РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УФИМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ

VI УФИМСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

„КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ“

**посвященная 70-летию чл.-корр. РАН
В. В. Напалкова**

Сборник тезисов

VI UFA INTERNATIONAL CONFERENCE

„COMPLEX ANALYSIS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS“

**dedicated to the 70th Anniversary of
Valentin V. Napalkov**

Book of Abstracts

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
Уфа 2011

УДК 517.5+517.9+519.6

VI Уфимская международная конференция "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения посвященная 70-летию чл.-корр.РАН В.В.Напалкова. Сборник тезисов. Уфа: ИМВЦ, 2011. 180 с.

Представлены тезисы VI Уфимской международной конференции "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения посвященной 70-летию чл.-корр.РАН В.В.Напалкова.

Ответственный редактор: к. ф.-м. н. Ким Виталий Эдуардович

NEW HADAMARD-TYPE INEQUALITIES FOR FUNCTIONS WHOSE DERIVATIVES ARE $(\alpha, m)-$CONVEX FUNCTIONS

AHMET OCAK AKDEMİR[1], M. EMIN ÖZDEMİR[2] AND ALPER EKİNCİ[1]

In this paper, we established some new inequalities related to the Hermite-Hadamard inequality for functions whose derivatives of absolute values are $(\alpha, m)-$convex functions. New bounds and estimations are obtained.

References

[1] M.K. Bakula, M.E. Özdemir and J. Pečarić, Hadamard-type inequalities for $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 9, (4), (2007), Article 96.
[2] M.K. Bakula, J. Pečarić and M. Ribibić, Companion inequalities to Jensen's inequality for $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 7 (5) (2006), Article 194.
[3] V.G. Miheşan, A generalization of the convexity, *Seminar of Functional Equations, Approx. and Convex*, Cluj-Napoca (Romania) (1993).
[4] E. Set, M. Sardari, M.E. Ozdemir and J. Rooin, On generalizations of the Hadamard inequality for $(\alpha, m)-$convex functions, *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 12 (4) (2009), Article 4.
[5] M.E. Özdemir, E. Set, M. Z. Sarıkaya, Some new Hadamard's type inequalities for co-ordinated $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, *Hacettepe J. of. Math. and Ist.*, 40, 219-229, (2011).
[6] M.E. Özdemir, H. Kavurmacı and E. Set,Ostrowski's Type Inequalities for $(\alpha, m)-$Convex Functions, *Kyungpook Math. J.*, 50, 371-378, (2010).
[7] M.E. Özdemir, Merve Avcı and Havva Kavurmacı, Hermite-Hadamard Type Inequalities via $(\alpha, m)-$convexity, *Computers & Mathematics with Applications*, Volume 61, Issue 9, (2011), 2614-2620.

[1]Ağri İbrahim Çeçen University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, Ağri-TURKEY
E-mail address: ahmetakdemir@agri.edu.tr, alperekinci@hotmail.com

[2]Atatürk University, K.K.E.F., Department of Mathematics, Erzurum-TURKEY
E-mail address: emos@atauni.edu.tr

NEW INTEGRAL INEQUALITIES FOR COORDINATED CONVEX FUNCTIONS

AHMET OCAK AKDEMİR[1], M. EMIN ÖZDEMİR[2] AND ALPER EKINCI[1]

In this paper, we prove some new integral inequalities for co-ordinated convex functions by using a new lemma and fairly elementary analysis.

References

[1] M.K. Bakula and J. Pečarić, On the Jensen's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane, *Taiwanese Journal of Math.*, 5, 2006, 1271-1292.

[2] M.E. Özdemir, E. Set, M.Z. Sarıkaya, Some new Hadamard's type inequalities for co-ordinated $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, *Hacettepe J. of. Math. and Ist.*, 40, 219-229, (2011).

[3] M.Z. Sarıkaya, E. Set, M. Emin Özdemir and S.S. Dragomir, New some Hadamard's type inequalities for co-ordinated convex functions, *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences,* Accepted.

[4] S.S. Dragomir, On Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane, *Taiwanese Journal of Math.*, 5, 2001, 775-788.

[5] D. Y. Hwang, K. L. Tseng and G. S. Yang, Some Hadamard's inequalities for co-ordinated convex functions in a rectangle from the plane, *Taiwanese Journal of Mathematics,* 11 (2007), 63-73.

[6] M.E. Özdemir, H. Kavurmacı, A.O. Akdemir and M. Avcı, Inequalities for convex and $s-$convex functions on $\Delta = [a, b] \times [c, d]$, Submitted.

[7] M.E. Özdemir, A.O. Akdemir and H. Kavurmacı, On the Simpson's inequality for co-ordinated convex functions, Submitted.

[8] M.K. Bakula, M.E. Özdemir and J. Pečarić, Hadamard-type inequalities for $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 9, (4), (2007), Article 96.

[9] M.K. Bakula, J. Pečarić and M. Ribibić, Companion inequalities to Jensen's inequality for $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 7 (5) (2006), Article 194.

[10] S.S. Dragomir and G. Toader, Some inequalities for $m-$convex functions, Studia University Babes Bolyai, *Mathematica*, 38 (1) (1993), 21-28.

[11] V.G. Miheşan, A generalization of the convexity, *Seminar of Functional Equations, Approx. and Convex*, Cluj-Napoca (Romania) (1993).

[12] G. Toader, Some generalization of the convexity, *Proc. Colloq. Approx. Opt.*, Cluj-Napoca, (1984), 329-338.

[13] E. Set, M. Sardari, M.E. Ozdemir and J. Rooin, On generalizations of the Hadamard inequality for $(\alpha, m)-$convex functions, *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 12 (4) (2009), Article 4.

[14] M.E. Özdemir, M. Avcı and E. Set, On some inequalities of Hermite-Hadamard type via $m-$convexity, *Applied Mathematics Letters*, 23 (2010), 1065-1070.

[15] G. Toader, On a generalization of the convexity, *Mathematica*, 30 (53) (1988), 83-87.

[16] S.S. Dragomir, On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for $m-$convex functions, *Tamkang Journal of Mathematics*, 33 (1) (2002).

[17] E. Set, M.E. Özdemir and S.S. Dragomir, On the Hermite-Hadamard Inequality and Other Integral Inequalities Involving Two Functions, *J. Inequal. Appl.*, 2010, Article ID 148102.

[18] M.E. Özdemir, H. Kavurmacı and E. Set,Ostrowski's Type Inequalities for $(\alpha, m)-$Convex Functions, *Kyungpook Math. J.*, 50, 371-378, (2010).

[19] M.E. Özdemir, Merve Avcı and Havva Kavurmacı, Hermite-Hadamard Type Inequalities via $(\alpha, m)-$convexity, *Computers & Mathematics with Applications*, Volume 61, Issue 9, (2011), 2614-2620.

[1]Ağri İbrahim Çeçen University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, Ağri-TURKEY
E-mail address: ahmetakdemir@agri.edu.tr, alperekinci@hotmail.com

[2]Atatürk University, K.K.E.F., Department of Mathematics, Erzurum-TURKEY
E-mail address: emos@atauni.edu.tr

SOME EXTENSIONS OF THE HARDY–LITTLEWOOD INEQUALITIES FOR HARMONIC FUNCTIONS

K. AVETISYAN AND Y. TONOYAN

Let $B_n (n \geq 2)$ be the open unit ball in $\mathbb{R}^n$, and $h(p,q,\alpha)$ $\big(0 < p, q \leq \infty,$ $\alpha > 0\big)$ be the space of those functions $u(x)$ harmonic in B_n, for which the quasi-norm

$$\|u\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(u;r)\,dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{0<r<1} (1-r)^{\alpha} M_p(u;r), & q = \infty, \end{cases}$$

is finite. Here $M_p(u;r)$ is the pth integral mean of u over the sphere $|x| = r$. For holomorphic functions in the unit disc $\mathbb{D}$ these (mixed norm) spaces were introduced by Hardy and Littlewood, see, for example, Duren's book "Theory of H^p Spaces". Hardy and Littlewood gave a sharp comparison of growth of means $M_p(u;r)$ for different indices p. In particular, if for a holomorphic function f in $\mathbb{D}$

$$M_p(f;r) = O\left((1-r)^{-\alpha}\right),\ \alpha \geq 0, \quad \text{then} \quad M_{p_0}(f;r) = O\left((1-r)^{-\alpha + 1/p - 1/p_0}\right),$$

for any $p_0 > p$. By proving some continuous inclusions for mixed norm spaces $h(p,q,\alpha)$, we have extended the latter and some other estimates of Hardy and Littlewood to harmonic functions in the ball B_n.

Theorem. For any $\alpha > 0$, $0 < p, q \leq \infty$, the following inclusions are continuous:

$$(a) \quad h(p,q,\alpha) \subset h\left(p_0, q, \alpha + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right), \quad 0 < p < p_0 \leq \infty,$$

$$(b) \quad h^p \subset h\left(p_0, \infty, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right), \quad 0 < p < p_0 \leq \infty,$$

$$(c) \quad h^p \subset h\left(p_0, q, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right), \quad 1 < p < p_0 \leq \infty,\ p \leq q \leq \infty.$$

K. Avetisyan, Y. Tonoyan
Yerevan State University
E-mail address: avetkaren@ysu.am, elenatonoyan@gmail.com

COMPLETENESS OF SYSTEMS OF ROOT FUNCTIONS OF WELL-POSED BOUNDARY PROBLEMS FOR THE OPERATOR TWO-FOLD DIFFERENTIATION

B.E. KANGUZHIN, D.B. NURAKHMETOV

In (see [1]) proved the following statement

Theorem (M. Otelbaev) a) For any choice of functions $\sigma_\nu(x), \nu = 1, 2$ from the space $L_2(0, 1)$ to the nonlocal boundary value problem

$$-y''(x) = f(x), 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y^{(\nu-1)}(0) - \int_0^1 (-y''(x))\overline{\sigma_\nu(x)}dx = 0, \nu = 1, 2. \tag{2}$$

in the space $L_2(0, 1)$ corresponds to the operator $L_{\sigma_1\sigma_2}$, where $L_{\sigma_1\sigma_2}$ has completely continuous inverse of $L^{-1}_{\sigma_1\sigma_2}$.

b) Assume that a nonhomogeneous equation (1) with some additional conditions for any right side $f(x) \in L_2(0, 1)$ has a unique solution $y(x)$ in the space $W_2^2[0, 1]$, where $y(x)$ has the a priori estimate

$$\| y \|_{L_2(0,1)} \leq c \| f \|_{L_2(0,1)}$$

Then there exists a unique set of functions $\{\sigma_\nu(x)\}, \nu = 1, 2$ from the space $L_2(0, 1)$ that the additional conditions are equivalent to (2).

