АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ANALYTICAL METHODS OF ANALYSIS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

Тезисы докладов международной конференции,
посвященной 100-летию академика Ф.Д. Гахова (1906-1980)
13 – 19 сентября 2006 года, Минск, Беларусь

Abstracts of reports of International conference
Devoted to Centenary of Academician F.D. Gakhov (1906-1980)
13 – 19th of September 2006, Minsk, Belarus

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. С. С[illegible]ескова (Алматы, Казахстан)

Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $n \geq 2$, с границей S. Пусть $\gamma(t)$ — замкнутая поверхность, которая содержится в области Ω и делит ее на две подобласти $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ так, что $\partial\Omega_1(t) = S \cup \gamma(t)$, $\partial\Omega_2(t) = \gamma(t)$, причем $\gamma(0) := \Gamma$, $\Omega_m(0) := \Omega_m$.

Обозначим $\Omega_T^{(m)} = \{(x,t) | \, x \in \Omega_m(t), \ 0 < t < T\}$, $m = 1, 2$, $S_T = S \times [0, T]$, $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$.

Требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и свободную границу $\gamma(t)$ по условиям

$$\partial_t u_m - \Delta u_m = 0 \ \text{ в } \ \Omega_T^{(m)}, \quad m = 1,2, \quad u_m|_{t=0} = u_{0m}(x) \ \text{ в } \ \Omega_m, \quad m = 1,2, \quad \gamma(t)|_{t=0} = \Gamma, \quad u_1|_{S_T} = g(x,t),$$
$$u_1 = u_2 = \alpha k - \beta V_\nu, \quad x \in \gamma(t), \quad 0 < t < T, \quad \lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial \nu} = -\varkappa V_\nu \quad x \in \gamma(t), \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

где α, β, $\varkappa$ — положительные постоянные, k — средняя кривизна поверхности $\gamma(t)$, ν — нормаль к $\gamma(t)$, направленная внутрь $\Omega_2(t)$, V_ν — скорость перемещения $\gamma(t)$ в направлении нормали ν.

При достаточно малых t свободная поверхность $\gamma(t)$ может быть параметризована в виде [1, 2]:

$$x = \xi + \rho(\xi, t)\nu_0(\xi), \quad \xi \in \Gamma,$$

где $\rho(\xi,t)|_{t=0} = 0$, $\nu_0(\xi)$ — нормаль к Γ, направленная внутрь Ω_2.

Задача (1) исследована в пространстве Соболева-Слободецкого $W_p^{l,l/2}(\Omega_T)$.

Теорема. Пусть $p > n + 2$; $S \in W_p^{2-2/p}$, $\Gamma \in W_p^{4-2/p}$. Тогда для любых функций $u_{0m} \in W_p^{2-2/p}(\Omega_m)$, $m = 1, 2$, $g \in W_p^{2-1/p, 1-1/2p}(S_T)$ найдется такое $0 < T_0 < T$, что задача (1) имеет единственное решение $u_m \in W_p^{2,1}(\Omega_{T_0}^{(m)})$, $m = 1, 2$, $\rho \in W_p^{4-1/p, 2-1/2p}(\Gamma_{T_0})$, которое подчиняется оценке

$$\sum_{m=1}^{2} \|u_m\|_{p,\Omega_t^{(m)}}^{(2)} + |\rho|_{p,\Gamma_t}^{(4-1/p)} \leq C\left(\sum_{m=1}^{2} |u_{0m}|_{W_p^{2-2/p}(\Omega_m)} + |g|_{p,S_t}^{(2-1/p)}\right), \quad t \leq T_0.$$

Литература

1. *Мейрманов А.М.* О классическом решении многомерной задачи Стефана для квазилинейных параболических уравнений // *Мат. сб.* Т. **112** (2) (1980) С. 170–192.
2. *Hanzawa E.I.* Classical solution of the Stefan problem // *Tohoku Math. J.* 33 (1981), P. 297–335.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

М. А. Сахауева (Алматы, Казахстан)

Изучена одномерная двухфазная задача со свободной границей $x = \alpha(t)$ типа Стефана для системы уравнений с непостоянной температурой плавления, зависящей от давления.

Пусть $\Omega_1(t) = \{(x,t): \ 0 < x < \alpha(t), \ t > 0\}$ — область, занятая жидкой фазой вещества, $\Omega_2(t) = \{(x,t): \alpha(t) < x < b, \ t > 0\}$ — область, занятая твердой фазой вещества, $p(x,t)$ — давление в области $\Omega_1(t)$, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ — температуры вещества в жидкой $\Omega_1(t)$ и твердой $\Omega_2(t)$ фазах, соответственно. Неизвестными функциями в задаче являются $p(x,t)$, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $x = \alpha(t)$. Известно начальное положение свободной границы: $\alpha(0) = \alpha_0$. Функции $p(x,t)$, $u_1(x,t)$ в $\Omega_1(t)$, $u_2(x,t)$ в $\Omega_2(t)$ удовлетворяют уравнениям теплопроводности, начальным и краевым условиям, а также следующим условиям на свободной границе $x = \alpha(t)$, $t > 0$:

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) = g(x,t,p), \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \lambda_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{d\alpha}{dt}.$$

Здесь λ_1, λ_2 — положительные постоянные, $g(x,t,p)$ — температура плавления вещества, зависящая от неизвестного давления.

Многомерная задача такого типа, поставленная Г.И. Бижановой, исследована в [1] в весовых пространствах Гельдера, введенных в [2] В.С. Белоносовым. Для нее доказаны существование и единственность решения в малом по времени.

В настоящей работе изучено асимптотическое поведение решения данной задачи при больших значениях времени для случая, когда температура плавления вещества линейно зависит от давления, т.е. $g(x,t,p) = b_1 p(x,t) + b_2$; $b_1, b_2 = \text{const} \neq 0$.

Литература

1. *Сахауева М.А.* Исследование задач со свободными границами для параболических уравнений второго порядка в весовых пространствах Гельдера. *Дисс. на соиск. уч. степ. к.ф.-м.н.* Алматы, 1999.
2. *Белоносов В.С., Зеленяк Т.И.* Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск, 19[illegible].