УДК 510.57

О тёмных вычислимо перечислимых отношениях эквивалентности

Исследования Н. А. Баженова выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60058 мол_а_дк. Исследования Б. С. Калмурзаева выполнены при финансовой поддержке Комитета науки Республики Казахстан, грант ГФ4/3952.

Н. А. Баженов, Б. С. Калмурзаев

Баженов Николай Алексеевич, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090.

Калмурзаев Биржан Сеилханович, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, пр. аль-Фараби, 71, Алматы, Казахстан, 050038.

bazhenov@math.nsc.ru, birzhan.kalmurzayev@gmail.com

Аннотация

Работа посвящена исследованию вычислимо перечислимых (в.п.) отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел. Бинарное отношение R на ω вычислимо сводится к отношению S (обозначается через $R \leq_c S$), если существует вычислимая функция $f(x)$, такая что для любых x и y условия (xRy) и $(f(x)Sf(y))$ эквивалентны. Отношение эквивалентности E называют тёмным, если оно несравнимо относительно $\leq_c$ с тождественным отношением эквивалентности. В работе доказано, что для любого тёмного в.п. отношения эквивалентности E существует слабо предполное тёмное в.п. отношение эквивалентности F, такое что $E \leq_c F$. В качестве следствия этого результата построена бесконечная возрастающая $\leq_c$-цепь слабо предполных тёмных в.п. отношений эквивалентности. Также показано существование универсального относительно сводимости $\leq_c$ в.п. линейного порядка.

Ключевые слова: отношение эквивалентности, вычислимо перечислимое отношение эквивалентности, вычислимая сводимость, слабо предполное отношение эквивалентности, вычислимо перечислимый линейный порядок, lo-сводимость.

N. A. Bazhenov, B. S. Kalmurzayev. **Dark Computably Enumerable Equivalence Relations**.

Abstract. The paper studies computably enumerable equivalence relations (ceers) on the set of natural numbers. A binary relation R on ω is computably reducible to a relation S (denoted by $R \leq_c S$) if there is a computable function $f(x)$ such that for any x and y, the conditions (xRy) and $(f(x)Sf(y))$ are equivalent. An equivalence relation E is dark if it is $\leq_c$-incomparable with the identity relation. We prove that for any dark ceer E, there is a weakly precomplete dark ceer F such that $E \leq_c F$. As a corollary, we build an infinite ascending $\leq_c$-chain of weakly precomplete dark ceers. We also show that there exists a $\leq_c$-universal c.e. linear order.

Keywords: equivalence relation, computably enumerable equivalence relation, computable reducibility, weakly precomplete equivalence relation, computably enumerable linear order, lo-reducibility.

Работа посвящена изучению свойств вычислимой сводимости для вычислимо перечислимых бинарных отношений, заданных на множестве натуральных чисел ω.

Если R и S — это отношения эквивалентности на ω, то говорят, что R *вычислимо сводится* (или *сводится*) к S (обозначается через $R \leq_c S$), если существует вычислимая функция f, такая что для любых $x, y \in \omega$ выполнено $(xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y))$. Отношения эквивалентности R и S называют *эквивалентными* (обозначается через $R \equiv_c S$), если имеют место соотношения $R \leq_c S$ и $S \leq_c R$. Отношения R и S являются *вычислимо изоморфными*, если существует вычислимая перестановка множества ω, сводящая R к S.

Отношение эквивалентности E называется *предполным*, если существует всюду определённая вычислимая функция $f(e,x)$, такая что для любых $e, x \in \omega$ выполнено: $[\varphi_e(x)\downarrow \Rightarrow (\varphi_e(x)\ E\ f(e,x))]$. Понятие предполного отношения эквивалентности было введено А. И. Мальцевым [1]. Изучение предполных отношений эквивалентности играет важную роль в теории вычислимости и теории нумераций (см., например, монографию [2]).

Напомним, что вычислимо перечислимое (в.п.) отношение эквивалентности E называют *универсальным*, если для любого в.п. отношения эквивалентности F выполнено $F \leq_c E$. В [3] доказано, что любое нетривиальное предполное в.п. отношение эквивалентности является универсальным. В [4] показано, что любые нетривиальные предполные в.п. отношения эквивалентности E и F являются вычислимо изоморфными.

Из теоремы Ю. Л. Ершова о неподвижной точке [2] вытекает следующий критерий предполноты: отношение эквивалентности E предполно в том и только том случае, когда существует всюду определённая вычислимая функция $f(x)$, такая что для любого $e \in \omega$ верно $[\varphi_e(f(e))\downarrow \Rightarrow (\varphi_e(f(e))\ E\ f(e))]$.

С. А. Бадаевым [5] было предложено следующее естественное ослабление понятия предполноты.

Определение 1 ([5])**.** Отношение эквивалентности E называется *слабо предполным*, если существует частично вычислимая функция fix, такая что для любого $e \in \omega$ выполнено:

$$(\varphi_e \text{ всюду определена}) \ \Rightarrow\ [fix(e)\downarrow \ \&\ (\varphi_e(fix(e))\ E\ fix(e))].$$

В [5] доказано, что существует бесконечно много попарно не вычислимо изоморфных, слабо предполных в.п. отношений эквивалентности. В [6] показано существование бесконечного числа попарно не вычислимо изоморфных, универсальных слабо предполных в.п. отношений эквивалентности. Аналогичный результат получен для неуниверсальных в.п. отношений эквивалентности.

В данной работе изучаются слабо предполные в.п. отношения эквивалентности. Основное внимание сосредоточено на *тёмных* отношениях эквивалентности.

Определение 2 (А. Сорби и У. Эндрюс)**.** Отношение эквивалентности E называют *тёмным* (*dark*), если E несравнимо с тождественным отношением эквивалентности относительно сводимости $\leq_c$.