We investigate the completeness of systems of root functions generated by the operator $L_{\sigma_1\sigma_2}$. Let $\sigma_1(\cdot)$, $\sigma_2(\cdot)$ be arbitrary functions from the functional space $L_2(0,\ 1)$. We introduce the entire functions with respect to λ

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda A + \lambda^2 \int_0^1 \frac{sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} K(t)dt,$$

$$\kappa_1(x, \lambda) = cos\sqrt{\lambda}x - \lambda \int_0^1 \frac{sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma_2(t)}dt,$$

$$\kappa_2(x, \lambda) = \frac{sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} - \lambda \int_0^1 \frac{sin\sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma_1(t)}dt,$$

where

$$K(t)=\int_t^1\left(\overline{\sigma_1(x)}+(x-t)\overline{\sigma_2(x)}-\overline{\sigma_1(x)}\,\overline{\sigma_2(x-t)}\right)dx+$$
$$\int_0^{1-t}\overline{\sigma_1(x)}\,\overline{\sigma_2(x+t)}dx,$$

$$A=\int_0^1\overline{\sigma_1(x)}dx+\int_0^1 x\,\overline{\sigma_2(x)}dx.$$

Denote by $\Lambda=\{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\dots\}$ sequence of zeros of entire functions $\Delta(\lambda)$. Each zero of λ_s function $\Delta(\lambda)$ has a some multiplicity m_s.We introduce three the system of functions

$$Y^{(\nu)}_{\sigma_1\sigma_2}=\{\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\kappa_\nu(x,\lambda)}{\partial\lambda^j}\bigg|_{\lambda=\lambda_s}:\nu=1,\,2,\,j=\overline{0,m_s-1},\lambda_s\in\Lambda\},$$

$$Y_{\sigma_1\sigma_2}=Y^{(1)}_{\sigma_1\sigma_2}\bigcup Y^{(2)}_{\sigma_2\sigma_2}.$$

Note that the system of functions $Y_{\sigma_1\sigma_2}$ is a system of root functions of operator of two-fold differentiation, where the functions $\sigma_1(\cdot)$, $\sigma_2(\cdot)$ are boundary functions. In the case of the operator of differentiation as the system of root functions arises a system of exponentials that studied in detail in (see [2]) . Let us formulate the main results in works.

Theorem 1. *The system of function $Y^{(1)}_{\sigma_1\sigma_2}$ is complete in the functional space $L_2(0,\,1)$ if the following conditions*
1) family of functions $\{D(t,\cdot)\,:\,t\in(0,\,1)\}$ is dense in $L_2(0,\,1)$, where $\{D(t,\cdot):0\le t\le 1\}$

$$0\le t\le\frac{1}{2},\;D(t,x)=\begin{cases}\sigma_2(x+t), & 0\le x\le t;\\ 1-\sigma_2(x-t)+\sigma_2(x+t), & t<x\le 1-t;\\ 1-\sigma_2(x-t), & 1-t<x\le 1.\end{cases}$$

$$1\ge t\ge\frac{1}{2},\;D(t,x)=\begin{cases}\sigma_2(x+t), & 0<x\le 1-t;\\ 0, & 1-t<x\le t;\\ 1-\sigma_2(x-t), & t<x\le 1.\end{cases}$$

2) for some $\varepsilon>0$ the boundary function $\sigma_1(\cdot)$ from the space $W_2^1([0,\,\varepsilon]\cup[1-\varepsilon,\,1])\cap L_2(0,\,1)$, the boundary function $\sigma_2(\cdot)\in W_2^2([0,\,\varepsilon]\cup[1-\varepsilon,\,1])\cap W_2^1[0,\,1]$, and $-\overline{\sigma_1(1)}+\overline{\sigma_1(1)}\,\overline{\sigma_2(0)}-\overline{\sigma_1(0)}\,\overline{\sigma_2(1)}\ne 0$.

Theorem 2. *The system of function $Y^{(2)}_{\sigma_1\sigma_2}$ is complete in the functional space $L_2(0,\,1)$ if the following conditions*
1) family of functions $\{B(t,\cdot)\,:\,t\in(0,\,1)\}$is dense in $L_2(0,\,1)$, where

$\{B(t,\cdot):0\le t\le 1\}$

$$0\le t\le \frac{1}{2},\ B(t,x)=\begin{cases} -\sigma_1(x-t)+\sigma_1(x+t), & 0\le x\le t;\\ x-t+\sigma_1(x+t), & t<x\le 1-t;\\ x-t, & 1-t<x\le 1.\end{cases}$$

$$1\ge t\ge \frac{1}{2},\ B(t,x)=\begin{cases} \sigma_1(x+t)-\sigma_1(x-t), & 0\le x\le 1-t;\\ -\sigma_1(x-t), & 1-t<x\le t;\\ x-t, & t<x\le 1.\end{cases}$$

2) for some $\varepsilon>0$ *the boundary function* $\sigma_1(\cdot)$ *from the space* $W_2^1([0,\,\varepsilon]\cup[1-\varepsilon,\,1])\cap L_2(0,\,1)$, *the boundary function* $\sigma_2(\cdot)\in W_2^2([0,\,\varepsilon]\cup[1-\varepsilon,\,1])\cap W_2^1[0,\,1]$, *and* $-\overline{\sigma_1(1)}+\overline{\sigma_1(1)}\,\overline{\sigma_2(0)}-\overline{\sigma_1(0)}\,\overline{\sigma_2(1)}\ne 0$.

Theorem 3. *If the following conditions*
1) family of functions $\{B(t,\cdot),D(t,\cdot):0\le t\le 1\}$ *is dense in the functional space* $L_2(0,1)$.
2) for some $\varepsilon>0$ *the boundary function* $\sigma_1(\cdot)$ *from the space* $W_2^1([0,\,\varepsilon]\cup[1-\varepsilon,\,1])\cap L_2(0,\,1)$, *the boundary function* $\sigma_2(\cdot)\in W_2^2([0,\,\varepsilon]\cup[1-\varepsilon,\,1])\cap W_2^1[0,\,1]$, *and* $-\overline{\sigma_1(1)}+\overline{\sigma_1(1)}\,\overline{\sigma_2(0)}-\overline{\sigma_1(0)}\,\overline{\sigma_2(1)}\ne 0$ *then system of functions* $Y_{\sigma_1\sigma_2}$ *is dense in the functional space* $L_2(0,1)$

References

[1] *Otelbaev M.O., Shynybekov A.N.* Well-posed problems of Bitsadze-Samarskii type // (Russian) Dokl. Akad.Nauk SSSR, 265(1982), no.4, 815-819.

[2] *Sedletskii A.M.* Biorthogonal expansions of functions in exponential series on intervals of the real axis // J. Uspekhi Mat. Nauk (Russian), 1982, T.37, V.5(227), pp.51-95 [English translation: Russian Mathematical Surveys , 1982, 37:5, 57-108]

Baltabek Esmatovich Kanguzhin
Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan
E-mail address: kanbalta@mail.ru

Daulet Bagdatovich Nurakhmetov
Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan
E-mail address: dauletkaznu@gmail.com

ON A CLASS OF BOUNDED ANALYTIC FUNCTION

S. A. MAKHMUTOV

The topic I am going to talk about is a collection of some results on functions with given behavior of the hyperbolic derivative.

In this talk bounded function always means an analytic function φ on the unit disk $D = \{|z| < 1\}$ such that $|\varphi(z)| < 1$ as $z \in D$. We say that $\varphi \in B$.

Note the following.

Let $\rho(a, b) = \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|$, $a, b \in D$, denote the pseudohyperbolic distance between a and b, and let $\sigma(a, b) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho(a,b)}{1-\rho(a,b)}$ denote the hyperbolic distance on D.

Let

$$\varphi^\star(z) = \frac{|\varphi'(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2} = \lim_{w \to z} \frac{\sigma(\varphi(w), \varphi(z))}{|z - w|}$$

be the hyperbolic derivative of φ.

Let $p > 1$. We say that $\varphi \in B_p^h$ if

$$\|\varphi\|_{B_p^h}^p = \iint_D (1 - |z|^2)^{p-2} (\varphi^\star(z))^p dA(z) < \infty$$

where $dA(z) = dxdy$ if $z = x + iy$. Classes B_p^h are known as hyperbolic Besov classes. A few examples of such functions were given in [1] and [2].

It is known [1] that $B_p^h \subset B_q^h$ as $p < q$.

Theorem 1. *Classes B_p^h, $p > 1$, are convex sets.*

Theorem 2. *Classes B_p^h, $p > 1$, are closed under multiplication.*

B_p^h is not a linear space. However one can define a natural metric on B_p^h like it was done by Yamashita [3] for hyperbolic Hardy classes or by Pérez-González, Rättyä, Taskinen [4] for hyperbolic Q classes.

The research is supported by IG/SCI/DOMS/10/04.

Let

$$d(\varphi,\psi;B_p^h) := d_{B_p^h}(\varphi,\psi) + \|\varphi-\psi\|_{B_p} + |\varphi(0)-\psi(0)|$$
$$:= \left(\iint\limits_D \left|\frac{\varphi'(z)}{1-|\varphi(z)|^2} - \frac{\psi'(z)}{1-|\psi(z)|^2}\right|^p (1-|z|^2)^{p-2}\, dA(z)\right)^{1/p}$$
$$+ \|\varphi-\psi\|_{B_p} + |\varphi(0)-\psi(0)|$$

(Here $\|.\|_{B_p}$ is the norm of the analytic Besov spaces B_p.)

Theorem 3. *Class B_p^h, $p>1$, equipped with the metric $d(.,.;B_p^h)$ form a complete metric space.*

Theorem 4. [1] *$\varphi \in B_p^h$, $p>1$, if and only if*

$$\iint\limits_D \iint\limits_D \frac{\sigma(\varphi(w),\varphi(z))^p}{|1-z\bar{w})|^4} dA(z)dA(w) < \infty \ .$$

Every $\varphi \in B$ induces a linear composition operator C_φ from $H(D)$ onto itself as follows $C_\varphi f = f \circ \varphi$, where $f \in H(D)$.

Let $\mathcal{B}$ be the Bloch space and B_p be the analytic Besov space, $p>1$, see [5].

