the $\mathbb{R}$-linear conjugation problem. Applications of the $\mathbb{R}$-linear conjugation problem to the study of elasticity problem [5] as well as to answering the questions from mechanics of composite materials [3, 4] are well known.

We consider a case of the $\mathbb{R}$-linear conjugation problem (or Markushevich problem) on the unit circle

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad t \in \mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}, \tag{1}$$

where $\varphi^+(t)$, $\varphi^-(t)$ are boundary values of unknown functions, analytic inside (i.e. in $D^+ := \mathbb{D}$) and outside (i.e. in $D^- := \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$) of the unit disc $\mathbb{D}$. Note that we consider here only the elliptic case $(|a(t)| > |b(t)|)$ of the problem (1), see [2]. Let $\varkappa = \mathrm{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$ be the Cauchy index of the coefficient $a(t)$. Then the problem (1) can be equivalently reduced to the following boundary value problem

$$\psi^+(t) = t^{\varkappa}\psi^-(t) + p(t)\overline{\psi^-(t)} + h(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2}$$

where $p(t)$ is a boundary function analytically extendible into $D^-$. As it was shown in [2] such problem on the unit circle is equivalent to the vector-matrix $\mathbb{C}$-linear conjugation problem

$$\Psi^+(t) = \begin{pmatrix} t^{\varkappa} & 0 \\ 0 & t^{\varkappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - p(t)\overline{p(t)} & p(t) \\ -\overline{p(t)} & 1 \end{pmatrix} \Psi^-(t) + H(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{3}$$

We study the problem (2) (or (4)) under the following additional assumption. Let us additionally assume that the function $p(t)$ is a finite segment of the Fourier series

$$p(t) = \sum_{n=k}^{m} \frac{c_n}{t^n} =: \frac{C_{m-k}(t)}{t^m}. \tag{4}$$

Solution of the vector-matrix boundary value problem (4) is equivalent (see [5]) to the factorization of the matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 - p(t)\overline{p(t)} & p(t) \\ -\overline{p(t)} & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

i.e. its representation in the form

$$A(t) = A^+(t)\Lambda(t)A^-(t),$$

where $A^\pm(t)$ admit together with their inverse $(A^\pm(t))^{-1}$ analytic extension into $D^\pm$, respectively, and $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\{t^{\varkappa_1}, t^{\varkappa_2}\}$ is a diagonal matrix. The integer numbers $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ in this representation are called partial indices of the matrix $A(t)$ and $A^+(t)$, $A^-(t)$ are plus- and minus-factors, respectively.

It is known (see, e.g. [5]) that factorization of this type is equivalent to the construction of the canonical matrix $X^\pm(z)$. It means that these matrices are analytic in the corresponding domains, satisfy the following boundary condition

$$X^+(t) = A(t)X^-(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{6}$$

and $X^-(z)$ has a normal form at infinity (i.e. the sum of the orders of its columns is equal to $\operatorname{ind}_{\mathbb{T}} \det A(t)$.)

To construct canonical matrix we start with the pair of matrices

$$X_0^+(t) = E_2, \quad X_0^-(t) = \begin{pmatrix} 1 & -p(t) \\ \overline{p(t)} & 1 - p(t)\overline{p(t)} \end{pmatrix},$$

which satisfy the boundary condition (6). It follows from the above assumption (4) that $X_0^-(z)$ does not have the normal form at infinity. In order to achieve normality we change the columns of $X_0^-(z)$ by multiplying from the right both sides of (6) on the triangular polynomial matrix functions

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q(t) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad P(t) = \begin{pmatrix} 1 & Q(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

where the polynomials $Q(t)$ are found at the expansion of the ratio $1/p(t)$ into continuous fraction. In our case this expansion is finite and after finite number of steps we obtain from $X_0^-(z)$ a sequence of matrices $X_0^-(z)$, $X_1^-(z)$, $\ldots$, $X_{\nu+1}^-(z)$ with the last one represented in one of the following forms

$$X_{\nu+1}^-(t) = \begin{pmatrix} C_{r_\nu}(t)/t^m & 0 \\ F_\nu(t) & F_{\nu+1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad X_{\nu+1}^-(t) = \begin{pmatrix} 0 & -C_{r_\nu}(t)/t^m \\ F_{\nu+1}(t) & F_\nu(t) \end{pmatrix},$$

where $C_{r_\nu}(t)$ are certain polynomials of order $r_\nu$, and $F_1$, $F_2$, $\ldots$, $F_\nu$, $F_{\nu+1}$ are rational functions having the order at infinity respectively $d_1$, $d_2$, $\ldots$, $d_\nu$, $d_{\nu+1}$. Applying to the these triangular matrices a generalization of the Chebotarev method [6] we obtain the following result.

**Theorem.** *Let for certain* $k, 1 \leqslant k \leqslant \nu$, *the numbers* $d_k$ *be satisfied inequalities*

$$d_1 < 0, \quad \ldots, \quad d_{k-1} < 0, \quad d_k \geqslant 0, \tag{7}$$

*then*

*(i) if* $d_k = 0$, *then partial indices* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ *of the matrix* $A(t)$ *are vanishing, i.e.* $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$;

*(ii) if* $d_k > 0$, *then* $\varkappa_{1,2} = \pm\min\{m - r_k, d_k\}$.

**Remark.** *In the remaining case* $d_1 < 0$, $\ldots$, $d_\nu < 0$, $d_{\nu+1} < 0$ *we can only conclude that partial indices* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ *are finite and belong to the interval* $[k - m + 1, m - k - 1]$.

The obtained results are illustrated by the concrete examples when $p(t)$ contains only two or three terms.

**Acknowledgement.** The work is partially supported by the Belarusian Fund for Fundamental Scientific Research.

### References

1. Chebotarev G. N. *Partial indices of the Riemann boundary value problem with triangular matrix of the second order* // Uspekhi mat. nauk. 1956. V. 11. № 3. P. 192–202 (in Russian).

2. Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M. *Factorization of Measurable Matrix Functions.* Basel; Boston: Birkhäuser, 1987.

3. Mityushev V. V., Rogosin S. V. *Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications.* Boca Raton; London; New York; Washington: Chapman and Hall / CRC PRESS, 1999.

4. Mityushev V. V., Pesetskaya E. V., Rogosin S. V. *Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media* // Thermal Properties of Cellular and Porous Materials (A. Öchsner, G. Murch, and M. de Lemos eds.). Amsterdam: WILEY-VCH., 2008. P. 124–167.

5. Muskhelishvili N. I. *Singular Integral Equations.* Moscow: Nauka, 1968 (in Russian).

6. Primachuk L., Rogosin S. Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. V. 39. № 1. P. 129–137.

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Алдибеков Т.М.**

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x) y_k + g_i(x,\, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad x \in I \equiv [x_0, +\infty), \tag{1}$$

где функции $p_{ik}(x)$, $i,k=1,\ldots,n$, непрерывны на промежутке $I$, функции $g_i(x, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны по $x \in I$ и имеют непрерывные частные производные по $y_s$, $s = 1, \ldots, n$, в области $\|y\| = (\sum_{s=1}^{n} y_s^2)^{1/2} < h$, $y = \mathrm{colon}\,[y_1, \ldots, y_n]$, $g_i(x, 0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

**Теорема.** *Если для некоторого числа* $\alpha > 0$ *и для некоторой положительной непрерывной функции* $\varphi(x)$ *такой, что* $\int_{x_0}^{x} \varphi(s)\, ds \uparrow +\infty$, *при* $x \geqslant x_0$ *выполняются условия:*

*1) имеют место неравенства*

$$p_{k,k}(x) - p_{k+1,k+1}(x) \geqslant \alpha\varphi(x), \quad k = 1, \ldots, n-1;$$

*2) существуют пределы*

$$\lim_{x\to+\infty} (|p_{ik}(x)|/\varphi(x)) = 0, \quad i \neq k, \quad i,k = 1, 2, \ldots, n;$$

*3) имеют место равенства*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_{x_0}^{x} \varphi(s)\, ds\right)^{-1} \int_{x_0}^{x} p_{kk}(s)\, ds = \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

*причем постоянная* $\beta_1$ *отрицательна;*

*4) для чисел* $\alpha \in (0, |\beta_1|)$, $m > 1$ *и* $\varepsilon \in (0, (m-1)\alpha)$ *имеет место неравенство*

$$\int_{x_0}^{x} e^{[\varepsilon + \alpha(1-m)][q(s) - q(x_0)]}\, ds < \infty;$$

*5) векторная функция* $g(x, y) = \mathrm{colon}\,[g_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_n(x, y_1, \ldots, y_n)]$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|g(x, y)\| \leqslant K\|y\|^m, \quad K > 0, \quad m > 1,$$

*где норма*

$$\|g(x, y)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2(x, y_1, \ldots, y_n)\right)^{1/2},$$

*то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (1) экспоненциально устойчиво относительно* $q(x)$ *при* $x \to +\infty$.

**Литература**

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006. С. 320.
2. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Z. 1930. Bd 31. S. 748–766.

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

**И.В. Асташова**

Рассматривается нелинейное уравнение типа Эмдена–Фаулера высокого порядка:

$$y^{(n)}=p(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})|y|^k\operatorname{sgn}y,\quad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant 2,\quad k\in\mathbb{R},\quad 0<k<1,\qquad (1)$$

где функция $p(x,\xi_1,\dots,\xi_n)$ удовлетворяет условию $0<m\leqslant p(x,\xi_1,\dots,\xi_n)\leqslant M<$ $<+\infty$, непрерывна по всем переменным и удовлетворяет условию Липшица по переменным $\xi_1,\dots,\xi_n$. Рассмотрим также частный случай этого уравнения:

$$y^{(n)}=p_0\,|y|^k\operatorname{sgn}y,\quad n\geqslant 2,\quad k\in\mathbb{R},\quad 0<k<1,\quad p_0>0.\qquad (2)$$

В работе [1, §11] дано определение сингулярных решений первого и второго рода. В соответствии с этой терминологией в случае сингулярной нелинейности $(0<k<1)$ под сингулярными решениями будем понимать решения, обращающиеся в нуль в некоторой точке вместе со всеми своими производными до порядка $n$, или знакопеременные решения, имеющие точку накопления нулей. Нас будет интересовать асимптотическое поведение таких решений вблизи границы области определения или вблизи точки нарушения единственности решения. Отметим, что в случаях, когда $n=3$ и $n=4$ (см. работы [5, 6] и приведенную в них библиографию) получена полная асимптотическая классификация решений уравнения (2) (а для случая $n=3$, $p=p(x)$ – и решений уравнения (1)), включающая описание сингулярных решений.

Приведем результат о типичности степенного поведения сингулярных решений на бесконечности для слабо нелинейных сингулярных уравнений. Аналогичный результат для регулярных $(k>1)$ слабо нелинейных уравнений вида (2) получен в [3], а таких уравнений вида (1) – в [4].

**Теорема 1.** *Пусть $n\geqslant 2$, $p\in C(\mathbb{R}^{n+1})\bigcap \mathrm{Lip}_{y_0,\dots,y_{n-1}}(\mathbb{R}^n)$, $p\to p_0>0$ при $x\to$ $\to\infty$, $y_0\to\infty,\dots,y_{n-1}\to\infty$. Тогда существует такое $k_*\in(0;1)$, что для любого действительного $k\in(k_*;1)$ любое максимально продолженное вправо решение уравнения (1), имеющее в некоторой точке положительный набор данных Коши, имеет степенное асимптотическое поведение:*

$$y(x)=\left(p_0\beta^n\prod_{l=1}^{m}(1-\beta l)^{-1}\right)^{1/(1-k)}x^{1/\beta}(1+o(1)),\quad x\to\infty,\quad m=n-1,\quad \beta=\frac{1-k}{n}.$$

Результаты о колеблющихся сингулярных решениях уравнений (1), (2) и их поведении содержатся в [1, §15, 7].

**Литература**

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А., *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1990.
2. Асташова И. В. *Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // В сб. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–290.
3. Astashova I. *On Kiguradze's problem on power-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type differential equations* // Georgian Math. J. 2017. V. 24. № 2. P. 185–191.
4. Astashova I. *On asymptotic behavior of blow-up solutions to higher-order differential equations with general nonlinearity* // Differential and Difference Equations with Applications. Springer International Publishing AG, 2018. P. 1–13.
5. Асташова И. В. *Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 11. С. 847–848.
6. Astashova I. *On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity* // Differential and Difference Equations with Applications. New York: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2016. P. 191–204.
7. Astashova I. *On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations* // WSEAS Trans. on Math. 2017. V. 16. № 5. P. 39—47.

## О СТЕПЕННОМ И НЕСТЕПЕННОМ ПОВЕДЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

**И.В. Асташова**

Для нелинейного уравнения типа Эмдена–Фаулера

$$y^{(n)} = p(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \geqslant 2, \quad k \in (1, \infty), \tag{1}$$

где функция $p(x, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет условию Липшица по переменным $\xi_1, \ldots, \xi_n$, а также неравенству $m \leqslant p(x, \xi_1, \ldots \ldots, \xi_n) \leqslant M$ для некоторых положительных чисел $m$ и $M$, изучается степенное и нестепенное поведение взрывных решений. Наряду с уравнением (1) будем рассматривать его частный случай – уравнение

$$y^{(n)} = p_0|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \geqslant 2, \quad k \in (1, \infty), \quad p_0 \in (0, +\infty). \tag{2}$$

Известно (см. [1, гл. V; 2, гл. 5.3]), что любое максимально продолженное вправо решение уравнения (1), положительное в некоторой точке вместе со всеми своими производными порядка, меньшего $n$, является взрывным, т.е. имеет вертикальную асимптоту в правой (конечной) границе $x^*$ своей области определения. Ранее доказано, что для $n = 2$ (см. [1, гл. V]), для $n \in \{3, 4\}$ (см. работу [2, гл. 5.3] и ссылки в ней на более ранние работы), что любое взрывное решение уравнения (1) имеет степенное асимптотическое поведение

$$y(x) = \pm C(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad x \to x^* - 0, \tag{3}$$

где $C^{k-1} = p_0^{-1} \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha + j)$, $\alpha = n/(k-1)$. Здесь $x^*$ – произвольная константа, а $p_0 > 0$ – предел функции $p$ при $x \to x^*$, $y_0 \to +\infty$, $\ldots$, $y_{n-1} \to +\infty$.

И.Т. Кигурадзе (см. [1, с. 324, задача 16.4]) поставил вопрос о справедливости этого утверждения для уравнения (1) более высокого порядка. Это предположение, базирующееся на доказанных в [3] оценках взрывных решений, оказалось верным для слабо нелинейного уравнения (1) (см. [4, 5]).

**Теорема 1.** *Пусть* $n > 4$ *и* $p \in C(\mathbb{R}^{n+1}) \bigcap \mathrm{Lip}_{y_0,\ldots,y_{n-1}}(\mathbb{R}^n)$. *Если* $p \to p_0 > 0$ *при* $x \to x^*$, $y_0 \to +\infty$, $\ldots$, $y_{n-1} \to +\infty$, *для некоторого* $x^* < \infty$, *то существует такое* $K > 1$, *что для каждого действительного* $k \in (1, K)$ *любое взрывное решение уравнения (1) с правой границей области определения* $x^*$ *имеет степенное асимптотическое поведение (4).*

Однако для уравнения (2) (в [6] – для сколь угодно высокого порядка $n$, в [7] – для $n = 12, 13, 14$, в [8] – для произвольного $n \geqslant 12$) доказано, что при некотором $k > 1$ оно имеет нестепенное решение

$$y = (x^* - x)^{-\alpha} h(\log(x^* - x)), \tag{4}$$

где $h$ – непостоянная непрерывная положительная периодическая функция на $\mathbb{R}$.

Оказалось, что асимптотически степенные решения уравнения (2) порядка $n \geqslant 12$ с достаточно сильной нелинейностью не только не исчерпывают множества всех взрывных решений, но и являются в некотором смысле нетипичными взрывными решениями этого уравнения.

При исследовании асимптотических свойств решений уравнений (1) и (2) (см. [2, гл. 5.3]) использовалось построение на $(n-1)$-мерной фазовой сфере динамической системы, исследование траекторий которой дало возможность получить полную асимптотическую классификацию решений в случаях $n = 3, 4$ (см. [9, 10]). Асимптотически степенным решениям уравнения (1) произвольного порядка $n \geqslant 2$ на этой сфере соответствуют траектории, стремящиеся к некоторой неподвижной точке системы. На координатной карте, покрывающей область сферы, соответствующую точкам с положительными значениями решения и его младших производных, эта система линеаризуется в окрестности особой точки, а собственные значения матрицы Якоби $J$ удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=0}^{n-1} (\lambda + \alpha + j) = \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha + j + 1). \tag{5}$$

Характер спектра матрицы $J$ определяет поведение взрывных решений уравнения (1). Доказано (см. [2, гл. 5.1]), что если у уравнения (5) существует $m$ корней с отрицательной действительной частью, то уравнение (1) имеет $m$-параметрическое семейство взрывных решений со степенным асимптотическим поведением. Так, при $5 \leqslant n \leqslant 11$ доказано существование $(n-1)$-параметрического семейства взрывных решений со степенной асимптотикой у уравнения (1) при некоторых дополнительных предположениях относительно функции $p$ (см. [2, гл. 5.1]). Существование решений вида (4) для уравнения (2) связано с появлением для любого $n \geqslant 12$ при некоторых $k > 1$ пары чисто мнимых корней и некоторыми дополнительными свойствами спектра матрицы $J$ (см. [6–8]). Оказалось [11], что для доказательства нетипичности степенного поведения взрывных решений уравнения (2) также используются свойства корней уравнения (5).

**Теорема 2.** *Если среди корней уравнения (5) нет чисто мнимых, но существует по крайней мере один отличный от единицы корень с положительной действительной частью, то для любой точки* $x_0 \in \mathbb{R}$ *множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (2) имеет меру нуль.*

**Теорема 3.** *Если среди корней уравнения*

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda+j)=\prod_{j=0}^{n-1}(j+1) \tag{6}$$

*нет чисто мнимых, но существует по крайней мере один отличный от единицы корень с положительной действительной частью, то существует такое* $k_n>1$, *что для любого* $k>k_n$ *и любой точки* $x_0\in\mathbb{R}$ *множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (2) имеет меру нуль.*

**Теорема 4.** *Уравнение (6)*

*для любого целого* $n\geqslant 12$ *имеет по крайней мере одну пару сопряженных корней с положительной действительной частью,*

*для любого натурального* $n<62$ *имеет не больше одной пары сопряженных корней с неотрицательной действительной частью,*

*при* $62\leqslant n\leqslant 203$ *имеет ровно две пары сопряженных корней с положительной действительной частью и не имеет чисто мнимых корней.*

**Теорема 5.** *Для любого целого* $n\in[12,203]$ *найдется такое* $k_n>1$, *что для любого вещественного* $k>k_n$ *в любой точке* $x_0\in\mathbb{R}$ *множество данных Коши асимптотически степенных решений уравнения (2) имеет меру нуль.*

Отметим, что интересные результаты о взрывных решениях нелинейных уравнений содержатся в работе [12].

**Нерешенные задачи.**

1. Остается открытым вопрос о существовании решений вида (4) (как и других взрывных решений с нестепенным поведением) у уравнения (2) при $5<n<11$.

2. Не доказан факт отсутствия у уравнения (6) при $n>203$ чисто мнимых корней, что означало бы нетипичность степенного поведения взрывных решений для уравнений таких порядков.

3. Для уравнения (2) при $n>11$ отсутствует ответ на вопрос о существовании других его решений с нестепенным поведением, кроме решений вида (4).

### Литература


1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1990.

2. Асташова И. В. *Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012 Р. 22–290.

3. Квиникадзе Г. Г., Кигурадзе И. Т. *О быстро растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // Сообщ. АН ГССР 1982. V. 106. № 3. P. 465–468.

4. Astashova I. *On Kiguradze's problem on power-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type differential equations* // Georgian Math. J. 2017. V. 24. № 2. P. 185–191.

5. Astashova I. V. *On asymptotic behavior of blow-up solutions to higher-order differential equations with general nonlinearity* // In: Pinelas S., Caraballo T., Kloeden P., Graef J. (eds) Differential and Difference Equat. with Appl. ICDDEA 2017. New York: Springer Proc. in Math. & Statistics, 2018. V. 230. P. 1–13.

6. Kozlov V. A. *On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations* // Ark. Mat. 1999. V. 37. № 2. P. 305–322.

7. Astashova I. V. *On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden–Fowler type higher-order equations* // Adv. in Difference Equat. SpringerOpen J. 2013. V. 2013:220. P. 1–15.

8. Astashova I., Vasilev V. *On nonpower-law behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type higher-order differential equations* // Inter. Workshop QUALITDE–2018, December 1–3, 2018. Tbilisi, 2018. P. 11–15.

9. Astashova I. *On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity* // Differential and Difference Equat. with Appl. New York: Springer Proc. in Math. & Statistics, 2016. P. 191–204.

10. Astashova I. *On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations* // WSEAS Transact. on Math. 2017. V. 16. № 5. P. 39–47.

11. Асташова И. В. *О нетипичности асимптотически степенных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка* // Алгебра и анализ. 2019. Т. 31. № 2. С. 152–173.

12. Кигурадзе И. Т. *О взрывных кнезеровских решениях нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков* // Дифференц. уравнения. 2001. V. 37. № 6. P. 735–743.

# ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛЯПУНОВА СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

**Е.А. Барабанов, В.В. Быков**

Пусть $M$ – метрическое пространство. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \tag{1}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом фиксированном $\mu \in M$ определенная на временнóй полуоси $\mathbb{R}_+$ матричнозначная функция $A(\cdot,\mu)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена (при каждом $\mu$, вообще говоря, своей постоянной). Поэтому при каждом фиксированном в семействе (1) значении $\mu \in M$ получаем линейную дифференциальную систему с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, показатели Ляпунова которой обозначим через $\lambda_1(\mu;A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu;A)$.

**Определение 1.** Коэффициентом неправильности Ляпунова [1, с. 73] семейства (1) называется функция $\sigma_{\text{Л}}(\cdot;A)\colon M \to \mathbb{R}_+$, задаваемая равенством

$$\sigma_{\text{Л}}(\mu;A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mu;A) - \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau,\mu)\,d\tau, \quad \mu \in M.$$

Очевидно, что если не потребовать выполнения каких-то дополнительных свойств отображения $A\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, то для произвольной функции $M \to \mathbb{R}_+$ найдется семейство (1), коэффициент неправильности Ляпунова $\sigma_{\text{Л}}(\cdot;A)$ которого с ней совпадает, и поэтому рассмотрение таких, без дополнительных предположений, семейств (1) бессодержательно как с математической точки зрения, так и с точки зрения практических приложений, в которых эти семейства возникают, в частности, как системы в вариациях нелинейных семейств, в том или ином смысле непрерывно зависящих от параметра.

Обычно семейство матричнозначных отображений $A(\cdot,\mu)$, $\mu \in M$, рассматривают при одном из следующих двух естественных предположений: это семейство непрерывно либо а) в компактно-открытой топологии, либо б) в равномерной топологии. Условие а) равносильно тому, что если последовательность $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек из $M$ сходится к точке $\mu_0$, то последовательность функций $A(\cdot,\mu_k)$ переменной $t \geqslant 0$ сходится к функции $A(\cdot,\mu_0)$ при $k \to +\infty$ равномерно на каждом отрезке $[0,T] \subset \mathbb{R}_+$, а условие б) – что эта сходимость равномерна на всей временнóй полуоси $\mathbb{R}_+$. Класс семейств (1), непрерывных в указанном выше смысле в компактно-открытой топологии, обозначим через $\mathcal{C}^n(M)$, а непрерывных в равномерной топологии – через $\mathcal{U}^n(M)$. Очевидно включение $\mathcal{U}^n(M) \subset \mathcal{C}^n(M)$. Далее мы отождествляем семейство (1) и задающую его матричнозначную функцию $A(\cdot,\cdot)$ и поэтому пишем $A \in \mathcal{C}^n(M)$ или $A \in \mathcal{U}^n(M)$.

Класс вектор-функций $\{(\lambda_1(\cdot;A),\dots,\lambda_n(\cdot;A))^{\text{т}} : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $M$ описан в работе [2], а описание класса $\{(\lambda_1(\cdot;A),\dots,\lambda_n(\cdot;A))^{\text{т}} : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ получено в работе [3]. Ниже приведено полное дескриптивно-множественное описание класса $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot;A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства $M$. Прежде чем его привести, напомним следующее

**Определение 2**. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется [4, с. 224] функцией класса $({}^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([r,+\infty))$ полуинтервала $[r,+\infty)$ является $G_\delta$-множеством метрического пространства $M$.

**Теорема.** *Пусть заданы произвольные число $n \geqslant 2$ и метрическое пространство $M$. Тогда функция $f : M \to \mathbb{R}_+$ является коэффициентом неправильности Ляпунова некоторого семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$ тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $({}^*, G_\delta)$ и имеет непрерывную мажоранту.*

**Замечание 1.** При $n = 1$ описание класса $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot;A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ тривиально: он состоит из всех непрерывных функций $M \to \mathbb{R}_+$.

**Замечание 2.** Аналогичное описание класса $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot;A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$ легко извлекается из результата работы [2] и заключается в следующем: для всяких $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства $M$ функция $f : M \to \mathbb{R}_+$ является коэффициентом неправильности Ляпунова некоторого семейства $A \in \mathcal{C}^n(M)$ тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $({}^*, G_\delta)$.

Приведенная выше теорема позволяет описать строение лебеговских множеств [4, с. 221] коэффициента неправильности Ляпунова семейств из $\mathcal{U}^n(M)$.

**Следствие.** *Пусть заданы метрическое пространство $M$ и числа $n \geqslant 2$ и $r \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*1) совокупность множеств $\{\mu \in M : \sigma_{\text{Л}}(\mu;A) \geqslant r\}$, $A \in \mathcal{U}^n(M)$, состоит из всех подмножеств $M$ типа $G_\delta$, если $r > 0$ и содержит единственный элемент $M$, если $r \leqslant 0$;*

*2) совокупность множеств $\{\mu \in M : \sigma_{\text{Л}}(\mu;A) > r\}$, $A \in \mathcal{U}^n(M)$, состоит из всех подмножеств $M$ типа $G_{\delta\sigma}$, если $r \geqslant 0$ и содержит единственный элемент $M$, если $r < 0$;*

*3) совокупность множеств $\{\mu \in M : \sigma_{\text{Л}}(\mu;A) = r\}$, $A \in \mathcal{U}^n(M)$, состоит из всех подмножеств $M$ типа $F_{\sigma\delta}$, если $r \geqslant 0$ и содержит единственный элемент $M$, если $r < 0$.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского Фонда фундаментальных исследований (проект Ф17-102).

**Литература**

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

2. Карпук М. В. *Показатели Ляпунова обобщенных расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения* // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1140–1141.

3. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.

4. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.; Л.: ОНТИ, 1937.

# НЕИНВАРИАНТНОСТЬ МНОЖЕСТВА СЛАБО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ДИХОТОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАЦИИ СОПРЯЖЕНИЯ

**Е.Б. Бекряева**

Для натурального $n$ через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с матрицей коэффициентов $A(\cdot)\colon [0,+\infty) \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, кусочно-непрерывной и ограниченной $(\sup\{\|A(t)\| : t \geqslant 0\} < +\infty)$ на временнóй полуоси $t \geqslant 0$. Будем отождествлять систему (1) и ее матрицу коэффициентов и вследствие этого писать $A \in \mathcal{M}_n$. В работе [1] введен класс систем, названных в [2] слабо экспоненциально дихотомическими на полуоси и представляющих собой обобщение экспоненциально дихотомических на полуоси систем.

Система $A \in \mathcal{M}_n$ называется *слабо экспоненциально дихотомической* (на полуоси), если существуют такие положительные постоянные $\nu_1$ и $\nu_2$ и такое разложение пространства $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ начальных (при $t = 0$) данных в прямую сумму подпространств $L_-$ и $L_+$ (причем, случай нулевой размерности одного из подпространств не исключается), что для ее решений $x(\cdot)$ выполняются два условия:

а) если $x(0) \in L_-$, то $\|x(t)\| \leqslant c_1(x)e^{-\nu_1(t-s)}\|x(s)\|$ для любых $t \geqslant s \geqslant 0$,

б) если $x(0) \in L_+$, то $\|x(t)\| \geqslant c_2(x)e^{\nu_2(t-s)}\|x(s)\|$ для любых $t \geqslant s \geqslant 0$,

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от выбора решения $x(\cdot)$ (что и отражено в обозначении этих постоянных).

Если положительные постоянные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ можно выбрать одними и теми же для всех решений из $L_-$ и $L_+$ соответственно (т.е. если оценки а) и б) равномерны по этим постоянным), то приходим к классическому определению экспоненциально дихотомической системы [3, с. 233 – 234]. Класс $n$-мерных слабо экспоненциально дихотомических систем обозначим через $WE_n$, а класс $n$-мерных экспоненциально дихотомических систем, как принято, – через $E_n$. Очевидно равенство $E_1 = WE_1$. То, что при $n \geqslant 2$ включение $E_n \subset WE_n$ является собственным, вытекает из работы [4] и отмечено в [1]. В работе [1] доказано, что, описательно говоря, неравномерность оценок а) и б) может быть сделана сколь угодно малой, и, тем не менее, система не будет экспоненциально дихотомической.

Таким образом, определение слабо экспоненциально дихотомических систем отличается от определения экспоненциально дихотомических систем только отказом от требования равномерности оценок по соответствующим постоянным-множителям.

Поскольку определения классов $E_n$ и $WE_n$ достаточно близки, то представляется правдоподобным, что и их свойства, если и отличаются, то несущественно. Например, хорошо известно, что если система является экспоненциально дихотомической, то и сопряженная ей система экспоненциально дихотомична (класс экспоненциально дихотомических систем инвариантен относительно операции сопряжения), т.е. если $A \in E_n$, то и $-A^{\text{т}} \in E_n$. Оказывается, для класса $WE_n$ слабо экспоненциально дихотомических систем это утверждение места не имеет, как показывает следующая

**Теорема.** *Для любого $n \geqslant 2$ существует $n$-мерная слабо экспоненциально дихотомическая система, такая, что сопряженная к ней система не является слабо экспоненциально дихотомической.*

**Литература**

1. Бекряева Е. Б. *О равномерности оценок норм решений экспоненциально дихотомических систем* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 626 – 636.
2. Бекряева Е. Б. *Линейные дифференциальные системы, близкие к экспоненциально дихотомическим* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55. № 1. С. 36–40.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.
4. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1665–1676.

# УСЛОВИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВОЗМУЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**А.А. Бондарь**

Рассматривается система линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами

$$y_{n+1} = (A(n) + B(n))y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $A(n)$ – невырожденные матрицы размера $m \times m$, а матричная последовательность $\{A(n)\}$ – $N$-периодическая, т.е. $A(n+N) = A(n)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\{B(n)\}$ – $N$-периодическая последовательность возмущений. Предполагается, что система

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

экспоненциально дихотомична. Как показано в работе [1], это эквивалентно тому, что существуют эрмитовы матрицы $H(0)$, $H(1)$, $\ldots, H(N-1)$ и матрица $P$, удовлетворяющие следующей краевой задаче:

$$H(l)-A^*(l)H(l+1)A(l)=(U_l^*)^{-1}P^*U_l^*U_lPU_l^{-1}-(U_l^*)^{-1}(I-P)^*U_l^*U_l(I-P)U_l^{-1},\ l=\overline{0,N-1},$$
$$H(0) = H(N) > 0, \quad H(0) = P^*H(0)P + (I-P)^*H(0)(I-P),$$
$$P^2 = P, \quad PU_N = U_NP, \tag{2}$$

где $U_l$ – матрица Коши. Этот критерий является аналогом критерия Крейна для экспоненциальной дихотомии разностных уравнений с постоянными коэффициентами [2].

Используя тот факт, что решение краевой задачи (2) представимо в виде

$$H(l) = (U_l^*)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(U_N^*)^kP^*\left(\sum_{i=l}^{N+l-1}U_i^*U_i\right)PU_N^k\right)U_l^{-1} +$$
$$+ (U_l^*)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(U_N^*)^k(I-P)^*\left(\sum_{i=l}^{N+l-1}U_i^*U_i\right)(I-P)U_N^k\right)U_l^{-1} = H^-(l) + H^+(l),$$

можно получить условия на возмущения $\{B(n)\}$, при которых система (1) также экспоненциально дихотомична.

**Теорема.** *Пусть* $\det(A(n)) \neq 0$ *и матричная последовательность возмущений* $\{B(n)\}$ *удовлетворяет условию*

$$\max\{\|B(0)\|, \ldots, \|B(N-1)\|\} < \left(\left(1 - \frac{1}{h^-}\right)\sqrt{h^-\|H(0)\|} + \left(1 + \frac{1}{h^+}\right)\sqrt{h^+\|H(0)\|}\right)^{-1},$$

*где*

$$h^- = \max\{\|H^-(0)\|, \|H^-(1)\|, \ldots, \|H^-(N-1)\|\},$$

$$h^+ = \max\{\|H^+(0)\|, \|H^+(1)\|, \ldots, \|H^+(N-1)\|\}.$$

*Тогда для возмущенной системы (1) имеет место экспоненциальная дихотомия.*

Данные исследования являются продолжением [1, 3–5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-31-00408).

**Литература**

1. Демиденко Г. В., Бондарь А. А. *Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами* // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 6. С. 1240–1254.

2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.

3. Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В. *Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами* // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41. № 6. С. 1227–1237.

4. Demidenko G. V. *Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms* // J. Comp. Math. Optim. 2010. V. 6. № 1. P. 1–12.

5. Demidenko G. V. *On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients* // Inter. J. Dyn. Syst. Differ. Equat. 2016. V. 6. № 1. P. 63–74.

## ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА РАВНОМЕРНО НА ВРЕМЕННО́Й ПОЛУОСИ

**В.В. Быков**

Пусть $M$ – метрическое пространство. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом фиксированном $\mu \in M$ определенная на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ матричнозначная функция $A(\cdot,\mu)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена (при каждом $\mu$, вообще говоря, своей постоянной). Таким образом, при каждом фиксированном в семействе (1) значении $\mu \in M$ получаем линейную дифференциальную систему с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, показатели Ляпунова которой обозначим через $\lambda_1(\mu; A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu; A)$. Потребуем, чтобы семейство (1) было непрерывно в топологии равномерной сходимости коэффициентов на полуоси, т.е. чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\nu\to\mu} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |A(t,\nu) - A(t,\mu)| = 0, \quad \mu \in M. \tag{2}$$

Класс таких семейств (1) обозначим через $\mathcal{U}^n(M)$. Далее мы отождествляем семейство (1) и задающую его матричнозначную функцию $A(\cdot,\cdot)$ и поэтому пишем $A \in \in \mathcal{U}^n(M)$.

Еще О. Перрон [1] (см. также [2, с. 23–24]) указал пример аналитического отображения $A \in \mathcal{U}^2([0,1])$, для которого функция $\lambda_2(\cdot\,; A)$ не только не является непрерывной, но даже не является полунепрерывной сверху. Возникает естественный вопрос: что́ представляет собой класс функций

$$\Lambda_k(M;n) = \{\lambda_k(\cdot\,;A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\} \tag{3}$$

для заданных $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$ и метрического пространства $M$? В случае $n = 1$ описание класса (4) очевидно: он состоит из всех непрерывных функций $M \to \mathbb{R}$.

В.М. Миллионщиков в работе [3] установил, что для каждого $k = \overline{1,n}$ и всякого непрерывного отображения $A(\cdot,\cdot)$ (даже не обязательно ограниченного по $t$ при фиксированном значении $\mu$) функция $\lambda_k(\cdot\,;A)$ представляется как предел убывающей последовательности функций первого бэровского класса, и, в частности, принадлежит второму бэровскому классу. То, что в этом утверждении номер бэровского класса понизить нельзя, доказано М.И. Рахимбердиевым [4].

Прежде чем сформулировать основной результат, напомним следующее определение [5, с. 223–224]. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – совокупности подмножеств пространства $M$. Тогда функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется функцией класса $(\mathfrak{M},^*)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}((r,+\infty))$ интервала $(r,+\infty)$ принадлежит $\mathfrak{M}$ и функцией класса $(^*,\mathfrak{N})$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([r,+\infty))$ полуинтервала $[r,+\infty)$ принадлежит $\mathfrak{N}$. Наконец, функция $f$ называется функцией класса $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$, если она одновременно является функцией класса $(\mathfrak{M},^*)$ и функцией класса $(^*,\mathfrak{N})$. Напомним также, что $G_\delta$-множеством называется счетное пересечение открытых множеств, а $F_\sigma$-множеством – счетное объединение замкнутых множеств.

Следующая теорема [6] содержит полное описание класса (3).

**Теорема 1**. *Пусть заданы метрическое пространство $M$, функция $f : M \to \mathbb{R}$ и числа $n \geqslant 2$ и $k \in \{1,\ldots,n\}$. Тогда семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, удовлетворяющее условию $\lambda_k(\cdot\,;A) = f$, существует тогда и только тогда, когда $f$ принадлежит классу $(^*,G_\delta)$ и имеет непрерывные миноранту и мажоранту.*

Основной в приведенной выше теореме является ее достаточная, конструктивная, часть, которая допускает следующие уточнения.

Обозначим через $\mathcal{Q}^n(M)$ класс семейств (1) вида $A(t,\mu) = B(t) + Q(t,\mu)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in M$, где $B(t)$ – ограниченная $n\times n$-матрица, а $Q(t,\mu)$ – ограниченная $n\times n$-матрица, убывающая при $t \to +\infty$ к нулю равномерно относительно $\mu \in M$. Из доказательства приведенной теоремы вытекает следующее

**Следствие 1.** *Для каждых натурального $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$, метрического пространства $M$ и ограниченной функции $f : M \to \mathbb{R}$, принадлежащей классу $(^*,G_\delta)$, существует такое семейство $A \in \mathcal{Q}^n(M)$, что $\Lambda_k(\cdot\,;A) = f$.*

В случае, когда $M$ – отрезок вещественной оси, можно выбрать нужное семейство аналитическим по параметру.

**Следствие 2.** *Для каждых натурального $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$ и ограниченной функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, принадлежащей классу $(^*,G_\delta)$, существует такое аналитическое по второму аргументу семейство $A \in \mathcal{Q}^n(M)$, что $\Lambda_k(\cdot\,;A) = f$.*

Приведенная выше теорема позволяет описать строение лебеговских множеств [5, с. 221] показателей Ляпунова семейств из $\mathcal{U}^n(M)$.

**Следствие 3.** *Пусть заданы метрическое пространство $M$ и числа $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$ и $r \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*1) совокупность множеств $\{\mu \in M : \lambda_k(\mu;A) \geqslant r\}$, $A \in \mathcal{U}^n(M)$, состоит из всех подмножеств $M$ типа $G_\delta$;*

*2) совокупность множеств* $\{\mu \in M : \lambda_k(\mu; A) > r\}$, $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, *состоит из всех подмножеств* $M$ *типа* $G_{\delta\sigma}$ *(т.е. счетных объединений подмножеств типа* $G_\delta$*);*

*3) совокупность множеств* $\{\mu \in M : \lambda_k(\mu; A) = r\}$, $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, *состоит из всех подмножеств* $M$ *типа* $F_{\sigma\delta}$ *(т.е. счетных пересечений подмножеств типа* $F_\sigma$*).*

Приведенная теорема также позволяет в случае полного сепарабельного пространства $M$ для всяких $n \geqslant 2$ и $k = \overline{1,n}$ описать совокупность множеств значений $k$-го показателя Ляпунова семейств из $\mathfrak{U}^n(M)$, т.е. множество $\mathfrak{R}_k^n(M) \equiv \{\lambda_k(M; A) : A \in \in \mathfrak{U}^n(M)\}$. Через $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ условимся обозначать совокупности соответственно непустых суслинских [5, с. 192], ограниченных и не более чем счетных подмножеств вещественной прямой, а через $\mathfrak{P}(M)$ – совокупность подмножеств вещественной прямой, имеющих мощность, не превосходящую мощности множества $M$.

**Следствие 4.** *Пусть заданы метрическое пространство* $M$ *и числа* $n \geqslant 2$ *и* $k = \overline{1,n}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

*1) если* $M$ *компактно, то* $\mathfrak{R}_k^n(M) = \mathfrak{S} \bigcap \mathfrak{B} \bigcap \mathfrak{P}(M)$;

*2) если* $M$ *является объединением компактного и счетного подмножеств и некомпактно, то* $\mathfrak{R}_k^n(M)$ *состоит из всех множеств вида* $S \bigcup C$, *где* $S \in \mathfrak{S} \bigcap \mathfrak{B} \bigcap \mathfrak{P}(M)$, *а* $C \in \mathfrak{C}$;

*3) если* $M$ *полно, сепарабельно и не является объединением компактного и не более чем счетного подмножеств, то* $\mathfrak{R}_k^n(M) = \mathfrak{S}$.

Как показывает пример М.И. Рахимбердиева [4], множество точек непрерывности функции $\lambda_k(\cdot\,; A)$, $k = \overline{1,n}$, может оказаться пустым, даже если $M$ – отрезок. В работе [3] В.М. Миллионщиков доказал, что если $M$ – полное метрическое пространство, то для всякой непрерывной функции $A : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ при каждом $k = \overline{1,n}$ множество $US_k(A)$ точек полунепрерывности сверху функции $\lambda_k(\cdot\,; A)$ содержит плотное $G_\delta$-множество. Другими словами, полунепрерывность сверху этих функций типична по Бэру в пространстве $M$. Для полунепрерывности снизу это уже не так: в работе [7] для любых $n \geqslant 2$ и $k = \overline{1,n}$ построено семейство $A \in \mathfrak{U}^n([0,1])$, для которого множество точек полунепрерывности снизу $LS_k(A)$ пусто.

Используя полученную теорему, мы можем для каждого метрического пространства $M$ полностью описать каждое из множеств $LS_k(A)$, $k = \overline{1,n}$, а в случае полного пространства $M$ – также и каждое из множеств $US_k(A)$ для семейств $A \in \mathfrak{U}^n(M)$.

**Следствие 5.** *Для каждых натурального* $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$ *и метрического пространства* $M$ *подмножество* $S$ *пространства* $M$ *тогда и только тогда является множеством полунепрерывности снизу* $k$*-го показателя Ляпунова некоторого семейства* $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, *т.е.* $S = LS_k(A)$, *когда* $S$ *представляет собой множество типа* $F_{\sigma\delta}$, *содержащее все изолированные точки пространства* $M$. *Более того, в тех случаях, когда указанное семейство существует, оно может быть выбрано из класса* $\mathfrak{Q}^n(M)$.

**Следствие 6.** *Для каждых натурального* $n \geqslant 2$, $k = \overline{1,n}$ *и полного метрического пространства* $M$ *подмножество* $S$ *пространства* $M$ *тогда и только тогда является множеством полунепрерывности сверху* $k$*-го показателя Ляпунова некоторого семейства* $A \in \mathfrak{U}^n(M)$, *т.е.* $S = US_k(A)$, *когда множество* $S$ *представляет собой плотное в пространстве* $M$ *множество типа* $G_\delta$. *Более того, в тех случаях, когда указанное семейство существует, оно может быть выбрано из класса* $\mathfrak{Q}^n(M)$.

