**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ**
**ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ИМ. Р.Р. МАВЛЮТОВА**
**УФИМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА**
**РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**
**БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ**
**УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. АКМУЛЛЫ**
**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ**
**ИМ. А. А. ХАРКЕВИЧА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**
**АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН**

# МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ"

***Сборник тезисов***
***(Уфа 1 – 4 октября 2018 г.)***

**УФА 2018**

УДК 51
ББК 22.1
М43

*Конференция проводится при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований,
проект № 18-01-20059 –г*

Международная научная конференция "Спектральная теория и смежные вопросы": сборник тезисов (г. Уфа, 1 – 4 октября 2018 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: Изд-во БГПУ, 2018. – 176 с.

В сборнике представлены тезисы докладов участников международной научной конференции "Спектральная теория и смежные вопросы".

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

***Ответственный редактор:***
канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник **Р.Н. Гарифуллин**

ISBN 978-5-906958-70-9

**INSTITUTE OF MATHEMATICS WITH COMPUTING CENTRE**
**MAVLYUTOV INSTITUTE OF MECHANICS**
**OF UFRC OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES**
**BASHKIR STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY NAMED**
**AFTER M. AKMULLA**
**INSTITUTE FOR INFORMATION TRANSMISSION PROBLEMS**
**(KHARKEVICH INSTITUTE)**
**OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES**
**ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC**
**OF BASHKORTOSTAN**

# INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE “SPECTRAL THEORY AND RELATED QUESTIONS”

## BOOK OF ABSTRACTS

Ufa, Russia
October 1 - 4, 2018

**UFA - 2018**

UDC 51
BBK 22.1

*The Conference is supported*
*by the Russian Foundation for Basic Research*
*project 18-01-20059*

**International Scientific Conference “Spectral theory and related questions”. Book of Abstracts.** (Ufa, October 1-4, 2018) / ed. by R. N. Garifullin. Ufa, Russia: Publishing house BSPU, 2018. – 176 p.

The book contains abstracts of the talks at International Scientific Conference “Spectral theory and related questions”.

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

ISBN 978-5-906958-70-9

# Содержание

## On the Chernousko time - optimal problem for equation of heat conductivity on a rod

**Azamov A.A., Bakhramov J.A.**

F.L.Chernous'ko studied the time-optimal problem for an evolutional equation

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A[u(\cdot,\cdot)](t,x) + v(t,x) \tag{1}$$

with initial and boundary conditions

$$u(0,x) = u^0(x), \quad Mu(t,s) = u^1(t,s), \tag{2}$$

where $A$ is a uniformly elliptic differential operator, $t \geq 0,\ x \in D,\ D$ is a regular domain with Lyapunov boundary $\gamma,\ s \in \gamma$, $M$ is a boundary operator [1].

The constraint on the control function is put in the norm of the space $L_\infty$, i.e. $|v(t,x)| \leq v_0$ for almost all $t$ and every $x \in \bar{D}$, $v_0$ is a given positive number [1].

If a solution $u(t,x)$ of the problem (1), (2) satisfies the condition $u(T,x) \equiv 0$ at some $T,\ T \geq 0$, then $v(t,x)$ is called admissible, and the number $T$ is the transition time (from the initial state $u_0(\cdot)$ into the equilibrium state 0). Let $V$ be the class of all admissible controls. Then the quantity $T = T[v(\cdot,\cdot)]$ will be a functional on $V$ at every fixed $u^0(x)$ and $u^1(t,s)$.

If the admissible control $v_*(t,x)$ satisfies the condition $T_* = T[v_*(\ \cdot\ ,\ \cdot)] \leq T[v(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )]$ for all $v(\ \cdot\ ,\ \cdot\ ) \in V$, then $v_*(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ is called time-optimal control, and the value $T_*$ is the optimal transition time.

The direct application of the Pontryagin maximum principle to the problem (1),(2) is very hard task. Therefore on [1] the method of expansion on the system of eigenfunctions of the operator $A$ were used (see also [4]). This allowed to reduce the problem to the infinite system:

$$\frac{d}{dt}y_k = -\lambda_k y_k + v_k, \quad y_k(0) = y_{k0}\,, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3}$$

In the language of the system (3) the constraint $|v(t,s)| \leq v_0$ means that the counting system of control parameters $v_k,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ , should satisfy the constraint

$$\max_{x\in\bar{D}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) v_k \right| \leq v_0. \tag{4}$$

Condition (4) defines some convex set in the linear space of all real sequences $\{v_k\}$ , which is difficult to deal with. In this connection, it is natural to attempt to solve a suboptimal control problem. For this purpose, in [1] the restriction (4) was replaced by a more rigid system of constraints

$$|v_k| \leq U_k, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{5}$$

where $\alpha_k = \max_{x \in \bar{D}} |\varphi_k(x)|$, the nonnegative numbers $U_k$ are chosen satisfying the condition $\sum_{k=0}^{\alpha} \alpha_k U_k = v_0$.

Let $T_{*k}$ be a optimal transition time in the problem

$$\dot{y}_k = -\lambda_k y_k + v_k \ , \quad y_k(0) = y_k^0, \tag{6}$$

so that $y_k(T_{*k}) = 0$ for all $k = 0, 1, 2 \ldots.$ In [1] it is shown that the numbers $U_k$ can be chosen so that all $T_{*k}$ will coincide: $T_{*k} = \hat{T}$ for some $\hat{T}$. Let $v_{*k}(t)$ be sequence of the corresponding optimal controls. Then $T_* \leq \hat{T}$ and $v_*(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) v_{*k}(t)$ will be a seeked suboptimal control.

Here, in addition to Chernous'ko approach a method of groupping terms of Fourier series is used to construct an improved suboptimal control. Unfortunately, its effectiveness is tightly related to a specific properties of eigenfunctions $\varphi_k(\cdot)$, so here it will be demonstrated for the operator $A = \frac{d^2}{dx^2}$, defining an equation of heat conductivity on a rod.

Thus, consider the following problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(t,x), & |v(t,x)| \leq v_0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,x) = u^0(x), & u(t,0) = 0, \qquad u(t,\pi) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

The system of eigenfunctions are $\varphi_k(t) = \sin kx, \ k = 1, 2, \ldots,$ those make a complete orthogonal basis of the space $L_2[0,\pi]$ [3]. Let $Q$ be the collection of positive integers having the form $3^{2p}q$, where $p = 0, 1, 2, \ldots$, while $q$ is relatively prime with 3. It is obvious that the set of all positive integers $\mathbb{N}^+$ will be the union of two disjoint sets $Q$ and $3Q$. Let $v_k(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \sin\, kx$ be the Fourier expansion of the function $v(t,x)$ in the basis $\{\sin kx\}$. Then the restriction (4) takes the form

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin\, kx \right| \leq v_0. \tag{8}$$

Here the system (6) looks $\dot{y}_k = -k^2 y_k + v_k, \ \ k \in \mathbb{N}^+$ that can be rewritten in the form

$$\begin{cases} \dot{y}_k = -k^2 y_k + v_k \\ \dot{y}_{3k} = -9k^2 y_{3k} + v_{3k}, \end{cases} \tag{9}$$

where $k \in Q$. After the transformation

$$y_k = \frac{\mu_k}{k^2} x^1, \quad y_{3k} = \frac{\mu_k}{k^2} x^2, \quad t = \frac{1}{k^2}\tau, \quad v_k = \mu_k w^1, \quad v_{3k} = \mu_k w^2$$

we get the two-dimensional control system

$$\dot{x}^1 = -x^1 + w^1, \ \dot{x}^2 = -9x^2 + w^2. \tag{10}$$

Since it is difficult to work with the constraint (8), instead of it we consider the following more rigid restriction

$$\max_{0\le x\le\pi} \mid w_k^1 \sin kx + w_k^2 \sin 3kx \mid \le \mu_k, \qquad k \in Q. \tag{11}$$

In (11) the sequence $\mu_k$ should be chosen satisfying the condition $\sum\limits_{k\in L} \mu_k = v_0$. Let us denote by $P_k$ the set of all pairs $(u_k, v_k)$ for those (11) holds. If we put

$$P = \left\{ (w^1, w^2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \max_{0\le t\le\pi} \left| w^1 \sin t + w^2 \sin 3t \right| \le 1 \right\}, \tag{12}$$

then $P_k = \mu_k P$. As a result, the problem of constructing of a suboptimal control being considered here is reduced to the problem of time-optimal control for the two-dimensional system

$$\dot{x}^1 = -x^1 + w^1, \ \dot{x}^2 = -9x^2 + w^2, \ (w^1, w^2) \in P. \tag{13}$$

The part of the boundary of the set $P$ lying on the half-plane $x^1 \ge 0$, is given by the formula

$$w^1 = \begin{cases} w^2 + 1 & if \quad -1 \le w^2 < 0.125 \\ 3(\sqrt[3]{w^2} - w^2) & if \quad 0.125 \le w^2 \le 1, \end{cases}$$

the other part is central symmetric.

First of all, we note that in the auxiliary problem (10), for each initial point $(x_0^1, x_0^2)$ there exists a unique optimal time control function [5]. Therefore, optimal controls of problem (9) coincide with the extremal controls of the Pontryagin maximum principle [2].

To write down the last we prefer to use the "backward motion" principle. Let $T(x_0^1, x_0^2)$ is a transition time for the initial point $(x_0^1, x_0^2)$ in the system (13). If we put $\tau = T(x_0^1, x_0^2) - t$, then extremals of Pontryagin's maximum principle will be defined by the system

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x^1 - w^1, & \frac{dy}{d\tau} = 9x^2 - w^2, & \frac{d\psi_1}{d\tau} = -\psi_1, & \frac{d\psi_1}{d\tau} = -9\psi_2. \\ x(0) = y(0) = 0 & \psi_1(0) = \cos s, & & \psi_2(0) = \sin s. \end{cases} \tag{14}$$

Integrating the system (14) gives

$$w^1(\tau, s) = \frac{3(2 - e^{-8\tau} tg\, s)}{3 - e^{-8\tau} tg\, s} \sqrt{\frac{1}{3 - e^{-8\tau} tg\, s}},$$

$$w^2(\tau, s) = \frac{1}{3 - e^{-8\tau} tg\, s} \sqrt{\left( \frac{1}{3 - e^{-8\tau} tg\, s} \right)}$$

$$x(\tau,s)=\frac{3}{4}e^{\tau}\cot s\int\limits_{m}^{n}\frac{1-p^2}{p^2q^7}dp,\;\; y(\tau,s)=\frac{3}{4}e^{\tau}\cot s\int\limits_{m}^{n}\frac{1-p^2}{p^2q^7}dp,$$

where $m=(3e^{8\tau}\cot s-1)^{-1/2},\;\; n=(3\cot s-1)^{-1/2},\;\; q=((3-p^{-2})\cot s)^{1/8}$.

If the initial state $x_0^1, x_0^2$ is given then the system $x^1(\tau,s)=x_0^1,\;\; x^2(\tau,s)=x_0^2$ defines concrete functions $\tau=T(x_0^1,x_0^2), s=S(x_0^1,x_0^2)$. Here $T(x_0^1,x_0^2)$ is the transition time for the system (13).

Now let us return to the system (9). For an initial point $(y_k^0, y_{3k}^0)$ the corresponding trajectory $(y_k(t), y_{3k}(t))$ satisfy the condition

$$y_k(T_k)=y_{3k}(T_k)=0,$$

where $T_k(\mu_k)=\frac{1}{k^2}T\left(\frac{k^2}{\mu_k}y_k^0, \frac{k^2}{\mu_k}y_{3k}^0\right)$

$T_k$ is monotonically decreasing on $\mu_k$ and it is easy to see that $T_k \longrightarrow 0$ at $\mu_k \longrightarrow +\infty$ and $T_k \longrightarrow \infty$ at $\mu_k \longrightarrow 0$, therefore there exists the unique value $\mu_k^*$ such that all $T_k(\mu_k^*)$ are equal to some $\theta$, $\theta>0$. Moreover $\frac{\alpha}{k^2} \leq \mu_k^* \leq \frac{\beta}{k^2}$ for some positive $\alpha$ and $\beta$.

This implies $\theta$ can be chosen such that $\sum \mu_k^* = v_0$. Then $\theta$ will be sub-optimal value of the time-optimal problem for the system (7).


[1] Chernous'ko F. L. Bounded controls in distributed-parameter systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol.56, No5, 1992, pp.810-826.

[2] Pontryagin L.S., *The mathematical theory of optimal processes*, New York, 1964, 391 p.

[3] Ladyzhenskaya O.A., *The boundary value problems of mathematical physics*, New York: Springer, 1985, 407 p.

[4] Azamov A.A., Ruzibayev M.R. The time-optimal problem for evolutionary partial differential equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* Vol.77, No2, 2013, pp.220-224.

[5] Blagodatskikh V.I., *Introduction to Optimal Control*, Moscow: Vysshaya Shkola, 2001.

# Backlund Transform for Non – linear Schrodinger Equation with Higher Order Nonlinearities

**Balandin S.P.**
Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

Let us consider generalised version of non–linear Schrodinger equation with additional higher order terms, namely

$$iu_z \pm \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2 u - i\frac{\beta}{6}u_{ttt} + i\frac{\mu}{3}(|u|^2 u)_t = 0 \tag{1}$$

Such type of equations play very important role in nonlinear optics of light-guides. So, femtosecond pulse propagation in optical fibers (see, f.e. [1]) described by similar equation.

Non–integrability of (1) in Painleve sense have been proved by the author in early paper [2]. We try to truncate Laurent expansions in order to get special solutions. It means to use Backlund transform (BT) because initial coefficients satisfy the linear part of (1).

**Theorem**. Through the Backlund transform

$$u = u_0\phi^{-1}, u* = v_0\phi^{-1}$$

we get some special solutions of

$$iu_z \pm \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2 u - i\frac{\beta}{6}u_{ttt} + i\frac{\mu}{3}(|u|^2 u)_t = 0$$

such as $u = \left(t + \frac{1}{4\beta} + \gamma\right)^{-1} exp\left[-\frac{it}{2\beta}\right]$ for plus sign and $u = (t+\gamma)^{-1}$ for minus sign. Also we have the relation $\mu = \beta$ for parameters. The constant $\gamma$ is arbitrary one.

One can substitute these solutions as $u_1$ to BT $u = u_0\phi^{-1} + u_1$ and continue the procedure of searching new special solutions.

[1] Zhao W., Bourkoff E. Femtosecond pulse propagation in optical fibres: higher order effects. IEEE J. Quantum Electron. (1988) Vol.24, No 2, pp 365-372

[2] Balandin S.P. Singularity Analysis and Special Solutions of Equation of Short Pulses Dynamics in Dispersive Nonlinear Medium. Differ. Uravn. (1992) Vol. 28, No 10, pp 1839-1840 (in Russian)

## On the order of the trigonometric diameter of the anisotropic Nikol'skii-Besov class in the metric of anisotropic Lorentz spaces

**Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Y.**
M.V. Lomonosov MSU, Kazakhstan Branch, Astana, Kazakhstan

Let $V \subset L_1(\mathbb{T}^n)$ be the normed space and $F \subset V$ be some functional class. The trigonometric diameter of the class $F$ in the space $V$ is defined as follows (see [1])

$$d_M^T(F,V) = \inf_{\Omega_M} \sup_{f\in F} \inf_{t(\Omega_M;\mathbf{x})} \|f(\cdot) - t(\Omega_M;\cdot)\|_V ,$$

where $t(\Omega_M;\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{M} c_j \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_j,\mathbf{x})}$, $\Omega_M = \{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_M\}$ is the set of vectors $\mathbf{k}_j = (k_1^j,\dots,k_n^j)$ from the integer lattice $\mathbb{Z}^n$, $c_j$ is some numbers ($j = 1,\dots,M$).

The concept of a trigonometric diameter in the one-dimensional case was first introduce by R.S. Ismagilov [1] and he established his estimates for certain classes in the space of continuous functions. For a function of several variables, exact orders of trigonometric diameter of Sobolev class $W_p^{\mathbf{r}}$, Nikol'skii class $H_p^{\mathbf{r}}$ in the space $L_q$ are established by E.S. Belinsky, V.E. Majorov, Yu. Makovoz, G.G. Magaril-Ilyaev, V.N. Temlyakov. This problem for the Besov class was investigated by A.S. Romanyuk [2], D.B. Bazarkhanov.

We study the problem of estimating the order of the trigonimetric diameter of the anisotropic Nikol'skii-Besov class $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ in the metric of anisotropic Lorentz spaces $L_{\mathbf{q}\theta}(\mathbb{T}^n)$.

Let $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\dots,x_n)$ be a measurable function defined on $\mathbb{T}^n$. We denote by $f^*(\mathbf{t}) = f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n)$ the function obtained by applying to the first nonicreasing permutation, successively with respect to the variables $x_1,\dots,x_n$ for fixed other variables.

Let multiindexes $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1,\dots,r_n)$ satisfy the conditions: if $0 < p_j < \infty$, then $0 < r_j \le \infty$, if $p_j = \infty$, then $r_j = \infty$ for every $j = 1,\dots,n$. An anisotropic Lorentz space $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)$ is the set of functions for which the following quantity is finite

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)} =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \dots \left(\int_0^{2\pi} \left(t_1^{1/p_1} \dots t_n^{1/p_n} f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n)\right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{r_2/r_1} \dots \frac{dt_n}{t_n}\right)^{1/r_n}.$$

For the functions $f \in L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)$ we denote by

$$\Delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{k}}(f) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

where $\{a_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}$ is the Fourier coefficients of the function $f$ with respect to the multiple trigonometric system $\rho(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : \left[2^{s_i-1}\right] \leq |k_i| < 2^{s_i}, i = 1, \dots, n\}$, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j$.

Let $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{0} < \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$. The anisotropic class of Nikol'skii-Besov $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ ([3]) is the set of functions $f$ from $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)$ for which the inequality holds

$$\|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)} = \left\| \left\{ \mathbf{2}^{(\alpha,\mathbf{s})} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f,\cdot)\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)} \right\}_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^n} \right\|_{l_\tau} \leq 1,$$

where $\|\cdot\|_{l_\tau}$ is the norm of discrete Lebesgue space $l_\tau$ with a mixed metric.

The main result is the following assertion.

**Theorem**. Let $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \mathbf{2} < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) < \mathbf{p_0'} = (p_0', \dots, p_0')$, $p_0 = \max\{p_j : j = 1, \dots, n\}$, $\mathbf{1} \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$ and $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ such that $\alpha_j > 1 + 1/p_j - 1/p_0$ for all $j = 1, \dots, n$. Let $\zeta = \min\{\alpha_j - 1/p_j + 1/q_j : j = 1, \dots, n\}$, $D = \{j = 1, \dots, n : \alpha_j - 1/p_j + 1/q_j = \zeta\}$, $j_1 = \min\{j : j \in D\}$, $q_j = q_{j_1}$ for all $j \in D$ и $q_j \geq q_{j_1}$ for all $j \notin D$.

Then the following relation holds

$$d_M^T(B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n), L_{\mathbf{q}\theta}(\mathbb{T}^n)) \asymp$$

$$\asymp M^{-(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/2)} (\log M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/2) + \sum_{j\in D\setminus\{j_1\}} (1/2 - 1/\tau_j)_+},$$

where $|D|$ is the number of elements of set $D$, $a_+ = \min(a; 0)$.

**Remark**. Note, that for $\mathbf{p} = \mathbf{r} = (p, \dots, p)$, $\tau = (\tau, \dots, \tau)$ и $\mathbf{q} = \theta = (q, \dots, q)$ the assertion of the theorem just proved coincides with the corresponding result of A.S. Romanyuk [2].


[1] Ismagilov R.S. *Diameter of the sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials* // Russian Mathematical Surveys (1974), 29(3):169

[2] Romanyuk A.S. *Kolmogorov and trigonometric widths of the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of multivariate periodic functions* // Sbornik: Mathematics (2006), 197(1):69

[3] Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Y. *Order of the orthoprojection widths of the anisotropic Nikol'skii–Besov classes in the anisotropic Lorentz space* // Eurasian Math. J. – 2016. – V. 7, № 3. – P. 8 – 16.

# Multipliers in Bessel potential spaces: non-Strichartz case and applications to singular perturbations of periodic Laplace type operators

**Belyaev A.A.**

Lomonosov Moscow State University, Department of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia;

Peoples' Friendship University of Russia, S. M. Nikol'skii Mathematical Institute, Moscow, Russia

We study the problem of finding a constructive description of multiplier spaces for Bessel potential spaces in the case when Strichartz-type conditions on smoothness indices do not hold.

In contrast to the case when conditions, generalizing condition $s > n/p$ imposed by Robert S. Strichartz in order to find a constructive description of the multiplier space $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^s(\mathbb{R}^n)]$, are valid, in this case we can no longer obtain a description of the multiplier space $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ in terms of the scale $H^{\gamma}_{r,\, unif}(\mathbb{R}^n)$ of uniformly localized Bessel potential spaces. Nevertheless, it turns out that bilateral continuous embeddings of the type

$$H^{\gamma}_{r_2,\, unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \subset H^{\gamma}_{r_1,\, unif}(\mathbb{R}^n)$$

can be established.

Also we establish analogues of these embeddings for the $n$-dimensional periodic case, when we consider multipliers acting in the scale of periodic Bessel potential spaces $H_p^s(\mathbb{T}^n)$ (here $\mathbb{T}^n$ is the $n$-dimensional torus). This allows us to prove the following result, concerning a spectral behaviour of the singular perturbation of Laplacian's fractional power.

**Theorem.** *Let*

$$0 < \alpha \leqslant \frac{n}{2}, \; q \in H^{-\alpha+\varepsilon}_{n/\alpha}(\mathbb{T}^n) \; \textit{ for some } \varepsilon > 0.$$

*Then linear operator*

$$(-\Delta)^{\alpha} \,\widetilde{+}\, Q \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

*has a compact resolvent, linear span of its root vectors is dense in* $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ *and eigenvalue counting function for operator* $(-\Delta)^{\alpha} \,\widetilde{+}\, Q$ *satisfies the following asymptotic formula*

$$N_{(-\Delta)^{\alpha} \,\widetilde{+}\, Q}(r) \sim N_{(-\Delta)^{\alpha}}(r) \sim C_{\alpha} \cdot r^{\frac{n}{2\alpha}} \quad \textit{as } r \to +\infty,$$

*where* $C_{\alpha}$ *is a positive constant depending only on* $\alpha$ *and* $n$.

Here for operators $A \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ and $B \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ we denote by $A \,\widetilde{+}\, B$ restriction of operator $A + B$ onto the domain

$$D(A \,\widetilde{+}\, B) = \{u \in H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \mid (A \,\widetilde{+}\, B)(u) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)\}.$$

Singular perturbations of strongly elliptic operators in the periodic case continue to be a focus of numerous studies (see, for instance, [1 – 3]). But explicit use of multiplier technique is much less developed and mostly limited to non-periodic case (see [4]). Our research refines and elaborates results of [5] while making extensive use of multiplier theory.

The research was supported by Peoples' Friendship University of Russia program "5–100".

[1] T. Kappeler, C. Mohr, Estimates for periodic and Dirichlet eigenvalues of the Schroedinger operator with singular potentials, *J. Funct. Anal.,* **186 : 1** (2001), pp. 62 – 91

[2] P. Djakov, B. S. Mityagin, Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators, *J. Funct. Anal.,* **263 : 8** (2012), pp. 2300 – 2332

[3] J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl, Inverse spectral theory for Sturm–Liouville operators with distributional potentials, *J. London Math. Soc.,* **88 : 3** (2013), pp. 801 – 828

[4] M. I. Neiman-Zade, A. A. Shkalikov, Strongly elliptic operators with singular coefficients, *Russ. J. Math. Phys.,* **13 : 1** (2006), pp. 70 – 78

[5] A. A. Belyaev, Singular perturbation of powers of the Laplacian on the torus, *Math. Notes,* **94: 3-4** (2013), pp. 594 – 598

## Schrödinger operators exhibiting an abrupt spectral transition

**Exner P.**

Doppler Institute for Mathematical Physics and Applied Mathematics, Prague

In this talk we are going to discuss several classes of Schrödinger operators with potentials that are below unbounded but their negative part is localized in narrow channels. A prototype of such a behavior can be found in Smilansky-Solomyak model devised to illustrate that an an irreversible behavior is possible even if the heat bath to which the systems is coupled has a finite number of degrees of freedom. We review its properties and analyze several modifications of this model, with regular potentials or a magnetic field, as well as another system in which $x^p y^p$ potential is amended by a negative radially symmetric term. All of them have the common property that they exhibit an abrupt parameter-dependent spectral transition: if the coupling constant exceeds a critical value the spectrum changes from a below bounded, partly or fully discrete, to the continuous one covering the whole real axis. We also discuss resonance effects in such models. The results come from a common work with Diana Barseghyan, Andrii Khrabustovskyi, Jiří Lipovský, Vladimir Lotoreichik, and Miloš Tater.

## An unusual series of autonomous discrete integrable equations on the square lattice

**Garifullin R.N. and Yamilov R.I.**
Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia

We present an infinite series of autonomous discrete equations on the square lattice

$$(u_{n,m+1}+1)(u_{n,m}-1)=\beta_N(u_{n+1,m+1}-1)(u_{n+1,m}+1),$$

where $\beta_N^N=1,\ N\geq 1$ is the primitive root of unit. We show that these equations possess hierarchies of autonomous generalized symmetries and conservation laws in both directions. Their orders in both directions are equal to $\kappa N$, where $\kappa$ is an arbitrary natural number and $N$ is equation number in the series. Such a structure of hierarchies is new for discrete equations in the case $N>2$.

Symmetries and conservation laws are constructed by means of the master symmetries. Those master symmetries are found in a direct way together with generalized symmetries. Such construction scheme seems to be new in the case of conservation laws.

In most interesting case $N=2$ we show that a second order generalized symmetry is closely related to a relativistic Toda type integrable equation. As far as we know, this property is very rare in the case of autonomous discrete equations.

Details are given in arXiv:1808.05042 [nlin.SI].

## On basicity of the eigenfunctions of second-order discontinuous differential operator

**Gasymov T.B., Gahramanly B.T.**
Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Consider a spectral problem for a second order discontinuous differential operator

$$l\left(y\right)=p_0\left(x\right)y''+p_1\left(x\right)y'+p_2\left(x\right)y=\lambda y, \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{j=0}^{k_\nu}\left(\alpha_{\nu sj}y^{(j)}\left(x_{s-1}+0\right)+\beta_{\nu sj}y^{(j)}\left(x_s-0\right)\right)=0, \tag{2}$$

$$\nu = \overline{1, nl}, 0 \le k_\nu \le 1,$$

$-\infty < a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_l = b < +\infty$, $p_1(x)$, $p_2(x) \in L_1(a, b)$, and the function $p_0(x)$ on each interval $(x_{s-1}, x_s)$ has the form: $p_0(x) = p_{0s}(x) e^{i\varphi_s}$, $0 \le \varphi_s < 2\pi$, $p_{0s}(x)$ is a positive absolutely continuous function on $(x_{s-1}, x_s)$.

In the present work a definition of the regularity of boundary conditions is given, the asymptotic formulas for eigenvalues are obtained, a resolvent is constructed, the basis properties of eigen and associated functions are studied in $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$. Similar problems for discontinuous differential operators were studied in [1-3]. The main results of the paper are the following theorems.

***Theorem 1.*** *The eigen and associated functions of the regular problem (1), (2) form a basis with parentheses in the space* $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, *and form a usual basis in this space if the boundary conditions are strongly regular.*

***Theorem 2.*** *The eigen and associated functions of the regular problem (1), (2) form a Riesz basis with parentheses in the space* $L_2(a, b)$, *and form a usual Riesz basis in this space if the boundary conditions are strongly regular.*


[1] *Efremov I.I.* Riesz basicity of the eigen and associated functions of indefinite quasidifferential operators // Mathematics, Mechanics, Collection of Scientific Works, Saratov, 2000, pp. 42-44.

[2] *Efremov I.I.* Riesz basicity of the eigenfunctions of indefinite quasidifferential operators // Tez. doc. Voronezh winter mat. shk. Voronezh, 2001, p. 110.

[3] *Gasymov T.B.* On basisness of eigenfunctions of discontinuous second order differential operator // Trans. NAS of Azerb., 2002, vol. XXII, No. 1, pp. 75-84.


## Inverse boundary value problems for in a vibrating Euler-Bernoulli beam based on measured deflection at the boundary


**Hasanov A. H.**

Tokyo University of Science, JAPAN


In this study we analyze the following two *inverse boundary value problems of identifying the unknown transverse shear force* $g(t)$ in the system governed by the general form Euler-Bernoulli equation:

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} + \mu(x)u_t + (r(x)u_{xx})_{xx} - T_r u_{xx} = 0, \ (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0, \quad x \in (0,l), \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \\ u_{xx}(l,t) = 0, \ ((r(l)u_{xx}(l,t))_x)_{x=l} = g(t), \ t \in (0,T). \end{cases} \tag{1}$$

In the first problem (subsequently, *the problem IP1*) one needs to identify the unknown transverse shear force $g(t)$ in (1) from the measured deflection $\nu(t)$ at the right boundary $x = l$ of a beam:

$$\nu(t) := u(l,t), \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

In the second problem (subsequently, *the problem IP2*) the unknown transverse shear force $g(t)$ in (1) needs to be determined from the measured rotation (slope) $\theta(t)$ at the same boundary $x = l$ of a beam:

$$\theta(t) := u_x(l,t), \quad t \in [0,T].$$

These inverse problems arises naturally in many physical applications related to vibration phenomena, in particular, in the problem of estimating the shear force affecting the tip of the cantilever beam in a Transverse Dynamic Force Microscope (TDFM) using a real-time implementable sliding mode observer (see [1] and references therein). We develop the approach based on weak solution theory for PDEs, Tikhonov regularization combined with the adjoint method, introducing in [2] - [3]. We prove that the input-output operators, defined as Dirichlet-to-Neumann operators, corresponding to these inverse problems are linear compact operator. Moreover, we prove that As a consequence, both inverse problems are ill-posed. We introducing the Tikhonov functionals $J_\nu(g) := \|u(l,\cdot) - \nu\|^2_{L^2(0,T)}$ and $J_\theta(g) := \|u_x(l,\cdot) - \theta\|^2_{L^2(0,T)}$ we derive the Fréchet gradients of these functionals through unique solutions of the corresponding adjoint problems. Assuming more regularity of the direct problem solution we prove Lipschitz continuity of the Fréchet gradient.

**1. The problem IP1.** We assume that input satisfy the following conditions:

$$\begin{cases} \rho, r, \mu \in L^\infty(0,l), \ g \in H^1(0,T), \ g(0) = 0, \\ 0 < \rho_0 \le \rho(x) \le \rho_1, \ 0 < r_0 \le r(x) \le r_1, \\ 0 < \mu_0 \le \mu(x) \le \mu_1, \ T_r \ge 0, \quad 0 < g(t) \le g^* < \infty, \ t \in (0,T). \end{cases} \tag{3}$$

Under these conditions there exists a unique weak solution of the direct problem (1) defined as $u \in L^2(0,T;\mathcal{V}(0,l))$, $u_t \in L^2(0,T;L^2(0,l))$, $u_{tt} \in L^2(0,T;H^{-2}(0,l))$, where $\mathcal{V}(0,l) := \{v \in H^2(0,l) : \ v(0) = v'(0) = 0\}$, according to [2-3]. Let us define first the *set of admissible inputs* (i.e. transverse shear forces) in the Sobolev space $H^1(0,T)$, assuming that the input

$g(t)$ satisfies only conditions (3): $\mathbf{G} = \{g \in H^1(0,T): \ g(0) = 0, \ 0 < g(t) \leq g^* < \infty\}$. Evidently, $\mathbf{G}$ is a nonempty closed convex set in $H^1(0,T)$.

Now we require that in addition to conditions (3), the inputs $r(x)$ and $g(t)$ satisfy also the following regularity and consistency conditions:

$$r \in H^2(0,l), \ g \in H^2(0,T), \ g'(0) = 0. \tag{4}$$

Under conditions (3) and (4) there exists a unique regular weak solution of the direct problem (1) defined as $u \in C([0,T]; H^4(0,l))$, $u_t \in C([0,T]; \mathcal{V}(0,l))$, $u_{tt} \in L^2(0,T; L^2(0,l))$. Based on conditions (3) and (4) imposed on the function $g(t)$, we define now the *set of admissible inputs* in the Sobolev space $H^2(0,T)$ as follows: $\mathcal{G} = \{g \in H^2(0,T): \ g(0) = g'(0) = 0, \ 0 < g(t) \leq g^* < \infty\}$.

**Theorem 1 (Uniqueness).** *Let conditions (3) and (4) hold. Then the problem IP1 has at most one solution in the set of admissible inputs* $\mathcal{G}$.

**Lemma 1.** *Let conditions (3) and (4) hold. Then the Neumann-to-Dirichlet operator* $\Phi g(t) := u(x,t;g)|_{x=l}$, $\Phi[\cdot] : \mathcal{G} \subset H^2(0,l) \mapsto L^2(0,T)$ *is a linear injective compact operator.*

**Theorem 2.** *Let conditions (3) hold. Then the minimization problem*

$$J_\nu(g) = \inf_{\tilde{g} \in \boldsymbol{G}} J_\nu(\tilde{g})$$

*has a solution in* $\boldsymbol{G} \subset H^1(0,T)$.

**Theorem 3.** *Let conditions (3) and (4) hold. Then the Tikhonov functional* $J(g)$, $g \in \mathcal{G}$, *is Fréchet differentiable. Moreover, in the case when* $T_r = 0$, *for the Fréchet gradient of this functional the following explicit gradient formula holds:*

$$J'(g)(t) = \phi(l,t;g), \ t \in (0,T), \tag{5}$$

*where* $\phi(x,t)$ *is the weak solution of the adjoint problem*

$$\begin{cases} \rho(x)\phi_{tt} - \mu(x)\phi_t + (r(x)\phi_{xx})_{xx} = 0, \ (x,t) \in \Omega_T, \\ \phi(x,T) = 0, \ \phi_t(x,T) = 0, \quad x \in (0,l), \\ \phi(0,t) = \phi_x(0,t) = 0, \ (\phi_{xx}(x,t))_{x=l} = 0, \ (-(r(x)\phi_{xx}(x,t))_x)_{x=l} = p(t), \\ t \in (0,T). \end{cases}$$

**Theorem 4.** *Let conditions (3) and (4) hold. Assume that* $T_r = 0$ *in (1). Then the Fréchet gradient of the Tikhonov functional* $J'(g)$, $g \in \mathcal{G}$, *defined by (5), is Lipschitz continuous, that is*

$$\|J'(g_1) - J'(g_2)\|_{L^2(0,T)} \leq L_g(T)\|g_1'' - g_2''\|_{L^2(0,T)}, \ \forall g_1, \, g_2 \in \mathcal{G},$$

*with the Lipschitz constant* $L_g(T) > 0$ *depending on the final time* $T > 0$.

**2. The problem IP2.** Except for the uniqueness theorem, all the above results remain true for the second inverse problem ISP2 also.

This research has been supported by Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) under the grant FY2018 JSPS Individual Fellowship for Research in Japan.

[1] Thang Nguyen, et al., Estimation of the shear force in transverse dynamic force microscopy using a sliding mode observer, *AIP ADVANCES*, **5** (2015), (097157); https://doi.org/10.1063/1.4931595.

[2] Alemdar Hasanov, Alexandre Kawano, Identification of unknown spatial load distributions in a vibrating Euler-Bernoulli beam from limited measured data, *Inverse Problems*, **32(5)** (2016), (055004 (31pp)).

[3] Alemdar Hasanov, Onur Baysal, Identification of unknown temporal and spatial load distributions in a vibrating Euler-Bernoulli beam from Dirichlet boundary measured data, *Automatica*, **71** (2016), 106–117.

## Spaces, cauchy singular integral and hardy classes

**Huseynli A.A., Mirzabalayeva A.I.**
Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Let $L_p \equiv L_p(-\pi, \pi)$ , $1 \leq p \leq +\infty$ and $l_r$, $1 \leq r \leq +\infty$ be the usual spaces of $p$-th power summable functions and $r$-th power summable sequences of scalars, respectively; $\hat{f}$ denotes the sequence of Fourier coefficients of the function$f$:

$$\hat{f} \equiv \{f_n\}_{n \in Z}, f_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \ n \in Z.$$

Denote the set $\left\{ f \in L_p : \hat{f} \in l_r \right\}$ by $L_{p;r}$. It is evident that $L_{p;r}$ is a linear space with respect to pointwise operations and $\|f\|_{p;r} = \|f\|_p + \left\|\hat{f}\right\|_{l_r}$ defines a norm in $L_{p;r}$ (here and thereafter $\|f\|_p = \|f\|_{L_p}$) which makes $L_{p;r}$ a Banach space.

Throughout $\omega$ will denote the open unit disc $\omega = \{z \in C : |z| < 1\}$ and $\gamma = \partial\omega$ will denote the unit circle $\omega = \{z \in C : |z| = 1\}$. Let $f \in L_1(\gamma)$. Consider the Cauchy-type integral

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau, z \notin \gamma,$$

and the singular integral

$$(Sf)(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - \tau}, \ \tau \in \gamma$$

corresponding to it.

It is well known that $Sf$ exists a.e. on $\gamma$ (see, e.g. [1; 2]). In the sequel we will use the following space of analytic functions generalized by $L_{p;\nu}$. Denote

$$H^+_{p;\nu} = \left\{ f : f \textit{ is analytic on } \omega \textit{ and } \|f\|_{H^+_{p;\nu}} = \sup_{0<r<1} \|f_r(\cdot)\|_{L_{p;\nu}} < +\infty \right\},$$

where $f_r(t) = f\left(re^{it}\right)$.

Let $f \in H^+_{p;\nu}$, $1 < p < +\infty$, $1 \le \nu \le +\infty$, and $f\left(re^{it}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n r^n e^{int}$. Then we have

$$\|f\|_{H^+_{p;\nu}} = \sup_{0<r<1} \left( \left( \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^{\nu} r^{\nu n} \right)^{1/\nu} + \|f_r(\cdot)\|_{L_p} \right).$$

Denote by $f^+(\tau)$ the nontangential boundary values of $f^+(\tau)$ on $\gamma$. By a classical theorem $f^+(\tau)$ exists a.e. on $\gamma$ and $\sup\limits_{0<r<1} \|f_r(\cdot)\|_{L_p} = \|f^+(\cdot)\|_{L_p}$ (see, e.g. [3]). As each summand on the right-hand side of the above equality is monotonic increasing function of $r$, we get

$$\|f\|_{H^+_{p;\nu}} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^{\nu} \right)^{1/\nu} + \left\|f^+\right\|_{L_p} = \left\|f^+\right\|_{L_{p;\nu}}.$$

Now define the set ${}_mH^-_{p;\nu}$ for fixed integer $m$. Let $f(z)$ be a function, analytic outside $\omega$ and

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{k} f_n z^n \tag{1}$$

with some $k \le m$ . Write $f$ as

$$f(z) = P_k(z) + f_1(z),$$

where $P_k(\cdot)$ and $f_1(\cdot)$ are the analytic and principal parts of the expansion (1), respectively. We will say that $f(\cdot)$ belongs to ${}_mH^-_{p;\nu}$ if $\overline{f_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)} \in H^+_{p;\nu}$.

The following theorems which are analogs of classical ones are proved:

**Theorem 1**. *The function $f(\cdot)$ belongs to $H^+_{p;\nu}$, $1 \le p < +\infty$, $1 \le \nu \le +\infty$ iff $f^+(\cdot) \in L_{p;\nu}$; in that case*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^+(\tau)}{\tau - z} dz, \ \forall z \in \omega.$$

**Theorem 2.** *$H^+_{p;\nu}$ and ${}_mH^-_{p;\nu}$, $1 \le p < +\infty$, $1 \le \nu \le \infty$ are Banach spaces.*

**Theorem 3.** *The above singular integral operator $S$ is bounded in $L_{p;\nu}$ for $1 < p < +\infty$, $1 \le \nu \le +\infty$.*

[1] *Privalov I.I.* Boundary properties of analytic functions// M.-L., Gostekhizdat, 1950, 324 p.

[2] *Goluzin G.M.* Geometric theory of functions of a complex variable// M., "Nauka", 1966, 626 p.

[3] *Kusis P.* Introduction to the theory of spaces $H^p$// M., "Mir", 1984, 364 p.

## Gravitational lensing by Damour-Soludukhin wormhole

**Izmailov R.N. and Nandi K.K.**
Zel'dovich International Center for Astrophysics, Bashkir State Pedagogical University, 3A, October Revolution Street, Ufa 450008, RB, Russia

By investigating the strong field lensing observables for the Damour-Soludukhin wormhole, we examine how small the values of the deviation parameter $\lambda$ need be for reproducing the observables for the Schwarzschild black hole. While extremely tiny values of $\lambda$ are indicated by the long term processes such as matter accretion or Hawking evaporation, it turns out that $\lambda$ could surprisingly assume incredibly higher values and yet reproduce the black hole lensing observables up to an accuracy dictated only by the technical constraints related to actual observations.

Damour and Soludukhin (DS) [1] defined black hole "foils" as objects that mimic some aspects of black holes, while differ in other aspects. An ingenious toy model of such an object is what we shall call here the DS wormhole. A fundamental theoretical distinction between a black hole and a wormhole is that while the former possesses event horizon, the latter does not. Despite this distinction, it is found that many strong field features previously thought of as indicative of a black hole event horizon (e.g., ring-down quasi-normal modes) can be remarkably mimicked by a static wormhole [2].

A very effective tool for classically sampling strong field regime of gravity is provided by the gravitational lensing phenomenon, be it by a black hole or a wormhole [3], when the light rays pass arbitrarily close to the photon sphere in either case. While the effect of light deflection plays the role of core physics behind gravitational lensing, the latter is a step ahead providing observable set of values that may constitute some sort of "identity cards" for different types of lenses [4]. Since good evidences exist in favor of black holes (e.g., each galaxy is believed to host a black hole in its center), a curious question is to what extent the DS wormhole can reproduce strong field lensing observables of a Schwarzschild black hole. We shall use Bozza's method [5] for calculating the extreme lensing observables.

**The method starts with a generic spherically symmetric static spacetime**

$$ds^2 = A(x)dt^2 - B(x)dx^2 - C(x)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right).$$

For the calculation of lensing observables, note that the angular separation $\theta$ of the image from the lens is $\tan\theta = \frac{u}{D_{\mathrm{OL}}}$, where $u(x) = \sqrt{C(x)/A(x)}$ and $D_{\mathrm{OL}}$ is the distance between the observer and the lens [5]. Specializing to the photon sphere $x = x_m$, where $u = u_m$, the Bozza deflection angle $\alpha(\theta)$, which shows a logarithmic divergence on the photon sphere, can be written as (assuming small $\theta$)

$$\alpha(\theta) = -\overline{a}\log\left(\frac{u}{u_m} - 1\right) + \overline{b},\ u \simeq \theta D_{\mathrm{OL}},$$

where $\overline{a}, \overline{b}$ are the dimensionless strong field lensing coefficients. Lensing by the DS wormhole thus provides a surprising counterexample to the intuitive expectation that all experiments ought to lead to the mimicking of black holes for the same values of $\lambda$.

**Acknowledgment** The reported study was funded by RFBR according to the research Project No. 18-32-00377.

[1] T. Damour and S. N. Soludukhin, Phys. Rev. D **76**, 024016 (2007).

[2] K.K. Nandi, R.N. Izmailov, A.A. Yanbekov and A.A. Shayakhmetov, Phys. Rev. D **95**, 104011 (2017).

[3] R. Lukmanova, A. Kulbakova, R. Izmailov and A.A. Potapov, Int J Theor Phys **55**, 4723 (2016).

[4] V. Bozza, Nuovo Cim. B **122**, 547 (2007).

[5] V. Bozza, Phys. Rev. D **66**, 103001 (2002).

## Observational constrain on NUT charge using Sagnac effect

**Karimov R.Kh., Kulbakova A.K.**
Zel'dovich International Center for Astrophysics, Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia

We investigate the influence of the NUT (Newman-Unti-Tamburino) charge on the Sagnac effect. Also, the upper limit of the NUT charge will be found using the terrestrial observational data.

The Kerr-Taub-NUT (KTN) spacetime is an axisymmetric, stationary solution o Einstein's vacuum field equations with mass ($M$), spin parameter ($a$) and NUT charge ($n$) in Boyer-Lindquist coordinates is given by

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{\Sigma}(\Delta - a^2\sin^2\theta)dt^2 - \frac{2}{\Sigma}\left[\Delta A - a(\Sigma + aA)\sin^2\theta\right] dtd\phi \\ &\quad -\frac{1}{\Sigma}\left[(\Sigma + aA)^2\sin^2\theta - A^2\Delta\right] d\phi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Here $\Sigma$, $\Delta$ and $A$ are defined by

$$\Sigma = r^2 + (n + a\cos^2\theta)^2,\ \Delta = r^2 - 2Mr - n^2 + a^2,$$
$$A = a\sin^2\theta - 2n\cos\theta.$$

The parameters $(M, a, n)$ all have the same dimension of length in relativistic units.

Following [1] - [3], consider that the source/receiver (geostationary satellite) is sending two oppositely directed light beams along a circumference on the equatorial plane $\theta = \pi/2$ of the rotating KTN black hole described by metric (1). Suitably placed mirrors send back to their origin both beams after a circular trip about the rotating central mass. We obtained the exact master formula for the Sagnac delay for nongeodesic source/receiver motion

$$\begin{aligned} \delta\tau &= -\left(\frac{4\pi}{R}\right)\left[2a(MR + n^2) - (R^2 + n^2)^2\omega_0 - a^2\left(R^2 + 2MR\right.\right. \\ &\quad \left.\left. +3n^2\right)\omega_0\right] / \left[(1 + n^2/R^2)\left\{R^2 - 2MR - n^2 + 4a\left(MR\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left. +n^2\right)\omega_0 - \{(R^2 + n^2)^2 + a^2R(R + 2M) + 3n^2a^2\}\omega_0^2\right\}^{1/2}\right], \end{aligned} \tag{2}$$

where $\omega_0$ – uniform axial rotation speed of the KTN black hole.