Theorem 5. [1],[2] *$\varphi \in B_p^h$, $p>1$, if and only if $C_\varphi : \mathcal{B} \to B_p$ is compact.*

References

[1] *Makhmutov S.* Hyperbolic Besov functions and Bloch-to-Besov composition operators // Hokkaido Math. Journal. **26**:3 (1997), 699–711.

[2] *Zhao R.* Composition operators from Bloch type spaces to Hardy and Besov spaces // J. Math. Anal. Appl. **233** (1999), 749-766.

[3] *Yamashita S.* Hyperbolic Hardy classes and hyperbolically Dirichlet-finite classes // Hokkaido Math. Journal. **10** (1981), 709–722.

[4] *Pérez-González F., Rättyä J., Taskinen J.* Lipschitz continuous and compact composition operators in hyperbolic classes // Mediterr. J. Math. **8** (2011), 123–135.

[5] *Zhu K.* Operator Theory on Function Spaces. AMS, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 138, 2007.

Shamil Makhmtuov
Sultan Qaboos University, Oman
E-mail address: shmakhm@gmail.com

ON NEWMAN CONJECTURE

J.I. MAMEDKHANOV

In connection with Jackson's theorem that says:
If $f \in Lip_{[-1,1]}1$, then $E_n(f,[-1,1]) \leq \frac{const}{n}$.
Newman stated the following problem:
What necessary and sufficient conditions should satisfy the arc Γ in the complex plane in order Jackson's theorem be valid on it. And denote by J a class of arcs Γ on which Jackson's theorem is valid.

Furthermore, Newman stated the conjecture: the class of smooth arcs C' coincide with J, i.e. $C' = J$. Newman's conjecture was solved in the papers of J.I.Mamedkhanov and V.V.Maimeskul. Mamedkhanov considered the class of arcs Γ for which the function $\psi(w)$ mapping the exterior of a unit circle γ_0 onto the exterior of Γ belongs to the Hölder class of order 1 on the unit circle γ_0, i.e. $H'(\gamma_0)$, and shoved if we denote this class by M, then $M \subset J$. Maimeskul shoved the inverse imbedding. Thus, $M = J$.

With respect to Newman's conjecture, in 1975 Mamedkhanov shoved that there is exists a smooth arc Γ that doesn't belong to the class J. Such rather simple and similar example was constructed by Andriyevsky. These examples show that $C' \overline{\subset} J$.

In the present report the class M is studied and non-smooth arc Γ that belongs to the class M is constructed, i.e. the relation $J \overline{\subset} C'$ is valid. Thus, Newman's conjecture is not valid on either side.

Jamal Islamovich Mamedkhanov
Baku State University, Azerbaijan
E-mail address: jamalmamedkhanov@rambler.ru

SOME NEW ČEBYŠEV TYPE INEQUALITIES FOR FUNCTIONS WHOSE DERIVATIVES BELONGS TO L_p SPACES

M. EMIN ÖZDEMİR[2], ERHAN SET[3], AHMET OCAK AKDEMİR[1] AND M. ZEKI SARIKAYA[3]

In this paper, we obtain some new Čebyšev type inequalities for functions whose derivatives belongs to L_p spaces which are similar to Pachpatte's results (see [1]). These results are more general results and give some new estimations.

References

[1] B.G. Pachpatte, On Čebyšev type inequalities involving functions whose derivatives belong to L_p spaces, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol. 7, Issue 2, Article 58, 2006.
[2] P.L. Čebyšev, Sur les expressions approximatives des integrales par les auters prises entre les memes limites, Proc. Math. Soc. Charkov, 2, 93-98, 1882.
[3] H.P. Heinig and L. Maligranda, Chebyshev inequality in function spaces, Real Analysis Exchange, 17, 211-247, 1991-92.
[4] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić and A.M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
[5] B.G. Pachpatte, On Ostrowski-Grüss-Čebyšev type inequalities for functions whose modulus of derivatives are convex, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol. 6, Issue 4, Article 128, 2005.
[6] M. Z. Sarikaya, A. Saglam, and H. Yildirim, On generalization of Cebysev type inequalities, Iranian J. of Math. Sci. and Inform., 5(1), 2010, pp. 41-48.
[7] E. Set, M. Z. Sarikaya and F. Ahmad, A generalization of Chebychev type inequalities for first differentiable mappings, Miskolc Mathematical Notes, in press.
[8] S.S. Dragomir, P. Cerone and J. Roumeliotis, A new generalizations of Ostrowski's integral inequality for mappings whose derivatives are bounded and applications in numerical integration and for special means, RGMIA Res. Rep. Coll. 2 (1), 1999.

[1]Ağri İbrahim Çeçen University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, Ağri-TURKEY
E-mail address: ahmetakdemir@agri.edu.tr

[2]Atatürk University, K.K.E.F., Department of Mathematics, Erzurum-TURKEY
E-mail address: emos@atauni.edu.tr

[3]Düzce University, Faculty of Science and Arts, Department of Mathematics, Konuralp Campus, Düzce-TURKEY
E-mail address: erhanset@yahoo.com, sarikayamz@gmail.com

INTEGRAL INEQUALITIES FOR SOME CONVEX FUNCTIONS

M. EMIN ÖZDEMİR[2] AND AHMET OCAK AKDEMİR[1]

In this paper, we established some new integral inequalities for different kinds of convex functions by using some classical inequalities.

References

[1] M.E. Özdemir, E. Set, M.Z. Sarıkaya, Some new Hadamard's type inequalities for co-ordinated $m-$convex and $(\alpha,m)-$convex functions, *Hacettepe J. of. Math. and Ist.*, 40, 219-229, (2011).

[2] M.K. Bakula, M.E. Özdemir and J. Pečarić, Hadamard-type inequalities for $m-$convex and $(\alpha,m)-$convex functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 9, (4), (2007), Article 96.

[3] M.K. Bakula, J. Pečarić and M. Ribibić, Companion inequalities to Jensen's inequality for $m-$convex and $(\alpha,m)-$convex functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 7 (5) (2006), Article 194.

[4] S.S. Dragomir and G. Toader, Some inequalities for $m-$convex functions, Studia University Babes Bolyai, *Mathematica*, 38 (1) (1993), 21-28.

[5] V.G. Miheşan, A generalization of the convexity, *Seminar of Functional Equations, Approx. and Convex*, Cluj-Napoca (Romania) (1993).

[6] G. Toader, Some generalization of the convexity, *Proc. Colloq. Approx. Opt.*, Cluj-Napoca, (1984), 329-338.

[7] E. Set, M. Sardari, M.E. Ozdemir and J. Rooin, On generalizations of the Hadamard inequality for $(\alpha,m)-$convex functions, *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 12 (4) (2009), Article 4.

[8] M.E. Özdemir, M. Avcı and E. Set, On some inequalities of Hermite-Hadamard type via $m-$convexity, *Applied Mathematics Letters*, 23 (2010), 1065-1070.

[9] G. Toader, On a generalization of the convexity, *Mathematica*, 30 (53) (1988), 83-87.

[10] S.S. Dragomir, On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for $m-$convex functions, *Tamkang Journal of Mathematics*, 33 (1) (2002).

[11] H. Hudzik, L. Maligranda, Some remarks on $s-$convex functions, *Aequationes Math.*, 48 (1994) 100–111.

[12] W.W. Breckner, Stetigkeitsaussagen f¨ur eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen, *Pupl. Inst. Math.*, 23 (1978) 13–20.

[13] W.W. Breckner, Continuity of generalized convex and generalized concave set-valued functions, *Rev Anal. Num ´er. Thkor. Approx.*, 22 (1993) 39–51.

[14] S. Hussain, M.I. Bhatti and M. Iqbal, Hadamard-type inequalities for $s-$convex functions, Punjab University, *Journal of Mathematics*, 41 (2009) 51-60.

[15] S.S. Dragomir and S. Fitzpatrick, The Hadamard's inequality for $s-$convex functions in the second sense, *Demonstratio Math.*, 32 (4) (1999) 687-696.

[16] U. S. Kırmacı, M. K. Bakula, M. E. Özdemir and J. Pečarić, Hadamard-type inequalities for $s-$convex functions, *Applied Mathematics and Computation*, 193 (2007) 26-35.

[1]Ağri İbrahim Çeçen University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, Ağri-TURKEY

E-mail address: ahmetakdemir@agri.edu.tr

[2]Atatürk University, K.K.E.F., Department of Mathematics, Erzurum-TURKEY

E-mail address: emos@atauni.edu.tr

NEW HADAMARD-TYPE INEQUALITIES FOR $m-$CONVEX AND $(\alpha, m)-$CONVEX FUNCTIONS

M. EMIN ÖZDEMİR[2], AHMET OCAK AKDEMİR[1] AND ERHAN SET[3]

In this paper some new inequalities are presented related to right hand side of Hermite-Hadamard inequality for the classes of functions whose derivatives of absolute values are $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex.

References

[1] M. Alomari, M. Darus and U.S. Kırmacı, Refinements of Hadamard-type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means, *Computers and Mathematics with Applications,* 59 (2010), 225-232.

[2] C.E.M. Pearce and J. Pečarić, Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae, *Appl. Math. Lett.*, 13(2) (2000), 51–55.

[3] M.K. Bakula, M.E. Özdemir and J. Pečarić, Hadamard-type inequalities for $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 9, (4), (2007), Article 96.

[4] M.K. Bakula, J. Pečarić and M. Ribibić, Companion inequalities to Jensen's inequality for $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 7 (5) (2006), Article 194.

[5] S.S. Dragomir and G. Toader, Some inequalities for $m-$convex functions, Studia University Babes Bolyai, *Mathematica*, 38 (1) (1993), 21-28.

[6] V.G. Miheşan, A generalization of the convexity, *Seminar of Functional Equations, Approx. and Convex*, Cluj-Napoca (Romania) (1993).

[7] G. Toader, Some generalization of the convexity, *Proc. Colloq. Approx. Opt.*, Cluj-Napoca, (1984), 329-338.

[8] E. Set, M. Sardari, M.E. Özdemir and J. Rooin, On generalizations of the Hadamard inequality for $(\alpha, m)-$convex functions, *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 12 (4) (2009), Article 4.

[9] M.E. Özdemir, M. Avcı and E. Set, On some inequalities of Hermite-Hadamard type via $m-$convexity, *Applied Mathematics Letters*, 23 (2010), 1065-1070.

[10] G. Toader, On a generalization of the convexity, *Mathematica*, 30 (53) (1988), 83-87.

[11] S.S. Dragomir, On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for $m-$convex functions, *Tamkang Journal of Mathematics*, 33 (1) (2002).

