ҚАЗАҚСТАН
ЖОЛ
ҒЫЛЫМИ-ЗЕРТТЕУ
ИНСТИТУТЫ

КАЗАХСТАНСКИЙ
ДОРОЖНЫЙ НАУЧНО-
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ

ҚазжолҒЗИ ЖАРШЫСЫ

ВЕСТНИК КаздорНИИ

№ 1-2 (53-54) 2017

Арнайы шығарылым

Специальный выпуск

Ғылыми-практикалық журнал

Научно-практический журнал

Транспорт и сооружения

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем специальном выпуске журнала «Вестник Казахстанского дорожного научно-исследовательского института» включены материалы Международного научного семинара «Актуальные проблемы инженерной механики», посвященного 95-летию академика АН КазССР, доктора технических наук, профессора, Заслуженного деятеля науки Казахстана **Жакана Сулейменовича Ержанова.**

Материалы Семинара содержат расширенную статью о жизни и научной деятельности академика Ж.С. Ержанова, научные работы его учеников, последователей и специалистов, занимающихся вопросами фундаментальной и прикладной механики.

Материалы Семинара по их содержанию разделены на следующие три направления: «Механика», «Машиноведение», «Транспорт и сооружения» и включены в программу Семинара для презентации и обсуждения.

УДК 539.3:622.24

Кудайбергенов Аскар К. - *PhD-докторант*
Казахский национальный университет им. аль-Фараби
Институт механики и машиноведения им. акад. У.А. Джолдасбекова
e-mail: askarkud@gmail.com

О НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ КОЛЕБАНИЙ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН С УЧЕТОМ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Тақырып: *Сыртқы әсерлер есепке алумен бұрғылау колонналары тербелістердің сызықты емес моделдері туралы.*

Түйін:. *Бұл жұмыста тереңнен емес бұрғылау барысында кондырғыдан берілуші сыртқы жүк әсерімен және газ ағынының ықпалы есепке алумен айналмалы білік ретінде бұрғылау колоннаның сызықты емес жазық және кеңістік көлденең тербелістерін моделдеу өткізіледі. Жасалған математикалық моделдер әдебиеттен белгілі біліктердің сызықты емес моделдері мен біліктердің түрінде ұсынылған бұрғылау колонналарының сызықты моделдері жалпылайды. Колоннаның әртүрлі қима үшін сандық есептердің нәтижелері көрсетіледі.*

Түйін сөздер: *бұрғылау колонна, сызықты емес модель, жазық көлденең тербелістер, кеңістік көлденең тербелістер.*

Тема: *О нелинейных математических моделях колебаний бурильных колонн с учетом внешних воздействий.*

Аннотация: *В данной работе проводится моделирование нелинейных плоских и пространственных изгибных колебаний бурильной колонны как вращающегося стержня под действием внешних нагрузок, передаваемых от буровой установки, и с учетом влияния потока газа в процессе неглубинного бурения. Разрабатываемые математические модели обобщают известные в литературе нелинейные модели стержней и линейные модели бурильных колонн, представляемых в виде стержней. Показаны результаты численных расчетов для различных сечений колонны.*

Ключевые слова: *бурильная колонна, нелинейная модель, плоские изгибные колебания, пространственные изгибные колебания.*

Topic: *About nonlinear mathematical models of drill string vibrations taking into account external effects.*

Abstract: *In the work modeling of planar and spatial nonlinear bending vibrations of a drill string as a rotating rod under the effect of external loadings passed from the drill rig and taking into account the influence of a gas flow in the process of shallow drilling is carried out. Developed mathematical models generalize nonlinear models of rods and linear models of drill strings presented in the form of rods, known in the literature. Results of numerical computations for different drill string cross-sections are shown.*

Keywords: *drill string, nonlinear model, planar bending vibrations, spatial bending vibrations.*

Введение

Как известно, нефтяная отрасль промышленности занимает ведущее место в мировом топливно-энергетическом комплексе и играет главенствующую роль в экономике нашей страны. Являясь одновременно сырьем, использующимся для производства энергии, нефть остается и важным ресурсом в химической промышленности. Она оказывает большое влияние не только на мировое хозяйство, но является и мощным катализатором мировых геополитических процессов. Обладая огромными запасами нефтяных ресурсов в Каспийском регионе, Казахстан входит в число ведущих производителей и экспортеров нефти в мире и занимает второе место среди стран СНГ по данному показателю после России [1].