To get an upper limit on NUT charge we expand the exact expression of Sagnac delay up to first order in $M/R$ and $\omega_0 R$

$$\delta\tau \simeq \delta\tau_S\left\{1 + \frac{2n^2}{R^2}\right\} + 4\pi RM\omega_0\left\{1 + \frac{3n^2}{R^2}\right\} - \frac{8\pi aM}{R}\left\{1 + \frac{n^2}{R^2}\right\}, \tag{3}$$

where $\delta\tau_S = 4\pi\omega_0 R^2$. The flat space Sagnac effect $\delta\tau_S$ is not completely recovered even when the correction terms containing $M$ and $a$ are negligible, due to the appearance of an extra non-local term $\frac{2n^2}{R^2}$ due to $n$, viz.,

$$\delta\tau \simeq \delta\tau_S\left\{1 + \frac{2n^2}{R^2}\right\}. \tag{4}$$

Next, we equate the correction term from Eq. (4) with the one way Sagnac delay residual, calling it $\Delta\tau$, as follows

$$\Delta\tau = \frac{\delta\tau_S l^2}{R^2}, \tag{5}$$

$$0 \leq \Delta\tau \leq \text{the observed residual.} \tag{6}$$

We shall use below the experimental data from 'around-the-world' type experiment by Allan, Weiss and Ashby [4]. Their measured data are: $\frac{1}{2}\delta\tau_S = 240$ ns and $\frac{1}{2}\delta\tau_S = 350$ ns, with residual very nearly zero, less than 2% corresponding to $\Delta\tau_S = 5$ ns accuracy.

Since the Earth values of $M$, $a$ and Eqs. (5)-(6), we obtain

$$n \leq 8.24 \times 10^5 \text{ m.} \tag{7}$$

With the input assumption that $\left(\frac{1}{2}\delta\tau - \frac{1}{2}\delta\tau_S\right) \leq 5$ ns, which is the error residual observed in the Allan, Weiss and Ashby [2] experiment, we obtained rather large upper limit (7) on the gravitational radius of the NUT charge $n$ that far exceed the gravitational mass of the Earth.

**Acknowledgment** The reported study was funded by RFBR according to the research Project No. 18-32-00377.

[1] A. Tartaglia, Phys. Rev. D **58**, 064009 (1998).

[2] R.Kh. Karimov, R.N. Izmailov, G.M. Garipova and K. K. Nandi, Eur. Phys. J. Plus **133** 44 (2018).

[3] R.Kh. Karimov, R.N. Izmailov, A.A. Potapov and K. K. Nandi, Gen Relativ Gravit **50** 44 (2018).

[4] D.W. Allan, M.A. Weiss and N. Ashby, Science **228**, 69 (1985).

## On the periodic Toda lattice with an integral-type source.

**Khasanov A.B., Babajanov B.A..**
Urgench State University, Urgench, Uzbekistan

The Toda lattice [1] is a simple model for a nonlinear one-dimensional crystal that describes the motion of a chain of particles with exponential interactions of the nearest neighbors.

It is shown in the works [2, 3] that Toda lattice equation can be integrated by Inverse Scattering Method for the discrete Sturm-Liuville operator.

The periodic Toda lattice was considered in the works [4]-[8]. It was described in [9] that the Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of "rapidly decreasing" functions can be solved with the use of Inverse Scattering Method for the Sturm–Liouville operator, while for the Toda lattice, an analogous work is presented in [10]. In the work [11], the solution of KdV equation in the class of periodical functions is obtained with a self-consistent source, while for the Toda lattice, an analogous work is presented in [12, 13]. Other aspects on integration of nonlinear systems are presented in [14, 15, 16].

In this work, the $N$- periodical Toda lattice with integral type source

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}) + a_n \int\limits_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda,t)[\psi^-_{n+1}(\lambda,t)\psi^+_{n+1}(\lambda,t) - \\ \psi^-_n(\lambda,t)\psi^+_n(\lambda,t)]d\lambda \\ \dot{b}_n = 2(a^2_{n-1} - a^2_n) + a_n \int\limits_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda,t)[\psi^-_n(\lambda,t)\psi^+_{n+1}(\lambda,t) + \\ \psi^-_{n+1}(\lambda,t)\psi^+_n(\lambda,t)]\,d\lambda - \\ -a_{n-1} \int\limits_E \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda,t)[\psi^-_n(\lambda,t)\psi^+_{n-1}(\lambda,t) + \psi^-_{n-1}(\lambda,t)\psi^+_n(\lambda,t)]\,d\lambda \\ a_{n+N} = a_n, \quad b_{n+N} = b_n, \quad n \in Z, \end{cases} \tag{1}$$

is studied. The problem (1) is considered under initial conditions

$$a_n(0) = a^0_n, \quad b_n(0) = b^0_n, \quad n \in Z, \tag{2}$$

with given $N$- periodical sequences $a^0_n, \quad b^0_n, \quad n \in Z$. The function sequences $\{a_n(t)\}^\infty_{-\infty}$, $\{b_n(t)\}^\infty_{-\infty}$, $\{\psi^\pm_n(\lambda,t)\}^\infty_{-\infty}$ – are unknown vector-functions, besides $\{\psi^\pm_n(\lambda,t)\}^\infty_{-\infty}$ - are the Floquet- Bloch solutions for the Hill's equation

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n \tag{3}$$

normalized by conditions $\psi^\pm_1(\lambda,t) = 1$. Here $\theta_n(\lambda,t),\ n \in Z$ is the solution of equation (3), under the initial conditions $\theta_0(\lambda,t) = 1,\ \theta_1(\lambda,t) = 0$ and $E$ is spectr of operator $L(0)$.

Let $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_{2N}$ roots of equation $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ and $\mu_1(t),\ \mu_2(t),\ ...,\ \mu_{N-1}(t)$ roots of equation $\theta_{N+1}(\lambda,t) = 0$, where $\Delta(\lambda) = \theta_N(\lambda,t) + \varphi_{N+1}(\lambda,t)$, and $\varphi_n(\lambda,t)$, $n \in Z$ are solutions of the equation (3) under initial conditions $\varphi_0(\lambda,t) = 0,\ \varphi_1(\lambda,t) = 1$.

We shall introduce

$$\sigma_j(t) = sign[\theta_N(\mu_j(t)) - \varphi_{N+1}(\mu_j(t))], \quad j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1.$$

**Definition 1.** The set of the numbers $\mu_j$, $j = 1,2,...,N-1$ and sequences of signs $\sigma_j$, $j = 1,2,...,N-1$ is called spectral parameters of the Hill's equation (3).

**Definition 2.** System of spectral parameters $\{\mu_j,\sigma_j\}^{N-1}_{j=1}$ and numbers $\lambda_i$, $i = 1,2,...,2N$ is called spectral data of the Hill's equation (3).

**Theorem.** If the functions $a_n(t)$, $b_n(t)$, $\psi^\pm_n(\lambda,t)$, $n \in Z$ are solutions of the problem (1)-(3), then the spectrum of the Hill's equation (3) is independent of the parameter $t$, and the spectral parameters $\mu_j(t)$, $j = 1,2,...,N-1$

satisfy the following system of equations

$$\dot{\mu_j}(t) = \frac{2\sigma_j(t)\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{2N}(\mu_j(t)-\lambda_k)}}{\prod\limits_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{N-1}(\mu_j(t)-\mu_k(t))}\left[1-\int\limits_E \frac{\theta_{N+1}(\lambda,t)}{\lambda-\mu_j(t)}d\lambda\right].$$


[1] Toda, M.: Waves in nonlinear lattice, Suppl., Progress Theor. Physics **45** (1970), 74-200.

[2] Flashka, H.: On the Toda lattice, II, Progress Theor. Physics **51** (1974), 703-716.

[3] Manakov, S. V.: Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems, Zh. Eksper. Teoret. Fiz. **67** (1974), 543–555.

[4] Dubrovin, B.A., Matveev, V.B., Novikov, S.P.: *Non-linear equations of Korteweg–de Vries type finite-zone linear operators and Abelian varieties*, Uspekhi Mat. Nauk **31**:1(187) (1976), 55-136.

[5] Date, E., Tanaka, S.: *Analog of inverse scattering theory for discrete Hill's equation and exact solutions for the periodic Toda lattice*, Progress Theor. Physics **55** (1976), 217-222.

[6] Krichever, I.M. : *Algebraic curves and non-linear difference equations*, Uspekhi Mat. Nauk, **33**:4(202) (1978), 215–216.

[7] Teshl, G.: *Jacobi Operators and Completely Integrable Lattices*, Mathematical Surveys and Monographs, vol.72, AMS, 2000.

[8] Samoilenko, V.G., Prikarpatskii, A.K.: *Periodic problem for a Toda chain*, Ukrainian Mathematical Journal **34** (1982), 380-385.

[9] Melnikov, V.K.: *Exact solutions of the Kortewed-de Vries equation with a self-consistent source*, Phys. Lett. A **128** (1988), 488-492.

[10] Urazboev, G.U.: *Toda lattice with a special self-consistent source*, Theor. Math. Phys. **154** (2008), 305–315.

[11] Khasanov, A.B., Yakhshimuratov, A.B.: *The Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions*, Theor. Mat. Fiz. **164** (2010), 214–221.

[12] Babajanov B.A., Fečkan M., Urazbaev G.U.: *On the periodic Toda Lattice with self-consistent source*, Commun. Sci. Numer. Simul. **22** (2015), 379-388.

[13] Babajanov, B.A., Khasanov, A.B.: *Periodic Toda chain with an integral source*, Theoret. Math. Phys. **184** (2015), 1114-1128.

[14] Prikarpatskii, A.K., Mykytiuk, I.V.: *Algebraic Integrability of Nonlinear Dynamical Systems on Manifolds: Classical and Quantum Aspects*, Kluwer Academic Publisher, 1998.

[15] R. Yamilov, Symmetries as integrability criteria for differential difference equations, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) R541-R623.

[16] Garnier J and Abdullaev F Kh 2003 Soliton dynamics in a random Toda chain Phys. Rev. E 67 026609-1

## Some new inequalities for the Fourier transform

**Kopezhanova A.N.**
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

Let

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx, \ x \in \mathbb{R},$$

be the Fourier transform of a function $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Let $1 < p < 2$, $p' = \frac{p}{p-1}$ and $0 < q \leq \infty$. Then we have the following inequalities

$$\|\widehat{f}\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leq c_1 \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

$$\|\widehat{f}\|_{L_{p',q}(\mathbb{R})} \leq c_2 \|f\|_{L_{p,q}(\mathbb{R})}, \tag{2}$$

where $L_{p,q}(\mathbb{R})$ is the classical Lorentz space. These inequalities are called the Hausdorff-Young inequality and the Hardy-Littlewood-Stein inequality, respectively, (see e.g. [1]).

Note that these inequalities (1) and (2) hold with equality for $p = q = 2$ (Plancherel's theorem) but do not hold in general for $2 < p < \infty$.

Let $0 < p, q \leq \infty$, $M$ be the set of the segments $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ and $|e| = b - a$.

The net space $N_{p'q}(M)$ is defined as the set of all measurable functions $f$ such that the quasinorm

$$\|f\|_{N_{p'q}(M)} = \left( \int_0^{\infty} \left( t^{\frac{1}{p'}} \overline{f}(t, M) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

for $q < \infty$, and

$$\|f\|_{N_{p'\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p'}} \overline{f}(t, M) < \infty$$

for $q=\infty$, where $\overline{f}(t;M):=\sup\limits_{\substack{|e|\geq t\\ e\in M}}\frac{1}{|e|}\left|\int\limits_e f(x)dx\right|$.

These spaces were introduced in [2] (see also [3]).

The main aims of this work are to derive the sufficient condition so that the Fourier transform $\widehat{f}$ belongs to $L_p$-space $(1<p<\infty)$ and to obtain conditions so that the norm of the Fourier transform $\widehat{f}$ in $L_p$-space $(1<p<\infty)$ has both upper and lower estimates.

The total variation of the function $f$, defined on an interval $[a,b]\subset\mathbb{R}$ is the quantity

$$V_a^b(f):=\sup_{\mathfrak{P}}\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i)|,$$

where the supremum is taken over all partitions of [a, b]:

$$\mathfrak{P}:\ a=x_0<x_1<...<x_n=b,\ n\in\mathbb{Z}_+.$$

We say that the measurable function $f(x)\in V([a,b])$ if $V_a^b(f)<\infty$.

The main results read as follows.

**Theorem 1.** *Let $1<p<\infty$ and $f\in L_1(\mathbb{R})$. If $f$ satisfies the condition*

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(2^{\frac{k}{p'}}V_{2^k}(f)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

*then $\widehat{f}\in L_p(\mathbb{R})$ and the inequality*

$$\|\widehat{f}\|_{L_p}\leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(2^{\frac{k}{p'}}V_{2^k}(f)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

*holds. Here the constant $c$ does not depend on $f$.*

**Theorem 2.** *Let $1<p<\infty$. Assume that the function $f$ satisfy that there exists $c>0$ such that*

$$V_{2^k}(f)\leq c\sup_{\substack{|e|\geq 2^k\\ e\in M}}\frac{1}{|e|}\left|\int\limits_e f(x)dx\right|,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

*Then $\|\widehat{f}\|_{L_p(R)}<\infty$ if and only if $\|f\|_{N_{p'p}}<\infty$ and, moreover,*

$$\|\widehat{f}\|_{L_p(\mathbb{R})}\asymp\|f\|_{N_{p'p}(M)}.$$

The author was supported by the grant no. AP05132071 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

[1] E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, Princeton, 1972.

[2] E.D. Nursultanov, *Network space and Fourier transform.* Dokl. Russ. Akad. Nauk. 361 (1998), no. 5., 597–599 (in Russian).

[3] E.D. Nursultanov, *Network spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type.* Mat. Sb., 189 (1998), no. 3, 83–102 (in Russian).

## On the spectral properties of some class of non-selfadjoint operators

**Kukushkin M. V.**
International Committee Continental, Russia

Nowadays' there exists a huge amount theoretical results [1], which can be used for studying a certain non-selfadjoint operators represented as the sum of some selfadjoint or normal operator and operator-perturbation. But one thing is clear, for using this technique we must have some decomposition of initial operator on the sum of "main part" so called non-perturbing operator and operator-perturbation. Remarkable that the main part must be operator of special type mainly selfadjoint or normal operator. If we consider the case, when in our decomposition the main part neither selfadjoint nor normal and we can't approach required decomposition by obviously way, then we can use another technique based on the property of real component of the initial operator. This report is devoted to exploration of some class of non-selfadjoint operators acting in a complex separable Hilbert space. We consider a perturbation of non-selfadjoint operator by so called "lower term" which is also a non-selfadjoint operator satisfying some conditions imposed on its real component. In opposite to approach that was used in [1], where spectral properties of perturbation of selfadjoint and normal operators were studied, our considerations are founded on known spectral properties of the real component of non-selfadjoint operators [2]. Having used the technic of sesquilinear forms theory [3] we establish a compactness property of the resolvent, obtain asymptotic equivalence between the real component of resolvent and the resolvent of real component of non-selfadjoint operators. We conduct a classification of non-selfadjoint operators by belonging of their resolvent to the class of Schatten-von Neumann and formulate a sufficient condition for completeness of root vectors. Finally we obtain an asymptotic formula for the eigenvalues.

[1] Shkalikov A. A. Perturbations of selfadjoint and normal operators with discrete spectrum, Russian Mathematical Surveys, vol. 71, issue 5(431), 113–174, 2016.

[2] Gohberg I.C., Krein M.G. Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators in Hilbert space, Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1965.

[3] Kato T. Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

## Lensing observables formassless dyonic wormhole

**Lukmanova R.F.**

Zel'dovich International Center for Astrophysics, Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia

Gravitational lensing today is an essential part of astrophysicists' way for probing a number of interesting phenomena dealing from compact objects to cosmology with widely varying distance scales. Particularly, the importance of studying lensing in the weak field limit lies in its ability to probe large-scale structures as well as the nature of the lens [1]. Principal role in the lensing is played by the deflection of light caused by the gravitating lens, assumed here to be static and spherically symmetric objects

In this paper, we shall study the Observables for massless dyonic wormhole.We shall use a generic analytical formalism developed by Keeton-Petters [2] to compute all the geometric lensing observables: bending angle, image position, magnification, centroid and time delay. All result will be compared with Schwarzschild solution.

[1] A. Giahi-Saravani and B. M. Schäfer, Mon. Not. R. Astron. Soc. **437**, 2 (2014).

[2] C.R. Keeton and A. O. Petters, Phys. Rev. D **72**, 104006 (2005).

# Yosida functions

**Makhmutova M., Makhmutov S.**
Sultan Qaboos University, Muscat, Oman

Let $f$ be a meromorphic function on $\mathbf{C} = \{z : |z| < \infty\}$. The spherical derivative of $f$ is defined by $f^{\#}(z) = |f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$. Now $f$ is a Yosida function [2], that is, $f \in \mathcal{Y}$, if

$$\sup_{z\in\mathbf{C}} f^{\#}(z) < \infty$$

Therefore, $f$ is said to belong to $\mathcal{Y}_0$ if

$$\lim_{|z|\to\infty} f^{\sharp}(z) = 0 \ .$$

It is clear that $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$. As compared with Minda's result [3] we have

**Theorem**. Let $f$ be a meromorphic function on $\mathbf{C}$. Then $f \notin \mathcal{Y}_0$ if and only if there exist sequences $\{z_n\}$ and $\{\rho_n\}$ with $z_n \in \mathbf{C}$, $|z_n| \to \infty$, $0 < \rho_n \leq a < \infty$, such that $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(z_n + \rho_n\zeta\right) = g(\zeta)$ locally uniformly in $\mathbf{C}$, where $g$ is a nonconstant Yosida function.

**Theorem**. Let $f$ be a meromorphic function on $\mathbf{C}$. Then $f \in \mathcal{Y}_0$ if and only if

$$\limsup_{|a|\to\infty} \frac{T(r, f(a+z)}{r^2} = 0$$

for any $r > 0$.

[1] V. Gavrilov, On functions of Yosida's class (A). Proc. Japan Acad. 46 (1970), 1-2.

[2] S. Makhmutov and M. Makhmutova, On $p$-Yosida functions, Complex Variables and Elliptic Equations, 59:12, (2014), 1696-1705, DOI: 10.1080/17476933.2013.872636

[3] D. Minda, Yosida functions. Lectures on complex analysis (Xian, 1987), World Sci. Publishing, Singapore, (1988), 197–213.

# $q$ sequences of meromorphic functions

**Makhmutov S., Makhmutova M.**
Sultan Qaboos University, Muscat, Oman

Let $\mathcal{M}(D)$ denote the class of meromorphic functions in the unit disc $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ of the complex plane $\mathbb{C}$. Green's function in $D$ with logarithmic singularity at $a \in D$ is $g(z,a) = \log \left| \dfrac{1 - \overline{a}z}{a - z} \right|$. For $0 < p < \infty$, the class $Q_p^\#$ consists of $f \in \mathcal{M}(D)$ such that

$$\|f\|^2_{Q_p^\#} = \sup_{a \in D} \int_D f^\#(z)^2 g^p(z,a)\, dA(z) < \infty,$$

where $f^\#(z) = |f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$ is the spherical derivative of $f$ at $z = re^{i\theta}$ and $dA(z) = rdr\, d\theta$ denotes the element of Lebesgue area measure on $D$ (see [1]. It is known that $Q_1^\#$ coincides with the class $UBC$ of functions in $\mathcal{M}(D)$ of uniformly bounded Nevanlinna characteristic in $D$ (see [3]), and, for each $p > 1$, $Q_p^\#$ is the same as the class $\mathcal{N}$ of meromorphic normal functions [2], defined by the condition

$$\|f\|_{\mathcal{N}} = \sup_{z \in D} f^\#(z)(1 - |z|^2) < \infty.$$

We say that $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ is an $\mathcal{N}$-sequence for $f$ if

$$\limsup_{n \to \infty} f^\#(a_n)(1 - |a_n|^2) = \infty.$$

Similarly, if $0 < p < \infty$, then $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ is a $q_p$-sequence for $f \in \mathcal{M}(D)$ if

$$\limsup_{n \to \infty} \int_D f^\#(z)^2 g^p(z, a_n)\ dA(z) = \infty\ .$$

We will discuss hyperbolic closeness of $\mathcal{N}$-sequences and $q_p$-sequences for $f$ for different values $p$.

[1] R. Aulaskari, J. Xiao and R. Zhao, On subspaces and subsets of $BMOA$ and $UBC$, Analysis, 15, (1995), 101–121.

[2] O. Lehto, K. I. Virtanen, Boundary behaviour and normal meromorphic functions, Acta Math. 97 (1957), 47–65.

[3] S. Yamashita, Functions of uniformly bounded characteristic. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 7, (1982), 349–367.

## On Expansion Formula for Sturm-Liouville Operator with Spectral Parameter in Boundary Condition

**Mamedov Khanlar R.**
Mathematics Department, Science and Letter Faculty, Mersin University, Mersin, Turkey

We consider boundary value problem on the half line $[0, \infty)$

$$l(y) = -y'' + q(x)y = \lambda^2 y \tag{1}$$

$$-[\alpha_1 y(0) - \alpha_2 y'(0)] = \lambda[\beta_1 y(0) - \beta_2 y'(0)] \tag{2}$$

In the space $L_2(0, \infty)$ consider the Sturm-Liouville equation with eigenvalues dependent boundary condition. The scattering data is defined, the direct and inverse problem investigated, the resolvent operator is constructed and using Titchmarsh method two-fold expansion formula is obtained.

[1] Yurko V.A., On recovery of pencils of differential operators on the half line, Math. Notes 67, 261-265.

[2] Cohen D.S., An integral transform associated with boundary conditions containing an eigenvalue parameter,SIAM Journal on Applied Mathematics, 14 (5), 1966,1164-1175.

[3] Menken H, Mamedov Kh. R., On the inverse problem of the scattering theory for a boundary value problem, Geometry, Integrability and Quantisation, vol.7, 226-236,2006.

[4] Mamdeov Kh. R., Menken H, On the inverse problem of scattering theory for differential operator of the second order, North- Holland Mathematics Studies, 197, 2004, 185-194.

[5] Fulton C.T., Singular eigenvalue problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A 87, 1-34.

[6] E.C.Titchmarsh, Eigenfunctions Expansions, Oxford, 1962.

## Nonstationary interface-growth differential – convolutional inequalities: absence of global solutions

**Muravnik A.B.**
JSC "Concern "Sozvezdie", Voronezh & RUDN University, Moscow, Russia

The following Cauchy problem is considered:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta u + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t,u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 + b(x,t,u)\, K * u^{\omega},\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \quad (1)$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

**Theorem**. Let $\alpha > -1$, $0 < \beta < n$, $u_0^{\alpha+1} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, and there exist positive $C$ and $R_0$ and a nonnegative $\gamma$ such that the inequality

$$\int\limits_{|x|<R} u_0^{\alpha+1}(x)dx \geq CR^{\gamma}$$

holds for any $R$ from $(R_0, +\infty)$. Suppose that the inequalities $a_j(x,t,s) \geq \dfrac{\alpha}{s}$, $j = \overline{1,n}$, and $b(x,t,s) \geq \dfrac{1}{(\alpha+1)s^{\alpha}}$ hold on $\mathbb{R}^n \times (0,\infty) \times (0,\infty)$ and the function $K(x)$ is bounded from below by the Riesz kernel $|x|^{\beta-n}$ on $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Then, for $\gamma \geq n$, problem (1) – (2) has no classical positive solutions provided that $\omega > \alpha + 1$; for $\gamma < n$, it has no classical positive solutions provided that $1 < \dfrac{\omega}{\alpha+1} < 1 + \dfrac{\beta+2}{n - \max\{\gamma, \beta\}}$.

This work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on the program to improve the competitiveness of Peoples' Friendship University (RUDN University) among the world's leading research and education centers in the 2016–2020, by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 17-01-00401), and by the President Grant for the Government Support of the Leading Scientific Schools of the Russian Federation, No. 4479.2014.1.

**Relative time delay in a spinning black hole: a diagnostic for no-hair theorem**

**Nandi K.K. and Izmailov R.N.**
Zel'dovich International Center for Astrophysics, Bashkir State Pedagogical University, 3A, October Revolution Street, Ufa 450008, RB, Russia

Relative time delay (RTD) is a new effect of general relativity that samples the spin of the intervening lens as well as has the potential to test Penrose's no-hair theorem for black holkes. The spinning regular black hole (with spin $a$) metric proposed by Johannsen [1] shares the Kerr horizon but contains independent dimensionless parameters marking deviation from the Kerr metric. Non-zero value of any of the parameters would indicate violation of the no-hair theorem. We shall find the influence of these parameters on the relative time delay (not Shapiro time delay) treated here as a diagnostic for no-hair theorem using aligned, finite, thin-lens approximation in realistic spinning astrophysical configurations. Precise measurement of this delay would then help us determine, from observational perspective, whether or not any of the parameters is really non-zero. We shall also point out that the aligned spinning lens is completely equivalent to a "static" lens with a *fictitious* lens geometry, which would enable us to re-express the relative time delay components in terms of the spin $a$. Numerical values are tabulated for three astrophysical lens systems. The advantage of the present treatment is that it can accommodate a variety of spinning lens systems that are likely to be detected in the near future.

In our work, we considered the influence of its deviation parameters on the RTD in the weak field thin-lens approximation on the basis of an analytical treatment within a realistic *finite* lensing system. The derived equations have the flexibility to include different input values of lens mass $M$, spin $a$, distances of closest approach $b$ and source distances $d_{LS}$ within the stipulated approximations. If the fitted parameters are found to have exactly the Kerr values $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 8$, then the observed delay would constitute a support for the no-hair theorem of general relativity. Otherwise, the theorem would be falsified. However, either conclusion is still premature as the corresponding lens configurations are yet to be observationally identified and precise observational data obtained.

To our knowledge, so far RTD [a.k.a. different times of arrival (TOA) of pulses at the observer] calculations were carried out for two types of scenarios: One scenario considered TOA of the pulses sent out from diametrically opposite points on a fast spinning pulsar itself [2]. The other scenario considered a pulsar orbiting around a BH companion, while the delay was obtained by numerically integrating the null geodesics in a Kerr background geometry [3]. The merit of the present work is that it belongs to neither of the two scenarios but presents an alternative perspective via a finite lensing configuration allowing the light rays to approach the photon sphere of the BHs (for galaxies, the disk radius) reasonably closely without violating the weak field thin-lens approximation. Further, devising a "static" lens equivalent to a spinning lens, a useful conclusion can be drawn, viz., the image $\theta_-$ on the counter-rotating side is *brighter* than the image $\theta_+$ on the co-rotating side. Apart from this, it was shown how by measuring the magnification ratio, one could measure the RTD components. For some related works, see [4-7]. Finally, even though the weak field effects could be reasonably large that can sample lens spin as a potential test of general relativity, the strong field effects are expected to reveal unforeseen characteristics. Work is underway.

**Acknowledgment** The reported study was funded by RFBR according to the research Project No. 18-32-00377.

[1] T. Johannsen, Phys. Rev. D **88**, 044002 (2013).

[2] B. Datta and R.C. Kapoor, Nature (London), **315**, 557 (1985).

[3] P. Laguna and A. Wolszczan, Astrophys. J. **486**, L27 (1997).

[4] A. Bhadra and K.K. Nandi, Gen. Relativ. Gravit. **42**, 293 (2010).

[5] I.G. Dymnikova, Sov. Phys. JETP, **59**, 223 (1984).

[6] P.M. Alsing, Am. J. Phys. **66**, 779 (1998).

[7] R.Kh. Karimov, R.N. Izmailov, G.M. Garipova and K.K. Nandi, Eur. Phys. J. Plus **133**, 44 (2018).

## Interpolation theorem for Morrey-type spaces and its corollaries

**Nursultanov E.D.**

Moscow State University, Kazakh Branch, Astana, Kazakhstan

Let $G = \{G_t\}_{t>0}$ be a family of $\mu$-measurable sets of positive measure such that

$$G_t \subset G_s \quad \text{if} \;\; t \leq s.$$

Let $0 < p, q \leq \infty, \;\; 0 < \alpha < \infty, \;\; G(x) = \{G_t + x\}_{t>0}$. We define the space $LM^{\alpha}_{p,q}(G(x), \mu)$ and $M^{\alpha}_{p,q}(G, \mu)$

$$LM^{\alpha}_{p,q}(G(x), \mu) = \left\{ f : \;\; \left( \int_0^{\infty} \left( t^{-\alpha} \|f\|_{L_p(G_t + x, \mu)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

$$M^{\alpha}_{p,q}(G(x), \mu) = \left\{ f : \;\; \left( \int_0^{\infty} \left( t^{-\alpha} \sup_x \|f\|_{L_p(G_t + x, \mu)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

If $G_t = B_t(0)$ is the ball with center 0 and radius $t$ then $LM^{\alpha}_{p,q}(G,\mu) = LM^{\alpha}_{p,q,z}$ is the local Morrey space and $M^{\alpha}_{p,\infty}(G,\mu) = M^{\alpha}_{p}$ is the Morrey space.

**Theorem 1.** Let $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \frac{n}{p}$, $0 < \beta_0 < \beta_1 < \frac{n}{q}$, $0 < p, q < \infty$, $\theta \in (0,1)$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\beta = (1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1$. Let $f \in M^{\alpha}_{p,\tau}(G)$ and $A$ is quasi-linear operator:

$$\|Af\|_{LM^{\beta_0}_{q,\infty}(G(x))} \le M_0\|f\|_{LM^{\alpha_0}_{p,1}(G(x))}, \qquad x \in R^n, \;\; f \in LM^{\alpha_0}_{p,1,x},$$

$$\|Af\|_{LM^{\beta_1}_{q,\infty,x}(G(x))} \le M_1\|f\|_{LM^{\alpha_1}_{p,1,x}(G(x))}, \qquad x \in R^n \;\; f \in LM^{\alpha_1}_{p,1,x}.$$

Then $Af$ belongs to the space $M^{\beta}_{q,\tau}$ and we have the following inequality

$$\|Af\|_{M^{\beta}_{q,\tau}(G)} \le cM_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{M^{\alpha}_{p,\tau}(G)}.$$

This theorem is then applied to obtaining the boundedness in the introduced Morrey-type spaces of the Riesz potential and singular integral operator.

E.Nursultanov wos supported by MON RK grants AP05132071, AP05132590.

## Inequalities of Hardy – Littlewood Type in Anisotropic Space

**Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T.**
Moscow State University, Kazakh Branch,
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

Let $1 < p < \infty$ and $\Phi = \{\phi\}_{k=1}^{\infty}$ be the orthonormal system bounded in total, $f \in L_p[0,1]$, $f \overset{\text{a.e.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k(x)$. In a case of $1 < p < 2$ the task about properties of summability of Fourier coefficients $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ can be solved by classical Hardy-Littlewood-Polya inequality [1]

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p \le c\|f\|^p_{L_p}.$$

For the case when orthonormal system $\Phi = \{\phi\}_{k=1}^{\infty}$ is regular and $2 \le p < \infty$, according to inequality, proved by E.D. Nursultanov ([2]), it follows

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|\bar{a_k}|^p \le c\|f\|^p_{L_p},$$

here $\bar{a_k} = \frac{1}{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_m\right|$.

These inequalities are also valid in the multidimensional case (see e.g. [3]). For function from anisotropic spaces with a vector parameter $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$, it is necessary to consider a problem of summability of Fourier coefficients when some parameters $p_i$ more than 2, and others less or equal to 2. This article is devoted to the problem.

E. Nursultanov wos supported by MON RK grants AP05132071, N. Tleukhanova wos supported by MON RK grants AP05132590.


[1] Bary, N. K., Trigonometric series, Volumes I and II, Macmillan, New York, 1964.

[2] Nursultanov, E. D., On multipliers of Fourier series in a trigonometric system Math. Notes 63 (1998), N1-2, 205-214.

[3] Nursultanov, E. D., On the coefficients of multiple Fourier series in $L_p$-spaces, Izv. Math. 64 (2000), N 1, 93-120.


## $\mu$-strong cesaro summability at infinity


**Sadigova S.R.[1], Cemil Karacam[2], Hasanli R.R.[1]**

[1] Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan;

[2] Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey


Let $(I; B; \mu)$ be a measurable space, $I = [a, +\infty)$, where $\mu : B \to R_+$ is a $\sigma$-finite measure on $I : \mu(I) = +\infty$. By $L_p(\mu)$, $0 < p < +\infty$, we denote as usual a space of measurable (in the sense of $(B; \mu)$) functions$f : I \to R$ with

$$\|f\|_p < +\infty,$$

where

$$\|f\|_p = \begin{cases} \int_I |f(t)|^p \, d\mu(t) \quad , & 0 < p < 1, \\ \left(\int_I |f(t)|^p \, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \quad , & 1 \le p < +\infty. \end{cases}$$

Let $I_x = [a, x]$, $\forall x \ge a$. Introduce the following definition.

***Definition.*** *Let $|f|^p$, $0 < p < +\infty$, be a locally integrable function on $[a, +\infty)$. We will say that the function $f$ has a $\mu[p]$-strong limit (or is$\mu[p]$-strong Cesaro summable) at infinity, equal to the number $A$, if*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mu(I_x)} \int_{I_x} |f(t) - A|^p \, d\mu = 0.$$

This limit will be denoted by

$$\mu\left[p\right]-\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=A.$$

Note that in the discrete case, $p$-Cesaro summability has the following form (see, e.g., [1], p. 147)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|x_k-\xi\right|^p=0,\ 0<p<+\infty.$$

The theorem below is the $\mu$-analogue of the discrete case.

***Theorem.*** *i) Let the function $f$ be $\mu\left[p\right]-$strong Cesaro convergent to $A$ for some $p\in\left(0,+\infty\right)$ at infinity. Then $\exists\ \mu-st,\ \lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)$ and $\mu-st\ \lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=A$; ii) If $\exists\ \mu-st\ \lim\limits_{x\to\infty}f=A$ and $f$ is $\mu$-a.e. bounded, then $\exists\ \mu\left[p\right]-\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)$ and this limit is equal to $A$.*

This research was supported by the Azerbaijan National Academy of Sciences through the program "Approximation by neural networks and some problems of frames".

The authors would like to express their profound gratitude to Prof. Bilal Bilalov, for his valuable guidance to this work.

[1] *Hardy G.H.* Divergent series// Oxford Univ. Press, London, 1949.

## Space of $\mu$-statistical continuous functions

**Sadigova S.R.[1], Cemil Karacam[1], Hasanli R.R.[2]**

[1] Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan;

[2] Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey

Let $\left(I_a^{\infty};B;\mu\right)$ be a measurable space with measure $\mu:B\to I_a^{\infty}$, where $B$ $\sigma$-algebra of Borel subsets in $I_a$. We will assume that the measure $\mu$ $\sigma$-finite measure and $\mu\left(I_a^{\infty}\right)=+\infty$. The measure of the set $M\in B$ will be denoted by $|M|$, i.e. $|M|=\mu\left(M\right)$.

**Definition 1.** *We say that the function $f$ has a $\mu$-stat left-hand limit $A$, at the point $x_0$ if*

$$\lim_{t\to x_0-0}\frac{\left|A_f^{\varepsilon}\left(x_0\right)\bigcap I_t\left(x_0\right)\right|}{\left|I_t\left(x_0\right)\right|}=0,\ \forall\varepsilon>0,$$

*where*

$$A_f^{\varepsilon}\left(x_0\right)\equiv\left\{x\in E\left(x_0\right):\left|f\left(x_0+x^{-1}\right)-A\right|\geq\varepsilon\right\}.$$

This fact will be denoted by $\mu$-$st\ \lim\limits_{x\to x_0-0}f\left(x\right)=\mu$-$st\,f\left(x_0-0\right)=A$.

Similarly, we define the concept of $\mu$-*stat* right-hand limit at the point $x_0 : \mu\text{-}st \lim_{x \to x_0+0} f(x) = A = \mu\text{-}st\, f(x_0+0)$.

If $\mu\text{-}st \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \mu\text{-}st \lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ holds, then $f(\cdot)$ is called a $\mu$-*stat* continuous at the point $x_0$.

Denote the linear space of $\mu$-*statistical* continuous functions on $[a,b]$ over the field $K$ ($K \equiv C$ or $R$) by $C_{st}[a,b]$. It is absolutely clear that the pointwise limit of the sequence of $\mu$-*statistical* continuous functions may not be $\mu$-*statistical* continuous on $[a,b]$.

The following lemma is true.

**Lemma 1.** *The strict embedding* $C[a,b] \subset C_{st}[a,b] : C_{st}[a,b] \setminus C[a,b] \neq \emptyset$ *holds true.*

Assume

$$C_{st}^{J}[a,b] \equiv \{ f \in C_{st}[a,b] : \|f\|_{\infty} < +\infty \},$$

where

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{[a,b]} |f(\cdot)|.$$

It is clear that the following strict embedding holds true

$$C[a,b] \subset C_{st}^{J}[a,b] \subset L_p(a,b), \ \forall p \in (0,+\infty).$$

The following theorem is true.

**Theorem 1.** *Let* $(R;B;\mu)$ *be a measurable space with a* $\sigma$*-finite measure* $\mu$ *on the* $\sigma$*-algebra of Borel sets* $B$ *and* $\mu((-\infty,x_0)) = \mu((x_0,+\infty)) = +\infty$ *for some* $x_0 \in R$. *Then the embeddings*

*i)* $C[a,b] \subset \left(C_{st}[a,b] \bigcap L_p(a,b)\right), \ \forall p \in (0,+\infty)$

*and*

*ii)* $C[a,b] \subset \left(C_{st}^{J}[a,b] \subset L_p(a,b)\right), \ \forall p \in (0,+\infty)$

*hold true, and they are strict.*

The following theorem is also true.

**Theorem 2.** *The space* $C_{st}^{J}[a,b]$ *is a Banach space with respect to the norm* $\|\cdot\|_{\infty}$.

This research was supported by the Azerbaijan National Academy of Sciences through the program "Approximation by neural networks and some problems of frames".

The authors would like to express their profound gratitude to Prof. Bilal Bilalov, for his valuable guidance to this work.

[1] *Natanson I.P.* Theory of functions of a real variable. Moscow, Nauka, 1974, 480 p.

# $m-$ subharmonic functions

**Sadullaev Azimbay**
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

It is well known that the classical potential theory is based on the class of subharmonic ($sh$) functions and on the Laplace operator $\Delta$. The pluripotential theory, constructed in the 80s of the last century, is based on plurisubharmonic ($psh$) functions and on the Monge-Ampère operator

$$(dd^c u)^n = const \cdot \parallel \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \parallel (dd^c |z|^2)^n.$$

Here as usual, $d = \partial + \overline{\partial}$, $d^c = \frac{\partial - \overline{\partial}}{4i}$. During 1976-90, intensive research was carried out in building the pluripotential theory: basic objects of the theory, such as extremal Green function $V^*(z, K)$, $\mathcal{P}-$ measure $\omega^*(z, K, D)$, pluripolar sets, capacity values $\mathcal{P}(K, D)$, $C(K, D)$, etc. have been introduced and studied, and the foundation of pluripotentil theory was practically built. Now a days, this theory is one of the main directions in complex analysis, being the basic technique of investigating the space of analytic functions of several variables.

In 1990s there were many attempts to develop, expand the pluripotential theory to broader classes of functions. One such class is the $m-$ subharmonic ($m - sh$) functions ($1 \leq m \leq n$): *an upper semicontinuous in a domain $D \subset \mathbf{C}^n$ is said to be $m-$subharmonic in $D$, $u \in m - sh(D)$, if $dd^c u \wedge \beta^{m-1} \geq 0$, in the generalized sense, as current, i.e.*

$$dd^c \wedge \beta^{m-1}(\omega) = \int u\beta^{m-1} \wedge dd^c\omega \geq 0, \ \ \forall \omega \in F^{n-m,n-m}, \ \omega \geq 0.$$

Here $\beta = dd^c|z|^2$ is the standard volume form of the space $\mathbf{C}^n$ and $F^{n-m,n-m}$ is the space of compactly supported in $D$, smooth differential forms, bi-degree $(n - m, n - m)$. Note that

$$psh(D) = 1 - sh(D) \subset m - sh(D) \subset n - sh(D) = sh(D).$$

Such functions have an excellent geometric characterizations: *an upper semicontinuous function $u$, defined in a domain $D \subset \mathbf{C}^n$ is $m - sh$ if and only if for any complex plane $\Pi \subset \mathbf{C}^n$, $\dim \Pi = m$, the restriction $u|_{\Pi} \in sh\left(\Pi \cap D\right)$.*

$m - sh$ functions and functions closely related to them are considered and applied in various problems in the function theory by Verbitsky M., Joyce D., Abdullayev B.I., Drnovšek B.D., Forstnerič F., etc. In a series of papers Harvey F.R. and Lawson H.B.Jr. $m-sh$ functions were applied in the problems of convex geometry, convex hall and minimal space in calibrated geometry (see References).

Our goal is to study the potential properties of the class $m-sh(D)$. The main objects of the potential theory are polar sets, $\mathcal{P}-$ measure $\omega^*(z,E,D)$ of the set $E\subset D$ with respect to a domain $D\subset \mathbf{C}^n$ in the class of $m-sh$ functions. One of the main objects of the class $m-sh$ functions is maximal functions, which are analogues of harmonic functions: *a function* $u(z)\in m-sh(D)$ *is said to be maximal in a domain* $D\subset \mathbf{C}^n$ *if the maximum principle holds, that is, if* $v\in m-sh(D):\ \varliminf_{z\to\partial D}(u(z)-v(z))\geq 0$ *, then* $u(z)\geq v(z),\ \forall z\in D.$

To find out the geometric nature of the maximal $m-sh$ functions, we calculate $dd^cu\wedge\beta^{m-1}$ in terms of eigenvalues (at fixed point $z\in D$) of the complex Hessian $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar z_k}\right)$ of $u$, which is hermitian matrix. After a suitable unitary coordinate transformation, which does not change $\beta=dd^c|z|^2$, the operator $dd^cu$ can be written in the diagonal form:
$dd^cu=\frac{i}{2}[\lambda_1dz_1\wedge d\bar z_1+...+\lambda_ndz_n\wedge d\bar z_n]$ , where the $\lambda_j=\lambda_j(z)\in\mathbf{R}^n$ are eigenvalues. We have

$$dd^cu\wedge\beta^{m-1}=$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)^m\sum_{1\leq j_1<...<j_m\leq n}(\lambda_{j_1}+...+\lambda_{j_m})dz_{j_1}\wedge d\bar z_{j_1}\wedge...\wedge dz_{j_m}\wedge d\bar z_{j_m}. \quad (1)$$

Positivity of the form $dd^cu\wedge\beta^{m-1}$ means that all the coefficients (1) are positive,

$$\lambda_{j_1}+...+\lambda_{j_m}\geq 0,\ 1\leq j_1<j_2<...<j_m\leq n.$$

We set

$$\mathcal{M}_u(z)=\left[\prod_{1\leq j_1<...<j_m\leq n}(\lambda_{j_1}(z)+...+\lambda_{j_m}(z))\right]^{\alpha_m}, \quad (2)$$

where $\alpha_m=\frac{m!(n-m+1)!}{n!}$ .

It is clear that $\mathcal{M}_u=\lambda_1+...+\lambda_n=\Delta u$ for $m=n$ and $\mathcal{M}_u=\lambda_1...\lambda_n$ for $m=1$. The operator $\mathcal{M}_u$ is an operator in eigenvalues, symmetric, positive in the class $m-sh(D)\cap C^2(D)$. Unlike of the $m=1$, $m=n$, it is not a differential operator.

What does $\mathcal{M}_u(z)=0$ mean at the point $z^0\in D$? It means, at least one of the factors in (2) at the point $z^0$ is zero, for example, $\lambda_1(z^0)+...+\lambda_m(z^0)=0$. We note, that by using the the unitary transformation $T$, the operator $dd^cu$ is reduced to the form $dd^cu=\frac{i}{2}[\lambda_1(z^0)dz_1\wedge d\bar z_1+...+\lambda_n(z^0)dz_n\wedge d\bar z_n]$. Therefore, the function $u(z)$ in the direction of the $m-$ dimensional plane

$$\Pi=\{z^0\}+T^{-1}\{z_{m+1}=...=z_n=0\},\ z^0\in\Pi,\ \dim\Pi=m,$$

is "harmonic $\Delta u|_{\Pi}=0$ in the fixed point $z=z^0$.

**Problem 1.** If $\mathcal{M}_u(z)\equiv 0$ in $D$, then in $D$ there is field $\mathcal{J}$ of the directions of the $m-$ dimensional planes $\Pi\ni z^0:\ u|_{\Pi}$ is harmonic in the point $z^0$. *Will the domain $D$ fibers by the envelopes of these integral spases? Namely, for any point $z^0\in D$ there is a surface $S\ni z^0$, $\dim S=m$ such that, the restriction $u|_S$ is harmonic on $S$ with respect to the induced metric.*

A similar result in the class of *psh* functions for the Monge-Ampère operator $(dd^cu)^n$ was proved in the paper of E. Bedford and M. Kalka .

Now, we will consider the Dirichlet problem for the equation

$$\mathcal{M}_u(z)=\psi(z),\ u(z)\in m-sh(D),\ u|_{\partial D}=\varphi(\xi),$$

$$\psi(z)\in C(\overline{D}),\ \varphi(\xi)\in C(\partial D),\ \psi(z)\geq 0 \tag{3}$$

We assume that the domain D is bounded, strictly $m-$ pseudoconvex, i.e., in a neighborhood of the closure $\overline{D}$ there exists a strictly $m-sh$ function $\rho(z)$ such that $d\rho|_{\partial D}\neq 0,\ D=\{\rho(z)<0\}$. To find a solution of (3)we will be guided by the general theory of the existence of solutions of the Dirichlet problem for the equation in the Hessians.