Семейство (1) можно рассматривать и при менее жестком ограничении, чем условие (2), а именно, требовать лишь непрерывности матричнозначной функции $A(\cdot,\cdot)$. Последнее равносильно требованию непрерывности семейства в смысле топологии равномерной сходимости коэффициентов на компактах временной полуоси. Обозначим класс таких семейств через $\mathcal{C}^n(M)$. Полное описание класса функций $\{\lambda_k(\cdot\,;A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$, $k = \overline{1,n}$, и даже класса вектор-функций $\{(\lambda_1(\cdot\,;A),\ldots,\lambda_n(\cdot\,;A))^{\mathrm{т}} : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$, для всяких метрического пространства $M$ и числа $n \in \mathbb{N}$ получено в работе [8]. Описание множеств точек полунепрерывности $LS_k(A)$ и $US_k(A)$, $k = \overline{1,n}$, для семейств из класса $\mathcal{C}^n(M)$, а также $n$-наборов множеств каждого из этих типов, получено в работе [9].

Полное описание класса вектор-функций $\{(\lambda_1(\cdot\,;A),\ldots,\lambda_n(\cdot\,;A))^{\mathrm{т}} : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ представляет собой существенно более трудную задачу, которая была решена в работе [10]. В ней получены аналоги основной теоремы настоящего доклада, а также следствия 1 и следствий 5 и 6. Сформулируем основной результат этой работы.

**Теорема 2.** *Для каждых $n \geqslant 2$, метрического пространства $M$ и вектор-функции $(f_1,\ldots,f_n)^{\mathrm{т}} :\ M \to \mathbb{R}^n$, компоненты которой принадлежат классу $({}^*, G_\delta)$, имеют непрерывные миноранту и мажоранту и для любого $\mu \in M$ удовлетворяют неравенствам $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$, существует такое семейство $A \in \mathcal{U}^n(M)$, что для его показателей Ляпунова $\lambda_k(\cdot\,;A)$ при всех $k = \overline{1,n}$ и $\mu \in M$ справедливы равенства $\lambda_k(\mu;A) = f_k(\mu)$.*

В качестве приложения приведенной теоремы рассмотрим следующую задачу. Для каждого $\mu \in M$ обозначим через $S(\mu;A)$ пространство решений системы (1). Зафиксируем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$. Как известно, множества $L_\alpha(\mu;A) \equiv \{x \in S(\mu;A) : \lambda[x] < \alpha\}$ и $N_\alpha(\mu;A) \equiv \{x \in S(\mu;A) : \lambda[x] \leqslant \alpha\}$ являются векторными подпространствами пространства $S(\mu;A)$. Обозначим их размерности через $d_\alpha(\mu;A)$ и $D_\alpha(\mu;A)$ соответственно. Возникает естественный вопрос, что́ представляют собой функции $\mu \mapsto d_\alpha(\mu;A)$ и $\mu \mapsto D_\alpha(\mu;A)$? А.Н. Ветохин установил [11], что если $M$ – пространство всех линейных $n$-мерных систем, наделенное одной из двух топологий – компактно-открытой или равномерной, а семейство (1) задается равенством $A(t,\mu) = \mu(t)$, $\mu \in M$, $t \in \mathbb{R}_+$, то первая функция при всех $n \geqslant 2$ принадлежит в точности второму бэровскому классу, а вторая – в точности третьему. Следующие утверждения [12] содержат полное описание классов $\{d_\alpha(\cdot\,;A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ и $\{D_\alpha(\cdot\,;A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ для каждых метрического пространства $M$ и чисел $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$.

**Следствие 7.** *Пусть заданы метрическое пространство $M$, числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$ и функция $f : M \to \{0,\ldots,n\}$. Тогда $f = d_\alpha(\cdot\,;A)$ $(f = D_\alpha(\cdot\,;A))$ для некоторого семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$ тогда и только тогда, когда 1) для $n \geqslant 2$ функция $f$ принадлежит классу $(F_\sigma, F_\sigma)$ (соответственно, классу $(F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta})$); 2) для $n = 1$ функция $f$ полунепрерывна снизу (соответственно, сверху). Более того, для $n \geqslant 2$ в тех случаях, когда указанное семейство существует, оно может быть выбрано из класса $\mathcal{Q}^n(M)$.*

Следствие 7 позволяет полностью описать множества точек полунепрерывности функций $d_\alpha(\cdot\,;A)$ и $D_\alpha(\cdot\,;A)$ для семейств $A \in \mathcal{U}^n(M)$.

**Следствие 8.** *Пусть заданы метрическое пространство $M$, числа $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \geqslant 2$. Тогда множество $S \subset M$ является множеством точек полунепрерывности снизу функции $d_\alpha(\cdot\,;A)$ для некоторого семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$ тогда и только тогда, когда $S$ – плотное $G_\delta$-множество, и множеством точек полунепрерывности сверху, когда $S$ – плотное $F_\sigma$-множество. Более того, в тех случаях, когда указанное семейство существует, оно может быть выбрано из класса $\mathcal{Q}^n(M)$.*

**Следствие 9.** *Пусть заданы метрическое пространство $M$, числа $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \geqslant 2$. Тогда множество $S \subset M$ является множеством точек полунепрерывности снизу функции $D_\alpha(\cdot\,;A)$ для некоторого семейства $A \in \mathcal{U}^n(M)$ тогда и только тогда, когда $S$ – плотное $F_{\sigma\delta}$-множество, и множеством точек полунепрерывно-*

*сти сверху, когда* $S$ *– плотное* $G_{\delta\sigma}$*-множество. Более того, в тех случаях, когда указанное семейство существует, оно может быть выбрано из класса* $\mathfrak{Q}^n(M)$.

**Литература**

1. Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 32. H. 1. S. 703–728.

2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн., 2006.

3. Миллионщиков В. М. *Показатели Ляпунова как функции параметра* // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 3. С. 364–380.

4. Рахимбердиев М. И. *О бэровском классе показателей Ляпунова* // Мат. заметки. 1982. Т. 31. Вып. 6. С. 925–931.

5. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.; Л.: ОНТИ, 1937.

6. Быков В. В. *Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 12. С. 1579–1592.

7. Ветохин А. Н. *Пустота множества точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 282–291.

8. Карпук М. В. *Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1332–1138.

9. Карпук М. В. *Строение множеств точек полунепрерывности показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1404–1408.

10. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.

11. Ветохин А. Н. *Точный бэровский класс некоторых ляпуновских показателей на пространстве линейных систем с компактно-открытой и равномерной топологиями* // Современные проблемы математики и механики. М., 2015. Т. 9. Вып. 3. С. 54–71.

12. Barabanov E. A., Bykov V. V., Karpuk M. V. *On dimensions of subspaces defined by Lyapunov exponents of families of linear differential systems* // Inter. Works. on the Qualit. Theory of Diff. Eq. (December, 1–3, 2018). Tbilisi, Georgia, 2018. P. 16–20.

## МНОЖЕСТВО ТОЧЕК ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

**А.Н. Ветохин**

Понятие топологического давления для разделяющих гомеоморфизмов компактных метрических пространств было введено в работе [1]. В дальнейшем в работе [2] это понятие было распространено и на общие непрерывные отображения компактных метрических пространств.

Напомним определение топологического давления [3]. Пусть $(X,d)$ – компактное метрическое пространство, $f:X\to X$ – непрерывное отображение. Для непрерывной функции $\varphi:X\to\mathbb{R}$, натурального числа $n$ и $x\in X$ положим по определению

$$S_n(\varphi)(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f^i(x)).$$

Наряду с исходной метрикой $d$ определим на $X$ дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y)=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^i(x),f^i(y)),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Обозначим через $B^f(x,\varepsilon,n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x,y) < \varepsilon\}$. Множество $E \subset X$ называется $(f,\varepsilon,n)$-покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x\in E} B^f(x,\varepsilon,n).$$

Пусть

$$S_d(f,\varphi,\varepsilon,n) = \inf_E \sum_{x\in E} e^{S_n(\varphi(x))},$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным $(f,\varepsilon,n)$-покрытиям. *Топологическим давлением* динамической системы, порожденной непрерывным отображением $f$ относительно $\varphi$, называется величина

$$P_\varphi(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f,\varphi,\varepsilon,n).$$

Обозначение становится корректным, если заметить, что топологическое давление не зависит от выбора метрики, порождающей данную топологию [3].

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному по совокупности переменных отображению

$$f : \mathcal{M} \times X \to X \tag{1}$$

образуем функцию

$$\mu \longmapsto P_\varphi(f_\mu(\cdot)). \tag{2}$$

В работе [4] доказано, что для топологического давления семейства отображений (1) типично по Бэру свойство полунепрерывности снизу, т.е., другими словами, множество точек полного метрического пространства $\mathcal{M}$, в которых функция (2) полунепрерывна снизу, содержит плотное в пространстве $\mathcal{M}$ множество типа $G_\delta$.

Естественно возникает вопрос, что представляют собой множество точек полунепрерывности снизу, а так же множество точек полунепрерывности сверху функции (2).

Используя формулу для топологической энтропии из [4], получим

**Теорема 1.** *Для произвольного пространства $\mathcal{M}$ множество точек полунепрерывности снизу функции (2) является $G_\delta$-множеством, а множество ее точек полунепрерывности сверху – $F_{\sigma\delta}$-множеством.*

Из результата работы [4] получаем

**Теорема 2.** *В случае полноты пространства $\mathcal{M}$ множество точек полунепрерывности снизу функции (2) является всюду плотным множеством типа $G_\delta$.*

Обозначим через $\mathcal{B}$ канторово совершенное множество на отрезке $[0,1]$.

**Теорема 3.** *Пусть $\mathcal{M} = X = \mathcal{B}$ и $\varphi \equiv 0$, тогда найдется отображение (1) такое, что множество точек полунепрерывности снизу функции (2) является всюду плотным множеством типа $G_\delta$ и не является множеством типа $F_\sigma$.*

**Теорема 4.** *Пусть $\mathcal{M} = X = \mathcal{B}$ и $\varphi \equiv 0$, тогда найдется отображение (1) такое, что множество точек полунепрерывности сверху функции (2) является пустым.*

### Литература


1. Ruelle D. *Statistical mechanics on a compact set with $Z^\nu$ action satisfying expansiveness and specification* // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. № 185. P. 237–251.

2. Walters P. *A variational principle for the pressure of continuous transformations* // Amer. J. Math. 1975. V. 470. № 97. P. 937–971.

3. Bowen R., Ruelle D. *The ergodic theory of Axiom A-flows* // Invent. Math. 1975. V. 29. P. 181–202.

4. Ветохин А. Н. *О некоторых свойствах топологического давления* // Функц. анализ и его приложения. 2017. Т. 51. № 4. С. 26–33.

# ПРИЗНАК НЕРАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

**А.К. Деменчук**

Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, в приложениях называют асинхронным режимом [1]. Автоколебательные системы, функционирующие в асинхронном режиме, обладают рядом ценных качеств: стабильность частоты и ее независимость от частоты источника, возможность плавной регулировки частоты. Это подчеркивает актуальность синтеза таких систем и их использование в технических целях.

В работе [2] задача конструирования периодических систем, обладающих асинхронным режимом, поставлена в виде задачи управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром). В этом направлении в некоторых случаях получено решение такой задачи для систем с конечным распределенным спектром.

В связи с этим представляется актуальным исследование подобных вопросов в гораздо более сложном случае почти периодических (по Бору [3]) систем, поскольку их спектр может быть самым разнообразным, имеющим, например, точки сгущения.

**Определение 1.** Вещественное число $\lambda$, называется показателем Фурье (частотой) почти периодической функции $f(t)$, если выполняется условие

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\exp(\lambda t)dt \not\equiv 0.$$

**Определение 2.** Модулем (частотным модулем) $\mathrm{Mod}\,(f)$ почти периодической функции $f(t))$ называется наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, содержащая все показатели Фурье этой функции.

**Определение 3.** Почти периодическое решение некоторой разрешенной относительно производной почти периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется сильно нерегулярным, если пересечение частотных модулей решения и ее правой части тривиально.

Отметим, что в периодическом случае условие сильной нерегулярности означает несоизмеримость периодов решения и самой системы [4].

Будем говорить, что некоторые столбцы матрицы $P(t)$ линейно независимы над $\mathbb{R}$, если их линейные комбинации с вещественными коэффициентами тождественно равны нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты нулевые. Через $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}\,P$ обозначим столбцовый ранг матрицы $P(t)$, т.е. наибольшее число ее линейно независимых над $\mathbb{R}$ столбцов. Отметим, что вообще говоря, столбцовый ранг матрицы не совпадает с наибольшим числом ее линейно независимых строк.

Пусть задана линейная система управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad n\geqslant 2, \tag{1}$$

где $A(t)$ – непрерывная почти периодическая $n\times n$-матрица с модулем частот $\mathrm{Mod}\,(A)$, $B$ – постоянная $n\times n$-матрица. Предположим, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным

$$u = U(t)x$$

с непрерывной почти периодической $n\times n$-матрицей $U(t)$, $\mathrm{Mod}\,(U)\subseteq\mathrm{Mod}\,(A)$.

Задача управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) с целевым множеством частот $L$ состоит в следующем: требуется выбрать такую матрицу $U(t)$ (коэффициент обратной связи), чтобы замкнутая этим управлением система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x$$

имела сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$, спектр частот которого содержит заданное подмножеством $L$.

Предварительно заметим, что даже если свободная система $\dot{x} = A(t)x$ имеет сильно нерегулярные периодические решения, то задача управления спектром сильно нерегулярных колебаний остается содержательной, поскольку вопрос о мощности асинхронного спектра является открытым. Укажем условие на мощность целевого множества, при котором поставленная задача не имеет решений.

Пусть ранг матрица $B$ равен $r$, $1 \leqslant r \leqslant n$. Без ограничения общности будем считать, что первые $n-r$ строк матрицы $B$ нулевые, т.к. в противном случае этого можно добиться линейным невырожденным стационарным преобразованием переменных. Обозначим через $A_{12}$ – правый верхний блок размерности $(n-r)\times r$ матрицы коэффициентов $A(t)$.

Справедлива

**Теорема.** *Пусть матрица коэффициентов системы (1) имеет нулевое среднее значение, т.е.*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T A(t)dt = 0.$$

*Если выполняется неравенство*

$$|L| > [(n - \mathrm{rank}_{\mathrm{col}}\,(A_{12}))/2],$$

*то задача управления спектром нерегулярных колебаний с целевым множеством частот $L$ для системы (1) не разрешима.*

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф18Р-014 «Робастность и потеря устойчивости динамических систем»).

**Литература**

1. Вермель А. С., Дубошинский Д. Б., Пеннер Д. И. и др. *Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний* // Успехи физич. наук. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 402–406.

2. Деменчук А. К. *Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42.

3. Левитан Б. М. *Почти периодические функции.* М.: Гостехиздат, 1953.

4. Курцвейль Я., Вейвода О. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370.

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

**Г.В. Демиденко**

В настоящей работе изучаются связи между решениями одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности $n$

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), \quad n \gg 1, \tag{1}$$

и уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau. \tag{2}$$

Наличие таких связей позволяет проводить исследования качественных свойств решений уравнения (2), используя теоретические результаты для системы уравнений (1), а также находить приближенные решения системы уравнений (1), решая краевые задачи для уравнения (2).

Системы уравнений высокой размерности (1) возникают во многих биологических задачах, при этом размерность конкретных систем может достигать фантастической величины (см., например, [1]) – порядка $10^{20}$ и даже $10^{30}$! Установление связей между решениями систем (1) и уравнений с запаздывающим аргументом (2) дает метод для нахождения приближенных решений ряда «проблем большой размерности» в биологии.

В работе продолжены исследования [2–6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10086).

**Литература**

1. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. *Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44ю № 12. С. 2276–2295.

2. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом* // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 1. С. 58–68.

3. Демиденко Г. В. *О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом* // Итоги науки. Юг России. Сер.: Математический форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 45–56.

4. Демиденко Г. В. *Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом* // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53. № 6. С. 1274–1282.

5. Демиденко Г. В., Уварова И. А. *Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности* // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19. № 2. С. 47–60.

6. Демиденко Г. В., Уварова И. А. *Предельные теоремы для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом* // Динамические системы. 2018. Т. 8 (36). № 3. С. 205–234.

## ЭФФЕКТ ПЕРРОНА СМЕНЫ ЗНАЧЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СУСЛИНСКИМ МНОЖЕСТВОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

**Н.А. Изобов, А.В. Ильин**

В качестве линейного приближения рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на полуоси $[t_0, +\infty)$ коэффициентами и отрицательными характеристическими показателями $\lambda_1(A) = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 = \lambda_2(A) < 0$. В возмущенной системе

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

вектор-функция $f:[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ (так называемое $m$-возмущение) также бесконечно дифференцируема по своим аргументам $t\geqslant t_0$ и $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ и имеет порядок $m>1$ малости в окрестности начала координат и допустимого роста вне ее:

$$\|f(t,y)\|\leqslant C_f\|y\|^m,\quad C_f=\mathrm{const},\quad y\in\mathbb{R}^2,\quad t\geqslant t_0. \tag{3}$$

Далее через $y(t,c)$ обозначается решение системы (2) с начальным вектором $y(t_0,c)=$ $=c=(c_1,c_2)$.

Эффект Перрона [1; 2, с. 50–51] смены значений характеристических показателей устанавливает существование линейной системы (1) с отрицательными показателями $\lambda_1\leqslant\lambda_2<0$ и нелинейной системы (2) с 2-возмущением (4) и всеми бесконечно продолжимыми вправо решениями, таких, что все нетривиальные решения $y(t,c)$, для которых $c_1=0$, имеют показатели, равные старшему характеристическому показателю $\lambda_2<0$ системы линейного приближения (1) (это позволяет считать эффект неполным), а показатели всех остальных нетривиальных решений системы (2) равны некоторому числу $\lambda_0>0$ (вычисленному в [3, с. 13–15]).

В работах [4–6] и приведенном в них цикле предшествующих работ авторов рассматривается полный эффект Перрона смены значений характеристических показателей, в котором все нетривиальные решения системы (2) с $m$-возмущением (3) по-прежнему бесконечно продолжимы вправо и имеют конечные положительные показатели Ляпунова при отрицательных показателях системы линейного приближения (1). При этом получены его различные варианты, связанные с построением различных видов множества $\Lambda(A,f)\subset(0,+\infty)$ характеристических показателей нетривиальных решений возмущенной системы (2), распределением решений по показателям из множества $\Lambda(A,f)$ и обобщением на $n$-мерные дифференциальные системы (1) и (2).

В частности, в работах [4, 5] получен континуальный вариант эффекта Перрона с множеством $\Lambda(A,f)\subset(0,+\infty)$ – произвольно заданным отрезком. В работе [6] в рамках полного эффекта Перрона доказано, что показатель $\lambda[y(\cdot,c)]$ всех нетривиальных решений $y(t,c)$ возмущенной системы (2) является функцией 2-го класса Бэра их начальных значений $c\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$, а все множество $\Lambda(A,f)$ показателей этих решений, как множество значений указанной функции Бэра, – суслинским ($A$-множеством) [7, с. 97, 98, 192]. В связи с этим возникает вопрос о реализации в полном эффекте Перрона произвольных ограниченных суслинских множеств ограниченными совокупностями $\Lambda(A,f)\subset(0,+\infty)$ характеристических показателей всех нетривиальных решений системы (2). Положительный и содержащийся в настоящем сообщении ответ на него устанавливает в этом эффекте также полное описание ограниченных совокупностей $\Lambda(A,f)\subset(0,+\infty)$ ограниченными суслинскими множествами.

Справедлива следующая

**Теорема.** *Для любых параметров $m>1$, $\lambda_1\leqslant\lambda_2<0$ и произвольных ограниченных на оси $\mathbb{R}_0=\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$ функций*

$$\psi_i\colon\mathbb{R}_0\to[\beta_i,b_i]\subset(0,+\infty),\quad b_1\leqslant\beta_2,\quad i=1,2, \tag{4}$$

*1-го класса Бэра существуют линейная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на полуоси $[t_0,+\infty)$ коэффициентами и показателями $\lambda_1(A)=$ $=\lambda_1\leqslant\lambda_2=\lambda_2(A)$ и бесконечно дифференцируемое по своим аргументам $t\geqslant t_0$ и $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ $m$-возмущение $f(t,y)$, такие, что все нетривиальные решения $y(t,c)$ нелинейной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и имеют характеристиче-*

*ские показатели*

$$\lambda[y(\cdot,c)] = \begin{cases} \psi_1(c_1), & c_1 \neq 0, \quad c_2 = 0, \\ \psi_2(c_2), & c_2 \neq 0, \quad c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

**Следствие.** *Для произвольных параметров* $m > 1$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$ *и ограниченного суслинского множества* $S \subset (0, +\infty)$ *существуют указанные в теореме такие системы (1) и (2), что множество характеристических показателей нетривиальных решений последней совпадает с множеством* $S$.

При доказательстве теоремы используется следующая

**Лемма.** *Пусть ограниченная на оси* $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ *функция*

$$\psi\colon \mathbb{R}_0 \to [\beta_0, b_0] \subset (-\infty, +\infty), \quad \beta_0 < b_0, \tag{5}$$

*является функцией 1-го класса Бэра. Тогда для любых постоянных* $\beta < \beta_0$ *и* $b > b_0$ *существует последовательность* $\{\psi_n(x)\}$ *бесконечно дифференцируемых равномерно ограниченных на оси* $\mathbb{R}_0$ *функций*

$$\psi_n\colon \mathbb{R}_0 \to [\beta, b], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

*сходящаяся на этой оси к функции* $\psi(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского (проект Ф18Р-014) и Российского (проект 18-15-00004Бел-а) фондов фундаментальных исследований.

### Литература

1. Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 32. H. 5. S. 702–728.

2. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М.; Ижевск, 2006.

3. Izobov N. A. *Lyapunov Exponentsand Stability.* Cambridge, 2012.

4. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Континуальный вариант эффекта перрона смены значений характеристических показателей* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 17. С. 1427–1439.

5. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Реализация континуального варианта эффекта Перрона смены значений характеристических показателей* // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 4. С. 382–387.

6. Изобов Н. А., Ильин А. В. *О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1435–1439.

7. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.; Л., 1937.

## О КИНЕМАТИЧЕСКОМ И ОБОБЩЕННОМ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ПОДОБИИ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

**О.Ф. Криваль, Е.И. Фоминых**

Через $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначим алгебру вещественных $n \times n$-матриц со стандартной топологией (т.е. топологией, порожденной какой-либо матричной нормой). Класс всех кусочно-непрерывных матричнозначных функций $A(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначим через через $\mathcal{M}_n^*$. Далее матричнозначные функции $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*$ называем просто матрицами. Подкласс класса $\mathcal{M}_n^*$, состоящий из ограниченных функций, обозначается через $\mathcal{M}_n$ (ограниченность матричнозначной функции $A(\cdot)$ означает, что $\sup\{\|A(t)\| \,:\, t \geqslant 0\} < +\infty$), а подкласс класса $\mathcal{M}_n$, состоящий из непрерывных функций – через $C\mathcal{M}_n$.

Если в линейной однородной дифференциальную системе

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с матрицей $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*$ сделать линейную замену переменных $x = L(t)y$ с невырожденной при всех $t \geqslant 0$ и кусочно-дифференцируемой на $[0, +\infty)$ матрицей $L(\cdot)$, то придем к линейной однородной дифференциальной системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с матрицей $B(\cdot)$, задаваемой равенством

$$B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t) \tag{3}$$

(равенство (4) понимается выполненным всюду на $[0, +\infty)$, кроме тех значений $t$, в которых производная $\dot{L}(t)$ не существует). Кусочно-непрерывные матричнозначные функции $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (4), называются кинематически подобными относительно матрицы $L(\cdot)$, а система (1) приводимой к системе (2) преобразованием $x = L(t)y$.

Через $\mathcal{L}_n$ обозначим класс матриц преобразований Ляпунова [1, с. 42], т.е. матриц $L(\cdot)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\sup_{t \geqslant 0} \|L(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t \geqslant 0} \|L^{-1}(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t \geqslant 0} \|\dot{L}(t)\| < +\infty$$

(в последнем неравенстве supremum берется по всем тем $t \geqslant 0$, в которых производная $\dot{L}(t)$ определена), а через $\mathcal{B}_n^0$ – класс матриц обобщенных преобразований Ляпунова, т.е. матриц $L(\cdot)$, для которых которого выполнены (см., например, [2, с. 88, 92]) соотношения

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-1} \ln \|L(t)\| = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} t^{-1} \ln \|L^{-1}(t)\| = 0.$$

Очевидно собственное включение: $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{B}_n^0$. Если матрица $L(\cdot) \in \mathcal{L}_n$, то преобразование $x = L(t)y$ называется преобразованием Ляпунова, а матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (4), – кинематически подобными. Если же матрица $L(\cdot) \in \mathcal{B}_n^0$, то преобразование $x = L(t)y$ называется обобщенным преобразованием Ляпунова, а матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (4), – обобщенно кинематически подобными. Кинематическое подобие матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, следуя [3], обозначим через $A(\cdot) \overset{c}{\sim} B(\cdot)$, а их обобщенное кинематическое подобие, следуя [4], – через $A(\cdot) \overset{gc}{\sim} B(\cdot)$.

Если $L(\cdot)$ – тождественно постоянная матрица, то равенство (4) приводит к обычному подобию матриц, которое в этом случае, как для того, чтобы подчеркнуть, что матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ являются, вообще говоря, переменными, так и для того, чтобы иметь сходное с кинематическим подобием название, называют также [5, с. 93] статическим подобием. Очевидно, что статически подобные матрицы остаются статически подобными после умножения их на один и тот же скаляр. Для отношения кинематического подобия это, если $n \geqslant 2$, вообще говоря, не так: в [3] построен пример таких кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ из $\mathcal{M}_2$, что, например, матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными.

В работе [3] для пары матриц $(A(\cdot), B(\cdot)) \in \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ введено множество $c(A, B)$, названное множеством кинематического подобия матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ и состоящее из тех $\mu \in \mathbb{R}$, для которых $\mu A(\cdot) \overset{c}{\sim} \mu B(\cdot)$, и доказано, что класс $\{c(A, B) : A(\cdot), B(\cdot) \in \in \mathcal{M}_n\}$ множеств совпадает с классом $F_\sigma$-множеств числовой прямой, содержащих нуль. Хотя определение множеств $c(A, B)$ ограничено в [3] только классом $\mathcal{M}_n$ матриц, но очевидно, что это определение без изменений переносится и на класс $\mathcal{M}_n^*$, и более того, при таком расширенном понимании этого определения для класса множеств $\{c(A, B) : A(\cdot), B(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*\}$ справедлив тот же результат, в чем несложно убедиться, проверив, что доказательство необходимости этого результата в [3] не использует ограниченности матриц.

В силу сказанного, следуя [3] и [4], назовем множеством $gc(A, B)$ обобщенного кинематического подобия матриц $A(\cdot)$, $B(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*$ множество, состоящее из тех $\mu \in \in \mathbb{R}$, для которых $\mu A(\cdot) \overset{gc}{\sim} \mu B(\cdot)$. То, что для кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ в общем случае справедливо неравенство $gc(A, B) \neq \mathbb{R}$, вытекает из упомянутого выше примера из [3]: его матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не только не являются кинематически подобными, но и не являются обобщенно кинематически подобными. Очевидно включение $c(A, B) \subset gc(A, B)$. То, что это включение является собственным, установлено в докладе [4], в котором для любого $n \geqslant 2$ построен пример таких кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ из класса $C\mathcal{M}_n$, что матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными, но являются обобщенно кинематически подобными. Пример работы [4] обобщает следующая

**Теорема.** *Для любого $n \geqslant 2$ существуют счетное множество $M \subset \mathbb{R}$ и в классе $C\mathcal{M}_n$ кинематически подобные матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, такие, что для любого $\mu \in \in M$ матрицы $\mu A(\cdot)$ и $\mu B(\cdot)$ не являются кинематически подобными, но являются обобщенно кинематически подобными.*

**Литература**

1. Ляпунов А. М. *Собр. соч.* В 6-ти т. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

2. Адрианова Л. Я. *Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений.* СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1992.

3. Барабанов Е. А. *Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 42–63.

4. Худякова П.А. *Об обобщенном кинематическом подобии матричнозначных функий с вещественным параметром-множителем* // Материалы Междунар. конф. «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», Минск, 7–10 декабря 2015 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2015. Ч. 1. С. 48–50.

5. Чезари Л. *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Мир, 1964.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗОБОВА–БОГДАНОВА О МНОЖЕСТВАХ НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

**А.В. Липницкий**

Рассмотрим зависящую от параметра $\mu \in \mathbb{R}$ линейную систему

$$\dot{x} = \mu C(t)x, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0 \qquad (1_\mu)$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов. Множеством неправильности системы

$$\dot{x} = C(t)x, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0 \tag{$2_C$}$$

называется [1] множество тех значений $\mu \in \mathbb{R}$, при которых соответствующая система $(1_\mu)$ неправильна.

Е.К. Макаровым (см. библиогр. в [1]) построены примеры линейных систем (2) с различными метрическими и топологическими свойствами их множеств неправильности, в частности, имеющие любую наперед заданную меру Лебега [2]. Позднее Е.А. Барабанов [3] установил, что любое не содержащее нуля открытое множество вещественной прямой реализуется как множество неправильности некоторой системы (2). В работе [4] аналогичный результат получен для замкнутых множеств. В настоящем докладе полностью описано строение множеств неправильности систем (2), что решает задачу Н.А. Изобова из [1].

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол $\varphi$ по часовой стрелке обозначим через $U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, и положим

$$J := U(2^{-1}\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для всякого $y = (y_1, y_2)^\mathrm{т} \in \mathbb{R}^2$ и $2 \times 2$-матрицы $Z$ используем обозначения $\|y\| \equiv \equiv \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ евклидовой нормы и $\|Z\| \equiv \max\limits_{\|y\|=1} \|Zy\|$ спектральной нормы.

Для любой строго возрастающей последовательности $\{m_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{N}$ и чисел $5 \leqslant \leqslant i_k \in \mathbb{N}$ определим последовательность $\{T_k\}_{k=1}^{+\infty}$, полагая $T_1 := 2$, $T_{k+1} := m_k(i_k+2)T_k$, $k \in \mathbb{N}$. Положим также $\theta_k := m_k i_k T_k$, $\tau_k := \theta_k + m_k T_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Для любой последовательности $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ и числа $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, определим матрицу $A(\cdot) = A(\cdot, d, \{m_k, i_k, b_k\}_{k=1}^{\infty})$, для всех $l = \overline{1, T_k}$, $k \in \mathbb{N}$ полагая $A(t) \equiv b_k J$, $t \in (\tau_k - m_k l, \tau_k - m_k l + 1]$, $A(t) \equiv -b_k J$, $t \in [\tau_k + m_k l - 1, \tau_k + m_k l)$. Для всех остальных $t \geqslant 0$ полагаем $A(t) \equiv d\, \mathrm{diag}\,[1, -1]$.

Обозначим через $X_A(t,s)$ матрицу Коши системы $(2_A)$ и определим число $\delta(d)$ в случае если $d > 0$ равенством $\delta(d) := 1$, а в случае, когда $d < 0$, положим $\delta(d) := 2$. Обозначим также $L_d(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_{3-\delta(d)}/x_{\delta(d)}| \leqslant \alpha\}$. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} L_d(\alpha) = L_d(m^{-2\,\mathrm{sgn}\, d}\alpha).$$

**Лемма 1.** *Матрица $X_A(T_{k+1}, \theta_k)$ – самосопряженная.*

Для каждого $d \neq 0$ определим $k_0(d) \in \mathbb{N}$ равенством $k_0(d) := 2 + [|d|^{-1}]$ (через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа).

**Лемма 2.** *Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0(d) - 1$, справедливо включение*

$$X(T_{k+1}, T_{k_0(d)})e_{\delta(d)} \subset L_d(2e^{4m_k T_k |d|}).$$

Введем обозначение $\hat{Y}_\varkappa(\gamma) := U(\gamma)\mathrm{diag}\,[e^\varkappa, e^{-\varkappa}]$, $\gamma, \varkappa \in \mathbb{R}$.

**Лемма 3.** *Для любых $\gamma, \varkappa \in \mathbb{R}$ таких, что $|\cos\gamma| \leqslant e^{-2|\varkappa|}$, верна оценка*

$$\|\hat{Y}_\varkappa^2(\gamma)\| < e^2.$$

**Лемма 4.** *Если $d \neq 0$ и найдутся $l \in \mathbb{N}$ и последовательность $(k_j)_{j=1}^{+\infty} \subset \subset \mathbb{N}$ такие, что для любого $p \in (k_j)_{j=1}^{+\infty}$ выполняются неравенства $i_p \leqslant l$, $m_p \geqslant$*

$\geqslant 2\max\{l,|d|^{-1}\}$ *и оценка* $|\cos b_p|<e^{-2m_p|d|}$, *то система* $(2_A)$ *неправильна по Ляпунову.*

Обозначим $\tilde{L}_\varkappa := L_{\operatorname{sgn}\varkappa}(2^3\varkappa^2)$, $\varkappa\in\mathbb{R}$, $\hat{L}_{k,d} := L_d\left(2^3d^2(m_k-1)^2\right)$.

**Лемма 5.** *Для любых* $\gamma,\varkappa\in\mathbb{R}$, $|\sin\gamma|\geqslant\varkappa^{-2}$, $\varkappa>2^4$, *имеет место включение* $\hat{Y}_\varkappa(\gamma+\pi/2)\tilde{L}_\varkappa\subset\tilde{L}_\varkappa$, *а для любого* $x\in\tilde{L}_\varkappa$ *– неравенство*

$$\|\hat{Y}_\varkappa(\gamma+\pi/2)\,x\|>\|x\|\,e^{\varkappa-\sqrt{\varkappa}}.$$

**Лемма 6.** *Для любых* $d\neq0$, $k\in\mathbb{N}$ *таких, что* $m_k>1+2^4|d|^{-1}$, $|\cos b_k|\geqslant$ $\geqslant d^{-2}(m_k-1)^{-2}$, *выполняется включение* $X_A(T_{k+1},\theta_k-m_k+1)\hat{L}_{k,d}\subset\hat{L}_{k,d}$, *а для всякого решения* $x(\cdot)$ *системы* $(2_A)$ *с начальным условием* $x(\theta_k-m_k+1)\in\hat{L}_{k,d}$ *при любых* $1\leqslant l\leqslant 2T_k$ *имеет место оценка*

$$\frac{\|x(\theta_k+m_kl)\|}{\|x(\theta_k+m_k(l-1))\|}\geqslant e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}}.$$

**Лемма 7.** *Если* $m_k\to+\infty$ *при* $k\to+\infty$ *и для любого* $l\in\mathbb{N}$ *найдется* $k_l\in\mathbb{N}$ *такое, что для всех* $k\geqslant k_l$, *удовлетворяющих условию* $i_k\leqslant l$, *выполняется оценка* $|\cos b_k|>|d|^{-2}(m_k-1)^{-2}$, *то система* $(2_A)$ *правильна по Ляпунову.*

Пусть $M$ – произвольное $G_{\delta\sigma}$ множество. Найдутся открытые множества $\check{M}_{n,l}\subset$ $\subset\mathbb{R}$, $l,n\in\mathbb{N}$, такие что множества $\tilde{M}_l$, $l\in\mathbb{N}$, определенные равенствами $\tilde{M}_l :=$ $:=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\check{M}_{n,l}$, удовлетворяют соотношению $M=\bigcup_{l=1}^{+\infty}\tilde{M}_l$. Обозначим $\hat{M}_{n,l}:=\bigcap_{p=1}^{n}\check{M}_{p,l}$.

Определим рекуррентно последовательность $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, полагая $j_0:=0$ и $j_n:=2n9^{n+n^3}+j_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Для любых $k,l,n\in\mathbb{N}$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ обозначим

$$J_n:=\{j_{n-1}+1,\ldots,j_n\},\quad \varkappa_k(n):=9^{-n-n^3}\left(k-2^{-1}(j_n+j_{n-1})\right),$$

$$\rho_{n,l}(\alpha)=\rho_{n,l}(\alpha,\hat{M}_{n,l}):=\inf_{\beta\in\mathbb{R}\setminus\hat{M}_{n,l}}|\alpha-\beta|.$$

Обозначим также через $I_{n,k}=I_{n,k}(\{\hat{M}_{n,l}\}_{n,l\in\mathbb{N}})$ множество тех $l\in\mathbb{N}$, что либо $\rho_{n,l}(\varkappa_k(n))\geqslant 2n^{-1}$, либо найдется $p\in\{1,\ldots,n-1\}$ такое, что

$$2n^{-1}\leqslant\rho_{p,l}(\varkappa_k(n))\leqslant 5n^{-1}.$$

**Лемма 8.** *Для любых* $\mu\notin M$ *и* $l\in\mathbb{N}$ *найдется* $n_0=n_0(\mu,l)\in\mathbb{N}$ *такое, что при любом* $n\geqslant n_0$ *выполнение для некоторого* $k\in J_n$ *неравенства* $|\mu-\varkappa_k(n)|<2n^{-1}$ *влечет за собой включение* $l\notin I_{n,k}$.

Для любого натурального $k$ найдется единственное $n=n(k)\in\mathbb{N}$, такое что $k\in$ $\in J_n$. Определим значения $m_k$, $i_k$ и $b_k$, зависящие от выбора открытых множеств $\check{M}_{n,l}\subset\mathbb{R}$, $l,n\in\mathbb{N}$, таких что $M=\bigcup_{l=1}^{+\infty}\bigcap_{n=1}^{+\infty}\check{M}_{n,l}$, равенствами $d:=\mu$, $\mu\in\mathbb{R}$, $m_k:=$ $:=1+n(k)^2$, $n\in\mathbb{N}$. Положим $i_k:=\max\{5,\min I_{n,k}\}$, $b_k(\mu):=2^{-1}\pi+n^{-1}\left(\mu-\varkappa_k(n)\right)$, $\mu\in\mathbb{R}$, в случае если $I_{n,k}\neq\varnothing$, и пусть $i_k:=5$, $b_k(\mu)\equiv0$, если $I_{n,k}=\varnothing$.

Определим матрицу $\tilde{A}_\mu(\cdot)=\tilde{A}_\mu(\cdot,\{\hat{M}_{n,l}\}_{n,l\in\mathbb{N}})$, $\mu\in\mathbb{R}$, равенством $\tilde{A}_\mu(t):=A(t)=$ $=A(t,d,\{m_k,i_k,b_k\}_{k=1}^{\infty})$, $t\geqslant0$, с определенными выше значениями параметров $d$, $m_k$, $i_k$ и $b_k$.

**Лемма 9.** *Если* $0\notin M$, *то система* $(2_{\tilde{A}_\mu})$ *неправильна по Ляпунову при любом* $\mu\in M$ *и правильна при всех остальных* $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех $t\in\mathbb{R}_+:=\mathbb{R}\bigcap[0,+\infty)$ таких, что $\tilde{A}_\mu(t)=$ $=\mu\operatorname{diag}[1,-1]$.

Для каждого $t \in \mathcal{T}$ определим функцию $\omega(\cdot)$ равенством $\omega(t) \equiv 0$. Для всех остальных $t \in [T_k, T_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, полагаем $q_t := 0$ если $t < \tau_{k,j}$, $q_t := 1$ в противном случае, и пусть $\omega(t) := (-1)^{q_t} b_k(0)$. Определим матрицу $C(t)$, $t \geqslant 0$, соотношениями

$$C(t) := U^{-1}(\tau)\left(\tilde{A}_1(t)U(\tau) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\tau)\right), \quad t \geqslant 0, \quad \tau = \tau(t) := \int\limits_0^t \omega(s)\,ds. \tag{3}$$

**Теорема.** *Для любого $G_{\delta\sigma}$ множества $M \subset \mathbb{R}$, $0 \notin M$, система $(1_\mu)$ с матрицей $C(\cdot)$, заданной равенством (4), неправильна по Ляпунову при всех $\mu \in M$ и правильна при всех остальных $\mu \in \mathbb{R}$.*

**Литература**

1. Изобов Н. А. *Исследования в Белоруссии по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034–2055.

2. Макаров Е. К. *О мере множества неправильности линейной системы с параметром при производной* // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 4. С. 302–305.

3. Барабанов Е. А. *О множествах неправильности семейств линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1067–1084.

4. Липницкий А. В. *Замкнутые множества неправильности линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 2. С. 189–194.

## ОБ АДАПТИВНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АНАЛОГОВ ЦЕНТРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

**Е.К. Макаров**

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов $A$ и матрицей Коши $X_A$. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей возмущений $Q$. Для старшего показателя системы (2) будем использовать обозначение $\lambda_n(A+Q)$.

Одной из важных задач теории характеристических показателей Ляпунова [1, с. 157; 2, с. 46] является вычисление величин $\Lambda(\mathfrak{M}, A) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\}$, т.е. достижимых верхних оценок для показателей системы (2) с возмущениями из заданного класса возмущений $\mathfrak{M}$.

Во многих случаях для величины $\Lambda(\mathfrak{M}, A)$ может быть построен алгоритм, аналогичный алгоритму вычисления сигма-показателя Н.А. Изобова [3]:

$$\nabla_\sigma(A) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\xi_k(\sigma)}{k},$$

$$\xi_k(\sigma) = \max_{i\leqslant k}\{\ln\|X_A(k,i)\| + \xi_i(\sigma) - \sigma i\}, \quad \xi_0 = 0, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Для таких классов $\mathfrak{M}$ соответствующий алгоритм может быть записан в следующем общем виде

$$\Lambda(\mathfrak{M}, A) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln \eta_k}{k},$$

$$\eta_k = \max_{i\leqslant k}\{\|X_A(k,i)\|\beta(i)\eta_i\}, \quad \eta_0 = 1, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}, \tag{3}$$

где $\beta(k)$, $\beta(0) \geqslant 0$, – некоторая неотрицательная функция, зависящая от $\mathfrak{M}$, например, $\beta(i) = e^{-\sigma i}$ для $\sigma$-возмущений. Ее можно рассматривать как функциональный параметр алгоритма.

Максимум в (4) не может достигается при тех $i \in \mathbb{N}$, для которых $\beta(i)$ обращается в 0, поэтому величина $\eta_k$ всегда положительна. Это свойство алгоритма (4) будем называть адаптивностью.

В ряде других случаев имеют место формулы, сходные с формулой для вычисления центрального показателя [4]

$$\Omega(A) = \lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln\|X_A(kT, kT-T)\|, \tag{4}$$

определяемого так называемыми малыми возмущениями, которые, строго говоря, не образуют множества, аналогичного обычным классам малости, а наделяются структурой фильтра. Одним из таких классов являются экспоненциальные возмущения. Для соответствующего им экспоненциального показателя имеет место формула [5]

$$\nabla_0(A) = \lim_{\theta\to1+0} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\theta^m} \sum_{k=1}^{m} \ln\|X_A(\theta^k, \theta^{k-1})\|, \tag{5}$$

Классы малости возмущений $\mathfrak{M}$, для которых величина $\Lambda(\mathfrak{M})$ имеет представление, аналогичное формуле (4), названы в [6] предельными.

Одно из наиболее важных отличий между формулами (4), (5) и алгоритмом (4) заключается в том, что последовательности моментов времени, по которым вычисляется величина $\nabla_\sigma(A)$ определяются самой системой (1), а величины типа $\nabla_0(A)$ или $\Omega(A)$ вычисляются с использованием жестко предписанных последовательностей. Эта жесткость не позволяет построить аналоги формул (4) и (5) для классов возмущений с вырождениями так, как это было сделано ранее для алгоритмов типа (4).