В § 1 приводятся необходимые предварительные сведения. В § 2 доказывается, что для любого тёмного в.п. отношения эквивалентности E существует слабо предполное тёмное в.п. отношение эквивалентности F, такое что $E \leq_c F$. В качестве следствия этого результата строится бесконечная цепь слабо предполных тёмных в.п. отношений эквивалентности $F_0 <_c F_1 <_c F_2 <_c \dots$. В § 3 исследуется связь вычислимо перечислимых линейных порядков и вычислимо перечислимых отношений эквивалентности. Показывается существование универсального относительно сводимости $\leq_c$ в.п. линейного порядка. Строится в.п. отношение эквивалентности, являющееся $\leq_c$-универсальным в классе всех в.п. отношений эквивалентности, реализущих некоторый линейный порядок. Вводится понятие тёмного в.п. линейного порядка и устанавливаются некоторые его простые свойства.

1 Предварительные сведения

Считаем, что все рассматриваемые отношения эквивалентности заданы на ω. Для ненулевого $n \in \omega$ через Id_n обозначается вычислимое отношение эквивалентности, заданное по следующему правилу: $(x\ Id_n\ y)$ в том и только том случае, когда остатки от деления на n чисел x и y совпадают. Через Id обозначаем тождественное отношение эквивалентности.

Для отношения эквивалентности E и $a \in \omega$ через $[a]_E$ обозначается класс E-эквивалентности элемента a. Для $n \in \omega$ через $[0;n]$ обозначается множество $\{0, 1, \dots, n\}$. Для множества X через $card(X)$ обозначаем мощность X. Если $a, b \in \omega$, то $\langle a, b\rangle$ есть номер пары (a, b) в канторовской нумерации.

Пусть E и F — отношения эквивалентности. Запись $E <_c F$ означает, что $E \leq_c F$ и $F \not\leq_c E$. *Прямой суммой* E и F называют отношение эквивалентности $E \oplus F$, заданное следующим образом — для любого $x \in \omega$ выполнено:

$$[2x]_{E\oplus F} = \{2y : y \in [x]_E\}, \quad [2x + 1]_{E\oplus F} = \{2z + 1 : z \in [x]_F\}.$$

Отметим, что для любого $n \in \omega \setminus \{0\}$ и любого отношения эквивалентности E, имеющего бесконечно много классов, верно $Id_n \leq_c E$. В связи с этим *минимальным* в.п. отношением эквивалентности принято называть в.п. отношение эквивалентности E, имеющее бесконечно много классов и удовлетворяющее следующему свойству: если в.п. отношение эквивалентности F сводится к E, то либо $F \equiv_c E$, либо $F \equiv_c Id_n$ для некоторого n. К. Ш. Абешев, С. А. Бадаев, Б. С. Калмурзаев и У. Эндрюс доказали, что существует бесконечно много минимальных слабо предполных в.п. отношений эквивалентности, являющихся тёмными.

Отношение эквивалентности E называют *светлым* (*light*), если оно не является тёмным.

Теорема 1.1 (С. А. Бадаев)**.** *Существует последовательность отношений эквивалентности $(E_n)_{n\in\omega}$, такая что каждое E_n есть слабо предполное светлое в.п. отношение эквивалентности и $E_0 <_c E_1 <_c E_2 <_c \dots$.*

Говорят, что отношение эквивалентности E является *самополным* (*self-full*), если любая сводящая функция $f\colon E \leq_c E$ обладает следующим свойством:

$$\forall x \exists y [f(y) E x],$$

т.е. образ функции f пересекается с каждым классом эквивалентности E.

Предложение 1.1 (А. Сорби и У. Эндрюс)**.** *Если отношение эквивалентности E является тёмным, то E самополно.*

Доказательство. Для полноты изложения приведём набросок доказательства. Предположим, что E — не самополное отношение. Зафиксируем вычислимую функцию $f\colon E \leq_c E$ и элемент a, такие что $[a]_E \cap ran(f) = \varnothing$. Определим вычислимую последовательность элементов $(a_n)_{n\in\omega}$, такую что $a_0 = a$ и $a_{n+1} = f(a_n)$ для всех n. Нетрудно показать, что вычислимая функция $g(x) = a_x$ сводит отношение Id к E; следовательно, E есть светлое отношение эквивалентности. □

Говорят, что всюду определённая функция $d(x)$ является *диагональной функцией* для отношении эквивалентности E, если для любого $x \in \omega$ выполнено $\neg(d(x)\ E\ x)$. В [6] получен следующий критерий слабой предполноты:

Предложение 1.2 (Лемма 1.2 и Следствие 1.4 из [6])**.** *Для в.п. отношения эквивалентности E следующие условия эквивалентны:*

1. *E есть слабо предполное отношение эквивалентности;*
2. *$(\forall e)[\varphi_e$ всюду определена $\Rightarrow (\exists n)[\varphi_e(n)\ E\ n]]$;*
3. *E не имеет вычислимой диагональной функции.*

Более подробное изложение различных результатов о в.п. отношениях эквивалентности и о сводимости $\leq_c$ можно найти, например, в [2, 6–10].

2 Тёмные предполные в.п. отношения эквивалентности

Теорема 2.1. *Для любого тёмного в.п. отношения эквивалентности E существует слабо предполное тёмное в.п. отношение эквивалентности F, такое что $E \leq_c F$.*

Доказательство. Пусть E — тёмное в.п. отношение эквивалентности. Построим в.п. отношение эквивалентности F, удовлетворяя следующие требования:

$\mathcal{R}$: $E \leq_c F$.

$\mathcal{WP}_e$: Если функция φ_e всюду определена, то $\exists x_e(\varphi_e(x_e) F x_e)$.

$\mathcal{ID}_e$: Если φ_e всюду определена, то $\varphi_e\colon Id \not\leq_c F$ (т.е. φ_e не сводит Id к F).

