

ОДНОЭЛЕМЕНТНЫЕ ПОЛУРЕШЕТКИ РОДЖЕРСА СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

Ж. Т. Таласбаева

В последнее десятилетие многие специалисты теории вычислимости начали заниматься интенсивными исследованиями вычислимых нумераций в иерархии Ершова. Это связано с тем, что в конце прошлого десятилетия С.С. Гончаров и А. Сорби предложили новый общий подход к понятию вычислимой нумерации. Возможно это также связано с тем, что у вычислимости в иерархии Ершова довольно своеобразная специфика. В иерархии Ершова в ходе вычислений по вычислимой нумерации семейства, любое число может перечислиться в множество и, позже, покинуть множество, а затем опять перечислиться и т.д. Количество 'входов-выходов' элемента ограничивается уровнем иерархии, в котором находится семейство. А в случае классической вычислимости элемент не может 'входить' и 'выходить'. Поскольку, вычислимую нумерацию семейства вычислимо перечислимых множеств можно рассматривать как процедуру равномерного перечисления для множеств этого семейства и в этом случае каждый элемент, перечисленный в какое-нибудь множество, никогда не покинет это множество. Таким образом, множество при таком вычислении со временем может только расти. Из-за специфики вычислимости в иерархии Ершова не всегда справедливы аналоги утверждений, известных для семейств вычислимо перечислимых множеств и семейств множеств арифметической иерархии.

В работе С.С. Гончарова и американских логиков С. Лемппа и Р. Соломона были начаты исследования по существованию фридберговских вычислимых нумераций относительно классов иерархии Ершова, в которой были найдены некоторые достаточные условия для существования таких нумераций. С.А. Бадаевым и Ж. Т. Таласбаевой были получены ряд результатов, связанных с мощностью полурешеток Роджерса, минимальными и главными нумерациями семейств множеств иерархии Ершова. С. Лемппом и С.А. Бадаевым была доказана теорема о декомпозиции для второго уровня иерархии Ершова.

Определение Σ_n^{-1} -классов множеств иерархии Ершова можно найти в [1]. Основные понятия теории нумераций можно найти в [2]. С.А. Бадаев и С.С. Гончаров в [3] ввели понятие вычислимой нумерации семейств множеств иерархии Ершова следующим образом.

Определение. Нумерация $\nu : \omega \rightarrow S$, $S \subseteq \Sigma_n^{-1}$ называется Σ_n^{-1} -вычислимой, если множество $\{(x, m) \mid x \in \nu m\} \in \Sigma_n^{-1}$.

Известно, что исследование мощности полурешеток Роджерса, является важной частью исследований теорий нумераций. В [4] было доказано утверждение о существовании бесконечного семейства из второго

уровня иерархии Ершова с тривиальной полурешеткой Роджерса. Ниже мы приводим обобщенный вариант этого утверждения.

Теорема. Для любого $n \in \omega \cup \{\omega\}$, $n \neq 0$ и для любого $p \in \omega$, существует n -элементное Σ_p^{-1} -вычислимое семейство с одноэлементной полурешеткой Роджерса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. Л. Ершов *Об одной иерархии множеств I* Алгебра и логика. 1968. Т. 7, №1. С.65-71.
- [2] Ю. Л. Ершов *Теория нумераций* М. Наука, 1977. 416 с.
- [3] S. A. Badaev, S. S. Goncharov *Theory of numberings. Open problems* In.: P.A.Cholak (ed), Computability theory and applications. Current trends and open problems // Contemporary mathematics. 2000. V.257. P.23-38
- [4] S. A. Badaev, Zh. T. Talasbaeva *Computable numberings in the hierarchy of Ershov* Mathematical Logic in Asia. Proceedings of the Asian Logic 9th Conference. Novosibirsk. 2006. P. 17-30.

КАЗНУ им. аль-Фараби, Алматы
E-mail address: Zhuldyz.Talasbaeva@kaznu.kz