Однако, как и в любой отрасли, в нефтяной промышленности имеется ряд проблем. В настоящее время перед мировым сообществом стоит острый вопрос, связанный с ограничением объемов добычи полезных ископаемых из природных ресурсов. Как прогнозируют эксперты, к концу XXI в. многие из них уже будут исчерпаны. Ввиду этого появляется необходимость в пересмотре самого процесса раскрытия нефтеносных горизонтов. Тогда как многие нефтяные компании направляют свои усилия на углубление проходимых скважин, другое видимое решение данной проблемы заключается в исследовании неглубинного бурения для обеспечения бесперебойной и безаварийной добычи нефти в дальнейшем. При этом не исключается возможность нахождения нефтеносных бассейнов на небольшой глубине, что также говорит в пользу второго подхода.

Целью данной работы является моделирование нелинейных колебаний бурильной колонны под действием внешнего нагружения, передаваемого от буровой установки, и при взаимодействии с окружающей средой в процессе неглубинного бурения. При этом внимание здесь уделено поперечным (изгибным) колебаниям ввиду их наибольшего разрушающего воздействия [2]. Продольно-поперечные колебания бурильной колонны были изучены автором в работе [3], в которой результаты численного моделирования также подтвердили преобладающее влияние изгибных колебаний. Разработка же нелинейных математических моделей обусловлена текущими требованиями в создании наиболее полных и близких к реальности моделей, описывающих колебательный процесс бурильных колонн при проходке нефтяных скважин.

Математические модели бурильной колонны с учетом геометрической нелинейности

Рассмотрим удлиненный стальной изотропный стержень симметричного кольцевого поперечного сечения с шарнирно-закрепленными краями, находящегося под действием продольной сжимающей нагрузки $N(z,t)$ и крутящего момента $M(z,t)$ и вращающегося с угловой скоростью ω, который наиболее точно отражает реальную конструкцию бурильной колонны. Ось z направлена вдоль оси стержня. Изучаются его поперечные колебания.

Применяя основные соотношения нелинейной теории упругости Новожилова и переходя ко второй системе упрощений данной теории, когда малы по сравнению с единицей не только компоненты деформации, но и углы поворота (при этом они не обязательно являются величинами одного порядка малости) [4], а также используя теорию пространственного деформирования стержней и стержневых систем Филиппова [5] и гипотезу плоских сечений, нами были получены выражения для упругих потенциалов Ф в перемещениях для случаев плоских и пространственных колебаний вращающегося стержня.

При рассмотрении колебаний стержня в одной плоскости *Oyz* потенциал Ф имеет вид:

$$\Phi = \frac{G(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2 y^2 + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^4 - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 y\right), \quad (1)$$

где $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига, *E* - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона.

В случае связанных изгибных колебаний стержня в плоскостях *Oxz* и *Oyz* упругий потенциал преобразуется к следующему виду:

$$\Phi = \frac{G(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}x + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}y\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right) -$$

$$-\frac{G}{2(1-2\nu)}\left[\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}x + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}y\right)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right) + \quad (2)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] + 2G\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2.$$

Используя выражения (1), (2), можно определить потенциальную энергию стержня для двух рассматриваемых случаев. Далее вычисляется кинетическая энергия стержня с учетом вращения и задается потенциал внешних сил (см. [6], [7] для случая плоских колебаний и [8] для пространственных).

