MATERIÁLY

VI MEZINÁRODNÍ VĚDECKO-PRAKTICKÁ KONFERENCE

«VĚDECKÝ POKROK NA ROZMEZÍ TISÍCILETÍ – 2010»

27.05.2010 - 05.06.2010

Díl 25
Fyzika
Matematika

Praha
Publishing House
«Education and Science» s.r.o.

UŽITÁ MATEMATIKA

MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ

UŽITÁ MATEMATIKA

К.ф.-м.н. Джомартова Ш. А.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ СКЛАДСКИМ ПРЕДПРИЯТИЕМ

В статье исследуется система управления запасами (многопродуктовая модель из n – продуктов), которая описывается линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A(t) * x + B(t) * u,$$

где

$A(t)$ – nxn-матрица, элементы которой являются непрерывными функциями времени, $B(t)$ – nxm-матрица, $x(t)$ – n-мерный вектор состояния системы (количество товаров на складе), $u(t)$ – m-мерный вектор управления (необходимое количество товаров).

Предполагается, что известен $g(t)$ – n-мерный вектор – задающее воздействие (ожидаемый спрос на товары), которое удовлетворяет условию $g(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1]$.

Исходя из практической постановки задачи на управления $u(t)$ накладываются следующие ограничения

$$0 \leq u_i(t) \leq u^i_{\max}, \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{2}$$

Ограничение (2) имеет вполне естественный смысл: завозимый (приобретаемый на склад) товар не может иметь отрицательного значения и имеет реальное ограничение сверху (т.е. не может быть бесконечным).

На емкость склада накладываются условия (фазовые ограничения)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t) \leq C, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3}$$

Любое складское помещение имеет естественное ограничение. В предлагаемой модели это ограничение характеризуется параметрами C и $a_i, i = \overline{1,n}$.

Кроме условия (3) на количество товара накладываются ограничения

$$x_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{4}$$

Считается известным состояние системы в начальный момент времени t_0 (начальное состояние – количество товара на складе в начальный момент времени)

$$x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

В соответствии с условиями (3) и (4) предполагается, что x_0 удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{0i} \le C \text{ и } x_0 \ge 0.$$

Желаемое состояние в конечный момент времени t_1 может быть описано как фиксированное

$$x(t_1) = x_1 \tag{6}$$

или подвижное (удовлетворяющее некоторым условиям – в случае, когда некоторые виды товаров являются взаимозаменяемыми и могут быть объединены в группы)

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(t_1) \le d_i, i = \overline{1,k}. \tag{7}$$

Для оценки качества работы системы (склада) может быть использован следующий критерии (функционал):

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[u^*(t) R_0 u(t) + (x(t) - g(t))^* R_1 (x(t) - g(t)) \right] dt, \tag{8}$$

где

R_0 – положительно-определенная mxm-матрица, R_1 – неотрицательно-определенная nxn-матрица.

Составим множество допустимых управлений

$$U = \left\{ u \middle| 0 \le u_i(t) \le u^i_{\max}, \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [t_0, t_1] \right\}.$$

Это задача оптимального управления с ограничениями на управление (2), с фазовыми ограничениями (3)-(4), с закрепленными концами (5)-(6) или подвижными концами (5), (7). Момент времени t_1 считается заданным (фиксированным). На настоящее время решение подобных задач содержит ряд математических затруднений.

В последние годы получило развитие такое направление вычислительной математики как интервальная, оперирующая не с числами, а интервалами (которые позволяют учитывать погрешности задания исходных данных).

Далее применим интервальную математику для получения критерия удовлетворения спроса (за счет определения возможности приобретения товаров у поставщиков).

Пусть $\Phi(t, \tau) = \theta(t) * \theta^{-1}(\tau)$, где $\theta(t)$ - фундаментальная матрица решений системы однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t) * x .$$

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)Bu(\tau)\, d\tau . \qquad (9)$$

Введем обозначения

$$y_1 = x_1 - \Phi(T, 0)x_0 ,\; f(\tau) = \Phi(T, \tau)B.$$

Тогда в случае ограничения (6) задача управляемости сводится к существованию решения системы интегральных уравнений

$$y_1 = \int_0^T f_1(\tau)u(\tau)\, d\tau \;, \qquad (10)$$

удовлетворяющего условию (2).

Заменяя управление u интервалом $\bar{v}$ и проводя интервальные вычисления по правилам, обозначим $y_2 = \int_0^T f(\tau)\bar{v}\, d\tau$, где y_2 – интервальный вектор.

Теорема. Для того чтобы система (1),(2),(6) была управляемой необходимо и достаточно, чтобы вектор y_1 принадлежал интервальному вектору y_2.