В работе [6] для совокупности $\mathfrak{M}_0[\theta]$ возмущений, удовлетворяющих оценке $\|Q(t)\| \leqslant N_Q e^{-\sigma\theta(t)}$, в которой $N_Q \geqslant 0$, $\sigma > 0$ – числа, зависящие от $Q$, а $\theta : [0, +\infty[\to$ $\to]0, +\infty[$ – фиксированная монотонно возрастающая к $+\infty$ кусочно-непрерывная функция такая, что $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \theta(t)/t < +\infty$, доказано равенство

$$\Lambda(\mathfrak{M}_0[\theta]) = \lim_{\delta\to+0} \Omega(A, \tau(\delta)), \tag{6}$$

$$\Omega(A, \tau(\delta)) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t_k(\delta)} \sum_{j=0}^{k} \ln\|X_A(t_{j+1}(\delta), t_j(\delta))\|, \tag{7}$$

где последовательность моментов времени $\tau(\delta)$ с элементами $t_j(\delta)$, $j \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, которая называется $\delta$-характеристической последовательностью для класса возмущений $\mathfrak{M}_0[\theta]$, определена рекуррентной формулой $t_{j+1}(\delta) = t_j(\delta) + \delta\theta(t_j(\delta))$, $t_0(\delta) \geqslant 0$. Нетрудно видеть, что алгоритм построения $\delta$-характеристической последовательности также не является адаптивным.

**Теорема.** *Для класса возмущений* $\mathfrak{M}_0[\theta]$ *существует адаптивное семейство последовательностей для вычисления* $\Lambda(\mathfrak{M}, A)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф18Р–014).

**Литература**


1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.
2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.
3. Изобов Н. А. *О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.
4. Миллионщиков В. М. *Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем* // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
5. Изобов Н. А. *Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление* // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5–8.
6. Барабанов Е. А. *О крайних показателях Ляпунова линейных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 357.


## О СПЕКТРАЛЬНОМ МНОЖЕСТВЕ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

**С.Н. Попова**

Рассмотрим линейную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

матрица коэффициентов $A(k)$ которой при каждом $k \in \mathbb{N}$ обратима, и

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}(\|A(k)\| + \|A^{-1}(k)\|) < \infty,$$

т.е. матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$ [1].

Через $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \lambda_2(A))$ обозначим полный спектр показателей Ляпунова системы (1), и будем предполагать, что он упорядочен по неубыванию: $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A)$, т.е. $\lambda(A) \in \mathbb{R}^2_{\leqslant}$.

Пусть

$$\mathcal{O}_\delta(\lambda(A)) \doteq \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2_{\leqslant} : |\mu_j - \lambda_j(A)| < \delta, \quad j = 1, 2\}$$

– $\delta$-окрестность $\lambda(A)$ в $\mathbb{R}^2_{\leqslant}$.

Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех допустимо мультипликативно возмущенных систем [2], т.е. множество систем вида

$$y(k+1) = A(k)R(k)y(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

где матрица возмущений $R(\cdot)$ также вполне ограничена на $\mathbb{N}$, а через $\mathcal{R}_\varepsilon$ – подмножество $\mathcal{R}$, состоящее из систем вида (2), для которых выполнена оценка

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|R(k) - E\| < \varepsilon.$$

Здесь $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ – единичная матрица, $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированное. Полный спектр показателей Ляпунова системы (2) обозначаем $\lambda(AR)$, а саму систему (2) отождествляем с матрицей возмущений $R(\cdot)$.

**Определение** [2]. Спектральным множеством, отвечающим классу возмущений $\mathcal{R}_\varepsilon$, будем называть множество

$$\lambda(\mathcal{R}_\varepsilon) \doteq \{\lambda(AR)\colon R(\cdot) \in \mathcal{R}_\varepsilon\}.$$

**Теорема.** *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что* $\mathcal{O}_\delta(\lambda(A)) \subset \lambda(\mathcal{R}_\varepsilon)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-51-41005-Узб).

**Литература**

1. Демидович В. Б. *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.

2. Банщикова И. Н., Попова С. Н. *О спектральном множестве дискретной системы с устойчивыми показателями* // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 15–26.

## О СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ БЭРОВСКИМИ КЛАССАМИ ФОРМУЛ

**А.В. Равчеев**

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ пространство линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями $A$ (отождествляемыми с соответствующими системами), которое мы наделим компактно-открытой топологией.

**Определение 1** [1]. Будем говорить, что функционал $\varphi\colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ *имеет компактный носитель*, если существует такое $T > 0$, что для любой пары оператор-функций $A, B \in \mathcal{M}^n$, совпадающих на отрезке $[0, T]$, выполнено равенство $\varphi(A) = \varphi(B)$. Множество всех функционалов с компактным носителем (определенных на $\mathcal{M}^n$) обозначим через $\mathfrak{K}^n$.

**Замечание 1.** В докладе [1] эти функционалы названы ограниченно зависимыми.

Функционалы на $\mathcal{M}^n$, отвечающие за те или иные аспекты асимптотического поведения решений системы (1), обычно выражаются формулами, содержащими несколько предельных переходов от последовательностей «более простых» функционалов. Желание вычислять значения этих функционалов, пользуясь информацией о системе лишь на конечных участках временной полуоси, приводит к естественному требованию компактности их носителей [1].

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторая совокупность функционалов $\mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$. Для всякого счетного порядкового числа $\alpha$ определим множество $[\mathcal{F}]_\alpha$ по индукции следующим образом: 1) $[\mathcal{F}]_0 = \mathcal{F}$; 2) $[\mathcal{F}]_\alpha$ состоит из функций $\varphi : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$, представимых в виде $\varphi(\mu) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}^n$, где $\varphi_k \in \bigcup_{\xi<\alpha} [\mathcal{F}]_\xi$, $k \in \mathbb{N}$. Определим теперь *бэровский класс формул* $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta}$ равенством (ср. [1])

$$\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} = [[\mathfrak{C}^n]_\alpha \bigcap \mathfrak{K}^n]_\beta,$$

где $\mathfrak{C}^n$ – множество всех непрерывных функционалов $\mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$.

Возникает естественный вопрос: какие включения имеются между введенными классами? Частичный ответ содержит следующая

**Теорема 1.** *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и всяких счетных порядковых чисел $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ справедливы следующие утверждения:*

*1) если $\alpha \leqslant \gamma$ и $\beta \leqslant \delta$, то $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} \subset \mathfrak{F}^n_{\gamma,\delta}$;*

*2) если $\alpha + \beta < \gamma + \delta$, то $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} \not\supset \mathfrak{F}^n_{\gamma,\delta}$;*

*3) если $\beta < \delta$, то $\mathfrak{F}^n_{\alpha,\beta} \not\supset \mathfrak{F}^n_{\gamma,\delta}$.*

**Определение 2**. Функционал на $\mathcal{M}^n$, принимающий одинаковые значения на любых ляпуновски эквивалентных системах [2, с. 63], будем называть *ляпуновским инвариантом*. Множество всех ляпуновских инвариантов обозначим через $\mathfrak{L}^n$.

В работе [3] установлено, что количество предельных переходов от (мультииндексной) последовательности непрерывных функционалов в формуле для ляпуновского инварианта, вообще говоря, нельзя уменьшить, заменив допредельные функционалы в ней функционалами с компактным носителем, при этом разрешив последним быть разрывными, а именно, для всякого $\alpha \geqslant 1$ установлено включение $[\mathfrak{K}^n]_\alpha \not\supset \not\supset [\mathfrak{C}^n]_{\alpha+1} \bigcap \mathfrak{L}^n$. Следующая теорема дополняет это утверждение.

**Теорема 2.** *Для всякого $\alpha \geqslant 2$ справедливо включение* $[\mathfrak{K}^n]_\alpha \bigcap \mathfrak{L}^n \subset [\mathfrak{C}^n]_{\alpha+1}$.

**Замечание 2.** В работе [3] показано, что класс $[\mathfrak{K}^n]_1 \bigcap \mathfrak{L}^n$ состоит из одних констант.

### Литература

1. Сергеев И. Н. *Бэровские классы формул для показателей линейных систем* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 12. С. 2092–2093.

2. Адрианова Л. Я. *Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений.* СПб.: Изд-во С.Петербургского ун-та, 1992.

3. Быков В. В. *О классах Бэра ляпуновских инвариантов* // Мат. сб. 2017. Т. 208. № 5. С. 38–62.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРРОНОВСКОЙ И ЛЯПУНОВСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

**И.Н. Сергеев**

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ будем рассматривать *непродолжаемые* решения систем вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0, \quad 0, x \in G, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0,\infty), \tag{1}$$

где $f, f'_x \in C(\mathbb{R}^+ \times G)$, а $G$ – произвольная область в $\mathbb{R}^n$.

**Определение 1** [1]. Назовем систему (1):

1) *устойчивой* (*асимптотически*) *по Перрону*, если для любого $\varepsilon > 0$ (соответственно, для $\varepsilon = 0$) существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x$ с начальным условием $|x(0)| < \delta$ удовлетворяет неравенству

$$\varliminf_{t\to\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon; \tag{2}$$

2) *неустойчивой по Перрону*, если оно не устойчиво по Перрону (для решения $x$, определенного не на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, неравенство (2) считаем не выполненным по определению).

Введенные здесь *перроновские* свойства аналогичны *ляпуновским* свойствам *устойчивости* (*асимптотической*) и *неустойчивости* соответственно [2, гл. II, §1].

**Определение 2.** Если системе (1) можно поставить в соответствие *линейную* систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \equiv f'_x(t,0) \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f(t,x) - A(t)x| = o(x), \quad x \to 0, \qquad (3)$$

то правую часть системы (4) назовем *линейным приближением* для системы (1). Скажем, что линейное приближение *обеспечивает* какое-либо из рассматриваемых нами свойств, если им обладает всякая система (1) с этим линейным приближением.

Исследованию асимптотической устойчивости по линейному приближению, составляющему суть *первого метода Ляпунова*, посвящено огромное число работ (см. монографию [3, §11] и приведенную в ней библиографию).

Усточивость по Перрону, даже асимптотическая, не влечет за собой устойчивости по Ляпунову, а тем более асимптотической. Тем не менее все эти четыре вида устойчивости обеспечиваются в точности *одними и теми же* линейными приближениями, о чем и говорит

**Теорема 1.** *Если линейное приближение обеспечивает хотя бы одно из свойств:*

*1) устойчивость по Перрону;*

*2) устойчивость по Ляпунову;*

*3) асимптотическую устойчивость по Перрону;*

*4) асимптотическую устойчивость по Ляпунову,*

*то оно обеспечивает и остальные три свойства.*

Неустойчивость по Ляпунову не влечет за собой неустойчивости по Перрону, причем это утверждение распространяется и на линейные приближения, обеспечивающие неустойчивость по Перрону и соответственно неустойчивость по Ляпунову, как показывает

**Теорема 2.** *Существует одномерная ограниченная линейная система, которая:*

*1) обеспечивает неустойчивость по Ляпунову;*

*2) не обеспечивает неустойчивости по Перрону;*

*3) асимптотически устойчива по Перрону, поэтому она не обеспечивает даже отсутствия асимптотической устойчивости по Перрону.*

### Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

3. Изобов Н.А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПО ПЕРРОНУ И ПО ЛЯПУНОВУ

**И.Н. Сергеев**

**Введение.** Для заданной *фазовой* окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}^+ \times G), \quad \mathbb{R}^+ \equiv [0,\infty), \qquad (1)$$

допускающую *нулевое решение.* Через $\mathcal{S}_*(f)$ и $\mathcal{S}_\delta(f)$ или $\mathcal{S}^\delta(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых ненулевых* решений $x$ системы (1) и соответственно подмножества тех из них, что удовлетворяют начальным условиям $|x(0)| < \delta$ или $|x(0)| < \delta$.

**Определение 1** [1–5]. Характеристическими *показателями Ляпунова* (1892 г.) и *Перрона* (1930 г.) функции $x:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$ называются соответственно величины

$$\lambda(x)\equiv\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|x(t)|,\quad \pi(x)\equiv\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|x(t)|\qquad(\ln 0\equiv\infty).$$

Настоящий доклад посвящен понятию *устойчивости по Перрону*, возникшему совсем недавно (2018 г.) в результате попытки по возможности более точно определить, за какие именно свойства решений дифференциальной системы отвечают ее *показатели Перрона*.

Отрицательность показателей Перрона всех ненулевых решений системы (1) обычно ассоциируется, хотя и не совсем точно [6, гл. IV], с *положительной устойчивостью по Пуассону* ее нулевого решения, формально состоящую в сколь угодно позднем *возвращении* фазовой траектории в любую наперед заданную окрестность своей начальной точки. Положительность же всех показателей Перрона напоминает, причем весьма отдаленно [6, гл. IV], *полную неустойчивость* соответствующей динамической системы, обладающей, по определению, тем свойством, что каждая ее точка является *блуждающей*, т. е. некоторая ее перемещающаяся со временем окрестность с какого-то момента окончательно перестает пересекать свое начальное положение.

Результаты доклада частично доказаны или только анонсированы в работах [7–12].

**1. Перроновская устойчивость.** Далее в центре нашего внимания будут находиться *следующие* свойства и понятия, относящиеся к рассматриваемым системам.

**Определение 2** [7, 8]. Скажем, что для системы (1) имеет место следующее *перроновское свойство устойчивости*:

1) *устойчивость по Перрону*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что любое решение $x\in\mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to\infty}|x(t)|<\varepsilon \tag{2}$$

(если решение определено не на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, то требование (2), равно как и требование (3) ниже, считаем *невыполненным* по определению);

2) *асимптотическая устойчивость по Перрону*, если существует такое $\delta>0$, что любое решение $x\in\mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to\infty}|x(t)|=0; \tag{3}$$

3) *неустойчивость по Перрону*, если нет устойчивости по Перрону;

4) *полная неустойчивость по Перрону*, если существуют такие $\varepsilon,\delta>0$, что ни одно решение $x\in\mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2).

Введенные перроновские свойства устойчивости характеризуют поведение решений, близких к нулевому решению, с точки зрения или их *сколь угодно позднего сближения* с ним, или наоборот, *окончательного удаления* от него. Кроме того, все они носят чисто *локальный* характер, т. е. зависят от поведения только тех решений, которые начинаются вблизи нуля.

**Теорема 1** [7, 9]. *Существует вполне неустойчивая по Перрону двумерная система (1), хотя бы одно решение $x\in\mathcal{S}_*(f)$ которой удовлетворяет требованию (4) и даже условию*

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)|=0. \tag{4}$$

**Теорема 2** [7, 9]. *Существует неустойчивая по Перрону двумерная автономная система (1), все решения* $x \in \mathcal{S}^\delta(f)$ *которой для некоторого* $\delta > 0$ *удовлетворяют условию (4).*

**2. Естественные логические связи.** Связь перроновских свойств устойчивости со знаками показателей Перрона *аналогична* связи ляпуновских свойств с показателями Ляпунова.

**Определение 3** [3]. Для каждого из четырех перроновских свойств устойчивости из определения 2 установим его *ляпуновский* аналог: *устойчивость*, *асимптотическую устойчивость*, *неустойчивость* и *полную неустойчивость* (последнее понятие не является общепринятым) *по Ляпунову*, – все они получаются заменой нижнего предела в требованиях (2) или (4) точной верхней гранью или соответственно точным пределом с добавлением условия устойчивости по Ляпунову.

**Теорема 3** [7]. *Если для некоторого* $\delta > 0$ *показатели Перрона (Ляпунова) всех решений* $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ *системы (1) отрицательны, то она асимптотически устойчива по Перрону (соответственно по Ляпунову, правда, при дополнительном условии устойчивости по Ляпунову), а если положительны, то вполне неустойчива по Перрону (по Ляпунову).*

Перроновские и ляпуновские свойства устойчивости *логически связаны* друг с другом.

**Теорема 4** [7, 8]. *Любая система (1):*

*1) либо устойчива по Перрону (по Ляпунову), либо неустойчива;*

*2) если асимптотически устойчива по Перрону (по Ляпунову), то и устойчива, а если вполне неустойчива, то и неустойчива;*

*3) если устойчива (асимптотически) по Ляпунову, то и по Перрону, а если неустойчива (вполне) по Перрону, то и по Ляпунову.*

**Теорема 5** [7, 10]. *Любое сочетание свойств устойчивости по Перрону и по Ляпунову, не противоречащее теореме 4, реализуется на некоторой линейной системе*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t)\| < \infty. \tag{5}$$

**Теорема 6** [7, 10, 11]. *Существует вполне неустойчивая по Ляпунову, но асимптотически (неасимптотически) устойчивая по Перрону линейная система (5), все показатели Ляпунова которой положительны, а все показатели Перрона отрицательны (равны нулю).*

*Различие* между перроновской и ляпуновской устойчивостью – тоньше, чем между соответствующими показателями (совпадающими на решениях *правильных* систем [3, гл. III]).

**Теорема 7** [7, 10]. *Существует правильная линейная система (5), асимптотически устойчивая по Перрону, но вполне неустойчивая по Ляпунову.*

Как известно, отрицательность показателей Ляпунова *фундаментальной* системы решений *линейной* системы достаточна для асимптотической устойчивости по Ляпунову. Однако отрицательность аналогичных показателей Перрона не достаточна даже для устойчивости по Перрону, равно как и их положительность – для полной неустойчивости по Перрону.

**Теорема 8** [7, 10, 11]. *Существует неустойчивая (не вполне неустойчивая) по Перрону линейная система (5), для которой показатели Перрона всех решений из некоторой ее фундаментальной системы отрицательны (соответственно, положительны).*

**3. Автономный случай.** Для *автономных* систем логические связи между различными свойствами устойчивости оказываются несколько более жесткими.

**Теорема 9.** *Одномерная автономная система устойчива (асимптотически) или соответственно неустойчива (вполне) по Перрону тогда и только тогда, когда она устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Ляпунову.*

**Теорема 10** [7, 8, 10]. *Линейная автономная система устойчива (асимптотически) или соответственно неустойчива (вполне) по Перрону тогда и только тогда, когда она устойчива (асимптотически) или неустойчива (вполне) по Ляпунову.*

**Теорема 11** [7, 8]. *Автономная система вполне неустойчива по Перрону тогда и только тогда, когда она вполне неустойчива по Ляпунову, а также, когда для некоторого* $\varepsilon > 0$ *ни одно ее решение* $x \in \mathcal{S}_*(f)$ *не удовлетворяет требованию (2).*

**Теорема 12** [7]. *Если автономная система (1) вполне неустойчива по Перрону, то для некоторого* $\varepsilon(f) > 0$ *и любого* $\delta \in (0, \varepsilon(f))$ *существуют такие* $\varepsilon, T > 0$, *что все решения* $x \in \mathcal{S}^\delta(f)$ *удовлетворяют условиям*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| > \varepsilon, \qquad \sup_{t\in[0,T]} |x(t)| > \varepsilon(f).$$

И все же перроновские и ляпуновские свойства автономных систем *не идентичны.*

**Теорема 13.** *Существует двумерная автономная система (1), неустойчивая по Ляпунову, но асимптотически устойчивая по Перрону, все решения* $x \in \mathcal{S}_*(f)$ *которой к тому же удовлетворяют условию (4).*

**4. Линейное приближение.** Одним из основных (и довольно продвинутых, см. [4, §11]) *методов Ляпунова* считается исследование устойчивости по *первому приближению.*

**Определение 4** [3, 4]. Пусть в системе (1) выделена *линейная* часть

$$f(t,x) \equiv A(t)x + h(t,x), \quad A(t) \equiv f'_x(t,0), \tag{6}$$

при дополнительном условии *равномерной малости* нелинейной добавки

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |h(t,x)| = o(x), \quad x \to 0. \tag{7}$$

Тогда соответствующую линейную систему назовем ее *первым приближением*, а если всякая система (6) с данным первым приближением обладает данным перроновским (ляпуновским) свойством устойчивости, то скажем, что это первое приближение *обеспечивает* это свойство.

Без требования равномерной малости добавки последнее понятие в этом определении оказывается совершенно *бессодержательным.*

**Теорема 14** [10, 12]. *Если в определении 4 снять условие (7), то никакое первое приближение не обеспечит ни одного из перроновских или ляпуновских свойств устойчивости.*

Оказывается, все свойства устойчивости, в отличие от свойств неустойчивости, обеспечиваются в точности *одними и теми же* первыми приближениями.

**Теорема 15** [7, 10, 12]. *Если данное первое приближение обеспечивает хотя бы одно из четырех свойств: устойчивость или асимптотическую устойчивость по Перрону или устойчивость или асимптотическую устойчивость по Ляпунову, – то оно обеспечивает и остальные три.*

**Теорема 16** [10, 12]. *Существует асимптотически устойчивая по Перрону линейная система (5), обеспечивающая полную неустойчивость по Ляпунову.*

**Теорема 17** [10, 12]. *Существует не вполне неустойчивая ни по Перрону, ни по Ляпунову линейная система (5), обеспечивающая неустойчивость и по Перрону, и по Ляпунову.*

**5. Зависимость от фазовой области.** Все четыре ляпуновских свойства и два свойства перроновской неустойчивости инвариантны относительно уменьшения фазовой области системы, а остальные два свойства *перроновской устойчивости* уже *не инвариантны.*

**Теорема 18** [10]. *При сужении системы (1) автономной системы на любую ее фазовую подобласть свойства устойчивости (асимптотической) по Ляпунову, а также неустойчивости (полной) по Перрону или по Ляпунову не нарушаются.*

**Теорема 19** [10]. *Существует такая асимптотически устойчивая по Перрону система (1) с исходной фазовой областью* $\mathbb{R}^n$, *что выкалывание любой одной ненулевой точки* $x \in \mathbb{R}^n$ *приводит к неустойчивости по Перрону, а ее сужение на любую ограниченную фазовую подобласть* $G \subset \mathbb{R}^n$ *приводит к полной неустойчивости по Перрону.*

Уменьшение фазовой области *автономной* системы дает существенно меньший эффект.

**Теорема 20.** *Никакое сужение не вполне неустойчивой по Перрону автономной системы на ее фазовую подобласть не приводит к ее полной неустойчивости по Перрону.*

**Теорема 21.** *Существует такая асимптотически устойчивая по Перрону двумерная автономная система с исходной фазовой областью* $\mathbb{R}^n$, *что для любой достаточно малой окрестности нуля* $G \subset \mathbb{R}^n$ *ее сужение на подобласть* $G$ *или даже выкалывание некоторой одной ненулевой точки* $x \in \mathbb{R}^n$ *приводит к ее неустойчивости по Перрону.*

В качестве примера, подтверждающего справедливость сразу двух теорем 13 и 21, годится *классическая* система из [13, §18].

Наиболее *содержательными* сочетаниями перроновских и ляпуновских свойств, реализуемых на одной системе (см. теорему 5), нам представляются следующие два:

1) асимптотическая устойчивость по Перрону вместе с устойчивостью по Ляпунову;

2) полная неустойчивость по Перрону (а тогда и по Ляпунову).

Добавление в первом сочетании устойчивости по Ляпунову является *оправданным.*

**Теорема 22.** *Если система неустойчива (вполне) по Ляпунову, то ее сужение на некоторую фазовую подобласть приводит к неустойчивости (полной) и по Перрону.*

Несмотря на обнаруженную в теоремах 19, 21 и 22 *зависимость* перроновских свойств от фазовой области, основное понятие из определения 4 оказывается все-таки *инвариантным* относительно выбора фазовой области (а значит, и самого факта ее фиксации).

**Теорема 23.** *Если первое приближение обеспечивает какое-либо из перроновских или ляпуновских свойств устойчивости для некоторой фиксированной фазовой области, то оно обеспечивает то же свойство и для любой другой фазовой области.*

**Литература**

1. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* М.: Изд-во АН СССР, 1948.

2. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Z. 1930. Bd 31. S. 748–766.

3. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

4. Изобов Н.А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

5. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

6. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* М.: Гостехиздат, 1949.

7. Сергеев И.Н. *Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.

8. Сергеев И.Н. *Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

9. Сергеев И.Н. *Об исследовании на устойчивость по Перрону одномерных и автономных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1561–1562.

10. Сергеев И.Н. *Устойчивость по Перрону и ее исследование по первому приближению* // Докл. РАН. 2019. Т. 486. № 1.

11. Сергеев И.Н. *Исследование на устойчивость по Перрону линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1571–1572.

12. Сергеев И.Н. *Об исследовании по первому приближению перроновских и ляпуновских свойств устойчивости* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6.

13. Филиппов А.Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений.* М.: Едиториал УРСС, 2004.

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

**Е.С. Турковец**

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$y'''' = p_0|y''|^k \operatorname{sgn} y'', \quad k > 1, \quad p_0 \equiv const > 0, \tag{1}$$

которое может быть сведено к уравнению типа Эмдена–Фаулера второго порядка.

Для уравнения Эмдена–Фаулера в виде

$$y^{(n)} = p\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)\, |y|^k \operatorname{sgn} y, \quad k > 0, \quad k \neq 1 \tag{2}$$

Р. Беллманом в [2] было изучено асимптотическое поведение решений уравнения второго порядка со степенным потенциалом $p(x) = x^\sigma$. И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурией в [3] изучались качественные свойства решений уравнения (2) и были получены результаты о существовании решений со степенной асимптотикой уравнений высокого порядка. В монографии [1] И.В. Асташовой была получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения (2) третьего порядка в случае $p = p(x)$ и четвертого порядка в случае $p \equiv p_0$. Для уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка К.М. Дулиной и Т.А. Корчемкиной в [4] была получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений в случае $p = p(x, y, y')$. Также вопрос поведения решений 3 и 4 порядков был изучен И.В. Асташовой в [5]. В настоящем докладе изучается асимптотическое поведение решений нелинейного дифференциального уравнения (1).

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{2}{k-1}, \quad C = \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{p_0}\right)^{1/(k-1)}, \quad C_1 = y'(x_0) + \frac{C}{1-\alpha}(x^* - x_0)^{1-\alpha},$$

$$C_2 = y'(x_0) - \frac{C}{1-\alpha}x_0^{1-\alpha}, \quad C_3 = y'(x_0) - \frac{C}{1-\alpha}(x^* - x_0)^{1-\alpha}, \quad C_4 = y'(x_0) + \frac{C}{1-\alpha}x_0^{1-\alpha},$$

где $y'(x_0)$ – значение рассматриваемого решения $y(x)$ уравнения (1) в некоторой точке $x_0$.

**Теорема 1.** *Пусть $k > 3$, тогда все решения уравнения (1) в связи со своим асимптотическим поведением вблизи правой границы области определения относятся к одному из следующих типов:*

*1) тривиальное решение $y = 0$;*

*2) если $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha})$, то $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to +\infty$.*

*3) если $y(x) \sim y_0 + C_2(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha}\right)$, $x \to +\infty$, то $y(x) \to -\infty$, $y'(x) \to -\infty$, $y''(x) \to 0$;*

*4) если $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right)$, то $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to -\infty$;*

*5) если $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right)$, то $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to +\infty$;*

*6) если $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right)$, то $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to -\infty$;*

*7) если $y(x) \sim y_0 + C_4(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha})$, то $y(x) \to +\infty$, $y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to 0$.*

**Теорема 2.** *Пусть $2 < k < 3$, тогда все решения уравнения (1) в связи со своим асимптотическим поведением вблизи правой границы области определения относятся к одному из следующих типов:*

*1) тривиальное решение $y = 0$.*

*2) если $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha})$, то $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to +\infty$.*

*3) если $y(x) \sim y_0 + C_2(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha}\right)$, $x \to +\infty$, то $y(x) \to +\infty$, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to 0$.*

*4) если $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right)$, то $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x) \to -\infty$, $y''(x) \to -\infty$.*

*5) если $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right)$, то $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to +\infty$.*

*6) если $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right)$, то $y(x)$ стремится к конечному значению, $y'(x) \to -\infty$, $y''(x) \to -\infty$.*

*7) если $y(x) \sim y_0 + C_4(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha})$, то $|y(x)| \to \infty$, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to 0$.*

**Теорема 3.** *Пусть $1 < k < 2$, тогда все решения уравнения (1) в связи со своим асимптотическим поведением вблизи правой границы области определения относятся к одному из следующих типов:*

*1) тривиальное решение $y = 0$.*

*2) если $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha})$, то $y(x) \to +\infty$, $y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to +\infty$.*

*3) если $y(x) \sim y_0 + C_2(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha}\right)$, $x \to +\infty$, то $|y(x)| \to \infty$, $y'(x)$ стремится к конечному значению, $y''(x) \to 0$.*

*4) если $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left((x^* - x)^{2-\alpha} - (x^* - x_0)^{2-\alpha}\right)$, то $y(x) \to -\infty$, $y'(x) \to -\infty$, $y''(x) \to -\infty$.*

*5) если* $y(x) \sim y_0 + C_1(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left((x^*-x)^{2-\alpha} - (x^*-x_0)^{2-\alpha}\right)$, *то* $y(x) \to +\infty$, $y'(x) \to +\infty$, $y''(x) \to +\infty$.

*6) если* $y(x) \sim y_0 + C_3(x - x_0) - C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}\left((x^*-x)^{2-\alpha} - (x^*-x_0)^{2-\alpha}\right)$, *то* $y(x) \to -\infty$, $y'(x) \to -\infty$, $y''(x) \to -\infty$.

*7) если* $y(x) \sim y_0 + C_4(x - x_0) + C(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^{-1}(x^{2-\alpha} - x_0^{2-\alpha})$, *то* $|y(x)| \to \infty$, $y'(x)$ *стремится к конечному значению,* $y''(x) \to 0$.

**Литература**

1. Асташова И. В. *Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.
2. Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.* М.: Изд-во иностранной литературы, 1954.
3. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1990. 432 с.
4. Дулина К. М., Корчемкина Т. А. *Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом* // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучная сер. 2015. Т. 128. Вып. 6. С. 50–56.
5. Astashova I. *On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations* // WSEAS Trans. on Math. 2017. V. 16. № 5. P. 39–47.

## ASSIGNABILITY OF IMPROPERNESS COEFFICIENTS OF DISCRETE LINEAR TIME-VARYING SYSTEMS

**A. Babiarz, A. Czornik, M. Niezabitowski**

We consider the discrete linear time-varying system

$$x(n+1) = A(n)x(n) + B(n)u(n), \tag{1}$$

where $A = (A(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $B = (B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ are sequences of $s$ by $s$ and $s$ by $t$ real matrices, respectively. Moreover, the control sequence $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ is $t-$ dimensional. If the control $u$ has a form of a linear time-varying feedback, i.e.

$$u(n) = U(n)x(n),$$

then we obtain closed system

$$x(n+1) = (A(n) + B(n)U(n))x(n). \tag{2}$$

With homogeneous system we associate the so-called: Lyapunov regularity coefficients $\sigma_L(A)$, Perron regularity coefficient $\sigma_P(A)$ and Grobman regularity coefficient $\sigma_G(A)$ (see [1–4]). In this paper we investigate the problem of assignability of these characteristics. Continuous time-version of this problem has been investigated in [5]. The main result of this paper is given by the following theorem

**Theorem.** *If system (1) is uniformly completely controllable then for each* $\sigma \geqslant 0$ *there exists admissible feedback control* $U = (U(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *such that the for the closed loop system (2) we have*

$$\sigma = \sigma_L(A+BU) = \sigma_P(A+BU) = \sigma_G(A+BU).$$

**Aknowledgement.** The research presented here was done as parts of the projects funded by the National Science Centre in Poland granted according to decisions DEC-2015/19/D/ST7/03679 (Babiarz) and DEC-2017/25/B/ST7/02888 (Czornik), respectively. The work of Niezabitowski was supported by Polish National Agency for Academic Exchange according to the decision PPN/BEK/2018/1/00312/DEC/1.

**References**

1. Lyapunov A. M. *Collected Papers.* Moscow: Akad. Nauk SSSR, 1956.
2. Perron O. *Die rdnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 31. S. 748–766.
3. Grobman D. M. *Characteristic exponents of systems near to linear ones* // Mat. Sb. 1952. V. 72. Iss. 1. P. 121–166.
4. Czornik A. *Perturbation Theory for Lyapunov Exponents of Discrete Linear Systems.* Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk, Wydawnictwa AGH, 2012.
5. Popova S. N. *Global reducibility of linear control systems to systems of scalar type* // Differ. Equat. 2004. V. 40. № 1. P. 43–49.

## SEPARATION RESULT FOR DISCRETE VOLTERRA EQUATIONS

**A. Babiarz, A. Czornik, M. Niezabitowski**

In this paper we consider asymptotic properties of solutions of discrete Volterra equations of convolution type. This type of equations has been widely used as a mathematical model in population dynamics [1]. Results on stability and boundedness of solutions of Volterra difference equations may be found in [2, 3]. Very deep and general results about the exact rate of decay of the solution of this type of equations are obtained in [4]. Yet another type of qualitative results about Volterra difference equations such as oscilation, convergency and stability are presented in the papers [5–7]. The main objective of this paper is to present an asymptotic lower bound for the norm of difference of two solutions.

Let us consider the following discrete convolution Volterra equation

$$x(n+1) = x(0) + \sum_{k=0}^{n} a(n-k)A(k)x(k) \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{1}$$

where $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ is a bounded sequence of $d \times d$ matrices

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A(n)\| = M < \infty,$$

$(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ is a decreasing sequence of positive numbers satisfying

$$a(n) \leqslant \frac{\overline{M}}{n^{\alpha}}$$

for all $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, certain $\alpha \in (0,1)$ and $\overline{M} > 0$.

The next theorem contains the main result of our paper, which shows that the norm of difference of two solutions of equation (1) tends to infinity slower than $n^{\lambda}$ with certain positive $\lambda$.

**Theorem.** *Let $\lambda > (1-\alpha)/\alpha$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ and $x \neq y$. Then*

$$\limsup_{n\to\infty} n^{\lambda} \|\varphi(n,x) - \varphi(n,y)\| = \infty,$$

*where $\varphi(n,x)$ is the solution of (1) corresponding to the initial condition $x(0) = x$.*

**Aknowledgement.** The research presented here was done as parts of the projects funded by the National Science Centre in Poland granted according to decisions DEC-2015/19/D/ST7/03679 (Babiarz) and DEC-2017/25/B/ST7/02888 (Czornik), respectively. The work of Niezabitowski was supported by Polish National Agency for Academic Exchange according to the decision PPN/BEK/2018/1/00312/DEC/1.

**References**

1. Gushing J. M. *Volterra Integrodifferential Equations in Population Dynamics.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. P. 81–148.

2. Crisci M., Jackiewicz Z., Russo E., Vecchio A. *Stability analysis of discrete recurrence equations of Volterra type with degenerate kernels* // J. of Math. Anal. and Appl. 1991. V 162. № 1. P. 49–62.

3. Raffoul Y. N. *Boundedness and periodicity of Volterra systems of difference equations* // J. of Difference Equat. and Appl. 1998. V. 4. № 4. P. 381–393.

4. Applelby J. A., Gyori I., Reynolds D. W. *On exact convergence rates for solutions of linear systems of Volterra difference equations* // J. of Difference Equat. and Appl. 2006. V. 12. № 12. P. 1257–1275.

5. Graef J., Thandapani E. *Oscillatory behavior of solutions of Volterra summation equations* // Appl. Math. Lett. 1999. V. 12. № 7. P. 79–84.

6. Thandapani E., Lalli B. *Asymptotic behavior and oscillation of difference equations of Volterra type* // Appl. Math. Lett. 1994. V. 7. № 1. P. 89–93.

7. Migda J., Migda M. *Asymptotic behavior of solutions of discrete Volterra equations* // Opuscula Math. 2016. V. 36. № 2. P. 265–278.

## TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ESSENTIALLY SINGULAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

**I. Kiguradze**

On a finite open interval $]a,b[$, we consider the differential equation

$$u'' = f(t,u) \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$u(a+) = 0, \quad u(b-) = 0, \tag{2}$$

or

$$u(a+) = 0, \quad u'(b-) = 0, \tag{3}$$

where $f : ]a,b[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function satisfying the local Carathéodory conditions, $u(a+)$ is a right limit of the function $u$ at the point $a$, while $u(b-)$ and $u'(b-)$ are left limits of the functions $u$ and $u'$ at the point $b$.

A method for the investigation of problem (1), (2) (of problem (1), (4)) is elaborated in the case where the function $f$ has singularities of arbitrary order at the points $a$ and $b$ (a singularity of arbitrary order at the point $a$) with respect to the time variable.

Based on this method, in particular, the following theorem is proved.

**Theorem.** *Let in the domain* $]a,b[\times\mathbb{R}$ *the condition*

$$(f(t,x) - f(t,y))\,\mathrm{sgn}\,(x-y) \geqslant p(t)|x-y|$$

*hold, where* $p : ]a,b[\to \mathbb{R}$ *is a Lebesgue integrable on every closed interval contained in* $]a,b[$ *function. Let, moreover,*

$$\int_a^b (t-a)(b-t)[p(t)]_- dt \leqslant b-a,$$

*and there exist an absolutely continuous function* $\delta : ]a,b[ \to ]0,+\infty[$ *such that* $\delta(a+) = \delta'(a+) = 0,\ \ \delta(b-) = \delta'(b-) = 0,$

$$\liminf_{t\to a}(\delta^2(t)p(t)) > 0, \quad \liminf_{t\to b}(\delta^2(t)p(t)) > 0, \quad \int_a^b \delta(t)|f(t,0)|\,dt < +\infty.$$

*Then problem* (1), (2) *has one and only one solition.*

**Example.** Let

$$f(t,x) = \delta^{-2}(t)p_0(t)\exp(|x|)x + \delta^{-1}(t)q_0(t),$$

where $\delta(t) = \exp(-1/(t-a) - 1/(b-t))$, and $p_0$, $q_0 : [a,b] \to ]0,+\infty[$ are continuous functions. Then for any $\ell > 0$ and $x \in \mathbb{R}$ the condition

$$\int_a^b (t-a)^\ell (b-t)^\ell |f(t,x)|\,dt = +\infty$$

is satisfied, but nevertheless, according to the above theorem, problem (1), (2) has one and only one solution.

# КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## ИЗОХРОННЫЕ ЦЕНТРЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

**В.В. Амелькин, А.Е. Руденок**

Рассмотрим систему Льенара

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = A(x) - B(x)y \tag{1}$$

в предположении, что вещественные голоморфные в точке $x = 0$ функции $A$ и $B$ удовлетворяют условиям $A(0) = B(0) = 0$ и $A'(0) = 1$.

Как известно, особая точка $O(0,0)$ системы (1) является либо центром, либо негрубым фокусом.

**Определение.** Центр $O(0,0)$ системы (1) называется изохронным, если период каждой замкнутой траектории из области этого центра равен $2\pi$.

**Теорема 1** [1, теорема 17]. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ системы (1) была изохронным центром, необходимо и достаточно существование голоморфной в точке $x = 0$ функции $\alpha$ и нечетной голоморфной в точке $x = 0$ функции $\gamma$ таких, чтобы:*

*1)* $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) = 1$, $\gamma(0) = 0$;

*2) имели место представления*

$$A(x) = \alpha(x)\alpha'(x)(1 + \gamma^2(\alpha(x))), \quad B(x) = \alpha'(x)(2\gamma(\alpha(x)) + \alpha(x)\gamma'(\alpha(x)));$$

*3) выполнялось равенство*

$$\alpha^{-1}(u) = u + \phi(u), \quad \phi(-u) = \phi(u),$$

*где $\alpha^{-1}$ – функция, обратная к функции $\alpha$.*

**Пример.** Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{x(1+ax)(1+2ax+2a^2x^2)(1+4ax+4a^2x^2+k^2x^2+2ak^2x^3+a^2k^2x^4)}{(1+2ax)^5} -$$

$$- \frac{3kx(1+ax)(1+2ax+2a^2x^2)}{(1+2ax)^3}y,$$

где $a \neq 0$, $k \neq 0$ – вещественные постоянные, является системой с изохронным центром. При ее построении функции $\alpha$, $\alpha^{-1}$ и $\gamma$ определялись соответственно равенствами

$$\alpha(x) = \frac{x(1+ax)}{1+2ax}, \quad \alpha^{-1}(u) = \frac{-1+2au+\sqrt{1+4a^2u^2}}{2a}, \quad \gamma(u) = ku.$$

**Теорема 2.** *Система дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{(1+2kx+2k^2x^2)(x^4(1+kx)^4+(1+2kx)^4R^2(s(x)))}{x^3(1+kx)^3(1+2kx)^3} - \frac{(1+2kx)R'(s(x))}{x(1+kx)^3}y,$$

*где $k \in \mathbb{R}$, $s(x) = x/(1+kx)$, $R$ – нечетная рациональная функция такая, что $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$, имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный центр.*

**Литература**

1. Амелькин В. В., Руденок А. Е. *Центры и изохронные центры систем Льенара* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 294–303.

# НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**М.С. Белокурский**

Пусть $z = (z_n) = (z(n))$ $(n \in \mathbb{N})$ – $l$-мерная векторная функция (последовательность), определенная на $\mathbb{N}$ со значениями в $\mathbb{R}^l$, т.е. $z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^l$. Множество таких последовательностей обозначим через $S^l$. Следуя [1, с. 69], введем следующее

**Определение.** Последовательность $z \in S^l$ называется периодической с периодом $\omega \in \mathbb{N}$ ($\omega$-периодической), если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $z_{n+\omega} = z_n$.

Множество $l$-мерных $\omega$-периодических последовательностей обозначим через $PS^l_\omega$.

Как известно [2], нелинейное скалярное периодическое обыкновенное дифференциальное уравнение не имеет отличных от постоянных периодических решений таких, что периоды решения и уравнения несоизмеримы. Более того, Н.П. Еругин в работе [3] доказал, что такого рода решения отсутствуют у линейной нестационарной периодической системы двух уравнений.

Вполне естественно поставить вопрос для двухмерного случая: имеет ли место дискретный аналог отмеченной выше теоремы Н.П. Еругина для линейной системы

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n y_n, \quad y_{n+1} = c_n x_n + d_n y_n \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in S^1, \quad y \in S^1, \tag{1}$$

где матрица коэффициентов

$$A(n) = \begin{bmatrix} a(n) & b(n) \\ c(n) & d(n) \end{bmatrix}$$

является $\omega$-периодической, т.е. $A(n+\omega) = A(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и хотя бы один из ее элементов отличен от постоянной?

**Теорема.** *Если система (1) имеет отличное от стационарного $\Omega$-периодическое решение такое, что период решения взаимно прост с периодом системы, то столбцы матрицы $P(n) = A(n+\Omega) - A(n)$, $n \in \mathbb{N}$, линейно зависимы.*

**Следствие.** *Если матрица $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, имеет полный столбцовый ранг, т.е. $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}} P = 2$, то нестационарные сильно нерегулярные периодические решения у системы (1) отсутствуют.*

Примером служит система

$$x_{n+1} = -x_n + b_n y_n, \quad y_{n+1} = d_n y_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (b_n) \in PS^1_\omega, \quad (d_n) \in PS^1_\omega, \tag{2}$$

где хотя бы один из коэффициентов $(b_n)$, $(d_n)$ отличен от постоянного, т.е. $\omega \geqslant 2$, и наибольший общий делитель чисел $2$ и $\omega$ равен $1$. Система (2) имеет 2-периодическое решение

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Период решения является взаимно простым с периодом системы (2).

**Литература**

1. Agarwal R. P. *Difference equations and inequalities: theory, methods and applications.* New York: Marcel Dekker, 1992.
2. Massera J. L. *Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales* // Bol. de PersonNameProductIDla Facultadla Facultad de Ingenieria. 1950. V. 4. № 1. P. 37–45.
3. Еругин Н. П. *О периодических решениях линейной однородной системы дифференциальных уравнений* // Докл. АН БССР. 1962. Т. 6. № 7. С. 407–410.