Применение вариационного принципа Гамильтона для колебаний стержня в одной плоскости приводит к следующей нелинейной математической модели плоских колебаний бурильной колонны:

$$\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI_x\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho I_x\frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(N(z,t)\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^3 - \rho A\omega^2 v = 0, \quad (3)$$

где ρ – плотность бурильной колонны, EI_x - изгибная жесткость, I_x - осевой момент инерции кольцевого сечения относительно оси *x*, *A* - площадь поперечного сечения.

Граничные условия для шарнирно-опертого стержня задаются в виде:

$$\begin{aligned} &v(z,t) = 0 \ \text{при} \ z = 0, l, \\ &EI_x\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = 0 \ \text{при} \ z = 0, l, \end{aligned} \quad (4)$$

где *l* - длина стержня.

Применяя данный принцип к связанным поперечным колебаниям стержня, была получена следующая нелинейная математическая модель пространственных колебаний бурильной колонны:

$$\begin{gathered}
\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EI_y\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}-\rho I_y\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(M(z,t)\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(N(z,t)\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\\
-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3-\rho A\omega^2 u+2\rho A\omega\frac{\partial v}{\partial t}=0,\\
\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+EI_x\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}-\rho I_x\frac{\partial^4 v}{\partial z^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(M(z,t)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(N(z,t)\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\\
-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^3-\rho A\omega^2 v-2\rho A\omega\frac{\partial u}{\partial t}=0,
\end{gathered}\tag{5}$$

где I_y - осевой момент инерции кольцевого сечения относительно оси *y*.

Шарнирному закреплению концов стержня в пространственном случае соответствуют граничные условия вида:

$$\begin{gathered}
u(z,t)=0,\ EI_x\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=0 \ \text{при}\ z=0,l,\\
v(z,t)=0,\ EI_x\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}=0 \ \text{при}\ z=0,l.
\end{gathered}\tag{6}$$

Нелинейные математические модели бурильной колонны при взаимодействии с окружающей средой

Перейдем к моделированию колебательного процесса бурильной колонны, находящейся под действием как нагрузок, принимаемых от буровой установки, так и под воздействием окружающей среды. В качестве данного воздействия рассмотрим влияние сверхзвукового потока газа, движущегося с внешней стороны бурильной колонны в противоположном к ее движению направлении.

Плоские нелинейные колебания стержня под действием продольной сжимающей нагрузки и сверхзвукового потока газа, обтекающего колонну с внешней стороны, были подробно изучены в [6], [7], поэтому в настоящей работе внимание уделяется его пространственным колебаниям.

Основываясь на постулатах поршневой теории, описанной в [9], [10], выражения для сверхзвукового потока газа в плоскостях *Oxz* и *Oyz* определяются следующим образом:

$$P_u = P_0\left(1-\frac{\kappa-1}{2}\cdot\frac{U_u}{C_0}\right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}},$$
$$P_v = P_0\left(1-\frac{\kappa-1}{2}\cdot\frac{U_v}{C_0}\right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}, \qquad (7)$$

где U_u, U_V обозначают скос потока газа в плоскостях *Oxz* и *Oyz*, соответственно, C_0 - скорость звука для невозмущенного потока, P_0 - давление невозмущенного потока, κ - показатель политропы.

Полагая, что распределение давления потока газа по поверхности бурильной колонны с течением времени остается таким же, как и при стационарном процессе, скос потока можно определить следующими формулами:

$$U_u = V_g\frac{\partial u}{\partial z},$$
$$U_v = V_g\frac{\partial v}{\partial z}. \qquad (8)$$

где V_g есть скорость невозмущенного потока газа.