Основной операцией в построении F будет *склеивание* двух различных чисел a и b. Будем говорить, что отношение эквивалентности F_2 получено из отношения эквивалентности F_1 путём *склеивания* чисел a и b, если

$$F_2 = F_1 \cup \{(x, y) : x, y \in [a]_{F_1} \cup [b]_{F_1}\}.$$

Зафиксируем равномерно вычислимую последовательность вычислимых отношений эквивалентности $(E^s)_{s\in\omega}$ со следующими свойствами: $E^0 = Id$, $\bigcup_{s\in\omega} E^s = E$, для каждого s $E^s \subsetneq E^{s+1}$ и отношение E^{s+1} получено из E^s с помощью склеивания пары чисел a_s и b_s. Можно считать, что последовательности $(a_s)_{s\in\omega}$ и $(b_s)_{s\in\omega}$ вычислимы. Отметим следующее: нетрудно показать, что функция $size(x, s) := card([x]_{E^s})$ вычислима.

Отношение эквивалентности F будет строиться по шагам. На шаге s будет построено вычислимое отношение эквивалентности F^s, каждый класс которого конечен.

Стратегия для удовлетворения $\mathcal{R}$. Будем строить отношение эквивалентности F со следующим свойством. Для любых $x, y \in \omega$ выполнено: $(2x\ F\ 2y)$ в том и только том случае, когда (xEy). Отсюда вытекает, что функция $f_0(x) = 2x$ сводит E к F.

Единственная стратегия, работающая для $\mathcal{R}$-требования, есть $\emptyset$ (т.е. корень дерева стратегий). Она имеет единственный выход `act`. На каждом шаге s эта стратегия склеивает в F числа $2a_s$ и $2b_s$.

Стратегия для удовлетворения $\mathcal{WP}_e$. Пусть σ — это $\mathcal{WP}_e$-стратегия. Как обычно, будем считать, что под *бо́льшим числом* понимается число, которое превосходит все числа, до этого использовавшиеся в конструкции. В частности, если x — большое число, то в начале данного шага класс F-эквивалентности x одноэлементен.

(1) Выбираем большое нечётное число x_e.

(2) Ждём шага s, на котором значение $\varphi_{e,s}(x_e)$ определено.

(3) Склеиваем элементы $\varphi_e(x_e)$ и x_e в F.

Пока стратегия σ ждёт на этапе (2), она имеет выход `wait`. После того, как значение $\varphi_{e,s}(x_e)$ определилось, σ имеет выход `act`. Будем называть число x_e *$wp(\sigma)$-свидетелем* и обозначать x_e через $wp(\sigma)$.

Стратегия для удовлетворения $\mathcal{ID}_e$. Пусть σ — это $\mathcal{ID}_e$-стратегия.

(1) Выбираем большое число n.

(2) Ждём шага s, на котором все значения $\varphi_{e,s}(0), \varphi_{e,s}(1), \dots, \varphi_{e,s}(n)$ определены.

(3) Возможны следующие три случая:

(3a) Если $\varphi_e(k) F \varphi_e(m)$ для некоторых $k < m \leq n$, то объявляем требование $\mathcal{ID}_e$ удовлетворённым.

(3b) Пусть случай (3a) не выполнен и найдутся (наименьшие) числа $k < m \leq n$, такие что каждое из значений $\varphi_e(k)$ и $\varphi_e(m)$

i) не F-эквивалентно никакому чётному числу и

ii) не F-эквивалентно никакому $wp(\tau)$-свидетелю для $\mathcal{WP}$-стратегии τ со свойством $\tau \subset \sigma$.

Тогда склеиваем $\varphi_e(k)$ и $\varphi_e(m)$ в F и объявляем требование $\mathcal{ID}_e$ удовлетворённым.

(3c) Если случаи (3a) и (3b) не выполняются, то выбираем в качестве n новое большое число и возвращаемся к этапу (2).

Пока стратегия σ ждёт на этапе (2), она имеет выход `wait`. После того, как значения $\varphi_{e,s}(0), \dots, \varphi_{e,s}(n)$ определились, σ имеет выход `act`, если выполнен один из случаев (3a) или (3b). Если выполнено (3c), то σ имеет выход `wait`.

Конструкция. Выходы стратегий упорядочены как `act`$<$`wait`. Нулевой уровень дерева стратегий выделен для $\mathcal{R}$-стратегии. Каждый из оставшихся уровней дерева выделен (эффективным образом) для одного из требований $\mathcal{WP}_e$ или $\mathcal{ID}_e$. Как обычно, на шаге s посещаются стратегии длины не больше, чем s, и они действуют в порядке приоритета. Пусть в конце шага s построено отношение эквивалентности F^s. Нетрудно проверить, что функция $size_1(x,s) := card([x]_{F^s})$ вычислима.

Верификация. Определим $F = \bigcup_{s\in\omega} F^s$. В силу того, что $F^s \subseteq F^{s+1}$ и последовательность $(F^s)_{s\in\omega}$ равномерно вычислима, отношение F есть в.п. отношение эквивалентности.

Истинный путь — это крайний левый бесконечный путь P приоритетного дерева, такой что любая стратегия вдоль P посещается бесконечно часто. В силу того, что приоритетное дерево конечно ветвящееся, истинный путь существует.

Лемма 2.1. *Функция* $f_0(x) = 2x$ *сводит* E *к* F.

Доказательство. Допустим противное. Отметим следующее: если верно yEz, то действия $\mathcal{R}$-стратегии гарантируют, что $2z \in [2y]_F$. Следовательно, существует наименьшее $s_0 > 0$, для которого найдутся числа y_0 и z_0, такие что $[2y_0]_{F^{s_0}} = [2z_0]_{F^{s_0}}$ и при этом $z_0 \notin [y_0]_E$. Из свойств конструкции нетрудно получить, что числа $2y_0$ и $2z_0$ склеиваются на шаге s_0 из-за действия некоторой $\mathcal{WP}$-стратегии σ. Пусть $x_0 = wp(\sigma)$. Тогда нечётное число x_0 лежит в одном из классов $[2y_0]_{F^{s_0-1}}$ или $[2z_0]_{F^{s_0-1}}$.