# К РАЗРЕШИМОСТИ И ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

**А.Н. Бондарев**

Изучается задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X + X(B_1(t) + \lambda^2 B_2(t)) + F(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i, \lambda) = 0, \tag{2}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A$, $B_1$, $B_2$, $F$ – матрицы-функции класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей, $M_i$ – заданные постоянные $(n \times n)$-матрицы; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$.

В работе, являющейся продолжением [1] и развитием [2], по методу [3, гл. 1] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), алгоритмы построения решения и дана оценка его области локализации.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_t \|B_2(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|, \quad v_i = \|V_i\|, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t,\lambda)\|,$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad q(\varepsilon) = q_1\varepsilon^2 + q_2\varepsilon, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h \sum_{i=1}^{k} m_i v_i,$$

где $q_1 = \gamma\mu_1\mu_2\beta_2\omega\sum_{i=1}^{k} m_i v_i$, $q_2 = \gamma\mu_1\mu_2\alpha\omega\sum_{i=1}^{k} m_i v_i$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц, $\Phi$ – линейный матричный оператор типа [4], $\Phi Y = \sum_{i=1}^{k} M_i Y V_i$, $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dV/dt = VB_1(t)$.

**Теорема.** *Пусть оператор $\Phi$ однозначно обратим. Тогда при*

$$|\lambda| < \frac{2}{q_2 + \sqrt{q_2^2 + 4q_1}} \tag{4}$$

*задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение $X(t,\lambda)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leqslant N/(1 - q(\varepsilon))$.*

Задача (1), (2) сведена к эквивалентному интегральному уравнению

$$X(t,\lambda)=\Bigg(\Phi^{-1}\bigg\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int\limits_{t_i}^{t}[\lambda A(\tau)X(\tau,\lambda)+$$

$$+\lambda^2X(\tau,\lambda)B_2(\tau)+F(\tau)]V^{-1}(\tau)\,d\tau V_i\bigg\}\Bigg)V(t), \tag{4}$$

для исследования разрешимости которого используется принцип сжимающих отображений (см., например, [5, с. 605]).

Решение строится по алгоритму

$$X_p(t,\lambda)=\Bigg(\Phi^{-1}\bigg\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int\limits_{t_i}^{t}[\lambda A(\tau)X_{p-1}(\tau,\lambda)+$$

$$+\lambda^2X_{p-1}(\tau,\lambda)B_2(\tau)+F(\tau)(\tau,\lambda)]V^{-1}(\tau)\,d\tau V_i\bigg\}\Bigg)V(t),\quad p=1,2,\ldots, \tag{5}$$

где в качестве начального приближения принята произвольная матрица $X_0(t,\lambda)\in\mathbb{C}$.

Установлено, что последовательность $\{X_s(t,\lambda)\}_0^\infty$, построенная по алгоритму (5), сходится равномерно по $t\in I$ к решению полученного интегрального уравнения, при этом справедливы оценки

$$\|X-X_s\|_C\leqslant\frac{q(\varepsilon)^s}{1-q(\varepsilon)}\|X_1-X_0\|_C,\quad s=0,1,2,\ldots;\quad \|X\|_C\leqslant\|X_0\|_C+\frac{\|X_1-X_0\|_C}{1-q(\varepsilon)}.$$

Из оценки для $\|X\|_C$ при $X_0(t,\lambda)\equiv 0$ следует оценка из теоремы.

Аналогичные результаты дает применение метода малого параметра Пуанкаре–Ляпунова к интегральному уравнению (4). При этом решение строится в виде

$$X(t,\lambda)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^sX_s(t), \tag{6}$$

где

$$X_0(t)=\Bigg(\Phi^{-1}\bigg\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int\limits_{t_i}^{t}F(\tau)V^{-1}(\tau)\,d\tau V_i\bigg\}\Bigg)V(t),$$

$$X_1(t)=\Bigg(\Phi^{-1}\bigg\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int\limits_{t_i}^{t}A(\tau)X_0(\tau)V^{-1}(\tau)\,d\tau V_i\bigg\}\Bigg)V(t),$$

$$X_{p+1}(t)=\Bigg(\Phi^{-1}\bigg\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int\limits_{t_i}^{t}[A(\tau)X_p(\tau)+X_{p-1}(\tau)B_2(\tau)]V^{-1}(\tau)\,d\tau V_i\bigg\}\Bigg)V(t),\quad p=1,2,\ldots$$

Установлено, что ряд (6) сходится равномерно по $t\in I$ в области (значений параметра $\lambda$) (4).

**Литература**

1. Bondarev A. N. *Multipoint Boundary Value Problem for the Linear Matrix Lyapunov Equation with Parameter* // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations «QUALITDE – 2015»: abstracts. 2015. P. 32–35.

2. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 776–784.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

4. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness* // J. Math. Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.

5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

## ЯВЛЕНИЕ БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

**Е.З. Боревич**

Рассматривается одномерная краевая задача, описывающая распределение зарядов в полупроводниках. Функции $v(x)$ и $n(x)$, описывающие электростатический потенциал и плотность движущихся электронов, удовлетворяют при $0 < x < 1$ системе уравнений [1]

$$(D(|v'|)(n' - nv'))' = 0, \quad -v'' = f - n \tag{1}$$

и граничным условиям

$$v(0) = v(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \tag{2}$$

Константа $f > 0$ задает однородную плотность ионизированной примеси, $D(|v'|) > 0$ – коэффициент диффузии, зависящий от электрического поля. При любом значении параметра $f$ задача (1), (2) имеет тривиальное решение $v(x) = 0$, $n(x) = f$. Задача (1), (2) эквивалентна задаче

$$u = v', \quad D(|u|)(-u'' + fu + uu') = j, \tag{3}$$

$$v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0, \tag{4}$$

где произвольная константа $j$ задает плотность потока электронов. Предположим, что плотность потока электронов линейно зависит от однородной плотности ионизированной примеси, т.е. $j = fc_0 + c$, $c$ – произвольная константа. Предположим, что

$$\frac{c_0 D'(0)}{D^2(0)} - 1 > 0.$$

При сделанных предположениях задача (4), (4) имеет бифуркационные решения при $f = f_k$, $k \in \mathbb{N}$ [2].

**Литература**

1. Van Roosbroeck W. *Theory of flow of electrons and holes in Germanium and other semiconductors* // Bell. Syst. Tech. 1950. V. 29. P. 560–607.

2. Grandall M. G., Rabinowitz P. H. *Bifurcation for simple eigenvalues* // J. Funct. Anal. 1971. V. 8. P. 321–340.

# КРИТЕРИИ СИЛЬНОЙ ВЛОЖИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

**В.Т. Борухов, О.М. Кветко**

В монографии [1] определены понятия слабой и сильной вложимости компонент решений нелинейной дифференциальной системы в множество решений линейных автономных систем. Критерии слабой вложимости представлены в [1], критерий сильной вложимости вытекает из результатов работы [2]. В данном сообщении мы приводим новый критерий сильной вложимости системы

$$\dot{x}(t) = F(x), \tag{1}$$

где $x = [x_1, \ldots, x_n]^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = [f_1(x), \ldots, f_n(x)]^{\text{т}}$, $f_\nu(x) = \sum_{|l|=1}^{r} a_l^\nu x^l$, $l = l_1 \ldots l_n$ – мультииндекс, $x^l = x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n}$, $|l| := l_1 + \ldots + l_n$, $a_l^\nu \in \mathbb{R}$. Здесь и далее предполагается градуированное лексикографическое упорядочение мультииндексов.

**Определение.** Несколько модифицируя определение сильной вложимости [1], систему (1) назовем сильно вложимой в линейную автономную конечномерную систему

$$\dot{z}(t) = D_s z(t), \quad z \in \mathbb{R}^s, \tag{2}$$

если существует линейное отображение согласования $G_s : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ и отображение вложимости $P_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ такие, что произвольная траектория $x(t, x_0)$ $(t \geqslant 0,$ $x(0, x_0) = x_0)$ системы (1) имеет вид $x(t, x_0) = G_s e^{D_s t} P_s(x_0)$.

Из [3, 4] следует

**Лемма.** *Система (1) вложима в окрестности нуля* $(x = 0,\ t = 0)$ *в линейную дифференциальную бесконечномерную систему*

$$\dot{z}(t) = Az(t),$$

*где*

$$z(t) = [z_1(t), \ldots, z_m(t), \ldots]^{\text{т}}, \quad z_m(t) = [z_\alpha(t) | |\alpha| = m],$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1r} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2r} & A_{2r+1} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}, \quad A_{jm} = \left( \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu a_{l-k+\delta_\nu}^\nu \right)_{|k|=j}^{|l|=m}.$$

*Здесь* $A_{jm}$ – $N_j \times N_m$ – *матрица* $(N_j = n(n+1)\ldots(n+j-1)/(j!))$; $\delta_\nu = \delta_{1\nu} \ldots \delta_{n\nu}$, $\delta_{\nu\nu} = 1$, $\delta_{i\nu} = 0$, *если* $i \neq \nu$; $a_{l-k+\delta_\nu}^\nu = 0$, *если* $a_{l-k+\delta_\nu}^\nu \notin \{a_\alpha^\nu | 1 \leqslant |\alpha| \leqslant r\}$.

**Теорема 1.** *Пусть* $s := s_k = N_1 + \ldots + N_k$. *Тогда для вложимости системы (1) в систему (2) достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$G_{s_k} D_{s_k}^i B_{s_k} = 0 \quad \textit{для любого} \quad i \in \{0, \ldots, s_k - 1\}, \tag{3}$$

*где*

$$D_{s_k} := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{kk} \end{bmatrix}, \quad B_{s_k} := \begin{bmatrix} A_{1k+1} & \ldots & A_{1k+r-1} \\ A_{1k+1} & \ldots & A_{2k+r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{kk+1} & \ldots & A_{kk+r-1} \end{bmatrix},$$

$G_{s_k} := [I_n \ \underbrace{0 \ \ldots \ 0}_{s_k - N_1}]$. *Здесь* $I_n$ – $n \times n$ *единичная матрица,* $A_{ij} = 0$, *если* $j > r + i - 1$.

*Обратно, если система (1) вложима в систему (2), то она также вложима в систему вида (2), для которой* $D_s = D_{s_k}$, $G_s = G_{s_k}$, $P_s(x_0) = [x_0^l | \ |l| = m, \ m = 1,\ldots,k]^{\text{т}}$ *и выполняются условия (3).*

Обозначим систему (1) символом $\Sigma$ и рассмотрим пару $(\Sigma, w)$, где $w = w(x_1,\ldots \ldots x_n) \in \mathbb{R}[x_1,\ldots x_n]$, $\mathbb{R}[x_1,\ldots x_n]$ – линейное пространство вещественных полиномов от переменных $x_1,\ldots x_n$. Следуя [2], пару $(\Sigma, w)$ будем называть конечномерно сильно вложимой, если для любого $p \in \mathbb{R}^n$ композиция $(w \cdot \varphi_t)(p)$ функции $w$ и отображения сдвига $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ на решениях системы $\Sigma$ удовлетворяет подходящей линейной конечномерной системе дифференциальных уравнений.

Отметим, что сильная вложимость системы (1) в смысле определения эквивалентна сильной вложимости $n$ пар $(\Sigma, x_1),\ldots,(\Sigma, x_n)$. Из [2] следует

**Теорема 2.** *Пара* $(\Sigma, w)$ *конечномерно сильно вложима тогда и только тогда, когда существует* $m \in \{1, 2, \ldots\}$, *для которого выполняется условие*

$$\dim \mathcal{L}_{m-1} = \dim \mathcal{L}_m = m, \tag{4}$$

*где* $\mathcal{L}_{m-1} = \operatorname{span}\{w, Lw, \ldots, L^{m-1}w\}$ *– линейная оболочка в пространстве* $\mathbb{R}[x_1,\ldots x_n]$ *множества* $\{w, Lw, \ldots, L^{m-1}w\}$, $L$ *– линейный оператор вида*

$$L = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Число $m$ из равенства (4) определяет минимальную размерность пространства состояний линейной системы вложения и называется порядком вложимости пары $(\Sigma, w)$.

Пусть задано непустое открытое в $\mathbb{R}^n$ множество $\Omega$.

**Теорема 3.** *Пара* $(\Sigma, w)$ *конечномерно сильно вложима с порядком вложимости* $m$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

*1) существуют векторы* $z_1,\ldots,z_m \in \Omega$ *такие, что*

$$\det \begin{bmatrix} w(z_1) & (Lw)(z_1) & \ldots & (L^{m-1}w)(z_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w(z_m) & (Lw)(z_m) & \ldots & (L^{m-1}w)(z_m) \end{bmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

*2) для любых векторов* $z_1,\ldots z_{m+1} \in \Omega$ *выполняется условие*

$$\det \begin{bmatrix} w(z_1) & (Lw)(z_1) & \ldots & (L^{m}w)(z_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w(z_{m+1}) & (Lw)(z_{m+1}) & \ldots & (L^{m}w)(z_{m+1}) \end{bmatrix} = 0. \tag{6}$$

Отметим, что условия (5), (6) определяют алгебраическое множество в пространстве коэффициентов системы $\Sigma$.

**Литература**


1. Мироненко В. И. *Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений.* Мн.: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981.

2. Борухов В. Т. *Сильная вложимость автономных нелинейных дифференциальных систем в линейные дифференциальные системы* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 313–321.

3. Тартаковский В. *Явные формулы для локальных разложений около точек покоя* // Докл. АН СССР. 1950. Т. 72. № 5. С. 853–856.

4. Борухов В. Т., Кветко О. М. *Вложимость нелинейных дифференциальных систем в линейные системы и полиномиальные первые интегралы* // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация. Материалы междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина, Минск, 24-29 сент. 2018 г. Мн.: БГУ, 2018. С. 81–82.

# ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЛИНЕЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ

**Ю.М. Гребенцов**

Рассматривается задача об $\omega$-периодических решениях системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda A(t)x + \lambda B(t)\frac{dx}{dt} + f(t), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t), B(t), f(t)$ – непрерывные $\omega$-периодические матрицы соответствующих размерностей, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Данная работа является продолжением и развитием работ [1–3]. Следуя подходу, изложенному в работе [4], $\omega$-периодическое решение системы (1) отыскивается в виде

$$x(t,\lambda) = c(\lambda) + z(t,\lambda), \tag{2}$$

где $c(\lambda)$ – постоянный вектор, $z(t,\lambda)$ – $\omega$-периодическая вектор-функция, удовлетворяющая интегральному условию

$$\int\limits_0^\omega A(\tau)z(\tau,\lambda)\,d\tau = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{A}(\omega) = \int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \|\widetilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t\|A(t)\|, \quad \beta = \max_t\|B(t)\|,$$

$$\sigma = \max_t\|Q(t)\|, \quad \widetilde{h} = \left\|\int\limits_0^\omega f(\tau)\,d\tau\right\|, \quad h_0 = \max_t\|g(t)\|, \quad \|X\|_C = \max_t\|X(t)\|,$$

$$q = \frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2 + \gamma\alpha\sigma\omega + \beta\right), \quad H = \frac{\omega h_0}{2(1-\varepsilon q)}, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad t \in [0,\omega],$$

где $Q(t) = B(t) - \bar{B}$ ($\bar{B}$ – интегральное среднее матрицы $B(t)$ на $[0,\omega]$).

**Теорема.** *Пусть выполнено условие* $\det\widetilde{A}(\omega) \neq 0$. *Тогда при* $0 < |\lambda| < 1/q$ *система (1) имеет единственное $\omega$-периодическое решение. Это решение представимо в виде (2), при этом справедливы оценки*

$$\|c(\lambda)\| \leqslant \frac{\gamma\widetilde{h}}{\varepsilon} + \gamma\sigma\omega H, \quad \|z(t,\lambda)\| \leqslant \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2 H, \quad \|dz(t,\lambda)/dt\| \leqslant \frac{H}{1-\varepsilon q}.$$

Для построения решения предлагается итерационный алгоритм

$$c_{k+1}(\lambda) = -\widetilde{A}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega Q(\tau)y_k(\tau,\lambda)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}\widetilde{A}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega f(\tau)\,d\tau,$$

$$z_{k+1}(t,\lambda) = \int\limits_0^\omega K_A(t,\tau)y_k(\tau,\lambda)\,d\tau,$$

$$y_{k+1}(t,\lambda)=\int\limits_0^\omega \varphi(t,\tau)\Big\{\lambda A(\tau)\Big[z_k(\tau,\lambda)-\widetilde{A}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega Q(s)y_k(s,\lambda)\,ds\Big]+$$

$$+\lambda B(\tau)y_k(\tau,\lambda)+g(\tau)\Big\}\,d\tau,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

где

$$K_A(t,\tau)=\begin{cases}\widetilde{A}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\tau A(\sigma)\,d\sigma, & 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\omega,\\ -\widetilde{A}^{-1}(\omega)\int\limits_\tau^\omega A(\sigma)\,d\sigma, & 0\leqslant t<\tau\leqslant\omega,\end{cases}\qquad \varphi(t,\tau)=\begin{cases}\tau/\omega, & 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\omega,\\ \tau/\omega-1, & 0\leqslant t<\tau\leqslant\omega,\end{cases}$$

$$y(t,\lambda)=\frac{dz(t,\lambda)}{dt},\quad g(t)=f(t)-A(t)\widetilde{A}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega f(\tau)\,d\tau,$$

$z_0(t,\lambda)$, $y_0(t,\lambda)$ – произвольные $\omega$-периодические функции класса $C$.

Доказательство теоремы, исследование сходимости, скорости сходимости алгоритма приведено в работе [3], в которой получена получена оценка

$$\tilde{\varphi}_k\leqslant M^k(E-M)^{-1}\varphi_0,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

где $\tilde{\varphi}_k=\mathrm{colon}\,(\|z-z_k\|_C,\|y-y_k\|_C)$, $\varphi_0=\mathrm{colon}\,(\|z_0\|_C,\|y_0\|_C)$, $E$ – единичная матрица,

$$M=\begin{pmatrix}0 & \gamma\alpha\omega^2/2\\ \varepsilon\alpha\omega/2 & \varepsilon\omega(\gamma\alpha\sigma\omega+\beta)/2\end{pmatrix}.$$

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрена модельная задача [3].

**Литература**

1. Гребенцов Ю. М., Лаптинский В. Н. *О периодических решениях линейных неавтономных систем второго порядка* // «Еругинские чтения–2014»: тез. докл. междунар. науч. конф., 20–22 мая 2014 г, Новополоцк. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2014. С. 56.

2. Гребенцов Ю. М., Лаптинский В. Н. *К задаче о периодических решениях линейных неавтономных систем второго порядка* // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сентября 2016 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2016. Ч. 2. С. 15–16.

3. Лаптинский В. Н., Гребенцов Ю. М. *Конструктивный анализ и структурные свойства периодических решений линейных многомерных систем второго порядка с параметром.* Могилев: Могилевский гос. ун-т продовольствия, 2017. Ч. 1. 54 с. (Препринт ИТМ НАН Беларуси; № 41).

4. Лаптинский В. Н. *Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальных уравнений* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1990. № 5. С. 25–30.

## ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧНОГО ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ЦИЛИНДРЕ

**А.А. Гринь, С.В. Рудевич**

Рассмотрим на цилиндре $Z=\{(\varphi,y):\varphi\in[0,2\pi],\ \ y\in\mathbb{R}\}$ автономную вещественную систему

$$\frac{d\varphi}{dt}=P(\varphi,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(\varphi,y),\quad f=(P,Q),\tag{1}$$

при условии, что гладкие функции $P$, $Q \in C^1(Z)$ также являются $2\pi$-периодическими по переменной $\varphi$.

Цель настоящей работы заключается в разработке способов для определения точного числа и локализации предельных циклов, окружающих цилиндр $Z$ (циклы второго рода) [1], на котором автономная система (1) не имеет точек покоя. Основная идея состоит в последовательном двухшаговом применении признака Дюлака–Черкаса и его модификации [2, 3], с помощью которых находятся замкнутые трансверсальные кривые, разбивающие цилиндр на подобласти, окружающие его, в каждой из которых система имеет точно один предельный цикл. Полученные результаты развивают и обобщают способы, представленные в статье [4].

Разработанные нами способы решения указанной задачи основаны на построении функции Дюлака–Черкаса, под которой понимается гладкая $2\pi$-периодическая по $\varphi$ функция $\Psi : Z \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношению

$$\Phi(\varphi, y, k) \equiv (\operatorname{grad}\Psi, f) + k\Psi \operatorname{div} f > 0 (< 0),$$

где вещественное число $k \neq 0$. Учитывая, что кривые множества $W = \{(\varphi, y) \in \in Z : \Psi(\varphi, y) = 0\}$ трансвенсально пересекаются траекториями системы (1), но не могут пересекаться предельными циклами, справедлив следующий результат [2].

**Теорема 1.** *Пусть множество $W$ состоит из $s$ замкнутых кривых (овалов) $w_1$, $w_2$, $\ldots$, $w_s$, окружающих цилиндр $Z$, причем овал $w_i$ находится выше $w_{i+1}$. Если у системы (1) нет точек покоя, то она имеет по крайней мере $s-1$, но не более $s+1$ предельных циклов второго рода на цилиндре $Z$, а именно: области $S_i$, $i = 1, \ldots, s-1$, между овалами $w_i$ и $w_{i+1}$ содержат по единственному предельному циклу второго рода, каждая из областей $S_0$ (выше овала $w_1$) и $S_s$ (ниже овала $w_s$) также может содержать по одному предельному циклу второго рода. Предельный цикл в $S_i$ является простым и орбитально устойчивым (не устойчивым), если в этой области имеет место неравенство $k\Phi(\varphi, y, k)\Psi(\varphi, y) < 0$ $(> 0)$.*

Такой подход был эффективно применен для получения верхней границы числа предельных циклов второго рода нескольких классов систем (1) [2, 3]. Однако теорема 1 не позволяет без дополнительного исследования установить факт существования или отсутствия предельного цикла второго рода в каждой из областей $S_0$ и $S_s$ и, таким образом, найти точное число предельных циклов на цилиндре. Такие исследования удается провести только в отдельных случаях.

В докладе будет представлен новый способ для проверки существования предельного цикла второго рода в каждой из областей $S_0$ и $S_s$, который основан на построении в этих областях по замкнутой трансверсальной кривой, охватывающей цилиндр, за счет дополнительного применения модифицированного признака Дюлака–Черкаса или признака Дюлака.

Другими словами, на втором шаге находится дополнительная функция $\tilde{\Psi}(\varphi, y)$ такая, что множество $\tilde{W} = \{(\varphi, y) \in Z : \tilde{\Psi}(\varphi, y) = 0\}$ состоит из $s+2$ овалов $\tilde{w}_i$, окружающих цилиндр. И в этом случае функция $\tilde{\Phi} \equiv \tilde{k}\tilde{\Psi} \operatorname{div} X + d\tilde{\Psi}/dt$ при $\tilde{k} < 0$ может изменять знак. Либо на втором шаге находится дополнительная функция

$$B = |\Psi(\varphi, y)|^{1/k} |\tilde{\Psi}(\varphi, y)|^{1/\tilde{k}}, \quad k, \tilde{k} \in \mathbb{R}, \quad k\tilde{k} \neq 0, \quad \Psi, \tilde{\Psi} \in C^1(Z),$$

такая, что множество $\tilde{W}$ состоит из двух овалов $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$, между которыми расположены все овалы множества $W$. В таком случае функция

$$\widehat{\Phi} \equiv k\tilde{k}\Psi\tilde{\Psi} \operatorname{div} X + k\Psi d\tilde{\Psi}/dt + \tilde{k}\tilde{\Psi} d\Psi/dt$$

при $\tilde{k} < 0$ может изменять знак.

Но в указанных случаях требование знакоопределенности функции $\tilde{\Phi}$ или функции $\widehat{\Phi}$ заменяется условием трансверсальности множества $\tilde{V} = \{(\varphi, y) \in Z : \tilde{\Phi} = 0\}$ или множества $\widehat{V} = \{(\varphi, y) \in Z : \widehat{\Phi} = 0\}$ векторному полю $f$ системы (1). В случае знакопеременной функции $\tilde{\Phi}$ наш способ основан на следующем утверждении.

**Теорема 2.** *Пусть для системы (1) выполняются условия теоремы 1 и существует функция* $\tilde{\Psi}(x, y) \in C^1(Z)$ *при* $\tilde{k} < 0$ *такая, что множество* $\tilde{W} = \{(\varphi, y) \in \in Z : \tilde{\Psi}(\varphi, y) = 0\}$ *состоит из* $s + 2$ *овалов* $\tilde{w}_i$, *окружающих цилиндр. При этом множество* $\tilde{V} = \{(\varphi, y) \in Z : \tilde{\Phi} \equiv \tilde{k}\tilde{\Psi} \operatorname{div} f + d\tilde{\Psi}/dt = 0\}$ *не пересекается с овалами* $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}_{s+1}$, $\tilde{w}_{s+2}$ *множества* $\tilde{W}$ *и не имеет овалов, окружающих цилиндр, расположенных между овалами* $\tilde{w}_1$ *и* $\tilde{w}_2$ *или овалами* $\tilde{w}_{s+1}$ *и* $\tilde{w}_{s+2}$. *Тогда система (1) на цилиндре* $Z$ *имеет точно* $s + 1$ *предельных циклов.*

В случае знакопеременной функции $\widehat{\Phi}$ наш способ описывается следующим образом.

**Теорема 3.** *Пусть для системы (1) выполняются условия теоремы 2 и при* $\tilde{k} < 0$ *существует функция* $B = |\Psi(\varphi, y)|^{1/k} |\tilde{\Psi}(\varphi, y)|^{1/\tilde{k}}$ *выше указанного вида такая, что множество* $\tilde{W}$ *состоит из двух овалов* $\tilde{w}_1$ *и* $\tilde{w}_2$, *между которыми расположены все овалы множества* $W$. *Если при этом множество* $\widehat{V}$ *не пересекается с множеством* $\tilde{W}$ *и не имеет овалов, окружающих цилиндр, расположенных между овалами* $\tilde{w}_1$ *и* $w_1$ *или овалами* $w_s$ *и* $\tilde{w}_2$, *то система (1) на цилиндре* $Z$ *имеет точно* $s + 1$ *предельных циклов.*

Предложенные способы успешно апробированы на системах (1) вида

$$P(\varphi, y) = p_0(\varphi) + p_1(\varphi)y + p_2(\varphi)y^2,$$

$$Q(\varphi, y) = q_0(\varphi) + q_1(\varphi)y + q_2(\varphi)y^2 + q_3(\varphi)y^3,$$

где $p_i(\varphi)$-гладкие $2\pi$-периодические функции, а $q_i(\varphi)$-непрерывные $2\pi$-периодические функции.

**Литература**

1. Барбашин Е. А., Табуева В. А. *Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством.* М.: Наука, 1969.
2. Cherkas L. A., Grin A. A., Schneider K. R. *A new approach to study limit cycles on a cylinder, Dynamics of continuous, dicrete and impulsive systems* // Mathematical Analysis. Ser. A. 2011. V. 18. P. 839–851.
3. Черкас Л. А., Гринь А. А., Булгаков В. И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход).* Гродно: ГрГУ, 2013.
4. Гринь А. А. Рудевич С. В. *Признак Дюлака–Черкаса для установления точного числа предельных циклов автономных систем на цилиндре* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 1–9.

## РАЗЛИЧЕНИЕ ЦЕНТРА, ФОКУСА И СЕДЛО–ФОКУСА ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

**А.А. Денисковец, В.Ю. Тыщенко**

Для двумерной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вопрос различения центра и фокуса изучается достаточно длительное время (см., например, монографию [1]). Отметим также, что в многомерном случае аналогичные проблемы почти не рассматривались. Далее мы будем рассматривать вопрос о различении топологического типа изолированного состояния равновесия $O(0,0,0)$ трехмерной однородной системы Дарбу

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z + xF(x,y,z),$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z + yF(x,y,z),$$

$$\frac{dz}{dt} = a_3x + b_3y + c_3z + zF(x,y,z), \qquad (1)$$

где $F(x,y,z)$ есть гладкая однородная функция степени однородности $m \geqslant 1$, имеющей один вещественный и пару чисто мнимых характеристических корни. В этом случае возникает проблема о различении центра, фокуса и седло–фокуса [2, с. 202–203].

Непосредственными вычислениями убеждаемся [3], что в этом случае с помощью линейного однородного невырожденного преобразования (не меняющего топологический тип состояния равновесия $O(0,0,0)$) систему Дарбу (1) приводим к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\beta y + xS(x,y,z), \quad \frac{dy}{dt} = \beta x + yS(x,y,z), \quad \frac{dz}{dt} = \lambda z + zS(x,y,z), \qquad (2)$$

где $\beta\lambda \neq 0$, $S(x,y,z)$ есть гладкая однородная функция степени однородности $m \geqslant 1$. Далее, не умаляя общности, будем полагать $\lambda < 0$ (ибо в противном случае этого всегда можно добиться заменой независимой переменной $t \mapsto -t$).

**Теорема 1.** *Если $\lambda < 0$, то состояние равновесия системы Дарбу (2) является:*

*1) фокусом при $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\, d\tau < 0$;*

*2) центром при $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\, d\tau = 0$;*

*3) седло–фокусом при $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\, d\tau > 0$.*

**Теорема 2.** *Для того чтобы при $\lambda \neq 0$ состояние равновесия $O(0,0,0)$ системы Дарбу (2) было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda < 0$ и $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\, d\tau \leqslant 0$.*

**Теорема 3.** *Для того чтобы при $\lambda \neq 0$ состояние равновесия $O(0,0,0)$ системы Дарбу (2) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda < 0$ и $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\, d\tau < 0$.*

Пусть теперь функция $F(x,y,z)$ (а значит, и функция $S(x,y,z)$) является однородным полиномом степени $m$.

**Теорема 4.** *Состояние равновесия $O(0,0,0)$ с парой чисто мнимых и одним ненулевым характеристическим корнями полиномиальной системы Дарбу (1) при нечетном $m$ является центром, устойчивым при отрицательном вещественном характеристическом корне, и неустойчивым при положительном вещественном характеристическом корне.*

**Теорема 5.** *Если трехмерное вещественное автономное проективное матричное уравнение Риккати имеет состояние равновесия с парой чисто мнимых и одним ненулевым характеристическими корнями, то данное состояние равновесия является центром, устойчивым при отрицательном вещественном характеристическом корне, и неустойчивым при положительном вещественном характеристическом корне.*

**Литература**

1. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Мн.: БГУ, 1982.

2. Пуанкаре А. *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.* М.; Л.: ГИТТЛ, 1947.

3. Блашкевич В. В., Денисковец А. А., Тыщенко В. Ю. *К вопросу о различении центра, фокуса и седло–фокуса для системы Дарбу* // Изв. Гомельского гос. ун-та. 2014. № 3. С. 10–14.

## О ЕДИНСТВЕННОСТИ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИРРАЦИОНАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**В.С. Денисов**

В [1] были найдены достаточные условия существования по крайней мере одного неустойчивого предельного цикла или по крайней мере двух предельных циклов системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Dy^{(6m+4n-1)/(2n+1)} + Ay^{(4m+2n-1)/(2n+1)} + By^{(2m-1)/(2n+1)} + f(x), \quad \dot{y} = g(x), \tag{1}$$

где постоянные $D > 0$, $A > 0$, $B > 0$, а для всех $m, n \in \mathbb{N}$ нечетные непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на всей числовой оси и удовлетворяют условиям:

I) $\exists x_1, x_3$ такие, что $f(x) < 0$ на $(0; x_1)$, $f(x) > 0$ на $(x_1; x_3)$; $g(x) < 0$ на $(0; \infty)$; $f(0) = f(x_1) = g(0) = 0$;

II) $G(x) = \int_0^x -g(s)\,ds \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Если $D = 0$, $m = 2$, $n = 1$, то имеем систему с кубической нелинейностью по переменной $y$, для которой в работе [2] были найдены достаточные условия единственности устойчивого предельного цикла, охватывающего неустойчивый предельный цикл. В настоящем докладе представлен аналогичный результат, полученный для системы (1).

Уравнение

$$Dy^{(6m+4n-1)/(2n+1)} + Ay^{(4m+2n-1)/(2n+1)} + By^{(2m-1)/(2n+1)} - \gamma M = 0,$$

где $M = \max\limits_{[0,x_3]} |f(x)|$, имеет единственный действительный корень, который обозначим через $d$. Обозначим также

$$P(y) = \frac{D(2n+1)}{6m+6n} y^{(6m+6n)/(2n+1)} + \frac{A(2n+1)}{4m+4n} y^{(4m+4n)/(2n+1)} + \frac{B(2n+1)}{2m+2n} y^{(2m+2n)/(2n+1)},$$

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x -g(s)f(s)\,ds, \quad V(x,y) = P(y) + G(x).$$

**Теорема.** *Если выполнены условия I) и II), а также следующие условия:*
*III)* $\exists \gamma > 1$, $\exists x_2 \in (x_1, x_3)$ *такие, что верны неравенства*

$$\varphi(x_2) \geqslant \frac{2\varphi(x_1)}{1-\gamma} \quad \text{и} \quad G(x_3) - G(x_2) \geqslant P(d) + 2Md, \tag{2}$$

*IV)* $\lim\limits_{x\to+\infty} (-f(x)) > 0$, $f'(x) < 0$ *при* $x \geqslant x_3$, *то система (1) имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, лежащий в полосе* $-x_3 \leqslant x \leqslant x_3$, *и единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий неустойчивый.*

Действительно, при $\gamma > 1$ первое из неравенств (2) влечет за собой выполнение соответствующего неравенства из условий теоремы 3 работы [1], что при наличии остальных сформулированных выше условий обеспечивает существование по крайней мере двух предельных циклов. Доказательство единственности устойчивого предельного цикла проводится методом сближения интегральных кривых аналогично доказательству единственности устойчивого предельного цикла системы с кубической нелинейностью по переменной $y$, изложенному в статье [2].

**Литература**

1. Денисов В. С. *Существование предельных циклов некоторой динамической системы с иррациональной нечетной нелинейностью по одной переменной* // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2018»: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 16–18 мая 2018 г. Ч. 1. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2018. С. 72.

2. Денисов В. С. *О единственности устойчивого предельного цикла динамических систем с нелинейностями третьей и пятой степени* // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тр. Третьей Междунар. науч. конф., 17–22 сент. 2012 г., Брест / НАН Беларуси [и др.]. Мн.: Изд. центр БГУ, 2012. С. 108–117.

## ЦЕНТР ОДНОЙ ШЕСТИПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КОЛМОГОРОВА

**Л.В. Детченя, Т.В. Маковецкая, Ю.Л. Ратушева, А.П. Садовский**

Рассматривается кубическая система Колмогорова

$$\dot{x} = x\left(1 + ax + \frac{1}{4}(a^2 - p^2)x^2 + by + dxy + (-4(ab-2d)^2m + 4b^2mp^2)\frac{y^2}{\alpha}\right),$$

$$\dot{y} = y(-1 + kx + mx^2 + (2a(ab-2d)(a^2+2ak-4m) + 4(2dk + a(d-bk) - 2bm)p^2 - 2bp^4)y)/\alpha +$$
$$+(-16dm^2 + 4(-2bkm + d(k^2+2m))(a^2-p^2) - (d-2bk)(a^2-p^2)^2 +$$
$$+ab(-a^2+4m+p^2)^2)xy/\alpha - (a^2-p^2)((ab-2d)^2 - b^2p^2)y^2/\alpha, \qquad (1)$$

где $\alpha = (a^2 + 2ak - 4m)^2 - 2(a^2 + 2ak + 2k^2 - 4m)p^2 + p^4$. Правая часть системы (1) зависит от шести параметров.

**Теорема.** *Особая точка* $O(0,0)$ *системы (1) является центром.*

Доказательство основано на том, что система (1) имеет в окрестности особой точки $O(0,0)$ интеграл следующего вида:

$$xy(-4m+(a-p)(a+2k+p))(2+(a-p)x)-2(a-p)(ab-2d-bp)y)^{(-4m+(a-p)(a+2k-p))/(2(a-p)p)}\times$$
$$\times((-4m+(a+2k-p)(a+p))(2+(a+p)x)-2(a+p)(-2d+b(a+p))y)^{(4m-(a+p)(a+2k+p))/(2p(a+p))}.$$

# К РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

**А.И. Кашпар**

Изучается краевая задача типа [1, 2]

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}B(t) + \left(\lambda \mathbf{A}_1(t) + \lambda^2\mathbf{P}_1(t)\right)\mathbf{X} + \mathbf{X}\left(\lambda \mathbf{B}_1(t) + \lambda^2\mathbf{Q}_1(t)\right) +$$

$$+ \left(\lambda \mathbf{A}_2(t) + \lambda^2\mathbf{P}_2(t)\right)\dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}\left(\lambda \mathbf{B}_2(t) + \lambda^2\mathbf{Q}_2(t)\right) + \mathbf{F}(t), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega,\lambda) = \mathbf{N}, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{2}$$

где $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$, $\mathbf{P}_i(t)$, $\mathbf{Q}_i(t)$ $(i = 1, 2)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы; $\omega > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

На основе применения метода [3, гл. 1] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и алгоритм построения решения.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\right\|, \quad \alpha_i = \max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{A}_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{B}_i(t)\|, \quad \delta_i = \max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{P}_i(t)\|,$$

$$\mu_i = \max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{Q}_i(t)\|, \quad \lambda_U = \max_{0\leqslant \tau\leqslant t\leqslant\omega}\left\|\mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\right\|, \quad \lambda_V = \max_{0\leqslant \tau\leqslant t\leqslant\omega}\left\|\mathbf{V}^{-1}(\tau)\mathbf{V}(t)\right\|,$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad \mathbf{K_U}(\tau,s) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s), \quad \mathbf{K_V}(s,\tau) = \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau),$$

$$a = \frac{1}{3}\varepsilon\gamma\omega^3\lambda_U^2\lambda_V^2\left(\alpha_1 + \beta_1 + \varepsilon(\delta_1+\mu_1)\right), \quad b = \frac{1}{2}\varepsilon\gamma\omega^2\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2+\varepsilon(\delta_2+\mu_2)),$$

$\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}$, $\mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n$, $\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{V}(0) = \mathbf{E}_m$, $\mathbf{E}_k = \operatorname{diag}(1,1,\ldots,1)$, $\mathbf{\Phi}$ – линейный оператор, $\mathbf{\Phi Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)\,d\tau$, $t\neq\tau$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

По методике [3] задача (1), (2) сведена к эквивалентной интегральной задаче

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \int\limits_0^t \mathbf{Y}(\tau,\lambda)\,d\tau, \quad \mathbf{Y}(t,\lambda) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t) +$$

$$+ \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int\limits_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)\,ds\right)\mathbf{V}(\tau)\,d\tau\right)\mathbf{V}(t), \tag{3}$$

где

$$\mathbf{H}(t,\lambda) = (\lambda\mathbf{A}_1(t) + \lambda^2\mathbf{P}_1(t))\mathbf{X} + \mathbf{X}(\lambda\mathbf{B}_1(t) + \lambda^2\mathbf{Q}_1(t)) +$$
$$+ (\lambda\mathbf{A}_2(t) + \lambda^2\mathbf{P}_2(t))\mathbf{Y} + \mathbf{Y}(\lambda\mathbf{B}_2(t) + \lambda^2\mathbf{Q}_2(t)) + \mathbf{F}(t).$$

На основе исследования разрешимости задачи (4) с помощью модификации обобщенного принципа сжимающих отображений получена

**Теорема.** *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим, тогда при*

$$|\lambda| < \varepsilon_0 \tag{4}$$

*решение задачи (1), (2) существует и единственно.*

Здесь $\varepsilon_0$ – положительный корень уравнения $a+b-1=0$ относительно $\varepsilon$.

Решение задачи получено в виде

$$\mathbf{X}(t,\lambda)=\mathbf{X}_0(t)+\lambda\mathbf{X}_1(t)+\ldots+\lambda^k\mathbf{X}_k(t)+\ldots, \tag{5}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)=\mathbf{Y}_0(t)+\lambda\mathbf{Y}_1(t)+\ldots+\lambda^k\mathbf{Y}_k(t)+\ldots, \tag{6}$$

$$\mathbf{X}_0(t)=\mathbf{M}+\int\limits_0^t\mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\mathbf{V}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\Bigg(\int\limits_0^\omega\Bigg(\int\limits_\tau^\varphi\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_0(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)\,ds\Bigg)\,d\tau\Bigg)\mathbf{V}(\varphi)\,d\varphi,$$

$$\mathbf{Y}_0(t)=\mathbf{U}(t)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(t)+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\Bigg(\int\limits_0^\omega\Bigg(\int\limits_\tau^t\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_0(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)\,ds\Bigg)\,d\tau\Bigg)\mathbf{V}(t),$$

$$\mathbf{X}_{m+1}(t)=\int\limits_0^t\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\Bigg(\int\limits_0^\omega\Bigg(\int\limits_\tau^\varphi\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)\,ds\Bigg)\,d\tau\Bigg)\mathbf{V}(\varphi)\,d\varphi,$$

$$\mathbf{Y}_{m+1}(t)=\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\Bigg(\int\limits_0^\omega\Bigg(\int\limits_\tau^t\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)\,ds\Bigg)\,d\tau\Bigg)\mathbf{V}(t),\quad m=0,1,2,\ldots$$

Установлено, что условие (4) представляет собой условие равномерной сходимости по $t\in[0,\omega]$ рядов (5), (6).

Погрешность приближенных решений

$$\tilde{\mathbf{X}}_m(t,\lambda)=\mathbf{X}_0(t)+\lambda\mathbf{X}_1(t)+\ldots+\lambda^m\mathbf{X}_m(t),$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_m(t,\lambda)=\mathbf{Y}_0(t)+\lambda\mathbf{Y}_1(t)+\ldots+\lambda^m\mathbf{Y}_m(t)$$

задачи (1), (2) дается соотношением

$$\mathbf{R}_m\leqslant\varepsilon^{m+1}(\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}^{m+1}\mathbf{Z}_0,$$

где $\mathbf{R}_m=\mathrm{colon}\,(\|\mathbf{X}-\tilde{\mathbf{X}}_m\|,\|\mathbf{Y}-\tilde{\mathbf{Y}}_m\|)$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{Z}_0$ – величины типа [1, 2], эффективно определяемые по исходным данным задачи.

### Литература


1. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *Исследование разрешимости краевой задачи Валле–Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Весн. Магілёўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2016. № 2. С. 17–29.

2. Кашпар А. И. *О построении решения краевой задачи Валле–Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Весн. Магілёўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2018. № 2. С. 45–54.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

# ВЫДЕЛЕНИЕ КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ БРЮССЕЛЯТОРА С ЕДИНСТВЕННЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ

**А.В. Кузьмич, А.А. Гринь**

Рассмотрим вещественную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = y \equiv P,$$

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 - y^3 - (1-y)^2 x + h(x)y + g(x) \equiv Q, \quad X = (P, Q), \tag{1}$$

с непрерывными на $\mathbb{R}$ функциями $h(x)$ и $g(x)$. При $h(x) \equiv 0$ и $g(x) \equiv 0$ система (1) представляет собой классическую систему брюсселятора, для которой доказано, что она имеет единственный предельный цикл [1].

Цель нашей работы заключается в выделении класса систем вида (1) с единственным предельным циклом.