[12] M.E. Özdemir, H. Kavurmaci, E. Set, Ostrowski's type inequalities for $(\alpha, m)-$convex functions, *Kyungpook Math. J.* 50 (2010) 371–378.

[13] H. Kavurmaci, M. Avci, M.E. Özdemir, New Ostrowski type inequalities for $m-$convex functions and applications, accepted.

[14] M.Z. Sarıkaya, E. Set, M.E. Özdemir, Some new Hadamard's type inequalities for co-ordinated $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, *Hacettepe J. of. Math. and Ist.*, 40, 219-229, (2011).

[15] M.Z. Sarıkaya, M.E. Özdemir and E. Set, Inequalities of Hermite–Hadamard's type for functions whose derivatives absolute values are $m-$convex, *RGMIA Res. Rep. Coll.* 13 (2010) Supplement, Article 5.

[16] M.E. Özdemir, M. Avcı and H. Kavurmacı, Hermite–Hadamard-type inequalities via $(\alpha, m)-$convexity, *Computers and Mathematics with Applications*, 61 (2011), 2614–2620.

[17] S.S. Dragomir and R.P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Appl. Math. Lett. 11 (5), 91-95, (1998).

[1]Ağri İbrahim Çeçen University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, Ağri-TURKEY

E-mail address: ahmetakdemir@agri.edu.tr

[2]Atatürk University, K.K.E.F., Department of Mathematics, Erzurum-TURKEY
E-mail address: emos@atauni.edu.tr

[3]Düzce University, Faculty of science and Arts, Department of Mathematics, Konuralp Campus, Düzce-TURKEY
E-mail address: erhanset@yahoo.com

ON CONSTRUCTING MULTIPLE KNOT B-SPLINE WAVELETS ON A BOUNDED INTERVAL

A. TAVAKOLI, F. POURAKBARI

The construction of semi-orthogonal bases with multiple knots B-splines for non-Dirichlet boundary value problems has been investigated by some researchers. In addition, we present a method for solving the system discretized by Galerkin method with multiple knots B-splines.
Solving boundary value problems by Galerkin methods lead to very large systems $Ax = b$. Then, for numerical implementation, it is necessary to generate a sparse matrix A. In order to do this, the basis functions with local support would be suitable. In particular, orthonormal basis functions with local support decrease the expenses of numerical implementation. However, construction of orthonormal basis functions with local support is not easy. Although, Daubechies et. al in [3] have given such basis functions in wavelet space, but there is no still explicit formulas. Then, the scientists have tried to construct semi-orthogonal basis wavelets with local support and explicit formulas. This can be done by multiple knot B-splines (see [1] and [2]). In this work, by multiple knot B-spline functions, we construct the wavelets that satisfy in the (partially) Dirichlet boundary conditions. To this end, let $\psi_{j,i},\ i = -m+1, \cdots, 2^j - m$ and $B_{i,m,j},\ i = -m+1, \cdots, 2^j - 1$ be the multiple knot wavelet and B-spline basis functions of order m in the level j on the interval $[0, 1]$, respectively (see [1]). Now, we state the following theorem:

Theorem 1. *For $2^j \geq 2m - 1$, the wavelet basis $\psi^N_{j,i}$ in the level j by*

$$\psi^N_{j,i} := \begin{cases} \psi_{j,i} - \alpha_{j,i} B_{-m+1,m,j} & i = -m+1, \cdots, -1, \\ \psi_{j,i} & i = 0, \cdots, 2^j - 2m + 1, \\ \psi_{j,i} - \beta_{j,i} B_{2^j-1,m,j} & i = 2^j - 2m + 2, \cdots, 2^j - m, \end{cases}$$

satisfies in the homogenous Dirichlet boundary conditions where

$$\alpha_{j,i} := \frac{\psi_{j,i}(0)}{B_{-m+1,m,j}(0)}, \quad \beta_{j,i} := \frac{\psi_{j,i}(1)}{B_{2^j-1,m,j}(1)}.$$

In addition, by considering the structure of B-spline functions, it is seen that only the basis $B_{-m+1,m,j}$ and $B_{2^j-1,m,j}$ have m-tuple knot in $x = 0, 1$, respectively. This implies that

$$B_{-m+1,m,j}(0) \neq 0, \ B_{2^j-1,m,j}(1) \neq 0.$$

Hence, theses two functions do not satisfy in Dirichlet boundary conditions. Let V_j and W_j^N be the multiple knot B-spline and wavelet spaces, respectively. If we use the basis functions of $V_{j+1} = V_j \oplus W_j^N$, i.e.

$$\{B_{i,m,j}\}_{-m+1\leq i\leq 2^j-1} \cup \{\psi_{j,i}\}^N_{-m+1\leq i\leq 2^j-m}.$$

satisfying homogenous Dirichlet boundary conditions, we omit the multiple knot B-splines that are not zero on the boundaries.
We can generalize the above structure of multiple knot B-spline and wavelet basis functions by tensor product satisfying in the homogenous Dirichlet boundary conditions. On the other hand, the discretized system can be solved by the factorization LDL^T where L and D are the lower triangular and diagonal matrices.

References

[1] *Chui C. K. and Quak E.* Wavelet on a bounded interval, In: Braess D, Schumaker LL, editors. Numerical methods of approximation theory. Basel: Birkhauser Verlag; (1992) , 57–76.

[2] *Chen X., Xiang J., Li B. and He Z.* A study of multiscale wavelet-based elements for adaptive finite element analysis, Adv. Eng. Soft., 41(2010), 196–205.

[3] *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Comm. Pure Appl. Math., 41(1988), 909–996.

Ali Tavakoli
Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Iran
E-mail address: tavakoli@mail.vru.ac.ir

Fatemeh Pourakbari
Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Iran
E-mail address: f.pourakbari@stu.vru.ac.ir

ON ONE SPECIAL SOLUTION OF THE EISENHART EQUATION

Z. KH. ZAKIROVA

We continue studying the 6-dimensional pseudo-Riemannian space $V^6(g_{ij})$ with signature $[++----]$, which admits projective motions, i. e. continuous transformation groups preserving geodesics. The general method of determining pseudo-Riemannian manifolds that admit some nonhomothetic projective group G_r has been developed by A.V.Aminova (see [1]). A.V.Aminova has classified all the Lorentzian manifolds of dimension ≥ 3 that admit nonhomothetic projective or affine infinitesimal transformations. This problem is not solved for pseudo-Riemannian spaces with arbitrary signature. In the series of works, we investigate the 6-dimensional pseudo-Riemannian space $V^6(g_{ij})$ with signature $[++----]$. We use here is the method of the skew-normal frames and general approach to investigation of projective motions of pseudo-Riemannian manifolds due to A. V. Aminova.

Let me remind that vector field X on a pseudo-Riemannian manifold (M,g) is an infinitesimal projective transformation if and only if (see [2])

$$L_X g = h, \tag{1}$$

generalized Killing equation

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi, \tag{2}$$

Eisenhart equation

where $(Y,Z,W) \in T(M)$, $\varphi = \frac{1}{n+1}\mathrm{div}X$.

In order to find a pseudo-Riemannian space admitting a nonhomothetic infinitesimal projective transformation, one needs to integrate the Eisenhart equation, which, in the skew-normal frames, is of the form (see [1])

(3)

$$X_r\overline{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h(\overline{a}_{hq}\gamma_{\tilde{h}pr} + \overline{a}_{ph}\gamma_{\tilde{h}qr}) = \overline{g}_{pr}X_q\varphi + \overline{g}_{qr}X_p\varphi \quad (p,q,r=1,\dots,n),$$

where

$$X_r\varphi \equiv \underset{r}{\xi}^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \quad \gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \underset{p}{\xi}_{\,i,j}\underset{q}{\xi}^i\underset{r}{\xi}^j, \quad a_{ij} = h_{ij} - 2\varphi g_{ij},$$

The research is supported by RFBR (grant 10-02-00509).

$\underset{i}{\xi}^j$ are the components of skew-normal frames, $\overline{g}_{pr}$ and $\overline{a}_{pq}$ are the canonical forms of the tensors g_{pr}, a_{pq}, respectively.

Let us introduce the following definitions.

Definition 1. Pseudo-Riemannian manifolds for which there exist non-trivial solutions $h \neq cg$ to the Eisenhart equation are called h-spaces.

The problem of determining such spaces depends on the type of h-space, i. e. on the type of the bilinear form $L_X g$ determined by the characteristic of the λ-matrix $(h - \lambda g)$. If the Segre characteristics of the tensor $L_X g$ is $[abc...]$, we call the corresponding h-space the space of $[abc...]$ type. The number of possible types depends on the dimension and the signature of the pseudo-Riemannian space.

In this note we find a metrics h-spaces of the $[(21\dots1)(21\dots1)\dots(1\dots1)]$ type. In particular h-space of the $[22(11)]$ type, integrating the system of equations (3) we come to the following

Theorem 1. *If a symmetric tensor h_{ij} of the characteristics $[22(11)]$ and a function φ satisfy in $V^6(g_{ij})$ equation (2), then there exists a holonomic coordinate system so that the function φ and the tensors g_{ij}, h_{ij} are defined by the formulas*

(4) $$g_{ij}dx^i dx^j = e_2 A(f_4 - f_2)\{(f_4 - f_2)dx^1dx^2 - A(dx^2)^2)\}+$$
$$e_4\tilde{A}(f_2 - f_4)\{(f_2 - f_4)dx^3dx^4 - \tilde{A}(dx^4)^2\} + F_{\sigma\tau}(f_2 - \lambda)^2(f_4 - \lambda)^2 dx^\sigma dx^\tau,$$

(5)
$$a_{ij}dx^i dx^j = f_2 g_{i_1 j_1}dx^{i_1}dx^{j_1} + A g_{12}(dx^2)^2 + f_4 g_{i_2 j_2}dx^{i_2}dx^{j_2} + \tilde{A}g_{34}(dx^4)^2 + \lambda g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau,$$

(6) $$h_{ij} = a_{ij} + 2\varphi g_{ij}, \quad 2\varphi = 2f_2 + 2f_4 + c,$$

(7) $$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon}x^3 + \omega(x^4),$$

where $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, $f_2 = \epsilon x^2$, $f_4 = \tilde{\epsilon}x^4 + a$, λ, c and a are some constants, $a \neq 0$ when $\tilde{\epsilon} = 0$, $F_{\sigma\tau}(x^5, x^6), \theta(x^2), \omega(x^4)$ are arbitrary functions, $\theta \neq 0$ when $\epsilon = 0$, $\omega \neq 0$ when $\tilde{\epsilon} = 0$, $i_1, j_1 = 1, 2$, $i_2, j_2 = 3, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6$, $e_2, e_4 = \pm 1$.