Пусть $s_0^* \leq s_0$ — это первый шаг, на котором σ начинает свою работу. Выберем наименьший шаг $s_1 \leq s_0$, такой что в классе $[x_0]_{F^{s_1}}$ содержатся чётные числа. Ясно, что $s_0^* \leq s_1$ и на шаге s_1 число x_0 склеилось с некоторым чётным числом из-за действия некоторой $\mathcal{WP}$-стратегии τ_1. Заметим, что $\tau_1 \neq \sigma$. Рассмотрим следующие четыре случая.

Случай 1. Пусть τ_1 лежит правее σ в приоритетном дереве. Тогда в начале шага s_0^* класс F-эквивалентности x_0 уже неодноэлементен, что противоречит выбору большого x_0.

Случай 2. Если τ_1 лежит левее σ в приоритетном дереве, то τ_1 не совершает никаких действий до начала шага s_0+1, поэтому τ_1 не может склеить x_0 с другим числом на шаге s_1.

Случай 3. Пусть $\tau_1 \subset \sigma$. Тогда $\tau_1\widehat{\ }\mathtt{act} \subseteq \sigma$, т.е. σ лежит под выходом $\mathtt{act}$ стратегии τ_1. Так же, как в случае 1, в начале шага s_0^* класс F-эквивалентности x_0 неодноэлементен, чего не может быть.

Случай 4. Пусть $\tau_1 \supset \sigma$. Тогда $s_0^* < s_1 < s_0$ и на любом шаге s, таком что $s_0^* < s \leq s_0$, ни одна из $\mathcal{ID}$-стратегий не может склеить x_0 ни с каким другим элементом (т.к. $\mathcal{ID}$-стратегиям $\xi \supset \sigma$ подобная склейка запрещена, а стратегии $\xi \subset \sigma$ не меняют своего выхода на этих шагах).

Положим $x_1 = wp(\tau_1)$. В силу того, что $\tau_1 \neq \sigma$, получаем, что $x_1 \neq x_0$. Рассмотрим наименьший шаг $s_2 \leq s_1$, такой что класс $[x_1]_{F^{s_2}}$ содержит чётные числа. Через s_1^* обозначим первый шаг, на котором τ_1 начинает работать. Понятно, что $s_0^* < s_1^* \leq s_2$ и на шаге s_2 число x_1 склеилось с некоторым чётным числом из-за действия некоторой $\mathcal{WP}$-стратегии τ_2. Проводя аналогичный разбор случаев, получаем, что $\tau_2 \supset \tau_1$ и $s_1^* < s_2 < s_1$. Продолжая эти рассуждения, получаем бесконечно убывающую последовательность шагов $s_1 > s_2 > s_3 > \dots$; противоречие. Лемма 2.1 доказана. □

Лемма 2.2. *Отношение* F *является слабо предполным.*

Доказательство. Пусть φ_e — это всюду определённая функция. Рассмотрим $\mathcal{WP}_e$-стратегию σ, лежащую на истинном пути, и число $x_e = wp(\sigma)$. Пусть s^* — это наименьший шаг, такой что значение $\varphi_{e,s^*}(x_e)$ определено. В силу того, что σ посещается бесконечно часто, для любого достаточно большого шага $s \geq s^*$ стратегия σ будет иметь выход $\mathtt{act}$, а элементы x_e и $\varphi_e(x_e)$ будут F^s-эквивалентными.

Следовательно, φ_e не может быть диагональной функцией для F. По предложению 1.2, отношение F слабо предполно. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть φ_e — всюду определённая функция, σ — это $\mathcal{ID}_e$-стратегия, лежащая на истинном пути. Тогда после некоторого шага s^* стратегия σ всегда имеет выход* `act`.

Доказательство. Допустим противное. Тогда стратегия σ всегда имеет выход `wait`. В силу того, что φ_e всюду определена, существует бесконечно много шагов s, на которых для σ выполнен случай (3c) из описания $\mathcal{ID}_e$-стратегии.

Рассмотрим последовательность $a_n = \varphi_e(n)$, $n \in \omega$. В силу того, что случай (3a) никогда не выполняется, все элементы a_n попарно не F-эквивалентны. Пусть $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m$ — это все $\mathcal{WP}$-стратегии, лежащие выше σ в приоритетном дереве. Положим $b_k = wp(\tau_k)$, $k \leq m$. Существует лишь конечное число элементов a_n, таких что a_n F-эквивалентно некоторому b_k. Без ограничения общности можно считать, что $a_k F b_k$ для $k \leq m$. Так как случай (3b) для стратегии σ никогда не выполняется, существует не более одного элемента a_n, такого что $n > m$ и $[a_n]_F$ не содержит чётных чисел. Поэтому можно считать, что для любого $n \geq m+2$ класс $[a_n]_F$ содержит чётное число. Определим функции $g(x)$ и $h(x)$ по правилам:

$$g(x) = \mu s[\exists y(2y \in [a_{m+2+x}]_{F^s})],$$
$$h(x) = \mu y[2y \in [a_{m+2+x}]_{F^{g(x)}}].$$

Из вычислимости функции $size_1(x,s)$ вытекает вычислимость функций $g(x)$ и $h(x)$. Нетрудно проверить, что функция h осуществляет сводимость $Id \leq_c E$, что противоречит выбору E. $\square$

Пусть φ_e — это всюду определённая функция и σ — это $\mathcal{ID}_e$-стратегия на истинном пути. В силу того, что, начиная с некоторого шага, σ всегда имеет выход `act`, существуют числа k и m, такие что $k \neq m$ и $[\varphi_e(k)]_F = [\varphi_e(m)]_F$. Следовательно, φ_e не сводит Id к F; значит, $Id \not\leq_c F$. С другой стороны, выполнено $E \leq_c F$ и $E \not\leq_c Id$, поэтому $F \not\leq_c Id$. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Следующее утверждение даёт аналог теоремы 1.1 для тёмных отношений эквивалентности.