Основным инструментом исследований является признак Дюлака–Черкаса [2], который основан на нахождении непрерывно дифференцируемой функции Дюлака–Черкаса $\Psi(x,y)$ в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ и действительного числа $k \neq 0$ таких, что выполняется условие

$$\Phi = k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 \ \ (< 0) \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{2}$$

Тогда оценка числа предельных циклов системы (1) в области $\Omega$ с одной точкой покоя проводится в соответствии со следующей теоремой [3].

**Теорема 1.** *Пусть структурно устойчивая система (1) в односвязной области $\Omega$ имеет единственную точку покоя – антиседло $O$, и функцию $\Psi$, удовлетворяющую условию (2). Тогда если кривая $W = \{(x,y) \in \Omega : \Psi(x,y) = 0\}$ состоит из $s$ вложенных друг в друга овалов $\omega_i$, окружающих точку $O$, то при $k < 0$ в каждой из $s-1$ двусвязных подобластей $\Omega_i$, ограниченных соседними овалами $\omega_i$ и $\omega_{i+1}$ кривой $W$, система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом она может иметь в области $\Omega$ не более $s$ предельных циклов.*

Для нахождения точного числа предельных циклов применима следующая теорема из работы [4].

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия теоремы 1 и дополнительно для системы (1) существует функция вида*

$$B = |\Psi(x,y)|^{1/k} |\tilde{\Psi}(x,y)|^{1/\tilde{k}}, \quad k, \tilde{k} \in \mathbb{R}, \quad k\tilde{k} \neq 0, \quad \Psi, \tilde{\Psi} \in C^1(\Omega), \tag{3}$$

*такая, что при $\tilde{k} < 0$ кривая $\tilde{W} = \{(x,y) \in \Omega : \tilde{\Psi}(x,y) = 0\}$ задает замкнутую трансверсальную кривую, окружающую внешний овал кривой $W$. Причем кривая $\tilde{W}$ не пересекается ни с кривой $W$, ни с кривой $V = \{(x,y) \in \Omega : \tilde{\Phi}(x,y) = 0\}$, где*

$$\tilde{\Phi}(x,y) = k\tilde{k}\Psi\tilde{\Psi} \operatorname{div} X + k\Psi \frac{d\tilde{\Psi}}{dt} + \tilde{k}\tilde{\Psi} \frac{d\Psi}{dt}.$$

*Тогда система (1) имеет точно $s$ предельных циклов в области $\Omega$.*

При построении функции Дюлака–Черкаса для систем, линейно зависящих от параметра, справедлива следующая теорема [3].

**Теорема 3.** *Пусть для параметрического семейства систем*

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, a), \tag{4}$$

*линейно зависящего от параметра* $a \in I \subset \mathbb{R}$, *область* $\Omega$ *представляет выпуклый компакт и выполняются условия:*

*1) множество* $I$ *является отрезком в пространстве* $\mathbb{R}$ *и не содержит бифуркационных значений параметра* $a$;

*2) существуют функции* $C_j(a)$, $j = 1, \ldots, n$, *а также* $\Psi = \sum_{j=1}^{n} C_j(a)\Psi_j(x, y)$ *такие, что функция* $\Phi(x, y, a) = \sum_{j=1}^{n} C_j(a)\Phi_j(x, y, a)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Phi(x, y, a_i) > 0 \quad \text{и} \quad (x, y) \in \Omega$$

*на концах отрезка* $I$. *Тогда* $\Psi(x, y, a)$ *является функцией Дюлака семейства систем (4) в области* $\Omega$ *при всех значениях* $a \in I$.

С помощью построения функции Дюлака–Черкаса в виде

$$\Psi(x, y) = ax^2 + ay^2 - c, \quad a, c > 0. \tag{5}$$

при $k = -1$ для системы (1) получен следующий результат.

**Теорема 4.** *Функция (5) представляет собой функцию Дюлака–Черкаса при всех действительных значениях* $x, y$ *и* $c > 0$, $a \in [1, 9]$ *для системы*

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 - y^3 - (1 - y)^2 x + (-1 - 2x - ax^2 + c)y - \frac{(1 + x)(ax^2 - c)}{a}, \tag{6}$$

*которая соответственно имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Если предельный цикл существует, то он является устойчивым.*

Доказательство существования предельного цикла проводилось с помощью теоремы 2 и теоремы 3. Дополнительную замкнутую трансверсальную кривую искали в виде многочлена степени $l = 6$ с помощью построения функции вида (4) и решения соответствующей задачи линейного программирования

$$L \to \max, \quad \sum_{j=1}^{m} C_j \tilde{\Phi}_j(x_p, y_p, a_1) - L \geqslant 0,$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_j \tilde{\Phi}_j(x_p, y_p, a_2) - L \geqslant 0, \quad |C_j| \leqslant 1, \tag{7}$$

где $m = (l + 1)(l + 2)/2$, на сетке узлов $(x_p, y_p)$, $p = 1, \ldots, N_0$, взятой в области $\Omega$, $N_0 = n_x n_y$, где $n_x$, $n_y$ – число узлов сетки вдоль осей $Ox$ и $Oy$.

Для системы (6) при $a = 3$, $k = -1$, $\tilde{k} = -0.4$ и с шагом $h = 0.5$ для параметра $c \in [1, 15]$ в области $\Omega = \{(x, y) : x \in [-3.2, 3.2], \ y \in [-3, 3]\}$ с количеством узлов сетки $n_x = n_y = 35$ найдены решения задач линейного программирования (7). При этом кривая $\tilde{W}$ задает дополнительную трансверсальную кривую в области $\Omega$, окружающую единственную точку покоя системы (6) и окружность $W$. Таким образом, доказан следующий результат.

**Теорема 5.** *Система (6) при* $a = 3$ *и* $c \in [1, 15]$ *имеет единственный предельный цикл во всей фазовой плоскости, окружающий единственную точку покоя.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф17М-148).

**Литература**

1. Лаврова А. И., Постников Е. Б., Романовский Ю. М. *Брюсселятор – абстрактная химическая реакция?* // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. № 12. С. 1327–1332.
2. Черкас Л. А. *Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 689–699.
3. Черкас Л. А., Гринь А. А., Булгаков В. И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных ситем второго порядка (численно–алгебраический подход).* Гродно: ГрГУ, 2013.
4. Гринь А. А., Кузьмич А. В. *Признак Дюлака–Черкаса для точной оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 174–182.

## К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

**В.Н. Лаптинский**

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с условием

$$x(0) = x(\omega), \tag{2}$$

где $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{C}^{(0,1)}_{tx}(D_{\tilde\rho})$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,x) : t \in I, \ \|x\| < \tilde\rho\}$, $I = [0,\omega]$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$.

Обозначим

$$D_\rho = \{(t,x) : t \in I, \ \|x\| \leqslant \rho\}, \quad \Phi(t,x) = \partial f(t,x)/\partial x, \quad 0 < \rho < \tilde\rho.$$

Установлено, что при выполнении условия

$$\det \int\limits_0^\omega \Phi(\tau,x)\,d\tau \neq 0 \quad (\|x\| \leqslant \rho),$$

где интегрирование выполняется по явно входящему времени, задача (1), (2) эквивалентна векторному интегральному уравнению типа [1, с. 149]

$$\int\limits_0^\omega f(\tau,x(t))\,d\tau = \int\limits_0^\omega d\tau \int\limits_\tau^t \Phi(\tau,x(\sigma)) f(\sigma,x(\sigma))\,d\sigma. \tag{4}$$

Условия однозначной разрешимости уравнения (4) совпадают с соответствующими условиями теоремы 3.2.2 [1, с. 150].

Алгоритм построения решения уравнения (4) дается рекуррентным соотношением

$$\int\limits_0^\omega f(\tau,x_k(t))\,d\tau = \int\limits_0^\omega d\tau \int\limits_\tau^t \Phi(\tau,x_k(\sigma)) f(\sigma,x_{k-1}(\sigma))\,d\sigma, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{4}$$

в котором начальное приближение разыскивается в виде постоянной из уравнения

$$\int_0^\omega f(\tau, c)\,d\tau = 0.$$

Этот алгоритм дает все приближенные решения, подчиненные условию (2).

Сходимость, скорость сходимости алгоритма (4) исследуется по методике, используемой в [1]. Установлена связь предлагаемого подхода с методом, основанным на использовании интегро-функциональных тождеств [1, с. 47]. В линейном и квазилинейном случаях этот подход реализован в [1, гл. 2, 3].

**Литература**

1. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

## ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ И ПОСТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

**В.А. Ливинская**

Исследуется задача об $\omega$-периодических решениях уравнения типа [1–4]

$$\ddot{X} = (\lambda A(t) + \lambda^2 B(t))X + X(\lambda^2 P(t) + \lambda^3 Q(t)) + \lambda F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $F(t)$ – непрерывные $\omega$-периодические матрицы соответствующих размерностей, $\lambda \in \mathbb{R}$.

На основе применения метода [5, гл. 2] получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности решения задачи, а также алгоритм его построения.

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\mu = \max_t \|P(t)\|, \quad r = \max_t \|Q(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|, \quad q_1 = \frac{1}{4}\gamma\alpha^2\omega^3 + \gamma\omega(\beta+\mu),$$

$$q_2 = \frac{1}{4}\gamma\alpha\omega^3(\beta+\mu) + \gamma\omega r, \quad q_3 = \frac{1}{4}\gamma\alpha\omega^3 r, \quad q(\varepsilon) = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \varepsilon^3 q_3,$$

$$K(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon\omega[\alpha + \varepsilon(\beta+\mu) + \varepsilon^2 r], \quad H(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}\gamma\alpha\omega^3 h + \gamma\omega h,$$

где $t \in [0, \omega]$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

**Теорема.** *Пусть выполнены условия* $\det \tilde{A}(\omega) \neq 0$, $q(\varepsilon) < 1$. *Тогда $\omega$-периодическое решение уравнения* (1) *существует и единственно. Решение* $X(t,\lambda)$ *представимо в виде*

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X_k(t),$$

*где матрицы $X_k(t)$ определены рекуррентным интегральным соотношением типа [1, 2].*

Исследованы сходимость, скорость сходимости соответствующего алгоритма, при этом получены оценки

$$\|X(t,\lambda)\| \leqslant \frac{H(\varepsilon)}{1-q(\varepsilon)}, \quad \|\dot{X}(t,\lambda)\| \leqslant \frac{K(\varepsilon)H(\varepsilon)}{1-q(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon\omega h}{2}.$$

**Литература**

1. Лаптинский В. Н., Ливинская В. А. *Об аналитической структуре периодических решений матричного дифференциального уравнения типа Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 9. С. 1290–1291.

2. Лаптинский В. Н., Ливинская В. А. *К теории периодических решений матричного дифференциального уравнения второго порядка типа Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1133–1134.

3. Ливинская В. А. *К построению периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром* // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014): тез. докл. Междунар. науч. конф. 2014. Ч. 1. С. 66–67.

4. Ливинская В. А. *О структуре и построении периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром* // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сентября 2016 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2016. Ч. 2. С. 35–36.

5. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

# К КОНСТРУКТИВНОМУ АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА–РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

**О.А. Маковецкая**

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + \lambda F(t,X), \quad X(t,\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \tag{2}$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t,X) : t \in I, \ \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно $X$ условию Липшица (локально): $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leqslant \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

При $Q = 0$, $\lambda = 1$ эта задача качественными методами исследовалась в [1], конструктивными методами, описанными в монографии [2], – в работе [3] и др., с периодическими краевыми условиями – в работе [4] и др.

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : 0 \leqslant t \leqslant \omega, \ \ \|X\| \leqslant \rho\}, \quad M = \int_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad N = -\int_0^\omega B(\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad \delta = \max_t \|Q(t)\|,$$

$$h = \max_t \|F(t,0)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad q(\rho,\varepsilon) = q_1(\rho) + q_2(\rho)\varepsilon, \quad \varphi(\rho,\varepsilon) = \varphi_1(\rho) + \varphi_2(\rho)\varepsilon,$$

$$q_1(\rho) = \gamma\delta\omega[(\alpha+\beta)\omega + 2]\rho + \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2, \quad q_2(\rho) = \gamma\omega L[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega],$$

$$\varphi_1(\rho) = \gamma\delta\omega[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega]\rho^2 + \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2\rho, \quad \varphi_2(\rho) = [1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega](L+h)\gamma\omega,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_1(\rho)}{\varphi_2(\rho)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1 - q_1(\rho)}{q_2(\rho)}, \quad \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области $D_\rho$, $\Phi$ – линейный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [5, с.21].

**Теорема.** *Пусть выполнены следующие условия: матрицы $M, N$ не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_1(\rho) < \rho$, $q_2(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| \leqslant \varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области $D_\rho$ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \varphi(\rho,\varepsilon)$.*

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с неявной вычислительной схемой

$$X_k(t,\lambda) = \Phi^{-1}\Big\{ \int_0^\omega A(\tau)\,d\tau \Big( \int_\tau^t [A(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + X_{k-1}(\sigma,\lambda)B(\sigma) +$$

$$+ X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]\,d\sigma \Big)\,d\tau + \int_0^\omega \Big( \int_\tau^t [A(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) +$$

$$+ X_{k-1}(\sigma,\lambda)B(\sigma) + X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]\,d\sigma \Big) B(\tau)\,d\tau -$$

$$- \int_0^\omega [X_k(\tau,\lambda)Q(\tau)X_k(\tau,\lambda) + \lambda F(\tau, X_k(\tau,\lambda))]\,d\tau \Big\}, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{3}$$

где начальное приближение $X_0$ отыскивается в виде постоянной $C = C(\lambda)$ из матричного уравнения

$$C = -\Phi^{-1} \int_0^\omega [CQ(\tau)C + \lambda F(\tau, C)]\,d\tau,$$

которое на основании условий теоремы имеет единственное решения, подчиненное неравенству $\|C\| \leqslant \rho$,

**Литература**

1. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. // J. of Math. Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

3. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.

4. Лаптинский В. Н. // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.

5. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

# ЛЕВОСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

**И.И. Маковецкий**

Исследуется задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F_0(t,X) + \lambda F_1(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $A, B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F_i \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \ \|X\| < < \tilde\rho\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$, $M$, $N$ – постоянные $n\times n$-матрицы; функции $F_i(t,X)$ удовлетворяют в $D_{\tilde\rho}$ относительно $X$ условию Липшица (локально); $F_0(t,0) \not\equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Эта задача качественными методами исследовалась в [1]. Данная работа является продолжением и развитием [2; 3, гл. 1]. С помощью конструктивного метода [4, гл. 1] получены в терминах задачи (т.е. по ее исходным данным) достаточные условия однозначной разрешимости, алгоритм построения решения, а также оценка его области локализации.

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : t \in I, \ \|X\| \leqslant \rho\}, \quad \lambda_1 = \max_t \|U(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_t \|U^{-1}(t)\|, \quad \Phi = P + E,$$

$$P = U^{-1}(\omega)N^{-1}M, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad m = \max\{\|P\|, 1\}, \quad h_i = \max_t \|F_i(t,0)\|,$$

$$a_0 = \gamma\lambda_0 m\omega(\beta + L_0), \quad a_1 = \gamma\lambda_0 m\omega L_1, \quad b_0 = \gamma\lambda_0 m\omega h_0, \quad b_1 = \gamma\lambda_0 m\omega h_1,$$

$$q = a_0 + \varepsilon a_1, \quad p = b_0 + \varepsilon b_1, \quad F(t,X,\lambda) = F_0(t,X) + \lambda F_1(t,X),$$

$$L = L_0 + \varepsilon L_1, \quad h = h_0 + \varepsilon h_1, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \varepsilon_0 = \frac{\rho\,(1-a_0) - b_0}{\rho a_1 + b_1},$$

где $t \in I$, $0 < \rho < \tilde\rho$, $\lambda_0 = \lambda_1\lambda_2$, $L_i = L_i(\rho) > 0$ – постоянные Липшица для $F_i(t,X)$ в $D_\rho$.

**Лемма.** *Пусть выполнены следующие условия: 1)* $\det N \neq 0$; *2)* $\det\Phi \neq 0$; *3)* $q < < 1$; *4)* $p/(1-q) \leqslant \rho$. *Тогда в области* $D_\rho$ *решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant p/(1-q).$$

**Теорема.** *Пусть выполнены условия 1) и 2) леммы, а также неравенства* $a_0 < 1$, $b_0/(1-a_0) < \rho$. *Тогда при* $|\lambda| \leqslant \varepsilon_0$ *решение задачи (1), (2) в области* $D_\rho$ *существует и единственно. Решение* $X(t,\lambda)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедливы оценки*

$$\|X(t,\lambda)\| \leqslant \frac{p}{1-q}, \quad \|X(t,\lambda) - X(t,0)\| \leqslant \frac{\varepsilon(a_1\|X_0\|_{\mathbb{C}} + b_1)}{1-q}.$$

*Указанное рекуррентное соотношение имеет вид*

$$X_{k+1}(t,\lambda) = U(t)\Phi^{-1}\Bigg[P\int\limits_0^t U^{-1}(\tau)(X_k(\tau,\lambda)B(\tau) + F(\tau, X_k(\tau,\lambda),\lambda))\,d\tau -$$

$$-\int\limits_t^\omega U^{-1}(\tau)(X_k(\tau,\lambda)B(\tau) + F(\tau, X_k(\tau,\lambda),\lambda))\,d\tau\Bigg], \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad (3)$$

*где* $X_0(t,\lambda)$ – *произвольная матрица класса* $\mathbb{C}$, *принадлежащая шару* $\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \rho$.

*Сходимость алгоритма (4) характеризуется оценкой*

$$\|X_k - X\|_{\mathbb{C}} \leqslant q^k \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

*которая при* $X_0 \equiv 0$ *имеет вид*

$$\|X_k - X\|_{\mathbb{C}} \leqslant q^k \frac{p}{(1-q)}.$$

**Литература**


1. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. // J. of Math. Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.
2. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 7. С. 994–996.
3. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.
4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.


## О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

**О.Н. Малышева**

В настоящее время общепринятой является гипотеза, что набор распределений предельных циклов: a) 1, $(1,0)$; в) 2, $(2,0)$; c) 3, $(3,0)$; d) $(1,1)$; e) $(2,1)$; f) $(3,1)$ – является полным для квадратичной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \qquad (1)$$

в которой $P, Q$ – многочлены, $\max\{\deg P, \deg Q\} = 2$. При этом предельные циклы окружают лишь одну особую точку – фокус, а всего система (1) имеет не более двух фокусов.

Признак Дюлака–Черкаса [1] существования заданного числа предельных циклов системы Льенара является адаптивным и позволяет для систем с двумя параметрами найти области на плоскости параметров с достаточно плотным множеством точек с одинаковым числом предельных циклов.

Система (1) вида $F+A+S_\infty$ ($A$ означает, что система имеет антиседло, т.е. фокус или узел) в общем случае аффинным преобразованием фазовых переменных и растяжением шкалы времени сводится к следующей системе, в которой фокус помещен в точку $(1,-1)$, а антиседло – в точку $(x_0,-1/x_0)$:

$$\frac{dx}{dt}=1+xy, \quad \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{2}a_{ij}x^iy^j, \quad a_{02}=a, \tag{2}$$

при этом выполнены условия: 1) $0<a<1$, $a_{20}<0$, $x_0<0$; 2) $a_{00}=a_{01}-a_{20}-a_{10}-a$; 3) $a_{10}=-a_{20}(x_0+1)-a_{01}/x_0+a(x_0+1)x_0^2$; 4) $L=2a-a_{10}-a_{01}-2a_{20}>0$; 5) $(a_{11}+ +a_{01}-2a-1)^2-4L<0$; 6) $(-a_{01}x_0+a(x_0+1))^2-4a_{20}ax_0^3<0$; 7) $a_{11}^2-4a_{20}(a-1)<0$.

Условия 1), 7) гарантируют существование единственной особой точки системы в бесконечности – седла в направлении оси $y$. Условия 1)–5) означают, что система (2) имеет две конечные особые точки: фокус $(1,-1)$ и антиседло $(x_0,-1/x_0)$.

Замена $x=1/\xi$, $Y=Y(\xi\omega)-\xi$ систему (2) приводит к системе

$$\frac{d\xi}{dt}=\xi Y, \quad \frac{dY}{dt}=\omega^2P_4(\xi)-\omega P_2(\xi)Y-(a-1)Y^2, \tag{3}$$

где $P_4(\xi)=a_{20}+a_{10}\xi+(a_{01}-a_{20}-a_{10}-a)\xi^2-a_{01}\xi^3+a\xi^4$, $P_2(\xi)=a_{11}+a_{01}\xi-(2a+1)\xi^2$, с фокусами $(1,0)$, $(1/x_0,0)$.

Наконец, после замены $Y=\xi^{1-a}y$, $\xi=x>0$ система (4) в области $\xi>0$ переходит в систему Льенара в первой форме

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y, \quad x>0, \quad g(x)=\omega^2P_4(x)x^{2a-3}, \quad f(x)=\omega P_2(x)x^{a-2}, \tag{4}$$

с фокусом $(1,0)$.

Чтобы исследовать систему (3) в области $\xi<0$, $Y\in\mathbb{R}$, заменой $\xi=x/x_0$ переводим антиседло системы (3) в точку $(1,0)$. Вид системы и коэффициента не изменяются, а коэффициенты $a_{20}$, $a_{10}$, $a_{11}$, $a_{01}$ перейдут соответственно в $a_{20}x_0^4$, $a_{10}x_0^3$, $a_{11}x_0^2$, $a_{01}x_0$.

Система (4) после замены $y\to y-F(x)$, $F(x)=\int_1^x f(\nu)\,d\nu$ становится системой Льенара во второй форме

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x), \quad \frac{dy}{dt}=-g(x), \tag{5}$$

с фокусом $(1,0)$.

Система Льенара (5) заменой $u=\sqrt{2G(x)}\,\mathrm{sign}\,(x-1)$, $x>0$, $G(x)=\int_1^x g(\nu)\,d\nu$, сводится к системе

$$\frac{du}{dt}=y-\tilde{F}(u), \quad \frac{dy}{dt}=-u, \tag{6}$$

$\tilde{F}(u)=F(x(u))$, где $x(u)$ – функция, обратная функции $u(x)$, $u\in I=(u_1,u_2)$,

$$u_1=\lim_{x\to+0}u(x), \quad u_2=\lim_{x\to+\infty}u(x).$$

Нечетная часть функции $\tilde{F}(u)$, т.е. функция $\varphi(u)=\tilde{F}(u)-\tilde{F}(-u)$, $|u|<u_0$, $u_0=\inf_{u\in I}M$, определяет поведение траекторий системы (6) в следующем смысле: 1) если $\varphi(u)\equiv 0$, то $(1,0)$ – центр, 2) если $\varphi(u)\geqslant 0$ $(\leqslant 0,\ \varphi(u)\equiv 0)$, то вокруг фокуса $(1,0)$

предельных циклов нет, 3) если $\varphi(u)$ имеет нули в промежутке $(1,+\infty)$, то во многих случаях число предельных циклов системы (6) вокруг фокуса $(1,0)$ не превышает числа простых нулей функции $\varphi(u)$ в промежутке $(1,+\infty)$. В свою очередь, нули $\varphi(u)$, с учетом их кратности, определяются решениями системы

$$G(x)=G(y), \quad F(x)=F(y) \quad 0<x<1, \quad y>1. \tag{7}$$

В переменных $z=x/y$, $y$ при $0<z<1$, $y>1$ система (6) примет вид

$$AG=\sum_{k=0}^{4} A_k y^k=0, \quad AF=\sum_{k=2}^{4} B_k y^k=0,$$

где $A_0=a_{20}(v^2z^{-2}-1)/(2a-2)$, $A_1=a_{20}(vz^{-1}-1)/(2a-1)$, $A_2=(a_{01}-a_{20}-a_{10}-a)\times(v^2-1)/2a$, $A_3=-a_{01}(v^2z-1)/(2a+1)$, $A_4=a(v^2z^2-1)/(2a+2)$, $B_2=a_{11}(vz^{-1}-1)\times(a-1)$, $B_3=a_{01}(v-1)/a$, $B_4=-(2a+1)(vz-1)/(a+1)$, $v=z^a$.

Систему (7) будем называть системой прогноза Смейла. Для нахождения кратных решений системы (7) к ней необходимо добавить уравнение $f(zy)g(y)=g(zy)f(y)$.

Зафиксировав все параметры системы (2), кроме $a_{01}$, $a_{11}$, мы введем в рассмотрение двухпараметрические квадратичные системы с двумя конечными особыми точками. Для системы $F+A+S_\infty$ набор коэффициентов $(a_{01},a_{11})\in\Omega$, $\Omega:\check{a}_{01}<a_{01}<\hat{a}_{01}$, где $\check{a}_{01}$, $\hat{a}_{01}$ – соответственно наименьший и наибольший корни уравнения

$$(-a_{01}x_0+a(x_0+1))^2-4a_{20}ax_0^3=0, \quad |a_{11}|<\hat{a}_{11}, \quad \hat{a}_{11}=2\sqrt{a_{20}(a-1)}.$$

Кривые кратных решений системы (7) для обеих особых точек для системы $F+A+S_\infty$ и прямые $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_1=a_{11}+a_{01}-2a-1$, $\alpha_2=a_{11}x_0+a_{01}-(2a+1)/x_0$, разбивают $\Omega$ на области с одинаковым числом решений системы (7) для фокуса $(1,-1)$ системы (3) и соответствующей преобразованной системы для антиседла $(x_0,-1/x_0)$.

**Теорема 1.** *Система (4) вида* $2F+S_\infty$ *при* $a=10/13$, $x_0=-4$, $a_{20}=-40$, *не имеет распределений* $(2m,2n)$, $m>0$, $n>0$ *предельных циклов.*

**Теорема 2.** *Если система (4) вида* $2F+S_\infty$ *при* $a=10/13$, $x_0=-4$, $a_{20}=-40$ *при дополнительном условии* $0<a_{11}\leqslant 0.01$ *имеет распределение* $(n_1,n_2)$ *предельных циклов* $n_1>0$, $n_2>0$, *то одно из чисел* $n_1$, $n_2$ *равно единице.*

Для доказательства теорем в плоскости рассматриваемых параметров построены области с одинаковыми распределениями решений системы прогноза Смейла, подтвержденные применением метода обобщенных функций Дюлака–Черкаса.

**Литература**

1. Черкас Л. А., Гринь А. А. Булгаков В. И. *Коструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход).* Гродно: ГрГУ, 2013.

## О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДВУМЕРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

**В.В. Мироненко**

Для любой функции $f(t)$ будем полагать $f_{ev}(t):=(f(t)+f(-t))/2$.

**Теорема.** *Пусть для дифференциальной системы*

$$\dot{x}=a(t)x+b(t)y+M(x,y), \quad \dot{y}=c(t)x+d(t)y+N(x,y), \tag{1}$$

*где* $M(x,y)=a_1(t)x^2+b_1(t)xy+c_1(t)y^2$, $N(x,y)=a_2(t)x^2+b_2(t)xy+c_2(t)y^2$, $b_{ev}(t)\neq 0$, *и для матрицы*

$$\Delta(t)=\begin{pmatrix} m(t) & s(t)\\ c_{ev}(t)s(t) & (d_{ev}(t)-a_{ev}(t))s(t)+m(t)\end{pmatrix}$$

*выполняется матричное соотношение*

$$\Delta(t)\begin{pmatrix} M(x,y)\\ N(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial y}\end{pmatrix}\Delta(t)\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}.$$

*Тогда возмущения вида*

$$\alpha(t)\Delta(t)\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix},$$

*где* $\alpha(t)$ *– произвольная скалярная нечетная функция, не меняют отражающей функции [1] дифференциальной системы (1).*

В случае $2\omega$-периодичности коэффициентов дифференциальной системы (1) сформулированная теорема позволяет находить начальные данные периодических решений этой системы с периодом, кратным $2\omega$.

**Литература**

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ, 2004.

## ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА–ФОКУСА

**В.И. Мироненко**

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi}=a_1(\varphi)r+a_2(\varphi)r^2+a_3(\varphi)r^3+\ldots=:R(\varphi,r) \tag{1}$$

с голоморфной правой частью в окрестности точки $r=0$ и $2\pi$-периодическими коэффициентами $a_k(\varphi)$.

Отражающая функция этого уравнения

$$F(\varphi,r)=m_1(\varphi)r+m_2(\varphi)r^2+m_3(\varphi)r^3+\ldots \tag{2}$$

является голоморфной и может быть найдена из основного соотношения для отражающей функции [1, c. 63]

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}+\frac{\partial F}{\partial r}R(\varphi,r)+R(-\varphi,F)=0,\quad F(0,r)=r. \tag{3}$$

Подставляя ряд (2) в соотношение (4), приходим к бесконечной последовательно интегрируемой системе уравнений

$$m_1'+m_1a_1(\varphi)+a_1(-\varphi)m_1=0,\quad m_2'+m_2(2a_1(\varphi)+a_1(-\varphi))+m_1a_1(\varphi)+a_2(-\varphi)m_1^2=0,$$

$$m_3' + m_3(3a_1(\varphi) + a_1(-\varphi) + m_1 a_3(\varphi) + 2m_2 a_2(\varphi) + a_2(-\varphi)(2m_1 m_2 + m_1^3) = 0, \quad \ldots,$$
$$m_1(0) = 1, \quad m_i(0) = 0 \quad \text{при} \quad i > 1.$$

**Теорема.** *Уравнение (1) имеет центр в точке* $r = 0$ *тогда и только тогда, когда функции*

$$m_1(\varphi) = \exp\biggl(\int\limits_0^{\varphi} (a_1(\tau) + a_1(-\tau))\, d\tau\biggr), \quad m_i(\varphi), \quad i > 1,$$

*удовлетворяют условиям* $m_1(\pi) = 1$, $m_i(\pi) = 0$ *при* $i > 1$.

Эта теорема является аналогом теоремы Ляпунова [2, с. 7].

**Литература**

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ, 2004.

2. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Мн.: БГУ, 1982.

## ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНО ВОЗМУЩЕННОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Э.В. Мусафиров**

При изучении качественного поведения решений некоторой дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной (в смысле совпадения отражающих функций) [1]. Иногда это удается сделать даже в том случае, когда отражающая функция не известна (см. [2–4]). В частности, это можно сделать с помощью следующего утверждения [5, с. 74].

**Лемма 1.** *Любая автономная система*

$$\dot{x} = X(x), \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

*эквивалентна неавтономной системе*

$$\dot{x} = (1 + \alpha(t))\, X(x), \tag{2}$$

*где* $\alpha(t)$ *– произвольная скалярная непрерывная нечетная функция.*

Цель настоящей работы – выяснить связь свойств решений систем (1) и (2).

**Лемма 2** [6]. *Если* $\eta(t)$ *– решение системы (1), то* $\eta(t + \int_0^t \alpha(s)\, ds)$ *– решение системы (2), где* $\alpha(t)$ *– произвольная скалярная непрерывная функция (не обязательно нечетная).*

**Теорема.** *Пусть* $X(x)$ *удовлетворяет условию Липшица и* $X(0) = 0$, $\alpha(t)$ *– произвольная скалярная непрерывная функция такая, что*

$$\int\limits_0^t \alpha(s)\, ds \geqslant -t \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3}$$

*Если состояние равновесия* $x = 0$ *системы (1) устойчиво (по Ляпунову), то состояние равновесия* $x = 0$ *системы (2) равномерно устойчиво.*

Заметим, что условие (4) будет выполнено, если $\alpha(t) \geqslant -1 \ \forall t \geqslant 0$.

**Литература**

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ, 2004.

2. Мусафиров Э. В. *О дифференциальных системах, отражающая матрица которых представляет собой произведение матричных экспонент* // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2002. № 1. С. 44–50.

3. Мусафиров Э. В. *Допустимые возмущения модели Костицына «хищник–жертва»* // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. № 7-2. С. 248–252.

4. Мусафиров Э. В. *О двумерных линейных дифференциальных системах с отражающей матрицей, представляющей собой произведение двух матричных экспонент специального вида* // Вестн. Фонда фундаментальных исследований. 2005. № 1. С. 62–69.

5. Мусафиров Э. В. *Временные симметрии дифференциальных систем.* Саарбрюккен: Lambert Academic Publishing. 2011.

6. Мусафиров Э. В. *Достаточные условия наличия периодических решений у неавтономно возмущенных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Инновации в технологиях и образовании: сб. ст. участников XI Междунар. науч.-практ. конф., 27–28 апр. 2018 г. Белово: КузГТУ. 2018. Ч. 2. С. 313–316.

# К СУЩЕСТВОВАНИЮ И ПОСТРОЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

**С.В. Подолян**

Рассматривается задача об $\omega$-периодических решениях уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \lambda^2 A(t)X + \lambda X B(t) + \lambda F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A(t), B(t), F(t)$ – действительные непрерывные $\omega$ –периодические матрицы подходящих размеров, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Данная работа является продолжением и развитием [1 – 4]. С помощью конструктивного метода [5, гл. II] получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности $\omega$-периодического решения уравнения (1). Предложен алгоритм его построения в виде ряда по степеням параметра.

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{B}(\omega) = \int_0^\omega B(\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{B}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$h = \max_t \|F(t)\|, \quad q_1 = \frac{1}{2}\gamma\beta^2\omega^2 + \gamma\alpha\omega, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\alpha\beta\omega^2, \quad q(\varepsilon) = q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2,$$

$$H(\varepsilon) = \frac{1}{2}\gamma\omega h(\beta\omega\varepsilon + 2),$$

где $t \in [0, \omega]$.

**Теорема.** *Пусть* $\det \tilde{B}(\omega) \neq 0$. *Тогда при*

$$|\lambda| < \frac{2}{q_1 + \sqrt{q_1^2 + 4q_2}}$$

*уравнение* (1) *имеет единственное* $\omega$ *–периодическое решение* $X = X(t, \lambda)$; *это решение представимо в виде ряда*

$$X(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X_k(t),$$

*сходящегося равномерно по* $t \in \mathbb{R}$.

Для построения матриц $X_k(t)$ получено рекуррентное интегральное соотношение типа [5, гл. II]. Область локализации решения $X(t, \lambda)$ имеет вид

$$\|X(t, \lambda)\| \leqslant H(\varepsilon)/(1 - q(\varepsilon)).$$

Данная задача исследована также с точки зрения теории возмущений.

**Литература**

1. Подолян С. В. *О построении периодических решений матричного уравнения Ляпунова с параметром* // XVI Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2014) : тез. докл. междунар. науч. конф., 20–22 мая 2014 г., Новополоцк. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2014. С. 71–72.

2. Подолян С. В. *К построению периодических решений матричного уравнения Ляпунова с параметром* // Международная математическая конференция: «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» : тез. докл. междунар. науч. конф. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2015.

3. Лаптинский В. Н., Лапковский В. К., Подолян С. В. *Конструктивный анализ периодических решений матричного дифференциального уравнения типа Ляпунова.* Могилев: МГУП, 2004 (Препринт / ИПО НАН Беларуси; №17).

4.Лаптинский В. Н., Лапковский В. К., Подолян С. В. *О периодических решениях линейного матричного уравнения Ляпунова с параметром* // Весн. Магілеўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. Сер. В. 2012. № 2 (40). С. 4–11.

5. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

## К АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

**Д.В. Роголев**

Исследуется задача типа [1]:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B}_1(t) + \mathbf{X}\left(\mathbf{S}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{S}_2(t)\mathbf{Y}\right) + \mathbf{F}_1(t) + \lambda\mathbf{F}_2(t), \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}_2(t) + \mathbf{Y}\left(\mathbf{P}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{P}_2(t)\mathbf{Y}\right) + \mathbf{G}_1(t) + \lambda\mathbf{G}_2(t), \tag{2}$$

$$\mathbf{X}(0, \lambda) = \mathbf{X}(\omega, \lambda), \quad \mathbf{Y}(0, \lambda) = \mathbf{Y}(\omega, \lambda), \tag{4}$$

где $t \in [0, \omega]$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$, $\mathbf{S}_i(t)$, $\mathbf{P}_i(t)$, $\mathbf{F}_i(t)$, $\mathbf{G}_i(t)$ $(i = 1, 2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0, \omega]$, $\omega > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Матричные дифференциальные уравнения представляют собой важный класс многомерных систем специального вида, включая уравнения Ляпунова, Риккати, имеющие большое значение для теории и приложений дифференциальных уравнений (см., например, [2] и др.).

В работе, являющейся продолжением [1], с помощью метода [3, гл. 3] получены коэффициентные (т.е. в терминах задачи (1)–(3)) достаточные условия ее однозначной разрешимости, а также итерационный алгоритм построения решения.

Примем следующие обозначения:

$$D=\{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}):0\leqslant t\leqslant\omega,\quad \|\mathbf{X}\|\leqslant\rho_1,\quad \|\mathbf{Y}\|\leqslant\rho_2\}\,,\quad \tilde{\mathbf{B}}_i(\omega)=\int\limits_0^\omega \mathbf{B}_i(\tau)\,d\tau,$$

$$\tilde{\gamma}_i=\left\|\tilde{\mathbf{B}}_i^{-1}(\omega)\right\|,\quad \alpha_i=\max_t\|\mathbf{A}_i(t)\|\,,\quad \beta_i=\max_t\|\mathbf{B}_i(t)\|\,,\quad \delta_i=\max_t\|\mathbf{S}_i(t)\|\,,$$

$$\mu_i=\max_t\|\mathbf{P}_i(t)\|\,,\quad h_i=\max_t\|\mathbf{F}_i(t)\|\,,\quad g_i=\max_t\|\mathbf{G}_i(t)\|\,,\quad \|\mathbf{T}\|_C=\max_t\|\mathbf{T}(t)\|\,,$$

$$\varepsilon=|\lambda|\,,\quad \varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\},$$

$$p_{11}=\tilde{\gamma}_1\beta_1(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega^2/2+(\alpha_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega],$$

$$p_{12}=\tilde{\gamma}_1\delta_2\rho_1\omega\,(\beta_1\omega/2+1)\,,\quad p_{21}=\tilde{\gamma}_2\mu_1\rho_2\omega\,(\beta_2\omega/2+1)\,,$$

$$p_{22}=\tilde{\gamma}_2[\beta_2(\alpha_2+\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\omega^2/2+(\alpha_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\omega],$$

$$\varepsilon_1=\frac{\rho_1-\tilde{\gamma}_1\{\beta_1[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1]\omega^2/2+[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1]\omega\}}{\tilde{\gamma}_1(\beta_1\omega/2+1)h_2\omega},$$

$$\varepsilon_2=\frac{\rho_2-\tilde{\gamma}_2\{\beta_2[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+g_1]\omega^2/2+[\alpha_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+g_1]\omega\}}{\tilde{\gamma}_2(\beta_2\omega/2+1)g_2\omega},$$

где $t\in[0,\omega]$, $0<\rho_1,\rho_2<\infty$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

**Теорема.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1)* $\det\tilde{\mathbf{B}}_i(\omega)\neq 0\ \ (i=1,2)$,

*2)* $\tilde{\gamma}_1\{\beta_1[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1]\omega^2/2+[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1]\omega\}<\rho_1$,
$\tilde{\gamma}_2\{\beta_2[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+g_1]\omega^2/2+[\alpha_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+g_1]\omega\}<\rho_2$,

*3)* $p_{11}<1$, $\det(\mathbf{E}-\mathbf{P})>0$, *где* $\mathbf{E}=\operatorname{diag}(1,1)$, $\mathbf{P}=(p_{ij})$.

*Тогда при* $|\lambda|<\varepsilon_0$ *задача (1)–(3) однозначно разрешима в области* $D$. *Решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентными интегральными соотношениями типа [1] и удовлетворяющих условиям (4).*

Указанные соотношения имеют следующий вид (в выражениях $\mathbf{X}_i(t,\lambda)$, $\mathbf{Y}_i(t,\lambda)$, $k=1,2,\ldots,$ параметр $\lambda$ опущен для упрощения записей):

$$\mathbf{X}_{k+1}(t)=\Bigg\{\int\limits_0^t[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{X}_k(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\mathbf{X}_{k-1}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau))+$$

$$+\mathbf{F}_1(\tau)+\lambda\mathbf{F}_2t(\tau)]\left(\int\limits_0^\tau\mathbf{B}_1(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau-\int\limits_t^\omega[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{X}_k(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+$$

$$+\mathbf{X}_{k-1}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau))+\mathbf{F}_1(\tau)+\lambda\mathbf{F}_2(\tau)]\left(\int\limits_\tau^\omega\mathbf{B}_1(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^\omega[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_k(\tau)+\mathbf{X}_k(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_k(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_k(\tau))+\mathbf{F}_1(\tau)+\lambda\mathbf{F}_2(\tau)]\,d\tau\Bigg\}\tilde{\mathbf{B}}_1^{-1}(\omega),$$

$$\mathbf{Y}_{k+1}(t)=\Bigg\{\int\limits_0^t[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)+\mathbf{Y}_k(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau))+$$

$$+\mathbf{G}_1(\tau)+\lambda\mathbf{G}_2(\tau)]\left(\int\limits_0^\tau\mathbf{B}_2(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau-\int\limits_t^\omega[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)+\mathbf{Y}_k(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+$$

$$+\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau))+\mathbf{G}_1(\tau)+\lambda\mathbf{G}_2(\tau)]\left(\int\limits_\tau^\omega\mathbf{B}_2(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^\omega[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_k(\tau)+\mathbf{Y}_k(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_k(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_k(\tau))+\mathbf{G}_1(\tau)+\lambda\mathbf{G}_2(\tau)]\,d\tau\Bigg\}\tilde{\mathbf{B}}_2^{-1}(\omega).$$

В качестве начального приближения $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0$ принимаются нулевые матрицы, приближение $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{Y}_1$ ищется в виде матриц, зависящих только от $\lambda$ и дающих приближенное решение $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{Y}_2$, удовлетворяющее условиям периодичности (4). Первое приближение имеет вид

$$\mathbf{X}_1=-\int\limits_0^\omega\left(\mathbf{F}_1(\tau)+\lambda\mathbf{F}_2(\tau)\right)\,d\tau\,\tilde{\mathbf{B}}_1^{-1}(\omega),\quad \mathbf{Y}_1=-\int\limits_0^\omega\left(\mathbf{G}_1(\tau)+\lambda\mathbf{G}_2(\tau)\right)\,d\tau\,\tilde{\mathbf{B}}_2^{-1}(\omega).$$

По методике, используемой в [1], исследованы сходимость и скорость сходимости предложенного алгоритма.

**Литература**

1. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1412–1420.

2. Зубов В. И. *Лекции по теории управления.* М.: Наука, 1975.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

## РАЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА С ЦЕНТРОМ

**А.Е. Руденок**

Рассмотрим вещественную систему Льенара

$$dx/dt=-y,\quad dy/dt=f(x)+yg(x),\tag{1}$$

где $f$, $g$ – линейно независимые рациональные функции, $f(0)=g(0)=0$, $f'(0)=1$. Говоря о центре системы (1), будем иметь в виду центр в особой точке $O(0,0)$.

Специфика рациональных систем Льенара состоит в том, что для построения их центров удобно использовать теорему Люрота [1].

Рассмотрим первые две функции Отрокова [2]

$$B_1(x)=\frac{g(x)}{f(x)},\quad B_2(x)=\frac{B_1'(x)}{f(x)}.$$

**Теорема 1.** *Для того чтобы система (1) имела центр, необходимо и достаточно, чтобы или выполнялось тождество*

$$f(x)g'(x) - g(x)f'(x) = k(f(x))^3, \quad k \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

*или система уравнений*

$$B_1(x) = B_1(y), B_2(x) = B_2(y) \tag{3}$$

*имела решение*

$$y = y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1. \tag{4}$$

Теорема 1 в немного измененном виде доказана в [3].