Раскладывая (7) в степенной ряд с учетом (8) и удерживая члены ряда с производными третьего порядка включительно, имеем:

$$\Delta P_u = P_0\kappa\left(-\overline{M}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\kappa+1}{4}\overline{M}^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-\frac{\kappa+1}{12}\overline{M}^3\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3\right),$$
$$\Delta P_v = P_0\kappa\left(-\overline{M}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\kappa+1}{4}\overline{M}^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2-\frac{\kappa+1}{12}\overline{M}^3\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^3\right), \qquad (9)$$

где $\Delta P_u = P_u - P_0$, $\Delta P_v = P_v - P_0$, $\overline{M}$ - число Маха.

Умножая каждое из выражений в (9) на толщину стенок бурильной колонны *h*, чтобы удовлетворить размерности модели, и добавляя полученные слагаемые в (5), получаем нелинейную математическую модель связанных поперечных колебаний бурильной колонны под влиянием сверхзвукового потока газа:

$$\begin{gathered}
\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EI_y\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}-\rho I_y\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(M\left(z,t\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(N\left(z,t\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\\
-\frac{EA\left(5-6\nu\right)}{2\left(1-\nu\right)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3-\rho A\omega^2 u+2\rho A\omega\frac{\partial v}{\partial t}+\\
+P_0\kappa\left(-\overline{M}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\kappa+1}{4}\overline{M}^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-\frac{\kappa+1}{12}\overline{M}^3\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3\right)=0,\\
\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+EI_x\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}-\rho I_x\frac{\partial^4 v}{\partial z^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(M\left(z,t\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(N\left(z,t\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\\
-\frac{EA\left(5-6\nu\right)}{2\left(1-\nu\right)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^3-\rho A\omega^2 v-2\rho A\omega\frac{\partial u}{\partial t}+\\
+P_0\kappa\left(-\overline{M}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\kappa+1}{4}\overline{M}^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2-\frac{\kappa+1}{12}\overline{M}^3\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^3\right)=0
\end{gathered}\tag{10}$$

с граничными условиями в виде (6).

При этом, если пренебречь слагаемыми, отвечающими за вклад внешних воздействий в разработанных математических моделях (3), (5), (10), то мы приходим к нелинейным моделям колебаний стержней Ерофеева [11]. Линеаризация полученных моделей приводит к линейным моделям Гуляева [12] без учета влияния жидкости в последних, что подтверждает достоверность проведенного математического моделирования колебаний бурильной колонны.

Численное решение и результаты

Решение к математической модели (10) с условиями (6) находится с использованием методики, разработанной авторами в пакете Wolfram Mathematica и изложенной в [6]. Согласно данной методике рассматриваемая система уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом Бубнова-Галеркина, для интегрирования которой применяется одна из вариаций численного метода с переключением жесткости, описание и преимущество которой дается в работе [7].

Внешний диаметр стержня принимается равным $D=0.2\text{м},$ внутренний диаметр $d=0.12\text{м},$ величина сжимающей нагрузки $N\left(z,t\right)=2.2\,\text{кН},$ крутящий момент $M\left(z,t\right)=10\,\text{кН},$ угловая скорость вращения $\omega=0.5\ \text{рад/с}$. Значения газовых параметров берутся как в работе [6] за исключением величины числа Маха, принимаемого в данной работе $\overline{M}=2$.

На рисунках 1, 2 приведены результаты численного моделирования в Wolfram Mathematica для сечений стержня $z=0.499l$ и $z=0.01l$.