References

[1] *A.V. Aminova* Lie algebras of infinitesimal projective transformations of Lorentz manifolds (in Russian) // Uspekhi Mat. Nauk **50** (1995), no. 1(301), 69-142.

[2] *L.P. Eizenhart* Riemannian geometry, Princeton University Press,1997.

Zolfira Khapisovna Zakirova
Kazan State Energy University, Russia
E-mail address: zolya_zakirova@mail.ru

AN EFFICIENT NUMERICAL METHOD FOR PARABOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

R. ZOLFAGHARI, S. GHASEMI

Parabolic partial differential equations with nonlinear boundary conditions appear in several branches of applied mathematics. In this paper, we consider the problem of determination of the function u in the following parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=q(x,t), \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

subject to the initial condition

$$u(x,0)=f(x), \qquad 0<x<1, \tag{2}$$

and the nonlinear boundary conditions

$$u_x(0,t)=F(t,u(0,t)), \qquad 0<t\leq T, \tag{3}$$

$$u_x(1,t)=G(t,u(1,t)), \qquad 0<t\leq T, \tag{4}$$

where $Q_T=\{(x,t)|x\in(0,1),t\in(0,T]\}$, and q,f,F and G are known functions.

We change the problem to a system of two nonlinear Volterra integral equations of convolution type as following

$$\varphi(t)=w(0,t)-2\int_0^t\theta(0,t-\tau)F(\tau,\varphi(\tau))d\tau+2\int_0^t\theta(-1,t-\tau)G(\tau,\psi(\tau))d\tau, \tag{5}$$

$$\psi(t)=w(1,t)-2\int_0^t\theta(1,t-\tau)F(\tau,\varphi(\tau))d\tau+2\int_0^t\theta(0,t-\tau)G(\tau,\psi(\tau))d\tau, \tag{6}$$

where

$$w(x,t)=\int_0^1 G(x,t,\zeta,0)f(\zeta)d\zeta+\int_0^t\int_0^1 G(x,t,\zeta,\tau)q(\zeta,\tau)d\zeta d\tau,$$

$$G(x,t,\zeta,\tau)=\theta(x-\zeta,t-\tau)+\theta(x+\zeta,t-\tau),$$

and

$$\theta(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}exp\{-\frac{(x+2n)^2}{4t}\}.$$

So, by solving the system of nonlinear Volterra integral equations (5) and (6) , we obtain $\varphi(t)$ and $\psi(t)$, then, we may write [1]
(7)

$$u(x,t) = w(x,t) - 2\int_0^t \theta(x, t-\tau)F(\tau, \varphi(\tau))d\tau + 2\int_0^t \theta(x-1, t-\tau)G(\tau, \psi(\tau))d\tau.$$

By using Sinc-collocation method [2], the resulting integral equations are replaced by a system of nonlinear algebraic equations. The error analysis is included, and it is shown that the error in the approximate solution is bounded in the infinity norm by a factor that decays exponentially with the size of the system. Some examples are considered to illustrate the ability of this method.

References

[1] J.R. Cannon, The One-Dimensional heat equation, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 23, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.

[2] F. Stenger, Numerical methods based on Sinc and analytic functions, Springer, New York, 1993.

Reza Zolfaghari
Kazeroun Higher Education Complex, Kazeroun, Iran
E-mail address: rzolfaghari@iust.ac.ir

Samira Ghasemi
Kazeroun Higher Education Complex, Kazeroun, Iran
E-mail address: samiraghasemi@yahoo.com

О РАЗМЕРНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Г. Л. Алфимов, М. А. Кузьмин

Нелинейное волновое уравнение (НВУ), $u_{tt} - u_{xx} + F(u) = 0$, является одним из классических уравнений теории нелинейных волн. Многочисленные приложения НВУ обусловлены достаточно типичным сочетанием модельной (квадратичной) дисперсии и нелинейности. Учет более сложного (не квадратичного) закона дисперсии в физических задачах такого рода приводит к замене оператора d^2/dx^2 в НВУ псевдодифференциальным оператором. Возникающее при этом уравнение имеет вид

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x')u_{x'}(t,x')\,dx' + F(u) = 0. \tag{1}$$

В частности, необходимость такой коррекции дисперсионного члена возникает в ряде задач нелокальной джозефсоновской электродинамики (см., напр., обзор [1]). При этом $F(u) = \sin u$, а тип ядра $G(\xi)$ определяется геометрией джозефсоновского перехода и физическими свойствами сверхпроводящих контактов.

Ограничимся классом решений уравнения (1) типа бегущих волн, $u(z) \equiv u(x - ct)$ и так называемыми ядрами E-типа

$$G(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \varkappa_j e^{-\eta_j|\xi|}, \qquad 0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_N, \tag{2}$$

где $\varkappa_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$. В этом случае возможно записать автономную систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{u}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2N+2}, \tag{3}$$

такую, что каждое решение вида $u(z) \equiv u(x - ct)$ нелокального уравнения (1) сопоставляется с единственным решением системы (3). С другой стороны, тем и только тем решениям системы (3), которые удовлетворяют условию достаточно медленного роста, $\|\mathbf{u}(z)\| \le M_0 e^{\Omega|z|}$, $\Omega < \eta_1$, соответствуют решения типа бегущих волн уравнения (1).

Оказывается, что справедлив следующий результат:

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*

(NL1): существует такая константа ζ, что при любых $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ выполняется условие $|F(u_1) - F(u_2)| \le \zeta|u_1 - u_2|$;

(NL2): существует константа F_0 такая, что $|F(u)| \le F_0$;

(C1): с удовлетворяет двойному неравенству $C_*^2 \le c^2 < 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\varkappa_j}{\eta_j}$ где C^* определяется параметрами η_j и $\varkappa_j$.

Тогда существует M_0, такое что:

(a) *матричное уравнение (3) допускает семейство решений W^+, непрерывно зависящее от $N+3$ свободных параметров, такое что при $z > 0$ и любом $\Omega > \frac{\eta_1}{2}$ для решений этого семейства справедливо неравенство $\|\mathbf{u}(z)\| \le M_0 e^{\Omega z}$. При этом не существует семейства решений уравнения (3), непрерывно зависящего от бóльшего, чем $N+3$ параметров, для которого бы выполнялось данное условие;*

(b) *матричное уравнение (3) допускает семейство решений W^-, непрерывно зависящее от $N+3$ свободных параметров, такое что при $z < 0$ и любом $\Omega > \frac{\eta_1}{2}$ для решений этого семейства $\|\mathbf{u}(z)\| \le M_0 e^{-\Omega z}$. При этом не существует семейства решений уравнения (3), непрерывно зависящего от бóльшего, чем $N+3$ параметров, для которого бы выполнялось данное условие.*

Решения, переходящие друг в друга при сдвиге по независимой переменной, при этом считаются различными.

В $2N+2$-мерном фазовом пространстве системы (3) семейства $W^{\pm}$ порождают инвариантные $N+2$-мерные многообразия. Их пересечение, если оно имеется, вообще говоря, четырехмерно. Таким образом, можно заключить, что *в случае общего положения решение типа бегущей волны уравнения (1) оказывается включено в четырехпараметрическое семейство решений этого уравнения, при том, что с и параметры ядра фиксированы.*

Факт пересечения многообразий $W^{\pm}$ и возможность продолжения соответствующего решения (1) внутри четырехпараметрического семейства решений уравнения (1) был проверен численно на примере ядра E-типа с двумя экспонентами, представляющего интерес для задач нелокальной джозефсоновской электродинамики.

Список литературы

[1] *Abdumalikov A.A. (Jr), Alfimov G.L., Malishevskii A.S.* Nonlocal electrodynamics of Josephson vortices in superconducting circuits// Supercond. Sci. Technol. **22** (2009), 023001.

Георгий Леонидович Алфимов
Московский институт электронной техники, Зеленоград, Москва
E-mail address: galfimov@yahoo.com

Максим Андреевич Кузьмин
Московский институт электронной техники, Зеленоград, Москва
E-mail address: maxlightning@yandex.ru

РАЗНОВИДНОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА

Р.А. Атнагулова

В теории интегрируемых дифференциальных уравнений важную роль играют уравнения Янга- Бакстера с квадратом (см.[1]), то есть уравнения

$$R([R(a),b]-[R(b),a])=R^2([a,b])+[R(a),R(b)], \tag{1}$$

где $a,b\in g$, g - алгебра Ли и R-линейный оператор пространства g. Для построения примеров операторов R в работе используются подалгебры Ли h в алгебре матриц, дополнительные к подпространству матриц с нулевой последней строкой. Приведены две серии примеров таких подалгебр h.

Список литературы

[1] *Голубчик И.З., Соколов В.В.* Ещё одна разновидность классического уравнения Янга-Бакстера // Функциональный анализ и его приложения. **34**:6 (2000), 75–78.

Рушания Ахъяровна Атнагулова
Башкирский Государственный Педагогический Университет им. М. Акмуллы
E-mail address: rushano4ka@mail.ru

СОЗДАНИЕ ЭЛЕТРОННЫХ ЗАЧЕТНЫХ КНИЖЕК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

П. С. Бабкин

В настоящее время всё большую роль приобретают информационно – социальные технологии в образовании. Такие системы обеспечивают всеобщую компьютеризацию учащихся и преподавателей на высоком уровне и позволяют решать задачи развития единого информационного пространства образовательной сферы, обмена информацией между учащимися и преподавательским составом университета. Речь идёт о решении качественного изменения всей информационной среды системы образования, о предоставлении новых возможностей, как для учащихся, так и для преподавателей. Современные реалии таковы, что в каждом университете, как правило, есть некая система управления образовательным процессом. Такие системы предоставляют набор инструментов для контроля процесса обучения, ведения и сопровождения различных документов и отчетностей.

Стоит заметить, что большинство систем (например, Databiz Inc. UAS, AccelUMS, Orbund Einstein system), как правило, не предоставляют набор инструментов для формирования так называемых электронных зачетных книжек.

В данной работе предлагается информатизация образовательной среды и повышение её интерактивности путем введения электронных зачетных книжек как альтернативы бумажных аналогов, существующих на данный момент. Это позволит иметь более гибкий контроль над оценками, зачетами и научно-исследовательской работой каждого студента.