We denote

$$f(\lambda)=\left[\prod_{1\leq j_1<...<j_m\leq n}(\lambda_{j_1}+...+\lambda_{j_m})\right]^{\alpha_m},\ \lambda=(\lambda_1+...+\lambda_n)\in\mathbf{R}^n.$$

Then, $\mathcal{M}_u(z)=f\left(\lambda_1(z),\lambda_2(z)...,\lambda_n(z)\right)$, where $\lambda_1(z),\lambda_2(z)...,\lambda_n(z)$ are the eigenvalues of the complex Hessian matrix $\left(\frac{\partial^2u}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right)$. One can check, the function $f(\lambda)$ is positive, concave and strictly increasing on the convex cone

$$\Gamma=\{(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in\mathbf{R}^n:\ \lambda_{j_1}+\lambda_{j_2}+...+\lambda_{j_m}\geq 0,$$

$$\forall\,1\leq j_1<j_2<...<j_m\leq n\}.$$

Note, that $\Gamma$ is symmetric in $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ with vertex in the point 0. Moreover, the function $f(\lambda)$ satisfies the following properties:

a) $f(\lambda)=0\ \forall\lambda\in\partial\Gamma$;

b) *For any compact set $K\subset\subset\Gamma$ we have*

$$\lim_{R\to\infty}f(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n-1},\lambda_n+R)=\infty,\ \lim_{R\to\infty}f(\lambda R)=\infty$$

*uniformly in $\lambda\in K$.*

The following theorems follow from these properties of $f(\lambda)$.

**Theorem 1.** *If $D$ is strictly $m-$ pseudoconvex and $\psi(z)\in C^\infty(\overline{D}),\ \psi(z)>0,\ \varphi(\xi)\in C^\infty(\partial D)$, then (3) has a unique solution $u(z)\in m-sh(D)\cap C^\infty(\overline{D})$.*

**Theorem 2.** (Maximum principle). *Let* $u, v \in m - sh(D) \cap C^2(\overline{D})$ : $\mathbf{M}_u(z) \leq \mathbf{M}_v(z)\ \forall z \in D$. *Then* $u|_{\partial D} \geq v|_{\partial D} \ \Rightarrow \ u|_D \geq v|_D$

These Theorems we will apply to the degenerate equation, which is more complicated.

$$\mathcal{M}_u(z) = 0,\ u(z) \in m - sh(D),\ u|_{\partial D} = \varphi(\xi),\ \varphi(\xi) \in C(\partial D) \qquad (4)$$

For the class of *psh* functions (case $m = 1$ ) the solution of (4), namely $(dd^c u)^n = 0,\ u(z) \in psh(D),\ u|_{\partial D} = \varphi(\xi),\ \varphi(\xi) \in C(\partial D)$ is well studied. When $D = \{|z| < 1\}-$ ball and $\varphi(\xi) \in C^2(\partial D)$ E. Bedford and B.A. Taylor proved that the solution of (4) belongs to the class $C^{1,1}$. A similar result will also occur in more general settings (see, for example, the papers of Caffarelly L., Kohn J.J., Nirenberg L., Spruck J.). At the same time, the example of E. Bedford and J.E. Fornaess shows that, generally speaking, the solutions of (4) does not have a higher smoothness, say $C^2$.

To construct a solution of the degenerate equation (4) we consider the sequence

$$\varphi_k(\xi) \in C^\infty \partial D,\ \varphi_k(\xi) \geq \varphi_{k+1}(\xi),\ \| \varphi_k - \varphi \| \leq \frac{1}{k},\ k = 1, 2, ...,$$

and by the Theorem 1, we find the solutions

$$u_k \in C^\infty(\overline{D}),\ \mathcal{M}_{u_k}(z) = \frac{1}{k},\ u_k|_{\partial D} = \varphi_k.$$

**Theorem 3.** *The sequence* $u_k(z)$ *converges uniformly in* $\overline{D}$. *Its limit* $u(z) = \lim\limits_{k \to \infty} u_k(z)$ *is maximal function in* $D$, $u(z) \in C(\overline{D})$, $u|_{\partial D} = \varphi$.

This limit is naturally called the solution of the Dirichlet problem (4), although the operator $\mathcal{M}_u$ is not yet defined for continuous functions.

Expansion of the operator $\mathcal{M}_u(z)$ from the class $C^2$ to the class $C \cap m - sh(D)$ is one of fundamental problems in the construction of potential theory in the class of $m-$ subharmonic functions. Indeed, for a rich class of (regular) compact sets $K \subset D$ , the $\mathcal{P}_m$ -measure $\omega^*(z, K, D)$ is continuous function in $D$.

This problem is not new. For example, in the real analysis, in the theory of convex functions in $\mathbf{R}^n$ A.D. Aleksandrov , I.J. Bakelman showed that the Monge-Ampère operator

$$\mathcal{MA}_u(x) = \prod_j \lambda_j(x)$$

defined in the class $C^2$, continuously extends into class of continuous convex functions, $C \cap \text{convex}(D)$ as a Borel measure. Here $\lambda_j(x),\ j = 1, 2, ..., n$, are the eigenvalues of the matrix $D^2 u(x)$ at a fixed point $x$.

The problem of extending the operator $\mathcal{M}_u(z)$ to the class $C \cap m - sh(D)$ is related to the following problem

**Problem 2.** (Comparison principle). *Let* $u, v \in C^2(\overline{D}) \cap m - sh(D)$ : $u|_D \geq v|_D$, $u|_{\partial D} = v|_{\partial D}$, *where* $\partial D$ *is a smooth surface. Prove that the following inequality holds*

$$\int_D \mathcal{M}_u(z) dV \leq \int_D \mathcal{M}_v(z) dV \tag{5}$$

For plurisubharmonic functions and for the Monge-Ampère operator, the comparison principle was proved by Bedford-Taylor, and for $m-$ convex functions in $\mathbf{R}^n$ inequalities type (5) were considered by many authors, Krylov, Ivochkina, Trudinger, Wang, and others.


[1] Abdullayev B.I., Subharmonic functions on complex Hyperplanes of $\mathbf{C}^n$. Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, Krasnoyarsk, 6(4), (2013), 409-416.

[2] Abdullayev B.I., $\mathcal{P}$ -measure in the class of $m - wsh$ functions. Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, Krasnoyarsk, 7(1), (2014), 3-9.

[3] Abdullaev B., Sadullaev A., Potential Theory in the class of $m-$ subharmonic functions. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics RAN, V. 279, (2012), 155-180.

[4] Aleksandrov A.D., Dirichlet problem for the equation $\det(z_{i,j}) = \varphi$. Vestnik Leningrad Univ. V.13, (1958), 5-24.

[5] Bakelman I.J., Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations, Springer-Verlag, 1994.

[6] Bedford E., Survey of pluripotential theory, Several Complex Variables. Math. Notes, V.38, (1993), 48-95.

[7] Bedford E., Fornaess J.E., Counterexamples to regularity for the complex Monge-Ampère equation. Invent. Math., V. 50 (1979), 129-134.

[8] Bedford E., Kalka M., Foliations and complex Monge-Ampère equation, Comm. Pure Appl. Math., V. XXX, (1977), 543-571.

[9] Caffarelly L., Nirenberg L., Spruck J., The Dirichlet problem for non linear second order elliptic equations, III. Functions of eigenvalues of the Hessian. Acta Math. V. 155 ,(1985), 261-301.

[10] Drnovšek B.D., Forstnerič F., Minimal hulls of compact sets in $\mathbf{R}^3$ . (preprint)

[11] Harvey F.R. and Lawson H. B. Jr., Calibrated geometries. Acta Mathematica V. 148, (1982), 47-157.

[12] Harvey F. R. and Lawson H. B. Jr., An introduction to potential theory in calibrated geometry. Amer. J. Math., V. 131, no. 4, (2009), 893-944.

[13] Harvey F. R. and Lawson H. B. Jr., Duality of positive currents and plurisubharmonic functions in calibrated geometry. Amer. J. Math.,V. 131, no. 5, (2009), 1211-1240.

[14] Harvey F. R. and Lawson H. B. Jr., Plurisubharmonicity in a general geometric context. Geometry and Analysis I, (2010), 363-401.

[15] Harvey F. R. and Lawson H. B. Jr., Geometric plurisubharmonicity and convexity - an introduction. Advances in Mathematics, V. 230, (2012), 2428-2456.

[16] Ivochkina N., Trudinger N.S., Wang X.-J., The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations, Comm. Partial Diff. Equations, V. 29, (2004), 219-235.

[17] Joyce D., Riemannian holonomy groups and calibrated geometry. Oxford Graduate Texts in Mathematics 12, OUP, 2007.

[18] Li S.Y., On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian. Asian J. Math., V.8, (2004), 87-106.

[19] Sadullaev A., Pluripotential Theory. Applications. Palmarium Akademic Publishing, Germany, 2012.

[20] Trudinger N.S., Wang X.J., Hessian measures II . Ann.of Math., V.150, (1999), 579-604.

[21] Verbitsky M., Plurisubharmonic functions in calibrated geometry and convexity. Mathematische Zeitschrift, V. 264, no.4, (2010), 939 -957.

## On the completeness of eigenfunctions of a Sturm - Liouville operator

**Volkan Ala, Khanlar R. Mamedov**
Mersin University, Department of Mathematics, Turkey

In this work we consider Sturm-Liouville problem with eigenparameter-dependent boundary conditions

$$l(y) := -y''(x) + q(x)y(x) \tag{1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$\beta_1 y(\pi) - \beta_2 y'(\pi) = \lambda[\gamma_1 y(\pi) - \gamma_2 y'(\pi)], \tag{3}$$

$$y(c-0) = y(c+0), \tag{4}$$

$$y'(c-0) = y'(c+0), \tag{5}$$

where is complex spectral parameter and $q(x)$ is real valued continuous function on the intervals $[0, c)$ and $(c, \pi]$ that has finite limits $q(c \pm 0) = \lim_{x \to c \pm 0} q(x)$; $\beta_i, \gamma_j (i, j = 1, 2)$ are real constants. We assume that $\rho = \begin{vmatrix} \beta_1 \beta_2 \\ \gamma_1 \gamma_2 \end{vmatrix} > 0$. It is investigated the simplicitily of eigenvalues, completeness of eigenfunctions and basis property of Sturm-Liouville problem with a spectral parameter in boundary conditions.


[1] Mamedov Kh. R., On Boundary Value Problem with Parameter in Boundary Conditions, Spektralnaya Teoriya Operatorov ii ee Prilozheniya, Baku,Azerbaijan,XI,117-121,1997.

[2] Mamedov Kh. R., On a Basic for a second Order Differential Ewuation with a Discontinouos Coefficient and a Spectral Parameter in the Boundary Conditions, Geometry Integrability and Quantization, Softex, Sofia, pp. 218-225,2005.

[3] Gulmamedov Y. V., Mamedov Kh. R., On Basis Property for a Boundary-Value Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Condition, Cankaya University,Journal of Arts and Sciences, No.5, May 2006.

[4] Wang A., Sun J., Hao X., Yao S., Completeness of Eigenfunctions Of Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions, Methods and Applications of Analysis, Vol. 12, No.3, pp. 299-312,2009.


## Критерий компактности интегрального оператора с логарифмическим ядром


**Абылаева А.М.**

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, г.Астана, Казахстан


Пусть $0 < p, q < \infty$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и $v$, $w$ - весовые функции, т.е. неотрицательные, измеримые на $I = (0, +\infty)$ функции такие, что $v \in L_1^{loc}(I)$, $w \in L_1(0, t)$, $\forall t > 0$. Положим $W(x) = \int\limits_0^x w(s)ds$, $x > 0$.

Рассмотрим вопрос о компактности из $L_{p,w} \equiv L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v} \equiv L_{q,v}(I)$ интегрального оператора

$$Kf(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{W(s)} \ln \frac{W(x)}{W(x) - W(s)} w(s)ds, \ \ x \in I, \tag{1}$$

где $L_{p,w}$ - пространство всех измеримых на $I$ функции таких, что

$$\|f\|_{p,w} = \left( \int_0^x |f(s)|^p w(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

При $W(x) = x$ и $w(s) = 1$ критерии ограниченности и компактности из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ оператора (1) получены в работе [1].

**Теорема**. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ . Оператор $K$ компактен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ тогда и только тогда, когда

$$1) \ A = \sup_{x>0} W^{\frac{1}{p'}}(x) \left( \int_x^\infty \frac{v(s)}{W^q(s)} ds \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

$$2) \ \lim_{x\to 0} A(x) = \lim_{x\to\infty} A(x) = 0,$$

при этом $\|K\| \approx A$.

[1] A.M.Abylayeva and L.-E. Persson. Hardy type inequalities and compactness of a class of integral operators with logarithmic singularities, Vol. 21, N1, 201-215, 2018.

## О разрешимости операторно – дифференциального уравнения четвертого порядка, моделирующего задачу теории упругости

**Алиев А.Р., Багир-заде Б.А.**

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,

Институт систем управления НАН Азербайджана г.Баку, Азербайджан

В настоящем докладе будут доложены результаты, связанные с разрешимостью одного класса эллиптических операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка, главная часть которых обладает кратной характеристикой. Рассматриваемый класс уравнений исследуется на всей оси. Проведены оценки норм операторов промежуточных производных в пространстве типа Соболева четвертого порядка. При этом указана связь этих оценок с условиями разрешимости. Основным результатом работы является установление достаточных условий корректной и однозначной разрешимости в пространстве типа Соболева для исследуемых уравнений. Отметим, что условия разрешимости выражены лишь с помощью свойств операторных коэффициентов операторно-дифференциальных уравнений.

## Вырожденные краевые условия

**Ахтямов А.М.**
Башкирский государственный университет, Институт механики им. Р.Р. мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Краевые условия для случая $\Delta(\lambda) \equiv C = \text{const}$ были названы в работе В.А. Марченко [1, С. 35] *вырожденными краевыми условиями.*

В 1927 году М.Х. Стоун опубликовал статью [2], в которой было показано, что если потенциальная функция $q(x)$ является симметрической (т.е. $q(x) = q(\pi - x)$), то любое комплексное число является точкой спектра краевой задачи $y'' + \lambda\, y + q(x)\, y,\quad y(0) + (1) = 0,\quad y'(0) - y'(1) = 0$. Т.е. спектр этой краевой задачи полностью заполняет всю плоскость.

Первые результаты для дифференциальных операторов произвольного четного порядка были получены в 1982 году в работе В.А. Садовничего и Б.Е. Кангужина [4] (1982) (см. также работы Джона Локкера [5] (2006). В статье В.А. Садовничего и Б.Е. Кангужина было показано, что для любого четного порядка существуют дифференциальные операторы, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Эти краевые условия имели следующий вид

$$U_j(y) = y^{(j-1)}(0) + (-1)^{j-1}\, y^{(j-1)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

А в работе А.С. Макина [3] показано, что если $d \neq \pm 1$, $n = 2\nu$, $\nu > 1$, то характеристический определитель задачи

$$\begin{gathered} y^{(n)}(x) + \textstyle\sum_{m=1}^{n} p_m(x) y^{(n-m)}(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y^{(2\nu-j)}(0) + d(-1)^{j+1} y^{(2\nu-j)}(1) = 0 \end{gathered}$$

тождественно равен константе, отличной от нуля.

Однако в связи с этим возникает еще один вопрос, существуют ли другие примеры операторов, помимо приведенных в [4], спектр соотвествующих задач для которых полностью заполняет всю комплексную плоскость. В работе А.М. Ахтямова [6] (2017) показано, что такие примеры существуют. Кроме того, описаны все 12 классов краевых задач на собственные значения для оператора $D^4$, спектр которого заполняет всю комплексную плоскость. Каждый из этих классов краевых условий содержит произвольную константу. Получается, что для оператора дифференцирования четвертого порядка число краевых условий, спектр соотвествующих задач для которых полностью заполняет всю комплексную плоскость бесконечно много (континуум).

До недавного времени оставался открытым вопрос, сформулированный в частности в работе Джона Локкера [5] в 2006 году: существуют ли спектральные задачи с дифференциальным уравнением нечетного порядка, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. А.М. Ахтямовым в 2017 году [7] было показано, что такие операторы существуют. Для любого нечетного порядка были приведены примеры подобных операторов.

Существуют ли другие примеры подобных операторов? В 2018 году в работе А.М. Ахтямова [8] для оператора дифференцирования третьего порядка дан отрицательный ответ на этот вопрос. Описаны все краевые задачи для оператора дифференцирования третьего порядка, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Для оператора дифференцирования третьего порядка они совпадают с найденными в работе [7]. Причем, в отличие от случая оператора дифференцирования четвертого порядка, для оператора дифференцирования третьего порядка количество краевых задач, спектр которых полностью заполняет всю плоскость, — конечное число. В работе [8] найдены также условия для которых характеристический определитель тождественен константе.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан (проекты 18-51-06002-Аз_а, 18-01-00250-а, 17-41-020230-р_а), а также Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (проект 1-го Азербайджанско-Российского международного конкурса грантов (EIF-BGM-4-RFTF-1/2017)).

[1] Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 332 с.

[2] Stone M.H. Irregular differential systems of order two and the related expansion problems // Trans. Amer. Math. Soc., 1927. Vol. 29. P. 23–53.

[3] Makin A.S. Two-point boundary-value problems with nonclassical asymptotics on the spectrum // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 95, P. 1–7.

[4] Садовничий В.А., Кангужин Б.Е. О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // ДАН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 310-313.

[5] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators, August 29, 2006. https://dspace.library.colostate.edu/bitstream/handle/10217/170086/BKSF_Locker_Eigenvalues-Completeness.pdf?sequence=1

[6] Akhtyamov A.M. On Degenerate Boundary Conditions for Operator $D^4$ // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Eds.: Kalmenov T.S., Nursultanov E.D., Ruzhansky M.V., Sadybekov M.A. Springer, 2017. V. 216. P. 195-203.

[7] Ахтямов А.М. О спектре дифференциального оператора нечетного порядка // Матем. заметки, 2017, Т. 101, No 5. С. 643-646

[8] Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия для дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 427.

## Об асимптотическом поведении корней характеристических полиномов сингулярных дифференциальных уравнений

**Бакирова З.А., Назирова Э.А.**

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассмотрим дифференциальное уравнение 4-го порядка вида:

$$y^{IV} + (p(x)y')' + q(x)y = 0, \quad x \in (0, \infty). \tag{1}$$

Будем считать, что функции $p(x), ; q(x)$ удовлетворяют условиям Титчмарша - Левитана. Эти условия выполняются, например, для степенных функций: $p(x) = ax^{\gamma}, \ q(x) = bx^{\sigma}$.

Известно, [1], что решения данного уравнения , при выполнении приведенных условий, имеют асимптотическое представление вида:

$$y_i(x) \sim \left(\frac{\partial F(x, \mu_i)}{\partial \mu}\right)^{-1/2} e^{\int\limits_0^t \mu_i(t)dt}(1 + o(1)), \ x \to \infty,$$

где $F(x, \mu)$ – характеристический многочлен, соответствующий дифференциальному уравнению (1), а $\mu_i(x)$ – его корни:

$$F(x, \mu) = \mu^4 + p(x)\mu^2 + q(x) = 0.$$

Очевидно, что функции $p(x)$ и $q(x)$ могут иметь разный темп роста на бесконечности, соответственно и вклад каждой из этих функций в характеристический многочлен может быть разный. Рассмотрим три случая.

$$1. \lim_{x\to\infty} \frac{p}{\sqrt{q}} = 0, \qquad 2. \lim_{x\to\infty} \frac{p}{\sqrt{q}} = +\infty \qquad 3. \lim_{x\to\infty} \frac{p}{\sqrt{q}} = c = const.$$

В каждом из трех случаев, после подходящей замены переменной, мы можем получить алгебраическое уравнение 4-го порядка с малым параметром. Исследуя асимптотическое поведение решений такого уравнения

с помощью метода диаграмм Ньютона, получаем асимптотические формулы для корней характеристического уравнения:
1. $\mu_i(x) = \varepsilon_i \sqrt[4]{q(x)} + o(\sqrt[4]{q(x)})$, где $\varepsilon_i$ —различные корни из $-1$.
2. $\mu_{1,2}(x) = \pm i\sqrt{p(x)} + o(\sqrt{p(x)})$, $\quad \mu_{3,4}(x) = \pm i\sqrt{q(x)/p(x)} + o(\sqrt{q(x)/p(x)})$,
3. $\mu_i(x) = \hat{s}_i q \sqrt[4]{q(x)} + o(\sqrt[4]{q(x)})$, где $\hat{s}_i$ — комплексные корни уравнения $s^4 + cs^2 + 1 = 0$.

Полученные асимптотики позволяют исследовать поведение при $x \to \infty$ фундаментальной системы решений уравнения (1).

Отметим так же, что аналогичные рассуждения можно провести для линейных сингулярных уравнений более высоких порядков.

**Благодарности**. Работа выполнена при поддержке РФФИ (18-51-06002 Аз-а).

[1] Федорюк М.Ф. Асимптотические методы для линейных ОДУ. М. Наука.1983

[2] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. — М.: Наука, 1978. – 376 с.

[3] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.

## О базисности в $L_p\,(0,1)$ собственных функций одного дифференциального оператора второго порядка с точкой разрыва

**Билалов Б.Т., Касумов Т.Б., Магеррамова Г.В.**
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

В работе изучаются базисные свойства в лебеговых пространствах собственных функций одной спектральной задачи для разрывного дифференциального оператора второго порядка со спектральным параметром в условиях разрыва. Предлагается новый метод доказательства базисности собственных функций в пространствах $L_p \oplus C$ и $L_p$.

Рассмотрим следующую спектральную задачу с точкой разрыва

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,\, x \in (0,\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3},\, 1), \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = y(1) = 0, \\ y(\frac{1}{3} - 0) = y(\frac{1}{3} + 0), \\ y'(\frac{1}{3} - 0) - y'(\frac{1}{3} + 0) = \lambda m y(\frac{1}{3}), \end{array}\right\} \tag{2}$$

которая возникает при решении задачи колебания нагруженной струны с закрепленными концами [1]. Изучение базисных свойств систем из собственных функций спектральных задач с точкой разрыва иногда требует привлечение иных методов, отличных от ранее известных. В работах [2,3] предложен новый способ исследования базисных свойств разрывных дифференциальных операторов. Настоящая работа является развитием метода работ [2, 3].

Спектральная задача (1), (2) имеет две серии собственных значений: $\lambda_{1,n} = (3\pi n)^2$ , $n \in N$, $\lambda_{2,n} = (\rho_{2,n})^2$, где $\rho_{2,n} = \frac{3\pi n}{2} + \frac{2+(-1)^n}{\pi m n} + O\left(\frac{1}{n}\right), n \in N \cup \{0\}$. Соответствующие собственные функции задаются следующими выражениями

$$y_{1,n}(x) = \sin 3\pi n x, x \in [0,1], \qquad n = 1, 2, ..., \tag{3}$$

$$y_{2,n}(x) = \begin{cases} \sin \rho_{2,n}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \sin \rho_{2,n}\left(x + \frac{1}{3}\right), \ x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \sin \rho_{2,n}(1 - x), \ x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \qquad n = 0, 1, 2, ... \end{cases} . \tag{4}$$

Определим оператор $L$ следующим образом. В качестве области определения $D(L)$ берем многообразие

$$D(L) = \left\{\hat{y} = \left(y(x), my\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) : y(x) \in W_p^2\left(0, \tfrac{1}{3}\right) \oplus W_p^2\left(\tfrac{1}{3}, 1\right), \right.$$
$$\left. y(0) = y(1) = 0, \quad y\left(\tfrac{1}{3} - 0\right) = y\left(\tfrac{1}{3} + 0\right)\right\},$$

и для $\hat{y} \in D(L)$ оператор $L$ определяется соотношением

$$L\hat{y} = \left(-y''; \ y'\left(\frac{1}{3} - 0\right) - y'\left(\frac{1}{3} + 0\right)\right).$$

Оператор $L$ действует в пространстве $L_p(0, \ 1) \oplus C$, его собственными значениями являются числа $\lambda_{i,n}$ а собственные (присоединенные) вектора имеют вид: $\hat{y}_{i,n} = \left(y_{i,n}(x), my\left(\frac{1}{3}\right)\right)$, где $y_{i,n}$ определены (3),(4).

Пусть $X$ банахово пространство и $\{u_{kn}\}_{k=\overline{1,m};n\in N}$ некоторая система в $X$. Пусть$a_{ik}^{(n)}$ , $i,k = \overline{1,m}$ , $n \in N$, некоторые комплексные числа, $A_n = \left(a_{ik}^{(n)}\right)_{i,k=\overline{1,m}}$ и $\Delta_n = \det A_n$, $n \in N$. Рассмотрим в пространстве $X$ следующую систему $\hat{u}_{kn} = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}^{(n)} u_{in}, \quad k = \overline{1,m}; n \in N$.

Справедливы следующие теоремы.

***Теорема 1.*** *Если система $\{u_{kn}\}_{k=\overline{1,m};n\in N}$ образует базис в $X$ и выполняются условия а) $\Delta_n \neq 0$, $\forall n \in N$, то система $\{\hat{u}_{kn}\}_{k=\overline{1,m};n\in N}$ образует базис со скобками в $X$. Если дополнительно выполняются условия б) $\sup\limits_n \{ \|A_n\|, \left\|A_n^{-1}\right\| \} < \infty$, $\sup\limits_n \{\|u_{kn}\|, \|\vartheta_{kn}\|\} < \infty$, где $\{\vartheta_{kn}\}_{k=\overline{1,m};n\in N} \subset X^*$- биортогональная к $\{u_{kn}\}_{k=\overline{1,m};n\in N}$ система, то система $\{\hat{u}_{kn}\}_{k=\overline{1,m};n\in N}$ образует обычный базис в $X$. Если $X$ гильбертово пространство и система $\{u_{kn}\}_{k=\overline{1,m};n\in N}$ образует базис Рисса в*

*X,то при выполнении условия а) система* $\{\hat{u}_{kn}\}_{k\in\overline{1,m};n\in N}$ *образует базис Рисса со скобками в X. Если дополнительно выполняются условия б), то система* $\{\hat{u}_{kn}\}_{k\in\overline{1,m};n\in N}$ *образует обычный базис Рисса в X.*

***Теорема 2.*** *Система* $\{\hat{y}_{i,n}\}_{i=1,2;n\in N}$ *собственных и присоединенных векторов оператора L образует базис в пространстве* $L_p(0,1)\oplus C$ , $1<p<\infty$. *При* $p=2$ *этот базис является базисом Рисса .*

***Теорема 3.*** *Если из системы* $\{y_0\}\cup\{y_{i,n}\}_{i=1,2;n\in N}^{\infty}$ *собственных и присоединенных функций задачи (1),(2) исключить любую функцию* $y_{2,n_0}(x)$, *соответствующей простому собственному значению , то полученная система образует базис в* $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, *и базис Рисса при* $p=2$ . *Если же из этой системы исключить любую функцию* $y_{1,n_0}(x)$, *то полученная система не образует базис в* $L_p(0,1)$ *, более того, в этом случае полученная система не полна и не минимальна в этом пространстве.*


[1] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнение математической физики // Москва, Наука, 766 с.

[2] *Bilalov B.T., Gasymov T.B.* On bases for direct decomposition // Doklady Mathematics 2016, v. 93, No 2, p. 183-185.

[3] *Bilalov B.T., Gasymov T.B.* On basicity a system of eigenfunctions of second order discontinuous differential operator // Ufa Mathematical Journal, 2017, v. 9, No 1, p.109-122.


## О разделимости разностного оператора высокого порядка


**Бейсенова Д.Р.**

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан


В работе рассматривается минимальный замкнутый в пространстве $l_2$ разностный оператор $L$, заданный следующим выражением

$$Ly=\Delta^{(2n)}y+r\Delta^{(2n-1)}y+s\overline{\Delta^{(2n-1)}y}$$

$$+\sum_{j=1}^{2n-1}\left(Q^{(j)}\Delta^{(2n-j-1)}y+P^{(j)}\overline{\Delta^{(2n-j-1)}}y\right),$$

где $y=\{y_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta_+y_k=y_{k+1}-y_k$, $\Delta^{(2)}y_k=\Delta_-\Delta_+y_k=y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}$ $(k\in Z)$, $\Delta^{(2s)}y=\Delta^{(2)}\Delta^{(2s-2)}y$, $\Delta^{(2s-1)}y=\Delta_+\Delta^{(2s-2)}y$ $(s\in N)$, а $r=\{\mathrm{diag}, r_{jj}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $s=\{\mathrm{diag}, s_{jj}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $Q^{(\theta)}=\{\mathrm{diag}, q_{jj}^{(\theta)}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $P^{(\theta)}=\{\mathrm{diag}, p_{jj}^{(\theta)}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ $(\theta=\overline{1,2n-1})$– некоторые диагональные матрицы.

Оператор $L$ называют разделимым в пространстве $l_2$ если для любого $y \in l_2$ справедливо неравенство

$$\left\|\Delta^{(2n)}y\right\|_2 + \left\|r\Delta^{(2n-1)}y\right\|_2 + \left\|s\overline{\Delta^{(2n-1)}y}\right\|_2 +$$

$$+\sum_{j=1}^{2n-1}\left(\left\|Q^{(j)}\Delta^{(2n-j-1)}y\right\|_2 + \left\|P^{(j)}\Delta^{(2n-j-1)}y\right\|_2\right) \le C_1\left(\|L_0 y\|_2 + \|y\|_2\right).$$

В работе найдены условия непрерывной обратимости и разделимости оператора $L$ в $l_2$. Эти условия допускают, в частности, что рост последовательностей $\widetilde{r} = \{r_{jj}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\widetilde{s} = \{s_{jj}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\widetilde{Q}^{(s)} = \{q_{jj}^{\theta}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ ($s = \overline{1, 2n-2}$), $\widetilde{P}^{(\theta)} = \{p_{jj}^{\theta}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ ($\theta = \overline{1, 2n-1}$), составленных из элементов матриц промежуточных коэффициентов оператора могут не контролироваться потенциалом $Q^{(2n-1)}$. Полученные результаты обобщают утверждения [1].

Работа поддержана грантовым проектом AP05131649 Министерства образования и науки Республики Казахстан и научным фондом Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева.

[1] Ospanov K.N., Bekjan T.N., Beissenova D.R. Coercive solvability conditions of an infinite system of difference equations with complex coefficients // Bulletin of E.A. Buketov KarSU. Math. series. 2017, №3(87), 59-69.

## Неполная обратная задача для пучка дифференциальных операторов на графе с циклами

**Бондаренко Н.П.[1,2], Гайдель А.В.[2]**

[1]Саратовский государственный университет, г. Саратов, Россия;
[2]Самарский университет, г. Самара, Россия

Рассмотрим компактный связный граф $G$ с множеством вершин $V$ и множеством ребер $E = \{e_j\}_{j=1}^{m}$. На каждом ребре $e_j$, $j = \overline{1, m}$, введем параметр $x_j \in [0, T_j]$, где $T_j$ — длина ребра $e_j$. Обозначим вершины, инцидентные $e_j$, через $w_{2j-1}$ и $w_{2j}$. Значение $x_j = 0$ соответствует вершине $w_{2j-1}$, а $x_j = T_j$ соответствует $w_{2j}$. Обозначим через $\partial G$ и $\operatorname{int} G$ множества граничных и внутренних вершин, соответственно. Пусть для определенности ребро $e_1$ — граничное.

Рассмотрим на графе $G$ пучок $L$ дифференциальных операторов Штурма - Лиувилля с нелинейной зависимостью от спектрального параметра

$\lambda$ следующего вида:

$$-y_j''(x_j) + (q_j(x_j) + 2\lambda p_j(x_j) - \lambda^2) y_j(x_j) = 0, \quad x_j \in (0, T_j), \quad j = \overline{1, m},$$
$$y_{|w_j} = y_{|w_k}, \quad w_j = w_k = v, \quad v \in \operatorname{int} G,$$
$$\sum_{w_j = v} y'_{|w_j} = 0, \quad v \in \operatorname{int} G,$$
$$y_{|w_j} = 0, \quad w_j \in \partial G.$$

Здесь $y_j \in W_2^2[0, T_j]$, $p_j \in AC[0, T_j]$, $q_j \in L(0, T_j)$, $j = \overline{1, m}$, и

$$\begin{array}{ll} y_{|w_{2j-1}} = y_j(0), & y_{|w_{2j}} = y_j(T_j), \\ y'_{|w_{2j-1}} = -y_j'(0), & y'_{|w_{2j}} = y_j'(T_j), \end{array} \quad j = \overline{1, m}.$$

Обратным спектральным задачам для дифференциальных операторов на графах посвящен обзор [1]. В настоящей работе рассматривается *неполная обратная задача*: в предположении, что функции $\{p_j\}_{j=2}^m$ и $\{q_j\}_{j=2}^m$ известны a priori, построить $p_1$ и $q_1$ по части спектра $\Lambda'$ пучка $L$. Данная задача является обобщением задачи Хохштадта - Либермана [2], которая состоит в восстановлении потенциала Штурма - Лиувилля на конечном интервале по спектру при условии, что потенциал известен на половине интервала.

Вместе с пучком $L$ рассмотрим пучок $\tilde{L}$ того же вида, что и $L$, но с другими коэффициентами $\tilde{p}_j$ и $\tilde{q}_j$, $j = \overline{1, m}$. Пусть $\Lambda'$ и $\tilde{\Lambda}'$ — некоторые подспектры пучков $L$ и $\tilde{L}$, соответственно. Доказана следующая теорема единственности.

**Теорема**. Пусть $\Lambda' = \tilde{\Lambda}'$, $p_j = \tilde{p}_j$ в $AC[0, T_j]$ и $q_j = \tilde{q}_j$ в $L(0, T_j)$ для $j = \overline{2, m}$. Предположим, что для $(L, \Lambda')$ и $(\tilde{L}, \tilde{\Lambda}')$ выполнено условие $(A_1)$ и для подспектра $\Lambda'$ выполнены $(A_2)$ и $(A_3)$:

$(A_1)$ (условие разделенности): $\Delta^{\Pi}(\mu) \ne 0$ для всех $\mu \in \Lambda'$, где $\Delta^{\Pi}(\lambda)$ — характеристическая функция, построенная по графу, полученному из $G$ путем удаления граничного ребра $e_1$ (см. подробности в [3]).

$(A_2)$ Существует последовательность $\{\mu_n\} \subset \Lambda'$, такая, что $|\operatorname{Im} \mu_n| = O(1)$, $|\mu_n| \to \infty$ при $n \to \infty$.

$(A_3)$ Любая целая аналитическая функция $D(\lambda)$, для которой

$$D(\lambda) = O\left(|\lambda|^{-2} \exp(2T_1 |\operatorname{Im} \lambda|)\right), \quad |\lambda| \to \infty, \tag{1}$$

и $D(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \Lambda'$, тождественно равна нулю: $D(\lambda) \equiv 0$.

Тогда $p_1 = \tilde{p}_1$ в $AC[0, T]$ и $q_1 = \tilde{q}_1$ в $L[0, T]$.

Для случая рационально независимых длин ребер получено условие, достаточное для единственности решения неполной обратной задачи, в терминах асимптотики спектра, а также конструктивный алгоритм решения (см. [3]).

*Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект МК-686.2017.1). Работа автора Бондаренко Н.П. также поддержана Минобрнауки РФ (проект 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты 16-01-00015, 17-51-53180).*

[1] Юрко В.А. Обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на пространственных сетях // УМН. 2016. Т. 71, вып. 3(429). С. 149–196.

[2] Hochstadt H., Lieberman B. An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 34, no. 4. Pp. 676–680.

[3] Bondarenko N.P. Inverse problem for the differential pencil on an arbitrary graph with partial information given on the coefficients [Электронный ресурс] // Anal. Math. Phys. 2018. URL: https://doi.org/10.1007/s13324-018-0244-6

## О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Робена по спектру

**Бутерин С.А.**

Саратовский университет, Саратов, Россия

Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ – спектр краевой задачи $\mathcal{L}(q, M, h, H)$ вида

$$-y'' + q(x)y + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi,$$

$$y'(0) = hy(0), \quad y'(\pi) = -Hy(\pi),$$

где $q(x)$, $M(x)$ – комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L_2(0,\pi)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, а $h$, $H \in \mathbb{C}$. Рассмотрим обратную задачу:

**Задача 1.** По заданному спектру $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ найти функцию $M(x)$ и коэффициент $H$ в предположении, что $q(x)$ и $h$ известны априори. Альтернативно можно считать неизвестным коэффициент $h$, а $H$ – заданным.

Первое обстоятельное исследование задачи восстановления функции $M(x)$ по спектру было предпринято в [1] для краевых условий Дирихле. В [2] разработан подход, позволивший получить глобальное решение этой обратной задачи. Краевые условия Робена вносят дополнительные трудности (см. [3] для случая $q(x) = 0$). Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Задание спектра $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет коэффициент $H$ и функцию $M(x)$ с точностью до эквивалентности в предположении, что потенциал $q(x)$ и коэффициент $h$ известны априори.*

**Теорема 2.** *Пусть задана комплекснозначная функция* $q(x) \in L_2(0,\pi)$ *и число* $h \in \mathbb{C}$. *Тогда последовательность* $\{\lambda_n\}_{n\ge 0}$ *является спектром некоторой задачи* $\mathcal{L}(q,M,h,H)$, *если и только если она имеет вид*

$$\lambda_n = \Big(n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}\Big)^2, \quad \omega \in \mathbb{C}, \quad \{\varkappa_n\}_{n\ge 0} \in l_2.$$

Доказательство конструктивно и дает алгоритм решения задачи 1.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 17-11-01193).


[1] Юрко В.А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Т. 50. Вып. 5. С. 134–146.

[2] Бутерин С.А. О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма–Лиувилля по спектру // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46. Вып. 1. С. 146–149.

[3] Buterin S.A., Choque Rivero A.E. On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary bonditions // Appl. Math. Lett. 2015. Vol. 48. P. 150–155.


## Об оптимизационных обратных спектральных задачах с неполными данными и нелинейных дифференциальных уравнениях.

**Валеев Н.Ф., Ильясов Я.Ш.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа

Пусть задан оператор Штурма-Лиувилля

$$l_q y := -y'' + q(x)y, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

с краевыми условиями Дирихле

$$y(0) = y(1) = 0,$$

где $q \in L^2(0,1)$ – вещественная функция потенциала. Известно, что оператор $l_q$ с областью определения $D := \{y \in W^{2,2}(0,1) \mid \ y(0) = y(1) = 0\}$, является самосопряженным, спектр которого можно пронумеровать в порядке возрастания: $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < ... < \lambda_k(q) < ...$ (см. напр. [2, 8]).

Классическая обратная спектральная задача для оператора $l_q$ с областью определения $D$ формулируется, как нахождение потенциала $q(x)$ по заданным спектральным данным [1, 3, 5]. Известно, что для единственности решения этой задачи, знание только одного спектра $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ недостаточно [3, 5].

Мы изучаем обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов эллиптического типа с потенциалом $q(x)$ ( или коффициентами) подлежащему восстановлению по конечному числу спектральных данных. А именно, пусть даны первые $m$ собственных значений $\lambda_1(q) < ... < \lambda_m(q)$- требуется найти $q(x)$.

Поскольку такие задачи имеют неединственное решение и некорректны, то требуются некоторые дополнительные данные или условия. В качестве дополнительного условия, мы требуем , чтобы искомый потенциал $q(x)$ был наиболее близок к заданной функции $q_0(x)$.

В этом случае возникает следующая *оптимизационная обратная спектральная задача*: для заданной функции $q_0$ требуется найти ближайшую к ней в некоторой норме функцию потенциала $\hat{q}$ такую, что оператор $l_{\hat{q}}$ имел бы заданные $m$ собственных значений $\lambda_1(q) < ... < \lambda_m(q)$.

Установлен новый тип взаимосвязи между обратной спектральной проблемой для дифференциального оператора эллиптического типа и нелинейными краевыми задачи. Используя установленные нами новые соотношения, найдены точные решения для обратной спектральной с неполными данными, а также получены новые результаты о существовании и единственности решения для соответствующих нелинейный дифференциальных задач.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта ”Прямые методы спектрального анализа дифференциальных операторов и их восстановление по спектральным данным № 18-01-00250”.

[1] V. Ambarzumian "Uber eine frage der eigenwerttheorie” , Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei Т. 53, вып. 9 , 1929 г. , С 690–695.

[2] Ф. В. Аткинсон “ Дискретные и непрерывные граничные задачи” Пер. с англ. Мир, 1968.

[3] G. Borg “ Eine umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe” Acta Mathematica, Т. 78, вып. 1,1946, С 1–96

[4] H. Brezis, L. Oswald “Remarks on sublinear elliptic equations” ,Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications Т.10, вып. 1,1986 г.,С. 55–64

[5] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан “Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции” , Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 15,вып 4,1951 г. с.309–360

[6] D. Gilbarg, N. S. Trudinger “Elliptic partial differential equations of second order” , Springer, 2015 г.

[7] J. Pöschel, E. Trubowitz “ Inverse spectral theory” , Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987

[8] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов “ Операторы Штурма Лиувилля с потенциалами-распределениями”, Тр. Моск. Матем. Общ.,Т. 64, С. 159–212

## Регуляризованный след оператора Штурма – Лиувилля на кривой с регулярной особенностью на хорде

**Валиуллина Л.Г., Ишкин Х.К.**
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\gamma$ – кривая параметризацией $z = t + is(t)$, $t \in [0,1]$, где $s$ – кусочно-гладкая, выпуклая вниз функция, обращающаяся в 0 на концах $[0,1]$, $\Omega$ – область, ограниченная кривой $\gamma$ и ее хордой $[0,1]$, $Q \in L^1(\gamma)$. Далее пусть $L_\gamma$ – оператор с областью определения $D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma) : y' \in AC(\gamma),\ y' + Qy \in L^2(\gamma),\ y(0) = y(1) = 0\}$ и действующий по правилу $L_\gamma y = -y'' + Qy$. Если $Q$ голоморфна в области $\Omega$, непрерывна на $\overline{\Omega}$ и функция $q = Q|_{[0,1]}$ дважды непрерывно дифференцируема, то собственные числа $L_\gamma$ имеют асимптотику [1]

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 + \int_0^1 q(x)dx + O\left(n^{-2}\right),\ n \to +\infty. \tag{1}$$

В связи со сказанным возникает вопрос: *какой вид будет иметь формула* (1)*, если функция* $q$ *имеет неинтегрируемую особенность в интервале* $(0,1)$*?*

Пусть $q(z) = k(k+1)/(z-\theta)^2$, где $\theta \in (0,1), k \in \mathbb{R}$. Нами показано, что при целых $k$ спектр $L_\gamma$ имеет такую же асимптотику, как в регулярном случае, когда $q \in C^2(0,1)$. Более того, формула для регуляризованного следа полностью совпадает с классической формулой Гельфанда–Левитана–Дикого. При этом первая поправка имеет вид $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^1 q_\varepsilon(t)dt$, где $q_\varepsilon$ получается из $q$ заменой $\theta$ на $\theta - i\varepsilon$.

В случае, когда $k \notin \mathbb{Z}$, ситуация совершенно другая: оказалось, что на асимптотику существенно влияет точка $\theta$. А именно, если $\theta = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, то спектр разбивается на $2q$ серий, уходящих в бесконечность по параболам $l = t^2 + 2ic_m t$ $(m = \overline{1,2q})$, где $c_m$ – корни некоторого эффективно выписываемого уравнения степени $2q$. Если же точка $\theta$ иррациональна, можно лишь указать некоторую полуполосу, вне которой спектр конечен. Формула для регуляризованного следа, полученная при рациональном $\theta$, намного сложнее по сравнению со случаем целого $k$ и усмотреть какое-либо сходство с классической формулой нам не удалось.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

[1] Ишкин Х. К. Критерий локализации спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой // Алгебра и анализ. Т. 28, No 1. 2016. С. 52–88.

## О корректности одной задачи для интегро-дифференциального уравнения агрегации на римановом многообразии

**Вильданова В.Ф.**
БГПУ им. М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

В цилиндрической области $D^T = \mathcal{M} \times (0,T)$, где $\mathcal{M}$ – компактное риманово многообразие рассмотрим задачу для уравнения

$$b(x,u)_t = \operatorname{div}(a(x,u,du) - b(x,u)\mathcal{G}(u)) + f(x, b(x,u)) \tag{1}$$

с начальным и краевым условиями

$$b(x,u(x,0)) = b(x,u_0(x)),\ x \in \mathcal{M}, \tag{2}$$

$$\langle a(x,u,\nabla u) - b(x,u)\mathcal{G}(u), N\rangle_g = 0,\ x \in \partial\mathcal{M}, \tag{3}$$

где $N$ – внешнее поле единичных нормалей к краю многообразия. Интегральный оператор $\mathcal{G}(u)$ определяется формулой

$$\mathcal{G}(u) = \int\limits_{\mathcal{M}} X(y)\beta(u(y,t))d\nu, \tag{4}$$

где $X(y)$ – отображение точки $y \in \mathcal{M}$ в множество $\chi(\mathcal{M})$ векторных полей на этом многообразии; $\nu$ – мера, порожденная метрическим тензором $g_{ij}(x)$. $a(x,r,y)$ – функция на многообразии 1-джетов ($(x,r,y)$ – точка расслоения 1-джетов) тривиального расслоения $1_{\mathcal{M}}$ со значениями в множестве $\chi(\mathcal{M})$.

Функция $a(x,r,y)$ удовлетворяет условиям монотонности, ограниченности и коэрцитивности: пусть существуют функция $F(x) \in L_1(\mathcal{M})$ и непрерывная функция $C(m)$, $m \geq 0$ такие, что

$$\Lambda(x,r,y,z) = \langle a(x,r,y) - a(x,r,z), y - z\rangle \geq 0,\ y \neq z; \tag{5}$$

$$|a(x,r,y)|^{p_(x)} \leq C(m)(F(x) + |y|^{p(x)}), \tag{6}$$

$$\langle a(x,r,y), y\rangle \geq \delta_0|y|^{p(x)} - F(x),\ x \in \mathcal{M}, \tag{7}$$

где $(x, r, y)$ – произвольная точка расслоения 1-джетов, $|y| = \sqrt{g^{ij}(x)y_i y_j}$, $(x, y) \in T^*\mathcal{M}$.

Здесь функция $b(x, r)$ нечетная по $r \in \mathbb{R}$ и при некоторых $M_0, M_T$ удовлетворяет условию Липшица и условиям

$$sb(x, r) \leq rb(x, s), \text{ при } 0 < M_0 \leq r < s \leq M_T, \ x \in \mathcal{M}; \tag{8}$$

$$b(x, M_T) \in L_{\overline{p}(\cdot)}(\mathcal{M}). \tag{9}$$

Функция $q(x, r)$ определяется равенством $f = b(x, r)q(x, r)$ и ограничена

$$|q(x, r)| \leq q_0, \text{ при } |r| \leq M_T. \tag{10}$$

Целью работы является доказательство существования и единственности решений смешанной задачи (1) – (2).