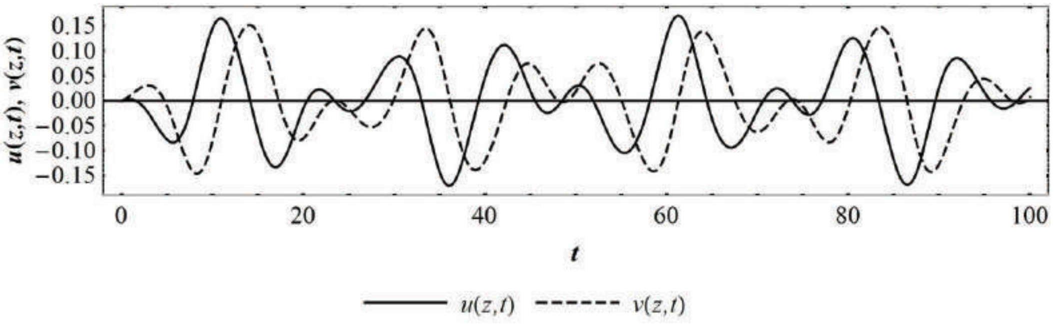

Рисунок 1. Нелинейные поперечные колебания сечения $z = 0.499l$ бурильной колонны длиной $l = 250$м в плоскостях *Oxz* и *Oyz*

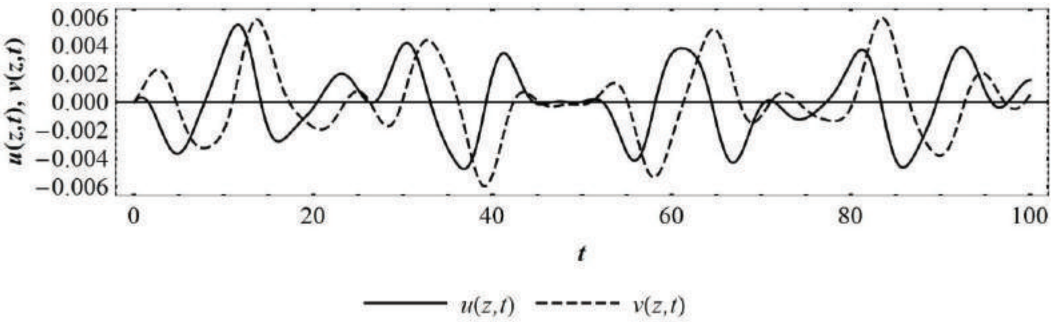

Рисунок 2. Нелинейные поперечные колебания сечения $z = 0.01l$ бурильной колонны длиной $l = 250$м в плоскостях *Oxz* и *Oyz*

Как и ожидалось, наибольшее возмущение колебаний стержня наблюдается в сечении, наиболее близком к центральному (выбор сечения $z = 0.499l$ обусловлен особенностью выбора аппроксимирующих функций в методе Бубнова-Галеркина), тогда как ближе к краю стержня амплитуды колебаний являются малыми.

Заключение

Путем применения теорий Новожилова и Филиппова с использованием вариационного принципа Гамильтона были получены нелинейные математические модели связанных изгибных колебаний бурильной колонны с учетом внешних нагрузок и потока газа, которые обобщают ранее известные в литературе линейные и нелинейные модели колебаний стержней и бурильных колонн, моделируемых в виде вращающихся стержней. Разработанная ранее авторами методика расчета моделей в пакете Wolfram Mathematica была успешно применена в данной работе и позволила получить численные результаты, показывающие реальный колебательный процесс бурильной колонны для различных ее сечений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кapeнов Р.С. Современное состояние и приоритетные задачи развития в перспективе нефтяной отрасли в мире и Казахстане //Вестник