Следствие 2.1. *Пусть E — это тёмное в.п. отношение эквивалентности. Тогда существует последовательность отношений эквивалентности $(F_n)_{n\in\omega}$, такая что каждое F_n есть слабо предполное тёмное в.п. отношение эквивалентности и $E <_c F_0 <_c F_1 <_c F_2 <_c \dots$.*

Доказательство. Рассмотрим отношение $\tilde{E} = E \oplus Id_1$. Очевидно, что $E \leq_c \tilde{E}$. Покажем, что $\tilde{E} \not\leq_c E$. Допустим, что $f\colon \tilde{E} \leq_c E$. Тогда для вычислимой функции $g(x) = f(2x)$ выполнено: $g\colon E \leq_c E$ и существует $a \in \omega$, такое что $[a]_E \cap ran(g) = \varnothing$. Следовательно, E не является самополным, что противоречит предложению 1.1.

Итак, $E <_c \tilde{E}$. Кроме того, нетрудно проверить, что отношение $\tilde{E}$ тёмное. Применяя к $\tilde{E}$ конструкцию теоремы 2.1, получим слабо предполное тёмное отношение F_0, такое что $E <_c \tilde{E} \leq_c F_0$. Проводя аналогичные рассуждения для F_0 вместо E, можно построить слабо предполное тёмное отношение F_1, такое что $F_0 <_c F_1$. Продолжая эти рассуждения, получаем бесконечную ω-цепь $F_0 <_c F_1 <_c F_2 <_c \dots$. □

3 Вычислимо перечислимые линейные порядки

В данном разделе исследуется связь вычислимо перечислимых линейных порядков и вычислимо перечислимых отношений эквивалентности.

Пусть $P \subseteq \omega^2$ — это вычислимо перечислимый предпорядок, т.е. в.п. рефлексивное транзитивное отношение на ω. Определим в.п. отношение эквивалентности $E(P)$ по правилу: для любого $x \in \omega$ выполнено $[x]_{E(P)} = \{y : (x,y), (y,x) \in P\}$.

Зададим сводимость $\leq_c$ на в.п. предпорядках так же, как на в.п. эквивалентностях. Если P и Q — в.п. предпорядки, то $P \leq_c Q$ в том и только том случае, когда существует вычислимая функция $f(x)$, такая что для любых $x, y \in \omega$ выполнено: xPy тогда и только тогда, когда $f(x)Qf(y)$.Говорят, что в.п. предпорядок P является *вычислимо перечислимым линейным порядком*, если фактор-множество $\omega/E(P)$ с предпорядком $\trianglelefteq_P$, заданным по правилу:

$$([x]_{E(P)} \trianglelefteq_P [y]_{E(P)}) \ \Leftrightarrow\ \exists x' \exists y' (x' \in [x]_{E(P)} \ \&\ y' \in [y]_{E(P)} \ \&\ x' P y'),$$

является линейно упорядоченным. Обозначим фактор-структуру $(\omega/E(P), \trianglelefteq_P)$ через $\mathcal{Q}(P)$.

Пусть $\mathcal{L}$ — это счётный линейный порядок, E — в.п. отношение эквивалентности. Говорят, что E *реализует* порядок $\mathcal{L}$, если существует в.п. линейный порядок P, такой что $E(P) = E$ и структура $\mathcal{Q}(P)$ изоморфна $\mathcal{L}$. Через $K_{LO}(E)$ обозначается класс всех счётных линейных порядков, реализуемых E.

Определение 3 ([11, опр. 11] и [12, опр. 1.3])**.** Пусть E и F — в.п. отношения эквивалентности. Отношение E *lo-сводится* к отношению F (обозначается через $E \leq_{lo} F$), если $K_{LO}(E) \subseteq K_{LO}(F)$.

Систематическое исследование lo-сводимости начато в работах [11, 12]. В частности, в [11] показано, что существуют бесконечная возрастающая цепь $E_0 <_{lo} E_1 <_{lo} E_2 <_{lo} \dots$ и бесконечная убывающая цепь $F_0 >_{lo} F_1 >_{lo} F_2 >_{lo} \dots$. Кроме того, в [11] построена последовательность в.п. отношений эквивалентности $(\tilde{E}_n)_{n\in\omega}$, такая что все $\tilde{E}_n$ попарно $\leq_{lo}$-несравнимы. В [12] показано, что любое в.п. отношение эквивалентности, реализующее порядки $(\omega, \leq)$ и $(\mathbb{Q}, \leq)$, является вычислимым. Также в [12] построено невычислимое в.п. отношение эквивалентности, реализующее $(\omega^2, \leq)$ и $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Будем говорить, что в.п. линейный порядок P является *универсальным*, если для любого в.п. линейного порядка Q выполнено $Q \leq_c P$.

Теорема 3.1. *Существует универсальный в.п. линейный порядок P_U.*

Доказательство. Зафиксируем вычислимое представление $\eta = (\mathbb{N}, \leq_\eta)$ линейного порядка $(\mathbb{Q}, \leq)$. Далее для удобства будем обозначать носитель η через S_η. Для каждого $e \in \omega$ построим в.п. линейный порядок P_e по шагам. На шаге s будем строить предпорядок $P_{e,s}$, число r_s и инъективную функцию g_s, действующую из $[0; r_s]$ в S_η. Для каждого s будет выполнено $P_{e,s} \subseteq P_{e,s+1}$, $r_s \leq r_{s+1} \leq s$ и $g_s \subseteq g_{s+1}$.

Для $s \in \omega$ и $r \leq s$ зададим множества

$$L^r_{e,s} = \{(k,l) : k,l \leq r,\ \langle k,l\rangle \in W_{e,s}\} \cup \{(k,k) : k \leq r\},$$
$$M^r_{e,s} = L^r_{e,s} \cup \{(x,y) : x \leq r,\ y > r\} \cup \{(x,y) : r < x \leq y\}.$$

Отметим следующее: $M^r_{e,s}$ является в.п. линейным порядком в том и только случае, когда фактор-структура с носителем $[0;r]/(L^r_{e,s} \cap (L^r_{e,s})^{-1})$ и бинарным отношением, индуцированным $L^r_{e,s}$, линейно упорядочена. Будем обозначать эту фактор-структуру через $\mathcal{Q}^r_{e,s}$. Запись $a \trianglelefteq^r_s b$ означает, что $(a,b) \in L^r_{e,s}$.