**Теорема 1**. Пусть $B(x, u_0) \in L_1(\mathcal{M})$, $0 \leq u_0(x) \leq M_0$ и выполнены условия (5) – (10). Тогда существует число $T$, определяемое данными задачи, такое что существует слабое решение задачи (1) – (2).

При некоторых более жестких ограничениях доказана единственность решения задачи (1) – (2) в $D^T$.


[1] Вильданова В.Ф., Мукминов Ф.Х. Существование слабого решения интегро-дифференциального уравнения агрегации.//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 2017. 63:4, с. 557–572.


## Осцилляционные свойства положительных дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами


**Владимиров А. А.**

ВЦ им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия


Рассматривается положительно определённый обыкновенный дифференциальный оператор, отвечающий распадающимся граничным условиям и дифференциальному выражению

$$\ell(y) = (py'')'' - (qy')' + hy,$$

где функция $p \in L_\infty[0, 1]$ равномерно положительна, а обобщённые функции $q \in W_2^{-1}[0, 1]$ и $h \in W_2^{-2}[0, 1]$ вещественны. Установлено, что функция Грина такого оператора представляет собой осцилляционное ядро в том и только том случае, когда оно положительно как числовая функция на открытом квадрате $(0, 1) \times (0, 1)$. Получен также ряд обобщений указанного результата на случай задачи более высокого порядка.

## Спектральный анализ вольтерровых интегро - дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и их приложения

**Власов В.В.**
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г.Москва, Россия

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро - дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1], [2]) и имеют ряд других важных приложений. В частности, эти уравнения могут быть реализованы в виде следующей системы интегро - дифференциальных уравнений в частных производных

$$\rho\ddot{u}(x,t) - Lu(x,t) + \int\limits_0^t K_1(t-s)L_1u(x,s)ds + \\ + \int\limits_0^t K_2(t-s)L_2u(x,s)ds = f(x,t), \quad (1)$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, $t > 0$, среда заполняет ограниченную область $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $u$ удовлетворяет условиям Дирихле в области $\Omega$ с гладкой границей, $L_1 = \mu \cdot (\Delta u + \cdot \mathrm{grad\ div} u)$, $L_2 = \lambda \cdot \mathrm{grad\ div} u$, $Lu = (L_1 + L_2)u$ - оператор Ламе теории упругости, $K_1$, $K_2$ функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды.

Проводится спектральный анализ оператор - функций, являющихся символами указанных интегро - дифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра (см., [1], [2]).

Эти результаты являются обобщением результатов, опубликованных в работе [3].

[1] Власов В. В. Раутиан Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. – М.: МАКС Пресс, 2016, 488 с.

[2] Vlasov V. V., Rautian N. A. Well-Posedness and Spectral Analysis of Hyperbolic Volterra Equations of Convolution Type // Differential

and Difference Equations with Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2016, V. 164, P. 411–419.

[3] Vlasov V. V., Rautian N. A. Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory // Trans. Moscow Math. Soc., 2014, V. 75, P. 185–204.

## Неквазианалитические классы функций на дугах и экстремальные задачи

**Гайсин А.М.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\gamma$ – спрямляемая дуга, $M = \{M_n\}$ $(M_n > 0)$, $C_\gamma(M_n) = \{f \in C^\infty(\gamma)\colon \sup\limits_\gamma |f^{(n)}(t)| \le M_n \ (n \ge 0)\}$ – неквазианалитический класс Карлемана на $\gamma$. Тогда существует функция $f \in C_\gamma(M_n),\ f(z) \not\equiv 0,\ f^{(n)}(a) = 0$ при всех $n \ge 0$ в некоторой точке $a \in \gamma$.

Актуальным является изучение асимптотического поведения величины

$$J_M(z) = \sup\{|g(z)|\colon g \in C_\gamma(M_n),\ g^{(n)}(a) = 0 \quad (n \ge 0)\}$$

при $z \to a$ вдоль $\gamma$.

В докладе будут рассматриваться случай, когда $\gamma = [0,\, 1]$.

Если $M$ – регулярная последовательность, ассоциированный вес $P$ которой удовлетворяет условию Левинсона, то верны оценки:

$$\frac{1}{NP(\frac{\beta}{4})} \le J_M(\beta) \le \frac{1}{P(2q\beta)} \quad (0 < \beta < 1),$$

где $q,\ N$ – некоторые постоянные, зависящие только от $M$.

Как применение этого результата получена асимптотическая оценка снизу расстояния

$$\rho_\delta(\lambda_k) = \inf_i \|e^{\lambda_k t} - \sum_{\substack{n=1\\ n\ne k}}^{m_i} a_n^{(i)} e^{\lambda_n z}\|_{C[0,\,\delta]}, \quad 0 < \delta \le 1, \quad k = 1,\, 2,\, ...,$$

при $\delta \to 0$.

История вопроса и подробные доказательства утверждений приведены в [1].

[1] Гайсин А.М. Экстремальные задачи в неквазианалитических классах Карлемана // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 7. С. 44 – 70.

## Интерполяционные последовательности и их применения

**Гайсин Р.А.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $L$ — класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $l = l(x)$, таких, что $0 < l(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$,

$$W = \left\{ w \in L : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w(2^j)}{2^j} < \infty \right\}, \quad \Omega = \left\{ \omega \in W : \frac{\omega(x)}{x} \downarrow \text{ при } x \to \infty \right\}.$$

**Определение ([1]).** Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < |\lambda_n| \nearrow \infty)$ — последовательность попарно различных комплексных чисел. Последовательность $\Lambda$ называется *интерполяционной (в смысле Павлова-Коревара-Диксона)*, если найдется функция $\omega \in \Omega$, такая, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \le 1$, существует целая функция $f$, обладающая свойствами:

$$1)\ f(\lambda_n) = b_n \ \ (n \ge 1); \qquad 2)\ M_f(r) = \max_{|z| \le r} |f(z)| \le e^{\omega(r)}.$$

Впервые интерполяционные последовательности $\{p_n\}$ $(p_n \in \mathbb{N})$ рассматривал А.И. Павлов (1972). Я. Коревар и М. Диксон указали достаточные условия на числа $p_n$, при которых последовательности $\{p_n\}$ будут интерполяционными. А именно, было установлено, что так называемые последовательности А.И. Павлова и последовательности Т. Ковари являются интерполяционными [2].

В работе [3] доказан следующий критерий: *для того, чтобы последовательность $\{p_n\}$ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\omega \in \Omega$, такая, что:*

$$a)\ n(t) \le \omega(t); \qquad б)\ -\ln \prod_{\substack{\frac{p_n}{2} \le p_k \le 2p_n \\ k \ne n}} \left| 1 - \frac{p_n}{p_k} \right| \le \omega(p_n) \ \ (n \ge 1).$$

*Здесь $n(t)$ — считающая функция последовательности $\{p_n\}$.*

Для произвольной последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, критерий интерполяционности в классе сходимости $W$ установлен в работе [4]. Как и в [3], доказательство этого результата основано на одной теореме Хёрмандера для $\overline{\partial}$-уравнений.

Я. Кореваром и М. Диксоном доказано следующее утверждение: *если $\{p_n\}$ $(p_n \in \mathbb{N})$ — последовательность А.И. Павлова, то*

$$\ldots, -p_n, \ldots, -p_2, -p_1, 0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

*является интерполяционной последовательностью [1].*

Здесь доказана следующая более общая

**Теорема 1.** *Последовательность* $M = \{\nu_n\}$, *где* $\nu_n = \lambda_n$, $\nu_{-n} = -\lambda_n$ $(n \in \mathbb{N})$, *является интерполяционной в классе* $W$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия а) и б) с функцией* $w \in W$.

**Следствие 1.** Для любого $\eta \in (0,1)$ система экспонент $\{e^{\eta\nu_n z}\}$ не полна в $C(\gamma)$ для любой спрямляемой кривой $\gamma$.

**Следствие 2.** Если $\gamma$ — дуга ограниченного наклона с постоянной Липшица $q < 1$, то в условиях теоремы 1 класс Сиддики $C_{00}(\hat{M}_n; \gamma)$ не тривиален (более подробно об этой проблеме см. в [5]).


[1] J. Korevaar, M. Dixon. Nonspanning sets of exponentials on curves // Acta Math. Acad. Scient. Hung. 1979. T. 33. P. 89–100.

[2] J. Korevaar, M. Dixon. Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents // Nederl. Akad. Wet. Indag. Math. 1978. V. 40. No 2. P. 243–258.

[3] B. Berndtsson. A note on Pavlov-Korevaar-Dixon interpolation // Nederl. Akad. Wet. Indag. Math. 1978. V. 40. No 4. P. 409–414.

[4] Р.А. Гайсин. Интерполяционная задача Павлова-Коревара-Диксона с мажорантой из класса сходимости // Уфимский матем. журнал. 2017. Т. 9. No 4. С. 22–35.

[5] А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин. Неполные системы экспонент на дугах и неквазианалитические классы Карлемана. II // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. No 1. С. 49–73.


## Задача Неймана для уравнения с оператором Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области


**Гималтдинова А.А.**

Уфимский государственный нефтяной технический университет,
г. Уфа, Россия


Для уравнения

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} x)u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + bu = 0, \quad b \in R,$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) \in R^2 \mid -l < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha$, $\beta$, $l \in R_+$, изучена вторая краевая задача.

Для случая $b = 0$ задача Неймана исследована в [1].

В настоящей работе для случая $b \neq 0$ установлен критерий единственности и построено решение задачи в виде суммы ряда по биортогональной системе соответствующей спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с разрывным коэффициентом. Установлена полнота биортогональной системы в пространстве $L_2[-l,l]$ и на основе этого доказана единственность решения поставленной задачи. При доказательстве существования решения задачи Неймана, т.е. при обосновании сходимости ряда, возникла проблема малых знаменателей. В связи с этим получены оценки об отделенности малых знаменателей от нуля с соответствующей асимптотикой, которые позволили доказать существование решения задачи.

[1] Гималтдинова А.А. Задача Неймана для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // ДАН, 2016. Т. 466, № 1, С. 7-11.

## Обратная задача для уравнения Штурма – Лиувилля на кривой с условиями разрыва

**Голубков А.А.**
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

В работе [1] была поставлена обратная спектральная задача для стандартного уравнения Штурма–Лиувилля с кусочно-целым потенциалом

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \tag{1}$$

по столбцу или строке передаточной матрицы вдоль не заданной спрямляемой кривой $\gamma$ произвольной формы и сформулированы условия единственности её решения. Заметим, что в (1) и далее штрих обозначает производную по $z$ вдоль $\gamma$. В данной работе проведено обобщение результатов работы [1] на случай, когда на кривой $\gamma$ имеется конечное число точек, в которых решения уравнения (1) и (или) их производные вдоль кривой претерпевают разрывы, задаваемые матрицами перехода, полиноминально зависящими от спектрального параметра $\rho$ ($\rho = \lambda^2$). Причём и положение точек разрыва, и матрицы перехода в них не заданы. В дальнейшем $i$ обозначает мнимую единицу, $\hat{I}$ — единичную матрицу два на два, а $\hat{\sigma}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — матрицу Паули.

**Определение**. Пусть на спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$, задаваемой параметрически функцией $z = V(t)$ ($t \in [t_0, t_f]$), заданы кусочно-целая функция $Q$ и точки, в которых решения уравнения (1) и (или) их производные имеют разрывы, определяемые полиноминально зависящими от спектрального параметра $\rho$ матрицами перехода. Т.е. $Q$ ограничено на $\gamma$, и существуют целое число $N \geq 0$ и набор чисел $T = \{t_j\}_0^{N+1}$ :

$t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} \equiv t_f$ такие, что $Q(z) = Q_n(z)$, если $z = V(t)$, $t \in (t_n, t_{n+1})$ $\quad (n = \overline{0, N})$, где все $Q_n$ — целые функции, и

$$\begin{pmatrix} u(V(t_0+0)) \\ u'(V(t_0+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(0)}(\rho) \begin{pmatrix} u(V(t_0)) \\ u'(V(t_0)) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u(V(t_{N+1})) \\ u'(V(t_{N+1})) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(N+1)}(\rho) \begin{pmatrix} u(V(t_{N+1}-0)) \\ u'(V(t_{N+1}-0)) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u(V(t_n+0)) \\ u'(V(t_n+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \begin{pmatrix} u(V(t_n-0)) \\ u'(V(t_n-0)) \end{pmatrix} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1).$$

Причём для $\forall j \in \{0, \ldots, N+1\}$ и $\forall \alpha, \beta \in \{1, 2\}$ $\quad det\, \hat{\eta}^{(j)}(\rho) \equiv 1$ и

$$\eta^{(j)}_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{N_{j,\alpha\beta}} \varepsilon_k^{(j,\alpha\beta)} \lambda^{2k}, \text{ где } N_{j,\alpha\beta} \geq 0,\ \varepsilon^{(j,\alpha\beta)}_{N_{j,\alpha\beta}} \neq 0 \text{ или } \eta^{(j)}_{\alpha\beta} \equiv 0. \qquad (2)$$

А также, если $N \geq 1$, то для $\forall n \in \{1, \ldots, N\}$ $\quad \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \notin \{-\hat{I}, \pm i\hat{\sigma}_3\}$ и, кроме того, функции $Q_n$ и $Q_{n-1}$ различны или (и) $\hat{\eta}^{(n)}(\rho) \notin \{\hat{I}\}$. Тогда назовём точки $z_j := V(t_j)$ $(j = \overline{0, N+1})$ критическими точками кривой $\gamma$ и уравнения (1) на $\gamma$, а упорядоченное множество $W := \{N, \{z_j, \eta^{(j)}\}_0^{N+1}, \{Q_n\}_0^N\}$ — набором ключевых данных кривой $\gamma$ и соответствующего уравнения (1) на $\gamma$.

**Определение**. Пусть $u_1(z), u_2(z)$ — удовлетворяющие всем условиям разрыва решения уравнения (1) вдоль спрямляемой кривой $\gamma$ и $u_1(z_b) = 1$, $\ u_1'(z_b) = 0$, $\ u_2(z_b) = 0$, $\ u_2'(z_b) = 1$ $(z_b \in \gamma)$. Назовём передаточной матрицей уравнения (1) между точками $z_b$ и $z$ кривой $\gamma$ матрицу $\hat{P}(\gamma, z, z_b) = \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix}$.

**Определение**. Назовём матрицу перехода $\hat{\eta}^{(j)}$ $(j \in \{0, \ldots, N+1\})$ стандартной, если она удовлетворяет условиям (2), $det\ \hat{\eta}^{(j)} \equiv 1$ и либо $Re\{\varepsilon^{(j,11)}_{N_{j,11}}\} > 0$, $Jm\{\varepsilon^{(j,11)}_{N_{j,11}}\} \geq 0$, либо $\eta^{(j)}_{11} \equiv 0$, $Re\{\varepsilon^{(j,12)}_{N_{j,12}}\} > 0$, $Jm\{\varepsilon^{(j,12)}_{N_{j,12}}\} \geq 0$. Набор ключевых данных $W$ назывём стандартным простым, если все входящие в него матрицы перехода удовлетворяют условиям (2), и все они, кроме, возможно, матрицы $\hat{\eta}^{(N+1)}$ являются стандартными, а также выполнены условия: $\Delta z_n := z_{n+1} - z_n \neq 0$ $(n = \overline{0, N})$.

В докладе получена следующая асимптотика передаточной матрицы уравнения (1), имеющего стандартный простой набор ключевых данных: $p_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{2^{N+1}} d^{(s)}_{\alpha\beta}(\lambda) \exp\{\lambda h_s\}$ $(\alpha, \beta \in \{1, 2\})$, где $h_s = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \Delta z_n$, $\alpha_n \in \{\pm 1\}$ $(n = \overline{0, N})$, $s = 1 + \sum_{n=0}^{N} \frac{(1+\alpha_n)}{2} 2^n$ (т.е. $s \in \{1, \ldots, 2^{N+1}\}$), $d^{(s)}_{\alpha\beta} = \lambda^{m^{(s)}_{\alpha\beta}} \delta^{(s)}_{\alpha\beta} (1 + O(1)/\lambda)$, причём конечные целые $m^{(s)}_{\alpha\beta}$ и комплексные $\delta^{(s)}_{\alpha\beta} \neq 0$ числа не зависят от $\lambda$. Эта асимптотики позволяет доказать теорему единственности стандартного простого набора ключевых данных, соответствующего любой передаточной матрице уравнения (1).

**Теорема**. Пусть два уравнения вида (1) с кусочно-целыми потенциалами и скачками решений имеют соответственно стандартные простые наборы ключевых данных $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ и передаточные матрицы $\hat{P}^{(1)}$ и $\hat{P}^{(2)}$ вдоль двух кривых $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ с общей начальной точкой. Тогда $\hat{P}^{(1)}(\rho) \equiv \hat{P}^{(2)}(\rho)$ тогда и только тогда, когда $W^{(1)} = W^{(2)}$.

В докладе также показана полезность полученных результатов при исследовании обратных спектральных задач для широкого класса обобщенных уравнений Штурма–Лиувилля на отрезке действительной оси.

[1] Голубков А. А. Обратная задача для операторов Штурма-Лиувилля в комплексной плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018, т. 18, вып. 2, с. 144–156.

## Солитоны уравнения синус-Гордона в модели с произвольным числом примесей, внешней силой и затуханием

**Гумеров А.М.[1], Кудрявцев Р.В.[1,2], Салимов Р.К.[1], Екомасов Е.Г.[1]**

[1] Башкирский государственный университет,
450076, г.Уфа, ул. Заки Валиди 32, Россия

[2] Институт физики молекул и кристаллов УНЦ РАН,
450075, г.Уфа, просп. Октября 151, Россия

Одним из самых известных представителей интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений является уравнение синус-Гордона (УСГ). На сегодняшний день, модели, основанные на использовании данного уравнения и его различных модификаций, встречаются в самых разнообразных областях естествознания: геологии, молекулярной биологии, физики, космологии и т.д. Однако построение различных моделей, наиболее адекватно описывающих физические системы, приводит к необходимости модифицировать УСГ, вводя, например, переменные коэффициенты, внешнюю силу и затухание. Часто исследуется случай наличия пространственной модуляции периодического потенциала (или примеси) (см. например, [1, 2, 3]).

В работе для случая (1+1)-мерного уравнения синус-Гордона УСГ показана возможность аналитического и численного нахождения солитонных решений для случая произвольного числа примесей. Для случая наличия двух примесей определено наличие критического значения расстояния между примесями, которое приводит к двум качественно различным сценариям динамического поведения кинка УСГ. Рассмотрены структура и свойства трех- и четырехкинковых решений уравнения синус-Гордона, возбуждаемых в области примесей. Для (3+1)-мерного УСГ рассмотрен случай примеси сферически симметричного вида. С помощью псевдоспектрального метода Фурье численно найдены долгоживущие локализованные решения пульсонного и солитонного вида.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00122.

[1] Gumerov A.M., Ekomasov E.G., Zakir'yanov F.K., Kudryavtsev R.V., Comput. Math. Math. Phys., **54**(3) (2014) 491-504.

[2] Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V., JETP Letters, **101**(12) (2015) 835-839.

[3] Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V., J. Comp. Appl. Math, **312** (2017) 198-208.

## Об усреднении сингулярно возмущенной краевой задачи типа Стеклова для оператора Лапласа

**Давлетов Д.Б.**

Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия

Исследована краевая задача типа Стеклова для оператора Лапласа в полуполосе, содержащей малое отверстие в случае, когда на основании полуполосы выставлено спектральное условие Стеклова, а на боковых границах и на границе малого отверстия - условия Дирихле. Доказана теорема о сходимости собственных элементов возмущенной краевой задачи при стремлении малого параметра ("диаметра"отверстия) к нулю. Результат опубликован в работе [1].

Также проведен асимптотический анализ спектра исследуемой задачи. Построено и строго обосновано асимптотическое разложение собственного значения возмущенной краевой задачи с точностью до степени малого параметра, определяющего "диаметр"отверстия. Результат опубликован в [2].

[1] Д. Б. Давлетов Сходимость собственных элементов задачи типа Стеклова в полуполосе с малым отверстием // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 141 (2017), С. 42-47.

[2] Д. Б. Давлетов Об асимптотике собственного значения сингулярно возмущенной краевой задачи типа Стеклова для Лапласиана // Вестник Омского университета, 23 (2018) (**принята в печать**).

## Об одной модели динамики популяций с интегральными условиями

**Даровская К.А.**
Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Дифференциальные уравнения с нелокальными условиями, в частности, с условиями, содержащими интегралы, возникают при изучении множества прикладных задач. Пионерские работы в этой области принадлежат А.Зоммерфельду, Я.Д. Тамаркину и М.Пиконе и относятся к первой трети XX века. Далее подобные задачи привлекают внимание после знаковой работы Дж.Р. Кэннона [1] о распространении тепла в тонком стержне. Интерес исследователей направлен в основном на эволюционные уравнения со смешанными условиями, содержащими интегралы (см. работы Н.И. Ионкина, Дж.Р. Кэннона, А.М. Нахушева, Л.С. Пулькиной, К.Б. Сабитова и библиографии в них).

Обыкновенные дифференциальные уравнения с интегральными условиями изучаются в меньшей степени. Исследованиями в этой области в разное время занимаются В.А. Ильин, Е.И. Моисеев, В.В. Подъяпольский, Ю.Г. Сенцов, Ю.Т. Сильченко, А.Л. Скубачевский, А.А. Шкаликов и др. Наиболее полная библиография, касающаяся задач с нелокальными условиями, содержится, по всей видимости, в [2].

Вопрос приложений для ОДУ с интегральными условиями, однако, остается открытым. В докладе будет обсуждаться возможность постановки задач динамики популяций для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с интегральными условиями.

[1] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy// Quart. Appl. Math. — 1963. — 21. — P. 155–160.

[2] Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 26. — С. 3–132.

## Особые точки дисперсионных кривых и резонансное излучение электромагнитных волн в цилиндре

**Делицын А.Л.**
Институт проблем передачи информации РАН им. А.А. Харкевича, г.Москва, Россия

Изучение задачи излучения в цилиндре для системы уравнение Максвелла с переменными коэффициентами

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}e^{-i\omega t}, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \varepsilon\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\varepsilon\mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad \mathrm{div}\mu\mathbf{H} = 0 \tag{2}$$

тесно связано с изучением спектральных свойств соответвующей задачи в поперечном сечении цилиндра и их зависимостей (дисперсионных кривых) от частоты. Предлагаемый автором метод для исследования этой задачи позволяет получить следующие результаты:

1. Спектральная задача теории волноводов в соответствующих функциональных пространствах сведена к задаче для операторного пучка Келдыша [1].

2. Установлено [2] существование обратных волн в волноводе квадратного сечения с постоянным анизотропным заполнением.

3. Доказано, что точки возникновения обратных волн для данной задачи образуют эллипс на плоскости квадратов частот и квадратов постоянных распространения.

4. Доказано, что при определенном выборе коэффициентов системы уравнений Максвелла происходит касание дисперсионной кривой с осью абсцисс [3]. Излучение поля на этих частотах имеет резонансный характер. Установлено, что поле нарастает линейно по времени, а не как $\sqrt{t}$, что характерно для резонансного возбуждения в цилиндрической области.

[1] Делицын А.Л. О постановке краевых задач для системы уравнений Максвелла в цилиндре и их разрешимости // Изв. РАН. Сер. матем., 71:3 (2007), 61–112.

[2] Delitsyn A.L. On the Dispersion Curves of Anisotropic Waveguides // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 58(7), 1142-1149.

[3] Делицын А.Л. О характере роста поля при резонансном возбуждении волновода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 56:12 (2016), 2086–2091.

## О вольтерровых трехточечных задачах

**Джумабаев С.А.***, **Нурахметов Д.Б.****

* Академия государственного управления при Президенте Республики Казахстан, г.Астана.

** Казахский агротехнический университет имени С.Сейфуллина, г.Астана

При исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов основным вопросом является существование собственных значений или их отсутствие. В данном докладе с помощью оператора подобия при некоторых условиях связанных с симметрий коэффициентов описан класс вольтерровых трехточечных задач для обыкновенного дифференциального оператора на конечном отрезке.

Представленный анализ поддерживается результатами из [1].

[1] Джумабаев С.А., Нурахметов Д.Б. О вольтерровых трехточечных задачах для оператора Штурма-Лиувилля связанных с симметрией потенциала // *Матем. заметки* (принята к печати)

## Сингулярные лагранжевы многообразия и асимптотические собственные функции оператора $\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$ с вырождающимся коэффициентом.

**Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.**
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН и Московский физико-технический институт, г.Москва, Россия

Мы рассматриваем спектральную задачу для заданного на прямой оператора $-\frac{d}{dx}c^2(x)\frac{d}{dx}$ с гладким переменным коэффициентом $D(x) = c^2(x)$, положительным на некотором отрезке $[a, b]$ и отрицательным вне этого отрезка. Задачи такого типа, возникают, например, в моделировании сейшей (длинных волн) в протяженных бассейнах. Точки $a, b$, в которых $D(x) = 0$, задают берега этого водоема, при этом мы считаем, что производные $D'$ в этих точках не обращаются в ноль, то есть берег достаточно пологий. Вопрос о правильном задании краевых условий для такого сорта операторов (в многомерной ситуации) был изучен в работах О.А.Олейник и Е.В.Радкевича (1973), стандартные краевые краевые условия (типа условий Дирихле или Неймана) здесь ставить не нужно (и даже нельзя), они заменяются на условие самосопряженности изучаемого оператора. В этой задачи мы используем естественное с точки зрения теории волн на воде самосопряженное расширение по Фридрихсу. Мы строим асимптотические квазиклассические собственные функции этого оператора при больших значениях спектрального параметра $\lambda$. Такие асимптотики связаны с лагранжевыми многообразиями, которые в одномерных задачах представляют собой траетории гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(p, x)$- главным символом исходного дифференциального оператора. При этом эти траектории- это линии уровня функции $H$ и в одномерном случае- это одномерные торы Лиувилля. В данном случае гамильтониан $H = p^2D(x)$ и при заданных условиях на $D$-особые (неограниченные по импульсу $p$)кривые, движение по которым не удовлетворяет условиям "полноты потока": импульсы $p$ принимают бесконечные значения за конечное время. Тем не менее, в этом случае также можно построить, причем достаточно явно -в виде функций Бесселя сложного аргумента- асимптотические квазиклассические функции и рассматриваемой задачи. Вывод этих формул получается из соединения конструкции канонического оператора Маслова с квантованием Фока канонических преобразований, а также на соображениях высказанных в работах Карриера - Гринспана (1958) и Вукасинич- Жевандрова (2002).

Эта работа поддержана грантом N 16-11-10282.

## О голоморфных решениях уравнения Кадомцева–Петвиашвили

**Домрин А.В.**
Мехмат МГУ, г.Москва, Россия

Есть гипотеза о том, что всякое голоморфное решение $u(x,y,t)$ уравнения Кадомцева – Петвиашвили $(u_{xxx}+Auu_x+Bu_t)_x+Cu_{yy}=0$, определенное в окрестности произвольной точки $(x_0,y_0,t_0)\in\mathbb{C}^3$, где $A,B,C$ — ненулевые комплексные константы, а нижние индексы означают частные производные по указанным переменным, допускает аналитическое продолжение до глобально мероморфной функции от $x$ (причем равной, с точностью до умножения на надлежащую константу, второй логарифмической производной по $x$ от некоторой целой функции) при любых фиксированных $y,t$. В докладе приводятся примеры и рассуждения, подтверждающие эту гипотезу, а также соображения о технической структуре необходимого для ее доказательства варианта метода обратной задачи теории рассеяния.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00117, 16-52-12012, 17-01-00592).

## Динамика связанных магнитных вихрей обобщенного уравнения Ландау-Лифшица для случая мультислойных проводящих наноцилиндров

**Екомасов А.Е.[1], Степанов С.В.[1], Антонов Г.И[1], Звездин К.А.[2], Екомасов Е.Г.[1]**
[1] Башкирский Государственный Университет, Уфа, Россия
[2] Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

Большое внимание, в настоящее время, привлекают исследования вихревых решений Обобщенного уравнения Ландау-Лифшица [1, 2]. Наличие в этом уравнении слагаемого, учитывающего взаимодействие намагниченности и спин-поляризованного тока, позволяет исследовать процессы переключения и возбуждения осцилляций намагниченности в магнитных наноструктурах с помощью тока и внешнего магнитного поля. С помощью численного решения Обобщенного уравнения Ландау-Лифшица, проведено исследование динамики и структуры двух дипольно связанных магнитных вихрей в трехслойном наностолбике, под действием внешнего магнитного поля и спин-поляризованного электрического тока. Показана возможность существования различных режимов движения вихрей, в зависимости от величины поляризованного тока и магнитного поля. Для случая стационарной динамики связанных магнитных вихрей, найдена зависимость частоты их колебаний от величины тока. Показана возможность управления частотой стационарного движения вихрей и подстройки амплитуды управляющих токов с помощью внешнего магнитного поля. С помощью аналитического метода для упрощенного описания динамики связанных вихрей, получены зависимости частоты от величины тока и внешнего магнитного поля, качественно совпадающие с численными результатами. Построена зависимость величины магнитного поля, раздельно переключающего полярность вихрей от величины спин-поляризованного тока. Показано, что динамический и квазистатический сценарии переключения полярности вихря имеют место при различных значениях поля/тока.

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011; микромагнитное исследование поддержано грантом РФФИ, проект 16-19-00181.

[1] Locatelli N., Ekomasov A.E., Khvalkovskiy A.V. and et. al., Applied Physics Letters. 102, 062401 (2013).

[2] Екомасов А.Е., Степанов С.В., Звездин К.А., Екомасов Е.Г., Физика металлов и металловедение. 118, 345 (2017).

## Асимптотика спектра неполуограниченного дифференциального оператора высшего порядка с колеблющимся коэффициентом

**Ескермесулы А.**

Аркалыкский государственный педагогический институт им. И. Алтынсарина, г. Аркалык, Костанайская область, Казахстан

Данная работа посвящена изучению асимптотического поведения спектра неполуограниченного дифференциального оператора $L_0$, порожденного в $L_2(-\infty,+\infty)$ дифференциальным выражением

$$ly = y^{(4)} + q_1(x)y, \quad x \in (-\infty,+\infty). \tag{1}$$

В монографии [1] были получены асимптотические формулы для функции $N(\lambda)$ – функции распределения собственных значений самосопряженных расширений минимального дифференциального оператора $L_0$, порожденного в $L_2(-\infty,+\infty)$ дифференциальным выражением вида

(1) в случае, когда $q_1(x)$ – "регулярная" в смысле Титчмарша-Левитана функция. Под регулярностью функции $q_1(x)$ понимается следующее:

- функция $q_1(x)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой;
- $q_1'(x)$, $q_1''(x)$ не меняют знак для достаточно больших $x$, $|x| > R$, $R > 0$;
- $q_1(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$;
- $q_1'(x) = o(q_1^\gamma(x)),\ \ |x| \to +\infty,\ \ 0 < \gamma < \frac{5}{4}$.

Целью нашей работы является получение асимптотических формул для функции $N(\lambda)$ в случае, когда функция $q_1(x)$ не удовлетворяет условиям регулярности типа Титчмарша-Левитана и является колеблющейся функцией. Примером таких нерегулярных функций являются, например, функции вида

$$q_1(x) = q(x) + h(x),$$

где $q(x)$ – "регулярная", а $h(x)$ содержит осцилляцию

$$h(x) = \sum a_k(x) \cdot S_k\left(\varphi_k(x)\right),$$

где $S_k(t)$ – периодические функции, а $a_k(x)$, $\varphi_k(x)$ – достаточно гладкие монотонные функции.

Асимптотические (как по $x$, так и по $\lambda$) формулы для фундаментальной системы решения (далее ФСР) уравнений вида

$$-y'' + (q(x) + h(x))y = \lambda y$$

с подобными потенциалами изучались в работах [3], [2]. В работе [4] был предложен новый метод построения таких асимптотических при $x \to +\infty$ формул, для уравнения четвертого порядка. Оказалось, что данный метод позволяет также получить асимптотические формулы для ФСР уравнения (1) при $\Gamma \ni \lambda \to \infty$, где

$$\Gamma = \{\lambda : \sigma + i\tau;\ \sigma > 0,\ \xi \le \tau \le \sigma^\gamma,\ \xi > 0,\ 0 < \gamma < 1\},$$

равномерные по $x \in (-\infty, +\infty)$.


[1] А.Г. Костюченко, И.С. Саргсян *Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы).* // Наука, 1979.

[2] Х.Х Муртазин, Я.Т. Султанаев *К формулам распределения собственных чисел неполуограниченного оператора Штурма–Лиувилля.* // Математические заметки **28**:4, 545–553 (1980).

[3] Я.Т. Султанаев *Об индексах дефекта и спектре одномерных сингулярных дифференциальных операторов в вырожденном случае.* ДАН СССР, **284**:3, 551—555 (1985).

[4] Н.Ф. Валеев, А. Ескермесулы, Э.А. Назирова *Об асимптотике решений сингулярных дифференциальных уравнений четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами.* // Математический журнал ИМММ КН РК, **16**:1, 58–76 (2016).

## Точно интегрируемые гиепрболические уравнения лиувиллевского типа

**Жибер А.В., Юрьева А.М.**
ИМВЦ, г.Уфа, Россия
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Для полной классификации нелинейных гиперболических уравнений лиувиллевского типа

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

следует провести описание (см. [1], [2]) уравнений специального класса

$$u_{xy} = \frac{p - \varphi_u}{\varphi_{u_y}} u_x + \frac{q}{\varphi_{u_y}} \sqrt{u_x}, \tag{1}$$

обладающих $y$-интегралами второго порядка. Здесь $p, q$ - функции переменных $x, y, u$, а $\varphi$- переменных $x, y, u, u_y$.

Отметим (см. [3], [4], [5]), что интегрируемые уравнения Лэне содержатся в классе уравнений (1).

В данной работе получены необходимые и достаточные условия существования $y$-интеграла второго порядка и проведен их полный анализ.

Описаны интегрируемые гиперболические уравнения с $y$-интегралом первого порядка.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20007).

[1] Жибер А.В., Юрьева А.М. Гиперболические уравнения лиувиллевского типа специального класса. Итоги науки и техники. Современная математика и еёприложения. Тематические обзоры. Том 137(2017). с.17-26.

[2] Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. Успехи матем. наук, 2001. Т.56. №1(337). С. 63-106

[3] Laine M. E. Sur J'application de la methode de Darboux aux eqautions $s = f(x, y, z, p, q)$. Comptes rendus. V. 182, 1926. P.1126-1127.

[4] Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 182 с.

[5] Капцов О.В. О проблеме классификации Гурса. Программирование, 2012. №2. С. 68-71.

## О решениях типа Вейля для систем дифференциальных уравнений с регулярной особенностью

**Игнатьев М.Ю.**

Саратовский госуниверситет, г.Саратов, Россия

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$y' = \rho By + x^{-1}Ay + q(x)y, \; x \in (0, \infty) \tag{1}$$

со спектральным параметром $\rho$, где $A, B, q(x)$ – $n \times n$ - матрицы, $n > 2$, $A, B$ постоянны, $q_{jk}(\cdot) \in L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$, $p > 2$. Будем считать, что $B = diag(b_1, \dots, b_n)$, $q_{jj}(x) \equiv 0$, $a_{jj} = 0$, $b_1, \dots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа, не лежащие на одной прямой и такие, что $\sum_{k=1}^{n} b_k = 0$. Пусть, кроме того, собственные значения $\mu_1, \dots, \mu_n$ матрицы $A$ таковы, что $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$ и $\mathrm{Re}\mu_1 < \mathrm{Re}\mu_2 < \dots < \mathrm{Re}\mu_n$.

**Определение.** Обозначим через $R_1, \dots, R_n$ перестановку чисел $b_1, \dots, b_n$ такую, что $\mathrm{Re}\rho R_1 < \mathrm{Re}\rho R_2 < \dots < \mathrm{Re}\rho R_n$, через $f_1, \dots, f_n$ – соответствующую перестановку векторов $e_1, \dots, e_n$ стандартного базиса в $\mathbb{C}^n$. $k$-м решением типа Вейля назовём решение $\psi_k(x, \rho)$ системы (1), удовлетворяющее условиям:

$$\psi_k(x, \rho) = O\left(x^{\mu_k}\right), x \to 0, \; \psi_k(x, \rho) = \exp(\rho x R_k)(f_k + o(1)), x \to \infty.$$

В работе рассматриваются вопросы построения и исследования решений типа Вейля. Показано, в частности, что при выполнении некоторых условий на матрицы $A, B$, справедливо представление:

$$\psi_k(x, \rho) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{jk} \exp(\rho x R_j) f_j + \exp(\rho x R_k) \omega_k(x, \rho),$$

причём постоянные $\gamma_{jk}$ не зависят от $q(\cdot)$ и при достаточно больших $R > 0$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in [x_1, x_2]} \sup_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} \int_R^{\infty} \|\omega_k(x, r\exp(i\theta))\|^2 \, dr < \infty$$

для любых $0 < x_1 < x_2 < \infty$ и $\theta_1 < \theta_2$ таких, что $R_1(\rho), \dots, R_n(\rho)$ постоянны в секторе $\arg\rho \in (\theta_1, \theta_2)$.

Полученные результаты являются обобщением результатов [1], где исследовалась система (1) с абсолютно непрерывными коэффициентами $q_{jk}(\cdot)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты No 15-01-04864, 16-01-00015, 17-51-53180) и Минобрнауки РФ (проект No 1.1660.2017/4.6).

[1] M. Ignatyev. Spectral analysis for differential systems with a singularity // Results Math. 71(2017), 1531–1555.

## Об асимптотике решений сингулярно возмущенной задачи с параметрическим усилением

**Калимбетов Б.Т., Хабибуллаев Ж.О.**
Университет Ахмета Ясави, Туркестан, Казахстан

Рассматривается задача Коши

$$\begin{gathered}\varepsilon \frac{\partial y(x,t,\varepsilon)}{\partial x} = a(x)y(x,t,\varepsilon) + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,t,s)y(s,t,\varepsilon)ds + \varepsilon g(x)cos\frac{2\beta(x)}{\varepsilon} + \\ +h(x,t), \qquad y(x_0,t,\varepsilon) = y^0 \quad ((x,t) \in [x_0,X] \times [0,T]),\end{gathered} \tag{1}$$

при следующих предположениях:

(i) $a(x), g(x), \beta(x) \in C^\infty([x_0,X], C^n), h(x,t) \in C^\infty([x_0,X] \times [0,T], C^n)$, $K(x,t,s) \in C^\infty(\{x_0 < x < s < X,\ 0 < t < T\}, C^n)$;

(ii) $a(x) \neq g(x) \neq \beta(x) \neq 0\ (\forall x \in [x_0, X])$;

Требуется построить регуляризованную асимптотическую решению задачи (1) при $\varepsilon \to +0$.

Согласно теории метода регуляризации [1], общеитерационная задача имеет вид:

$$Ly(x,t,\tau) \equiv a(x)\frac{\partial y}{\partial \tau_1} - a(x)y - R_0 y = h(x,t,\tau), \quad y(x_0,t,0) = y_* \tag{2}$$

где $h(x,t,\tau) = h_1(x,t)e^{\tau_1} + h_0(x,t) \in U,\ y_*(x) \in C^\infty[x_0,X]-$ известные функции, $R_0 y(x,t,\tau) = \int\limits_0^x K(x,t,s)y_0(s,t)ds$.

**Теорема 1**. Пусть в уравнение (2) правая часть $h(x,t,\tau) = h_1(x,t)e^{\tau_1} + h_0(x,t) \in U$, и выполнены условия (i)-(ii). Тогда для разрешимости уравнение (2) в пространстве $U$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$h_1(x,t) \equiv 0, \quad (\forall (x,t) \in [x_0,X] \times [0,T]). \tag{3}$$

**Теорема 2**. Пусть выполнены условия (i)-(ii) и правая часть $h(x,t,\tau) \equiv h_1(x,t)e^{\tau_1} + h_0(x,t) \in U$ удовлетворяет условию (3). Тогда задача (2) при дополнительном условии
$-\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{g(x)}{2}(e^{\tau_0} + e^{-\tau_0})y + R_1 y + p(x,t,\tau) \equiv 0, \qquad (\forall (x,t) \in [x_0, X] \times [0,T]),$
где $p(x,t,\tau) = p_1(x,t)e^{\tau_1} + p_0(x,t) \in U-$ известная вектор-функция, однозначно разрешима в пространстве $U$.

*Работа выполнена при поддержке гранта AP05133858 "Контрастные структуры в сингулярно возмущенных уравнениях и их применения в теории фазовых переходов" КН МОН РК.*

[1] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. - 400 с.

## Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи с быстро изменяющимся ядром

**Калимбетов Б.Т., Ескараева Б.И.**
Университет Ахмета Ясави, Туркестан, Казахстан

Рассматривается задача Коши для интегро-дифференциального уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial y(x,t,\varepsilon)}{\partial x} = a(x)y(x,t,\varepsilon) + \int\limits_0^x e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^x \mu(\theta)d\theta} K(x,t,s)y(s,t,\varepsilon)ds + h(x,t), \quad y(0,t,\varepsilon) = y^0(t) \quad ((x,t) \in [0,X] \times [0,T]), \tag{1}$$

с быстро изменяющимся ядром. Ставится задача о построении регуляризованного асимптотического решения задачи (1) при следующих условиях:

(i) $a(x) \in C^\infty([0,T], C^n)$, $\mu(x) \in C^\infty\left([0,T], C^1\right)$, $h(x,t) \in C^\infty([0,1] \times [0,1], C^n)$, $K(x,t,s) \in C^\infty(\{0 < s < x < 1,\ 0 < t < 1\}, C^n)$;

(ii) $a(x), \mu(x) \neq 0, \quad a(x) \neq \mu(x) \ (\forall x \in [0,1])$;

Введем регуляризирующие переменные:

$$\tau_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x a(\theta)d\theta \equiv \frac{\varphi_1(x)}{\varepsilon}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x \mu(\theta)d\theta \equiv \frac{\varphi_2(x)}{\varepsilon}.$$

Для функции $\tilde{y}(x,t,\tau,\varepsilon)$ поставим следующую задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial \tilde{y}(x,t,\tau,\varepsilon)}{\partial x} + a(x)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_1} + \mu(x)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_2} - a(x)\tilde{y} - \int\limits_0^x e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^x \mu(\theta)d\theta} K(x,t,s)\times \times\tilde{y}(s,t,\frac{\varphi(s)}{\varepsilon},\varepsilon)ds + h(x,t), \qquad \tilde{y}(0,t,0,\varepsilon) = y^0(t). \tag{2}$$

Согласно идеи метода регуляризации С.А.Ломова [1], производится регуляризация интегрального члена задачи (2), доказываются нормальная и однозначная разрешимость общеитерационной задачи:

$$Ly(x,t,\tau) \equiv a(x)\frac{\partial y}{\partial \tau_1} + \mu(x)\frac{\partial y}{\partial \tau_2} - a(x)y - R_0 y = H(x,t,\tau),\ y(0,t,0) = y_*(t),$$

где $H(x,t,\tau) = h_1(x,t)e^{\tau_1} + h_2(x,t)e^{\tau_2} + h_0(x,t) \in U$, $y_*(x) \in C^\infty[0,1]-$ известные функции, а $R_0 y-$ интегральный оператор

$R_0 y(x,t,\tau) = e^{\tau_2} \int\limits_0^x K(x,t,s) y_2(s,t) ds.$

*Работа выполнена при поддержке гранта AP05133858 "Контрастные структуры в сингулярно возмущенных уравнениях и их применения в теории фазовых переходов" КН МОН РК.*

[1] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. - 400 с.

## Об устойчивости возмущений двухточечных краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля

**Кангужин Б.Е.**

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

В данной работе изучается краевая задача, порожденная на интервале $(0,\pi)$ уравнением Штурма-Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x), 0 < x < \pi \tag{1}$$

и двумя $(i = 1,2)$ граничными условиями

$$\Gamma_i(y) \equiv a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(\pi) + a_{14}y'(\pi) = 0 \tag{2}$$

где $q(x)$-суммируемая комплекснозначная функция, $a_{1k}$-произвольные комплексные числа. Согласно монографии [1] значения параметра $\mu{=}\lambda^2$, при которых краевая задача имеет ненулевые решения, называются собственными значениями, а соответсвующие решения - собственными функциями. В дальнейшем фундаментальную систему решений уравнения (1), определяемую начальными данными $C(\lambda, \frac{\pi}{2}) = S'(\lambda, \frac{\pi}{2}) = 1, C'(\lambda, \frac{\pi}{2}) = S(\lambda, \frac{\pi}{2}) = 0$, будем обозначать через $C(\lambda, x), S(\lambda, x)$. Рассуждая так же как в монографии [1], запишем характеристический определитель $\chi(\lambda)$ краевой задачи $\chi(\lambda)$ в виде

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \Gamma_1(C) & \Gamma_1(S) \\ \Gamma_2(C) & \Gamma_2(S) \end{vmatrix}$$

Раскрывая этот определитель находим представление

$$\chi(\lambda) = J_{12} + J_{13} \begin{vmatrix} C(\lambda,0) & S(\lambda,0) \\ C(\lambda,\pi) & S(\lambda,\pi) \end{vmatrix} + J_{14} \begin{vmatrix} C(\lambda,0) & S(\lambda,0) \\ C'(\lambda,\pi) & S'(\lambda,\pi) \end{vmatrix} +$$

$$J_{14} \begin{vmatrix} C(\lambda,0) & S(\lambda,0) \\ C'(\lambda,\pi) & S'(\lambda,\pi) \end{vmatrix} + J_{23} \begin{vmatrix} C'(\lambda,0) & S'(\lambda,0) \\ C(\lambda,\pi) & S(\lambda,\pi) \end{vmatrix} +$$

$$J_{24} \begin{vmatrix} C'(\lambda,0) & S(\lambda,0) \\ C'(\lambda,\pi) & S'(\lambda,\pi) \end{vmatrix} + J_{34}$$

где $J_{\alpha\beta}$-определитель, составленый из $\alpha-$ и $\beta-$го столбцов матрицы коэффициентов граничных условии

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

В монографии [1] отмечается, что при $q(x) \equiv 0$ характеристический определитель $\chi_0(\lambda)$ имеет вид

$$\chi_0(\lambda) = (J_{12} + J_{34}) + J_{13} \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda} + (J_{14} + J_{32}) \cos(\lambda\pi) + J_{42}\lambda \sin(\lambda\pi)$$

Вопрос полноты собственных и присоединенных функций при $q(x) \equiv 0$ имеет смысл только тогда, когда определитель $\chi_0(\lambda)$ отличен от константы. Это возможно в следующих трех случаях:

$$1) J_{42} \neq 0, 2) J_{42} = 0, J_{14} + J_{32} \neq 0, 3) J_{42} = J_{14} + J_{32} = 0, J_{13} \neq 0$$

Граничные условия, удовлетворяющие одному из указанных соотношений, называются невырожденными по В.А.Марченко граничными условиями. Основной спектральный смысл невырожденных по В.А. Марченко граничных условий заключается в том, что при таких граничных условиях система собственных и присоединенных функций краевой задачи (1)-(2) полна в функциональном пространстве $L_2(0,\pi)$.