Используя теорему 1 и теорему Люрота, доказывается

**Теорема 2.** *Для того чтобы система (1) имела центр, необходимо и достаточно, чтобы или выполнялось тождество (2), или функции $f(x), g(x)$ имели вид*

$$f(x) = r_1(B(x))B'(x), \quad g(x) = r_2(B(x))B'(x), \tag{5}$$

*где $r_i(x)$, $B(x)$ – рациональные действительные функции, $B(0) = B'(0) = 0$, $B''(0) \neq \neq 0$, $s_i(0) \neq 0$, $s_i(x)$ – знаменатели дробей $r_i(x)$, $i = 1, 2$.*

**Замечание.** Если функции

$$F(x) = \int_0^x f(u)\,du, \quad G(x) = \int_0^x g(u)\,du \tag{6}$$

являются рациональными, то теорема 2 вытекает из теоремы Черкаса [4].

Функции (6) содержат в качестве слагаемых рациональные функции, зависящие от $x$ (алгебраическая часть) и функции вида $\ldots \ln(\ldots)$, $\ldots \operatorname{arctg}(\ldots)$ (логарифмическая часть).

**Теорема 3.** *Для того чтобы система (1) имела центр, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$R_i(x) = R_i(y), \quad L_i(x) = L_i(y), \quad i = 1, 2,$$

*где $R_i(x)$ – алгебраические части, $L_i(x)$ – логарифмические части функций (6), имела решение $y = y(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.*

Доказательство теоремы 3 использует тот факт, что решение (4) системы (3) – алгебраическая функция.

**Задача.** Требуется построить все рациональные системы Льенара (1) с центром, если

$$f(x) = \frac{x(1 + ax + bx^2 + cx^3)}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3}, \quad a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0. \tag{7}$$

Для решения этой задачи использовалась теорема 3. Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 4.** *Если исключить линейную зависимость $f$, $g$ и случай (3), то для того чтобы система (1) с функцией $f(x)$ вида (7) имела центр, необходимо и достаточно чтобы функция $B(x)$ и функции $f(x)$, $g(x)$, представленные в виде (5), были следующими:*

*a)* $$f(x) = \frac{x(4 + 4ax + 4bx^2 + (A^3 - 2aA^2 + 3Ab)x^3)}{4(1 + Ax)^2} = \frac{1}{12}B'(x),$$

$$g(x) = r(B(x))B'(x), \quad B(x) = \frac{x^2(6 + (4a - 2A)x + (A^2 - 2aA + 3b)x^2)}{1 + Ax},$$

*б)*
$$f(x) = \frac{x(2A + 3cx^2 + 2Acx^3)}{2A(1 + Ax)(1 - 2Ax)} = \frac{2A + cB(x)}{12A(1 - A^2B(x))}B'(x),$$

$$g(x) = r(B(x))B'(x), \quad B(x) = x^2(3 + 2Ax),$$

*в)*
$$f(x) = \frac{x(3 + 9Cx + 3bx^2 + bCx^3)}{3(1 + Cx)(1 + 3Cx)^2} = \frac{3 + bB(x)}{18(1 + C^2B(x))}B'(x),$$

$$g(x) = r(B(x))B'(x), \quad B(x) = \frac{x^2(3 + Cx)}{1 + 3Cx},$$

*г)*
$$f(x) = \frac{x(6 + 6ax + 6bx^2 + (3Ab - aA^2)x^3)}{6(1 + Ax)^3} = \frac{1}{2}B'(x),$$

$$g(x) = r(B(x))B'(x), \quad B(x) = \frac{x^2(6 + 4Ax + (3b - Aa)x^2)}{6(1 + Ax)^2},$$

*где* $r(x)$ *– любая рациональная функция со знаменателем* $s(x)$, $s(0) \neq 0$.

**Литература**

1. Чеботарев, Н. Г. *Теория алгебраических функций.* М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

2. Отроков Н. Ф. *Аналитические интегралы и предельные циклы.* Горький: Волго-Вятское книжное издательство, 1972.

3. Руденок А. Е. *Обобщенная симметрия системы Льенара* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 180–191.

4. Черкас Л. А. *Об одном признаке отличия центра от фокуса для уравнения Льенара* // Докл. АН БССР. 1978. Т. 22. № 11. С. 969–970.

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ «НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА» СИСТЕМ ЛЬЕНАРА ТИПА $3A + 2S$ И СИММЕТРИЧНЫМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ

**И.Н. Сидоренко**

Рассмотрим систему Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - x^2)(1 - (Lx)^2) - \epsilon f(x)y, \tag{1}$$

где $0 < L < 1$, $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x^{2i}$, $a_i \in \mathbb{R}$. Система (1) имеет в конечной части плоскости три антиседла и два седла $(3A + 2S)$ и может иметь предельные циклы вокруг каждого из антеседел, либо предельные циклы, окружающие сразу все особые точки. Данная работа является продолжением и развитием [1, 2]. Целью данной работы является исследование максимального количества предельных циклов «нормального размера» [2] у систем (1), а также построение конкретных систем рассматриваемого класса с различными распределениями предельных циклов. Для исследования семейства систем (1) будем использовать прогнозный метод [3] оценки числа предельных циклов. Метод основывается на решении алгебраической системы уравнений

$$F(\xi) = F(\psi), \quad G(\xi) = G(\psi),$$

где $F(x) = \int f(x)\,du$, $G(x) = \int g(x)\,du$, промежутки изменения переменных $\xi$, $\psi$ зависят от выбора особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов. Для «улучшения» полученных систем используется метод, разработанный для возмущения негрубого фокуса [3]. Обозначим через $a$ – вектор коэффициентов системы (1), и пусть при $a = a^0$ система имеет $k$ предельных циклов вокруг точки $O(0,0)$, которые распределены не равномерно. Выберем на промежутке $I = [p,q]$, $p > 0$, точки $x_1, \ldots, x_{k+1}$ и рассмотрим функцию последования $\Delta(x, a^0 + \Delta a)$, $x \in I$, $\Delta a$ – некоторое возмущение системы (1), тогда

$$\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{tp}\,(i,j)\Delta a_j + o(\Delta a),$$

где $\mathrm{tp}\,(i,j) = \partial\Delta^k(x_i^k, a^0)/\partial a_j$ находятся численно. Далее решаем задачу линейного программирования

$$L \to \min, \quad \pm(-1)^i\left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{tp}^k(i,j)\Delta a_j\right) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, k+1}, \quad |\Delta a_j| \leqslant L. \quad (2)$$

Если задача (2) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то соответствующая система Льенара имеет, по крайней мере, $k$ предельных циклов.

**Теорема.** *Максимальное число предельных циклов, окружающих группу особых точек, у системы (1) при $m = 2, \ldots, 8$ не меньше чем $m+1$.*

Для точной оценки числа предельных циклов систем (1) при $m = 1, 2$ предполагается построение функции Дюлака–Черкаса [3].

**Литература**

1. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы «нормального размера» систем Льенара с пятью особыми точками и симметричным векторным полем* // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2018): тез. докл. Междунар. науч. конф. 2018. Ч. 1. С. 94–95.

2. Сидоренко И. Н. *Предельные циклы нормального размера систем Льенара с симметрией* // Весн. Магілеўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. 2009. № 4 (34). С. 167–174.

3. Сидоренко И. Н., Черкас Л. А. *Предельные циклы «нормального размера» некоторых полиномиальных систем Льенара* // Весн. Магілеўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. 2009. № 4 (34). С. 167–174.

4. Черкас Л. А., Гринь А. А., Булгаков В. И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход).* Гродно: ГрГУ. 2013.

## О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ КОМПЛЕКСНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

**В.Ю. Тыщенко**

Объектом исследования будут комплексные вполне разрешимые [1] системы уравнений в полных дифференциалах

$$dz_j = \sum_{l=1}^{n-m} (f_{lj}(z)\,dt_l + g_{lj}(z)\,d\bar{t}_l) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad (1)$$

где элементами матриц $\|f_{lj}\| : G \to \mathbb{C}^{(n-m)\times n}$ и $\|g_{lj}\| : G \to \mathbb{C}^{(n-m)\times n}$ являются вещественно гладкие [1] на области $G \subset \mathbb{C}^n$ функции, черта над $t_l$ обозначает операцию комплексного сопряжения.

**Теорема 1.** *У вполне разрешимой комплексной системы уравнений в полных дифференциалах (1) на области $G$ в любой точке $(t_1, \ldots, t_{n-m})$, $z \in G$, существует единственное решение задачи Коши.*

**Определение 1.** Вещественно гладкую функцию $H$ на области $\Omega \subset G$ будем называть первым автономным интегралом вполне разрешимой комплексной системы уравнений в полных дифференциалах (1), если она сохраняет постоянное значение на решениях этой системы.

**Определение 2.** Наибольшее число функционально независимых на области $\Omega \subset \subset G$ первых автономных интегралов вполне разрешимой комплексной системы уравнений в полных дифференциалах (1) будем называть ее базисом первых интегралов на этой области, а само число – размерностью базиса.

**Теорема 2.** *Размерность базиса вещественно гладких первых автономных интегралов вполне разрешимой комплексной системы уравнений в полных дифференциалах (1) общего положения на области $G$ равна $2m$.*

**Теорема 3.** *Базис вещественно гладких первых автономных интегралов вполне разрешимой комплексной системы уравнений в полных дифференциалах (1) общего положения на области $G$ всегда может быть образован $2m$ вещественными гладкими первыми интегралами.*

**Теорема 4.** *Размерность базиса вещественно голоморфных автономных первых интегралов вполне разрешимой вещественно голоморфной комплексной системы уравнений в полных дифференциалах (1) общего положения на области $G$ равна $2m$.*

**Теорема 5.** *Базис вполне разрешимой вещественно голоморфной комплексной системы уравнений в полных дифференциалах (1) общего положения на области $G$ всегда может быть образован $2m$ вещественными голоморфными первыми интегралами.*

### Литература

1. Арбузов А. С., Тыщенко В. Ю. *Признаки ограниченности числа компактных инвариантных гиперповерхностей комплексных дифференциальных систем* // Весн. ГрДУ. Сер. 2. 2018. № 3. С. 6–17.

## ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ПРОБЛЕМЫ ЦЕНТРА И ФОКУСА

**Д.Н. Чергинец**

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y^{11} + x^4y^3 + 2\mu x^3y^6 + a_1x^7y^2,$$

$$\dot{y} = -x^3y^4 - 3(1+\varepsilon^2)x^7y^2 - 3\varepsilon^2x^{11} + \mu x^2y^7 + a_2x^6y^3, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$. Начало координат системы (1) является центром или фокусом. В работе [1] при $a_1 = -3/2$, $a_2 = -3$ получено следующее асимптотическое представление функции последования: $c + k_2c^2 + o(c^2)$, где $k_2$ – функция параметров системы, $c \to 0$, и доказано, что уравнение $k_2 = 0$ эквивалентно уравнению $\mu K_0 = 2I(\varepsilon)$, где

$$K_0 = 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{t(1+3t^4)} \exp\left( - \int\limits_{+\infty}^{t} \frac{\tau^3}{3\tau^4+1}\, d\tau \right) dt,$$

$$I(\varepsilon) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\omega^2\, d\omega}{(\omega^2+1)^{7/6+\gamma}(\omega^2+\varepsilon^2)^{1-\gamma}} = A - \frac{\pi}{2}\varepsilon + B\varepsilon^2 - \frac{\pi}{6}\varepsilon^3 \ln \varepsilon + O(\varepsilon^3),$$

$\varepsilon \to 0$, $\gamma = \varepsilon^2/(6(1-\varepsilon))$, $K_0, A, B \in \mathbb{R}$, $K_0 \neq 0$. Интеграл под горизонтальной и перед вертикальной линией – это интеграл Адамара. Таким образом, неравенство $k_2 < 0$, при выполнении которого начало координат неустойчиво, и неравенство $k_2 > 0$, при выполнении которого начало координат асимптотически устойчиво, определяются неаналитической функцией. Это означает, что устойчивость по Ляпунову аналитически неразрешима.

С помощью результатов работ [2, 3] в настоящей работе получено следующее асимптотическое представление функции последования системы (1):

$$c + \sum_{i=2}^{15} k_{i,0} c^i + \sum_{i=8}^{15} k_{i,1} c^i \ln c + \sum_{i=14}^{15} k_{i,2} c^i \ln^2 c + o(c^{15}).$$

Здесь коэффициент $k_{2,0}$ имеет вид

$$k_{2,0} = -4\varepsilon^{-2\lambda} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{t^2(a_2 t^4 + a_1(t^4 + 3\varepsilon^2 + 3t^2(1+\varepsilon^2)))}{9(1+t^2)^{13/6+\lambda}(\varepsilon^2+t^2)^{2-\lambda}}\, dt - 3^{-2/3}\varepsilon^{-2\lambda} B\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right),$$

где $B$ – бета-функция.

**Теорема 1.** *Начало координат системы $\tilde{(1)}$ асимптотически устойчиво при $k_{2,0} > 0$ и неустойчиво при $k_{2,0} < 0$.*

Доказано, что $k_{8,1} = k_{14,1} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu = 0$.

**Теорема 2.** *Для того чтобы начало координат системы (1) было центром необходимо, чтобы $\mu = 0$.*

Функция $I(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \neq 0$, из чего вытекает следующее следствие.

**Следствие.** *Начало координат системы (1) при $a_1 = -3/2$, $a_2 = -3$ является фокусом.*

В [4] найдена система, необходимые и достаточные условия центра для которой представляются через неалгебраические функции. Система, необходимые и достаточные условия центра для которой представлялись бы через неаналитические функции, на данный момент не найдена.

**Литература**

1. Медведева Н. Б. *Об аналитической неразрешимости проблемы устойчивости на плоскости* // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68. Вып. 5 (413). С. 147–176.

2. Садовский А. П. *Проблема центра и фокуса для аналитических систем с нулевой линейной частью. I* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 5. С. 790–799.

3.Чергинец Д. Н. *Функция соответствия для систем с простым седлом* // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2008. № 1. С. 71–76.

4. Ильяшенко Ю. С. *Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр–фокус* // Функц. анализ и его приложения. 1972. Т. 6. Вып. 3. С. 30–37.

# ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

**М.В. Шамолин**

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем нечетного (третьего и пятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладким многообразиям. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),\\
Z_2' = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),\\
Z_1' = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),\\
\beta' = Z_1 f(\alpha),
\end{gathered} \tag{2}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)},$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр $b$, а неконсервативной составляющей внешнего поля – параметр $b_1$.

Силовое поле в уравнениях на $v'$, $Z_1'$, $Z_2'$ определяется функцией $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$, а во второй строке – коэффициенты из уравнения для $\alpha'$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$) будут иметь вид

$$U\begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1 F(\alpha)\end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\delta'(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha)\end{pmatrix},$$

где $U$ – преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также работы [1–3]).

Перейдем к интегрированию искомой системы пятого порядка (1), (2) при выполнении свойств

$$2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) \equiv 0, \quad \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha). \tag{3}$$

**Теорема 1.** *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{4}$$

*Тогда система (1), (2) при выполнении равенств (4) обладает четырьмя независимыми (вообще говоря, трансцендентными в смысле комплексного анализа) первыми интегралами.*

Справедлива и теорема, обратная к теореме 1.

**Теорема 2.** *Условия (4), (4) (например, при $\kappa = -1$) являются необходимыми условиями существования набора первых интегралов для системы (1), (2).*

**Литература**

1. Шамолин М. В. *Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия* // Докл. РАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.

2. Шамолин М. В. *Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия* // Докл. РАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.

3. Шамолин М. В. *Новый случай интегрируемой системы с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере* // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. № 3. С. 34–43.

# ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

## УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

**В.В. Альсевич**

В классе дискретных управляющих воздействий рассматривается задача оптимального управления:

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t)), \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(t) = \gamma(t), \quad t \in [-\alpha, 0], \tag{2}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \tag{3}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $y(t) = x(t-\alpha)$, $\alpha > 0$ – запаздывание, $\gamma(t)$, $t \in [-\alpha, 0]$, – заданная функция, $U$ – выпуклый компакт, $f(x,y,u) = f_0(x,y) + B(x,y)u$.

Управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T$, называется дискретным (с периодом квантования $h > 0$), если

$$u(\tau) = u(t), \quad \tau \in [t, t+h[, \quad t \in T_h = \{0, h, 2h, \ldots, t^* - h\},$$

где $h = t^*/N$, $N$ – натуральное число. Дискретные управляющие воздействия отличаются от кусочно-постоянных тем, что их точками разрыва могут быть только моменты множества $T_h$.

Дискретные управляющие воздействия естественны с прикладной точки зрения, поскольку при решении нетривиальных задач неизбежно использование вычислительных устройств дискретного действия.

Несмотря на то, что динамика системы в задаче (1)–(3) описывается в непрерывном времени, условия оптимальности подобны тем, которые известны для дискретных систем [1]. Для обыкновенных систем с произвольной функцией $f(x,u)$ в [2] доказан принцип квазимаксимума, а для частного случая задачи (1)–(3) – дискретный принцип максимума.

Для систем с запаздыванием самого общего вида в [3] доказан принцип максимума в случае кусочно-непрерывных управлений. В данном докладе приводится дискретный принцип максимума для систем с запаздыванием, когда в качестве допустимых управлений рассматриваются дискретные функции. Заметим, что правая часть системы (2) имеет специальный вид. Для общего случая правой части, как и для обыкновенных систем, справедлив принцип квазимаксимума, который здесь не приводится. Отметим также, что в [4] дискретный принцип максимума приведен для несколько иной правой части системы (1), чем в данном докладе.

Будем предполагать, что функции $f_0(x,y)$, $B(x,y)$, $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы по своим переменным. С целью упрощения рассмотрен случай, когда $\alpha = Kh$, $K$ – натуральное число.

Пусть $u(t)$, $t \in T$, – допустимое управление в задаче (1)–(3), $x(t)$, $t \in T$, – соответствующее решение системы (2). Введем обозначения: $\delta_\omega(t) = 1$, если $t \in \omega$,

$\delta_\omega(t)=0$, если $t\notin\omega$, $H(t)= \, = H(x(t),y(t),\psi(t),u(t))=\psi'(t)f(x(t),y(t),u(t))$. Здесь $\psi(t)$, $t\in T$, – решение сопряженной системы:

$$\dot\psi(t)=-\frac{\partial H(t)}{\partial x}-\delta_{[0,t^*-\alpha]}(t)\frac{\partial H(t+\alpha)}{\partial y},\quad t\in T, \tag{4}$$

$$\psi(t^*)=-\frac{\partial\varphi(x(t^*))}{\partial x}. \tag{5}$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1** (дискретный принцип максимума). *Если* $u(t)$, $t\in T$, – *оптимальное управление в задаче* (1)–(3), *то вдоль него и соответствующих решений* $x(t)$, $t\in \in T$, *прямой системы* (2) *и* $\psi(t)$, $t\in T$, *сопряженной системы* (4), (5) *выполняется условие*

$$\Bigg(\int\limits_t^{t+h}\psi'(s)B(x(s),y(s))\,ds\Bigg)u(t)=\max_{v\in U}\Bigg(\int\limits_t^{t+h}\psi'(s)B(x(s),y(s))\,ds\Bigg)v,\quad t\in T_h. \tag{6}$$

Условие (6) может оказаться неэффективным при проверке допустимого управления на оптимальность. В этом случае можно использовать другие условия.

Допустимое управление $u(t)$, $t\in T$, называется особым, если на нем и соответствующих решениях $x(t)$, $\psi(t)$, $t\in T$, прямой и сопряженной систем выполняется тождество

$$\Bigg(\int\limits_t^{t+h}\psi'(s)B(x(s),y(s))\,ds\Bigg)u(t)\equiv\Bigg(\int\limits_t^{t+h}\psi'(s)B(x(s),y(s))\,ds\Bigg)v,$$

$$\forall v\in V(t)\subseteq U,\quad t\in\tilde T_h\subseteq T_h.$$

В классе кусочно непрерывных управлений для произвольной правой части системы (2) необходимые условия оптимальности особых управлений для обыкновенных систем доказаны в [5], для систем с запаздыванием – в [3]. Для сокращения записей обозначим $f(t)=f(x(t),y(t),u(t)$, $B(t)=B(x(t),y(t))$. Будем также считать, что функции $f_0(x,y)$, $B(x,y)$, $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по своим переменным, $V(t)=U$, $t\in\tilde T_h$. При указанных условиях в классе дискретных управлений для задачи (1)–(3) справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Если $u(t)$, $t\in T$, – оптимальное особое управление в задаче (1)–(3), то вдоль него и соответствующих решений $x(t)$ и $\psi(t)$, $t\in T$, прямой системы (2) и сопряженной системы (4), (5) выполняется условие (6) для $t\notin\tilde T_h$, а для $t\in\tilde T_h$ – условие*

$$(v-u(t))'\left(\int\limits_t^{t+h}\left(B'(\tau)\overline\Psi(\tau)+\left(\frac{\partial\psi'(\tau)B(\tau)}{\partial x}\right)'\right)\int\limits_t^{\tau}B(s)\,ds\,d\tau\right)(v-u(t))\leqslant 0,\quad v\in U,$$

*где* $\overline\Psi(t)=\Psi(t)+C(t)$, $C(t)=\delta_{[0,t^*-\alpha[}(t)\int_{t+h}^{t^*}G(\tau,t)\,d\tau$, $\Psi(t)$ – *решение матричного уравнения*

$$\dot\Psi(t)=-\frac{\partial f'(t)}{\partial x}\Psi(t)-\Psi(t)\frac{\partial f(t)}{\partial x}-\frac{\partial^2H(t)}{\partial x^2}-\delta_{[0,t^*-\alpha[}(t)\frac{\partial^2H(t+\alpha)}{\partial y^2},\quad t\in T,$$

$$\Psi(t^*) = -\frac{\partial^2 \varphi(x(t^*))}{\partial x^2}, \quad G(\tau,t) = F'(\tau,t)\Gamma(\tau,t) + \Gamma'(\tau,t)F(\tau,t),$$

$$\Gamma(\tau,t) = \left(\frac{\partial^2 H(\tau)}{\partial x \partial y} + \Psi(\tau)\frac{\partial f(\tau)}{\partial y}\right)F(t-\alpha,t),$$

$F(\tau,t)$ – *решение уравнения*

$$\frac{\partial F(\tau,t)}{\partial t} = -F(\tau,t)\frac{\partial f(t)}{\partial x} - \delta_{[0,t^*-\alpha[}(t)F(\tau,t+\alpha)\frac{\partial f(t)}{\partial y}, \quad F(t,t) = E.$$

**Литература**

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Качественная теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1971.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В., Калинин А. И., Крахотко В. В., Павленок Н. С. *Методы оптимизации.* Мн.: Четыре четверти, 2011.

3. Альсевич В. В. *Оптимизация динамических систем с запаздываниями.* Мн.: БГУ, 2000.

4. Габасов Р., Альсевич В. В., Русакова Д. В. *Оптимизация динамических систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий* // Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 95-летию со дня рожд. акад. Е.А. Барбашина: тез. докл. Минск, 1–5 окт. 2013 г. Мн.: БГУ, 2013. С. 103–105.

5. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Особые оптимальные управления.* М.: Наука, 1973. (Переизд. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2012).

## СТАЦИОНАРНЫЕ ОРБИТЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ

**А.И. Астровский**

Один из известных методов исследования структурных свойств динамических систем основан на классической идее А.М. Ляпунова [1] о преобразовании системы к простейшей (канонической) форме, что в ряде случаев позволяет полностью изучить ее основные свойства. Этот метод успешно применяется при изучении устойчивости линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Н.П. Еругин указал необходимые и достаточные условия приводимости линейных нестационарных систем [2], однако конструктивных методов приводимости для общих классов систем до сих пор не разработано. Общая концепция исследования линейных дифференциальных систем, основанная на классификации их относительно действия различных групп преобразований, изложена в работах Ю.С. Богданова [3, 4] и И.В. Гайшуна [5]. Для систем управления-наблюдения реализация идей А.М. Ляпунова заключается в приведении исходной системы к каноническому виду с помощью подходящей группы $\mathcal{G}$ линейных преобразований. В качестве канонических систем обычно рассматриваются системы с матрицами в форме Фробениуса, что объясняется тем, что для них основные задачи математической теории систем решаются сравнительно просто. В работах И.В. Гайшуна дано применение канонических форм Фробениуса к классическим проблемам синтеза нерезонансных систем, управления спектром, стабилизации, асимптотического оценивания состояний и др. К настоящему времени теория канонических форм Фробениуса для линейных нестационарных систем управления и наблюдения достаточно полно разработана в случае систем со скалярным выходом (управлением) [6].

Рассмотрим на множестве $T = \mathbb{R}_+$ линейную дифференциальную систему наблюдения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad y(t) = c(t)x(t)$$

со скалярным выходом; здесь $A(t)$ – непрерывная ограниченная $n\times n$-матрица, $c(t)$ – непрерывная ограниченная $n$-вектор-строка.

Пусть $\mathcal{G}$ – группа всех невырожденных при каждом $t \in T$ квадратных $(n \times n)$-матриц $G(t)$, принадлежащих $C^1(T, \mathbb{R}^{n\times n})$. Действие группы $\mathcal{G}$ на паре $(A, c)$ зададим стандартным образом: $G*(A, c) = (G^{-1}AG - G^{-1}\dot{G}, cG)$, $G \in \mathcal{G}$. Символом $\mathcal{O}(A, c)$ будем обозначать орбиту системы $(A, c)$ относительно действия группы $\mathcal{G}$. С точки зрения теории приводимости линейных нестационарных систем представляет интерес вопрос о наличии в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ стационарной системы, т.е. пары $(A, c)_{\mathrm{const}}$, коэффициенты которой не зависят от времени. Орбиты $\mathcal{O}(A, c)$, в которых существуют стационарные системы, будем называть стационарными.

В докладе в терминах исходных коэффициентов системы наблюдения доказываются необходимое и достаточное условие стационарности орбиты $\mathcal{O}(A, c)$.

**Литература**


1. Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения.* М.: Гостехиздат, 1950.
2. Еругин Н. П. *Приводимые системы* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. М.: Изд-во АН СССР, 1946. Т. 13.
3. Богданов Ю. С., Чеботарев Г. Н. *О матрицах, коммутирующих со своей производной* // Изв. вузов. Математика. 1959. № 4 (11). С. 27–37.
4. Богданов Ю. С. *Асимптотические характеристики решений линейных дифференциальных систем* // Тр. четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 1961). Л.: Наука, 1964. Т. 2. С. 424–432.
5. Гайшун И. В. *Введение в теорию линейных нестационарных систем.* М.: Едиториал УРСС, 2004.
6. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений.* Мн.: Беларус. навука, 2013.


# УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕДИАГОНАЛЬНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**В.И. Безяев**

Исследованию параболических систем, в том числе устойчивости их решений, посвящена достаточно обширная литература (см., например, [1–4] и ссылки в них). В настоящей работе приведены условия устойчивости или неустойчивости решений задачи Коши-Дирихле для квазилинейных параболических систем, определяемых нормальной матрицей. Предлагаемый здесь метод позволяет исследовать устойчивость по спектру определяющей матрицы. Этот метод основан на известных методах исследования квазилинейных параболических систем (см., например, [2–4]) и квазилинейных систем ОДУ (см., например, [5]).

Рассмотрим класс квазилинейных параболических систем с недиагональной определяющей матрицей

$$u_t + \operatorname{div}(A(x,u)\operatorname{grad} u) + b(x,u,\operatorname{grad} u) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega \times (0,\infty), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где $u_0(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Здесь $\Omega$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей, $u : \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^N$, $u = u(x,t)$, $A - (2N \times 2N)$-матричная функция с достаточно гладкими элементами на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$. На вещественные матрицы $A(x,v), A'_x(x,v)$ и $A'_v(x,v)$ накладываются условия ограниченности на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$. Предполагается также, что векторная функция $b(x,v,p)$ достаточно гладкая и ограниченная при $(x,v,p) \in \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2N}$, а нелинейный оператор $b(x,v,p)$, определенный в шаре $\|v\| \leqslant r$ ($\| \cdot \| = \| \cdot \|_{L_2(\Omega)}$), с областью значений в $L_2(\Omega)$, удовлетворяет условию

$$\|b(x,v,p)\| \leqslant C\|v\|^{1+\delta} \quad \text{для} \quad \|v\| < \eta, \quad \delta > 0.$$

При этом рассматриваются только системы, имеющие решения, определенные при всех значениях $t \in [0, \infty)$ для любых начальных функций из заданного множества.

**Теорема.** *Пусть матрица $A(x,v)$ нормальная ($AA^* = A^*A$) при всех $(x,v) \in \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$, $\{\lambda_j(x,v)\}_1^n$ – ее спектр и выполнены условия, приведенные перед теоремой. Тогда решение $u(x,t) \equiv 0$ задачи (1) является:*

*1) устойчивым (в $L_2(\Omega)$), если $\operatorname{Re} \lambda_j(x,v) \leqslant 0$ для $j = \overline{1,n}$, $(x,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$;*
*2) асимптотически устойчивым (в $L_2(\Omega)$), если $\operatorname{Re} \lambda_j(x,v) \leqslant -\beta < 0$ для $j = \overline{1,n}$, $(x,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$;*

*3) неустойчивым (в $L_2(\Omega)$), если $\operatorname{Re} \lambda_j(x,v) \geqslant \beta > 0$ для $j = \overline{1,n}$, $(x,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$.*

Заметим, что из условия 2) данной теоремы вытекает условие строгой эллиптичности в [4], что в случае симметричности матрицы $A$ гарантирует (например, при малом $|b|$) существование гладкого решения задачи (1) для $t \in [0, \infty)$. При исследовании устойчивости предлагаемым методом размерность переменной $x$ не имеет значения, но она играет важную роль в вопросах существования и регулярности решений [4].

**Литература**


1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967.
2. Сиразетдинов Т. К. *Устойчивость систем с распределенными параметрами..* М.: Наука, 1987.
3. Шестаков А. А. *Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами..* М.: Наука, 1990.
4. Arkhipova A. A. *Heat flow for a class of quadratic functionals with nondiagonal principal matrix. Existence of a smooth global solution* // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 2. С. 45–75.
5. Bezyaev V. I. *On stability of solutions to certain differential equations with discontinuous right-hand sides* // Eurasian Math. J. 2016. V. 7 № 4. P. 79–84.


## ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

**И.М. Борковская, О.Н. Пыжкова**

Рассмотрим гибридную систему

$$\dot{x}_1(t,k) = a_{11}x_1(t,k) + a_{12}x_2(t,k) + b_1u(t,k), \quad t \in [0, +\infty),$$

$$x_2(t,k+1) = a_{21}x_1(t,k) + a_{22}x_2(t,k) + b_2u(t,k), \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

где $\dot{x}_1(t,k) = \partial x_1(t,k)/\partial t$, $x_1(t,k) \in \mathbb{R}$, $x_2(t,k) \in \mathbb{R}$, $u(t,k) \in \mathbb{R}$, $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$, $b_1$, $b_2$ – действительные числа,

$$x_1(0,k) = x_1(k), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$x_2(t,0) = x_2(t), \quad t \in [0, +\infty).$$

Вводятся понятия сильной асимптотической устойчивости, а также $(\alpha,\gamma)$-устойчивости системы (1) при выключенном управлении.

Можно показать, что для обеспечения сильной асимптотической устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $a_{12}a_{21} = 0$;

2) $|a_{22}| < 1, a_{11} < 0$.

Для обеспечения $(\alpha,\gamma)$-устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $a_{12}a_{21} = 0$;

2) $|a_{22}| < \gamma, \;\; a_{11} \leqslant -\alpha$.

Присоединим к системе (1) регулятор

$$u(t,k) = q_1 x_1(t,k) + q_2 x_2(t,k), \tag{2}$$

где $q_1, \;\; q_2$ – действительные числа.

**Определение.** Систему (1) назовем стабилизируемой в смысле сильной асимптотической устойчивости (либо в смысле $(\alpha,\gamma)$-устойчивости) регулятором (2), если найдутся числа $q_1, \;\; q_2,$ что замкнутая система (1), (2) является сильно асимптотически устойчивой (либо $(\alpha,\gamma)$-устойчивой).

Имеют место следующие теоремы:

**Теорема 1.** *Для того, чтобы система (1) была стабилизируемой (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (2), достаточно выполнения хотя бы одного из условий:*

*1)* $|a_{22} - b_2 a_{12}/b_1| < 1$;

*2)* $a_{11} - b_1 a_{21}/b_2 < 0$.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы система (1) была стабилизируемой (в смысле $(\alpha,\gamma)$-устойчивости) регулятором (2), достаточно выполнения хотя бы одного из условий:*

*1)* $|a_{22} - b_2 a_{12}/b_1| < \gamma$;

*2)* $a_{11} - b_1 a_{21}/b_2 \leqslant -\alpha$.

### Литература

1. Борковская И. М., Пыжкова О. Н. *Задачи управления и стабилизации для гибридных динамических систем* // Тр. БГТУ. 2018. Сер. 3. № 2 (212). С. 5–9.

## О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

**М.Н. Гончарова**

Построение решения задачи оптимального быстродействия с фазовыми ограничениями является актуальным как с точки зрения исследования различных систем экономики, физики, биологиии и др. в условиях ограниченности имеющихся ресурсов, так и с точки зрения развития математической теории оптимального управления.

Произвольная запись уравнений движения объекта нередко оказывается неудобной для исследования, и поэтому целесообразно воспользоваться некоторыми упрощениями системы уравнений. В данной работе рассматривается построение оптимального быстродействия с линейным фазовым ограничением для системы второго порядка в случае, когда матрица коэффициентов при фазовых переменных имеет действительные собственные значения разных знаков, а матрица коэффициентов при переменных управления является невырожденной. Выделяется такое множество начальных положений, что оптимальная траектория имеет участок движения по границе фазового ограничения, а соответствующая сопряженная функция является суммой абсолютно непрерывной функции и функции скачка.

Пусть поведение объекта описывается линейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + v_1, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + v_2, \tag{1}$$

где $x = (x_1; x_2)$ – двумерный вектор фазовых координат объекта, $v = (v_1; v_2)$ – вектор переменных управления. Примем, что $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Допустимым на некотором отрезке времени $I = [t_0; t_1]$ считаем управление $v$, являющееся измеримой на отрезке $I$ функцией аргумента $t$ и принимающей для каждого $t \in I$ значение, удовлетворяющее ограничениям

$$|v_1 + v_2| \leqslant 1, \quad |v_1 - v_2| \leqslant 1. \tag{2}$$

Заметим, что система (2) ограничений на управление удовлетворяет условию общности положения. Фазовое ограничение $X$ зададим равенством

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant c x_l + d, \quad c > 0, \quad d > 0\}. \tag{3}$$

Для системы (1), (2) с фазовым ограничением (4) рассмотрим задачу оптимального быстродействия из некоторой точки $x^0$ в начало координат.

На параметры задачи наложим дополнительные ограничения: $c > 1$, $d < 1/\lambda_2$. В фазовой плоскости выполним следующие построения. Рассмотрим решение системы (1) с управлением $v = (0; -1)$, проходящее через точку

$$K = (x_1^K; x_2^K) = \left(\frac{1 - \lambda_2 d}{c(\lambda_2 - \lambda_1)}; \frac{\lambda_2 x_2 - 1}{\lambda_2 x_2 - 1}\right).$$

Это решение неявно задается формулой

$$\left(\frac{\lambda_2 x_2 - 1}{\lambda_2 x_2^K - 1}\right)^{\lambda_1} = \left(\frac{x_1}{x_1^K}\right)^{\lambda_2}. \tag{4}$$

Отметим, что точка $K$ является точкой касания кривой (4) и границы фазового ограничения (4). Рассмотрим множество $N$, ограниченное границей фазового ограничения (4), линией (4) и прямой $x_2 = 1/\lambda_2$. Выберем начальную точку $x^0$ из множества $N$.

Для перевода выбранной точки $x^0$ в начало координат рассмотрим управление, определяемое формулами:

$$v_1 = \begin{cases} 0, & t \in [0; \tau_1] \bigcup [\tau_2; \tau_3], \\ \dfrac{c(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 - c} x_1 + \dfrac{1 - \lambda_2 d}{1 - c}, & t \in (\tau_1; \tau_2], \\ -1, & t \in (\tau_3; t_1], \end{cases} \tag{5}$$

$$v_2 = \begin{cases} -1, & t \in [0; \tau_1] \bigcup [\tau_2; \tau_3], \\ \dfrac{c(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 - c} x_1 + \dfrac{c - \lambda_2 d}{1 - c} & t \in (\tau_1; \tau_2], \\ 0, & t \in (\tau_3; t_1], \end{cases} \tag{6}$$

где $\tau_1$ –момент достижения траекторией границы фазового ограничения, $\tau_2$ – момент достижения траекторией точки $K$, $\tau_3$ – момент достижения траекторией оси $Ox_1$, $t_1$ – момент достижения траекторией начала координат, причем $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < t_1$.

Все точки траектории, которая является решением системы (1) с управлением, определяемым формулами (5), (6), являются регулярными [1].

Для доказательства оптимальности предлагаемого процесса по теореме о достаточных условиях [2], можно применить сопряженную функцию, определяемую равенствами

$$\psi_1 = \begin{cases} e^{-\lambda_1(t-\tau_1)}, & t \in [0;\tau_1], \\ e^{(\lambda_1 - c\lambda_2)(t-\tau_1)/(c-1)}, & t \in (\tau_1;\tau_2], \\ Ce^{-\lambda_1(t-\tau_3)}, & t \in (\tau_2;t_1], \end{cases} \quad \psi_2 = \begin{cases} -e^{-\lambda_2(t-\tau_1)}, & t \in [0;\tau_1], \\ -e^{(\lambda_1 - c\lambda_2)(t-\tau_1)/(c-1)} & t \in (\tau_1;\tau_2], \\ -Ce^{-\lambda_2(t-\tau_3)}, & t \in (\tau_2;t_1], \end{cases}$$

где $C = \dfrac{(c-1)e^{(\lambda_1 - c\lambda_2)(\tau_2-\tau_1)/(c-1)}}{ce^{-\lambda_2(\tau_2-\tau_3)} - e^{-\lambda_1(\tau_2-\tau_3)}}$. Отметим, что предлагаемая сопряженная функция представляется в виде суммы абсолютно непрерывной функции и функции скачка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных иследований Республики Беларусь на 2016–2020 гг. (шифр задания «Конвергенция А42-16»).

**Литература**

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М., 1961.

2. Гончарова М. Н. *Достаточные условия оптимальности в задаче быстродействия* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 5. С. 53–61.

## УПРАВЛЕНИЕ АНСАМБЛЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

**В.В. Горячкин, В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович, Н.И. Широканова**

Вопросы управления ансамблем линейных дискретных двухпараметрических автономных систем, когда точные значения коэффициентов и начальных состояний таких систем неизвестны, а заданы лишь множества, в которых могут изменяются эти параметры. исследованы в работе [1]. В связи с этим важное значение имеют задачи управления всеми такими системами с нестационарными параметрами, получаемыми при различных вариациях коэффициентов и начальных состояний.

Пусть $[A(t,s)]$, $[D(t,s)]$ – некоторые множества в пространстве $n \times n$, а $[B(t,s)]$ – множество в пространстве неавтономных действительных $n \times m$-матриц.

Рассмотрим дискретную $2D$ систему вида

$$x(t+1,s) = A(t,s)x(t,s) + D(t,s)x(t,s+1) + B(t,s)u(t,s), \tag{1}$$

где матрицы $A(t,s)$, $D(t,s)$ и $B(t,s)$ принимают независимо друг от друга произвольные значения из заданных множеств $[A(t,s)]$, $[D(t,s)]$ и $[B(t,s)]$ соответственно. В системах (1) независимые переменные $(t,s) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$. Управление $u(t,s)$ принимает значения в некотором множестве $U$.

Ясно, что при любом начальном условии (состоянии)

$$x(0,s)=\alpha(s) \tag{2}$$

из множества $[\alpha(s)]$ и при любых фиксированных матрицах $A(t,s)$, $D(t,s)$, $B(t,s)$ и управлении $u(t,s)$ существует [2] единственное решение задачи Коши

$$x(t,s)=\sum_{j=0}^{t}G(t,s,0,j)\alpha(s+j)+\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i-1}G(t,s,i+1)B(i,s+j)u(i,s+j),$$

где матрицы $G(t,s,i,j)$ находятся из рекуррентных соотношений, построенных по матрицам $A(t,s)$, $D(t,s)$, $B(t,s)$ системы (1) [2].

Рассматривается следующая задача: определить такое универсальное управление $u(t,s)$ одно для всех систем (1), которое должно привести все траектории $x(t,\sigma)$, где $\sigma\in\mathbb{Z}$, в минимальную окрестность нуля за время $t=n$. Легко видеть, что управляемость системы (1) с фиксированными матрицами $A(t,s)$, $D(t,s)$, $B(t,s)$ из состояния (2) в состояние $x(n,\sigma)$ эквивалентно разрешимости относительно вектора $\nu$ системы линейных алгебраических уравнений

$$W\nu=f, \tag{3}$$

где симметрическая $n\times n$ матрица

$$W=W(n,\nu)=\{G(n,\sigma,i+1,j)B(i,\sigma+j)B'(i,\sigma+j)G'(n,\sigma,i+1,j),$$
$$i=0,1,\dots,n-1;\quad j=0,1,\dots,n-i-1\}$$

и $n$-вектор $f=f(n,\sigma)=-\sum_{j=0}^{n}G(n,\sigma,0,j)\alpha(\sigma+j)$. Решению $\nu$ системы (2) отвечает искомое управление

$$u(i,\sigma+j)=B'(i,\sigma+j)G'(n,\sigma,i+1,j)\nu. \tag{4}$$

Очевидно, для того чтобы выполнялось (2) одним вектором $\nu$ для всех неопределенных параметров, когда матрицы $A(t,s),D(t,s),B(t,s)$ пробегают независимо друг от друга множества $[A(t,s)],[D(t,s)],]B(t,s)]$ в общем случае невозможно. Поэтому естественно ввести векторную невязку $|W\nu-f|\leqslant\varepsilon$. Легко видеть, что данная невязка будет служить верхней оценкой модуля отклонения конечного состояния $x(n,\sigma)$ произвольной траектории ансамбля систем (1).

Далее полагаем, что $[A(t,s)]$, $[D(t,s)]$, $[B(t,s)]$ – интервальные матрицы, $[\alpha(s)]$ – интервальный вектор-столбец. Построим внешние интервальные оценки [3] для $W,f$ и найдем середины $W_0$, $f_0$ и радиусы $\Delta W$, $\Delta f$, т.е. определим интервальные объекты $[W]$, $[f]$.

Систему (4) будем трактовать как систему линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами.

Отсюда и результатов работ [1, 4] следует, что $\varepsilon$-решение системы (4) можно найти, решая следующую задачу линейного программирования:

$$e'\varepsilon\to\min,$$
$$W_0\nu+\Delta W\omega-\varepsilon\leqslant f_0-\Delta f,$$
$$-W_0\nu+\Delta W\omega-\varepsilon\leqslant -f_0-\Delta f,$$
$$-\omega\leqslant\nu\leqslant\omega,\quad \omega\geqslant0,\quad \varepsilon\geqslant0,\quad e=(1,1,\dots,1).$$

Эта задача, очевидно, всегда разрешима, при этом если $\varepsilon^*,\nu^*,\omega^*$ – ее решение, то $\varepsilon=\varepsilon^*$ – формирует множество, куда попадут все векторы $x(n,\sigma)$ ансамбля (1).