На каждом шаге s, таком что структура $\mathcal{Q}^{r_s}_{e,s}$ линейно упорядочена, функция g_s будет индуцировать изоморфное вложение $\mathcal{Q}^{r_s}_{e,s}$ в фактор-структуру $\eta/E(P_{e,s})$.

Шаг 0. Полагаем $P_{e,0} = \{(x,y) : x \leq_\eta y\}$, $r_0 = 0$ и $g_0(0) = 0$.

Шаг $s+1$**.** Находим наибольшее $r^0 \leq s$, такое что отношение $M^{r^0}_{e,s}$ есть в.п. линейный порядок. Если $r^0 \leq r_s$, то ничего не меняем. Если $r^0 > r_s$, то проводим следующие действия:

(1) Полагаем $r_{s+1} = r_s + 1$.

(2) В силу того, что фактор-структура $\mathcal{Q}^{r_{s+1}}_{e,s}$ линейно упорядочена, для числа $r = r_{s+1}$ выполнен один из двух случаев:

(2a) Существует (единственный) элемент $l \leq r_s$, такой что $l \trianglelefteq^r_s r$ и для любого $m \leq r_s$ верно:

$$(m \trianglelefteq^r_s r) \ \Rightarrow\ (m \trianglelefteq^r_s l \ \&\ g_s(m) \leq_\eta g_s(l)).$$

Тогда в качестве $g_{s+1}(r)$ выбираем произвольный элемент z, такой что $g_s(l) <_\eta z$ и $z <_\eta g_s(q)$ для всех q, таких что $g_s(q) >_\eta g_s(l)$.

(2b) Не выполнен случай (2a) и существует (единственный) элемент $p \leq r_s$, такой что $r \trianglelefteq^r_s p$ и для любого $m \leq r_s$ верно:

$$(r \trianglelefteq^r_s m) \ \Rightarrow\ (p \trianglelefteq^r_s m \ \&\ g_s(p) \leq_\eta g_s(m)).$$

Тогда $g_{s+1}(r)$ определяем как произвольный элемент z, такой что $z <_\eta g_s(p)$ и $z >_\eta g_s(q)$ для всех q, таких что $g_s(q) <_\eta g_s(p)$.

(3) Если для некоторых k и m выполнено $k \trianglelefteq^{r_{s+1}}_s m$, $m \trianglelefteq^{r_{s+1}}_s k$ и $g_{s+1}(k) <_\eta g_{s+1}(m)$, то добавляем множество $\{(x,y) : g_{s+1}(k) \leq_\eta x \leq_\eta g_{s+1}(m),\ g_{s+1}(k) \leq_\eta y \leq_\eta g_{s+1}(m)\}$ в $P_{e,s+1}$.

Описание конструкции завершено. Пусть $P_e = \bigcup_{s\in\omega} P_{e,s}$ и $g^e(x) = \lim_s g_s(x)$.

Лемма 3.1. *Отношение P_e есть вычислимо перечислимый (равномерно по e) линейный порядок.*

Доказательство. Заметим следующее: отношение $P_{e,s+1}$ может меняться только на этапе (3) шага $s+1$. Отсюда индукцией по s легко показать, что $P_{e,s}$ является вычислимо перечислимым (равномерно по e и s) предпорядком. Значит, P_e есть в.п. (равномерно по e) предпорядок.

Пусть теперь $x, y \in S_\eta$. Ясно, что выполнено одно из условий: $(x,y) \in P_{e,0}$ или $(y,x) \in P_{e,0}$. Следовательно, $[x]_{E(P_e)} \trianglelefteq_{P_e} [y]_{E(P_e)}$ или $[y]_{E(P_e)} \trianglelefteq_{P_e} [x]_{E(P_e)}$, т.е. P_e есть в.п. линейный порядок. □

Для $e \in \omega$ определим в.п. отношение $L_e = \{(x,y) : \langle x,y \rangle \in W_e\}$.

Лемма 3.2. *Если L_e является в.п. линейным порядком, то функция g^e всюду определена и $g^e \colon L_e \leq_c P_e$.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать тотальность функции g^e, достаточно показать, что существует бесконечно много шагов $s+1$, таких что $r_{s+1} > r_s$. Допустим, что существует шаг s^*, такой что $r_s = r_{s^*} = r^*$ для всех $s \geq s^*$. Выберем наименьший шаг $s_1 \geq s^*$, такой что

$$L_{e,s_1}^{r^*+1} = \{(k,l) : k,l \leq r^*+1,\ \langle k,l \rangle \in W_e\}.$$

В силу того, что L_e есть в.п. линейный порядок, структура $\mathcal{Q}_{e,s_1}^{r^*+1}$ линейно упорядочена. Отсюда вытекает, что свойства конструкции гарантируют следующее: на шаге s_1 значение r_{s_1} будет не меньше, чем r^*+1. Приходим к противоречию с исходным допущением. Следовательно, g^e есть всюду определённая вычислимая функция.