Результат В.А.Марченко имеет также оперативную трактовку. Обозначим через $L_q-$ дифференциальный оператор соответствующий краевой задаче (1)-(2) при $\lambda = 0$. Тогда результат В.А.Марченко можно интерпретировать следующим образом:

**Утверждение 1.** Оператор $L_0$ в пространстве $L_2(0,\pi)$ имеет полную систему корневых функций.

**Утверждение 2.** Оператор $L_q$ является устойчивым (в смысле сохранения свойства полноты системы корневых функций) возмущением оператора $L_0$.

Таким образом, В.А.Марченко изучал устойчивые возмущения оператора $L_0$.

В данной работе исследуются возмущения оператора $L_{q_1}$, где $q_1(x)$-ступенчатая функция: $q(x) = 0$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $q(x) = a$ при $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. Основной вопрос данной работы - какие свойства оператора $L_{q_1}$ являются устойчивыми?

[1] Марченко В.А.Операторы Штурма-Лиувиля и их приложения.- К:Наукова думка, 1977.-329с.

## Об асимптотике решений дифференциальных уравнений на графе-звезде с регулярными по Биркгофу краевыми условиями

**Кангужин Б.Е., Жапсарбаева Л.К.**
Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

Пусть $m-$ фиксированное натуральное число.

В данной работе изучается задача на собственные значения для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -y''_{m+1}(x_{m+1}) = \rho^2 y_{m+1}(x_{m+1}),\ 0 < x_{m+1} < 1, \\ -y''_m(x_m) = \rho^2 y_m(x_m),\ 0 < x_m < 1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -y''_1(x_1) = \rho^2 y_1(x_1),\ 0 < x_1 < 1 \end{cases} \tag{1}$$

с условиями

$$y_{m+1}(1) = y_1(0) = \ldots = y_m(0), \tag{2}$$
$$y'_{m+1}(1) = y'_1(0) + \ldots + y'_m(0)$$

и

$$U_s(y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}) = \tag{3}$$
$$= \sum_{j=1}^{2} \Big[ a_{sj} y_1^{(j-1)}(1) + a_{s(2+j)} y_2^{(j-1)}(1) + \ldots + a_{s(2m-2+j)} y_m^{(j-1)}(1) +$$
$$+ a_{s(2m+j)} y_{m+1}^{(j-1)}(0) \Big] = 0,\ s = 1, \ldots, m+1.$$

Согласно результатам работ [1, 2] задача (1), (2), (3) может быть интерпретирована как задача на собственные значения дифференциального оператора второго порядка на графе-звезде $\Im = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$. Здесь $\mathcal{V}$ представляет множество вершин, занумерованных от 0 до $m+1$, а множество $\mathcal{E}$ означает множество дуг $e_1, \ldots, e_m$ [4]. На каждой дуге $e_j$ выполняется одно из дифференциальных уравнений системы (1). Вершина $m+1 \in \mathcal{V}$ называется внутренней вершиной графа-звезды. Условия (2) означают, что во внутренней вершине выполняются законы Кирхгофа [3]. Вершины $0, 1, \ldots, m$ называются граничными вершинами графа-звезды. Условия (3) представляют набор граничных условий.

В работе вычислена асимптотика собственных значений дифференциального оператора второго порядка на графе-звезде с регулярными по Биркгофу краевыми условиями и доказана полнота системы корневых функций рассматриваемого оператора в пространстве $L_2(\Im)$.

Приведем основной результат работы.

**Теорема.** Задача (1), (2), (3) при $m = 2$ с регулярными по Биркгофу краевыми условиями имеет полную систему корневых функций в пространстве $L_2(\Im)$, более того собственные значения задачи (1), (2), (3), занумерованные в порядке неубывания их модулей удовлетворяют предельному соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{(n\pi)^2} = \frac{1}{16}.$$


[1] Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Кошкарбаев Н. Об асимптотике по спектральному параметру решений дифференциальных уравнений на дереве с условиями Кирхгофа в его внутренних вершинах // Математический журнал. 2017. - Т.17. No 4. -С.37-50.

[2] Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Конуркулжаева М.Н. Самосопряженные сужения максимального на графе // Уфимский математический журнал. 2017. - Т.9. No 4. -С.36-44.

[3] Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. - СПб.: СПбГУН и П.Т., 2010. -181 с.

[4] Цой С., Цхай С.М. Прикладная теория графов. А: Наука, 1971. 499с.


## Теорема Берлинга, формула Дэвенпорта и гипотеза Римана


**Капустин В.В.**

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН, г.Санкт-Петербург, Россия


Пусть $\mathcal{K}$ — подпространство весового пространства

$$L^2_{1/x^2}(0,+\infty) = \left\{ f : \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 \frac{dx}{x^2} < \infty \right\},$$

состоящее из всех функций, являющихся 1-периодическими (то есть, $f(x+1) = f(x)$) и удовлетворяющих соотношению

$$f(x) + f(1-x) \equiv \mathrm{const}, \qquad x \in (0,1).$$

Функции $f(x) = \rho(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\rho(\cdot)$ обозначает дробную часть вещественного числа, очевидно, принадлежат $\mathcal{K}$, и пусть $\mathcal{K}_*$ обозначает их замкнутую динейную оболочку в пространстве $L^2_{1/x^2}(0, +\infty)$. Таким образом, имеем $\mathcal{K}_* \subset \mathcal{K}$.

**Теорема**. Гипотеза Римана о нулях дзета-функции Римана равносильна соотношению $\mathcal{K}_* = \mathcal{K}$.

Полученный результат тесно связан с известным подходом Берлинга–Нимана к гипотезе Римана.

## Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве

**Каримов О.Х.**
Институт математики им. А.Джураева АН РТ, г.Душанбе, Таджикистан

В данном работе речь идет о коэрцитивной разрешимости оператора Шредингера. В работах (см.[1]-[3] и имеющиеся там ссылки) исследуется разделимость и коэрцитивная разрешимость.

Рассмотрим в пространстве $L_2(R^n)$ дифференциальный оператор

$$L[u] = -\Delta u(x) + V(x)u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\Delta-$оператор Лапласа, $V(x)$-положительная функция.

**Определение.** Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называется разделимым в $L_2(R^n)$, если $\Delta u(x)$, $V(x, u(x))u(x) \in L_2(R^n)$ для всех $u(x) \in L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)$.

Приведем один результат о разделимости оператора Шредингера (см. [6])

**Теорема 1**. Пусть выполнены неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} \|V^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial V}{\partial x_i} V^{-1}\| \le \sigma, \quad \sum_{i=1}^{n} \|V^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial V}{\partial x_i} V^{-\frac{3}{4}}\| \le \chi,$$

где $0 < \sigma,\ \chi < 4$. Тогда оператор Шредингера разделяется в пространстве $L_2(R^n)$, и для любой функции $u(x) \in L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ при условии $L[u] \in L_2(R^n)$ справедливо включение $\Delta u$, $Vu$, $V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(R^n)$, $i = 1, ..., n$.

Разделимость оператора Шредингера влечет коэрцитивную оценку

$$\|\Delta u(x); L_2(R^n)\| + \|V(x)u(x); L_2(R^n)\| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \|V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}; L_2(R^n)\| \le M \|L[u]; L_2(R^n)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$.

На основе теоремы 1 доказывается следующая

**Теорема 2**. Пусть оператор Шредингера разделяется в пространстве $L_2(R^n)$ и пусть существует положительная функция $\Psi(x) \in C^1(R^n)$ удовлетворяющая неравенству

$$\|\Psi^{-1}(x)\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}V^{-\frac{1}{2}}\| < \sigma_1, \ \sigma_1 < \sqrt{2\alpha}, \quad \forall x \in R^n.$$

Тогда дифференциальное уравнение (1) при всех $f(x) \in L_2(R^n)$ имеет единственное решение в пространстве $L_2(R^n)$.


[1] Everitt W.N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators.- London Math.Soc. 1971. V.23,No3, pp. 301-324.

[2] Бойматов К.Х. О методе Эверитта и Гирца для банаховых пространств // Докл. РАН, 1997, т.356, No1, с.10-12.

[3] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения // Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.

[4] Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в $R^n$ // Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.

[5] Salem Omram and Khaled A. Gepreel. Separation of the Helmholtz Partial Differential Equation in Hilbert Space. Adv.Studies Theor. Phus., Vol. 6, 2012, No9, pp. 13-23.

[6] Каримов О.Х., Усмонов Н.У. Коэрцитивные оценки решений нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка на всей оси // В сб. Диффренциальные и интегральные уравнения и их приложения, Душанбе, 1995, вып. 3, с.20-21.

[7] Каримов О.Х. О коэрцитивные свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал, 2017, т.9, No1, с.55-62.

[8] Каримов О.Х. Коэрцитивные оценки и теорема разделимости для одного нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник, 2017, т.18, No4, с.245-253.

**Энтропийные и ренормализованные решения анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей и данными в виде меры**

**Кожевникова Л.М.**
Стерлитамакский филиал БашГУ

В этой статье основное внимание уделяется вопросам существования энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей вида

$$\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) = |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + \mu, \quad \mathrm{x} \in \Omega \subsetneq \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

где $\mu$ — диффузная мера Радона.

Этому направлению посвящены работы таких авторов, как T. Ahmedatt, E. Azroul, M.B. Benboubker, H. Chrayteh, M. El Moumni, H. Hjiaj, A. Touzani, C. Zhang, S. Zhou. В случае ограниченной области $\Omega$ ранее доказано, что $\mu$ является диффузной по $p(\cdot)$- емкости тогда и только тогда, когда $\mu \in L_1(\Omega) + H^{-1}_{p'(\cdot)}(\Omega)$, т.е.

$$\mu = f - \operatorname{div} \mathrm{f}, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{f} = (f_1, \dots, f_n) \in (L_{p'(\cdot)}(\Omega))^n.$$

Для анизотропного случая такое представление не установлено.

Новизна настоящей работы заключается в следующем.

1. Рассматривается широкий класс анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей. В частности, вектор-функция $\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, входящая в уравнение (1), при п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, для всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ подчиняются условию коэрцитивности вида

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \geq \overline{a} \sum_{i=1}^{n} |s_i|^{p_i(\mathrm{x})} - \phi(\mathrm{x}), \quad \phi \in L_1(\Omega). \qquad (2)$$

Заметим, что в статьях, известных автору, условие типа (2) встречается лишь с $\phi = 0$.

2. Автором замечено, что вводя обозначение $\widetilde{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) + \mathrm{f}(\mathrm{x})$, из (1) получаем уравнение

$$\operatorname{div} \widetilde{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, u, \nabla u) = |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + f(\mathrm{x})$$

с функцией $\widetilde{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, удовлетворяющей условию коэрцитивности вида (2). Поэтому, достаточно рассмотреть уравнение (1) с $\mu = f \in L_1(\Omega)$.

3. Доказано существование энтропийных решений задачи Дирихле для уравнения (1) в произвольных областях $\Omega$, ранее это было сделано лишь для ограниченных областей. Кроме того, установлено, что построенное энтропийное решение является ренормализованным решением той же задачи.

## Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений

**Конечная Н.Н.**
САФУ имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия,
n.konechnaya@narfu.ru

В докладе будет изложен способ получения главного члена асимптотики некоторой фундаментальной системы решений одного класса линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка $\tau y = \lambda y$ на бесконечности, где $\lambda$ – фиксированное комплексное число. При этом рассматривается специальный класс матриц типа Шина – Зеттла, и $\tau y$ – квазидифференциальное выражение, порожденное матрицей из этого класса. Накладываемые на первообразные коэффициентов квазидифференциального выражения $\tau y$ – т.е. на элементы соответствующей матрицы – условия не связаны с их гладкостью, а лишь обеспечивают определенный степенной рост на бесконечности этих первообразных. Таким образом, коэффициенты выражения $\tau y$ могут и оссилировать. К рассматриваемому классу, в частности, относится обширный класс дифференциальных уравнений произвольного (четного или нечетного) порядка с коэффициентами-распределениями конечного порядка. В докладе, используя известное определение произведения двух квазидифференциальных выражений с негладкими коэффициентами, также будет предложен метод, позволяющий получить асимптотические формулы для фундаментальной системы решений рассматриваемого уравнения в случае, когда левая часть этого уравнения представляется как произведение двух квазидифференциальных выражений. Полученные результаты применяются к спектральному анализу соответствующих сингулярных дифференциальных операторов. В частности, предполагая симметричность квазидифференциального выражения $\tau y$, по известной схеме определяется минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный этим выражением в пространстве интегрируемых с квадратом модуля по Лебегу функций на $[1, +\infty)$ (в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[1, +\infty)$), и определяются индексы дефекта этого оператора.

Доклад основан на совместной с профессором Мирзоевым К.А. работе [1].

[1] Мирзоев К. А., Конечная Н.Н. Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений // Уфимский математический журнал, 2017. 9, 3. С.78-88.

**Решение дифференциальных уравнений с первыми краевыми условиями на графе-звезде**

**Коныркулжаева М.Н.**
Казахский Национальный Университет имени Аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

В данной работе решена система дифференциальных уравнений на звездообразном графе. Под звездообразным графом в настоящей работе понимается дерево с одним внутренним узлом и $m$ листьями. Используются стандартные условия склейки во внутренних вершинах и условия Дирихле в граничных вершинах. Спектральные задачи для дифференциальных операторов на графах в настоящее время активно изучаются математиками и имеют приложения в квантовой механике, органической химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания.

Рассмотрим звездообразный граф $\Gamma(V,\varepsilon)$, где $V$ - множество вершин графа, $\varepsilon$ - множество его дуг. Обозначим через $e_j$ при $j=1,2,...,m$ дугу, исходящую из вершины $j$. Не нарушая общности считаем, что длина каждой дуги $|e_j|=\pi$. Для каждой дуги $e_j$, введем параметризацию $x_j \in [0,\pi]$. Выбираем следующую ориентацию: значения $x_j=0$, соответствует граничной вершине дуги $e_j$ и $x_j=\pi$ соответствует внутренней вершине.

Множество $W_2^2(\Gamma)$ состоит из функции $y=[y_j]_{j=1}^m$, компоненты которой $y_j \in W_2^2[0,\pi]$.

Пусть $H$- множество функций $y$ из $W_2^2[0,\pi]$ . Рассмотрим систему неоднородных дифференциальных уравнений на графе $\Gamma$

$$-y_j''(x_j)+q_j(x_j)y_j(x_j)=\lambda y_j(x_j)+f_j(x_j) \tag{1}$$

где $\lambda$- спектральный параметр, $q_j(x_j), j=\overline{1,m}$ - комплекснозначные функции из $L_2[0,\pi]$, называемые потенциалом дуг $e_j, f_j(x_j)$ - плотность распределения внешней силы на дугах $e_j$. Так же считаем, что во внутренней вершине удовлетворяют условиям

$$y_1(\pi)=y_j(\pi), j=2,\dots,m \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j'(\pi)=0$$

Условия склейки (2) называются стандартными или условиями Кирхгофа [1]. В электрических сетях (2) выражает закон Кирхгофа, при колебаниях упругих сетей (2) выражает баланс напряжений и т.д. Граничные условия выберем в виде Дирихле

$$y_j(0)=0, j=1,\dots,m \tag{3}$$

Введем на дугах $e_j$ решения $S_{0j}(x_j,\lambda), S_{0\pi}(x_j,\lambda)$, которые являются решениями однородной задачи Коши:

$$-y_j''(x_j)+q_j(x_j)y_j(x_j)=\lambda y_j(x_j),$$
$$S_{0j}(0)=0, S'_{0\pi}(0)=1,$$
$$S_{\pi j}(\prime)=0, S'_{\pi j}(\pi)=1$$

**Цель настоящей работы:** по заданным $f_1(x_1)...f_m(x_m)$ найти решения задачи $(1)-(2)-(3)$

**Результат:**

**Теорема**. При произвольных $f_1(x_1),...,f_m(x_m)$, решение задачи $(1)-(2)-(3)$ примет вид

$$\begin{aligned}\vec{Y}(\vec{X}) =&\vec{Y}_1(\vec{X}_1)+\dots+\vec{Y}_m(\vec{X}_m)=\\ &-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^\pi\begin{vmatrix}S_{01}(x_1,\lambda)S_{02}(\pi,\lambda)\dots S_{0m}(\pi,\lambda)\\ S_{01}(\pi,\lambda)S_{02}(x_2,\lambda)\dots S_{0m}(\pi,\lambda)\\ \dots\\ S_{01}(\pi,\lambda)S_{02}(\pi,\lambda)\dots S_{0m}(x_m,\lambda)\end{vmatrix}\cdot\\ &\cdot\left[\frac{S_{01}(t,\lambda)S'_{\pi 1}(\pi,\lambda)}{D_1(t,\lambda)},\dots,\frac{S_{0m}(t,\lambda)S'_{\pi m}(\pi,\lambda)}{D_m(t,\lambda)}\right]dt+\\ &+\int\limits_0^\pi diag G_{g1}(x_1,t,\lambda),G_{g2}(x_2,t,\lambda),\dots,G_{gm}(x_m,t,\lambda)dt\end{aligned}$$

функцию Грина задачи $(1)-(2)-(3)$ запишем в виде

$$\begin{aligned}G_{gj}(x_j,t,\lambda)=&-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix}S_{01}(x_1,\lambda)S_{02}(\pi,\lambda)\dots S_{0m}(\pi,\lambda)\\ S_{01}(\pi,\lambda)S_{02}(x_2,\lambda)\dots S_{0m}(\pi,\lambda)\\ \dots\\ S_{01}(\pi,\lambda)S_{02}(\pi,\lambda)\dots S_{0m}(x_m,\lambda)\end{vmatrix}\cdot\\ &\cdot\left[\frac{S_{01}(t,\lambda)S'_{\pi 1}(\pi,\lambda)}{D_1(t,\lambda)},\dots,\frac{S_{0m}(t,\lambda)S'_{\pi m}(\pi,\lambda)}{D_m(t,\lambda)}\right]+\\ &+diag G_{g1}(x_1,t,\lambda),\dots,G_{gm}(x_m,t,\lambda)\end{aligned}\tag{4}$$

$$G_{gj}(x_j,t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{S_{0j}(t,\lambda)S_{\pi j}(x_j,\lambda)}{D_j(t,\lambda)}, & 0<t<x_j\\ \dfrac{S_{\pi j}(t,\lambda)S_{0j}(x_j,\lambda)}{D_j(t,\lambda)}, & x_j<t<\pi, \quad j=1,\dots,m,\end{cases}$$

где $D_j(t,\lambda)=S_\pi(t,\lambda)S'_0(t,\lambda)-S'_\pi(t,\lambda)S_0(t,\lambda)$

[1] Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. - СПб.: СПбГУН и П.Т. 2010. -181 с.

## Асимптотический спектральный анализ теплицевых операторов на симплектических многообразиях

**Кордюков Ю.А.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В докладе будет построена алгебра теплицевых операторов на квантуемом компактном симплектическом многообразии, ассоциированная с ренормализованным лапласианом Бохнера квантового линейного расслоения. Эту алгебру можно рассматривать как аналог алгебры квазиклассических псевдодифференциальных операторов в евклидовом пространстве. Рассматриваемые нами теплицевы операторы позволяют построить квантование типа Березина-Теплица данного симлектического многообразия. Мы обсудим асимптотические спектральные свойства теплицевых операторов в квазиклассическом пределе, такие, как асимптотическое поведение нижних собственных значений и свойства локализации для соответствующих собственных функций, а также опишем некоторые приложения этих результатов к исследованию спектральных свойств лапласианов Бохнера.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 17-11-01004.

## Поверхностные эффекты модели распределения поля директора в шевронных смектиках $C^*$

**Кудрейко А.А., Мигранов Н.Г.**
ФГБОУ ВО Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, Россия
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова, Уфимский федеральный исследовательский центр РАН, г. Уфа, Россия

Для успешного описания электрооптических эффектов в шевронных смектиках C*, следует прибегать к обобщённой теории ориентационных и структурных конфигураций распределения поля директора. Существующие теоретические работы содержат ряд упрощений, которые ограничивают условия наблюдения эффектов.

В работе рассматривается применение двуосного поверхностного потенциала $f_s(\varphi)$ для расчёта энергетически выгодных конфигураций шевронных структур в смектиках C* [1], где $\varphi$ – азимутальный угол директора. Нахождение максимумов крутящих моментов $N_\varphi = -\partial f_s/\partial\varphi$ и $N_\delta = -\partial f_s/\partial\delta$ позволяет получить систему нелинейных связанных уравнений, где $\delta$ – угол наклона смектического слоя от оси $x$ согласно геометрии, представленной в работе [2]. Численное решение такой системы уравнений позволяет найти азимутальный угол директора на подложках $\varphi_s$ и угол $\delta$, где $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$ и $0 \le \delta \le \theta$. Расчёт этих углов далее позволяет корректно записать граничные условия для директора: $\varphi(0)|_{x\to\pm0} = \pm\arcsin(\tan\delta/\tan\theta)$ и $\varphi(\pm d/2) = \pm\varphi_s$, где $\theta$ – угол наклона директора $\mathbf{n}$ относительно нормали к слою. Далее, решая уравнение Эйлера-Лагранжа, можно рассчитать распределение поля директора в слое шевронного смектика С*.

Выполненные расчёты обобщают результаты [2], поскольку жёсткое сцепление директора с подложкой – это идеализированный случай модели шевронного смектика С*.


[1] Kaznacheev A., Pozhidaev E., Rudyak V., Emelyanenko A., Khokhlov A. *Biaxial potential of surface-stabilized ferroelectric liquid crystals* // Phys. Rev. E. 2018. Vol. 97. 042703.

[2] Kudreyko A.A., Migranov N.G., Migranova D.N. *Electro–optic response in thin smectic C* film with chevron structures* // Chin. Phys. B. 2016. Vol. 25, no.12. 126101.


## Алгебраические свойства квазилинейных двумеризованных цепочек, связанные с интегрируемостью


**Кузнецова М.Н., Хабибуллин И.Т.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия


В работе обсуждается метод классификации нелинейных интегрируемых уравнений с тремя независимыми переменными, основанный на понятии интегрируемой редукции. Мы называем уравнение интегрируемым, если оно допускает широкий класс редукций, представляющих собой интегрируемые по Дарбу системы гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим нелинейную цепочку

$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}) \tag{1}$$

с тремя независимыми переменными, где искомая функция $u = u_n(x, y)$ зависит от вещественных $x$, $y$ и целого $n$. Для цепочки (1) искомые конечно-полевые редукции получаются естественным образом, достаточно подходящим способом оборвать цепочку в двух целочисленных точках

$$u_{N_1} = \varphi_1(x, y, u_{N_1+1}, ...), \tag{2}$$

$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}), \quad N_1 < n < N_2, \tag{3}$$

$$u_{N_2} = \varphi_2(x, y, u_{N_2-1}, ...). \tag{4}$$

**Определение 1.** Цепочку (1) назовем интегрируемой, если существуют функции $\varphi_1$ и $\varphi_2$ такие, что для любого выбора пары целых чисел $N_1$, $N_2$, где $N_1 < N_2 - 1$, система гиперболического типа (2)–(4) является интегрируемой по Дарбу.

В настоящей работе мы исследуем квазилинейные цепочки следующего вида
$$u_{n,xy} = \alpha u_{n,x} u_{n,y} + \beta u_{n,x} + \gamma u_{n,y} + \delta, \tag{5}$$
предполагая, что функции $\alpha = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $\beta = \beta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $\gamma = \gamma(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $\delta = \delta(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$ являются аналитическими в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^3$. Мы также предполагаем, что производные
$$\frac{\partial \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})}{\partial u_{n+1}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})}{\partial u_{n-1}} \tag{6}$$
отличны от тождественного нуля.

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве следующего утверждения

**Теорема 1.** Квазилинейная цепочка (5), (6) интегрируема в смысле Определения 1, если и только если она приводится посредством точечных преобразований к одной из следующих форм

$$\begin{aligned}
&i) && u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y}, \\
&ii) && u_{n,xy} = \alpha_n (u_{n,x} u_{n,y} - u_n(u_{n,x} + u_{n,y}) + u_n^2) + u_{n,x} + u_{n,y} - u_n, \\
&iii) && u_{n,xy} = \alpha_n (u_{n,x} u_{n,y} - s_n(u_{n,x} + u_{n,y}) + s_n^2) + s_n'(u_{n,x} + u_{n,y} - s_n),
\end{aligned}$$

где
$$s_n = u_n^2 + C, \quad s_n' = 2u_n, \quad \alpha_n = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - u_n},$$
$C$ – произвольная постоянная.

Отметим, что уравнение i) было найдено ранее в работах [1], [2] Ферапонтова и Шабата и Ямилова, а уравнения ii) и iii), по видимому, являются новыми. Накладывая на уравнения i)-iii) дополнительные условия вида $x = \pm y$ мы получаем 1+1 -мерные интегрируемые цепочки. Можно показать, что точечными заменами они сводятся к уравнениям, найденным ранее Ямиловым (см. [3]).


[1] E.V. Ferapontov, *Laplace transformations of hydrodynamic-type systems in Riemann invariants* // Theor. Math. Phys. **110**:1. 1997. P. 68–77.

[2] A.B. Shabat, R.I. Yamilov, *To a transformation theory of two-dimensional integrable systems* // Phys. Lett. A **227**:1-2. 1997. P. 15–23.

[3] R. Yamilov *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. **39**:45. 2006. P. 541–623.

**Обратные задачи в моделировании биологических молекул**

**Курамшина Г.М.**
Химический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, г.Москва, Россия

Задачи определения структуры молекул и характера внутримолекулярных взаимодействий из данных молекулярной спектроскопии являются классическим примером обратных задач, в которых по известным из эксперимента величинам необходимо найти косвенно связанные с ними параметры, характеризующие молекулу. В частности, при моделировании физико-химических свойств биологических молекул используются данные о молекулярных силовых полях фрагментов, входящих в биологическую систему. Значительные размеры биологических молекул и не очень большое число известных для них экспериментальных данных приводят к тому, что практически все задачи интерпретации спектрального эксперимента становятся недоопределёнными и, как следствие, относятся к классу некорректно поставленных обратных задач. По этой причине в различных исследованиях вводятся те или иные ограничения на получаемые решения, основанные на различных допущениях, и, в итоге, результаты решения обратных задач могут оказаться несравнимыми. Для преодоления подобных трудностей в наших работах были предложены устойчивые методы решения ряда обратных задач структурной химии, в частности задач определения молекулярного силового поля и геометрических параметров молекул, в рамках теории регуляризации нелинейных некорректных задач [1].

Появившийся в последние два десятилетия новый источник информации о структуре и свойствах молекул – квантовомеханические расчёты - позволяет ввести новые принципы отбора из множества решений обратной задачи, в частности, путем включения различных ограничений на структуру матрицы силовых постоянных, определяющей силовое поле молекулы, на основе анализа результатов расчетов и непосредственно использовать представления о т.н. переносимости молекулярных силовых полей в рядах родственных соединений (т.н. «data-base approach»). Созданные оригинальные новые алгоритмы расчета силовых полей многоатомных молекул в декартовых координатах позволяют решить проблемы, связанные с неоднозначностью выбора систем обобщенных координат при анализе силовых полей сложных молекулярных систем.

Созданные алгоритмы использованы для решения обратных задач нахождения регуляризованных квантовохимических силовых полей в декартовых координатах для мелатонина, витамина B6, их метаболитов и производных.

Работа поддержана грантом РФФИ №18-03-00412.

[1] Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Пентин Ю.А., Ягола А.Г. Обратные задачи колебательной спектроскопии. Изд. КУРС, Москва, 2017.

## О комплексной интерпояции весовых пространств $H_p^s(\rho, \upsilon)$ в $n-$мерных областях

**Кусаинова Л.К., Мурат Г.**
Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилёва, г.Астана, Казахстан

Пусть $\rho$ и $h(\cdot)$ - положительные функции, заданные в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие условиям: 1) $0 < h(\cdot) \leq 1$; 2) Для любого $x \in \Omega$ куб $\bar{Q}(x) \subset \Omega$, $Q(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_j - x_j| < h(x)/2,\ 1 \leq j \leq n\}$; 3) Существует такое $\varkappa > 1$, что

$$\varkappa^{-1} \leq \rho(y)/\rho(x),\ \ h(y)/h(x) \leq \varkappa, \text{ если } y \in \bar{Q}(x). \tag{1}$$

Пусть $\widetilde{Q}^j = \tau Q(x^j)$, $\hat{Q}^j = \tau \widetilde{Q}^j$ $(\tau = 3/4)$, $\{\hat{Q}^j, \widetilde{Q}^j\}_{j \geq 1}$ – двойное конечнократное и конечноразделимое покрытие $\Omega$, выделенное из семейства $\{Q(x), x \in \Omega\}$, $\{\psi_j\}_{j \geq 1}$ - соотнесенное семейству пар $\{\hat{Q}^j, \widetilde{Q}^j\}$ разбиение единицы [1]. Положим $\upsilon = \rho h^{-s} (s > 0)$. Обозначим через $H_p^s(\rho, \upsilon)$ пространство всех $f \in L_{p,loc}(\Omega)$, для которых

$$\|f; H_p^s(\rho, \upsilon)\| = \left[ \sum_{j \geqslant 1} (\rho^p(x^j) \|\psi_j f\|_{s,p}^p + \upsilon^p(x^j) \|\psi_j f\|_p^p) \right]^{1/p} < \infty, \tag{2}$$

$1 < p < \infty$. Здесь $\|f\|_{s,p} = \|F^{-1}(1+y^2)^{s/2} F f\|_p$, где $F, F^{-1}$ – соответственно прямое и обратное преобразования Фурье, $\|f\|_p = \|f; L_p\|$. Нормы в (2) для фиксированной пары $\rho$, $h(\cdot)$ эквивалентны.

Пусть $[A_0, A_1]_\theta$ $(0 < \theta < 1)$- интерполяционное пространство, построенное посредством комплексной интерполяции.

**Теорема**. Пусть $s_1, s_2 > 0$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$, $1/p = (1-\theta) \cdot p_1 + \theta \cdot p_2$. Пусть $\rho_i > 0$ $(i = 1, 2)$ – функции в $\Omega$, удовлетворяющие условию (1), $\upsilon_i = \rho_i h_{(\cdot)}^{-s_i}$, $\rho = \rho_1^{1-\theta} \rho_2^\theta$. Тогда $\left[H_{p_1}^{s_1}(\rho_1, \upsilon_1), H_{p_2}^{s_2}(\rho_2, \upsilon_2)\right]_\theta = H_p^s [\rho, \upsilon]$.

**Следствие**. Пусть $W_p^l(1, q)$ весовое пространтсво Соболева с нормой $\|f; W_p^l(1, q)\| = \|\nabla_l\|_p + \|q^{1/p} f\|_p < \infty$. Пусть вес $q(\cdot)$ удовлетворяет условию $(A_\infty)$, $q^*(x) = \sup\{d > 0 : d^{lp-n} \upsilon(\theta_d(x)) \leq 1\}$. Тогда

$$\left[W_p^l(1, q), W_p^m(1, q \cdot q^{*p(l-m)})\right]_\theta = H_p^s(1, q^{*-s}),$$

где $0 < m < l-$ целые, $s = (1-\theta)l + \theta m, 1 < p < \infty$, $pm > n$.

[1] Кусаинова Л.К. Об интерполяции весовых пространств Соболева. Известия МН-АН РК. Серия физ.-матем. №5/1997. С33-51.

## Об ограниченности оператора Шредингера в весовых пространствах Соболева

**Кусаинова Л.К., Мырзагалиева А.Х., Султанаев Я.Т.**
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан

Рассматривалась задача о существовании продолжения оператора $L_0 = -\Delta + q$ в $\mathcal{D}$, $q \in W^m_{p,loc}$, до ограниченного оператора

$$L \colon W^l_{p,v} \to W^m_{p,\omega},\ 0 < m \le l-2 \text{ – целые},\ 1 < p < \infty. \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $W^l_{p,v}$ есть пополнение класса $\mathcal{D}$ по весовой норме $\|u; W^l_{p,v}\| = \|\nabla_l u\|_p + \|v^{1/p} u\|_p$, $\|u\|_p = \|u; L_p(\mathbb{R}^n)\|$.

Приведем один из результатов. Пусть $v(e) = \int\limits_e v(x)\,dx$, $Q = Q_h(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y_j - x_j| < h/2,\ 1 \le j \le n\}$. Положим $v^*(x) = \sup\{h > 0 \colon h^{lp-n} v\,(Q_h(x)) \le 1\}$. Ниже будем полагать $0 < v^*(x) < \infty$ для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть $Q^*(x) = Q_h(x)$ при $h = v^*(x)$. Положим $R = \operatorname*{ess\,sup}_x \mathcal{R}_q(x)$, где

$$\mathcal{R}_q(x) = \sup_{e \subset \frac{1}{2}\overline{Q^*(x)}} \left\{ \left( \int\limits_e |\nabla_m q|^p\,dy/\mathrm{cap}_{p,l}(e) \right)^{1/p} + \left( \int\limits_e |q|^p\,dy/\mathrm{cap}_{p,l-m}(e) \right)^{1/p} \right\},$$

$\mathrm{cap}_{p,l}(e) = \inf\left\{ \int\limits_e |\nabla_l u|^p\,dy,\ u \in \mathcal{D},\ u \ge 1 \text{ на } e \right\}$. Пусть $\theta(\cdot) \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp}\theta \subset Q_1(0)$, $0 \le \theta \le 1$, $\theta = 1$ на $2^{-1}Q_1(0)$, $q_x(y) = q(y)\theta\left((y-x)/v^*(x)\right)$, $R_{q,\theta} = \operatorname*{ess\,sup}_x \mathcal{R}_{q_x}(x)$,

$$N_{q,\omega} = \operatorname*{ess\,sup}_x \left\{ \sup_{e \subset \frac{1}{2}\overline{Q^*(x)}} \left( \int\limits_e |q|^p \omega\,dy/\mathrm{cap}_{p,l}(e) \right)^{1/p} \right\},$$

$$T_\omega = \operatorname*{ess\,sup}_x \left\{ \sup_{e \subset \frac{1}{2}\overline{Q^*(x)}} \left( \omega(e)/\mathrm{cap}_{p,m}(e) \right)^{1/p} \right\}.$$ Через $Mf$, $\chi_E$ обозначаются (кубическая) максимальная функция, характеристическая функция $E \subset \mathbb{R}^n$ соответственно.

**Теорема**. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < m \le l-2$ – целые, $lp < n$, и пусть существует такое $c > 0$, что для п.в. $x$

$$\sup_Q M(v\chi_Q) \le c\,|Q|^{-1} v(Q), \text{ если } Q \subset Q^*(x).$$

Если $K_{q,\theta} = R_{q,\theta} + N_{q,\omega} + T_\omega < \infty$, то оператор $L_0$ продолжается до ограниченного оператора $L$ в (1) с нормой $\|L\| \le K_{q,\theta}$.

[1] L. Kussainova, A. Myrzagaliyeva. On multipliers in weighted Sobolev spaces. Part I. Вестник КарГУ. Серия Математика. №2(82)/2016. С.74-83.

**Построение решения задачи Трикоми- Неймана для вырождающегося уравнения смешанного типа**

**Кучкарова А.Н.**
Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $m > 0$, в области $D$, ограниченной: 1) "нормальной"кривой $\Gamma_0 : x^2 + \frac{1}{\alpha^2} y^{2\alpha} = 1$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(-1, 0)$ и $A_2(1, 0)$; 2) характеристиками $OC$ $(x - \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha = 0)$ и $CA_2$ $(x + \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha = 1)$ уравнения (1) при $y < 0$, где $C = (\frac{1}{2}, -(\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}})$, $O = (0, 0)$, $\alpha = \frac{m+2}{2}$.

Обозначим $D_0 = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$.

В области $D$ для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Задача TN. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x, y) \in \mathrm{C}(\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(D) \cap \mathrm{C}^2(D_0 \cup D_1),$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \ \ (x, y) \in D_0 \cup D_1,$$

$$u(x, y) = f(x, y), \ \ (x, y) \in \Gamma,$$

$$u_y(x, 0) = 0, \ \ -1 < x < 0,$$

$$u(x, y) = 0, \ \ (x, y) \in OC.$$

При некоторых ограничениях на граничную функцию получено представление решения задачи TN в виде суммы рядов по собственным функциям соответствующей спектральной задачи [1].

Отметим, что ранее в работах [2]-[5] построены решения задач Трикоми, Трикоми–Неймана и Геллерстедта.

[1] Кучкарова А.Н. Построение системы собственных функции задачи Трикоми- Неймана для вырождающегося оператора смешанного типа. Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: материалы Международной научной конференции. Стерлитамак, 2018. Т.1. с.212-214.

[2] Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н. Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения. Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42. № 5. С.1147-1161.

[3] Сабитов К.Б., Бибакова С.Л. Построение собственных функций задачи Трикоми-Неймана для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и их применение. Математические заметки. 2003. Т. 74. № 1. С. 76-87.

[4] Кучкарова А.Н. Решение краевой задачи методом спектрального анализа. Ученые записки. Сборник научных статей физико-математического факультета Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы. Уфа, 2007. Выпуск 8. с. 15-22

[5] Сабитов К.Б. К теории уравнения смешанного типа М.ФИЗМАТЛИТ. 2014. 304с. (гл.2)

## Самосопряженные граничные задачи для одномерного свободного релятивистского уравнения Шредингера

**Лагодинский В.М.**

Санкт-Петербургский университет аэрокосмического приборостроения, г. Санкт-Петербург, Россия

В работе [1] предложено новое определение функции дифференциального оператора, которое, в отличие от определения Дж. фон Неймана [2], приводит к локальным операторам. В частности, функции $f(z) = (m^2 + z^2)^{1/2}$ ($f(0) = m > 0$, разрезы вдоль мнимой оси от $im$ до $i\infty$ и от $-im$ до $-i\infty$) и оператору $-i\partial_x \equiv -id/dx$ сопоставляется оператор $f(-i\partial_x) \equiv (m^2 - \partial_x^2)^{1/2}$, который любой функции $u(x)$, определенной на некотором интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ сопоставляет функцию, определенную аналитическим продолжением ряда

$$f(-i\alpha\partial_x)u(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(-i\alpha)^n u^{(n)}(x)$$

на множестве $Q \subset (a, b)$, состоящем из таких точек $x$, что множество предельных точек последовательности $\{\gamma_n(x)\} = \left\{|u^{(n)}(x)|^{1/n} \exp\left(i\frac{\varphi_n}{n}\right)\right\}$, где $\varphi_n = \arg[u^{(n)}(x)]$, ограничено и не пересекается с множеством точек разрезов функции $f(z)$ при всех $x \in Q$.

Пусть $u(x) = \exp(ipx)$, $\forall x \in (a, b)$, тогда, если $\Re p = 0$, $|p|^2 \geqslant m$, то функция $f(-i\partial_x)u(x)$ не определена на $(a, b)$, а в противном случае

$$f(-i\partial_x)u(x) \equiv \sqrt{m^2 - \partial_x^2}\, u(x) = \sqrt{m^2 + p^2}\, \exp(ipx), \qquad \forall x \in (a, b).$$

Это показывает, что оператор $f(-i\partial_x)$ — локальнвй [3]. Аналогично определяются локальные операторы $f^{-1}(-i\partial_x)$ (оператор $f(-i\partial_x)$ имеет обратный) и $V(-i\partial_x) = -if^{-1}(-i\partial_x)\partial_x$. Оператор $f(-i\partial_x)$ — это одномерный релятивистский гамильтониан, а $V(-i\partial_x)$ — оператор $x$-компоненты скорости бесспиновой частицы. Рассмотрим уравнение:

$$\left(\varepsilon - \sqrt{m^2 - \partial_x^2}\right) u(x) = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Оно вполне аналогично одномерному стационарному свободному нерелятивистскому уравнению Шредингера (НУШ). Релятивистский аналог НУШ следует, очевидно, называть релятивистским уравнением Шредингера (РУШ). Если $\varepsilon > 0$, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$u(x) = A\exp\left(i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}\,x\right) + B\exp\left(-i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}\,x\right),$$

где $A$, $B \in \mathbb{C}$. Если же $\varepsilon \leqslant 0$, то уравнение (1) решений не имеет. Таким образом, это дифференциальное уравнение бесконечного порядка либо не имеет решений, либо имеет два линейно независимых решения. Если $u_i(x)$ — решение уравнения (1) с $\varepsilon = \varepsilon_i$, то функция

$$W(x) = u_1(x)(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\partial_x u_2(x) - u_2(x)(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\partial_x u_1(x)$$

не зависит от $x$. Легко видеть, что эта функция вполне аналогична вронскиану НУШ. Известно [4], что самосопряженными являются такие граничные задачи для НУШ, которые обеспечивают равенство значений вронскиана в концевых точках. Таким образом, чтобы получить граничные условия, определяющие самосопряженные граничные задачи для (1), надо в граничных условиях для НУШ заменить производную $\partial_x$ заменить на $f^{-1}(-i\partial_x)\partial_x$.


[1] В.М. Лагодинский. Голоморфные функции дифференциальных операторов и дифференциальные операторы бесконечного порядка. Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. СПб. 2005.

[2] И. фон Нейман. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964, 367 с.

[3] Ф. Трев. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов. Т. 1. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1984, 359 с.

[4] Р. Рихтмаер. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982, 482 с.

## Соотношение между нормами корневых векторов некоторых операторов

**Ларионов Е.А.**
Москва, НИУ МГСУ

В теории операторов и ее приложениях возникают операторы вида $A = H(I+S)$ и $A = H(I+S_1)$, где $I$ - единичный оператор, а $H$, $S$ и $S_1$ принадлежат множеству $\gamma_\infty$ всех линейных компактных операторов в гильбертовом пространстве [1,2]. В типичной ситуации самосопряженный оператор $L_0$ с дискретным спектром возмущается добавлением оператора $T$, причем $D(L_0) \subset D(T)$ и оператор $L = L_0 + T$ представляется в виде $L = \left(I + TL_0^{-1}\right) L_0$ или $L = L_0 \left(I + L_0^{-1}T\right)$. При соответствующих условиях на его коэффициенты оператор $B = TL_0^{-1} \in \gamma_\infty$, а оператор $\tilde{B}_1$ допускает компактное замыкание $B_1$. Оператора $A = L^{-1}$ называется слабым возмущением оператора $H = L_0^{-1}$[2].

Если для корневых векторов оператора $A^{-1}$ и $A$ имеем

$$A^{-1} \overset{0}{u}_k = \lambda_k \overset{0}{u}_k;\; A^{-1} \overset{i}{u}_k = \lambda_k \overset{i}{u}_k + \overset{i-1}{u}_k;$$
$$A \overset{i}{u}_k = v_k \overset{i}{u}_k + v_k A \overset{i-1}{u}_k;\; v_k = 1/\lambda_k, \quad (1)$$

то согласно структуре оператора $A = H\left(I + S_1\right)H;\; H = H^*;\; H, S_1 \in \gamma_\infty$ получим соотношение [3]. Число $i$ принадлежит множеству натуральных чисел.

$$\left[\overset{i}{\alpha}_k - \left(H \overset{i}{\bar{u}}_k /v_k, S_1^* \overset{i-1}{\bar{u}}_k\right)\right] \Rightarrow [k \to \infty]0;$$
$$\overset{i}{\alpha}_k = 1/|v_k| \left\|\overset{i}{u}_k\right\|; \overset{i}{\bar{u}}_k = \overset{i}{u}_k / \left\|\overset{i}{u}_k\right\| \quad (2)$$

влекущее равенства

$$\lim_{k\to\infty} \overset{i}{\alpha}_k = 0;\; \lim_{k\to\infty} \left\|H \overset{i}{u}_k /v_k - \overset{i}{\bar{u}}_k\right\| = 0;\; \lim_{k\to\infty} \left\|A \overset{i}{u}_k /v_k - \overset{i}{\bar{u}}_k\right\| = 0 \quad (3)$$

и оценку

$$\left\|\overset{i-1}{u}_k\right\| \le C_k|\lambda_k| \left\|\overset{i}{u}_k\right\|. \quad (4)$$

В приложениях при $(L_0x, x) \ge \alpha(x; x);\; \alpha > 0$ для некоторого $0 < \varepsilon < 1$ операторы $B_0 = TL_0^{-\varepsilon},\; B_1 = L_0^{-\varepsilon}T$ ограничены $TL_0^{-\varepsilon} = BH^\delta;\; L_0^{-1}T = H^\delta B_1;\; \delta = 1 - \varepsilon$. При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ имеем $S = S_0H^{\frac{1}{2}}$ и $S_1 = H^{\frac{1}{2}}S_{10}$ с ограниченными операторами $S_0$ и $S_{10}$.

Согласно (2) и $S^* = S_{1,0}^*H^{\frac{1}{2}}$ справедливо соотношение

$$\left[\overset{i}{\alpha}_k - \left(H \overset{i}{\bar{u}}_k /v_k, S_{1,0}^*H^{\frac{1}{2}} \overset{i-1}{\bar{u}}_k\right)\right] \Rightarrow [k \to \infty]0 \quad (5)$$

на основе которого выводим оценки

$$1/|v_k|^{3/2}\left\|\overset{i}{u}_k\right\| \le C < \infty, \tag{6}$$

$$\left\|\overset{i-1}{u}_k\right\| \le C|\lambda_k|^{\frac{1}{2}}\left\|\overset{i}{u}_k\right\|. \tag{7}$$

Заметим, что оценки вида (7) для эллиптических операторов второго порядка при некоторых условиях получены в [4].