**Литература**

1. Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. *Управление ансамблем линейных двухпараметрических дискретных систем* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2016. № 3. С. 5–8.

2. Горячкин В. В., Писаренко А. А. *Задачи Коши для двухпараметрической нестационарной дискретной системы* // Вестн. БГУ. Сер. Математика, информатика. 2010. № 2. С. 150–152.

3. Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. *Оценка решений двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами* // Весцi. НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 5–8.

4. Ащепков Л. Т., Давыдков Д. А. *Универсальное решение интервальных задач оптимизации и управления.* М.: Наука. 2006.

# АЛГОРИТМ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ И СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

**Н.М. Дмитрук**

Рассматривается задача оптимального гарантированного управления линейной динамической системой с возмущениями и смешанными ограничениями:

$$\min_u \max_w \ c'x(T), \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

$$Hx(t) + Gu(t) \leqslant g \ \ \forall w(t) \in W, \ t \in [0, T]. \tag{3}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – управление, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ – возмущение в момент времени $t$; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{m\times r}$ – заданные матрицы; $U \subset \mathbb{R}^r$ – выпуклый компакт, $W$ – гиперкуб в $\mathbb{R}^p$: $W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_\infty \leqslant w_{\max}\}$, где $0 < w_{\max} < +\infty$, $\|w\|_\infty = \max\limits_{k=\overline{1,p}} |w_k|$. В задаче (1)–(3) требуется выполнить ограничения (4) с гарантией, т.е. при всех возможных возмущениях. При этом требуется найти гарантированное значение критерия качества – минимальную стоимость $c'x(T)$ при наихудшей реализации возмущения.

Предполагается, что состояния системы управления (2) доступны для измерений в дискретные моменты времени $\tau \in \Delta = \{0, h, \ldots, T - h\}$, $h = T/N$, $N \in \mathbb{N}$. Полученные измерения обозначаются $x^*(\tau)$ и отличаются от состояний $x(\tau)$ системы (2) в силу реализующихся в каждом конкретном процессе управления возмущений $w^*(t)$, $t \in [0, T]$, и выбранных управляющих воздействий $u^*(t)$, $t \in [0, T]$.

Исследуется случай, когда централизованное управление в реальном времени [1, 2], при котором общий центр управления (центральный регулятор) вырабатывает управляющие воздействия для всех входов в задаче (1)–(3), невозможно. В связи с этим предлагается алгоритм децентрализованного управления [2–4], при котором $r$ локальных регуляторов формируют локальные управляющие воздействия каждый для своего входа $j$, $j = \overline{1, r}$.

Процесс децентрализованного управления организуется в режиме реального времени: $j$-й локальный регулятор в каждый момент $\tau \in \Delta$ по текущему измерению $x^*(\tau)$ состояния и некоторой информации от остальных регуляторов вычисляет управляющее воздействие $u_j^*(t)$, $t \in [\tau, \tau + h[$, которое подается на $j$-й вход до поступления следующего измерения. Для этого он решает локальную прогнозирующую задачу оптимального управления, которую в настоящей работе предлагается формулировать в виде

$$\mathcal{P}_j(\tau): \min_{u_j} \max_{w} \ c'x(T), \tag{4}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_j u_j(t) + \omega_j M w(t), \quad x(\tau) = \omega_j x^*(\tau), \quad u(t) \in U, \quad t \in [\tau, T],$$

$$Hx(t) + G_j u_j(t) \leqslant y_j^d(t \mid \tau - h) + \omega_j (g - y^d(t \mid \tau - h)) \quad \forall w(t) \in W, \quad t \in [\tau, T],$$

где $B_j$, $G_j$ – $j$-е столбцы матриц $B$, $G$; $\omega_j > 0$ – весовой коэффициент, $\sum_{j=1}^r \omega_j = 1$; $y_j^d(t \mid \tau - h)$, $t \in [\tau, T]$, – $j$-й локальный выходной сигнал, построенный в предыдущий момент $\tau - h$ (см. ниже); $y_j^d(t \mid \tau - h) = \sum_{j=1}^r y_j^d(t \mid \tau - h)$, $t \in [\tau, T]$.

Задача (4) построена по принципам, изложенным в работах [2, 4]. Переменной оптимизации в (4) является только локальное управление $u_j(t)$, $t \in [\tau, T]$. Решение задачи (4) обозначается через $u_j^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau, T]$, по нему вычисляется локальный выходной сигнал

$$y_j^d(t \mid \tau) = \int\limits_{\tau+h}^{t} He^{A(t-s)} B_j u_j^d(s \mid \tau)\, ds + G_j u_j^d(t \mid \tau), \quad t \in [\tau + h, T].$$

При децентрализованном управлении локальные регуляторы, как правило [3], инициализируются с помощью оптимального программного управления $u^0(t)$ задачи (1)–(3) (естественно, предполагается, что задача (1)–(3) имеет решение). Это означает, что

$$u_j^d(t \mid 0) = u_j^0(t), \quad t \in [0, T], \quad y_j^d(t \mid 0) = \int\limits_{h}^{t} He^{A(t-s)} B_j u_j^0(s)\, ds + G_j u_j^0(t), \quad t \in [h, T].$$

Процесс децентрализованного управления тогда начинается в момент $\tau = h$, локальные прогнозирующие задачи $\mathcal{P}_j(\tau)$ определяются для $\tau \in \Delta \setminus \{0\}$.

Отметим, что децентрализация позволяет понизить размерность решаемых задач оптимального управления, что важно для численных методов и вычислений в реальном времени. Кроме того, формулировка (4) позволяет предложить простую схему обмена информацией между регуляторами. Действительно, для формирования данных задачи $\mathcal{P}_j(\tau)$ регулятору $j$ достаточно к моменту $\tau \in \Delta \setminus \{0\}$ получить от остальных регуляторов функции $y_k^d(t \mid \tau - h)$, $t \in [\tau, T]$, построенные ими локально по решениям задач $\mathcal{P}_k(\tau - h)$, $k \neq j$, $k = \overline{1, r}$, в предыдущий момент времени $\tau - h$.

Приведем алгоритм оптимального децентрализованного управления.

*Шаг 1.* Положить $\tau = 0$, $x^*(\tau) = x_0$.

*Шаг 2.* Найти оптимальную гарантирующую программу $u^0(t)$, $t \in [0, T]$, задачи (1)–(3). Для каждого $j = \overline{1, r}$ положить $u_j^d(t \mid 0) = u_j^0(t)$, $t \in [0, T]$, найти $y_j^d(t \mid 0)$, $t \in [h, T]$.

Для каждой подсистемы $j$ (параллельно):

*Шаг 3.* Подать на вход управление $u_j^*(t) \equiv u_j^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau, \tau + h[$.

*Шаг 4.* Передать $y_j^d(t \mid \tau - h)$, $t \in [\tau, T]$, всем подсистемам $k = \overline{1, r}$, $k \neq j$.

*Шаг 5.* Положить $\tau = \tau + h$, при $\tau = T$ завершить работу алгоритма.

*Шаг 6.* Решить задачу $\mathcal{P}_j(\tau)$ и найти $u_j^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau, T]$. Вычислить $y_k^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau + h, T]$. Вернуться к шагу 3.

Функция $u^*(t) = (u_j^*(t), j = \overline{1,r})$, $t \in [0,T]$, получаемая в результате работы описанного алгоритма, – реализация оптимальной децентрализованной обратной связи [2, 4].

Свойства решений задач $\mathcal{P}_j(\tau)$, $j = \overline{1,r}$, дает

**Утверждение.** *Пусть задача (1)–(3) имеет решение. Тогда для любого* $\tau \in \Delta \setminus \{0\}$ *выполняются следующие свойства:*

*1) (рекурсивная разрешимость) все задачи* $\mathcal{P}_j(\tau)$, $j = \overline{1,r}$, *имеют решение;*

*2) (допустимость) функция* $u^d(t \mid \tau) = (u_j^d(t \mid \tau)$, $j = \overline{1,r})$, $t \in [\tau, T]$, *является гарантирущей программой в задаче (1)–(3), т.е. вдоль нее и соответствующих траекторий системы (2) ограничения (4) выполняются для всех возможных возмущений;*

*3) (монотонность) гарантированная стоимость монотонна:*

$$\gamma_0(\tau) + c'x^d(t \mid \tau) \leqslant \gamma_0(\tau - h) + c'x^d(t \mid \tau - h),$$

*где* $\gamma_0(\tau) = w_{\max} \int_\tau^T \|c'e^{A(T-s)}M\|_1\, ds$ *– оценка возмущения;* $x^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau, T]$, *– траектория номинальной системы (2) (при* $w \equiv 0$) *под действием управления* $u^d(t \mid \tau)$, $t \in [\tau, T]$.

Результаты работы алгоритма децентрализованного управления и сравнение его эффективности с централизованным управлением иллюстрируются в докладе на примере задачи расширяющейся экономики фон Неймана.

### Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Принципы оптимального управления* // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 1. С. 15–18.

2. Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М. *Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 7. С. 1209–1227.

3. Christofides P. D., Scattolini R., de la Pena D. M., Liu J. *Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions* // Computers & Chemical Eng. 2013. V. 51. P. 21–41.

4. Dmitruk N. *Robust optimal control of dynamically decoupled systems via distributed feedbacks* // Optimization in the Natural Sciences. Communications in Computer and Information Science. Springer. 2015. V. 499. P. 95–106.

## УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

**М.П. Дымков**

В данной работе рассматривается конечный многошаговый процесс, который на каждом этапе задается системой линейных нестационарных дифференциальных уравнений и входное воздействие формируется с помощью внешнего управления и состояния, реализовавшегося на предыдущем шаге [1, 2]. Опираясь на понятие управляемых соответствий [3, 4], получено описание области значений оператора, задающего систему управления, из которого затем получены необходимые и достаточные условия управляемости рассматриваемого объекта.

Пусть система управления в пространстве $\mathbb{R}^n$ на отрезке времени $t \in [0,1]$ описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_k(t) = A(t)x_k(t) + D(t)x_{k-1}(t) + B(t)u_k(t) + f_k(t), \quad k = 1, \ldots, N,$$

с граничными данными вида

$$x_0(t) = g(t), \quad t \in [0,1], \quad x_k(0) = c_k, \quad x_k(1) = d_k, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Здесь $A(t)$, $D(t)$ – матрицы с элементами из пространства измеримых квадратично суммируемых на отрезке $[0,1]$ функций, $B(t)$ – матрица, элементы которой ограничены в существенном, $u_k(t)$ – $m$-вектор функции управления из $L_m^2[0,1]$, $c_k$, $d_k$ и $f_k(t)$, $g(t)$ – заданные $n$ векторы и $n$-вектор-функции соответственно. Обозначим через $H_n[0,1]$ гильбертово пространство абсолютно непрерывных $n$-вектор-функций $x(t)$, $t\in[0,1]$, таких, что $\dot{x(t)}\in L_n^2[0,1]$. Введем также пространства $W=(L_n^2[0,1])^N \times \times(\mathbb{R}^n)^N\times(\mathbb{R}^n)^N$ и $E = (H_n[0,1])^{N+1}\times(L_m^2[0,1])^N$. Рассмотрим ограниченный оператор $\mathcal{M} : E \to W$, который определяется правой частью системы управления и граничными условиями так, что его значение задается формулой $\mathcal{M}(x,u) = (y,\alpha,\beta)$, где

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{cases} \dot{x}_k(t) - A(t)x_k(t) - D(t)x_{k-1}(t) - B(t)u_k(t), \\ x_k(0), \\ x_k(1), k = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система управления может быт представлена в операторной форме

$$\mathcal{M}(x,u) = (f,c,d), \quad f \in (L_n^2[0,1])^N, \quad c \in (\mathbb{R}^n)^N, \quad d \in (\mathbb{R}^n)^N.$$

Следовательно, управляемость системы может быть изучена на основе свойств инъективности введенного оператора. Предложенный операторный подход используется затем для решения задачи оптимизации квадратичного функционала на траекториях изучаемой системы управления. В работе получено представление оптимального управления через переменные двойственной системы управления, а также посредством фазовых переменных исходной системы

Работа выполнена при финансовой поддержке проектов в рамках ГПНИ «Конвергенция–2020», НИР № 20162023.

**Литература**

1. Dymkov M. P., Gaishun I. V., Rogers E., Galkowski K. *Exponential stability of discrete linear repetitive processes* // Inter. J. Control. 2002. V. 75. № 12. P. 861–869.

2. Dymkov M., Rogers E., Dymkou S., Galkowski, K. *Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes* // SIAM J. Contr. Optim. 2008. V. 47. № 1. P. 396–420.

3. Ландо Ю. К. *Об управляемых операторах* // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 531–536.

4. Борухов В. Т. *Интегро-дифференциальные управляемые операторы Вольтерра* // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 4. С. 699–705.

## ОБ УПРАВЛЕНИИ СПЕКТРОМ И СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

**В.А. Зайцев, И.Г. Ким**

Рассмотрим билинейную стационарную дифференциальную систему с несколькими запаздываниями в состоянии следующего вида:

$$\dot{x}(t) = A_{00}x(t) + u_{01}A_{01}x(t) + \ldots + u_{0r_0}A_{0r_0}x(t) +$$

$$+ A_{10}x(t-h_1) + u_{11}A_{11}x(t-h_1) + \ldots + u_{1r_1}A_{1r_1}x(t-h_1) + \ldots$$

$$\ldots + A_{s0}x(t-h_s) + u_{s1}A_{s1}x(t-h_s) + \ldots + u_{sr_s}A_{sr_s}x(t-h_s), \tag{1}$$

с начальными условиями $x(\tau) = \mu(\tau)$, $\tau \in [-h_s, 0]$, где $h_j$ – постоянные вещественные запаздывания такие, что $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_s$, $\mu : [-h_s, 0] \to \mathbb{K}^n$ – непрерывная функция; $x \in \mathbb{K}^n$ – фазовый вектор, $u_k = \operatorname{col}(u_{k1}, \ldots, u_{kr_k}) \in \mathbb{K}^{r_k}$ – векторы управляющих воздействий, $A_{kj}$ – $n \times n$-матрицы над полем $\mathbb{K}$, $k = \overline{0,s}$, $j = \overline{0,r_k}$; здесь $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Через

$$\varphi(\lambda) = \det\left[\lambda I - \left(A_{00} + \sum_{j=1}^{r_0} u_{0j}A_{0j}\right) - \sum_{k=1}^{s} e^{-\lambda h_k}\left(A_{k0} + \sum_{\ell=1}^{r_k} u_{k\ell}A_{k\ell}\right)\right]$$

обозначим характеристическую функцию системы (1). Эта функция является квазиполиномом. Множество $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda) = 0\}$ корней характеристического уравнения образует спектр системы (1). В общем случае спектр $\sigma$ системы с запаздыванием (1) состоит из счетного числа точек $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Если характеристический квазиполином обращается в полином, то характеристическое уравнение имеет конечное число корней, т.е. спектр $\sigma$ является конечным множеством.

**Определение 1.** Будем говорить, что *для системы (1) разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством стационарного управления*, если для любых $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, существуют постоянные $\widehat{u}_k \in \mathbb{K}^{r_k}$, $k = \overline{0,s}$, такие, что характеристический квазиполином $\varphi(\lambda)$ системы (1) с управлениями $\widehat{u}_k$, $k = \overline{0,s}$, совпадает с полиномом $q(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$.

Пусть коэффициенты системы (1) имеют следующий специальный вид: матрица $A_{00}$ имеет нижнюю форму Хессенберга с ненулевыми элементами наддиагонали; первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц $A_{kj}$, $k = \overline{0,s}$, $j = \overline{0,r_k}$, $(k,j) \neq (0,0)$, равны нулю, т.е.

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \tag{2}$$

$$A_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{A}_{kj} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_{kj} \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \quad k = \overline{0,s}, \quad j = \overline{0,r_k}, \quad (k,j) \neq (0,0), \quad p \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3}$$

По системе (1) построим матрицы $\mathit{\Gamma}_k \in M_{n,r_k}(\mathbb{K})$, $k = \overline{0,s}$, $\mathit{\Lambda}_k \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $k = \overline{1,s}$:

$$\mathit{\Gamma}_k = \begin{pmatrix} \operatorname{Sp}(A_{k1}) & \operatorname{Sp}(A_{k2}) & \ldots & \operatorname{Sp}(A_{kr_k}) \\ \operatorname{Sp}(A_{k1}A_{00}) & \operatorname{Sp}(A_{k2}A_{00}) & \ldots & \operatorname{Sp}(A_{kr_k}A_{00}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \operatorname{Sp}(A_{k1}A_{00}^{n-1}) & \operatorname{Sp}(A_{k2}A_{00}^{n-1}) & \ldots & \operatorname{Sp}(A_{kr_k}A_{00}^{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \mathit{\Lambda}_k = \begin{pmatrix} \operatorname{Sp}(A_{k0}) \\ \operatorname{Sp}(A_{k0}A_{00}) \\ \ldots \\ \operatorname{Sp}(A_{k0}A_{00}^{n-1}) \end{pmatrix};$$

и матрицы $\mathit{\Delta}_k = [\mathit{\Gamma}_k, \mathit{\Lambda}_k] \in M_{n,r_k+1}(\mathbb{K})$, $k = \overline{1,s}$.

**Теорема.** *Пусть матрицы $A_{kj}$, $k = \overline{0,s}$, $j = \overline{0,r_k}$, системы (1) имеют специальный вид (2), (3). Тогда для системы (1) разрешима задача назначения произвольного* *конечного спектра посредством стационарного управления в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

$$\operatorname{rank} \mathit{\Gamma}_0 = n, \quad \operatorname{rank} \mathit{\Gamma}_k = \operatorname{rank} \mathit{\Delta}_k, \quad k = \overline{1, s}. \tag{4}$$

Теорема обобщает результаты работы [1] на системы с запаздываниями по состоянию.

**Следствие.** *Пусть матрицы $A_{kj}$, $k = \overline{0, s}$, $j = \overline{0, r_k}$, системы (1) имеют специальный вид (2), (3). Пусть выполнены условия (4). Тогда система (1) стабилизируема (с произвольной наперед заданной скоростью затухания) посредством стационарного управления.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18–51–41005) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).

### Литература

1. Зайцев В. А. *Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 12. С. 1789–1793.

## ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ПОДПРОСТРАНСТВО

**А.И. Калинин**

Рассмотрим нестационарную сингулярно возмущенную динамическую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad \mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad t \in [t_*, t^*], \tag{1}$$

где $\mu$ – малый положительный параметр, $y$ – $n$-вектор медленных переменных, $z$ – $m$-вектор быстрых переменных, $t_*, ; ; t^*$ – заданные моменты времени $(t_* < t^*)$.

Предполагается, что элементы матриц, формирующих систему (1), непрерывно дифференцируемы, а действительные части всех собственных значений матрицы $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, отрицательны.

Пусть $H_1$, $H_2$ – соответственно $n_1 \times n$- и $m_1 \times m$-матрицы полного ранга $(n_1 \leqslant n$, $m_1 \leqslant m)$. Говорят, что динамическая система (1) является управляемой на отрезке $[t_*, t^*]$ относительно подпространства $H_1 y = 0$, $H_2 z = 0$ [1], если для любого начального состояния $y(t_*) = y_*$, $z(t_*) = z_*$ найдется такое кусочно-непрерывное управление $u(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, что для порожденной им траектории имеет место $H_1 y(t^*, \mu) = 0$, $H_2 z(t^*, \mu) = 0$.

Наряду с системой (1) рассмотрим так называемую вырожденную систему

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u,$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$.

**Теорема.** *Если вырожденная система управляема на отрезке $[t_*, t^*]$ относительно подпространства $H_1 y = 0$, и выполнено условие*

$$rank(H_2B_2(t^*), H_2A_4(t^*)B_2(t^*), \ldots, H_2A_4^{m-1}(t^*)B_2(t^*)) = m_1, \tag{2}$$

*то существует такое положительное число* $\mu_0$, *что при* $\mu \leqslant \mu_0$ *система (1) управляема на отрезке* $[t_*, t^*]$ *относительно подпространства* $H_1 y = 0$, $H_2 z = 0$.

Заметим, что условие (2) есть критерий управляемости на подпространство $H_2 z = 0$ стационарной системы

$$\dot{z} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u.$$

Таким образом, относительная управляемость системы (1) есть следствие относительной управляемости двух систем меньшей размерности, одна из которых является стационарной.

Утверждение теоремы в случае полной управляемости ($H_1 = E_n$, $H_2 = E_m$) приводит к результату, доказанному в [2].

**Литература**

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Качественная теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1971.

2. Gicev T. R., Dontchev A. L. *Singular perturbation in optimal control problems with fixed final state* // Докл. Болгар. АН. 1978. Т. 31. № 8. С. 935–955.

## О ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОЛУДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Б.С. Калитин**

В докладе речь идет о развитии метода функций Ляпунова [1–3] для решения задач устойчивости компактного положительно инвариантного множества $M$ полудинамической системы $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ [2] на произвольном метрическом пространстве $X$.

Представлены новые теоремы второго метода Ляпунова в форме достаточных условий неасимптотической устойчивости множества $M$ с использованием знакопостоянных вспомогательных функций. Изучена ситуация, когда множество нулевого уровня функции Ляпунова состоит из точек покоя системы.

Определено понятие меры длины отрезка полутраектории для произвольной полудинамической системы в следующей форме.

**Определение.** Непрерывную функцию $\psi(x,t)$ $(\psi : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+)$ будем называть длиной отрезка $x[0,t]$ полутраектории $\gamma^+(x)$ движения $x : t \to xt$, $x \in X$, полудинамической системы $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$, если выполняются следующие условия:

1) $\psi(x,0) = 0$ для всех $x \in X$ (стационарность);

2) $\psi(x,t_1) - \psi(x,t_2) \geqslant d(xt_1, xt_2)$ для всех $t_1 > t_2 \geqslant 0$ (монотонность);

3) $\psi(x,t_1) = \psi(x,t_2) + \psi(xt_2, t_1 - t_2)$ для всех $t_1 > t_2 \geqslant 0$ (аддитивность).

Через $\mathbf{\Psi}$ обозначим множество всех непрерывных функций $\psi : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющих приведенному определению.

**Теорема.** *Пусть* $X$ *– произвольное метрическое пространство и* $M$ *– компактное положительно инвариантное подмножество* $X$. *Предположим, что существуют окрестность* $U$ *для* $M$, *непрерывная функция* $V : U \to \mathbb{R}^+$ *и функция* $\psi \in \mathbf{\Psi}$, *подчиненные следующим условиям:*

*1)* $V(x) \geqslant 0$ *для* $x \in U$ *и* $V(x) = 0$ *для* $x \in M$;

*2)* $V(xt) \leqslant V(x) - \psi(x,t)$ *для* $x \neq M$, $t > 0$ *и* $x[0,t] \subset U$.

*Тогда имеют место следующие утверждения:*

*a) если множество* $Y_0 = x \in U : V(x) = 0$ *не пусто, то оно состоит из точек покоя;*

*b) множество* $M$ *устойчиво.*

Известно [3], что для утверждения об устойчивости с использованием закоположительной функции Ляпунова $V(x) \geqslant 0$ требование неасимптотической устойчивости на множестве нулевого уровня функции недостаточно. А именно предполагается, что должно выполняться более жесткое условие асимптотической устойчивости или $B$-устойчивости. Новизна предлагаемого результата состоит в том, что выделен класс множеств $M$, для которых неасимптотическая устойчивость относительно множества, где $V(x) = 0$, обеспечивает устойчивость $M$ в фазовом пространстве $X$.

**Литература**

1. Зубов В. И. *Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение)*, 2-е изд. М., 1984.

2. Сибирский К. С., Шубэ А. С. *Полудинамические системы. Топологическая теория.* Кишинев: Штиинца, 1987.

3. Калитин Б. С. *Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова).* Саарбрюкен, 2013.

## СВОЙСТВО РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**А.А. Козлов, И. Туфик**

Рассмотрим линейное дифференциальное управляемое уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)v, \quad x \in \mathfrak{H}_1, \quad v \in \mathfrak{H}_2, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_1$. Линейную оператор-функцию $A(\cdot) : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ будем считать интегрально ограниченной, т.е. для нее выполняется неравенство

$$\sup_{t\geqslant 0} \int_t^{t+1} \|A(\tau)\|\, d\tau \leqslant a,$$

(здесь и далее под нормой оператора $C : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ подразумевается величина $\|C\| = \sup\{\|Cy\|_2/\|y\|_1,\ y \in \mathfrak{H}_1,\ y \neq 0\}$, где $\|\cdot\|_k$ – норма в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_k$, $k = 1, 2$). Линейную оператор-функцию $B(\cdot) : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_1$ будем полагать непрерывной и ограниченной. В качестве управлений $v(\cdot)$ в уравнении (1) будем рассматривать измеримые по Лебегу и ограниченные на всей своей области определения функции.

**Определение 1.** Состояние $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ системы (1) называется *управляемым в момент времени* $t_0$, если его можно перевести за конечное время $[t_0, t_1]$ в нуль вдоль решения уравнения (1), т.е. существуют $t_1 > t_0$ и управление $v : [t_0, t_1] \to \mathfrak{H}_2$ такие, что решение $x(\cdot)$ уравнения (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ и управлением $v(\cdot)$ удовлетворяет равенству $x(t_1) = 0$.

**Определение 2.** Уравнение (1) называется *вполне управляемым в момент времени* $t_0$, если всякое состояние $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ управляемо в этот момент времени.

Пусть $U(t, \tau)$, $t, \tau \geqslant 0$, – эволюционный (разрешающий) оператор [1, с. 147] линейного дифференциального уравнения (1) с нулевым управением $v(\cdot)$.

**Теорема 1.** *Состояние* $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ *системы* (1) *управляемо в момент времени* $t_0$ *тогда и только тогда, когда найдется такие момент времени* $t_1 > t_0$ *и допустимое управление* $v : [t_0, t_1] \to \mathfrak{H}_2$, *что выполняется равенство*

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} U(t_0, \tau)B(\tau)v(\tau)\, d\tau.$$

Для всякого непрерывного линейного оператора $F$, переводящего гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ в гильбертово пространство $\mathfrak{G}$, определим сопряженный оператор $F^*$, переводящий пространство $\mathfrak{G}^*$ непрерывных линейных функционалов в $\mathfrak{G}$, в пространство $\mathfrak{H}^*$ непрерывных линейных функционалов на $\mathfrak{H}$.

**Определение 3.** *Оператором управляемости* (*оператором Калмана*) уравнения (1) на отрезке $[t_0, t_1]$ назовем оператор $\mathfrak{W}(t_0, t_1) : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ вида

$$\mathfrak{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} U(t_0, \tau)B(\tau)B^*(\tau)U^*(t_0, \tau)\, d\tau.$$

Очевидно, что при любых $t_0, t_1 \geqslant 0$ оператор $\mathfrak{W}(t_0, t_1)$ является линейным оператором.

**Определение 4** [1, с. 50]. Оператор $H : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ называется *эрмитовым,* если $H = H^*$.

**Теорема 2.** *При всех $t_0, t_1 \geqslant 0$ оператор Калмана $\mathfrak{W}(t_0, t_1)$ является эрмитовым.*

**Следствие 1.** *При всех $t_0, t_1 \geqslant 0$ форма $(\mathfrak{W}(t_0, t_1)x, x)$ принимает только вещественные значения.*

**Определение 5** [1, с. 50]. Оператор $H : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ называется *неотрицательным,* если форма $(Hx, x)$ неотрицательна при любом $x \neq 0$.

**Теорема 3.** *При всех $t_0, t_1 \geqslant 0$ оператор Калмана $\mathfrak{W}(t_0, t_1)$ является неотрицательным.*

**Определение 6** [1, с. 26]. Точка комплексной плоскости называется *регулярной точкой* оператора $H : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$, если в существует оператор (*резольвента* оператора $H$) $R_\lambda = (H - \lambda I)^{-1}$. Известно, что множество всех регулярных точек оператора $H$ открыто. Его дополнение $\sigma(H)$ называтся *спектром* оператора $H$.

**Замечание 1.** Известно [1, с. 50], что спектр эрмитова оператора $\sigma(H)$ представляет собой замкнутое ограниченное множество на вещественной оси. Наименьший сегмент, содержащий в себе спектр $\sigma(H)$, обозначают $[\lambda_m(H), \lambda_M(H)]$, причем имеют место равенства $\lambda_m(H) = \inf\{(Hx, x), \|x\| = 1\}$ и $\lambda_M(H) = \sup\{(Hx, x), \|x\| = 1\}$.

**Определение 7** [1, с. 50]. Оператор $H : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ называют *равномерно положительным,* если его форма $(Hx, x)$ равномерно положительна на единичной сфере $S = \{x : \|x\| = 1\}$ в $\mathfrak{H}_1$, т.е. если $\lambda_m(H) > 0$.

**Замечание 2** [1, с. 50]. Равномерно положительный оператор обратим, причем для нормы обратного оператора $H^{-1}$ справедливо неравенство $\|H^{-1}\| \leqslant 1/\lambda_m(H) < +\infty$.

**Определение 8** [2, с. 82]. Уравнение (1) называется *равномерно вполне управляемым*, если найдутся такие $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при каждых $t_0 \geqslant 0$ и $\xi \in \mathfrak{H}_1$ для оператора Калмана уравнения (1) выполнено неравенство

$$(\mathfrak{W}(t_0, t_0 + \sigma)\xi,\, \xi) \geqslant \alpha\|\xi\|^2$$

и *$\sigma$-равномерно вполне управляемым*, если уравнение (1) равномерно вполне управляемо на отрезках длины $\sigma$. Иначе, называется *равномерно вполне управляемым*, если найдется такое $\sigma > 0$, что при всяком $t_0 \geqslant 0$ оператор Калмана $\mathfrak{W}(t_0, t_0 + \sigma)$ уравнения (1) является равномерно положительным оператором.

**Теорема 4.** *Если уравнение* (1) *$\sigma$-равномерно вполне управляемо, то существует такое число $\beta > 0$, что при любом $t_0 \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|(\mathfrak{W}^{-1}(t_0, t_0 + \sigma)\xi, \xi)\| \leqslant \beta.$$

**Определение 8** [2, с. 90]. Уравнение (1) называется *равномерно вполне управляемым*, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ найдется измеримое и ограниченное управление $v : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathfrak{H}_2$, при всех $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma\|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ уравнения (1) в нуль на этом отрезке.

**Теорема 5.** *Уравнение* (1) *$\sigma$-равномерно вполне управляемо в том и только в том случае, когда для любого $t_0 \geqslant 0$ оператор Калмана равномерно положителен на отрезке* $[t_0, t_0+\sigma]$.

Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

**Литература**

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М., 1970.

2. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем.* Мн.: Беларус. навука, 2012.

## УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ СТРАТЕГИЙ С ЗАМЫКАНИЯМИ

**Д.А. Костюкевич, Н.М. Дмитрук**

Одним из современных, широко распространенных на практике методов управления линейными и нелинейными системами является метод управления по прогнозирующей модели (Model Predictive Control, MPC) [1]. Схемы MPC направлены на построение оптимальных обратных связей посредством решения в режиме реального времени специальных (прогнозирующих) задач оптимального управления, сформулированных на конечном промежутке времени для математической модели объекта управления с начальным состоянием, совпадающим с текущим состоянием объекта. Оптимальное управление прогнозирующей задачи подается на вход объекта управления до тех пор, пока не будет получено новое измерение состояния, после чего процедура повторяется. Спектр задач управления, в которых применяется MPC, достаточно обширен: от задач стабилизации до (на настоящий момент) задач группового управления и оптимизации экономических показателей процессов.

Для дискретного линейного объекта управления

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – управление, $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^p$ – возмущение; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$; на траектории и управления которой наложены ограничения

$$g_{\min} \leqslant Hx(t) \leqslant g_{\max}, \quad \|u(t)\|_\infty \leqslant u_{\max}, \quad t = 1, 2, \ldots \quad (H \in \mathbb{R}^{m\times n}, g_{\min}, g_{\max} \in \mathbb{R}^m),$$

прогнозирующая задача (для стабилизации) может быть сформулирована в виде [2]

$$\min_u \max_w \sum_{t=0}^{T-1} (\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru(t)\|_\infty) + \|Px(T)\|_\infty, \tag{2}$$

$$x(t+1) = Ax(t)+Bu(t)+Mw(t), \quad x(0) = x^*(\tau), \quad \|u(t)\|_\infty \leqslant u_{\max}, \quad t = 0,1,\ldots,T-1,$$
$$g_{\min} \leqslant Hx(t) \leqslant g_{\max}, \quad \forall w(t) \in W, \quad t = 0,1,\ldots,T,$$

где $Q,P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times r}$; $x^*(\tau)$ – текущее (в момент $\tau$) измерение состояния объекта управления, $x^*(0) = x_0$. Задача (2) – задача гарантированного оптимального управления [3, 4]; в ней требуется выполнить ограничения с гарантией при всех возможных возмущениях, минимизируя при этом гарантированное значение критерия качества.

В настоящем сообщении предлагается строить решение задачи (2) в виде стратегии управления [3, 4] с замыканием. Следуя работе [4], будем считать до начала процесса управления задан момент замыкания $T_1 \in \{1,\ldots,T-1\}$, для которого предполагается: 1) в момент времени $T_1$ будет измерено текущее состояние $x_1 = x^*(T_1)$ объекта управления; 2) на основе измерения состояния можно будет выбрать новое управляющее воздействие $u_1(t \mid x_1)$, $t = T_1,\ldots,T-1$. Тогда стратегия управления с моментом замыкания $T_1$ в задаче (2):

$$\pi_1(\tau, x^*(\tau)) = \{u_0(\cdot \mid x^*(\tau)); u_1(\cdot \mid x_1)\},$$

где $u_0(\cdot \mid x^*(\tau)) = (u_0(t \mid x^*(\tau)), t = 0,\ldots,T_1-1)$, $u_1(\cdot \mid x_1) = (u_1(t \mid x_1), t = T_1,\ldots$ $\ldots,T-1)$ – управляющее воздействие на соответствующем промежутке управления – до и после момента замыкания. Здесь $x_1 \in X(T_1 \mid x^*(\tau), u_0(\cdot \mid x^*(\tau)))$ – множеству возможных состояний в момент $T_1$ системы (1) с начальным условием $x(0) = x^*(\tau)$ под действием управления $u_0(\cdot \mid x^*(\tau))$ и всех возможных возмущений.

Оптимальная стратегия управления $\pi_1^0(\tau, x^*(\tau)) = \{u_0^0(\cdot \mid x^*(\tau)); u_1^0(\cdot \mid x_1)\}$ с моментом замыкания $T_1$, состоит из оптимальной начальной программы $u_0^0(\cdot \mid x^*(\tau)) =$ $= (u_0^0(t \mid x^*(\tau)),\ t = 0,\ldots,T_1-1)$ (см. ниже) и оптимальных гарантирующих программ $u_1^0(\cdot \mid x_1) = (u_0^0(t \mid x_1),\ t = T_1,\ldots,T-1)$ – решений следующей задачи оптимального программного управления

$$J_1(x_1) = \min_{u_1}\max_{w_1}\sum_{k=T_1}^{T-1}(\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru_1(t)\|_\infty) + \|Px(T)\|_\infty,$$

$$x(t+1) = Ax(t)+Bu_1(t)+Mw_1(t), \quad x(T_1) = x_1, \quad \|u_1(t)\|_\infty \leqslant u_{\max}, \quad t = T_1,\ldots,T-1,$$
$$g_{\min} \leqslant Hx(t) \leqslant g_{\max}, \quad \forall w_1(t) \in W, \quad t = T_1,\ldots,T.$$

Оптимальная начальная программа $u_0^0(\cdot \mid x^*(\tau))$ – решение задачи

$$V(\pi_1^0(\tau, x^*(\tau))) = \min_{u_0}\max_{w_0}\sum_{t=0}^{T_1-1}(\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru_0(t)\|_\infty) + J_1(x(T_1)), \tag{3}$$

$$x(t+1) = Ax(t)+Bu_0(t)+Mw_0(t), \quad x(0) = x^*(\tau), \quad \|u_0(t)\|_\infty \leqslant u_{\max}, \quad t = 1,\ldots,T_1-1,$$
$$g_{\min} \leqslant Hx(t) \leqslant g_{\max}, \quad x(T_1) \in X_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : J_1(x_1) \leqslant +\infty\} \quad \forall w_0(t) \in W, \quad t = 1,\ldots,T_1-1.$$

Задача (4) эквивалентна следующей задаче

$$V(\pi_1^0(\tau, x^*(\tau))) = \min_{u_0,\alpha}\max_{w_0}\sum_{t=0}^{T_1-1}\|Qx(t)\|_\infty + \sum_{t=0}^{T_1-1}\|Ru_0(t)\|_\infty + \alpha, \tag{4}$$

$$x(t+1) = Ax(t)+Bu_0(t)+Mw_0(t), \quad x(0) = x^*(\tau), \quad \|u_0(t)\|_\infty \leqslant u_{\max}, \quad t = 1,\ldots,T_1-1,$$

$$g_{\min} \leqslant Hx(t) \leqslant g_{\max}, \quad x(T_1) \in X_1(\alpha) \quad \forall w_0(t) \in W, \quad t = 1, \ldots, T_1 - 1,$$

где $X_1(\alpha) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : J_1(x_1) \leqslant \alpha\}$, $\alpha \geqslant 0$.

В предположении $W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_\infty \leqslant w_{\max}\}$, задача (4) может быть далее сведена к задаче линейного программирования для ее эффективного численного решения (см. подход в [4]).

Алгоритм MPC на основе оптимальных стратегий управления заключается в следующем.

*Шаг 1.* В момент времени $\tau$ измерить $x^*(\tau)$, решить задачу (4), найти $u_0^0(\cdot \mid x^*(\tau))$.

*Шаг 2.* Применить к объекту (1) управляющее воздействие

$$u_{MPC}(\tau) = u_0^0(0 \mid x^*(\tau)).$$

*Шаг 3.* Перейти к следующему моменту $(\tau := \tau + 1)$ и вернуться к шагу 1.

Отметим, процедура преобразования задачи (4) к задаче линейного программирования основана на результатах анализа чувствительности [5] и может оказаться достаточно трудоемкой. Однако этот этап является подготовительным и не зависит от состояния $x^*(\tau)$. Это означает, что в алгоритме MPC трудоемкость решения зависит только от трудоемкости решения полученной задачи линейного программирования. Численные эксперименты показывают сравнимую трудоемкость построения оптимальных стратегий и оптимальных гарантирующих программ [4], при этом стратегии позволяют улучшить качество процесса управления.

**Литература**

1. Rawlings J. B., Mayne D. Q. *Model Predictive Control: Theory and Design.* Madison: Nob Hill Publishing, 2009.

2. Bemporad A., Borrelli F., Morari M. *Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems* // IEEE Trans. on Aut. Contr. 2003. V. 48. № 9. P. 1600–1606.

3. Kostyukova O., Kostina E. *Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances* // Mathematical programming. 2006. V. 107. № 1–2. P. 131–153.

4. Дмитрук Н. М. *Оптимальная стратегия с одним моментом замыкания в линейной задаче оптимального гарантированного управления* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2018. Т. 58. № 5. С. 664–681.

5. Gal T. *Postoptimal analyses, parametric programming and related topics.* Berlin: De Gruyter, 1995.

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**С.Е. Купцова, У.П. Зараник**

В развитие идеи, предложенной Б.С. Разумихиным в работах [1] и [2] для решения вопроса устойчивости решений систем с запаздывающим аргументом, предлагаются новые достаточные условия асимтотической устойчивости нулевого решения систем с запаздыванием, которые ослабляют требование отрицательной определенности производной функции в силу рассматриваемой системы.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h)), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ – неизвестный $n$-мерный вектор, $h > 0$ – запаздывание, $f(t, x, y) = (f_1, \ldots, f_n)^\top$ – $n$-мерная вектор-функция, относительно которой предполагаем, что она определена и непрерывна на множестве $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго в любой ограниченной области изменения параметров $x$ и $y$. А также условию

$$f(t,0,0) \equiv 0,$$

которое гарантирует существование нулевого решения у системы (1).

Обозначим через $x(t,t_0,\varphi)$ – решение системы (1), удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x(t,t_0,\varphi) \equiv \varphi(t-t_0)$ при $t \in [t_0-h,t_0]$, $\varphi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$, где $PC([a,b],\mathbb{R}^n)$ это бесконечномерное пространство кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ $n$-мерных вектор-функций с конечным числом точек разрыва первого рода. Пусть $H$ некоторое положительное число. Обозначим

$$\mathbb{R}^1_+ = \{t \in \mathbb{R}^1 : t \geqslant 0\}, \quad \Omega = \{(t,x) : t \in \mathbb{R}^1_+, \ \ \|x\| \leqslant H\}.$$

Рассмотрим функцию $V(t,x)$ определенную и непрерывную на множестве $\Omega$, а также непрерывную и положительную на множестве $t \geqslant 0$ функцию $\lambda(t)$. Далее будем предполагать, что $\lambda(t) < H$.

**Определение 1** Функцию $V(t,x)$ назовем отрицательно определенной на множестве $\lambda(t) \leqslant \|x\| \leqslant H$, если:

1) $V(t,x)$ непрерывна по всем своим аргументам на множестве $\Omega$;

2) $V(t,x) \leqslant -V_1(x)$ на множестве $\lambda(t) \leqslant \|x\| \leqslant H$, где $V_1(x)$ – непрерывная на множестве $\|x\| \leqslant H$ функция такая, что $V_1(x) > 0$ для любого $x$ такого, что $\|x\| \leqslant H$.

**Теорема.** *Если для системы (1) существует непрерывно-дифференцируемая на множестве $\Omega$ функция $V(t,x)$ такая, что:*

*1) $V(t,x)$ положительно определена на множестве $\Omega$ и допускает бесконечно малый высший предел;*

*2) $\dot V|_{(1)} \leqslant W(t,x)$, вдоль каждой интегральной кривой системы (1), удовлетворяющей условию $V(\xi,x(\xi,t_0,\varphi)) \leqslant g(V(t,x(t,t_0,\varphi)))$ для всех $\xi \in [t-h,t)$, где функция $W(t,x)$ отрицательно определена на множестве $\lambda(t) \leqslant \|x\| \leqslant H$;*

*3) $g(r)$ – непрерывная, строго монотонно возрастающая на множестве $r \geqslant 0$ функция, удовлетворяющая условию $g(r) > r$ при $r > 0$;*

*4) $\lambda(t) \in C^0(\mathbb{R}^1_+)$, $\lambda(t) > 0$ и $\lambda(t) \to 0$ при $t \to +\infty$,*

*то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.*

**Замечание.** Если помимо выполнения всех условий теоремы можно найти число $H_1 > \Lambda$, $H_1 < H$ такое, что

$$\sup_{\|x\|<\Lambda} V(t,x) < \inf_{\|x\|=H_1} V(t,x),$$

где $\Lambda = \max\limits_{t\geqslant 0} \lambda(t)$, то подобная картина поведения решений будет наблюдаться и при отсутствии у системы (1) нулевого решения. А именно, найдется величина $\varepsilon > 0$ такая, что при $\sup\limits_{s\in[t_0-h,t_0]} \|\varphi(s)\| < \varepsilon$ решение $x(t,t_0,\varphi)$ системы (1) будет определено на множестве $t \geqslant t_0$, и $\|x(t,t_0,\varphi)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. В этом случае говорят, что система имеет асимптотическое положение покоя. С результатами исследования вопроса существования асимптотического положения покоя у систем с запаздыванием можно ознакомиться в работах [3, 4].