Электронные зачетные книжки позволяют хранить не только результаты промежуточных и итоговых аттестаций, но и информацию обо всём процессе обучения (темы лекций, экзаменационные вопросы и ответы на них, результаты тестовых испытаний, лабораторные и практические задания и результаты их выполнения, посещаемость занятий студентом, количество пересдач). Такого рода информация становится востребованной будущими работодателями студента, что может послужить дополнительной мотивацией студента к учёбе.

В базе данных ведется непрерывное накопление информации о проведении преподавателями занятий и их посещаемости, успеваемости студентов, а также осуществляется регистрация изменений в таблицах-справочниках. В любой момент пользователь системы может выбрать интересующую его информацию, доступную ему, за указанный период. Периодически в автоматическом режиме создается резервная копия базы данных, в любой момент администратор системы может восстановить основную базу из копии. Посещаемость учитывается автоматически при начале лекции или семинара путем „опроса“ устройств (КПК, мобильный телефон, коммуникатор) студентов по Bluetooth с главного планшетного компьютера преподавателя. Получение любой интересующей информации происходит запросом студента с его устройства к базе данных университета через интерфейс Wi-Fi. На всех перечисленных устройствах выше установлено специально разработанное программное обеспечение.

Павел Сергеевич Бабкин
Сибирский федеральный университет, Россия
E-mail address: deeppaul@yandex.ru

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО. ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Я.С. Бадретдинов

Сущность закона о пространстве Минковского можно выразить в различных математических представлениях, в том числе в форме дифференциальных уравнений. Эти уравнения можно получить из условия инвариантности волнового уравнения электродинамики. В инерциальных системах отсчета S и $S^{'}$ волновое уравнение в галилеевых координатах соответственно имеет вид:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_0^{'2}}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^{'2}}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^{'2}}=0, \tag{2}$$

где Φ и $\Phi^{'}$ - скалярные функции в пространстве M, причем $\Phi^{'}(x^{'})=\Phi(x)$; $x_0=ct, x_0^{'}=ct^{'}$ и $t^{'}, (x_1,x_2)$ и $(x_1^{'},x_2^{'})$ – время и декартовые координаты точки в системах отсчета S и $S^{'}$; c– электродинамическая постоянная. Искомые преобразования будем искать в виде

$$x_i=x_i(x_k^{'}),\quad i,k=0,1,2. \tag{3}$$

С учетом (1.3) находим вторые производные от Φпо x_i

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=0}^{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k^{'}}\frac{\partial x_k^{'}}{\partial x_i}=\sum_{l=0}^{2}\frac{\partial}{\partial x_l^{'}}\left(\sum_{k=0}^{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k^{'}}\frac{\partial x_k^{'}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_l^{'}}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Подставим (4) в (1) и тогда уравнение (1) перейдет в уравнение (2) при выполнении следующих уравнений:

$$\sum_{k=0}^{2}e_k\frac{\partial x_j^{'}}{\partial x_k}\frac{\partial x_i^{'}}{\partial x_k}=e_j\delta_{ij},\quad j,i=0,1,2, \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{2}e_k\frac{\partial^2 x_j^{'}}{\partial x_k^2}=0,\quad j=0,1,2, \tag{6}$$

где $e_0=-e_1=-e_2-e_3=1$; $\delta_{ij}=\left\{\begin{smallmatrix}1,i=j,\\0,i\neq j.\end{smallmatrix}\right.$ Уравнения (5) и (6) соответствуют преобразованиям координат при переходе от системы отсчета S

к $S^{'}$. Столько же уравнений получим при обратном переходе, т.е. от $S^{'}$ к S

$$\sum_{k=0}^{2} e_k \frac{\partial x_j}{\partial x_k^{'}} \frac{\partial x_i}{\partial x_k^{'}} = e_j \delta_{ij}, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{2} e_k \frac{\partial^2 x_j}{\partial x_k^{'2}} = 0. \tag{8}$$

Полученные уравнения (5) и (6), или (7) и (8) назовем уравнениями пространства M.

Анализ уравнений пространства. Выясним, удовлетворяют ли уравнения, например (5) и (6), требованиям инвариантности относительно преобразований координат $x_k^{'} = x_k^{'}\left(x_l^{''}\right)$. Сначала проверим инвариантность уравнений (7). Находим

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k^{'}} = \sum_{l=0}^{2} e_k \frac{\partial x_i}{\partial x_l^{'}} \frac{\partial x_l^{''}}{\partial x_k^{'}}. \tag{9}$$

Подстановка (9) в уравнения (7) показывает, что уравнения (7) перейдут в уравнения

$$\sum_{k=0}^{2} e_k \frac{\partial x_j}{\partial x_k^{''}} \frac{\partial x_i}{\partial x_k^{''}} = e_j \delta_{ji} \tag{10}$$

при выполнении уравнений

$$\sum_{k=0}^{2} e_k \frac{\partial x_j^{''}}{\partial x_k^{'}} \frac{\partial x_i^{''}}{\partial x_k^{'}} = e_j \delta_{ji}. \tag{11}$$

Примечательным является то, что систему десяти уравнений типа (10) и (11) генерирует требование инвариантности каждого уравнения (7). Поскольку вид уравнений (10) и (11) совпадает с уравнением (7), то отсюда следует, что уравнения (7), как и уравнения (5), удовлетворяют требованию инвариантности относительно преобразований $x_k^{'} = x_k^{'}\left(x_l^{''}\right)$, подчиняющихся исходным уравнениям, т.е. уравнениям (5) или (7). Другими словами, уравнения (5) и (7) приобретают статус физического закона, отражающего сущность пространства M в новом варианте, т.е. в алгебраическом представлении.

Явит Сафетдинович Бадретдинов
Бирская государственная социально-педагогическая академия, Россия
E-mail address: jsbadr@rambler.ru

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР В ПОЛОЙ ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБЕ

С. П. Баландин, И.А. Макулов

Рассмотрим уравнение теплопроводности в двойном цилиндре. Переходя к цилиндрическим координатам и предполагая однородность температуры вдоль оси трубы и по полярному углу, получаем пару уравнений вида:

$$u_t = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) \tag{1}$$

внутри круга радиуса R_1 и в кольце $R_1 < r < R_2$. В каждой из областей коэффициент теплопроводности равен a_1 либо a_2. Ставятся также начальное $u(r,0) = f(r)$ и граничные условия: на окружностях температуры постоянны и равны T_1 и T_2 соответственно.

С помощью метода разделения переменных имеем для области $0 \le r < R_1$:

$$u(r,t) = T_1 + \frac{2}{R_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{R_1 J_1^2(\nu_n R_1)} - \frac{T_1}{\nu_n J_1(\nu_n R_1)}\right) J_0(\nu_n r) e^{-a_1\nu_n^2 t},$$

где A_n находятся через начальную функцию $f(r)$, ν_n определяются как корни уравнения $J_0(\nu R_1) = 0$, то есть $\nu_n R_1$ являются нулями бесселевой функции.

В стенке трубы $R_1 < r < R_2$ имеем в результате более сложных вычислений:

$$u(r,t) = \left(\ln\tfrac{R_2}{R_1}\right)^{-1}\left(T_1 \ln\tfrac{R_2}{r} + T_2 \ln\tfrac{r}{R_1}\right) +$$

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left[\tfrac{\pi}{2}\nu_n^2 J_0(\nu_n R_1) B_n - (T_2 J_0(\nu_n R_1) - T_1 J_0(\nu_n R_2))\right] \tfrac{J_0(\nu_n R_1) U_0(\nu_n r)}{J_0^2(\nu_n R_1) - J_0^2(\nu_n R_2)} e^{-a_2\nu_n^2 t},$$

где $U_0(\nu r) = J_0(\nu r)Y_0(\nu R_2) - J_0(\nu R_2)Y_0(\nu r)$, ν_n являются корнями уравнений $U_0(\nu R_1) = U_0(\nu R_2) = 0$, что означает $J_0(\nu R_1)/J_0(\nu R_2) = Y_0(\nu R_1)/Y_0(\nu R_2)$, а B_n находятся через начальную функцию $f(r)$.

Список литературы

[1] *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
[2] *Bowman F.* Introduction to Bessel Functions. Dower, 1968.

Сергей Павлович Баландин
Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия
E-mail address: balanse@bk.ru

Ирек Айратович Макулов
ООО "Газ-проект инжиниринг", Россия
E-mail address: irekufa@mail.ru

АВТОМОРФНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-ОРБИТЫ БИНАРНЫХ ФОРМ

П. В. Бибиков

Пусть $V_n = \mathsf{S}^n(\mathbb{C}^2)^*$ — пространство бинарных форм степени n от переменных x и y над полем $\mathbb{C}$. Рассмотрим действие группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ на пространстве V_n такое, что подгруппа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ действует стандартными заменами координат, а центр $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ действует гомотетиями $f \mapsto \lambda f$, где $f \in V_n$ и $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Орбиту бинарной формы f относительно такого действия обозначим через $\mathcal{O}_f$.

Проблема. Описать $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбиты бинарных форм данной степени n.

В работах [1, 2] эта проблема была полностью решена. Используя эти результаты, в данной работе мы определим автоморфное дифференциальное уравнение, пространство решений которого является $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбитой соответствующей бинарной формы. Это даст нам возможность исследовать орбиты с точки зрения дифференциальных уравнений.

Напомним, что основной идеей классификации $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбит бинарных форм является представление пространства V_n как решений дифференциального уравнения Эйлера $xf_x + yf_y = nf$. Это соображение позволяет использовать методы теории дифференциальных уравнений для исследования априори алгебраической задачи.

Рассмотрим пространство k-джетов функций $J^k\mathbb{C}^2$ с каноническими координатами $(x, y, u, u_{10}, u_{01}, \ldots)$ (все необходимые определения и сведения см. в [3]). Дифференциальному уравнению Эйлера соответствует алгебраическое многообразие $\mathcal{E} := \{xu_{10} + yu_{01} = nu\} \subset J^1\mathbb{C}^2$. Продолжения этого уравнения в пространстве k-джетов обозначим через $\mathcal{E}^{(k-1)} \subset J^k\mathbb{C}^2$. Действие группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ каноническим образом поднимается до действия на многообразиях $\mathcal{E}^{(k-1)}$.

Рассмотрим теперь функции $I_1 = H$, $I_2 = \nabla H$ и $I_3 = \nabla^2 H$ на многообразии $\mathcal{E}^{(3)}$, где $H := (u_{20}u_{02} - u_{11}^2)/u^2$ и $\nabla := \left(u_{01}\frac{d}{dx} - u_{10}\frac{d}{dy}\right)/u$ (см. [1, 2]). Заметим, что для любой формы $f \in V_n$ значения этих функций на ее

Работа выполнена при поддержке фонда Саймонса и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук МК-32.2011.1.