[1] Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов/ Успехи мат. наук. 1976. Т.26. вып. 4(160). С.15-41

[2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов/М.:Наука, 1965. 448с.

[3] Ларионов Е.А. Свойства корневых функций некоторых дифференциальных операторов/ Дифференциальные уравнения, 1989. Т.25. No10. С.1812-1815.

[4] Ильин В.А. О точных по порядку соотношениях между -нормами собственных и присоединенных функций эллиптического оператора второго порядка/ Дифференциальные уравнения, 1982. Т.18. No1. С.30-37.


## О разностных аппроксимациях и регуляризации в задачах оптимизации для нелинейного эллиптического уравнения со смешанными производными


**Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.**

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия


В настоящей работе изучаются задачи оптимизации для эллиптических уравнений с неограниченной нелинейностью и смешанными производными, с управлениями в коэффициентах при старших производных. Пусть $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\right\}$ - прямоугольник с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered} -\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - 2k_{12}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + q(u)u = f(u),\ x \in \Omega; \\ u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega = \Gamma. \end{gathered} \tag{1}$$

Введем множество допустимых управлений:

$$g = \big(k_{11}, k_{22}, k_{12}\big) \in U = \Big\{ k_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} \in W^1_\infty(\Omega), \alpha, \beta = 1, 2 :$$
$$0 < \nu \le k_{\alpha\alpha}(x) \le \overline{\nu},\ \alpha = 1, 2, \quad |k_{12}(x)| = |k_{21}(x)| \le \nu_* = \nu - \delta_*, \tag{2}$$
$$0 < \delta_* < \nu,\ \forall x \in \Omega,\ \left|\frac{\partial k_{\alpha\beta}}{\partial x_1}\right| \le R_1, \left|\frac{\partial k_{\alpha\beta}}{\partial x_2}\right| \le R_2, \alpha, \beta = 1, 2 \Big\}.$$

Зададим функционал цели в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_\Omega |u(x; g) - u_0(x)|^2 d\Omega. \tag{3}$$

Здесь $u_0 \in W^1_2(\Omega)$ и $q(\eta)$, $f(\eta)$ - заданные функции. Предполагается, что на коэффициенты $q(\eta)$, $f(\eta)$ уравнения состояния (1) накладываются ограничения, которые выполнены лишь в окрестности значений точного решения, что говорит о наличии нелинейностей неограниченного роста.

Задача оптимизации состоит в том, чтобы на решениях $u(g)$ задачи (1), отвечающих всем допустимым управлениям $g \in U$ (см. (1)), минимизировать функционал цели (3).

В работе разработаны разностные аппроксимации задач оптимизации (1) – (3). Исследована корректность постановок экстремальных задач и их разностных аппроксимаций. Установлены априорные оценки погрешности метода по состоянию, оценки погрешности аппроксимации исходного функционала разностным, а также оценки скорости сходимости аппроксимаций по функционалу и слабая сходимость по управлению. Для получения сильной сходимости по аргументу (управлению) производится регуляризация по А. Н. Тихонову.

## Аппроксимация смешанной краевой задачи

**Лубышев Ф.В., Файрузов М.Э.**

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$. Предполагается, что $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ – непустые открытые подмножества $\partial\Omega = \Gamma$ с достаточно гладкими границами, причем $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\overline{\Gamma}_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma = \partial\Omega$. Рассматривается следующая смешанная граничная задача:

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$u(x) = \mu_1(x), \qquad x \in \Gamma_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial N}(x) = \mu_2(x), \qquad x \in \Gamma_2. \tag{2}$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial N}$ – конормальная производная, $k_\alpha(x)$, $f(x)$, $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ – заданные функции, $k_\alpha(x) \in L_\infty(\Omega)$, $f(x) \in L_2(\Omega)$, $\mu_1(s) \in L_2(\Gamma_1)$, $\mu_2(s) \in L_2(\Gamma_2)$, $0 < \nu_0 \le k_\alpha(x) \le \overline{\nu}_0$, $\alpha = 1, 2$.

Краевая задача (1)-(2) это задача с разрывным граничным условием. Задачи такого типа представляют значительный интерес для приложений и разработки методов их исследования. В частности, ряд задач теории упругости, теории диффузии, фильтрации, геофизики, ряд задач расчета и оптимизации процессов электро-тепло-массопереноса в сложных многоэлектродных электрохимических системах сводятся к задачам типа (1)-(2).

Для решения задачи (1)-(2) рассмотрен метод, заключающийся в приближенной замене смешанной задачи (1)-(2) третьей краевой задачей с параметром $\varepsilon > 0$:

$$-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} + \varepsilon(s) u_\varepsilon = g(s), \quad s \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

где

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} \varepsilon, & s \in \Gamma_1, \\ 0, & s \in \Gamma_2, \end{cases} \qquad g(s) = \begin{cases} \varepsilon\mu_1(s), & s \in \Gamma_1, \\ \mu_2(s), & s \in \Gamma_2, \end{cases} \qquad \varepsilon = const > 0.$$

В работе исследована сходимость предложенных аппроксимаций.

## О двухточечных краевых задачах для обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка

**Макин А.С.**
МИРЭА, г. Москва, Россия

Хорошо известно, что характеристический определитель краевой задачи, определенной дифференциальным уравнением

$$u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

с комплекснозначными коэффициентами $p_i(x)$ из класса $L_1(0,\pi)$ и линейно независимыми краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i,k}u^{(k)}(0) + \beta_{i,k}u^{(k)}(\pi) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $\alpha_{i,k}, \beta_{i,k}$ – произвольные комплексные числа, является целой аналитической функцией спектрального параметра $\lambda$. Стало быть, для рассматриваемого оператора существуют только следующие возможности:

1) спектр отсутствует; 2) спектр является конечным непустым множеством; 3) спектр представяет собой счетное множество, не имеющее конечной предельной точки; 4) спектр заполняет всю комплексную плоскость. Если реализуется случай 3), причем размерности корневых подпространств ограничены одной постоянной, будем говорить, что задача (1), (2) имеет классическую асимптотику спектра. Операторам (1), (2) с классической асимптотикой спектра посвящено огромное количество работ. В частности, известно [1], что оператор Штурма-Лиувилля с любыми невырожденными краевыми условиями имеет классическую асимптотику. В последнее десятилетие появился ряд статей, где изучался оператор Штурма-Лиувилля с неклассической асимптотикой спектра. Известны [2] – [4] также примеры операторов высокого порядка, где любое комплексное число является собственным значением. В настоящей заметке построены нетривиальные примеры краевых задач для операторов высокого порядка, где спектр отсутствует или является счетным множеством, но кратности собственных значений неограниченно растут. Последний случай представляется наиболее интересным, так как для него являются содержательными основные для спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов с дискретным спектром вопросы полноты и базисности системы корневых функций.

[1] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев.: Наукова думка, 1977.

[2] Садовничий В. А., Кангужин Б. Е. О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 310-313.

[3] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators // Memoirs of the AMS. 2008. V. 195, No. 911. P. 1-177.

[4] Ахтямов А. М. О спектре дифференциального оператора нечетного порядка // Матем. заметки. 2017. Т. 101, вып. 5. С. 643-646.

## О единственности решения аналога задачи Трикоми с нелокальным интгральным условием сопряжения для общего уравнения смешанного типа

**Мансурова Е.Р.**
ФГБОУ ВО «Марийский государственный университет», г. Йошкар-Ола, Россия

Для уравнения

$$Lu \equiv \begin{cases} \Delta u + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u = 0, y > 0; \\ u_{xy} + a_2(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c_2(x,y)u = 0, y < 0 \end{cases}$$

в области $D$, ограниченной в полуплоскости $y > 0$ простой кривой Жордана $\Gamma$ с концами $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезками $AC : y = -x$, $BC : x = 1$ при $y < 0$ рассматривается

**Задача** $V$. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D_+ \cup AB) \cap C^2(D_+),\ u_{xy} \in C(D_-);$$

$$Lu \equiv 0;\ (x,y) \in D_+ \cup D_-;$$

$$u(x,y)|_\Gamma = \varphi(x,y),\ (x,y) \in \Gamma;$$

$$u(1,y) = \psi(y),\ y \in [-1,0]; u_y(x,+0) = a(x)v_-(x),\ x \in (0,1),$$

где

$$v_-(x) = \Gamma(1-\lambda)\left[D^{\lambda}_{Ox}u(x,0) + D^{\lambda-1}_{Ox}u(t,-x)\right],\ 0 < \lambda < 1,$$

$\varphi(x,y)$, $\psi(y)$, $a(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(1,0) = \psi(0)$, $D^{\lambda}_{Ox}u$ и $D^{\lambda-1}_{Ox}u$ — соответственно производная и интеграл дробного порядка, $D_\pm = D \cap \{y \gtrless 0\}$.

Исследованию аналогов задачи Трикоми с нелокальным условием сопряжения на характеристической линии посвящены, например, работы [1][2], а также [3].

Единственность решения задачи $V$ доказывается с помощью принципов максимума [4].

[1] Сабитов К.Б., Исянгильдин А.Х. Задача Трикоми с нелокальным условием сопряжения для обобщённого уравнения Трикоми. Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, No 3. С. 409–412.

[2] Волкодавов В.Ф., Илюшина Ю.А. Для уравнения смешанного типа единственность решения задачи с сопряжением производной по нормали с дробной производной. Изв. вузов. Математика. 2003. No 9. С. 6–9.

[3] Долгополов М.В., Родионова И.Н. Эадачи для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трёхмерном пространстве с условиями сопряжения на характеристике. Изв. РАН. Сер. мат. 2011. Т. 75. No 4. С. 21–28.

[4] Сабитов К.Б. О принципе максимума для уравнений смешанного типа. Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, No 11. С. 1967–1976.

## Восстановление параметров граничных условий при распространении тепла в единичном стержне

**Мартынова Ю.В., Хакимов Р.С.**

Башкирский государственный аграрный университет, г.Уфа, Россия

Рассмотрим задачу о распространении тепла в однородном стержне единичной длины плотностью $\rho$ с коэффициентом теплопроводности $k$ и удельной теплоемкостью $c$. В случае отсутствия внешних тепловых источников уравнение теплопроводности примет вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) = c\rho\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{1}$$

Граничные условия описывают ситуацию, когда на конце стержня помещена сосредоточенная теплоемкость $c_i$ и происходит теплообмен с коэффициентом $h_i$ с внешней средой нулевой температуры:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0;t) = \frac{h_1}{k}U(0;t) + \frac{c_1}{k}\frac{\partial U}{\partial t}(0;t); \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(1;t) = -\left(\frac{h_1}{k}U(1;t) + \frac{c_1}{k}\frac{\partial U}{\partial t}(1;t)\right). \tag{3}$$

Будем искать решение задачи (1) – (3) в виде: $U(x;t) = e^{-\omega^2 t}y(x)$.

Введя обозначения

$$\lambda = \frac{\omega^2 c\rho}{k} > 0, p_1 = \frac{h_1}{k} > 0, p_2 = \frac{c_1}{c\rho} < 0, p_3 = \frac{h_3}{k} > 0, p_4 = \frac{c_2}{c\rho} < 0,$$

получим краевую задачу:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y'(0) - (p_1 + \lambda p_2)y(0) = 0, \\ y'(1) + (p_3 + \lambda p_4)y(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Суть прямой спектральной задачи для краевой задачи (4) состоит в нахождении таких значений параметра $\lambda$, при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи. Решением прямой спектральной задачи является решение уравнения:

$$\left(\frac{(p_1+\lambda p_2)(p_3+\lambda p_4)}{\sqrt{\lambda}}-\sqrt{\lambda}\right)\sin\sqrt{\lambda}+(p_1+\lambda p_2+p_3+\lambda p_4)\cos\sqrt{\lambda}=0.$$

Обратная спектральная задача для краевой задачи (4) состоит в нахождении всевозможных значений вектора $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ коэффициентов граничных условий, при которых наперед заданные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ являются собственными значениями краевой задачи. Она эквивалентна системе 4 алгебраических уравнений:

$$\left(\tfrac{(p_1+\lambda_j p_2)(p_3+\lambda_j p_4)}{\sqrt{\lambda_j}}-\sqrt{\lambda_j}\right)\sin\sqrt{\lambda_j}+(p_1+\lambda_j p_2+ \\ +p_3+\lambda_j p_4)\cos\sqrt{\lambda_j}=0, j=\overline{1,4}.$$

В работе рассмотрен алгоритм численного построения решений обратной спектральной задачи для краевой задачи (4), основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий [2] и являющийся аналогом метода деления отрезка пополам.

Рассмотрим параллелепипед $[\vec{a},\vec{b}]_\Pi=\{\vec{x}\in R^4: a_k\le x_k\le b_k\}$. Пусть $\vec{c}\in[\vec{a},\vec{b}]_\Pi$ – центр параллелепипеда, тогда можно сформировать 16 подобластей $[\vec{a},\vec{b}]_\Pi^{(i)}$таких, что: $\bigcap_{i=1}^{16}[\vec{a},\vec{b}]_\Pi^{(i)}=\vec{c},\bigcup_{i=1}^{16}[\vec{a},\vec{b}]_\Pi^{(i)}=[\vec{a},\vec{b}]_\Pi$.

Обозначим через $\mu_1(\vec{p}),...,\mu_4(\vec{p})$ собственные значения краевой задачи (4) при некотором значении вектора $\vec{p}\in[\vec{a},\vec{b}]_\Pi$.

Функция $\vec{\mu}(\vec{p})=(\mu_1(\vec{p}),...,\mu_4(\vec{p})):\Pi\to\Pi$ обладает свойствами непрерывной дифференцируемости $\vec{\mu}(\vec{p})\in C^1(\Pi)$ и монотонности $\frac{\partial\mu_j(\vec{p})}{\partial p_k}>0$, $k=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,4}$.

Областью несуществования решений обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных $\vec{\lambda}\in R^4$ будем называть область, в которой нет вектора $\vec{p}\in R^4$ такого, что $\vec{\mu}(\vec{p})=\vec{\lambda}$.

В каждом параллелепипеде $[\vec{a},\vec{b}]_\Pi^{(i)}$, $i=\overline{1,16}$ проверим выполнения условия $\vec{\lambda}\notin[\vec{\mu}(\vec{a}),\vec{\mu}(\vec{b})]_\Pi^{(i)}$. Если условие выполняется, то рассматриваемый параллелепипед не содержит решений, если же условие не выполняется, то по вышеописанной схеме выполняем его разбиение и переходим к следующему параллелепипеду.

В пакете MATLAB разработан комплекс программ, реализующих представленный алгоритм численного построения решений обратной спектральной задачи для краевой задачи (4).

Представленный алгоритм позволяет по 4 собственным значениям восстановить параметры граничных условий краевой задачи распространения тепла в единичном стержне – сосредоточенные теплоемкости и коэффициенты теплообмена на концах стержня.

[1] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов , А. А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 660 с.

[2] Валеев, Н. Ф. О задаче определения параметров граничных условий оператора Штурма–Лиувилля по спектру / Н. Ф. Валеев, Э. Р. Нугуманов, С. А. Рабцевич // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2009. – No 6(72). – С. 12–20.

## Решение задачи Коши с бесконечным числом узлов для операторов свертки с помощью рядов экспонент

**Мерзляков С. Г. , Попенов С. В.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Изучается проблема кратной интерполяции на бесконечном множестве узлов $\mathcal{M}$ с помощью сумм абсолютно сходящихся рядов экспонент с показателями из некоторого множества $\Lambda$. Выделен класс специальных множеств узлов $\mathcal{M}$, включающий в себя изучаемые ранее. Класс определяется в терминах расположения предельных направлений $\mathcal{M}$ и $\Lambda$ в бесконечности и локализации узлов по отношению к предельным направлениям показателей.

Найдены достаточные условия разрешимости проблемы. Для показателей со специальными предельными множествами получены критерии разрешимости в специальном классе множеств узлов. Необходимость условий доказана в большой общности: для произвольных множеств узлов и для интерполяции функциями $u$, представляющимися как преобразование Лапласа мер Радона $d\nu$ на $\Lambda$: $u(z) = \int_\Lambda e^{\lambda z}\, d\nu(\lambda)$. Это дает решение глобальной задачи Коши для операторов свертки с данными на $\mathcal{M}$ в виде рядов экспонент $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}$. $\Lambda = \{\lambda_n\}$ есть подмножество нулей характеристической функции оператора и имеет нулевую плотность. Последовательность $|\lambda_n|$ разреженная сколь угодно сильно.

Таким образом мы усиливаем часть результатов В. В. Напалкова и учеников, см. например, [1]–[3], а также часть наших результатов по теме.

[1] Напалков В.В., Попенов С.В. Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера. Докл. РАН. 381. 2. 2001. С. 164–166.

[2] Напалков В.В., Нуятов А.А. Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки. Матем. сб. 203:2. 2012. С. 77–86.

[3] Напалков В.В., Нуятов А.А. Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки с узлами, заданными в угле. ТМФ, 180:2 (2014), С. 264–271.

## Об усреднении периодических гиперболических систем при учете корректора

**Мешкова Ю.М.**
Лаборатория им. П.Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

Доклад относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов. Мы опираемся на абстрактный теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам усреднения, развитый в цикле работ М.Ш. Бирмана и Т.А. Суслиной. Основной объект — матричный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка $B_\varepsilon$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Коэффициенты этого оператора — периодические матрицы-функции, зависящие от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Старшая часть оператора задана в факторизованной форме, оператор включает члены первого и нулевого порядков.

Для операторного синуса $B_\varepsilon^{-1/2}\sin(tB_\varepsilon^{1/2})$ получена аппроксимация по $(L_2 \to L_2)$ – операторной норме с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ при фиксированном времени $t$. Результат в операторных терминах применяется к усреднению решений первой начально-краевой задачи для гиперболических систем:

$$\begin{cases}\partial_t^2\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = -B_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)\mathbf{u}_\varepsilon, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ t\in\mathbb{R},\\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=0, \quad \partial_t\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),\end{cases}$$

где $\boldsymbol{\phi}\in H^3(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Имеем $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = B_\varepsilon^{-1/2}\sin(tB_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\phi}$.

Метод исследования основан на масштабном преобразовании, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений.

## Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и вычисление сумм некоторых сходящихся рядов

**Мирзоев К.А.**
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, mirzoev.karahan@mail.ru

В докладе будет изложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов найти суммы некоторых сходящихся рядов. Приведём формулировку одной из теорем, справедливость которой можно установить предлагаемым методом.

**Теорема 1.** *Пусть $P_k(x)$ - некоторый многочлен степени $k$ ($k \geq 2$) с вещественными коэффициентами и такой, что $P_k(n+\alpha) \neq 0$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $\alpha \in [0,1)$, и пусть при $(x,t) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ функция $G(x,t)$ является функцией Грина самосопряжённого дифференциального оператора, порождённого выражением*

$$l[y] = P_k(i\frac{d}{dx})y$$

*и граничными условиями*

$$y(0) = e^{2\pi i\alpha}y(2\pi), \quad y'(0) = e^{2\pi i\alpha}y'(2\pi), \quad \dots, \quad y^{(k-1)}(0) = e^{2\pi i\alpha}y^{(k-1)}(2\pi).$$

*Тогда при $x \in [0,2\pi]$ функция $G(x,x)$ не зависит от $x$ и*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P_k(n+\alpha)} = 2\pi G(x,x).$$

Автор поддержан РНФ, грант № 17-11-01215.

## Существование ренормализованного решения анизотропной параболической задачи для уравнения с диффузной мерой

**Мукминов Ф.Х.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\Omega$ — произвольная ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. В цилиндрической области $D^T = (0,T) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача для уравнения вида

$$u_t = \mathrm{div} a(x,u,\nabla u) + b(x,u,\nabla u) + \mu, \; a = (a_1, ..., a_n), \tag{1}$$

$$u(t,x)\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \in L_1(\Omega). \tag{3}$$

Функция $a(x,r,y)$ – удовлетворяет условиям

$$a(x,r,y) \cdot y \geq \delta_0 S(x,y) - CF(x), \quad \forall r \in \mathbb{R}, \; y \in \mathbb{R}^n, \quad S(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p_i(x)},$$

где $F(x) \in L_1(\Omega)$,

$$|a_j(x,r,y)|^{\overline{p}_j(x)} \leq C(F(x) + |r|^{p_j(x)} + S(x,y)), \; \frac{1}{\overline{p}_j} + \frac{1}{p_j} = 1, \; j = 1, ..., n,$$

при всех $r \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$;

$$(a(x,r,y) - a(x,r,z)) \cdot (y-z) > 0, \ y \neq z.$$

Диффузная мера $\mu$ имеет вид

$$\mu = f + \mathrm{div} G + g_t, \ f \in L_1(D^T), \ G_j \in L_{\overline{p}_j(x)}(D^T), \ g \in \mathring{W}^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T).$$

Положим $b(x,r,y) = b(x,0,y) - b_0(x,r,y)$. Пусть

$$|b(x,0,y)| \leq F(x); \quad rb_0(x,r,y) \geq 0, \ \ \forall r \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}^n, \ x \in \Omega;$$

существует число $p_b > 1$ такое, что

$$|b_0(x,r,y)|^{p_b} \leq C(S(x,y) + F(x)), \ |r| \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}^n, \ x \in \Omega.$$

При выполнении перечисленных условий доказано существование ренормализованного решения задачи (1) – (3).

## Спектральные свойства оператора Штурма-Лиувилля с отрицательным параметром и их применение к изучению спектра одного класса дифференциальных операторов гиперболического типа

**Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М.**

Таразский государственный педагогический университет, г. Тараз;
Казахский университет экономики, финансов и международной торговли, г. Астана, Казахстан

В работе в пространстве $L_2(R)$ $(R = (-\infty, \infty))$ изучается оператор Штурма-Лиувилля с отрицательным параметром.

$$L_t = -\frac{d^2}{dx^2} + (-t^2 + itb(x) + q(x)).$$

Здесь $-\infty < t < \infty, i^2 = -1$.

Нетрудно убедиться, что оператор $L_t$ естественным образом возникает при изучении сингулярных дифференциальных операторов гиперболического типа в пространстве $L_2(R^2)$.

В настоящей работе для оператора $L_t$ будут исследованы такие вопросы как: 1) существование резольвенты; 2) дискретность спектра; 3) оценки аппроксимативных чисел ($s$-чисел).

**Теорема 1.1.** Пусть выполнено условие $i$). Тогда оператор $L_t + \lambda I$ при $\lambda \geq 0$ непрерывно обратим.

**Теорема 1.2.** Пусть выполнено условие $i)$. Тогда резольвента оператора $L_t$ компактна тогда и только тогда, когда для любого $w > 0$

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_x^{x+w} q(t)dt = \infty \tag{$*$}$$

Пусть помимо условия $i)$ выполнено следующее условие:
ii) $\mu_0 = \sup\limits_{|x-t|\le 1} \frac{q(x)}{q(t)} < \infty, \mu_1 = \sup\limits_{|x-t|\le 1} \frac{b(x)}{b(t)} < \infty.$

**Теорема 1.3.** Пусть выполнены условия $i) - ii)$. Тогда резольвента оператора $L_t$ компактна тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|x|\to\infty} q(x) = \infty. \tag{$**$}$$

**Теорема 1.4.** Пусть выполнены условия $i) - ii)$. Тогда справедлива оценка

$$c^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2}} mes(x \in \mathbb{R} : Q_t(x)) \le c^{-1}\lambda^{-1}) \le N(\lambda) \le$$
$$c\lambda^{-1} mes(x \in \mathbb{R} : K_t^{\frac{1}{2}}(x)) \le c\lambda^{-1}),$$

где $Q_t(x) = |t^2 + itb(x) + q(x)|, K_t(x) = |tb(x)| + q(x)$, постоянное число $c > 0$ не зависит от $Q_t(x), K_t(x)$ и $\lambda$.

## О классе бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, периодических по каждой переменной

**Мусин И.Х.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $M = (M_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел $M_k$ с $M_0 = 1$ такая, что:

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln M_k}{k} = +\infty;$
2. $M_k^2 \le M_{k-1}M_{k+1},\ k \in \mathbb{N};$
3. существуют числа $H_1 > 1$, $H_2 > 1$ такие, что

$$M_{k+1} \le H_1 H_2^k M_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть $\omega(r) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \ln \dfrac{r^k}{M_k}$ $(r > 0)$, $\omega(0) = 0$.

Пусть $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) : f(x + 2\pi l) = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n, l \in \mathbb{Z}^n\}$,

$$\mathcal{E}_{2\pi}^{M}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \forall\varepsilon > 0\, \exists C_\varepsilon > 0 :$$

$$|(D^\alpha f)(x)| \le C_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|},\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

**Теорема**. Функция $f \in \mathcal{E}^M_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда коэффициенты $a_\alpha$ в разложении $f$ в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha e^{i\langle \alpha, x\rangle},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяют условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c_\varepsilon > 0$ такая, что

$$|a_\alpha| \le c_\varepsilon e^{-\omega(\frac{|\alpha|}{\varepsilon})},\ \alpha \in \mathbb{Z}^n.$$

Случай $n = 1$ и $M_n = n!^s$ $(s > 0)$ рассматривался в [1] (см. Theorem 3.3).


[1] Yoshiko Taguchi, "Fourier coefficients of periodic functions of Gevrey classes and ultradistributions", Yokohama Mathematical Journal, 35 (1987), 51–60.


## Методы спектральной теории в задаче о классификации точек бифуркации динамических систем


**Мустафина И.Ж.**
БашГУ, г.Уфа, Россия


Одной из важных и интересных в теории динамических систем является задача о классификации точек бифуркации. В настоящем докладе эта задача обсуждается для неавтономных периодических уравнении вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\alpha,\beta)x + a(x,t,\alpha,\beta), \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

в котором $\alpha$ и $\beta$ – скалярные параметры, $A(t,\alpha,\beta)$ – квадратная матрица, а нелинейность $a(x,t,\alpha,\beta)$ начинается с квадратичных по $x$ слагаемых. Предполагается, что матрица $A(t,\alpha,\beta)$ и функция $a(x,t,\alpha,\beta)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных и $T$-периодичны по $t$. Уравнение (1) при всех значениях параметров $\alpha$ и $\beta$ имеет точку равновесия $x = 0$.

Наряду с уравнением (1) рассматривается линейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\alpha,\beta)x, \quad x \in R^N\,. \tag{2}$$

Предполагается, что при некоторых $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ система (2) имеет один или несколько мультипликаторов, модуль которых равен 1.

В этом случае $(\alpha_0,\beta_0)$ является точкой бифуркаций системы (1). В докладе обсуждается вопрос построения мультипликаторов системы (2) при значениях $(\alpha,\beta)$, близких к $(\alpha_0,\beta_0)$. Используются методы спектральной теории возмущений линейных операторов.

[1] Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г. Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем. // Уфимский математический журнал, Уфа, 2016, Т. 8, № 3, С. 59–81.

[2] Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г. Исследование границ областей устойчивости двупараметрических динамических систем. // Автоматика и телемеханика, Москва, 2017, № 10. С. 74–89.

## Об асимптотике решений сингулярного дифференциального уравнения n-го порядка с нерегулярными коэффициентами

**Мякинова О.В., Султанаев Я.Т**

БГУ, г.Уфа, Россия, БГПУ, г. Уфа, Россия

Рассмотрим уравнение

$$y^{(2n)} - (q(x) + h(x))y = 0, x \in (0, \infty), \tag{1}$$

где $q(x)$ - регулярный потенциал, $h(x)$ - быстро осциллирующее возмущение вида $h(x) = \sum a_k(x) S_k(\phi(x))$, где $S_k(\phi(t))$ - периодическая функция, а $a_k(x), \phi(x)$ - достаточно гладкие монотонные функции. В данной работе с помощью подхода, изложенного в [1], построены асимптотики ФСР уравнения (1) для случая n=3. Заметим, что результаты с поправками на порядок уравнения будут справедливы и для произвольного $n > 3$. Рассмотрим вектор-столбец $Y = colon(y, y', ..., y^{(5)})$. Перейдем к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' = A \cdot Y = (A_0 + A_1)Y, \tag{2}$$

Пусть матрица $T$ приводит $A_0(x)$ к диагональному виду. $T^{-1}A_0(x)T = \Lambda(x)$ $\mu_i(x)$- собственные значения матрицы $A_0(x)$, $\Lambda(x) = diag\,\{\mu_i\}_{i=1}^{6} = \mu(x)\Lambda_0$, $\mu(x) = \sqrt[6]{q(x)}$. Пусть в (2) $Y = T \cdot Z$, $Z = colon(z_1, z_2, ..., z_6)$. Получим систему

$$Z' = \left(\mu(x)\Lambda_0 + \frac{h(x)}{6\mu^5(x)} M_0 + \frac{\mu'(x)}{12\mu(x)} K_0\right) Z(x), \tag{3}$$

где $\frac{h(x)}{6\mu^5(x)} M_0 = T^{-1}A_0(x)T$, $\frac{\mu'(x)}{12\mu(x)} K_0 = T^{-1}T'$.

Обозначив $\phi(\xi) = h(x)/6q(x)$, $\omega(\xi) = q'(x)/12q^{7/6}(x)$ и сделав замену $\xi = \int_0^x \sqrt[6]{q(t)}dt$, $x = g(\xi), Z(x) = U(\xi)$ в уравнении (3), получим

$$U'(\xi) = (\Lambda_0 + \phi(\xi) M_0 + \omega(\xi) K_0)\, U(\xi). \tag{4}$$

Пусть

$$\phi_1(\xi) = \int_\xi^\infty \phi(t)dt, \phi_2(\xi) = \int_\xi^\infty \phi_1(t)dt, \phi_3(\xi) = \int_\xi^\infty \phi_2(t)dt. \qquad (5)$$

Введя в рассмотрение матрицы $T_1$, $M_{11}$, $M_{21}$, $D$, определяемые соотношениями $M_{11} = [M_0, \Lambda_0], M_{21} = [M_{11}M_0], T_1\Lambda_0 = \Lambda_0 T_1 + \omega(\xi)K_0$, $D$ – матрица 6-го порядка, состоящая из единиц, и сделав в (5) ряд замен: $U(\xi) = e^{-\phi_1(\xi)M_0}B(\xi)$, $B(\xi) = e^{-\phi_2(\xi)M_{11}}S(\xi)$, $S(\xi) = e^{-\phi_3(\xi)M_{21}}P(\xi)$, получим теорему.

**Теорема**. Пусть в уравнении (1) $q(x)$ – дважды непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: $q''(x), q'(x)$ не меняют знак для достаточно больших $x$ и $q(x) \to \infty$, $q'(x) = o(q^\gamma(x)), 0 < \gamma < 7/6$, а функции $\phi_1(\xi), \phi_2(\xi), \phi_3(\xi)$, определяемые соотношениями (5), удовлетворяют условиям $\phi_1(\xi)\omega(\xi) \in L_1(0,\infty), \phi_2(\xi) \in L_1(0,\infty), \phi_3(\xi) \in L_1(0,\infty)$. Тогда уравнение (1) имеет ФСР такую, что при $x \to +\infty$, для $Y = colon(y, y', ...y^{(5)})$ справедливы асимптотические формулы: $Y(x) = T(x) \cdot e^{-\phi_1(g(x))M_0} \cdot e^{-\phi_2(g(x))M_{11}} \cdot e^{-\phi_3(g(x))M_{21}} \cdot (I + T_1(g(x))) \cdot e^{-\int_0^{g(x)} \Lambda_0(t)dt} \cdot$ $\cdot (I + D \cdot o(1))$, где матрицы $T$, $T_1$, $M_0$, $M_{11}$, $M_{21}$, $\Lambda_0$, $D$ определяются формулами выше.

Данная работа была проделана при частичной поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00250) и МОН РК (грант № AP05133397).

[1] Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т. О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений //Уфимский математический журнал. 2015.Т. 7, вып. 3, С. 9-15.

## Использование модифицированного уравнения синус-Гордона при описании процесса возбуждения магнитного бризера в трехслойной ферромагнитной структуре в режиме авторезонанса

**Назаров В.Н.[1], Гумеров А.М.[2], Екомасов Е.Г.[2]**
[1]ИФМК УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия
[2]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Нелинейное дифференциальное уравнение синус-Гордона (УСГ) применяется для все увеличивающегося числа физических приложений. Например, уравнение Ландау-Лифшица для намагниченности при определенных условиях сводится к УСГ и его решения в виде бризеров и солитонов помогают при описании процесса перемагничивания в ферро- и антиферромагнетикахмагнетиках. Учет влияния возмущений на решения УСГ приводит к изменению структуры бризеров и солитонов и возбуждению внутренних степеней свободы. Интерес представляет исследование одномерной динамики перемагничивания и генерации локализованных магнитных неоднородностей под действием высокочастотного внешнего магнитного поля, когда с помощью контролируемых условий полями малой амплитуды могут быть достигнуты высокие углы прецессии намагниченности. В данной работе описывается авторезонансное параметрическое возбуждение магнитного бризера в трехслойном ферромагнетике с уменьшенным значением анизотропии в тонком слое полями переменной частоты и малой амплитудой специального вида — $h = h_0 \cos(\omega' \tau - \mu \tau^2/2)$ [1]. Получены дифференциальные уравнения, называемые уравнениями главного резонанса:

$$\frac{dR}{d\tau} = -\frac{2R\beta}{\epsilon} - \frac{Rh_0}{\epsilon} \sin\Psi, \frac{d\Psi}{d\tau} = -R - \frac{h_0}{\epsilon} \cos\Psi + \frac{\mu}{\epsilon^2}\tau - \frac{2k(g+1)}{\epsilon} b_1 + \frac{2g}{\epsilon} b_2,$$

анализ которых показывает существование решений с растущей амплитудой в зависимости от размеров тонкого слоя (подробно см. в [1]). Напрямую, с помощью численных методов из уравнений синус-Гордона с примесями, показана возможность генерации в тонком слое магнитного бризера [2], в том числе, и в режиме авторезонанса с увеличивающейся со временем амплитудой при наличии внешнего магнитного поля специального вида.


[1] Назаров В.Н., Екомасов Е.Г., Письма о материалах. 2018. Т. 8, № 2. С. 158–164.

[2] Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V., Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. V. 312. P. 198–208.


## Моделирование акустического рассеяния от коаксиальных сфер


**Насибуллаева Э.Ш.**

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия


Явление рассеяния звука на препятствиях малых размеров играет важную роль в акустике, в первую очередь из-за того, что на данном явлении основываются многие практические применения акустических волн, такие как: гидролокация, приборы неразрушающего контроля, медицинские сканеры, зондирования атмосферы и океана и т.п. Одной из актуальных подзадач является исследование рассеяния на множествах сфер, а именно: на твердых сферах, сферических пузырьках и каплях при различных внешних воздействиях.

Рассмотрено акустическое рассеяние от $N$ сфер различных радиусов $a_1, \ldots, a_N$ в бесконечном трехмерном пространстве, заполненном однородной средой, характеризующейся плотностью $\rho_0$ и скоростью звука $c_0$. Исследовался случай коаксиальных сфер — центры сфер располагались вдоль одной оси, которая при выборе системы координат определялась в качестве оси $z$. Целью настоящей работы является обобщение численной модели для определения поля вокруг коаксиальных сфер при прохождении сферической волны от монопольного источника излучения как в случае звуконепроницаемых сфер (волна не проходит внутрь сферы — твердые сферы) с произвольным акустическим импедансом, так и для случая звукопроницаемых сфер (волна проходит через сферу — пузырьки и капли).

Задача рассеяния звука от $N$ сфер сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала $\psi(\mathbf{r})$

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями вида

$$\left.\left(\frac{\partial\psi}{\partial n} + i\sigma_p\psi\right)\right|_{S_p} = 0, \quad p = \overline{1, N} \tag{2}$$

в случае звуконепроницаемых сфер или

$$(\psi(\mathbf{r}) - \psi_p^{\text{int}})|_{S_p} = 0, \quad \left.\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_p}\frac{\partial\psi_p^{\text{int}}}{\partial r}\right)\right|_{S_p} = 0, \quad p = \overline{1, N} \tag{3}$$

в случае звукопроницаемых сфер. В уравнениях (1)–(3) $k$ — волновое число; $n$ — нормаль к поверхности; $\sigma_p$ — комплексная полная проводимость (акустический импеданс); $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; $\rho_p$ — плотность среды внутри $p$-й сферы; $S_p$ — поверхность $p$-й сферы; $\psi_p^{\text{int}}$ — комплексный потенциал внутри $p$-й сферы, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца с волновым числом $k_p$ для среды внутри сферы:

$$\nabla^2\psi_p^{\text{int}} + k_p^2\psi_p^{\text{int}} = 0.$$

Потенциал внешнего поля представляется в виде суммы потенциалов падающего поля $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$ и поля рассеяния $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}).$$

Поле рассеяния удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, которое выделяет единственное решение уравнения (1) в классе обобщенных функций в неограниченной области:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik\psi_{\text{scat}}\right) = 0.$$

При решении уравнения Гельмгольца (1) с граничными условиями (2) использовалась численная техника [1], основанная на быстром методе мультиполей, позволяющая достичь высокой точности получаемых результатов, а также минимизировать машинное время. В настоящей работе представленная техника обобщена также на случай звукопроницаемых коаксиальных сфер (с граничными условиями (3)).

Проведен численный параметрический анализ значения потенциала на поверхности сфер и распределения давления вне сфер, а в случае звукопроницаемых сфер — также и внутри сфер, для различных значений радиусов сфер, характеристик внешней/внутренней среды (плотность и скорость звука), акустического импеданса (для звуконепроницаемых сфер), расстояний между центрами сфер, расстояния от центра фиксированной сферы до монопольного источника излучения.

Обобщена формула для основной характеристики поля рассеяния — полного сечения рассеяния [2] — на случай падающей сферической волны от монопольного источника излучения. Показана зависимость расстояния между центрами сфер от данной характеристики.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020582-р_а) и АН РБ (договор № 40/9).

[1] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, no. 6. Pp. 2688–2701.

[2] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.

## Спектральные характеристики устойчивости течения термовязких жидкостей

**Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф.**

Институт механики УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Задача об устойчивости ламинарного течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью описывается уравнением Орра–Зоммерфельда [1-2]. Вопрос об устойчивости течения термовязкой жидкости в канале с неоднородным температурным полем остается актуальным и в настоящее время. Рассмотрим задачу о влиянии линейной зависимости вязкости жидкости от температуры на устойчивость ламинарного режима течения в плоском канале с неоднородным температурным полем (численные результаты представлены на рис. 1 и на рис. 2).

При увеличении значений параметра термовязкости жидкости критическое число Рейнольдса стремится в сторону меньших значений, т.е.

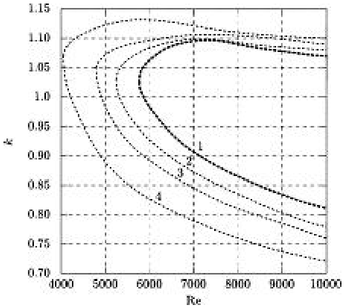


Рис. 1: Области неустойчивости течения жидкости с постоянной вязкостью (1) и с линейной зависимостью вязкости от температуры: $\alpha_L = 0.1$ (2), $\alpha_L = 0.2$ (3), $\alpha_L = 0.5$ (4).

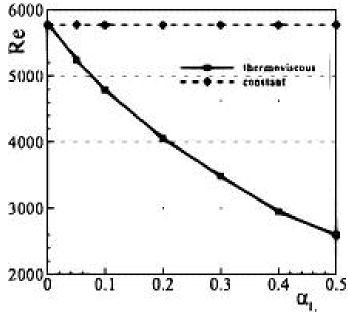


Рис. 2: Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра термовязкости для термовязкой жидкости и жидкости с постоянной вязкостью.

течение становится менее устойчивым. Таким образом, показано влияние температурной зависимости вязкости жидкости на устойчивость течения жидкости.

При поддержке Проекта 0246-2018-0003 и частичной финансовой поддержке РФФИ р_а 17-41-020999, гранта ведущих научных школ НШ-2669.2014.1.

[1] Orszag S. A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation. Journal of Fluid Mechanics, 1971, Vol. 50, Part 4, pp. 689–703.

[2] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005, 288 с.

## Компактность интегрального оператора в весовом пространстве Соболева и связный с ним спектральная задача

**Ойнаров Р.**

Евразийский националный университет им Л.Н.Гумилёва, г.Астана, Казахстан

Пусть $I = (a,b) \subseteq R$. Пусть $1 < p,q,r < \infty$. Предположим, что $v$ и $u$ - положительные и измеримые функции на $I$. Обозначим через $W^1_{p,r}(u,v)$ множество локально абсолютно непрерывных функций $f$ на $I$ со следующей конечной нормой

$$\|f\|_{W^1_{p,R}} = \|uf'\|_r + \|vf\|_p. \tag{1}$$

Пусть $\overset{\circ}{AC}(I)$ - Множество локально абсолютно непрерывных функций с компактными носителями на $I$. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_p^1(u,v)$ замыкание множества $\overset{\circ}{AC}(I)\bigcap W_p^1(u,v)$ по норме (1).

Рассматривается проблема о ограниченности и компактности интегрального оператора $Kf(x)=\int\limits_a^x K(x,t)f(t)dt$, $x\in(a,b)$ из весового пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}_{pp}^1(u,v)$ в весовое пространство Соболева $W_{p,r}^1(u,v)$ при некоторых предположениях на ядра $K(x,t)\geq 0$.

Полученные результаты применяется к спектральной задаче

$$(-1)^{n+1}\left(\rho^2(x)\left(\frac{u}{w}\right)^{(n+1)}\right)^{(n+1)}+(-1)^n\left(v^2(x)\left(\frac{u}{w}\right)^{(n)}\right)^{(n)}=\lambda u.$$


[1] R. Oinarov, *Boundedness of integral operators from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space* // Complex Variabeles and Elliptic Equations., **56**, 1021-1038 (2011).

[2] Р. Ойнаров, *Ограниченность интегральных операторов в весовых пространствах Соболева* // Известия РАН, Серия математическая. -2014. -Т. 78, N 4. -С. 207-2023.


## Условия максимальной регулярности решений дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченным промежуточным коэффициентом


**Оспанов К.Н.**

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан


Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$-y''+r(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{1}$$

где $r$ и $q$ - соответственно, непрерывно дифференцируемая и непрерывная функции, $f\in L_p(-\infty,+\infty)$ $(1<p<+\infty)$. К уравнению (1) приводят некоторые задачи стохастических процессов [1], динамики частиц в среде с сопротивлением, а также финансовой математики.

Пусть $0\leq\epsilon<1$, $p'=p/(p-1)$, а $g$ и $h\neq 0$ - непрерывные функций и

$$\alpha_{g,h,\epsilon}(t)=\|g\|_{L_p(0,t)}\|h(\cdot)^{-1}\|_{L_{p'}((1-\epsilon)t,+\infty)}, t>0,$$

$$\beta_{g,h,\epsilon}(\tau)=\|g\|_{L_p(\tau,0)}\|h(\cdot)^{-1}\|_{L_{p'}(-\infty,(1+\epsilon)\tau)}, \tau<0,$$

$$\gamma_{g,h,\epsilon}=\max\{\sup_{t>0}\alpha_{g,h,\epsilon}(t),\sup_{\tau<0}\beta_{g,h,\epsilon}(\tau)\}.$$

**Теорема**. Пусть выполнены следующие условия:
a) $|r|\geq 1$, $\gamma_{1,\sqrt[p]{r},0}<+\infty$, $\gamma_{q,r^*,\epsilon}<+\infty$, здесь $r^*(x)$ - усреднение по Отелбаеву функции $r$;
b) для любых точек $x$ и $\eta$ из $R$, таких, что $|x-\eta|\leq k(\eta)/r(\eta)$, выполнены неравенства $C_1\leq r(x)/r(\eta)\leq C_2$, где функция $k(x)\geq 4$ непрерывна и $\lim\limits_{|x|\to+\infty}k(x)=+\infty$.
Тогда для каждого $f\in L_p(-\infty,+\infty)$ уравнение (1) имеет единственное сильное решение $y$, и для $y$ справедлива следующая коэрцитивная оценка ($\|\cdot\|_p$ - норма $L_p(-\infty,+\infty)$):

$$\|-y''\|_p+\|ry'\|_p+\|qy\|_p\leq C\|f\|_p.$$

Условия теоремы выполняются для уравнения

$$-y''+\left[7+x^2+x^{10}cos^2x^{10}\right]y'+5x^4y=f(x).$$

Работа поддержана грантовым проектом AP05131649 Министерства образования и науки Республики Казахстан и научным фондом Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева.

[1] V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. R$\ddot{o}$ckner, S.V. Shaposhnikov. Fokker–Planck–Kolmogorov Equations. -American Mathematical Society. Math. Surv. and Monogr. -Vol. 207. 2015.

## Один критерий ограниченности и компактности класса множеств в $L[0,\infty)$

**Отелбаев М., Султанаев Я., Жусупова Д.**
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

Обозначим через $H_1$ банахово пространство, полученное пополнением бесконечно гладких, обращающихся в нуль вместе со своими производными в окрестности бесконечно удаленной точки в нуль функций по норме

$$\|u\|_{H_1}=\int\limits_0^\infty\left(|u^{(n)}(t)|+\sum_{j=0}^{n-1}|P_j(t)u^{(j)}(t)|dt\right)$$

где $P_j(t)$ – непрерывные функции для которых выполняется условие $P_j(t)\geq 1$.

Нами были получены условия обеспечивающие ограниченное и компактное вложения пространства $H_1$ в пространство $H_p$ с нормой

$$\|u\|_{H_p} = \left( \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{\infty} \left| \rho_j(t) u^{(j)}(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\rho_j(t)$ положительные непрерывные функции.