Карагандинского университета, серия экономика. – 2015. – №3 (79). – С. 5-18.
2. Ghasemloonia A., Rideout D.G., Butt S.D. Coupled transverse vibration modelling of drillstrings subjected to torque and spatially varying axial load //In: Proc. IMechE, Part C: J. Mech. Eng. Sci. – 2012. – Vol. 227, No. 3. – P. 946-960.
3. Kudaibergenov Askar K., Kudaibergenov Askat K. Modelling of coupled nonlinear axial and lateral vibrations of drill strings //Int. J. Math. Phys. – 2015. – Vol.6, No.2. – P. 27-35.
4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. - М.- Л.: ОГИЗ, 1948.
5. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – Изд. 2-е, переработанное. – М.: Машиностроение, 1970. - 736 с.
6. Khajiyeva L.A., Kudaibergenov A.K. Modeling of nonlinear dynamics of drill strings in a supersonic air flow //Proc. 5th Int. Symposium on Knowledge Aquisition and Modeling (KAM 2015). Advances in Intelligent Systems Research. – 2015. – Vol.80. – P. 163-167
7. Кудайбергенов А.К., Кудайбергенов Аск.К. Сравнительный анализ численных методов при моделировании нелинейной динамики буровых штанг //Известия НАН РК, серия физ.-мат. – 2015. – №3 (301). – С. 37-42.
8. Кудайбергенов Аскар К.. Моделирование нелинейных поперечных колебаний буровой колонны //Труды X Всеросс. науч. конф. им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем». – Нижний Новгород, Россия, 26-29 сентября, 2016,. – С. 490-494.
9. Вольмир А.С.. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
10. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Oxford University Press, 2008.
11. Ерофеев В.И. Изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные волны в стержнях //Вестник науч.-техн. развития. – 2012. – №5 (57). – С. 3-18.
12. Gulyayev V.I., Borshch O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells //J. Pet. Sci. Eng. – 2011. – Vol. 78. – P. 759–764.

LITERATURA

1. Karenov R.S. Sovremennoe sostoyanie i prioritetnye zadachi razvitiya v perspektive neftyanoj otrasli v mire i Kazahstane //Vestnik Karagandinskogo universiteta, seriya ehkonomika. – 2015. – №3 (79). – C. 5-18.
2. Ghasemloonia A., Rideout D.G., Butt S.D. Coupled transverse vibration modelling of drillstrings subjected to torque and spatially varying axial load //In: Proc. IMechE, Part C: J. Mech. Eng. Sci. – 2012. – Vol. 227, No. 3. – P. 946-960.
3. Kudaibergenov Askar K., Kudaibergenov Askat K. Modelling of coupled nonlinear axial and lateral vibrations of drill strings //Int. J. Math. Phys. – 2015. – Vol.6, No.2. – P. 27-35.
4. Novozhilov V.V. Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti. - M.- L.: OGIZ, 1948.
5. Filippov A.P. Kolebaniya deformiruemyh sistem. – Izd. 2-e, pererabotannoe. – M.: Mashinostroenie, 1970. - 736 s.

6. Khajiyeva L.A., Kudaibergenov A.K. Modeling of nonlinear dynamics of drill strings in a supersonic air flow //Proc. 5th Int. Symposium on Knowledge Aquisition and Modeling (KAM 2015). Advances in Intelligent Systems Research. – 2015. – Vol.80. – P. 163-167
7. Kudajbergenov A.K., Kudajbergenov Ask.K. Sravnitel'nyj analiz chislennyh metodov pri modelirovanii nelinejnoj dinamiki burovyh shtang //Izvestiya NAN RK, seriya fiz.-mat. – 2015. – №3 (301). – S. 37-42.
8. Kudajbergenov Askar K.. Modelirovanie nelinejnyh poperechnyh kolebanij burovoj kolonny //Trudy H Vseross. nauch. konf. im. YU.I. Nejmarka «Nelinejnye kolebaniya mekhanicheskih sistem». – Nizhnij Novgorod, Rossiya, 26-29 sentyabrya, 2016,. – S. 490-494.
9. Vol'mir A.S.. Ustojchivost' deformiruemyh sistem. – M.: Nauka, 1967. – 984 s.
10. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Oxford University Press, 2008.
11. Erofeev V.I. Izgibno-krutil'nye, prodol'no-izgibnye i prodol'no-krutil'nye volny v sterzhnyah //Vestnik nauch.-tekhn. razvitiya. – 2012. – №5 (57). – S. 3-18.
12. Gulyayev V.I., Borshch O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells //J. Pet. Sci. Eng. – 2011. – Vol. 78. – P. 759–764.