Заметим, что конструкция гарантирует выполнение следующего свойства: если $(x,y) \in L_e$, то $(g^e(x), g^e(y)) \in P_e$. Предположим теперь, что для некоторых x и y выполнено: $(g^e(x), g^e(y)) \in P_e$ и $(x,y) \notin L_e$. Выберем наименьший шаг s_0, для которого существуют x_0 и y_0, такие что $(g_{s_0}(x_0), g_{s_0}(y_0)) \in P_{e,s_0}$ и $(x_0, y_0) \notin L_e$. Пусть $r = r_{s_0}$. Тогда для некоторых u_0 и v_0 выполнены соотношения:

$$u_0 \trianglelefteq_{s_0}^r v_0, \quad v_0 \trianglelefteq_{s_0}^r u_0, \quad u_0 \trianglelefteq_{s_0}^r x_0 \trianglelefteq_{s_0}^r v_0, \quad u_0 \trianglelefteq_{s_0}^r y_0 \trianglelefteq_{s_0}^r v_0,$$
$$g_{s_0}(u_0) \leq_\eta g_{s_0}(y_0) <_\eta g_{s_0}(x_0) \leq_\eta g_{s_0}(v_0).$$

В силу того, что L_e есть в.п. предпорядок, из того, что $(x_0 \trianglelefteq_{s_0}^r v_0 \trianglelefteq_{s_0}^r u_0 \trianglelefteq_{s_0}^r y_0)$, вытекает, что $(x_0, y_0) \in L_e$, что противоречит нашему предположению. Итак, условия $(x,y) \in L_e$ и $(g^e(x), g^e(y)) \in P_e$ эквивалентны, поэтому $g^e \colon L_e \leq_c P_e$. □

Определим в.п. предпорядок P_U по следующему правилу: $(\langle e_0, x_0 \rangle, \langle e_1, x_1 \rangle) \in P_U$ в том и только том случае, когда $e_0 < e_1$ или $(e_0 = e_1)\&[(x_0, x_1) \in P_{e_0}]$. Из леммы 3.1 следует, что P_U есть в.п. линейный порядок. Из леммы 3.2 вытекает следующее: если L_e — это в.п. линейный порядок, то функция $h^e(x) = \langle e, g^e(x) \rangle$ сводит L_e к P_U. Значит, в.п. порядок P_U универсален. Теорема 3.1 доказана. □

Из теоремы 3.1 вытекает следующий факт, показывающий связь между сводимостями $\leq_c$ и $\leq_{lo}$ для в.п. отношений эквивалентности.

Следствие 3.1. *Существует в.п. отношение эквивалентности E_0, такое что $K_{LO}(E_0) \neq \varnothing$ и выполнено следующее свойство: если F — это в.п. отношение эквивалентности с условием $K_{LO}(F) \neq \varnothing$, то верно $F \leq_c E_0$. Другими словами, отношение E_0 является $\leq_c$-универсальным в классе всех в.п. отношений эквивалентности, реализущих некоторый линейный порядок.*

Доказательство. Покажем, что отношение эквивалентности $E_0 = E(P_U)$, где P_U — это универсальный в.п. линейный порядок, является искомым. Пусть F — это в.п. отношение эквивалентности, реализующее некоторый линейный порядок. Зафиксируем в.п. линейный порядок Q, такой что $E(Q) = F$. Тогда существует вычислимая функция f, сводящая Q к P_U. Нетрудно проверить следующее свойство: для любых x, y условия $(xE(Q)y)$ и $(f(x)E(P_U)f(y))$ эквивалентны. Следовательно, верно $f\colon F \leq_c E_0$. $\square$

В заключение введём понятия тёмного и светлого в.п. линейных порядков и установим некоторые их простые свойства.

Определение 4. В.п. линейный порядок P называется *тёмным*, если P несравним относительно сводимости $\leq_c$ ни с каким в.п. линейным порядком Q со свойством $E(Q) = Id$. В случае, если P не является тёмным, будем называть порядок P *светлым*.

Если P и Q — это в.п. линейные порядки, то зададим их *прямую сумму* $(P \oplus Q)$ по следующему правилу: $(x, y) \in P \oplus Q$ в том и только том случае, когда выполнен один из случаев

1. $x = 2u$ и $y = 2v + 1$ для некоторых $u, v \in \omega$;
2. $x = 2u$, $y = 2v$ и $(u, v) \in P$;
3. $x = 2u + 1$, $y = 2v + 1$ и $(u, v) \in Q$.

Нетрудно проверить, что $P \oplus Q$ также является в.п. линейным порядком.

Для в.п. множества X через R_X обозначим в.п. отношение эквивалентности со свойством:

$$xR_Xy \;\Leftrightarrow\; (x = y) \vee (x, y \in X).$$

Предложение 3.1. *Существует равномерно в.п. последовательность тёмных в.п. линейных порядков $(P_n)_{n\in\omega}$, такая что $P_0 <_c P_1 <_c P_2 <_c \dots$.*

Доказательство. По [11, теор. 39], существует простое в.п. множество X, такое что R_X реализует некоторый линейный порядок $\mathcal{L}$. Пусть P_0 — это в.п. линейный порядок, для которого $E(P_0) = R_X$. В силу того, что множество X простое, R_X есть тёмное отношение эквивалентности, поэтому в.п. порядок P_0 также является тёмным. Покажем, что равномерно в.п. последовательность, заданная по правилу $P_{n+1} = P_0 \oplus P_n$, является искомой.

Очевидно, что для любого n выполнено $P_n \leq_c P_{n+1}$. Заметим, что отношение эквивалентности $E(P_n)$ имеет в точности $(n+1)$ невычислимый класс. Отсюда вытекает, что $E(P_{n+1}) \nleq_c E(P_n)$ и $P_{n+1} \nleq_c P_n$. Индукцией по n докажем, что каждый порядок P_n является тёмным. Из того, что $P_n \leq_c P_{n+1}$ и P_n —тёмный, получаем, что P_{n+1} не сводится ни к какому в.п. линейному порядку Q со свойством $E(Q) = Id$. Допустим теперь, что существуют в.п. порядок Q и вычислимая функция $f(x)$, такие что $E(Q) = Id$ и $f\colon Q \leq_c P_{n+1}$. Тогда выполнен хотя бы один из двух случаев:

1) Существует бесконечно много x, таких что значение $f(x)$ чётно. Тогда определим бесконечное в.п. множество $W = \{x : f(x) \text{ чётно}\}$ и зафиксируем инъективную вычислимую функцию $g(x)$, для которой $ran(g) = W$. Зададим новый в.п. линейный порядок Q_0, такой что $[(xQ_0y) \Leftrightarrow (g(x)Qg(y))]$. Ясно, что $E(Q_0) = Id$ и вычислимая функция $h(x) = [f(g(x))/2]$ сводит Q_0 к P_0, что противоречит тому, что P_0 тёмный.