графике L_f^4 являются однородными рациональными функциями от переменных x и y. Значит, между ними существует алгебраическая зависимость: $F(I_1(f), I_2(f), I_3(f)) = 0$. Такой многочлен F мы будем называть *многочленом зависимостей* бинарной формы f.

Теорема 1 ([1, 2]). *Пусть f_1, $f_2 \in V_n$ и F_1, F_2 — соответствующие многочлены зависимостей. Тогда $\mathcal{O}_{f_1} = \mathcal{O}_{f_2}$ если и только если $F_1 = F_2$.*

Рассмотрим теперь следующую задачу: *восстановить по заданному многочлену зависимостей F соответствующую ему бинарную форму f* (точнее говоря, ее $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбиту $\mathcal{O}_f$).

Для этого рассмотрим соотношение $F(I_1(f), I_2(f), I_3(f)) = 0$ как дифференциальное уравнение $\mathcal{F}$ в частных производных на неизвестную форму f.

Теорема 2. *Точки орбиты $\mathcal{O}_f$ являются решениями дифференциального уравнения $\mathcal{F}$.*

Таким образом, теоремы 1 и 2 дают возможность построить по форме f автоморфное дифференциальное уравнение $\mathcal{F}$, т.е. уравнение, решением которого является $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбита $\mathcal{O}_f$ бинарной формы f. Поэтому вопрос нахождения бинарной формы по заданному многочлену зависимостей сводится к исследованию дифференциального уравнения $\mathcal{F}$.

Бинарные формы, для которых уравнение $\mathcal{F}$ имеет порядок 2 или 3, описаны в [2]. Рассмотрим самый сложный случай, когда уравнение $\mathcal{F}$ имеет порядок 4.

В этом случае уравнение $\mathcal{F}$ обладает четырехмерной группой симметрий $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, в которой есть трехмерная разрешимая подгруппа верхнетреугольных матриц. Поэтому согласно теореме Ли-Бьянки (см. [3]), уравнение $\mathcal{F}$ может быть проинтегрировано до обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Это уравнение является уравнением Абеля (т.е. оно полиномиально по производным).

В работе рассмотрены примеры таких уравнений Абеля, а также приведены несколько примеров интегрирования этих уравнений.

Список литературы

[1] *Бибиков П. В., Лычагин В. В.* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбиты бинарных форм // ДАН. **435**:4 (2010), 439–440.

[2] *Bibikov P. V., Lychagin V. V.* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-orbits of binary rational forms // Lobachevskii J. Math. **32**:1 (2011), 95–102.

[3] *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. М.: ВИНИТИ, т.28, 1988.

Павел Витальевич Бибиков
Институт проблем управления РАН, Россия
E-mail address: tsdtp4u@proc.ru

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ТИПОВ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА $\rho \in (0;1)$ С НУЛЯМИ НА ЛУЧЕ

Г.Г.БРАЙЧЕВ

В работе приводятся точные оценки для типов целых функций порядка меньше единицы с расположенными на луче нулями в терминах классических плотностей распределения этих нулей, шага и индекса лакунарности.

Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая к $+\infty$ последовательность положительных чисел, $n_\Lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$— считающая функция этой последовательности, а $N_\Lambda(r) = \int\limits_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}dt$ — ее усредненная считающая функция (функция Неванлинны). Верхние и нижние плотности Λ при порядке ρ (обычные и усредненные) определяются равенствами:

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho},\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho},\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho},\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Величины $h_\rho = h_\rho(\Lambda) := \varliminf\limits_{n\to+\infty} (\lambda^\rho_{n+1} - \lambda^\rho_n)$ и $l = l(\Lambda) := \varlimsup\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ называются соответственно ρ - шагом и индексом лакунарности последовательности Λ.

Через $\sigma_\rho(f) = \varlimsup\limits_{R\to+\infty} R^{-\rho} \ln \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$ обозначается тип целой функции $f(z)$ при порядке ρ, аналогичный нижний предел называется нижним типом и обозначается $\underline{\sigma}_\rho(f)$.

Возрождение интереса к нахождению точных оценок роста целых функций по их нулям обязано А.Ю.Попову, который в 2005 году [1], определил наименьший возможный тип функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0;1)$ с положительными нулями Λ_f, заданной верхней плотности:

$$\sigma_\rho(f) \ \ge \overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)C(\rho), \text{ где } C(\rho) = \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^\rho}.$$

Он также показал, что равенство достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел Λ_f.

Уточнение этой оценки, когда кроме верхней плотности положительных корней Λ_f учитывается еще и нижняя $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)$, получено В.Б.Шерстюковым [2], доказавшим в 2009 году точное (т.е. достижимое) неравенство:

$$\sigma_\rho(f) \ \ge \frac{\pi\underline{\Delta}_\rho}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a(\underline{\Delta}_\rho/\overline{\Delta}_\rho)^{1/\rho}}^{a} \frac{\overline{\Delta}_\rho a^{-\rho} - \underline{\Delta}_\rho \tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00225а).

Интересно сравнить с этим результатом также точную оценку сверху нижнего типа целых функций с нулями заданных нижней и верхней плотностей независимо от их расположения на плоскости, полученную в 2009 году Г.Г.Брайчевым и О.В.Шерстюковой [3]:

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \le \frac{\pi\overline{\Delta}_\rho}{\sin\pi\rho} - \sup_{a>0} \int\limits_a^{a(\overline{\Delta}_\rho/\underline{\Delta}_\rho)^{1/\rho}} \frac{\overline{\Delta}_\rho\tau^{-\rho} - \underline{\Delta}_\rho a^{-\rho}}{\tau+1} d\tau.$$

Приведем теперь точные оценки типа целой функции через усредненные характеристики распределения ее нулей.

$$\sigma_\rho(f) \ \ \ge \ \rho e C(\rho)\overline{\Delta}^*_\rho \ \ , \ \ \sigma_\rho(f) \ \ \ge \ \rho\left(\frac{\pi\underline{\Delta}^*_\rho}{\sin\pi\rho} + \max_{b>0}\int\limits_{ba_1^{1/\rho}}^{ba_2^{1/\rho}} \frac{\overline{\Delta}^*_\rho b^{-\rho} - \underline{\Delta}^*_\rho\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau\right),$$ где $C(\rho)$ — функция из оценки А.Ю.Попова, а a_1 и a_2 — корни уравнения $a\ln\dfrac{e}{a} = \underline{\Delta}^*_\rho/\overline{\Delta}^*_\rho$, $0 \le a_1 \le 1 \le a_2 \le e$.

Первая из приведенных оценок достигается на экстремальной последовательности оценки А.Ю.Попова, а вторая,— на некоторой дискретно измеримой последовательности, т. е. такой, для которой существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N(\lambda_n)}{\lambda_n^\rho}$.

Для таких последовательностей нулей целых $f(z)$ с индексом лакунарности $l = l(\Lambda_f)$ справедливо неравенство

$$\sigma_\rho(f) \ \ge \overline{\Delta}_\rho L\left\{\frac{\pi}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0}\int\limits_{al^{-1}}^{a} \frac{L^{-1}a^{-\rho} - \tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau\right\} \ , L = \frac{\ln l^\rho}{l^\rho - 1}.$$

Влияние ρ - шага последовательности Λ выявлено Шерстюковой О.В. (см.[4])

$$\sigma_\rho(f) \ \ge \frac{\pi\underline{\Delta}_\rho}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a(\underline{\Delta}_\rho/\overline{\Delta}_\rho)^{1/\rho}}^{as^{1/\rho}} \frac{\overline{\Delta}_\rho a^{-\rho} - \underline{\Delta}_\rho\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau + h(\Lambda)^{-1}\int\limits_a^{as^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{\tau+1} d\tau,$$

где $s = \dfrac{1-\underline{\Delta}_\rho h(\Lambda)}{1-\overline{\Delta}_\rho h(\Lambda)}$.

Список литературы

[1] *А.Ю.Попов* Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности" , *Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика*, **1**(2005), 31-36.

[2] *Г.Г.Брайчев, В.Б.Шерстюков* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0;1)$ с положительными нулями , *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:1 (2011), 3-28.

[3] *Г.Г.Брайчев, О.В.Шерстюкова*, Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0;1)$ с нулями фиксированных ρ-плот-ностей , *Матем. заметки* (в печати).

[4] *Г.Г.Брайчев, О.В.Шерстюкова* О влиянии шага и индекса лакунарности последовательности нулей целой функции порядка меньше единицы на ее рост // V международная конференция "Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания".Обнинск, 14-18 мая 2011, 87–89

Георгий Генрихович Брайчев
Московский Педагогический Государственный Университет, Россия
E-mail address: Braichev@mail.ru

ВОЗМУЩЕННЫЕ УЛЬТРАСУБГАРМОНИКИ ДВУМЕРНОЙ ПОЧТИ АВТОНОМНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО ВРЕМЕНИ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

Ю. Е. Вакал

Пусть на двумерном симплектическом многообразии $\mathcal{M}^2$ задана 2π-периодическая по времени неавтономная гамильтонова система с гамильтонианом $\mathcal{H}_\varepsilon$, зависящим от малого параметра $\varepsilon \geq 0$. Предположим, что невозмущенный гамильтониан $H = \mathcal{H}_0$ не зависит от времени и некоторая область $D \subset \mathcal{M}^2$ расслаивается регулярными замкнутыми линиями уровня $M_z := \{x \in D : \ H = z\}$, $z \in (z_*, z^*) \subset H(\mathcal{M}^2)$. Тогда движение каждой точки $x \in M_z$ под действием потока невозмущённой системы периодическое с периодом $T(z)$ и частотой $\omega(z) := 2\pi/T(z)$. Движения с рациональной частотой $\omega(z_{m/n}) = m/n$ называют (n/m)-ультрасубгармониками.

Имеем типичный случай, когда границу области D образует пара компактных связных критических множеств уровня гамильтониана M_{z^*}, M_{z_*}, где $z_* < z^*$ — критические значения функции H; кроме того, предполагаем, что на M_{z^*} расположены одна или несколько точек гиперболического типа, а M_{z_*} вырождается в единственную точку эллиптического типа. Также предполагаем, что функция $T'(z)$ обращается в нуль только в одной точке $z_0 \in (z_*, z^*)$ и в этой точке функция $T(z)$ достигает минимума.

