

ЭВОЛЮЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАРКОВСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Н. Аканбай¹⁾, З.И. Сулейменова²⁾, С.К.Тапеева³⁾

^{1),2),3)}Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан

E-mail: ¹⁾noureke1953@gmail.com ²⁾suleymenova2474@gmail.com ³⁾tapeevasamal77@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрена задача об эволюции магнитного поля в марковской линейной модели и доказаны теоремы об экспоненциальном убывании магнитного поля и экспоненциальном росте магнитной энергии.

Ключевые слова. Марковская линейная модель, магнитное поле, мультипликативный интеграл, показатели Ляпунова, ляпуновские базисы.

Введение. Задача об эволюции магнитного поля в случайном турбулизованном потоке проводящей жидкости является одной из самых важных во многих физических приложениях. В то время, как при заданном течении жидкости процесс переноса магнитного поля принципиально ясен, то сама проблема описания турбулентного течения жидкости, как известно, чрезвычайно сложна. Поэтому обычно прибегают к тем или иным способам моделирования движения жидкости. Например, в [1-2] асимптотические поведения магнитного поля и его полной энергии была изучена в так называемых линейных моделях с обновлениями.

Основной целью нашей работы является распространение результатов работ [1-2] на более общий случай - на случай марковской линейной модели скоростей (описание модели см. ниже).

Хорошо известно, что эволюция начального распределения $\vec{H}_0(x) = (H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x))$ магнитного поля $\vec{H}(t, x) = (H_1(t, x), H_2(t, x), H_3(t, x))$ в заданном несжимаемом случайном поле скоростей $\vec{V}(t, x) = (V_1(t, x), V_2(t, x), V_3(t, x))$ с постоянной магнитной диффузией v_m , ($v_m > 0$) описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = v_m \Delta \vec{H} - (\vec{V}, \nabla) \vec{H} + (\vec{H}, \nabla) \vec{V}, \quad \vec{H}(0, x) = \vec{H}_0(x) \quad (t \geq 0, x \in R^3) \quad (1)$$

Постановка задачи. Выписать интегральные формулы-представления для решения уравнения (1) и провести вероятностно-асимптотический анализ магнитного поля и его полной энергии в следующей марковской линейной модели скоростей: $\vec{V}(t, x) = C(b_t)x$, где b_t -определенный на некотором компактном многообразии K однородный диффузионный процесс с инфинитезимальным оператором $\frac{1}{2} \Delta$ (скажем, b_t - броуновское движение), $C(\cdot): K \rightarrow SL(3, R)$ -гладкая класса $C^\infty(K)$ матрица с нулевым следом ($tr C = 0$) и значениями в группе Ли $SL(3, R)$ унимодулярных матриц 3-го порядка.

Полученные результаты: 1. Для магнитного поля и его полной энергии получены интегральные формулы-представления, в которых подинтегральные выражения существенным образом зависят от мультипликативного интеграла (об этом понятии см.[3]) $G_t = \prod_{s=0}^t (E + C(b_s)ds)$;

2. Построен так называемый ляпуновский (случайный) базис и доказано, что при использовании подходящего ляпуновского базиса G_t при $t \rightarrow \infty$ почти не отличается от степени некоторой фиксированной матрицы;

3. Используя доказанную в [4] теорему типа Ферстенберга доказана теорема о простоте характеристических показателей Ляпунова для G_t .

4. Опираясь на результаты пп. 1-3, доказаны теоремы об экспоненциальном убывании напряженности магнитного поля в каждой точке пространства и экспоненциального роста суммарной энергии магнитного поля в марковской линейной модели.

Список литературы

[1] Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Molchanov S.A., Sokoloff D.D. Kinematik dynamo problem in a linear velocity field // Fluid Месу. 144 (1984), pp. 1-11.

[2] Молчанов С.А., Тутубалин В.Н. Линейная модель гидромагнитного динамо и произведения случайных матриц // Теория вероятностей и ее прил.- 1984.- т. 29, №2. – с. 234-247.

[3] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц – М.: -1967. -576 с.

[4] Akanbay N. Furstenberg type theorem for a multiplicative product of Markov random matrices //Third International Conference Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016), p. 200.