Пусть подмножество

$$K = \left\{ u : \, u \in H_1[0, \infty), \, u^{(n)} \geq 0 \right\}$$

есть конус в $H_1[0, \infty)$, состоящий из элементов $H_1[0, \infty)$ для которых

$$(-1)^j u^{(j)}(t) \geq 0 \text{ для всех } j = 0, \, 1, \, 2, \ldots, \, n.$$

Справедлива

**Теорема.** *Конус $K$ вложен в $L_p[0, \infty)$, если и только если*

$$\hat{A} = \sup_{t \in [0, \infty)} \int_0^{\infty} |K(\eta, t)|^p d\eta < \infty,$$

*где $K$ – интегральный оператор из $L_1[0, \infty)$ в $L_p[0, \infty)$ с ядром*

$$K(t, \eta) = \chi(\eta - t) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\rho_j(t) \gamma_j (\eta - t)^{n-1-j}}{1 + \sum\limits_{j=0}^{n-1} \gamma_j \int\limits_0^{\eta} P_j(\xi) (\eta - \xi)^{n-1-j} d\xi},$$

*действующий по формуле*

$$(Kf)(t) = \int_0^{\infty} K(t, \eta) f(\eta) d\eta.$$

При доказательстве теоремы были использованы работы [1] – [2]. Причем для нормы оператора вложения справедливы оценки

$$c^{-1} \hat{A} \leq \|E\|_{L_1(0,\infty) \to L_p(0,\infty)} \leq c \hat{A},$$

где $c$ – постоянное число.

[1] *Ойнаров Р., Отелбаев М.* Критерии липшицевости и сжимаемости нелинейных интегральных операторов. *Сибирский математический журнал*, 1984, т. 25 №6, стр. 195 - 217.

[2] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 3-е издание, 1984.

## Квантование одной из Гамильтоновых систем Кимуры

**Павленко В.А.**
ФГБОУ ВО БГАУ, г.Уфа, Россия

Строятся явные решения системы уранений вида

$$\begin{cases} kY_{t_1} = H_{t_1}^{2+1+1+1}(t_1, t_2, -k\frac{\partial}{\partial x}, -k\frac{\partial}{\partial y}, X, Y)\Psi \\ kY_{t_2} = H_{t_2}^{2+1+1+1}(t_1, t_2, -k\frac{\partial}{\partial x}, -k\frac{\partial}{\partial y}, X, Y)\Psi, \end{cases} \tag{1}$$

где $k$ — некоторое число, $H_{t_i}^{2+1+1+1}(t_1, t_2, p_1, p_2, q_1, q_2)$ — пара гамильтонинанов из статьи Кимуры (см. [1]).

Имеется система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x} = \left(\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_t}{x-\frac{t_2}{t_1}} + A_\infty\right) Y = AY \\ \frac{\partial Y}{\partial t_1} = \left(E_2 x + B_1 + \frac{\frac{t_2}{t_1^2} A_t}{x-\frac{t_2}{t_1}}\right) Y = UY \\ \frac{\partial Y}{\partial t_2} = -\frac{\frac{1}{t_1} A_t}{x-\frac{t_2}{t_1}} Y = VY, \end{cases}$$

где $A_0$, $A_1$, $A_t$, $A_\infty$, $B_1$ — $2\times 2$-матрицы. Ее решения построены в работах Накамуры, Каваками и Сакая (см. [2]). Легко проверить, что замена $Z = e^{0.5D}Y$ приводит к матрицам с нулевым следом.

Рассмотрим

$$\begin{cases} Z_{t_1} = U(t_1, t_2, \zeta)Z \\ Z_{t_2} = V(t_1, t_2, \zeta)Z \\ Z_\zeta = A(t_1, t_2, \zeta)Z \end{cases}, \quad \begin{cases} Z_{t_1} = U(t_1, t_2, \eta)Z \\ Z_{t_2} = V(t_1, t_2, \eta)Z \\ Z_\eta = A(t_1, t_2, \eta)Z \end{cases},$$

Образуем матрицу:

$$M = Z^{-1}(t_1, t_2, \zeta)Z(t_1, t_2, \eta)$$

Получено, что матрица $M$ удовлетворяет уравнениям:

$$M_{t_1} = a_1 M_{\eta\eta} - b_1 M_{\zeta\zeta} + c_1 M_\eta + d_1 M_\zeta + g_1 M, \tag{2}$$

$$M_{t_2} = a_2 M_{\eta\eta} - b_2 M_{\zeta\zeta} + c_2 M_\eta + d_2 M_\zeta + g_2 M, \tag{3}$$

где $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$, $g_i$ — коэффициенты. зависящие от $\zeta$, $\eta$, $t_1$, $t_2$. С помощью замен переменных уравнения (2) и (3) сводятся к уравнениям (1). Что позволит нам построить явные решения системы уранений (1).


[1] Hironobu Kimura. *The degeneration of the two dimentional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure.* Vol. 4 CLV(1989), pp. 24-74

[2] Hiroshi Kawakami, Akane Nakamura and Hidetaka Sakai. *Degeneration scheme of 4-dimentional Painleve-type equations.* http://arXiv:1209.3836v3 [math.CA] 4 Aug 2016


## О свойствах решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости


**Раутиан Н.А.**

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г.Москва, Россия


Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений на основе спектрального анализа их символов. В работе рассматриваются уравнения следующего вида

$$\frac{du(t)}{dt} + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $A$ – самосопряжённый положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$, имеющий компактный обратный. Скалярная функция $\mathcal{K}(t)$ допускает представление

$$\mathcal{K}(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu(\tau),$$

где $d\mu$ - положительная мера, которой соответствует возрастающая непрерывная справа функция распределения $\mu$. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Получены представления сильных решений указанных уравнений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и невещественной частям спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений (см. [1], [2]). Указанные представления являются новыми для данного класса интегро-дифференциальных уравнений.


[1] Власов В. В. Раутиан Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. – М.: МАКС Пресс, 2016, 488 с.

[2] Vlasov V. V., Rautian N. A. Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory // Trans. Moscow Math. Soc., 2014, V. 75, P. 185–204.

# Об обобщенном операторе Данкла

**Рахимова А.И., Напалков В.В.**
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Оператор Данкла был введен в работах Ч. Ф. Данкла (1989 г.) и М. Реслера (2002 г.). Обобщенный оператор Данкла изучался в статьях [1] и [2].

Обобщенный оператор Данкла определяется по следующей формуле:

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f(\alpha_j z),\ c > 0,\ \alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}},\ j = \overline{(0; m-1)}.$$

В дальнейшем рассматривается его действие на целые функции, оператор переводит пространство $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$.

Рассматриваются целая функция $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ порядка $\rho$ и типа $\sigma \neq 0, \infty$, причем $a_k \neq 0$ $(k \geq 0)$ и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} k^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[k]{|a_k|} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}$, и произвольная функция $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, регулярная в круге $|z| < R$, $0 < R \leq \infty$. Выражение $D^n F(z) = D^n(F, f) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} b_k \frac{a_{k-n}}{a_k} z^{k-n}$ называется обобщенной производной Гельфонда-Леонтьева порядка $n$ функции $F(z)$, порожденной функцией $f(z)$.[3]

**Теорема**. Обобщенный оператор Данкла является оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева, порожденным функцией $g(z) = d(1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{p(1)p(2)\ldots p(k)})$, $d = const$, $d \in \mathbb{C}$,
где $p(k) = k + c \sum\limits_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(k+1)}{m}}$.

[1] Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.) Операторы Данкла как операторы свертки // Доклады Академии наук, 2008, т. 423, № 3, с. 300 – 302.

[2] Карамов И.И., Напалков В.В. Обобщенный оператор Данкла // Уфимский математический журнал, 2014, т. 6, № 1, с. 59 – 68.

[3] Леонтьев А.Ф. Обобщения рядов экспонент, 1981, М.: Наука, 320с.

# О двукратной полноте корневых функций одного класса нерегулярных пучков дифференциальных операторов

**Рыхлов В.С.**
СГУ им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением $n$-го порядка

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)},\ p_{js}\in\mathbb{C},\quad p_{n0}\neq 0,\quad p_{0n}\neq 0, \tag{1}$$

и линейно независимыми однородными двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями

$$\sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s\alpha_{ijs}y^{(j)}(0)=0,\ i=\overline{1,l},\ \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s\beta_{ijs}y^{(j)}(1)=0,\ i=\overline{l+1,n}, \tag{2}$$

где $\lambda$, $\alpha_{ijs}$, $\beta_{ijs}\in\mathbb{C}$, $\varkappa_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $1\leq l\leq n-1$.

Далее используем хорошо известные определения собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к.ф.), $m$-кратной ($1\leq m\leq n$) полноты к.ф., характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, характеристического многоугольника $M_\Delta$ и другие понятия из [1, 2, 3], не повторяя в данном тексте.

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место $m$-кратная полнота системы к.ф. этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$. Историю вопроса можно найти, например, в [3].

Предположим, что корни $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ характеристического уравнения (или, по-другому, характеристики)

$$\sum_{j+s=n} p_{js}\omega^j=0$$

попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала, в количествах $k$ и $n-k$ ($0\leq k\leq n$).

Далее используются обозначения $[p,q]_-=\min\{p,q\}$, $[p,q]_+=\max\{p,q\}$.

В [4] исследовалась кратная полнота к.ф. для такого пучка в общем случае. Получены достаточные условия $2(n-l)$-кратной полноты при $[k,n-k]_+\leq l$ и $2l$-кратной полноты при $[k,n-k]_-\geq l$ в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом. Отмечено, что в случае

$$[k,n-k]_- < l < [k,n-k]_+, \tag{3}$$

используемое доказательство не проходит из-за пока непреодолимых трудностей. Это случай пучка $L(\lambda)$ с устойчивой сильной нерегулярностью, то есть такой сильной нерегулярностью (см. [3]), которая имеет место при любых значениях коэффициентов краевых условий $\alpha_{ijs}$ и $\beta_{ijs}$. Именно подслучай этого случая рассматривается в данной статье, а именно, далее рассмотрим случай $k = n - 2$ и $2 < l < n - 2$. Очевидно, что это подслучай случая (3). Не нарушая общности, можно считать, что характеристики расположены следующим образом:

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n-2},$$
$$\omega_{n-1} = |\omega_{n-1}| \exp(i\varphi),\ \omega_n = |\omega_n| \exp(i\varphi),\ |\omega_{n-1}| < |\omega_n|,$$

где $\varphi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Как указано в [4], вопрос о кратной полноте в некоторых случаях удается решить, используя другой подход, предложенный в [3]. Использование этого подхода позволяет доказать теорему

**Теорема**. Пусть $k = n - 2$ и $n - k < l < k$, то есть $2 < l < n - 2$, и характеристический многоугольник $M_\Delta$ пучка $L(\lambda)$ вида (1)–(2) не является отрезком. Тогда система к.ф. пучка $L(\lambda)$ двукратно полна в пространстве $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом.


[1] Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук, 1971, т. 26, № 4, с. 15–41.

[2] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

[3] Рыхлов В.С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ (Таврический вестник информатики и математики), 2015, № 1, с. 69–86.

[4] Рыхлов В.С. Достаточные условия кратной полноты корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конф., посв. 90-летию В.А. Ильина, 2018, с. 192–194.

## Единственность решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением

**Сабитова Ю.К.**
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г.Стерлитамак, Россия

Для уравнения эллиптико - гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} + (sgn\, y)\,|y|^n u_{yy} + a|y|^{n-1}u_y - b^2u = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|\ 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < a < 1$, $n < 1$ – заданные действительные числа, исследована следующая граничная задача.

**Задача Дирихле.** *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y) \in C^2(D_+ \cup D_-) \cap C(\overline{D}); \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^a u_y(x, y) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^a u_y(x, y); \tag{3}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(x, \beta) = f(x),\ \ u(x, -\alpha) = g(x),\ \ 0 \le x \le l, \tag{5}$$

$$u(0, y) = 0, \qquad -\alpha \le y \le \beta; \tag{6}$$

$$u(0, y) = u(l, y),\ \ -\alpha \le y \le \beta, \tag{7}$$

*где $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $f(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $f(0) = f(l) = 0$, $g(0) = g(l) = 0$.*

В данной работе, опираясь на исследования [1], [2], установлен критерий единственности решения задачи (2) – (7) методом спектрального анализа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No 18-31-00111).

[1] *Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Известия вузов. Математика. 2007. No 4. С. 45 – 53.

[2] *Сабитова Ю.К.* Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. 2015. Т.98. Вып. 3. С. 393 – 406.

**Об устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с быстро осциллирующей матрицей**

**Сагитова А.Р.**[1]**, Кадырбердина А.А.**[2]
[1]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия
[2] Башкирский государственный педагогический университет им. Акмуллы, г. Уфа, Россия

Хорошо известна теорема [1] Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению:

**Теорема 1**. Пусть для системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_i x_i + \phi_i(t, x_1, ...x_n), i = 1, ..., n,$$

где $x \in R^n$, $\phi_i(t, x_1, ...x_n)$ — бесконечно малая порядка выше первого по сравнению с $||x||$, выполнены условия:
1) все $Re\ \lambda_i < 0, \forall i$, где $\lambda_i$ - собственные значения матрицы $A$;
2) $\forall i = 1, ..., n$ справедлива оценка

$$|\phi_i(t, x_1, ..., x_n)| \leq M \left( \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2+\alpha}$$

3) все собственные значения матрицы $A$ простые.

Тогда нулевое решение системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Нами установлен следующий результат:
Пусть $\lambda_1(t) < 0, \lambda_2(t) < 0$ и функция $\phi(t)$ удовлетворяет условию

$$\varPhi(t) = \int_t^{+\infty} \phi(t) dt$$

- суммируема на бесконечности, тогда решения системы

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} y + C\phi(t)y,$$

где $C$ — постоянная матрица, при $t \longrightarrow \infty$ ведут себя как решения системы

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} y.$$

Отсюда, в частности, следует асимптотическая устойчивость по Ляпунову нулевого решения нашей системы.

**Замечание 1.** Полученный результат справедлив, например, для $\phi(t) = \sin e^{t^2}$.

[1] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. (3-е изд.) СПБ: Лань, 2003, с. 448.

[2] Валеев Н. Ф., Назирова Э. А., Султанаев Я.Т. О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений. Уфимск. матем. журн., 2015 Т. 7 №3. С. 9-15.

## Системы дифференциальных уравнений второго порядка в вырожденном случае

**Садриева Р.Т., Сидельникова Н.А.**
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В данной работе исследуется система из $n$ уравнений на интервале $I = [a, b]$ (конечном или бесконечном):

$$L(D, k) = D^2 y(x) - k^2 A(x) y = 0, \tag{1}$$

где $D = \frac{d}{dx}$, $k$-большой параметр, $y(x) = colon\,(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ и $A(x)$ - матрица $n$-го порядка.

Мы получили асимптотические формулы для решений системы (1), при $x \to +\infty$, в случае, когда матрица $A(x)$ имеет кратные характеристические корни в вырожденном случае:

$$y_1^{\pm}(x, k) \approx x \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda(x)}} \exp\left\{\pm k \int \sqrt{\lambda(t)} dt\right\},$$

$$y_2^{\pm}(x, k) \approx \pm \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda(x)}} \exp\left\{\pm k \int \sqrt{\lambda(t)} dt\right\},$$

$$y_j^{\pm}(x, k) \approx w_j^{\pm} \cdot \left(f_j(x) + k^{-1} \varphi_j^{\pm}(x, k)\right), \quad 3 \le j \le n, \quad x \in I, k \ge k_0 > 1,$$

$$\left|\varphi_j^{\pm}(x, k)\right| < const,$$

$$w_j^{\pm}(x, k) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda(x)}} \exp\left\{\pm k \int \sqrt{\lambda(t)} dt - \int f_j^* D f_j(x)\right\},$$

$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \lambda(x0, \lambda_3(x), \ldots, \lambda_n(x)$ - собственные значения матрицы $A(x)$, $f_j(x), f_j^*(x)$ - правые и левые собственные векторы матрицы $A(x)$.

[1] Султанаев Я.Т. Асимптотика спектра обыкновенных дифференциальных операторов в вырожденном случае. Дифференциальные уравнения, 1992, Т.18, №10, с.1694-1702.

[2] Исламова Р.Т. Асимптотика решений системы второго порядка в вырожденном случае. Вестник БашГУ, 2002. №2, с.19-22.

## Прямая и обратная задачи для уравнения Пуассона с равенством потоков на части границы

**Садыбеков М.А., Дукенбаева А.А.**
Институт математики и математического моделирования,
г. Алматы, Казахстан

В докладе мы рассматриваем одну модельную стационарную задачу диффузии. Похожего класса задачи впервые были исследованы для уравнения смешанного типа С.А. Чаплыгиным применительно к проблеме течения потока газа. Задачи с нелокальными краевыми условиями для уравнений смешанного типа были впервые сформулированы и исследованы Ф.И. Франклем и А.В. Бицадзе. Эти задачи описывают течение потока газа при переходе из дозвуковой в сверхзвуковую. Если же рассматривать только дозвуковые течения (стационарные), то описание потока может быть произведено с помощью уравнений Лапласа или Пуассона.

Простейшие задачи могут быть смоделированы на круговом секторе с противоположными потоками на радиусах и равенством нулю решения на одном из радиусов. Такие задачи были впервые исследованы в работах Е.И. Моисеева [1, 2].

Нами рассматривается более общая постановка на круговом секторе $D = \{(r,\theta) : 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi\}$, при которой кроме равенства потоков на радиусах задается и пропорциональность плотностей распределения на этих радиусах с переменным коэффициентом. Рассматриваются как прямая, так и обратная задачи.

Задача А. *Найти функцию* $u\,(r,\theta) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\,(D)$*, удовлетворяющую в* $D$ *уравнению Пуассона*

$$-\triangle u\,(r,\theta) = f\,(r,\theta)\,, \tag{1}$$

*граничным условиям на дуге кругового сектора*

$$u\,(1,\theta) = \tau\,(\theta)\,,\ 0 \leq \theta \leq \pi, \tag{2}$$

*и на противоположных радиусах*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta), \\ u(r,0) = \alpha(r) u(r,\theta), \end{array} \right. \quad r \in [0,1]. \tag{3}$$

Здесь $\triangle = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ есть оператор Лапласа в полярных координатах.

Первое условие в (3) означает равенство потоков через противоположные радиусы, а второе условие есть пропорциональность плотностей распределения на этих радиусах. Коэффициент пропорциональности $\alpha(r) \neq -1$ – действительнозначная достаточно гладкая функция.

Задача B. *Найти функцию $u(r,\theta) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую в $D$ уравнению Пуассона*

$$-\triangle u = f(\theta), \tag{4}$$

*граничным условиям (2) на дуге кругового сектора и граничным условиям (3) на противоположных радиусах, а также неизвестную функцию $f(\theta)$ по дополнительному условию переопределения на дуге кругового сектора*

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = \nu(\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi. \tag{5}$$

Доказывается корректность сформулированных прямой и обратной задач.

Работа выполнена по проекту AP05133271 Комитета науки МОН Республики Казахстан.

[1] E. I. Moiseev, V. E. Ambartsumyan; On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of ows at the part of the boundary and conjugated to its problem. Differential Equations, 46(5) (2010), pp. 718-725.

[2] E. I. Moiseev, V. E. Ambartsumyan; On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of ows at the part of the boundary and conjugated to its problem. Differential Equations, 46(6) (2010), pp. 892-895.

**О локализованных решениях модифицированного уравнения синус-Гордона в модели с трехмерными примесями.**

**Салимов Р.К.,Екомасов Е.Г., Гумеров А.М.**
Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Известное нелинейное дифференциальное уравнение синус - Гордона (УСГ) имеет много приложений в различных областях математической физики. Обычно при рассмотрении модифицированных уравнений Клейна-Гордона различные неоднородные параметры или примеси моделируют наличие неоднородных областей в системе, например для УСГ дефекты в магнитных материалах [1,2]. Ранее в [3] численно была показана возможность существования в области примеси долгоживущих 2D–пульсонов и 2D-солитонов, структура и динамические свойства которых зависят от параметров примеси. При рассмотрении 3D уравнения синус-Гордона:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = f(x, y, z)sin(u) \tag{1}$$

видно из (1), что для случая примеси, описываемой функцией $f$ в виде потенциальной ямы глубины K и ширины W при одновременной замене $x, y, z, t$ на $ax, ay, az, at$ уравнение не меняется и решения $u, x, y, z, t)$ переходят в решения $u[ax, ay, az, at)$ . Таким образом, при таком преобразовании, глубина потенциальной ямы K умноженная на квадрат ее размеров W будет постоянной для одного и того же решения. Часто для приложений интересен вариант модифицированного УСГ вида:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = sin(u) + g(x, y, z)sin(u) \tag{2}$$

где меняется лишь функция $g(x, y, z)$. Численные исследования уравнения (2) показывают возможность существования в области примеси долгоживущих 3D–пульсонов и 3D-солитонов, структура и динамические свойства которых зависят от параметров примеси. Найдены области существования для каждого из решений. Область существования солитоноподобных решений будет лежать около кривой вида $K = const/W^2$, которая характерна для уравнения (1).

[1] A. M. Gumerov, E. G. Ekomasov, F. K. Zakir'yanov, R. V. Kudryavtsev, Comput. Math. Math. Phys., 54(3) (2014) 491–504.

[2] E. G. Ekomasov, A.M. Gumerov, R.V. Kudryavtsev, JETP Letters, 101(12) (2015) 835–839.

[3] E.G. Ekomasov, A. M. Gumerov, R. V. Kudryavtsev, Journal of Computational and Applied Mathematics, 312 (2017) 198–208.

# Многопериодические решения автономных систем с оператором дифференцирования по диагонали временных и Ляпунова векторному полю пространственных переменных

**Сартабанов Ж.А.,Омарова Б.Ж.**
АРГУ имени К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан

Рассматривается автономная система

$$Dx = Ax + f(\zeta, x) \tag{1}$$

оператором дифференцирования $D$

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle J\zeta + \psi(\zeta), \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\rangle, \tag{2}$$

по независимым временным переменным $\tau \in R$, $t = (t_1, ..., t_m) \in R^m$ и пространственной вектор-переменной $\zeta = (\zeta_0, ..., \zeta_k) \in R^{2k+2}$ с векторными компонентами $\zeta_j = (\xi_j, \eta_j)$, $j = \overline{0, k}$, где e=(1,...,1) - $m$-vector, $\frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$ вектор-оператор дифференцирования по временным переменным $t_0 = \tau, t_1, ..., t_m$, $\left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ - скалярное произведение этих векторов; $J = diag[\nu_0 I, ..., \nu_k I]$ - матрица с симплектической двухмерной еденицией $I$; $\nu_0, ..., \nu_k$ - положительные постоянные, которые предполагаются рационально несоизмеримыми, а

$$\psi(x) = \left( \frac{\partial}{\partial \xi_0} \Psi(\zeta), \frac{\partial}{\partial \eta_0} \Psi(\zeta), \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Psi(\zeta), \frac{\partial}{\partial \eta_k} \Psi(\zeta) \right)$$

- вектор-функция, полученная дифференцированием некоторой функции $\Psi(\zeta)$, $\frac{\partial}{\partial \zeta} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi_0}, \frac{\partial}{\partial \eta_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \frac{\partial}{\partial \eta_k} \right)$ вектор-оператор дифференцирования по пространственным переменным $\xi_0, \eta_0, ..., \xi_k, \eta_k$; $A$ - постоянная $n \times n$-матрица, $f(\zeta, x)$ - $n$-вектор-функция переменных $\zeta$ и $x$ - искомой $n$-вектор-функции.

Основная задача заключается в исследовании колебательного процесса, характеризуемого многопериодической по временным переменным вектор-функцией , определяемой независящей от временных переменных (автономной) системой (1) с оператором дифференцирования (2) как по временным, так и пространственным переменным.

Предполагаются, что а) характеристическая система оператора $D$ по пространственным переменным является системой Ляпунова, б) матрица $A$ обладает свойством экспоненциальной дихотомичности, в) $f$ обладает свойством аналитичности по всем аргументам и г) $\Psi$ обладает свойством аналитичности в $\delta$-окрестности $O_\delta(0) = R_\delta^{2k+2}$ точки $\zeta = 0$ радиуса $\delta = const > 0$ евклидового пространства $R^{2k+2}$, разложение которой начинается с однородной формы не ниже третьей степени.

Доказывается существование $2(k+1)$-параметрического семейства многопериодических решений системы (1)-(2) при выполнении условий а)-г) на основе методов Ляпунова [1] и теории многопериодических решений уравнений в частных производных [2-4].

[1] Ляпунов А.М. Общая задачи об устойчивости движений. М.-Л.:ГИТТЛ, 1950

[2] Харасахал В.Х. Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука, 1970.

[3] Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Алма-Ата: Наука, 1979.

[4] Sartabanov, Zh.A.,Omarova, B.Zh.Multiperiodic solutions of a linear autonomous system with an operator of differentiation with respect to directions of the Lyapunov vector field // The proceedings of the XVIII International Scientific Conference on Differential Equations "Yerugin's Reading-2018". Grodno, Belarus. May 15-18, 2018 - part 2. P.45-46.

## Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов

**Сафонова Т.А.**

САФУ имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия

Пусть $S$ – самосопряжённый оператор, порождённый выражением $l_2[y] = -y''$ и граничными условиями Дирихле (т.е. условиями $y(0) = y(\pi) = 0$) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$, и пусть $p_m(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами степени $m \geq 1$. Рассмотрим оператор $p_m(S)$. Область определения $\mathcal{D}$ этого оператора -

$$\mathcal{D} = \{y|\ y^{(j-1)} \in AC[0,\pi];\ U_j(y) = 0,\ j = 1,\dots,2m\},$$

где теперь линейные формы $U_j(y)$ определяются равенствами

$$U_{j+1}(y) := y^{(2j)}(0),\ U_{j+m+1}(y) := y^{(2j)}(\pi),\quad j = 0,\dots,m-1,$$

и если $y \in \mathcal{D}$, то

$$p_m(S)y = p_m(-\frac{d^2}{dx^2})y =: l_{2m}[y].$$

Спектр $\sigma$ оператора $p_m(S)$ является дискретным и

$$\sigma = \{\lambda|\ \lambda = \lambda_{mk} := p_m(k^2),\ k = 1;2;\dots\}.$$

При этом каждому собственному значению $\lambda_{mk}$ соответствует ортонормированная собственная функция $\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$.

Пусть далее $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора $p_m(S)$ (т.е. $0 \notin \sigma$), а $R$ – его резольвента. Оператор $R$ является интегральным оператором с ядром $G(x, t)$ – функцией Грина задачи

$$\begin{cases} l_{2m}[y] = f \\ U_j(y) = 0,\ j = 1, \dots, 2m. \end{cases} \tag{1}$$

С одной стороны, хорошо известна процедура построения этой функции (см., напр., [1], часть вторая, гл. I, §1.5), а с другой стороны, согласно теореме о спектральном разложении справедлива следующая теорема.

**Теорема 1**. Пусть многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m(k^2) \neq 0$ при $k = 1, 2, \dots$. Тогда для функции Грина $G(x, t)$ задачи (1) справедливо тождество

$$G(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx \sin kt}{p_m(k^2)}. \tag{2}$$

В частности,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_m(k^2)} = \int\limits_0^{\pi} G(x, x) dx. \tag{3}$$

Используя далее известные разложения функций

$$\frac{z \cos x - z^2}{1 - 2z \cos x + z^2},\quad \ln(1 - 2z \cos x + z^2),\quad \ln 2|\sin \frac{x}{2}|,\quad \ln 2|\cos \frac{x}{2}|$$

в ряды Фурье, где $z \in (-1, 1)$ - параметр, и равенство (2), можно доказать, что справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2**. Пусть $z \in (-1, 1]$, а функции $p_m(x)$ и $G(x, t)$ те же, что и в формулировке теоремы 1. Тогда справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{p_m(k^2)} = 2 \int\limits_0^{\pi} G(x, x) \frac{z^2 - z \cos 2x}{1 - 2z \cos 2x + z^2} dx$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k p_m(k^2)} = \int\limits_0^{\pi} G(x, x) \ln(1 - 2z \cos 2x + z^2) dx.$$

**Пример**. Пусть $p_m(x) = x^m$. Сравнение формулы (2) при $t = x$ и разложения многочлена Бернулли $B_n(x)$ в ряд Фурье, позволяет заключить, что

$$G(x, x) = (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m-1}}{(2m)!} (B_{2m}(x/\pi) - B_{2m}),$$

где $B_{2m}$ - числа Бернулли. Используя это соотношение и определение полилогарифмической функции $Li_j(z)$ порядка $j$, можно показать, что при $z \in (-1, 1]$ тождества из теоремы 2 записываются в виде

$$Li_{2m}(z) = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} \int\limits_0^1 (B_{2m}(x) - B_{2m}) \frac{z(\cos 2\pi x - z)}{1 - 2z \cos 2\pi x + z^2} dx$$

и, соответственно,

$$Li_{2m+1}(z) = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{2m+1}}{(2m+1)!} \int\limits_0^1 B_{2m+1}(x) \frac{z \sin 2\pi x}{1 - 2z \cos 2\pi x + z^2} dx.$$

Доклад основан на работе [2].

Автор поддержан РФФИ (грант № 18-01-00250) и Правительством Архангельской области (конкурс "Молодые учёные Поморья", научный проект № 06-2018-03а "Спектральный анализ дифференциальных операторов и его приложения к вычислению сумм некоторых сходящихся рядов").

[1] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

[2] Мирзоев К.А., Сафонова Т.А. Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Доклады АН. – 2018 (в печати).

## Численное моделирование собственных значений и собственных форм упругой пластины произвольной формы с точечными упругими креплениями

**Сивухов С.А., Трунов К.В., Валеева Д.Н.**

Башкирский государственный педагогический университет, г.Уфа, Россия

Задачи о линейных колебаниях упругих пластин и оболочек с дополнительными креплениями возникают в различных областях механики и техники. В работе рассматривается прямая спектральная задача для малых линейных колебаний ортотропной пластины $\Omega$, соединенной с неподвижным основанием упругими креплениями $k_j$, $j = 1, ..., n$ в постановке согласно [1]. Задача нахождения собственных колебаний рассматриваемой системы эквивалентна поиску экстремалей квадратичной формы $\widehat{Q}(u,u,\lambda)$(см. [2]),

$$\widehat{Q}(u,u,\lambda)=\int\limits_{\Omega}|\Delta_0 u|^2 dxdy+\sum_{j=1}^{n}k_j|u(x_j,y_j)|^2-$$

$$-\lambda\int\limits_{\Omega}|u|^2 dxdy,$$

где $\Delta_0 u = div(\mathbf{a}\bigtriangledown u)$, $\mathbf{a}$ - эрмитова положительно определённая матрица. Областью определения кваратичной нормы $\widehat{Q}(u,u,\lambda)$ является пространство

$$D_{\widehat{Q}}=\{u\in W_2^2(\Omega)|l(u)|_{\partial\Omega=0}\}.$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $H_1$ с нормой

$$\| u \|_{H_1}^2=\int\limits_{\Omega}(|\Delta_0 u|^2+|u|^2)dxdy.$$

Применяя к квадратичной форме $\widehat{Q}(u,u,\lambda)$ теоремы вложения Соболева, ассоциированной с ней полуторалинейой форме $Q(u,v,\lambda)$ для всех $u,v\in D_{\widehat{Q}}$ можно сопоставить некоторый ограниченный оператор $L(\lambda): H_1(\Omega)\to H_1(\Omega)$. Полученный в [1] оператор $L(\lambda)$ имеет связь с бигармоническим оператором с $\delta$-подобным потенциалом

$$L_\delta u=(\Delta_0^2-\lambda I)u+\sum_{j=1}^{n}k_j\delta_j(M-M_j)u(M),$$

с областью определения $D_{L_\delta}\subset D_{\widehat{Q}}$.

Задача нахождения собственных форм и собственных значений колебаний пластины сводится к поиску экстремали $u_0$ квадратичной формы $\widehat{Q}(u,u,\lambda)$. Экстремаль $u_0$ удовлетворяет решению уравнения

$$Q(u_0,v,\lambda)=0,\quad \forall v\in D_{\widehat{Q}}. \tag{1}$$

Численные расчёты проведены на основе схемы МКЭ. Особенностью нашего подхода является применение линейных лагранжевых элементов, что целесообразно с точки зрения экономии вычислительных ресурсов. Напрямую с помощью линейных элементов найти минимум функционала $\widehat{Q}(u,u,\lambda)$ невозможно. В работе предложен подход, основанный на представлении уравнения (1) в виде системы уравнений

$$\Delta_0\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\\Delta u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\V-\lambda I&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где матрица V задаёт распределение креплений на пластине. Далее ищем слабое решение системы (2). Численный расчёт таким образом сводится к решению задачи на собственные значения для матрицы

$$(A_1 B A_2 - V)u_1 = \lambda B u_1,$$

где $A_1$ и $A_2$ - матрицы жёсткости оператора $\Delta_0$ с соответствующими граничными условиями, B - матрица масс. Полученный алгоритм реализован в виде приложения, позволяющего моделировать собственные формы и собственные значения пластины произвольной формы в зависимости от расположения креплений на ней.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта ”Прямые методы спектрального анализа дифференциальных операторов и их восстановление по спектральным данным № 18-01-00250”.

[1] Н.Ф. Валеев, Э.А. Назирова "Прямая и обратная спектральные задачи в теории колебаний упругой пластины с дополнительными точечными взаимодействиями ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. Том 152(2018). С. 21-30

[2] Базаров М. Б., Сафаров И. И., Шокин Ю. И. "Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем" , Издательство СО РАН, Новосибирск, (1996), 189с.

## Спектральные свойства дифференциальных операторов четвертого порядка в вырожденном случае

**Сидельникова Н.А.**

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

С теории сингулярных дифференциальных операторов центральное место занимают вопросы, связанные с изучением спектральных свойств операторов в зависимости от коэффициентов соответствующего дифференциального выражения. Целью нашей работы является изучения асимптотики фундаментальной системы решений уравнения

$$Ly = y^{IV} - 2\,(X)y')' = \lambda y, 0 < x < \infty \tag{1}$$

при $x \to \infty$.

Два корня характеристического уравнения $\mu_1$ и $\mu_2$ стремятся к нулю при $x \to \infty$, а остальные корни $\mu_3$ и $\mu_4$ неограниченно растут по абсолютной величине. Предположим, что выполнены следующие условия

1. $p(x) = ax^{\alpha}$, где $a, \alpha - const : a \neq 0, \alpha > 0$;

2. $Re\,(\mu_3(x,\lambda) - \mu_4(x,\lambda))$ не меняет знак при большом $x$;

3. при достаточно большом $x_0 > 0$, $x \geq x_0$ имеет место оценка $b \leq \frac{\mu_3(x,\lambda)}{\mu_4(x,\lambda)} \leq c$, где $b, c$ - положительные константы.

Основным результатом работы является теорема, которая дает асимптотические формулы для четырех линейно-независимых решений уравнения (1).


[1] Султанаев Я.Т. Асимптотика спектра обыкновенных дифференциальных уравнений в вырожденном случае. Тр. сем. им. Петровского. Вып.№13, 1988г., с. 36-55.


## О многокомпонентных дифференциальных подстановках


**Старцев С.Я.**

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия


Наиболее известные подстановки вида $v = P(x, u, u_x)$, переводящие решения эволюционного уравнения

$$u_t = f(x, u, u_1, \ldots, u_k), \qquad u_i := \frac{\partial^i u}{\partial x^i},$$

в решения уравнения такого же вида, обладают следующим свойством: для них найдутся ненулевые операторы

$$S = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i(x, u, u_1, \ldots, u_\ell) D_x^i, \qquad H = \sum_{i=0}^{m+1} \zeta_i(x, v, v_1, \ldots, v_r) D_x^i, \qquad (1)$$

такие что уравнение $u_t = S(\eta(x, P, D_x(P), \ldots, D_x^{\kappa}(P))$ переводится подстановкой в уравнение $v_t = H(\eta(x, v, v_1, \ldots v_\kappa))$ для любой функции $\eta$, зависящей от конечного числа аргументов. Здесь $v_j := \partial^j v / \partial x^j$, а через $D_x$ обозначен оператор полной производной по $x$. Например,

$$S = D_x^2 + 2uD_x + 2u_x, \qquad H = D_x^3 + 4vD_x + 2v_x.$$

для преобразования Миуры $v = u_x - u^2$. Поэтому в дальнейшем для краткости мы будем назвать подстановки, обладающие вышеупомянутым свойством, *подстановками типа Миуры*.

В скалярном случае полная классификация подстановок типа Миуры была получена в [1]. Однако подходы, использованные в этой работе, вообще говоря, неприменимы в случае систем (то есть когда $u$, $f$, $v$ и $P$, а также коэффициенты $\alpha_i$ и $\zeta_i$ операторов (1) являются $n$-мерными векторами). Нижеследующая теорема дает нам другой, пригодный для систем, способ проверки того, является ли $v = P(x, u, u_x)$ подстановкой типа Миуры, и построения для нее соответствующих операторов $S$ и $H$.

Для формулировки этой теоремы соотношение $v = P(x, u, u_x)$ разрешим относительно $u_x$, получив в результате выражение $u_x = a(x, u, v)$. Пользуясь последним равенством, мы можем выразить любую функцию от $x$, $u$ и производных $u$ по $x$ в переменных $x$, $u$, $v$, $v_i$. Для любой функции $g$ от этих переменных оператор $D_x$ задается формулой

$$D_x(g) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} a + \frac{\partial g}{\partial v} v_1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial v_i} v_{i+1}.$$

**Теорема.** Если матрица $P_{u_x}$ невырождена, то $v = P(x, u, u_x)$ является подстановкой типа Миуры с оператором $S$ порядка $m$ тогда и только тогда, когда найдутся $n$-мерные векторы $\beta_i(x, v, v_1, \ldots, v_p)$, $i = \overline{0, m+1}$, такие что $\beta_{m+1} \neq 0$ и выполнено соотношение

$$\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i (D_x - a_u)^i (a_v) \beta_i = 0. \tag{2}$$

Если выполнено (2), то соответствующие операторы $S$ (записанный в переменных $x$, $u$, $v$, $v_i$) и $H$ можно можно найти с помощью формул

$$S = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i (D_x - a_u)^i (a_v) \sum_{j=0}^{m-i} D_x^j \circ \beta_{i+j+1}, \quad H = \sum_{i=0}^{m+1} D_x^i \circ \beta_i.$$

Символ $\circ$ здесь обозначает композицию операторов (оператора умножения скалярной функции на вектор и степени полной производной).

Доказательство теоремы и примеры ее применения даны в [2].


[1] Старцев С.Я. *О дифференциальных подстановках типа преобразования Миуры* // ТМФ. Т. 116. No 3. 1998. С. 336-348.

[2] Старцев С.Я. *О дифференциальных подстановках для эволюционных систем уравнений* // Уфимск. матем. журн. Т. 9. No 4. 2017. С. 111-116.

# Симметрические дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами и индексом дефекта $(1,1)$ и связанные с ними якобиевые матрицы

**Тагирова Р.Н.**
САФУ имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия

Известно, что в базисе функций Чебышева-Эрмита матричное представление минимального замкнутого симметрического оператора $L_0$, порожденного дифференциальным выражением

$$l = \sum_{j=0}^{n} a^{*j}(h_j a^* + \overline{h_j} a + \alpha_j e)a^j$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(-\infty; +\infty)$, где $h_j$ - комплексные числа, $\alpha_j$ - вещественные числа, $e$ - единичный оператор, а

$$a^* = (x - d/dx)/\sqrt{2}, \;\; a = (x + d/dx)/\sqrt{2},$$

есть либо бесконечная диагональная матрица, либо трехдиагональная бесконечная якобиева матрица.

Дифференциальное выражение $l$ является дифференциальным выражением порядка $2n+1$ в случае, когда $Imh_n \neq 0$, и порядка $2n$ в случае, когда $Imh_n = 0$, а $Reh_n \neq 0$ или $h_n = 0, \alpha_n \neq 0$. При этом реализуются и случаи, когда коэффициент при старшей производной обращается в ноль на вещественной оси (так называемые иррегулярные дифференциальные выражения).

Поскольку минимальный замкнутый симметрический оператор, порождённый бесконечной якобиевой матрицей в гильбертовом пространстве последовательностей $l^2$, имеет индекс дефекта $(0,0)$ или $(1,1)$, то таковым же является индекс дефекта оператора $L_0$. Причем в случае индекса дефекта $(1,1)$ выражение $l$ порождает целый оператор минимального типа в смысле М.Г. Крейна.

В докладе будут приведены условия на коэффициенты $h_j, \alpha_j$ $(j = 0, 1, ..., n)$, обеспечивающие реализацию случаев индекса дефекта $(0,0)$ или $(1,1)$ оператора $L_0$, и исследованы вопросы, связанные с характером спектра самосопряжённых расширений этого оператора в пространстве $\mathcal{L}^2(-\infty; +\infty)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. Мирзоеву К.А. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

**Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии пяти электронных систем в модели Хаббарда. Третье квартетное состояние**

**Ташпулатов С.М.**
Институт ядерной физики АН РУз., г. Ташкент, Узбекистан

В настоящее время модель Хаббарда является одной из наиболее интенсив- но изучающихся многоэлектронных моделей металла [1]. Однако до сих пор имеется очень мало точных результатов для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда, и получение соответст- вующих утверждений представляет большой интерес.

В работе [2], [3] изучался спектр и связанные состояния (СС) или антисвязанные состояния (АСС) системы трех и четырех электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда.

В настоящей работе рассматривается оператор энергии пятиэлектронных систем в модели Хаббарда и описывается структура существенного спектра и дискретный спектр системы для третьего квартетных состояний.

Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m+\tau,\gamma}a_{m,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}. \quad (1)$$

Здесь $A-$ энергия электрона в узле решетке; $B-$ интеграл переноса между соседными узлами (для удобства, мы считаем, что $B>0$); $\tau = \pm e_j, j = 1,2,...,\nu$, где $e_j-$ единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшми соседям; $U-$ параметр кулоновского взаимодействия двух электронов в одном узле; $\gamma-$ спиновый индекс,$\gamma =\uparrow$ или $\gamma =\downarrow$, через $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначены значения спина $1/2$ и $-1/2$; $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}-$ соответственно, операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$.

Гамильтониан $H$ действует в антисимметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}_{as}$. Пусть $\varphi_0-$ вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{H}_{as}$. Третье квартетное состояние соответствует свободному движению пяти электронов и их взаимодействие на решетке со следующему базисными функциями ${}^3q^{3/2}_{m,n,r,s,t} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{s,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}\varphi_0$. Подпространство ${}^3\mathcal{H}^q_{3/2}$, соответствующее третьему квартетному состояния, состоит из множества всех векторов имеющие вида $\psi = \sum_{m,n,r,s,t\in Z^\nu} f(m,n,r,s,t)^3q^{3/2}_{m,n,r,s,t}, f \in l^{as}_2$, где $l^{as}_2$ является подпространство антисимметрических функций из пространств $l_2((Z^\nu)^5)$. Обозначим через ${}^3H^q_{3/2}$ сужение оператора $H$ на подпространстве ${}^3\mathcal{H}^q_{3/2}$.

**Теорема 1**. Пространство ${}^3\mathcal{H}^q_{3/2}$ инвариантно относительно оператора $H$, и оператор ${}^3H^q_{3/2}$ является ограниченный самосопряженный оператор. Оператор ${}^3H^q_{3/2}$ в квазиимпульсном представлении в пространстве

${}^3\mathcal{H}^q_{3/2}$ действует по формуле

$$^3\widetilde{H}^q_{3/2}\psi=\{5A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[cos\lambda_i+cos\mu_i+cos\gamma_i+cos\theta_i+cos\eta_i]\}\times \qquad (2)$$

$$\times f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta)+U\int_{T^\nu}[f(s,\mu,\lambda+\gamma-s,\theta,\eta)+f(\lambda,s,\mu+\gamma-s,\theta,\eta)+$$

$$+f(\lambda,\mu,s,\gamma+\theta-s,\eta)+f(\lambda,\mu,s,\theta,\gamma+\eta-s)]ds.$$

**Теорема 2**. Пусть $\nu=1$ и $U<0$. Тогда существенный спектр оператора ${}^3H^q_{3/2}$ состоит из объединение семьи отрезков, а дискретный спектр оператора ${}^3H^q_{3/2}$ состоит из не более одного точка.

**Теорема 3**. Пусть $\nu=3$ и $U<0$, $\Lambda_1=(\Lambda_1^0,\Lambda_1^0,\Lambda_1^0)$, $\Lambda_3=(\Lambda_3^0,\Lambda_3^0,\Lambda_3^0)$. Тогда

а) Если $U<-\frac{12Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, $cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, и $cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>\frac{1}{4}$, тогда существенный спектр оператора ${}^3H^q_{3/2}$ состоит из объединение семьи отрезков, а дискретный спектр оператора ${}^3H^q_{3/2}$ состоит из не более одного точка: $\sigma_{disc}({}^3H^q_{3/2})=\emptyset$, либо $\sigma_{disc}({}^3H^q_{3/2})=\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3$.

б) Если $-\frac{12Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\leq U<0$, $cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, и $cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\frac{1}{4}$, тогда существенный спектр оператора ${}^3H^q_{3/2}$ представляет собой единственный отрезок, а дискретный спектр оператора ${}^3H^q_{3/2}$ пуст: $\sigma_{disc}({}^3H^q_{3/2})=\emptyset$.

в)Если $-\frac{12Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\leq U<0$, $cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, и $cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\frac{1}{4}$, тогда существенный спектр оператора ${}^3H^q_{3/2}$ состоит из объединение четырех отрезков, а дискретный спектр оператора ${}^3H^q_{3/2}$ пуст: $\sigma_{disc}({}^3H^q_{3/2})=\emptyset$.


[1] Карпенко Б.В., Дякин В.В., Будрина Г.Л. Два электрона в модели Хаббарда.// ФММ.- 1986.- Том 61.- No 4, - С. 702-706.

[2] Ташпулатов С.М. О спектральных свойствах трехэлектронных систем в модели Хаббарда.//ТМФ.- 2014. - Том 179. -No 3, - С. 387-405.

[3] Tashpulatov S.M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state.//Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2017.- V. 38.- № 3,- P. 530-541.

# Интегральный оператор с переменныи пределами интегрирования на конусе монотонных функций

**Темирханова А.М.**
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан

Пусть $I = (a,b), -\infty \leq a < b \leq \infty$, $1 < p, q < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Пусть $\omega$ и $v$ - неотрицательные, измеримые и п.в. конечные на $I$: $\omega^{-q'}$, $\omega^q$, $v^{p'}$ и $v^{-p'}$ локально суммируемые на $I$. $L_{p,v} \equiv L_p(v,I) = \{f -$ измеримые функции на $I : \int\limits_a^b |vf|^p < \infty\}$. Пусть $M \downarrow$, $M \uparrow$ соответственно множества невозрастающих, неубывающих функций на $I$.