2) Существует бесконечно много x, таких что значение $f(x)$ нечётно. Тогда (аналогично первому случаю) можно показать, что порядок P_n является светлым, что противоречит индукционной гипотезе. □

Следствие 3.2. *Существует равномерно в.п. последовательность светлых в.п. линейных порядков $(Q_n)_{n\in\omega}$, такая что $Q_0 <_c Q_1 <_c Q_2 <_c \dots$.*

Доказательство. Пусть $L_\omega = \{(x, y) : x \leq y\}$ и $(P_n)_{n\in\omega}$ — последовательность в.п. линейных порядков из предыдущего предложения. Тогда последовательность $Q_n = P_n \oplus L_\omega$ удовлетворяет нужным свойствам. □

Предложение 3.2. *Существует последовательность светлых в.п. линейных порядков $(R_n)_{n\in\omega}$, такая что все R_n попарно $\leq_c$-несравнимы и $E(R_n) = Id$ для каждого n.*

Доказательство. В данном доказательстве термины *вычислимая копия* и *вычислимый линейный порядок* будут использоваться в стандартном для теории вычислимых моделей смысле (подробности см. в [13]).

Если $\mathcal{L}$ — это вычислимая копия порядка $\omega+\omega^*$, точерез $\Omega(\mathcal{L})$ будем обозначать множество всех элементов $a \in \mathcal{L}$, для которых существует только конечное число элементов b со свойством $b \leq_{\mathcal{L}} a$. В [14, предл. 3.1] доказано, что для любой Δ^0_2 тьюринговой степени $\mathbf{d}$ существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{A} \cong \omega + \omega^*$, такой что $\deg_T(\Omega(\mathcal{A})) = \mathbf{d}$.

Зафиксируем последовательность Δ^0_2 тьюринговых степеней $(\mathbf{d}_n)_{n\in\omega}$, такую что $\mathbf{d}_n \neq \mathbf{d}_m$ при $n \neq m$. Для каждой степени $\mathbf{d}_n$ выберем вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}_n \cong \omega + \omega^*$, такой что $\deg_T(\Omega(\mathcal{L}_n)) = \mathbf{d}_n$.

Зададим в.п. линейный порядок $R_n = \{(x, y) : x \leq_{\mathcal{L}_n} y\}$. Очевидно, что $E(R_n) = Id$, поэтому порядок R_n является светлым. Пусть m и n — различные натуральные числа. Допустим, что существует вычислимая функция $f(x)$, такая что

$f\colon R_m \leq_c R_n$. Тогда имеют место соотношения:

$$\Omega(\mathcal{L}_m) = \{x : f(x) \in \Omega(\mathcal{L}_n)\},$$
$$\Omega(\mathcal{L}_n) = \{y : \exists x[x \in \Omega(\mathcal{L}_m) \,\&\, y \leq_{\mathcal{L}_n} f(x)]\},$$
$$\mathcal{L}_n \setminus \Omega(\mathcal{L}_n) = \{z : \exists x[x \in \mathcal{L}_m \setminus \Omega(\mathcal{L}_m) \,\&\, f(x) \leq_{\mathcal{L}_n} z]\}.$$

Отсюда получаем, что $\Omega(\mathcal{L}_m) \equiv_T \Omega(\mathcal{L}_n)$, что противоречит выбору последовательности $(\mathbf{d}_n)_{n\in\omega}$. □

Авторы выражают благодарность С. С. Гончарову за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Мальцев А. И.* Полно нумерованные множества // Алгебра и логика. 1963. Т. 2, № 2. С. 4–29.

[2] *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

[3] *Bernardi C., Sorbi A.* Classifying positive equivalence relations // J. Symb. Log. 1983. V. 48, N 3. P. 529–538.

[4] *Lachlan A. H.* A note on positive equivalence relations // Z. Math. Logik Grundlagen Math. 1987. V. 33. P. 43–46.

[5] *Бадаев С. А.* О слабо предполных позитивных эквивалентностях // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 2. С. 166–169.

[6] *Badaev S., Sorbi A.* Weakly precomplete computably enumerable equivalence relations // Math. Log. Q. 2016. V. 62, N 1–2. P. 111–127.

[7] *Gao S., Gerdes P.* Computably enumerable equivalence relations // Stud. Log. 2001. V. 67, N 1. P. 27–59.

[8] *Andrews U., Lempp S., Miller J. S., Ng K. M., San Mauro L., Sorbi A.* Universal computably enumerable equivalence relations // J. Symb. Log. 2014. V. 79, N 1. P. 60–88.

[9] *Andrews U., Sorbi A.* The complexity of index sets of classes of computably enumerable equivalence relations // J. Symb. Log. 2016. V. 81, N 4. P. 1375–1395.

[10] *Andrews U., Badaev S., Sorbi A.* A survey on universal computably enumerable equivalence relations // In: Computability and Complexity. Eds. Day A., Fellows M., Greenberg N., Khoussainov B., Melnikov A., Rosamond F. Lect. Notes Comput. Sci. 2016. V. 10010. P. 418–451.

[11] *Gavryushkin A., Khoussainov B., Stephan F.* Reducibilities among equivalence relations induced by recursively enumerable structures // Theor. Comput. Sci. 2016. V. 612. P. 137–152.

[12] *Fokina E., Khoussainov B., Semukhin P., Turetsky D.* Linear orders realized by c.e. equivalence relations // J. Symb. Log. 2016. V. 81, N 2. P. 463–482.

[13] *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999.

[14] *Harizanov V. S.* Turing degrees of certain isomorphic images of computable relations // Ann. Pure Appl. Logic. 1998. V. 93, N 1–3. P. 103–113.