**Литература**

1. Разумихин Б. С. *Об устойчивости систем с запаздыванием* // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. № 4. С. 500–512.

1. Разумихин Б. С. *Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием* // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 6. С. 740–748.

2. Зараник У. П., Купцова С. Е., Степенко Н. А. *Достаточные условия существования асимптотического положения покоя в системах с запаздыванием* // Журн. СВМО. 2018. Т. 20. № 2. С. 175–186.

3. Купцова С. Е., Купцов С. Ю., Степенко Н. А. *О предельном поведении решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 2. С. 173–182.

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БОЛЬШОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРОЦЕССА ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

**Л.И. Лавринович, Л.И. Гордиенко**

В классе $r$-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [0, T/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим задачу оптимального управления стационарной системой

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$Hx(T/\mu) = g, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{T/\mu} (x^T M x + u^T P u)\, dt \to \min, \tag{2}$$

где $\mu$ – малый положительных параметр, $x$ – $n$-вектор, $M$ – неотрицательно-определенная симметрическая матрица, $P$ – положительно-определенная симметрическая матрица, $H \in R^{m\times n}$ – матрица полного ранга.

**Предположение 1.** Динамическая система (1) является управляемой относительно подпространства $Hx = 0$ [1].

Заметим, что это предположение эквивалентно требованию

$$\operatorname{rank}(HB, HAB, \ldots, HA^{m-1}B) = m.$$

**Определение.** Управление $u(t,\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами называется асимптотически субоптимальным в задаче (1), (2), если для любого натурального $N$ имеет место

$$\lim_{\mu\to 0} \frac{J(u(\cdot,\mu)) - J(u^0(\cdot,\mu))}{\mu^N} = 0, \quad \lim_{\mu\to 0} \frac{Hx(T/\mu) - g}{\mu^N} = 0,$$

где $u^0(t,\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, – оптимальное управление в задаче (1), (2), $x(t,\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, – траектория системы (1), порожденная управлением $u(t,\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$.

Введем в рассмотрение матрицу

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & BP^{-1}B^T \\ M & -A^T \end{pmatrix}.$$

**Предположение 2.** Матрица $\bar{A}$ является условно устойчивой [2], т.е. действительные части ее собственных значений отличны от нуля, причем число положительных частей равно числу отрицательных.

**Теорема.** *При выполнении предположений 1 и 2 управление*

$$u(t,\mu) = v_1(t) + v_2((t-T)/\mu), \quad t \in [0, T/\mu], \tag{3}$$

*где* $v_1(t)$, $t \in [0,+\infty]$, $v_2(s)$, $s \in [-\infty, 0]$, – *соответственно решения следующих задач оптимального управления с бесконечной длительностью процесса*

$$\frac{dQ_0 z}{dt} = AQ_0 z + Bv, \quad Q_0 z(0) = x_0, \quad HQ_0 z(+\infty) = 0,$$

$$J_1(v) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} ((Q_0 z)^T) MQ_0 z + v^T P v)\, dt \to \min;$$

$$\frac{d\Pi_0 z}{ds} = A\Pi_0 z + Bv, \quad H\Pi_0 z(0) = g, \quad \Pi_0 z(-\infty) = 0,$$

$$J_2(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} ((\Pi_0 z)^T) M\Pi_0 z + v^T P v)\, ds \to \min;$$

*является асимптотически субоптимальным в задаче (1), (2).*

Задачу с конкретной длительностью процесса $T_0$ можно погрузить в задачу (1), (2) различными способами, выбирая $T$ и $\mu$ так, чтобы $T/\mu = T_0$. Как видно из (4) построенное асимптотическое приближение не зависит от способа погружения. Данная работа обобщает результаты полученные в [3] для задачи оптимизации переходного процесса.

**Литература**


1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Качественная теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1971.
2. Есипова В. А. *Асимптотика решения краевой задачи для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений условно устойчивого типа* // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 11. С. 1957–1966.
3. Лавринович Л. И. *Применение метода возмущений к линейно-квадратичной задаче оптимального управления с большой длительностью процесса* // Вестн. Белорусю гос. ун-та. Сер. 1. 2015. № 2. С. 83–88.


## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**И.И. Матвеева**

Рассматриваются некоторые классы систем уравнений с запаздыванием

$$\frac{d}{dt}y(t) = f\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right).$$

Мы устанавливаем условия экспоненциальной устойчивости решений и получаем оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности. Аналогичные исследования проведены для систем с несколькими запаздываниями. Работа продолжает наши исследования устойчивости решений уравнений с запаздыванием (см., например, [1–7]). При получении результатов используются функционалы Ляпунова–Красовского специального вида.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10086).

**Литература**

1. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах* // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48. № 5. С. 1025–1040.

2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами* // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55. № 5. С. 1059–1077.

3. Demidenko G. V., Matveeva I. I. *Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays* // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. 2015. V. 2015. № 83. P. 1–22.

4. Demidenko G. V., Matveeva I. I. *Exponential stability of solutions to nonlinear time-delay systems of neutral type* // Electron. J. Differ. Equat. 2016. V. 2016, No. 19. P. 1–20.

5. Матвеева И. И. *Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа* // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 344–352.

6. Матвеева И. И. *Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 6. С. 730–740.

7. Матвеева И. И. *О робастной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа* // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21. № 4. С. 86–95.

## О ТОЧНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

**А.В. Метельский, В.Е. Хартовский**

Пусть задана линейная автономная дифференциально-разностная система нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih), \quad y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t-ih), \quad t>0, \tag{1}$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $x$ –вектор решения, $y$ –вектор выходных величин доступных наблюдению (выход), $h = \mathrm{const} > 0$. Начальную непрерывную функцию, имеющую кусочно-непрерывную производную, $x(t) = \tilde{x}(t)$, $t \in [-mh, 0]$, уравнения (1) считаем неизвестной.

Обозначим: $I_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ – единичная матрица, $\lambda_h$ – оператор сдвига, определяемый для заданного $h>0$ правилом $(\lambda_h)^k f(t) = f(t-kh)$ (для произвольной функции $f$); $D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i$, $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i$, $C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i$; $W(p,\lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$ – характеристическая матрица системы (1) (при $\lambda = e^{-ph}$), $p, \lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Пусть $\mathbb{R}^{i\times j}[p,\lambda]$ – множество матриц размера $i\times j$, элементы которых суть полиномы двух переменных $p$, $\lambda$ $(\mathbb{R}^{i\times j}[0,\lambda] = \mathbb{R}^{i\times j}[\lambda])$. Через $\mathfrak{R}^{i\times j}[p,\lambda]$ обозначим множество матриц вида $\overline{C}(p,\lambda) + \sum_{k=0}^{\bar{m}} \int_0^h \widehat{C}_k(s)\lambda^k e^{-ps}\,ds$, где матрица $\overline{C}(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{i\times j}[p,\lambda]$, матрицы $\widehat{C}_k(s)$ представляют собой конечные суммы слагаемых вида

$$e^{\alpha_1 s}(\cos(\alpha_2 s)\widehat{C}^1(s) + \sin(\alpha_2 s)\widehat{C}^2(s)), \quad \widehat{C}^k(s) \in \mathbb{R}^{i\times j}[s], \quad k=1,2;$$

числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2)$ и $\bar{m} \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ могут быть любыми.

Рассмотрим следующее линейное автономное дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{z}(t) = \widetilde{A}(p_D, \lambda_h)z(t) + \widetilde{F}_1(t, y(t), \ldots, y(t - \tilde{n}_1 h)), \tag{2}$$

с выходом

$$v(t) = \widetilde{C}(\lambda_h)z(t) + \widetilde{F}_2(t, y(t), \ldots, y(t - \tilde{n}_2 h)), \quad t > \tilde{t}, \tag{3}$$

где $\widetilde{A}(p,\lambda) \in \mathfrak{R}^{\tilde{n}\times\tilde{n}}[p,\lambda]$, $\widetilde{C}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times\tilde{n}}[\lambda]$; $\widetilde{F}_i = \widetilde{F}_i(t, \xi_1, \ldots, \xi_{\tilde{n}_i})$ $(t \in \mathbb{R},\ \xi_i \in \mathbb{R}^r)$ – известные непрерывные векторные функции, линейные по переменным $\xi_i$; $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, $\tilde{n}_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, 2)$ и $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ $(\tilde{t} > 0)$ – некоторые числа. В операторной записи системы (2), (4) используются следующие обозначения (для полиномиальной матрицы $\widehat{C}(s)$ и функции $f$) : $p_D f(t) = \dot{f}(t)$, $e^{-p_D s} f(t) = f(t - s)$, $\int_0^h \widehat{C}(s)\lambda^i e^{-p_D s}\, ds f(t) = \int_0^h \widehat{C}(s) f(t - ih - s)\, ds$. Начальные данные для системы (4) – любые непрерывные функции.

**Определение.** Систему (2), (4) назовем финитным наблюдателем для системы (1), если:

1) найдется число $t_1 > \tilde{t}$ такое, что разность $\varepsilon(t) = v(t) - x(t)$, $t > \tilde{t}$, удовлетворяет тождеству $\varepsilon(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, каковы бы ни были начальные функции систем (1), и (2), (3);

2) уравнение (2) имеет запаздывающий тип и является асимптотически устойчивым.

**Теорема.** *Для того чтобы для системы (1) существовал финитный наблюдатель (2), (4) необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия*

$$1)\ \mathrm{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}; \quad 2)\ \mathrm{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Далее в докладе представлена процедура синтеза финитного наблюдателя.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ

**М.Е. Павловец, Н.М. Дмитрук**

Управление по прогнозирующей модели (Model Predictive Control, MPC) [1, 2] – современный подход к построению обратных связей для управления нелинейными динамическими системами. Он основан на решении в реальном времени последовательности задач оптимального управления с конечным горизонтом управления, аппроксимирующих исходную задачу управления (стабилизация, слежение и др.) на бесконечном временном полуинтервале. Упомянутые задачи оптимального управления называются прогнозирующими, формулируются в зависимости от целей управления, учитывают текущие измерения состояний объекта управления и ограничения на траектории и управляющие воздействия.

Как правило, алгоритм MPC опирается на численное решение прогнозирующих задач. Существующие методы решения задач оптимального управления (см. например, [2]) могут оказаться неэффективными или слишком медленными для нелинейных систем, систем большой размерности или систем с быстро меняющейся динамикой. В связи с этим в литературе рассматриваются различные подходы, направленные на снижение трудоемкости онлайн вычислений, например, вынесение некоторых из них оффлайн [1, гл. 7].

Цель настоящей работы – построение приближенных обратных связей с помощью методов машинного обучения, что позволяет повысить производительность систем управления по прогнозирующей модели.

Приведем основные положения MPC для решения задачи стабилизации нелинейной дискретной динамической системы

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – управление системы в момент времени $t$, относительно функции $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ предполагается, что она непрерывна, кроме того, $f(0, 0) = 0$.

Одним из основных достоинств методов MPC, обеспечивающих им широкое распространение на практике, является возможность учитывать различные ограничения на состояния и управления. В настоящей работе рассматриваются ограничения вида

$$x(t) \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leqslant \mathbf{1}_p\}, \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^r : Lu \leqslant \mathbf{1}_q\}, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

При условии, что состояния $x(t)$ системы (1) измеряются полно и точно, прогнозирующая задача оптимального управления имеет вид

$$\mathcal{P}(x(t)) : V(x(t)) = \min_{u(\cdot|t)} \sum_{k=0}^{N-1} l(x(k \mid t), u(k \mid t)) + V_f(x(N \mid t)), \tag{3}$$

$$x(k+1 \mid t) = f(x(k \mid t), u(k \mid t)), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad x(0 \mid t) = x(t),$$
$$x(k \mid t) \in X, \quad u(k \mid t) \in U, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad x(N \mid t) \in X_f.$$

Здесь $x(k \mid t)$, $u(k \mid t)$, $k = \overline{0, N-1}$, – траектория и управляющее воздействие прогнозирующей модели, здесь аргумент $t$ подчеркивает момент времени для которого строится прогнозирующая задача; $N$ – конечный горизонт управления; $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \to \mathbb{R}$ – стоимость этапа, $V_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, – терминальная стоимость, $X_f$ – терминальное множество.

Оптимальное управление задачи (4) обозначается $u^0(k \mid t)$, $k = \overline{0, N-1}$.

Алгоритм MPC для стабилизации положения равновесия $x = 0$ системы (1) состоит в следующем: Для каждого $t = 0, 1, \ldots$ необходимо:

1) измерить состояние $x(t) \in X$ системы (1);
2) решить задачу (4) с начальным условием $x(0 \mid t) = x(t)$, получить $u^0(\cdot \mid t)$;
3) подать на вход системы (1) управляющее воздействие $u_{MPC}(x(t)) := u^0(0 \mid t)$.

При выполнении ряда требований к функциям $l$, $V_f$ и множеству $X_f$ замкнутая система

$$x(t+1) = f(x(t), u_{MPC}(x(t))), \quad t = 0, 1, \ldots,$$

асимптотически устойчива с областью притяжения $X_0 = \{x_0 : V(x_0) < +\infty\} \subseteq X$, состоящей из всех точек $x_0 \in X$, для которых задача $\mathcal{P}(x_0)$ имеет решение [1, 2]. В работе [3] приводится простой способ построения квадратичных функций $l$, $V_f$ и эллипсоида $X_f$, удовлетворяющих упомянутым условиям.

Как отмечено выше, шаг 2 приведенного алгоритма может оказаться достаточно трудоемким. В связи с этим в настоящем сообщении предлагается вместо онлайн решения прогнозирующей задачи (4) численными методами оптимального управления использовать до начала процесса управления ряд методов машинного обучения, которые на основе обучающей выборки $(x, u_{MPC}(x)) \in X \times U$ будут строить приближенные значения $\bar{u}_{MPC}(x(t))$ обратной связи $u_{MPC}(x)$, $x \in X$, для текущих состояний $x(t)$.

В настоящей работе применяются метод опорных векторов (Support Vector Machine, SVM) и нейронные сети. Метод опорных векторов с радиальной базисной функции Гаусса [4] используется, во-первых, для выделения и аппроксимации области притяжения $X_0$ системы (1). Это позволяет эффективно обрабатывать текущие состояния динамической системы и не допускать выход за пределы области притяжения при управлении с помощью приближенных обратных связей. Во-вторых, метод опорных векторов применяется для многоклассовой классификации с целью выделения областей насыщения управления. Наконец, в областях, в которых обратная связь $u_{MPC}$ принимает промежуточные значения, она аппроксимируется с использованием нейронной сети.

Обучение нейронной сети и классификация на основе SVM дает приближенное управления типа обратной связи $\bar{u}_{MPC}(x)$, $x \in X_0$. Система, замкнутая обратной связью $\bar{u}_{MPC}(x)$, $x \in X_0$, имеет вид

$$x(t+1) = f(x(t), \bar{u}_{MPC}(x(t))), \quad t = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

В работе с использованием результатов [5] исследуются условия, при которых, несмотря на ошибки аппроксимации, гарантируется выполнение ограничений (2) и асимптотическая устойчивость замкнутой системы (4). Кроме того, проводится сравнение приближенных законов управления, обученных на равномерной сетке, на сетке, полученной на основе равномерно распределенных последовательностей, и на случайной сетке с увеличением объема обучающей выборки в окрестности положения равновесия.

Результаты построения приближенных обратных связей $\bar{u}_{MPC}(x)$, $x \in X_0$, с помощью описанного подхода иллюстрируются численными экспериментами на примере нелинейной системы из работы [3].

**Литература**


1. Rawlings J. B., Mayne D. Q. *Model Predictive Control: Theory and Design*. Madison: Nob Hill Publishing, 2009.
2. Grune L., Pannek J. *Nonlinear model predictive control*. London: Springer-Verlag, 2017.
3. Chen H., Allgower F. *A Quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability* // Automatica. 1998. V. 34. № 10. P. 1205–1217.
4. Chakrabarty A. et al. Support vector machine informed explicit nonlinear model predictive control using low-discrepancy sequences // IEEE Trans. Automat. Contr. 2017. V. 62. № 1. P. 135–148.
5. Pin G. et al. Approximate model predictive control laws for constrained nonlinear discrete-time systems: analysis and offline design // International Journal of Control. 2013. V. 86. № 5. P. 804–820.


## О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ И КОНСТРУКТИВНЫХ МЕТОДАХ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПОТОКОВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Л.А. Пилипчук**

Работа посвящена исследованию математических моделей и методов корректировки параметров целевой функции задачи дробно-линейного потокового программирования

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \Bigg(\sum_{(i,j)\in E} p_{ij}x_{ij} + \beta\Bigg)\Bigg(\sum_{(i,j)\in E} q_{ij}x_{ij} + \gamma\Bigg)^{-1} \to \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+(E)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(E)} x_{ji} = b_i, \quad i\in V,$$
$$\sum_{(i,j)\in E} \lambda_{ij}^p x_{ij} = \alpha_p, \quad p=\overline{1,l}, \quad x_{ij}\geqslant 0, \quad (i,j)\in E, \tag{1}$$

с параметрами $p_{ij}$, $q_{ij}$, $b_i$, $\lambda_{ij}^p$, $\alpha_p$, $\beta$, $\gamma$, где $V$ – множество узлов, $E$ – множество дуг связного орграфа $S=(V,E)$. Множество дуг $E$ определено на прямом произведении $V\times V$, $|V|<\infty$, $I_i^+(E)=\{j\in V:(i,j)\in E\}$, $I_i^-(E)=\{j\in\in V:(i,j)\in E\}$, $x=(x_{ij},(i,j)\in E)$ – допустимое решение задачи (1). Знаменатель $q(x)$ дробно-линейной целевой функции $h(x)$ задачи (1) не меняет знак на множестве $X$ допустимых решений. Параметры $p_{ij}$, $(i,j)\in E$, дробно-линейной целевой функции $h(x)$ являются неточными данными. Известно некоторое допустимое решение $x^0=(x_{ij}^0,(i,j)\in E)$ задачи (1), $x^0\in X$, которое нужно превратить в оптимальное решение, если это возможно, путем минимального изменения коэффициентов $p_{ij},(i,j)\in E$. На основе теории декомпозиции [1] разработан конструктивный метод решения двойственной задачи к обратной задаче следующего вида

$$u(\zeta,\eta)=\sum_{(ij)\in E}(\zeta_{ij}+\eta_{ij})\to\min,$$

$$y_i-y_j+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^p r_p+q_{ij}z\leqslant p_{ij}+\zeta_{ij}-\eta_{ij}, \quad \zeta_{ij}\geqslant 0, \quad \eta_{ij}\geqslant 0, \quad (i,j)\in B_1,$$

$$y_i-y_j+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^p r_p+q_{ij}z= p_{ij}+\zeta_{ij}-\eta_{ij},$$

$$\zeta_{ij}\geqslant 0, \quad \eta_{ij}\geqslant 0, \quad (i,j)\in B_2, \quad -\sum_{i\in V} b_i y_i-\sum_{p=1}^{l}\alpha_p r_p+\gamma z=\beta, \tag{2}$$

где $B_1=\{(i,j)\in E: x_{ij}^0=0\}$, $B_2=\{(i,j)\in E: x_{ij}^0>0\}$, $\lambda=(y,r,z)$ – допустимое решение двойственной задачи к задаче (1), $y=(y_i,i\in V)$, $r=(r_p,p=\overline{1,l})$, $z\in\in\mathbb{R}^1$, $\zeta_{ij}$ (увеличение) и $\eta_{ij}$ (уменьшение) параметра $p_{ij}$ дробно-линейной целевой функции $h(x)$, $\zeta_{ij}\eta_{ij}=0$, $(i,j)\in E$.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф18СРБГ-006).

**Литература**

1. Пилипчук Л. А. *К методам построения оптимальных параметров целевой функции в задачах дробно-линейного потокового программирования* // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2017. № 3 (102). С. 148–152.

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ХИЩНИК–ЖЕРТВА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**М.А. Скворцова**

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв, обитающих на одной территории [1]:

$$\dot{x}(t)=rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)-px(t)y(t), \quad \dot{y}(t)=bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau)-dy(t),$$
$$\dot{z}(t)=bpx(t)y(t)-bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau)-cz(t). \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ – численность популяции жертв, $y(t)$ – численность популяции взрослых хищников, $z(t)$ – численность популяции молодых хищников. Предполагается, что только взрослые хищники могут нападать на жертв и воспроизводить потомство. Параметр запаздывания $\tau$ отвечает за время взросления хищников, $r$ – коэффициент прироста популяции жертв, $K$ – максимально допустимая численность популяции жертв, $p$ – коэффициент взаимодействия жертв и взрослых хищников, $b$ – коэффициент рождаемости хищников, $c$ – коэффициент смертности молодых хищников, $d$ – коэффициент смертности взрослых хищников. Все параметры системы предполагаются положительными.

В работе изучается асимптотическая устойчивость положений равновесия системы (1), соответствующих трем случаям: полному вымиранию популяций, выживанию только популяции жертв, совместному сосуществованию всех популяций. Получены условия на коэффициенты системы, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми, либо неустойчивыми. Используя модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского [2], установлены оценки решений, характеризующие скорость сходимости к асимптотически устойчивым положениям равновесия, и найдены оценки на области притяжения [3]. Аналогичные результаты получены для модели хищник-жертва с двумя запаздываниями, в которой параметры запаздывания отвечают за время взросления хищников и жертв соответственно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-31-00408).

**Литература**


1. Gourley S. A., Kuang Y. *A stage structured predator-prey model and its dependence on maturation delay and death rate* // J. of Math. Biology. 2004. V. 49. № 2. P. 188–200.
2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28.
3. Скворцова М. А. *Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием* // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2018. Т. 25. С. 109–125.


# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ НАБЛЮДАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

**В.Е. Хартовский**

Пусть задана линейная автономная дифференциально-разностная система нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih), \quad y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t-ih), \quad t > 0, \qquad (1)$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $x$ –вектор решения, $y$ –вектор выходных величин, доступных наблюдению (выход), $h = \mathrm{const} > 0$. Начальную функцию $x(t) = \tilde{x}(t)$, $t \in [-mh, 0]$, системы (1) считаем неизвестной.

**Задача.** Требуется на основании данных о наблюдаемом выходе $y$ построить оценку $z$ неизвестного вектора решения $x$ системы (1) так, чтобы $\|x(t) - z(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$, и, кроме того, оценка $z$ не должна зависеть от производных выхода $y^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$

Один и тот же выход $y(t)$, $t > 0$, может порождаться различными начальными функциями $\tilde{x}$. Поэтому одному и тому же выходу $y(t)$, $t > 0$, может соответствовать множество решений $x(t)$, $t > 0$, уравнения (1). Каждое такое решение $x(t)$, $t > 0$, будем называть совместимым с выходом $y(t)$, $t > 0$.

**Определение.** Систему (1), (2) будем называть асимптотически наблюдаемой, если для любых двух решений $\hat{x}$ и $\check{x}$ уравнения (1), совместимых с выходами $\hat{y}$ и $\check{y}$ соответственно, выполняется условие: если $\hat{y}(t) \equiv \check{y}(t)$, $t > 0$, то $\|\hat{x}(t) - \check{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Введем следующие обозначения: $I_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ – единичная матрица, $D(\lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda^i D_i$, $A(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i$, $C(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i C_i$; $W(p,\lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$ – характеристическая матрица системы (1) (при $\lambda = e^{-ph}$), $p, \lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел. Определим множество $P_C = \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{rank}\operatorname{col}[W(p, e^{-ph}), C(e^{-ph})] < n\}$. Считаем, что выполняется следующее условие:

$$\text{множество } P_C \text{ состоит из конечного числа элементов.} \tag{2}$$

**Теорема.** *Пусть выполняется условие (2). Для того чтобы система (1) была асимптотически наблюдаема необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Re} p < 0 \quad \forall p \in P_C. \tag{3}$$

Таким образом, для построения асимптотической оценки решения системы (1) в случае выполнения условия (2), условие (4) является необходимым. Однако это не единственное ограничение, накладываемое на параметры системы сформулированной задачей. В работах [1, 2] показано, что для того чтобы восстановить текущее состояние $x(\tau)$, $\tau \in [t - mh, t]$, системы нейтрального типа при достаточно большом $t > 0$, используя только известный выход $y(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, но не используя производные $y^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, необходимо условие

$$\operatorname{rank}\operatorname{col}[I_n - D(\lambda), C(\lambda)] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

которое для системы запаздывающего типа выполняется автоматически.

В докладе представлена процедура синтеза асимптотического наблюдателя для асимптотически наблюдаемых систем (1) при условии (4).

**Литература**

1. Минюк С. А., Метельский А. В. *Критерии конструктивной идентифицируемости и полной управляемости линейных стационарных систем нейтрального типа* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 5. С. 15–23.

2. Хартовский В. Е., Павловская А. Т. *Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа* // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 59–80.

## О РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**Т.К. Ыскак**

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)\,ds, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $\tau > 0$ – запаздывание, $D$ – постоянная квадратная матрица, $A(t)$ – квадратная матрица с непрерывными $T$-периодическими элементами, $B(t,\xi)$ – квадратная матрица с непрерывными элементами, $T$-периодическими по первой переменной, т.е. $B(t,\xi) \equiv B(t+T,\xi)$. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}(y(t)+(D+D_1)y(t-\tau)) = (A(t)+A_1(t))y(t)+\int\limits_{t-\tau}^{t}(B(t,t-s)+B_1(t,t-s))y(s)\,ds. \quad (2)$$

Цель работы заключается в исследовании устойчивости нулевого решения системы (1), нахождении условий на матрицы возмущений $D_1$, $A_1(t)$ и $B_1(t,\xi)$, при которых сохраняется устойчивость возмущенной системы (2), а также в получении оценок решений систем (1) и (2), которые характеризует скорость убывания при $t \to \to \infty$.

При исследовании устойчивости нулевого решения использована модификация функционала Ляпунова–Красовского, введенная в [1, 2]:

$$V(t,y) = \langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)), (y(t)+Dy(t-\tau))\rangle$$

$$+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t}\langle M(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds.$$

В работах [1, 2] исследован случай дифференциальных уравнений нейтрального типа с сосредоточенным запаздыванием. В [3] рассмотрена система (1) в случае $D=0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-31-00408).

**Литература**

1. Demidenko G. V. *Stability of solutions to linear differential equations of neutral type* // J. Anal. Appl. 2009. V. 7. № 3. P. 119–130.

2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами* // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55. № 5. С. 1059–1077.

3. Yskak T. *Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay* // Funct. Differ. Equat. 2018. V. 25. № 1–2. P. 97–108.

# ON SUFFICIENT ROBUST CONDITIONS OF FUNCTION SPACE CONTROLLABILITY FOR LINEAR SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS WITH MULTIPLE DELAYS ON THE BASIS OF DECOUPLING TRANSFORMATION

**O.B. Tsekhan**

Consider the singularly perturbed linear time-invariant system with multiple commensurate delays in the slow state variables (SPLTISD) in the operator form:

$$M(\mu)pz(t)=\mathsf{A}(e^{-ph})z(t)+Bu(t), \quad z=\mathrm{col}\,(x,y), \quad x\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad y\in\mathbb{R}^{n_2}, \quad u\in\mathbb{R}^{r}, \quad t\geqslant 0, \quad (1)$$

$$z(0)=z_0, \quad z_0\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}, \quad x(\theta)=\varphi(\theta), \quad \theta\in[-lh,0). \quad (2)$$

Here $0 < h$ is a given constant, $p \equiv d/dt$ is a differential operator; $e^{-ph}$ is a delay operator: $e^{-ph}z(t) \equiv z(t-h)$; $\mu$ is a small parameter, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $M(\mu) = \operatorname{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}$; $x$ is a slow variable, $y$ is a fast variable, $u$ is a control, $u(t) \in U$, $U$ is a set of piecewise continuous for $t \geqslant 0$ vector function;

$$\mathsf{A}(e^{-ph}) = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_1(e^{-ph}) & A_2 \\ \mathsf{A}_3(e^{-ph}) & A_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

are matrix-valued operators and matrix, respectively, $\mathsf{A}_\mathsf{i}(e^{-ph}) \equiv \sum_{j=0}^{l} A_{ij} e^{-jph}$, $i = 1, 3$, $A_{ij}$, $i = 1, 3$, $j = \overline{0, l}$, $A_k$, $k = 2, 4$, $B_j$, $j = 1, 2$, are constant matrices of appropriate sizes; $\phi(\theta)$, $\theta \in [-lh, 0)$, is a piecewise continuous $n_1$-vector-function. Assume that $\det A_4 \neq 0$.

**Definition 1.** For a given $\mu \in (0, \mu^0]$ the SPLTISD (1) is said to be complete controllable if for any fixed initial conditions (2) there are the time moment $t_1 < +\infty$ and piecewise continuous control $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, such that for this control and corresponding solution $z(t, \mu)$, $t \geqslant 0$, of system (1) with the initial conditions (2) the following identities are valid: $z(t, \mu) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$.

Let $\mathbb{R}^n$ be $n$-dimensional Euclidean space, $L_2^n[t_1 - h, t_1]$ – Hilbert space of integrable $n-$ vector-functions on a segment $[t_1 - h, t_1]$, $\mathcal{M}_2^n \equiv L_2^n[t_1 - h, t_1] \times \mathbb{R}^n$.

**Definition 2.** For a given $\mu \in (0, \mu^0]$ the SPLTISD (1), (2) is said to be controllable in the space $\mathcal{M}_2^{n_1+n_2}$, if the subspace

$$Z(\mu) = \{z(t, \mu) : t \in [t_1 - lh, t_1), \quad z(t_1, \mu), u(t) \in U\}$$

is dense in $\mathcal{M}_2^{n_1+n_2}$.

**Definition 3.** If there exists a number $\mu^* \in (0, \mu^0]$ that SPLTISD (1), (2) is controllable for any $\mu \in (0, \mu^*]$, we say that controllability is robust with respect to $\mu \in (0, \mu^*]$.

Define the matrix-valued operator and matrix:

$$\mathsf{A}_\mathsf{s}(e^{-ph}) \equiv \mathsf{A}_1(e^{-ph}) - A_2 A_4^{-1} \mathsf{A}_3(e^{-ph}), \quad B_s \equiv B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2,$$

and the sets of complex numbers:

$$\sigma_s \equiv \{\lambda \in C : \det[\lambda E_{n_1} - \mathsf{A}_\mathsf{s}(e^{-\lambda h})] = 0\}, \quad \sigma_f = \{\lambda \in C : \det[\lambda E_{n_2} - A_4] = 0\}.$$

**Theorem 1.** *Let*

*1)* $\operatorname{rank}[B_s, \mathsf{A}_\mathsf{s}(z)B_s, \ldots, \mathsf{A}_\mathsf{s}{}^{n_1-1}(z)B_s] = n_1$ *for some* $z \in C$;

*2)* $\operatorname{rank}[\lambda E_{n_1} - \mathsf{A}_\mathsf{s}(e^{-\lambda h}), B_s] = n_1$ $\forall \lambda \in C$: $e^{-\lambda h} = z$, $\operatorname{rank}[B_s, \ldots, \mathsf{A}_\mathsf{s}{}^{n_1-1}(z)B_s] < n_1$;

*3)* $\operatorname{rank}[B_2, \mathsf{A}_4 B_2, \ldots, \mathsf{A}_4{}^{n_2-1}B_2] = n_2$,

*then the SPLTISD (1), (2) is complete controllable for all sufficient small* $\mu \in (0, \mu^0]$.

**Sketch of the proof.** Similar to [1] by using a non-degenerate decoupling transformation, we transform the original SPLTISD (1) into an equivalent system with separated motions.

For a fixed value of the parameter $\mu \in (0, \mu^0]$, the conditions of complete controllability from [2] are applicable to the resulting decoupled system. Then taking into account the preservation of the fullness of the rank of matrices with small additive perturbations, we have the sufficient conditions for the complete controllability of the SPLTISD (1) far all sufficient small $\mu \in (0, \mu^0]$:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \lambda E_{n_1} - \mathsf{A}_\mathsf{s}(e^{-\lambda h}) & 0_{n_1 \times n_2} & B_s \\ 0_{n_2 \times n_1} & \mu \lambda E_{n_2} - A_4 & B_2 \end{pmatrix} = n_1 + n_2 \quad \forall \lambda \in C. \tag{3}$$

Taking into account the properties of the spectrum of the original SPLTISD (1) for a small values of $\mu > 0$ [1], we see that the conditions (4) follows from the conditions

$$\operatorname{rank}\,[\lambda E_{n_1} - \mathsf{A}_{\mathsf{s}}(e^{-\lambda h}), B_s] = n_1, \quad \lambda \in \sigma_s, \tag{4}$$

$$\operatorname{rank}\,[\lambda E_{n_2} - A_4, B_2] = n_2, \quad \lambda \in \sigma_f. \tag{5}$$

The relationship of the conditions (4), (5) and the conditions 1)–3) of the Theorem 1 prove the validity of the Theorem 1.

**Theorem 2.** *Let the conditions of the Theorem 1 are fulfilled and*

$$\operatorname{rank}\,\{A_{1l} - A_2 A_4^{-1} A_{3l}, B_s\} = n_1.$$

*Then the SPLTISD (1), (2) is controllable in the space* $\mathcal{M}_2^{n_1+n_2}$ *for all sufficient small* $\mu \in (0, \mu^0]$.

Theorem 2 is proved similarly to the proof of the Theorem 1 on the basis of conditions of controllability in the space $\mathcal{M}_2^{n_1+n_2}$ from [3].

Note, that the sufficient conditions of the Theorems 1 and 2 do not depend on a singularity parameter $\mu$ and are valid for all its sufficiently small values, i.e. robustly with respect to this parameter. The conditions have a parametric, rank form and are expressed in terms of the controllability conditions of two systems of a lower dimensions the the original one.

**Acknowledgement.** The work is partially supported by the Education Ministry of the Republic of Belarus, the state program of scientific research Convergence–2020, code of task 1.3.02.

**References**

1. Tsekhan O. B. *Decoupling transformation for linear stationary singularly perturbed system with delay and its applications to analysis and control of spectrum* // Bull. of the Yanka Kupala State University of Grodno. Ser. 2. Math. 2017. V. 7. № 1. P. 50–61 (Russian).

2. Marchenko V. M. *To controllability of linear systems with aftereffect* // Dokl. AN SSSR. 1977. V. 236. № 5. P. 1083–1086 (Russian).

3. Minyuk S. A., Lyakhovets S. N. *On a problem of controllability for systems with multiple delays* // Bull. of the Academy os Sciences of Byelorussian SSR. Ser. Fiz.-math. Sci. 1980. № 2. P. 12–17 (Russian).

# АВТОРЫ ДОКЛАДОВ

*Акимов В.А.* vakim50@mail.ru. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 3.

*Алдибеков Т.М.* tamash59@mail.ru. Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан. С. 23.

*Альсевич В.В.* alsevichvv@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 102.

*Амелькин В.В.* vamlkn@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 4, 63.

*Андреева Т.К.* tatsyana.andreeva@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 5.

*Асташова И.В.* ast.diffiety@gmail.com. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия.. С. 24, 25.

*Астровский А.И.* aastrov@tut.by. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь. С. 104.

*Барабанов Е.А.* bar@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 28.

*Безяев В.И.* vbezyaev@mail.ru. Российский университет дружбы народов, Москва, Россия. С. 105.

*Бекряева Е.Б.* evgenia.bekriaeva@gmail.com. Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь. С. 30.

*Белокурский М.С.* drakonsm@ya.ru. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 64.

*Березкина Н.С.* berezkanata@mail.ru. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 5.

*Бондарев А.Н.* alex-bondarev@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 65.

*Бондарь А. А.* anna.alex.bondar@gmail.com. Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия. С. 31.

*Боревич Е.З.* danitschi@gmail.com. Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, Санкт-Петербург, Россия. С. 67.

*Борковская И.М.* borkovskaia@gmail.com. Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь. С. 106.

*Борухов В.Т.* borukhov@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 68.

*Быков В.В.* vvbykov@gmail.com. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 28, 32.

*Василевич М.Н.* vasilevich.m@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 4.

*Ветохин А.Н.* anveto27@yandex.ru. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. С. 36.

*Гордиенко Л.И.* gorlev98@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 124.

*Горячкин В.В.* GorVV@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 109.

*Гребенцов Ю.М.* y7412895@yandex.ru. Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Беларусь. С. 70.

*Гринь А.А.* grin@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 71, 79.

*Громак В.И.* vgromak@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 7.

*Грончарова М.Н.* m.gonchar@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 107.

*Деменчук А.К.* demenchuk@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 38.

*Демиденко Г.В.* demidenk@math.nsc.ru. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия. С. 39.

*Денисковец А.А.* aleksei_deniskov@mail.ru. Гродненский государственный аграрный университет, Гродно, Беларусь. С. 73.

*Денисов В.С.* primakovasv@tut.by. Витебский государственный технологический университет, Витебск, Беларусь. С. 75.

*Детченя Л.В.* detchenya_lv@mail.ru. Гродненский государственный университет, Гродно, Беларусь. С. 76.

*Дмитрук Н.М.* dmitrukn@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 111, 120, 127.

*Дымков М.П.* dymkov_m@bseu.by. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь. С. 113.

*Зайцев В.А.* verba@udm.ru. Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия. С. 114.

*Заранин У.П.* zaranik_u@list.ru. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. С. 122.

*Изобов Н.А.* izobov@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 40.

*Ильин А.В.* iline@cs.msu.su. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия. С. 40.

*Калинин А.И.* kalininai@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 116.

*Калитин Б.С.*. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 117.

*Кашпар А.И.* alex.kashpar@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 77.

*Кветко О.М* tx1@tut.by. Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь. С. 68.

*Ким И.Г.* kimingeral@gmail.com. Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия. С. 114.

*Козлов А.А.* kozlovaa@tut.by. Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь. С. 118.

*Костюкевич Д.А.* kostukDA@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120.

*Крахотко В.В.* Krakhotko@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 109.

*Криваль О.Ф.* Минск, Беларусь. С. 42.

*Кузьмич А.В.* andrei-ivn@mail.ru. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 79.

*Кулеш Е.Е.* kulesh@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 9.

*Купцова С.Е.* sekuptsova@yandex.ru. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. С. 122.

*Лавринович Л.И.* lavrinovich@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 124.

*Лаптинский В.Н.* lavani@tut.by. Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь. С. 81.

*Ливинская В.А.* vita_liv@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 82.

*Липницкий А.В.* ya.andrei173@yandex.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 44.

*Макаров Е.К.* jcm@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 47.

*Маковецкая О.В.* olya.makzi@gmail.com. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 83.

*Маковецкая Т.В.* shcheglovskaya@tut.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 76.

*Маковецкий И.И.* imi.makzi@gmail.com. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 85.

*Малышева О.Н.* malolgsud@gmail.com. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 86.

*Мартынов И.П.* i.martynov@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 18.

*Матвеева И.И.* matveeva@math.nsc.ru. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия. С. 125.

*Метельский А.В.* ametelski@bntu.by. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 126.

*Мироненко В.В.* vladimir.v.mironenko@gmail.com. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 88.

*Мироненко В.И.* vmironenko@tut.by. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 89.

*Мусафиров Э.В.* musafirov@bk.ru. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 90.

*Немец В.С.* nemets@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 10.

*Павловец М.Е.* maryia.paulavets@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 127.

*Пецевич В.М.* pecevich@mail.ru. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 11.

*Пилипчук Л.А.* pilipchuk@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 129.

*Подолян С.В.* y7412895@yandex.ru. Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Беларусь. С. 91.

*Попова С.Н.* udsu.popova.sn@gmail.com. Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия. С. 49.

*Проневич А.Ф.* pranevich@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 12.

*Пронько В.А.* v.a.pronko@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 5, 18.

*Пыжкова О.Н.* olga.pyzhcova@gmail.com. Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь. С. 106.

*Равчеев А.В.* rav4eev@yandex.ru. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 50.

*Размыслович Г.П.* razmysl@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 109.

*Ратушева Ю.Л.* yuliainvisible@tut.by. Белорусский государственный экономический университет. С. 76.

*Роголев Д.В.* d-rogolev@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 92.

*Рудевич С.В.* serhiorsv@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 71.

*Руденок А.Е.* roudenok@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 63, 94.

*Садовский А.П.* sadovskii@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 76.

*Селивёрстова А.О.* seliverstovaania13@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 11.

*Сергеев И.Н.* igniserg@gmail.com. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 51, 52.

*Сидоренко И.Н.* sidorenkoin@tut.by. Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев, Беларусь. С. 96.

*Скворцова М.А.* sm-18-nsu@yandex.ru. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия. С. 130.

*Турковец Е.С.* tur-e-s@yandex.ru. Московский государственный университет им. Ломоносова, Москва, Россия. С. 57.

*Туфик И.* touficissa0@gmail.com. Бейрут, Ливан. С. 118.

*Тыщенко В.Ю.* valentinet@mail.ru. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 73, 97.

*Фоминых Е.И.* fletl@list.ru. Гомельский торгово-экономический колледж, Гомель, Беларусь. С. 42.

*Хартовский В.Е.* hartovskij@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 126.

*Хартовский В.Е.* hartovskij@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 131.

*Хвощинская Л.А.* ludmila.ark@gmail.com. Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь. С. 14.

*Цегельник В.В.* tsegvv54@gmail.com. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 15.

*Чергинец Д.Н.* cherginetsdn@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 98.

*Чжан Б.* binbinzhanghkj@163.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 16, 18.

*Чэнь Я.* 578211973@g.g.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 18.

*Шамолин М.В.* shamolin@rambler.ru. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 100.

*Широканова Н.И.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 109.

*Ыскак Т.К.* istima92@mail.ru. Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия. С. 132.

*Babiarz A.* artur.babiarz@polsl.pl. Silesian University of Technology, Gliwice, Poland. С. 59, 60.

*Czornik A.* adam.czornik@polsl.pl. Silesian University of Technology, Gliwice, Poland. С. 59, 60.

*Dubatovskaya M.V.* dubatovska@bsu.by. Belarusian State University. Minsk, Belarus. С. 20.

*Kiguradze I.* ivane.kiguradze@tsu.ge. A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia. С. 61.

*Niezabitowski M.* michal.niezabitowski@polsl.pl. Silesian University of Technology, Gliwice, Poland. С. 59, 60.

*Primachuk L.P.* Belarusian State University, Minsk, Belarus. С. 20.

*Rogosin S.V.* rogosin@bsu.by. Belarusian State University, Minsk, Belarus. С. 20.

*Tsekhan O.B.* tsekhan@grsu.by. Grodno State University named after of Ya. Kupala, Grodno, Belarus. С. 133.

# СОДЕРЖАНИЕ

## Аналитическая теория дифференциальных уравнений



## Асимптотическая теория дифференциальных уравнений

## Качественная теория дифференциальных уравнений

### Теория устойчивости и управления движением

Научное издание

**XIX Международная научная конференция**
**по дифференциальным уравнениям**

**(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2019)**

**Материалы конференции**

**Часть 1**

Редакторы *А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров*
Компьютерная верстка *С. Г. Красовский, Г. И. Кузнецова*

Подписано в печать 23.04.2019 г.
Формат $60 \times 84\,{}^1/_8$. Усл. печ. л. 16,74. Уч.-изд. л. 15,06. Тираж 95 экз. Зак. 3.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
200072, Минск, ул. Сурганова, 11.