Для интегральных операторов

$$K_-f(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(s,x)f(s)ds, \quad K_+f(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s)f(s)ds,$$

рассмотрим неравенства

$$\|\omega K_- f\|_q \leq C\|vf\|_p, \quad f \in M \downarrow, \tag{1}$$

$$\|\omega K_+ f\|_q \leq C\|vf\|_p, \quad f \in M \uparrow, \tag{2}$$

где граничные функции $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют следующим условиям:

$(i)$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ дифференцируемые и строго возрастающие функции на $I$;

$(ii)$ $\alpha(x) < \beta(x)$ для любого $x \in I$ и $\lim\limits_{x\to a^+} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a^+} \beta(x) = a$, $\lim\limits_{x\to b^-} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to b^-} \beta(x) = b$,

Основным методом изучения задачи исследования весовых неравенств для операторов на конусе монотонных функций стал „метод редукции“, т.е. метод сведение данного неравенства на конусе монотонных функций к некоторому неравенству на множестве неотрицательных функций. Первые результаты в этом направлении принадлежат Е.Сойеру (см. [1]).

Когда функция $K(\cdot,\cdot)$ зависит от обеих переменных, задача для монотонных функций остается открытой.

В работе [2] ограниченность операторов $K_-$ и $K_+$ из $L_{p,v}$ в $L_{q,\omega}$ рассмотрены, когда их ядра $K(\cdot,\cdot)$ соответственно удовлетворяют условиям

$$K(s,x) \approx K(s,z) + K(\alpha(z),x), \quad a < x \leq z < b, \quad \alpha(z) \leq s \leq \beta(x). \tag{3}$$

и

$$K(x,s) \approx K(x,\beta(x)) + K(z,s), \quad a < z \leq x < b, \quad \alpha(x) \leq s \leq \beta(z). \tag{4}$$

В данной работе приведен критерий выполнения неравенства (1) в случае, когда ядро оператора $K_-$ удовлетворяет условию (3).

Положим

$$\mathbb{A}_0^- \equiv \sup_{z\in I}\left(\int\limits_{\beta(z)}^{b} V_-^{-p'}(t)v^{p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_a^z \omega^q(x)\left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(s,x)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathbb{A}_{1,1}^- = \sup_{z\in I}\sup_{y\in\Delta^+(z)}\left(\int\limits_z^y \omega^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(z)}\left(\int\limits_z^t K(s,z)ds\right)^{p'} V_-^{-p'}(t)v^{p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\mathbb{A}_{1,2}^- = \sup_{z\in I}\sup_{y\in\Delta^+(z)}\left(\int\limits_z^y \omega^q(x)K^q(\alpha(z),x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(z)}(t-z)^{p'}V_-^{-p'}(t)v^{p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\mathbb{A}_{1,3}^- = \sup_{z\in I}\sup_{y\in\Delta^+(z)}\left(\int\limits_z^y \omega^q(x)\left(\int\limits_{\alpha(x)}^{z} K(s,x)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(z)} V_-^{-p'}(t)v^{p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\mathbb{A}_3^- \equiv (V_-(b))^{-\frac{1}{p}}\left(\int\limits_a^b \omega^q(x)\left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(s,x)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Теорема.** *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Если ядро оператора* $K_-$ *удовлетворяет условию* (3), *то неравенство* (1) *выполнено тогда и только тогда, когда* $\mathbb{A}^- = \max\{\mathbb{A}_0^-, \mathbb{A}_{1,1}^-, \mathbb{A}_{1,2}^-, \mathbb{A}_{1,3}^-, \mathbb{A}_3^-\} < \infty$, *при этом* $C \approx \mathbb{A}^-$, *где* $C$ *– наименьшая константа в* (1).


[1] E. Sawyer. Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces. Studia Math. 96 (1990), no.2, 145–158.

[2] В.Д.Степанов, Е.П. Ушакова. Об интегральных операторах с переменныи пределами интегрирования. Тр. Мат. института им. В.А. Стеклова РАН. 232 (2001), 298-317.

## Нелинейная неклассическая задача Стефана для квазилинейного уравнения диффузии

**Тураев Р.Н.**

Институт математики АНРУз., г. Ташкент, Узбекистан

В настоящей работе рассматривается задача Стефана о распространения тепла в среде, агрегатное состояние которго может меняется при определенных значениях температуры ее выделением или поглощением тепла. Примерами могут служить задачи о промерзании и плавлении.

Постановка задачи. Требуется найти пару функций $(s(t), u(t,x))$ таких что $s(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $0 \leq t \leq T, s(0) = s_0 > 0, 0 < \dot{s}(t) \leq N$ а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$a(u)u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + c(u)u_x(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u(t,0) = \alpha u(t,x_0), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$\dot{s}(t) = -\beta u_x(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

Задача (1) –(5)) исследованы соответственно в работах [1], [2], когда $c(u) = 0$ и вместо (3) задается граничное условие второго рода и нелокальные условия.

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $(s(t), u(t,x))$ и их производные. Далее установлены априорные оценки Шаудеровского типа норм Гельдера [2]. На основе установленных априорных оценок доказана теорема единственности, а существование решения доказана при помощи принципа Шаудера [3].

[1] Douglas,Jr. A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem.Proc. Amer. Math. Soc.1957.Vol. 8,No 4.P. 402–408.

[2] Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения. Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.-мат.Науки".2012.No 26. С. 99–106.

[3] Неклассическая задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения. Узбекский Мат.Журнал.2017.No 3.С. 8–16..

## О точных константах в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана

**Тухлиев Д.К.**

Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова, Худжанд, Таджикистан

Будем рассматривать пространство $\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}_2(U)$ функций $f$ аналитических в единичном круге $U := \{z \in C : |z| < 1\}$ таких для которых норма

$$\|f\|_{\mathcal{B}_2} := \left(\frac{1}{\pi}\iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma\right)^{1/2} < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ - элемент площади.

Через $\mathcal{P}_n$ обозначим совокупность комплексных алгебраических полиномов степени $\leq n$. Хорошо известно [1, с.201-202], что среди всех полиномов $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ наилучшее квадратичное приближение функции $f \in \mathcal{B}_2$ в области $U$ доставляет частичная сумма $(n-1)-$ го порядка $T_{n-1}(f,z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$ разложения функции $f(z)$ в степенной ряд Тейлора $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. При этом для величины наилучшей полиномиальной аппроксимации произвольной функции $f \in \mathcal{B}_2$ имеем

$$E_{n-1}(f)_{\mathcal{B}_2} := \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\} =$$

$$= \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{k+1}\right\}^{1/2},$$

где $c_k(f)-$ коэффициенты Тейлора функции $f$. Далее введем обозначение

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{\mathcal{B}_2} := \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k f\left(\rho e^{i(t+kh)}\right)\right|^2 d\rho dt\right\}^{1/2},$$

и равенством

$$\omega_m(f;t)_{\mathcal{B}_2} := \sup\left\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{\mathcal{B}_2} : |h| \leq t\right\},$$

определим модуль непрерывности $m-$го порядка функции $f \in \mathcal{B}_2$.

Тогда имеет место следующие утверждение:

**Теорема.** *Для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_2$, при любых $m, n \in \mathbb{N}$, справедливы точные неравенства*

$$\omega_m^2\left(f; \frac{2}{n}\right) \le \frac{2^{2m}}{n^{2m}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)^{2m} - k^{2m}\right] \cdot E_k^2(f)_{\mathcal{B}_2}, \qquad (1)$$

$$E_{n-1}(f)_{\mathcal{B}_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \omega^2(f,t)_{\mathcal{B}_2} \sin ntdt\right\}^{1/2}.$$

*Существует функция $f_0 \in \mathcal{B}_2$, для которой неравенство (1) обращается в равенство.*

[1] Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. - М.- Л.: Наука, 1964, с.201-202.

## Неравенства Джексона-Стечкина для некоторых классах функций

**Тухлиев Д.К.**

Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова, Худжанд, Таджикистан

Пусть, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ — множества соответственно натуральных и целых неотрицательных действительных чисел. $L_2 \equiv L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу периодических функций, у которых норма $\|f\| \overset{def}{=} \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2} < \infty$. Определим характеристику гладкости функции $f \in L_2$ посредством величины $\Lambda_m(f,t) := \left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_h^m(f)\right\|^2 dh\right\}^{1/2}$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $\Delta_h^m(f,x) = \sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}f(x+jh)$ — конечная разность $m$-го порядка функции $f \in L_2$ в точке $x$ с шагом $h$.

Полученные в этой работе результаты связаны с дробной производной в смысле Вейля [1], определённую равенством $f^{(\alpha)}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^\alpha \left\{a_k \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}$. Через $L_2^{(\alpha)}$ $(\alpha \ge 0)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$ $(\alpha \ge 0)$. Если $s_{n-1}(f^{(\alpha)}, x)$ $(\alpha \ge 0)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}$ степени не выше $n-1$ имеет вид

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) = \inf\left\{\|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\| : \ T_{n-1} \in \Im_{2n-1}\right\} =$$

$$= \|f^{(\alpha)} - s_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\right)^{1/2},$$

где $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты функции $f$. Пусть $\chi_{m,n,\alpha}(L_2,t) = \sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{n^\alpha E_{n-1}(f)}{\Lambda_m\left(f^{(\alpha)},\frac{t}{n}\right)}$, где $m,n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+, 0 < t \leq 2\pi$.

**Теорема.** *При $\alpha \geq 1/2$ справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,\alpha}(L_2,t) = \left(2^m \frac{1}{t}\int_0^t (1-\cos\tau)^m d\tau\right)^{-1/2},$$

*В частности,*

$$\chi_{m,n,\alpha}(L_2,\pi) = \left(C_{2m}^m\right)^{-1/2}. \tag{1}$$

Отметим, что при $m = 1$ вытекает $\chi_{1,n,\alpha}(L_2,t) = [2\,(1-\operatorname{sinc} t)]^{-1/2}$, из которого получаем

$$\chi_{1,n,\alpha}(L_2,\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) являются в известном смысле аналогами хорошо известных результатов Н.И.Черных [2].


[1] Weyl H. // *Vierteljahresschrift der Naturschenden Gesellschaft in Zurich. 1917. V.62. P. 296-302.*

[2] Черных Н.И. // *О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в $L_2$ // Матем. заметки. 1967. Т.2, No5. С. 513-522.*


## Определение упругих характеристик среды по собственным частотам колебания струны


**Утяшев И.М.**

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия


В работе рассматривается обратная задача по определению упругих характеристик внешней среды по собственным частотам колебания струны. Характеристики среды описываются полиномиальным потенциалом вида $q(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_{n-1}x^{n-1}$, где $q_m \in \mathbb{R}$ $(m = 1, 2, \dots, n-1)$. Ранее авторским коллективом решена аналогичная задача для случая линейного потенциала $q(x) = q_0 + q_1 x$ [1].

В частности, показано, что потенциал $q(x)$ может быть однозначно определен по спектрам двух задач $L_0$ и $L_1$, где через $L_0$ и $L_1$ обозначены следующие задачи Штурма-Лиувилля:

З а д а ч а $L_0$ :

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \qquad y(0) = y(1) = 0; \tag{1}$$

З а д а ч а $L_1$ :

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \qquad y'(0) = y(1) = 0; \tag{2}$$

Метод решения поставленной задачи основан на поиске линейно независимых решений задач $L_0$ и $L_1$ в виде ряда Тейлора по переменным $x$ и $\lambda$, а также на методе вариации произвольной постоянной.

При помощи математического пакета Maple получено численное решение задачи. Показано, что для однозначного определения $n$ неизвестных коэффициентов полиномиального потенциала $q(x)$ требуется $m$ ($m < n$) собственных значений задачи 1 и $k = n - m$ задачи 2.

Автор благодарит проф. Ахтямова А.М. за постановку задачи и помощь при выполнении данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 18-01-00150-А, 17-41-020230-р_а, 17-41-020400-р_а)

[1] Ахтямов А.М., Утяшев И.М. Восстановление линейного потенциала в задаче Штурма–Лиувилля // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 152–156.

## Формула следов неядерных возмущений дискретных операторов

**Фазуллин З.Ю.**

БашГУ, г. Уфа, Россия

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ самосопряженный полуограниченный снизу оператор $L_0$ с дискретным спектром $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < ...)$ . Пусть $P_k$ – ортогональные проекторы на собственные подпространства, соответствующие собственным числам $\lambda_k$ кратности $\nu_k$. Если $V$ – симметрический $L_0$ - компактный оператор, то по теореме Като-Реллиха оператор $L = L_0 + V$ замкнут в области определения оператора $L_0$ и имеет дискретный спектр. Пусть $\mu_s^{(k)}$, $s = \overline{1, \nu_k}$, $k = 1, 2, ...$ собственные числа оператора $L$, расчепленные от $\lambda_k$ возмущением $V$.

В докладе будет обсуждено при каких условиях на операторы $L_0$ и $V$ справедлива формула следа со скобками

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{\nu_k}\left(\lambda_k-\mu_s^{(k)}\right)+tr\left(P_kV\right)\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\lambda_n}\sum_{\lambda_k\le\lambda_n}tr\left(P_kV^2-\left(P_kV\right)^2\right)\tag{1}$$

А также приложения формулы (1) возмущениям как обыкновенных дифференциальных операторов, так и дифференциальных операторов в частных производных.

## Мера Хаусдорфа нулевого множества голоморфной функции с ограничениями на ее рост

**Хабибуллин Б. Н.**

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Пусть $D\neq\varnothing$ — собственная подобласть в $\mathbb{C}^n_\infty:=\mathbb{C}^n\cup\{\infty\}$ с границей $\partial D\subset C^n_\infty$, где $\mathbb{C}^n_\infty$ — $n$-мерное комплексное евклидово пространство $\mathbb{C}^n$ С нормой-модулем $|\cdot|$. Для собственного подмножества $S\subset\mathbb{C}^n_\infty$ класс $\operatorname{sbh}(S)$ состоит из ограничений на $S$ субгармонических функций в каком-либо открытом множестве из $\mathbb{C}^n_\infty$, содержащем $S$; $\operatorname{int}S\subset\mathbb{C}^n_\infty$ — внутренность $S$. Для замкнутого подмножества $S\subset D$ и числа $b>0$

$$\operatorname{sbh}_0^+(D\setminus S;\le b):=\Bigl\{v\in\operatorname{sbh}(D\setminus S)\colon v\ge 0,\ \sup_{D\setminus S}v\le b,\ \lim_{D\ni z\to\partial D}v(z){=}0\Bigr\}.$$

— *класс тестовых положительных субгармонических функций в $D$ вне $S$ с верхним ограничением $b$.* Для числа $p\ge 0$ через $\sigma_p$ обозначаем $p$-меру Хаусдорфа в $D$, отождествляя $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}_\infty$ [1, 1.2.3].

**Теорема** [1, теорема 3] *Пусть $z_0\in\operatorname{int}S$, функция $M\in\operatorname{sbh}(D)$ с мерой Рисса $\nu_M$, $M(z_0)\neq-\infty$, $b>0$. Пусть $f$ — ненулевая голоморфная функция в $D$ с дивизором нулей $\operatorname{Zero}_f$, и выполнено поточечное неравенство $|f|\le\exp M$ на $D$. Тогда существуют постоянные $C\ge 0$, зависящая только от $n,z_0,S,D,b$, и $\overline{C}_M\ge 0$, зависящая только от $n,z_0,S,D,b,M$, для которых неравенство*

$$\int_{D\setminus S}v\operatorname{Zero}_f\,\mathrm{d}\sigma_{2n-2}\le\int_{D\setminus S}v\,\mathrm{d}\nu_M-C\log\bigl|f(z_0)\bigr|+C\,\overline{C}_M.$$

*выполнено для всех тестовых функций $v\in\operatorname{sbh}_0^+(D\setminus S;\le b)$.*

Более общий результат [1, основная теорема] установлен для $\delta$-субгармонических (разностей субгармонических) функций-мажорант $M$. Будут доложены как опубликованные [2], так и направленные в печать многочисленные применения сформулированной Теоремы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

[1] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П. *К распределению нулевых множеств голоморфных функций* // Функциональный анализ и его приложения. 2018. Т. 52, № 1. С. 26–42.

[2] Б. Н. Хабибуллин, З. Ф. Абдуллина, А. П. Розит *Теорема единственности и субгармонические тестовые функции* // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, № 2. С. 318–334.

## Рекурсионные операторы для интегрируемых уравнений

**Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.**
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Широко известно, что оператор рекурсии является важной составляющей теории интегрируемости. Он позволяет описать в компактной форме иерархии обобщенных симметрий и серии локальных законов сохранения. В литературе можно найти несколько методов построения операторов рекурсии, основанных на гамильтоновом подходе и на представлении Лакса. В докладе предполагается обсудить альтернативный метод, предложенный в работах [1], [2]. Для построения оператора рекурсии мы используем обобщенные симметрии заданного уравнения. Эффективность метода иллюстрируется примерами уравнений Кортевега-де Фриза, Кричевера-Новикова, Каупа-Купершмидта, а также примерами дискретных автономных и неавтономных моделей.

[1] Хабибуллин И. Т., Хакимова А. Р. Прямой алгоритм построения операторов рекурсии и пар Лакса для интегрируемых моделей. Теоретическая и математическая физика, 196:2, 294–312, 2018.

[2] Habibullin I. T., Khakimova A. R. On the recursion operators for integrable equations. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51:42, https://doi.org/10.1088/1751-8121/aade08 , 22 pp., 2018.

## Взаимодействие неустойчивостей трубопровода

**Хакимов А.Г.**
ИМех УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Вопросам статического и динамического поведения продольно сжатого упругого элемента посвящены многочисленные исследования [1].

Рассматривается взаимное влияние изгиба трубопровода, внутреннего и внешнего давления, действия сжимающей силы и течения жидкости с заданной плотностью и скоростью по трубопроводу. Принимается, что упругий трубопровод является тонкостенным, а идеальные жидкости внутри и вне трубопровода несжимаемы, поверхностное натяжение в них отсутствует. Тонкий упругий трубопровод закреплен на защемленных скользящих опорах, причем опоры не препятствуют течению жидкости внутри трубопровода вдоль его оси. Вне трубопровода находится покоящаяся жидкость. На опорах прогиб и угол поворота равны нулю. Используются допущения о несжимаемости срединной линии трубопровода, идеальности и несжимаемости жидкостей. Изучено статическое взаимодействие неустойчивостей в зависимости от сжимающей трубопровод силы, внутреннего и внешнего давления, скорости движения жидкости. Найдены области изменения этих параметров, когда происходят стабилизация и дестабилизация прямолинейной формы. Продольная сжимающая сила, давления внутри и вне трубопровода и скорость течения жидкости изменяются независимо друг от друга. Интенсивность их возрастания от нуля считается такой, чтобы инерционные силы в системе были малы. Полученные результаты позволяют анализировать устойчивость трубопроводов и тонкостенных трубок. Учет взаимодействия неустойчивостей трубопровода с жидкостью позволяет выявить важные свойства гидроупругой системы в приведенной постановке. В частных случаях получаются обобщения критерия Эйлера, аналогов критериев Гельмгольца, Релея и их парных взаимодействий для трубопровода. Изгибная жесткость трубопровода, растягивающие силы, внешнее гидростатическое давление стабилизируют, а сжимающие силы, внутреннее гидростатическое давление, движение жидкости с любой скоростью внутри трубопровода дестабилизируют его.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-01-00150).

[1] Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей Эйлера, Гельмгольца, Релея // ЖТФ. 2018. Т. 63. – №2. – С. 163-167.

## Исследование приближенного решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца методом интегральных уравнений первого рода

**Халилов Э.Г.**

Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3-$ ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей $S$, а $f-$ заданная непрерывная функция на $S$.

Рассмотрим внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца: найти функцию $u \in C^{(2)}\left(\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}\right)\bigcap C\left(\mathbb{R}^3\backslash D\right)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца в $\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и граничному условию $u = f$ на $S$.

В монографии [1] показано, что если функция $u\,(x)$ имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, то решение уравнения Гельмгольца $u$, удовлетворяющее условиям излучения, можно представить в виде

$$u\,(x) = \int_S \left\{ u\,(y)\,\frac{\partial\Phi_k\,(x,y)}{\partial\vec{n}\,(y)} - \frac{\partial u\,(y)}{\partial\vec{n}\,(y)}\,\Phi_k\,(x,y)\right\} dS_y\,,\ x \in \mathbb{R}^3\backslash\bar{D}, \qquad (1)$$

где $\vec{n}\,(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in S$,

$$\Phi_k(x,\,y) = \frac{\exp\left(i\,k\,|x-y|\right)}{4\pi\,|x-y|}, x, y \in \mathbb{R}^3, x \neq y,$$

а $k-$волновое число, причем $Im\,k \geq 0$. Используя представление (1), в работе [1] показано, что функция

$$u\,(x) = \int_S \left\{ f\,(y)\,\frac{\partial\Phi_k\,(x,y)}{\partial\vec{n}\,(y)} - \varphi\,(y)\ \Phi_k\,(x,y)\right\} dS_y\,, \quad x \in \mathbb{R}^3\backslash\bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, если $\varphi$ есть решение однозначно разрешимого интегрального уравнения первого рода

$$L\,\varphi = -f + Kf, \qquad (2)$$

где

$$(L\varphi)\,(x) = \ 2\int_S \Phi_k\,(x,y)\ \varphi\,(y)\ dS_y,$$

$$(Kf)\,(x) = \ 2\int_S \frac{\partial\Phi_k\,(x,y)}{\partial\vec{n}\,(y)}\,f\,(y)\ dS_y, x \in S.$$

Отметим, что внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца можно привести к различным интегральным уравнениям первого рода (см.[1]) . Однако, уравнение (2) имеет то преимущество, что его решение является нормальной производной в смысле равномерной сходимости решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца на $S$. Следует указать, что (см.[1]) оператор $L^{-1}$, обратный компактному оператору $L$, является неограниченным в пространстве $\mathrm{N}\,(S)$, где $\mathrm{N}\,(S)$ – пространство всех непрерывных функций $\varphi$, потенциал двойного слоя с плотностью $\varphi$ которых имеет непрерывные нормальные производные на обеих сторонах поверхности $S$.

В данной работе показано, что если $Im\, k > 0$, то обратный оператор $L^{-1}$ определяется соотношением

$$L^{-1} = -\left(I - \tilde{K}\right)^{-1} \left(I + \tilde{K}\right)^{-1} T,$$

а, значит, при любой правой части $f \in \mathrm{N}\,(S)$ уравнение (2) имеет единственное решение, причем решение интегрального уравнения (2) имеет вид

$$\varphi = -\left(I - \tilde{K}\right)^{-1} \left(I + \tilde{K}\right)^{-1} T\,(K - I)\, f, \tag{3}$$

где

$$\left(\tilde{K}\rho\right)(x) = 2 \int_S \frac{\partial \Phi_k\,(x, y)}{\partial \vec{n}\ (x)}\, \rho\,(y)\ dS_y,$$

$$(T\rho)\,(x) = 2\frac{\partial}{\partial \vec{n}\ (x)} \int_S \frac{\partial \Phi_k\,(x, y)}{\partial \vec{n}\ (y)}\, \rho\,(y)\ dS_y, x \in S.$$

Кроме того, в работе, используя формулу (3), исследовано приближенное решение уравнения (2), построена последовательность, сходящаяся к решению внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца и дана оценка погрешности.

[1] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987, 311с.

## Метод тепловых полиномов для решения задач теплопроводности в областях со свободной границей и его приложения

**Харин С.Н.**
КБТУ, г.Алматы, Казахстан

Рассматриваются задачи теплопроводности в областях с движущимися границами, вырождающимися в начальный момент времени. Решения представлены в виде линейных комбинаций и рядов по тепловым полиномам. Они точно удовлетворяют уравнению теплопроводности, а коэффициенты определяются точно или приближенно из граничных условий. Погрешность приближения может быть сделана сколь угодно малой, и она оценивается с помощью принципа максимума. Установлена связь между тепловыми полиномами и интегральными функциями ошибки. На этой базе найдено точное аналитическое решение двухфазной задачи Стефана с заданным тепловым потоком.

Построены тепловые полиномы и соответствующие ассоциированные функции для обобщенного уравнения теплопроводности, базирующиеся на обобщенных полиномах Лагерра, и их производящая функция.

Для иллюстрации эффективности предлагаемого метода рассмотрена одномерная осесимметричная задача теплопроводности в области с равномерно движущейся границей, вырождающейся в начальный момент времени. Решение получено в виде ряда по полиномам Лагерра, коэффициенты которого определяются из счетной системы линейных алгебраических уравнений по рекуррентным формулам. Указан также альтернативный метод решения основанный на ортогональности полиномов Лагерра.

Далее описанный метод использован при построении решения краевых задач для обобщенного уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях, решение которых представимо виде ряда по обобщенным полиномам Лагерра.

Аналогичный подход использован для решения двумерных нестационарных задач теплопроводности в нецилиндрических областях, решение которых представляется в виде двойных рядов. Кроме общего решения даны также формулы для приближенного вычисления неизвестных коэффициентов, удобные для практического расчета температурных полей в прикладных задачах.

В качестве приложений рассмотрена математическая модель, описывающая динамику температурных полей, вибрацию и сваривание электрических контактах вакуумного выключателя при замыкании цепи, а также процесс перехода электродугового разряда в тлеющий разряд.


[1] Kharin S.N., The analytical solution of the two-phase Stefan problem with boundary flux condition, Mathematical Journal, Vol. 14, № 1 (51), 2014, pp. 55–76.

[2] Sarsengeldin M., Kharin S.N., et al., Exact Solution of One Inverse Stefan Problem, Filomat 31:4 (2017), 1017-1029 DOI 10.2298/FIL1704017S, Available at: http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat.

[3] Kharin S.N., Mathematical Models of Heat and Mass Transfer in Electrical Contacts, Proc. of 61th IEEE Holm Conference on Electrical Contacts, San Diego, 11-14 October, CA,USA, 2015, (Holm Award paper), pp. 1–21.

[4] Miedzinski B., Wisniewski G., Kharin S.N., Nouri H., and Grechanyuk N."Arc-to-Glow Transition Approach for Practical Use in DC Low-Power, Low-Voltage Electric Grids IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, 2018, vol.8, № 6, pp.932–938.

## О возмущении волноводов

**Хуснуллин И.Х.**
БГПУ им. М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

Пусть $\Omega$ – односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с достаточно гладкой границей при $n \geqslant 3$, $\Pi := (-\infty, \infty) \times \Omega$, $L_2(G)$ – множество квадратично интегрируемых по Лебегу в $G$ функций, а $H^n(G)$ – множество квадратично интегрируемых по Лебегу в $G$ функций вместе с их частными производными до порядка $n$ включительно. Через $\mathcal{H}_0(\mathcal{D})$ (через $\mathcal{H}_0(\mathcal{F})$) обозначим оператор $-\Delta$ в $L_2(\Pi)$, определенный на функциях из $H^2(\Pi)$, обращающихся в нуль на $\partial\Pi$ (удовлетворяющих граничному условию $(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u) = 0$ на $\partial\Pi$, где $\nu$ – внешняя нормаль, а $\alpha \geqslant 0$). Операторы $\mathcal{H}_0(\mathcal{D})$ и $\mathcal{H}_0(\mathcal{F})$ являются математическими моделями квантовых и акустических волноводов.

Пусть $V(x)$ – комплеснозначная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, параметры $0 < \mu, \varepsilon \ll 1$ удовлетворяют соотношению

$$\varepsilon^2 \mu^{-1} = o(1). \tag{1}$$

В $L_2(\Pi)$ на областях определения операторов $\mathcal{H}_0(\cdot)$ определим операторы $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$ как

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot) := \mathcal{H}_0(\cdot) + \mu^{-1} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Пусть $\mu_1(\cdot)$ — минимальное собственное значение для оператора $-\triangle' := -\sum\limits_{j=2}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, определенного на функциях из $H^2(\Omega)$, соответственно обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ (для $\mu_1(\cdot) = \mu_1(\mathcal{D})$), удовлетворяющих граничному условию $(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u) = 0$ на $\partial\Omega$ (для $\mu_1(\cdot) = \mu_1(\mathcal{F})$). Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** Пусть выполнено условие (1). Тогда если

$$\mathrm{Re} \int_\Pi V(x)dx < 0,$$

то существует единственное и простое собственное значение $\lambda_{\varepsilon,\mu}$ оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$, стремящегося к $\mu_1$ при $\varepsilon \to 0$. Его асимптотика имеет вид

$$\lambda_{\varepsilon,\mu} = \mu_1 - \frac{1}{4}\left(\varepsilon^n \mu^{-1}\right)^2 \left((\phi_{1,1}^2(0)\left\langle V\right\rangle)^2 + O(\varepsilon + \varepsilon^2\mu^{-1})\right), \quad n \geqslant 3.$$

Если $\mathrm{Re} \int_\Pi V(x)dx > 0$, то оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$ не имеет собственных значений, стремящихся к $\mu_1$ при $\varepsilon \to 0$.

**Благодарности**. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-41-020195 р-а).

## О возмущении оператора Шредингера

**Хуснуллин И.Х.**
БГПУ им. М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

Рассмотрен оператор Шрёдингера на оси с локализованным комплексным потенциалом, представляющим собой сумму малого потенциала и потенциала со сжимающимися носителем, которое может неограниченно расти по мере сжатия носителя. Потенциалы зависят от двух малых параметров. Один из этих параметров описывает длину носителя узкого потенциала, а обратная величина второго соответствует максимальным значениям модулей потенциалов. Отношение этих параметров стремиться к нулю.

Основным содержанием работы является построение специального преобразования, который переводит исходный оператор к оператору с малым локализованным возмущением. При этом данное преобразование не меняет спектр исходного оператора. Получено условие на потенциалы, при которых из края непрерывного спектра возникает собственное значение, а так же условие отсутствия такого собственного значения. В случае возникновения, построены главные члены его асимптотики.

**Благодарности**. Работа выполнена при поддержке РФФИ (18-51-06002 Аз-а).

## Пространственные колебания трубопровода со скользящей опорой при действии внутреннего ударного давления

**Шакирьянов М.М.**
ИМех УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В инженерных сооружениях для транспортировки жидкостей и газов широко используются трубопроводы. Они после действия кратковременных ударных нагрузок могут совершать колебательные движения. При их усилении трубопровод может потерять работоспособность или разрушиться. Поэтому исследование пространственных колебаний трубопровода при действии внутреннего ударного давления представляет большой интерес. Рассматриваются пространственные колебания трубопровода и заключенной в нем идеальной несжимаемой жидкости относительно оси, проходящей через шарнирные опоры, при действии внутреннего ударного давления. Одна опора считается неподвижной, а другая - может свободно скользить по горизонтальной плоскости. Трубу, изогнутую собственным весом и постоянным давлением заключенной в ней идеальной несжимаемой жидкости, отклоняют на небольшой угол от вертикали и в некоторый момент времени отпускают без начальной угловой скорости. В этот же момент происходит гидравлический удар и в течение его времени действия внутреннее давление в трубе резко возрастает.

Деформации, связанные с выходом оси трубопровода из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Поэтому используется математическая модель изгибно-вращательных движений трубопровода. Для приближенного решения системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных функция прогиба трубопровода, удовлетворяющая условиям крепления на опорах, принимается в виде одночленной аппроксимации. Далее применением процедуры Бубнова-Галеркина эта система уравнений приводится к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям изгибных и вращательных колебаний трубы. Задача Коши с нулевыми начальными условиями решается с помощью численного метода Рунге-Кутта. Для исследования динамики начального процесса деформирования трубопровода вводятся в рассмотрение инерционная и инерционно-упругая стадии [1]. Дан анализ реакции трубопровода на ступенчатое возрастание давления. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №17-41-020400 р-а).

[1] Ильгамов М.А.Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 83-96.

## Об одновременной аппроксимации нескольких собственных чисел самосопряженного полуограниченного линейного оператора в гильбертовом пространстве

**Шарипов Р.А.**

Башкирский Государственный Университет, г. Уфа, Россия

В докладе анонсируется теорема, обобщающая теорему XIII. 4 из [1], лежащую в основе метода Рэлея-Рица.

**Теорема 1**. *Пусть $F$ — ограниченный снизу самосопряжённый линейный оператор с областью определения $D(F)$ в гильбертовом пространстве $H$, дискретный спектр которого непуст и содержит по крайней мере $m$ собственных чисел, расположенных в порядке неубывания $\lambda_{min} = \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$ с числом повторов каждого из них, кроме быть может последнего, равным его кратности. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственным числам $\lambda_{min} = \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$, и пусть для каждого вектора $X_k$ задана последовательность векторов $X_{kn} \in Q(F)$ из области определения связанной с оператором $F$ полуторалинейной формы $q_F$, такая, что*

$$X_k = \lim_{n\to\infty} X_{kn} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} q_F(X_{kn}, X_{qn}\rangle = \langle X_k | F X_q \rangle,$$

*где $1 \leqslant k, q \leqslant m$. В этих предположениях*

$$\lambda_k = \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_k^{(n)} \quad \text{для всех} \quad k = 1, \ldots, m,$$

*где $\hat{\mu}^{(n)}_{min} = \hat{\mu}^{(n)}_1 \leqslant \ldots \leqslant \hat{\mu}^{(n)}_m$ — первые $m$ собственных чисел оператора $F_{V_n}$, порождённого сужением формы $q_F$ на конечномерное подпространство $V_n = Span(\{X_{ks},\ \text{где}\ 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant s \leqslant n\}) \subset Q(F)$, взятых начиная с наименьшего в порядке неубывания с числом повторов, равным кратности для всех, кроме быть может последнего.*

**Примечание**. Подпространства $D(F) \subset Q(F)$ в теореме 1 по умолчанию считаются всюду плотными в пространства $H$.

Доказательство теоремы 1 в слегка модифицированной форме и её применение к задачам квантовой химии можно найти в [2].


[1] Рид М, Саймон Б., *Методы современной математической физики. Том 4. Анализ операторов*, изд-во Мир, Москва, 1982.

[2] Sharipov R. A., *Tetrahedral discretizations of the Schrödinger operator for the purposes of quantum chemistry* // e-print **viXra:1808.0202**.


## Обратная коэффициентная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка


**Юлдашев Т. К.**

Сибирский государственный университет науки и технологий, г. Красноярск, Россия


Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению начальных, граничных и обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Такие задачи составляют основу математической физики. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений и обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения со спектральными параметрами.

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме.

В настоящей работе изучаются вопросы разрешимости нелокальной обратной задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром, спектральными параметрами и интегральным условием. Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных с вырожденным ядром при других постановках задач рассматривались в [1]–[3].

Итак, на конечном отрезке $[0;T]$ рассматривается уравнение вида

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) = \nu \int\limits_0^T K(t,s)\, u(s) ds + \beta\, \alpha(t)$$

при нелокальных граничных

$$u(T) = \int\limits_0^T u(t)\, t\, dt,\ u'(T) = \varphi$$

и дополнительном

$$u(0) = r$$

условиях, где $0 < T < \infty$ – заданное действительное число, $0 < \lambda$ – положительный спектральный параметр, $\nu$ – действительный спектральный параметр, $\varphi$, $r = \text{const}$ , $\beta$ – коэффициент переопределения, $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i(t)\, b_i(s)$, $a_i(t) \in C^2[0;T]$, $b_i(s) \in C^2[0;T]$, $\alpha(t) \in C^2[0;T]$, $u(T) = \psi(T)$. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Изучены особенности решения обратной краевой задачи, возникшие при определении произвольных (неизвестных) постоянных. Вычислены значения спектральных параметров, для которых устанавливаются разрешимость обратной краевой задачи. Доказаны соответствующие теоремы.


[1] Юлдашев Т. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 2015. No9. С. 74–79.

[2] Юлдашев Т. К. Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Benney-Luke с вырожденным ядром // Изв. вузов. Математика. 2016. No9. С. 59–67.

[3] Юлдашев Т. К. Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. No1. С. 101–110.

# Задача об изгибных колебаниях трубопровода

**Юлмухаметов А.А., Хакимов А.Г.**
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Начиная с работ [1, 2] исследованию колебаний и устойчивости трубопроводов посвящено множество трудов. Во многих из них не учитывалось влияние внутреннего давления. Возможно, первыми исследованиями колебаний первоначально изогнутого и прямого трубопровода с учетом такого влияния является работа [3]. Здесь для наиболее простой демонстрации влияния внутреннего давления рассматриваются случаи концевых опор трубы, не допускающих свободный поворот при изгибе при большой относительной жесткости грунта.

В работе исследуются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода провисающего над оврагом. Части трубы по обе стороны от провисающего участка лежат в грунте, свойства которого считаются одинаковыми и моделируются системой упругих пружин с определенными жесткостями в продольном и поперечном направлениях. По трубе равномерно течет жидкость с определенной заданной скоростью. Требуется определить, как влияют давление и скорость течения жидкости, жесткость грунта основания трубы на частоты изгибных колебаний трубопровода.

Уравнение изгибных колебаний трубопровода по модели Кирхгоффа имеет вид [4]

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\rho_i F_i V^2 + P_i F_i - T\right)\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + 2\rho_i F_i V\frac{\partial^2 w_*}{\partial x \partial t} +$$
$$+ \left(\rho F + \rho_i F_i\right)\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} = 0,$$

где $E$, $\rho$, $J$, $F$ —модуль упругости, плотность, осевой момент инерции и площадь поперечного сечения трубопровода; $\rho_i$, $P_i$, $V$, $F_i$ —плотность, давление и скорость течения жидкости внутри трубопровода, площадь сечения в свету трубопровода; $T$ —усилие растяжения в трубопроводе; $w$ —прогиб трубопровода; $x$ —координата, направленная по оси трубопровода; $t$ —время. Математическая модель поставленной задачи принимает следующие дополнительные условия: граничные условия или условия затухания на бесконечности и условия сопряжения [5], которые определяются равенством прогибов, углов поворота, изгибающих моментов, перерезывающих сил в месте перехода от провисающей части трубы к участкам в грунте :

$$w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial^2 x}, \frac{\partial^3 w_1}{\partial^3 x} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial^3 x}.$$

Здесь индексы «1», «2» относятся к безразмерному прогибу трубопровода на провисающей части и участкам в грунте соответственно.

Сделав подстановку $w = W(x)\exp(i\Omega t)$ получим уравнение, определяющее форму изгибных колебаний трубопровода. Далее полученное уравнение четвертого порядка решается методом Феррари [6].

Показано, что собственные частоты изгибных колебаний трубопровода падают с увеличением скорости течения жидкости. Определено, что с увеличением внутреннего давления в трубе собственные частоты изгибных колебаний также падают, причем тем быстрее, чем выше скорость течения жидкости. В обратной задаче получены аналитические выражения для определения давления жидкости внутри трубы, жесткости грунта по известным собственным частотам изгибных колебаний. Результаты исследования помогут развитию методов акустической диагностики и методов неразрушающего контроля и могут найти техническое применение для контроля и диагностики состояния трубопроводных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020400-р_а, № 18-01-00150_а).

[1] Ashley H., Haviland G. Bending vibration of pipe line containing flowing fluid // J Appl Mech. 1950. No 3. P. 229-232.

[2] Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. 1951. № 10. С. 169 -170.

[3] Ильгамов М.А. Колебание упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.

[4] Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. 2. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.

[5] Ильгамов М.А., Юлмухаметов А.А. Прямая и обратная задачи изгиба трубопровода // Вестник ПНИПУ. Механика. 2017. № 3. С. 100–112.

[6] Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Коровина Л.И.Поперечные колебания трубопровода с равномерно движущейся жидкостью // ДАН. 2009. № 6. С. 781–784.

# Методы приближенного построения операторов монодромии линейных периодических систем

**Юмагулов М.Г., Белова А.С.**
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается зависящая от малого параметра $\varepsilon$ линейная система:

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t,\varepsilon)]x\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

в которой $A_0$ – вещественная постоянная квадратная матрица, а $S(t,\varepsilon)$ – вещественная $T$-периодическая по $t$ матрица, удовлетворяющая условию $S(t,0) \equiv 0$.

Через $S_j(t)$ будем обозначать производную $j$-го порядка матрицы $S(t,\varepsilon)$ по $\varepsilon$, вычисленную при $\varepsilon = 0$.

**Теорема**. Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ системы (1) представима в виде равенства

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 \frac{V_2}{2!} + \ldots + \varepsilon^k \frac{V_k}{k!} + \tilde{V}(\varepsilon)\,, \tag{2}$$

в котором $V_0 = e^{A_0 T}\,, \quad V_1 = e^{A_0 T} \int_0^T e^{-A_0 \tau} S_1(\tau) e^{A_0 \tau} d\tau$, матрицы $V_2, \ldots, V_k$ определяются формулами:

$$V_m = e^{A_0 T} \int_0^T e^{-A_0 \tau} \sum_{j=0}^{m-1} \left( C_m^j S_{m-j}(\tau) X_j(\tau) \right) d\tau \qquad (m = 2, \ldots, k)\,,$$

а $\tilde{V}(\varepsilon)$ – непрерывно дифференцируемая по $\varepsilon$ матрица, удовлетворяющая условию: $\|\tilde{V}(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^{k+1})$ при $\varepsilon \to 0$.

В докладе также предлагаются основанные на формуле (2) новые подходы для приближенного вычисления мультипликаторов системы (1). Рассматриваются приложения в задачах теории возмущений линейных операторов, в задаче исследования устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, в задаче построения областей устойчивости линейных динамических систем.

**Об обратных задачах для дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями**

**Юрко В.А.**
Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,T),$$

$$U_j(y) := H_j y(0) + \int_0^T y(t)d\sigma_j(t), \quad j = 1,2.$$

Здесь $q(x) \in L(0,T)$ – комплекснозначная функция, $\sigma_j(t)$ – комплекснозначные функции ограниченной вариации непрерывные справа при $t \geq 0$. Для определенности полагаем $H_1 \neq 0$. Пусть $X_k(x,\lambda), k = 1,2$ – решения уравнения Штурма-Лиувилля при условиях $X_1(0,\lambda) = X_2'(0,\lambda) = 1,\ X_1'(0,\lambda) = X_2(0,\lambda) = 0$. Рассмотрим краевую задачу (КЗ) $L_0$ для уравнения Штурма-Лиувилля с условиями

$$U_1(y) = U_2(y) = 0.$$

Обозначим $\omega(\lambda) := \det[U_j(X_k)]_{j,k=1,2}$, и предположим, что $\omega(\lambda) \not\equiv 0$. Нули $\Xi = \{\xi_n\}$ функции $\omega(\lambda)$ совпадают с собственными значениями задачи $L_0$. Положим $V_j(y) := y^{(j-1)}(T),\ j = 1,2$. Рассмотрим КЗ $L_j$, $j = 1,2$ для уравнения Штурма-Лиувилля с условиями $U_j(y) = V_1(y) = 0$. Через $\Lambda_j = \{\lambda_{nj}\}_{n\geq 1}$ обозначим спектр $L_j$.

Пусть $\Phi(x,\lambda)$ – решение уравнения Штурма-Лиувилля при условиях $U_1(\Phi) = 1$, $V_1(\Phi) = 0$. Положим $M(\lambda) := U_2(\Phi)$. Функция $M(\lambda)$ называется функцией Вейля. В отличие от классических операторов Штурма-Лиувилля, здесь задания функции Вейля $M(\lambda)$ недостаточно для построения потенциала. Здесь обратная задача (ОЗ) формулируется следующим образом. Пусть $U_j$ известны и фиксированы.

ОЗ 1. Пусть $\Lambda_1 \cap \Xi = \emptyset$ (условие $S$). Даны $M(\lambda), \omega(\lambda)$, построить потенциал $q(x)$, $x \in (0,T)$.

**Теорема 1.** *При условии $S$ задание $M(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$ однозначно определяет $q$.*

Если условие $S$ не выполняется, то задания $M(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$ недостаточно для построения потенциала, и необходимо задавать дополнительные данные [1].

Пусть $\Lambda_{11} := \{\lambda^1_{n1}\}_{n\geq 1}$ – спектр КЗ $L_{11}$ для (1) с условиями $U_1(y) = V_2(y) = 0$.

ОЗ 2. Даны $\{\lambda_{n1}, \lambda^1_{n1}\}_{n\geq 1}$, построить $q(x)$, $x \in (0,T)$.

**Теорема 2.** *Задание $\{\lambda_{n1}, \lambda^1_{n1}\}_{n\geq 1}$ однозначно определяет $q$.*

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1660.2017/4.6) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00015, 17-51-53180)

[1] Yurko V.A. and Yang C-F. Recovering differential operators with nonlocal boundary conditions. Analysis and Mathematical Physics, vol.6, no.4 (2016), 315-326.

## Апостериорные оценки погрешности решений некорректно поставленных задач

**Ягола А.Г.**
физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, г.Москва, Россия

Как хорошо известно, оценить погрешность решения некорректно поставленной задачи невозможно без наличия сильных априорных предположений об искомом решении.

В докладе будут рассмотрены: 1) принадлежность искомого решения заданному компактному множеству; 2) истокообразная представимость искомого решения с помощью вполне непрерывного оператора; 3) предложенное А.С. Леоновым понятие экстраоптимального регуляризирующего алгоритма.

Работа поддержана грантами РФФИ 17-01-00159-а, 17-01-53002-ГФЕН-а и 16-01-00039-а.

[1] Zhang Ye , Lukyanenko D.V., Yagola A.G. An optimal regularization method for convolution equations on the sourcewise represented set // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. V. 23 (5), P. 465–476.

[2] Korolev Y., Yagola A. Making use of a partial order in solving inverse problems // Inverse Problems. 2013. V. 29 (9).

[3] Titarenko V. and Yagola A. Error estimation for ill-posed problems on piecewise convex functions and sourcewise represented sets // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. V. 16, P. 625–638.

[4] Leonov A.S. Extra-optimal methods for solving ill-posed problems // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2012. V. 20, P. 637–665.

*Научное издание*

**МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ"**

***Сборник тезисов***
***(1 – 4 октября 2018 г.)***

Лиц. на издат. деят. Б848421 от 03.11.2000 г. Подписано в печать 24.09.2018.

Формат 60Х84/16. Компьютерный набор. Гарнитура Times.

Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. – 10,8. Уч.-изд. л. – 10,6.

Тираж 200 экз. Заказ №

ИПК БГПУ 450000, г.Уфа, ул. Октябрьской революции, 3а