С помощью метода Арнольда отыскания неподвижных точек симплектических диффеоморфизмов [1] доказана теорема, устанавливающая для фиксированного рационального числа $\frac{m}{n}$ оценки малости параметра возмущения ε, которые гарантируют существование по крайней мере двух $2\pi n$-периодических решений возмущённой системы, трансформирующихся при $\varepsilon \to 0$ в порождающие (n/m)-ультрасубгармоники невозмущённой системы.

Зафиксировав достаточное малое $\delta_0 > 0$ так, чтобы $\omega(z_* + 2\delta_0) < \omega(z_0 - 2\delta_0)$, $\omega(z_0 + 2\delta_0) > \omega(z^* - 2\delta_0)$, разобьём множество невозмущённых ультрасубгармоник и соответствующих точек $z_{m/n}$ на четыре подмножества.

I. *Ультрасубгармоники зоны строго регулярных значений частотной функции* определяются точками $z_{m/n}$, для которых при некотором фиксированном $\delta_0 > 0$ справедливы неравенства $\min\left\{z^* - z_{m/n}, z_{m/n} - z_*\right\} > 2\delta_0$,
$\left|z_0 - z_{m/n}\right| \geq 2\delta_0$. Точки первого подмножества находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами несвязного объединения полуинтервалов

$$I_{11} := \big(\omega(z_* + 2\delta_0), \omega(z_0 - 2\delta_0)\big], \quad I_{12} := \big(\omega(z^* - 2\delta_0), \omega(z_0 + 2\delta_0)\big].$$

II. *Ультрасубгармоники зоны слабо регулярных значений частотной функции* определяются точками $z_{m/n}$, которые удовлетворяют неравенству
$0 < \left|z_0 - z_{m/n}\right| \leq 2\delta_0$. Точки второго подмножества находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами несвязного объединения интервалов

$$I_{21} := \left(\omega(z_0 - 2\delta_0), \omega(z_0)\right), \quad I_{22} := \left(\omega(z_0 + 2\delta_0), \omega(z_0)\right).$$

III. *Ультрасубгармоники приграничной зоны гиперболического типа* определяются точками $z_{m/n} \in \left[z^* - 2\delta_0, z^*\right)$. Точки третьего подмножества находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами полуинтервала $I_3 := \big(0, \omega(z^* - 2\delta_0)\big]$.

IV. *Ультрасубгармоники приграничной зоны эллиптического типа* определяются точками $z_{m/n} \in \left(z_*, z_* + 2\delta_0\right]$. Точки четвёртого подмножества находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами полуинтервала $I_4 := \big(\omega_*, \omega(z_* + 2\delta_0)\big]$.

Для каждого из четырёх подмножеств найдены оценки снизу количества возмущённых ультрасубгармоник на основании указанной выше теоремы о существовании решений возмущенной системы и фактов из теории чисел о количестве рациональных чисел на интервале [2].

Для всех зон, кроме приграничной зоны гиперболического типа, соответствующие оценки демонстрируют степенной характер зависимости от $1/\varepsilon$, причём наибольшая скорость нарастания ультрасубгармоник при $\varepsilon \to 0$ присуща зоне строго регулярных значений. Для зоны слабо регулярных значений частотной функции и приграничной зоны эллиптического типа соответствующие оценки зависят от арифметических свойств частотной функции $\omega(z)$ на линии вырождения M_{z_0} и в критической точке эллиптического типа. Для приграничной зоны гиперболического типа оценка снизу для количества ультрасубгармоник при $\varepsilon \to 0$ асимптотически эквивалентна $C \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}$, где C — константа.

Список литературы

[1] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
[2] *Montgomery H.L.* Fluctuations in the mean of Euler's phi function // Proc. Indian Acad. Sci. **97** (1987), 239–245.

Юлия Евгеньевна Вакал
Киевский Национальный Университет имени Тараса Шевченка, Украина

E-mail address: iuliia.vakal@gmail.com

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С РАСТУЩИМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ

Н.Ф. Валеев

П.1. В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается m - параметрическое семейство компактных и самосопряженных операторов вида:

$$B(\vec{p}) = B_0 + p_1 B_1 + ... + p_m B_m, \quad \vec{p} \in R^m. \tag{1}$$

Пусть $\lambda_1^+(\vec{p}) \geq \lambda_2^+(\vec{p}) \geq ... \geq \lambda_j^+(\vec{p}) \geq ... \geq 0$ положительные собственные значения, занумерованные с учетом кратностей в порядке убывания, а $\lambda_1^-(\vec{p}) \leq \lambda_2^-(\vec{p}) \leq ... \leq \lambda_k^-(\vec{p}) \leq ... \leq 0$ отрицательные собственные значения оператора $B(\vec{p})$, занумерованные с учетом кратностей в порядке возрастания.

Для оператора $B(\vec{p})$ изучается следующая постановка обратной спектральной задачи (далее МПОСЗ).

Требуется найти $\vec{p} \in R^m$ *такой, чтобы наперед заданные числа* $\mu_1^- < \mu_2^- < ... < \mu_{k_1}^- < 0$ *и* $0 < \mu_{k_2}^+ < ... < \mu_3^+ < \mu_2^+ < \mu_1^+$, *были бы равны собственным значениям* $\lambda_{l_1}^- < \lambda_{l_2}^- < ... < \lambda_{l_{k_1}}^- < 0$, $\lambda_{s_1}^+ > \lambda_{s_2}^+ > ... > \lambda_{s_{k_2}}^+ > 0, k_1 + k_2 = m$, *оператора* $B(\vec{p})$ *(где* l_j *и* s_i *обозначают порядковые номера отрицательных и положительных собственных значений, произвольные натуральные числа).* Введем в рассмотрение функционал:

$$f(\vec{p}, \vec{\mu}) = \sum_{i=1}^{k_1} (\lambda_{l_i}^-(\vec{p}) - \mu_i^-)^2 + \sum_{i=1}^{k_2} (\lambda_{s_i}^+(\vec{p}) - \mu_i^+)^2$$

и сформулируем теорему существования.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие*

$$\lim_{\|\vec{p}\| \to \infty} f(\vec{p}, \vec{\mu}) = \infty, \tag{2}$$

тогда обратная спектральная задача имеет решение.

Достаточное условие роста функционала $f(\vec{p}, \vec{\mu})$ на бесконечности дается в следующем утверждении.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00233-а).

Теорема 2. *Пусть для любого* $\|\vec{p}\| = 1$

(3) $$Ker(\sum_{k=1}^{m} p_k B_k) = \{0\},$$

Тогда для каждого j *найдется такое положительное число* σ_j, *что*

$$|\lambda_j(\vec{p})| = \sigma_j \|\vec{p}\|(1 + o(1))$$

П.2. Рассмотрим МПОСЗ для оператора Штурма - Лиувилля:

(4) $$-y''(x, \lambda) + \lambda^2 q(x, \vec{p}) y(x, \lambda) = 0,$$

с потенциалом вида $q(x, \vec{p}) = \sum_{k=1}^{m} p_k q_k(x)$,$q_k(x) \in C[0, 1]$ и граничными условиями Дирихле $y(0) = y(1) = 0$.

Теорема 3. *Пусть при каждом* $\vec{p} \in \boldsymbol{C}^m$, $||\vec{p}|| = 1$, $mes\{x \in (0, 1) \| \sum_{k=1}^{m} p_k q_k(x) = 0\} = 0$, *тогда у МПОСЗ для оператора (4) существует решение.*

П.3. Рассмотрим уравнение собственных колебаний пластин Ω в упругой среде

(5)
$$a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2b\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + a\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(\sum_{j=1}^{n1} k_j q_j(x, y)\right) u = \lambda \left(\sum_{j=1}^{n2} m_j h_j(x, y)\right) u,$$

с однородными граничными условиями $l(w)|_{\partial\Omega} = 0$.

Очевидно, что величина $\left(\sum_{j=1}^{n1} m_j h(x, y)\right)$ соответствует распределению массы пластины, а $\left(\sum_{j=1}^{n2} k_j q_j(x, y)\right)$ распределению упругости внешней среды.

Рассмотрим МПОСЗ в следующей постановке. *Пусть требуется подобрать такие значения* m_j *масс и коэффициентов жесткости среды* k_j, *чтобы первые* n *собственных значений операторного пучка (5) были равны наперед заданным числам* $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < \lambda_{n+1} < ... < \lambda_{n1+n2}$.

Справедливо утверждение, аналогичное теореме 3.

Теорема 4. *Пусть* $mes\{(x, y) \in \Omega \| \sum_{k=1}^{n1} p_k q_k(x, y) = 0\} = 0$ *и* $mes\{(x, y) \in \Omega \| \sum_{k=1}^{n2} p_k h_k(x, y) = 0\} = 0$ *при всех* $||\vec{p}|| = 1$. *Тогда у МПОСЗ для оператора (5) существует решение.*

Валеев Нурмухамет Фуатович
Учреждение Российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Россия
E-mail address: valeevnf@mail.ru

ОБ ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕМ ФУНКЦИОНАЛЕ НА ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

Варзиев В. А.

Пусть G - ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Определим (LB)- пространство $A^{-\infty}(G)$ аналитических функций полиномиального роста вблизи границы G:

$$A^{-\infty}(G) := \{f \in A(G) |\, \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{z \in G} |f(z)|(d_G(z))^n < \infty\},$$

где $d_G(z) := \inf_{t \in \mathbb{C} \setminus G} |z - t|$. Введем пространство Фреше

$$A_G^{-\infty} := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) \mid \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{(1+|z|)^n |f(z)|}{\exp H_G(z)} < \infty, \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Положим $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Преобразование Лапласа $\mathcal{F}(\varphi)(\lambda) := \varphi(e_\lambda)$, $\varphi \in A^{-\infty}(G)'$, является линейным топологическим изоморфизмом сильного сопряженного $A^{-\infty}(G)'_\beta$ к $A^{-\infty}(G)$ на $A_G^{-\infty}$. Далее будем считать, что $0 \in G$. Следуя [2], [3], дадим

Определение 1. Пусть Q - целая в $\mathbb{C}^2$ функция такая, что $Q(\cdot, \mu) \in A_G^{-\infty}$ для любого $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда Q-интерполирующим функционалом назовем

$$\Omega_Q(z, \mu, f) := \mathcal{F}^{-1}(Q(\cdot, \mu))_t \left(\int_0^t f(t-\xi) \exp(t\xi) d\xi \right), \ z, \mu \in \mathbb{C}, \ f \in A^{-\infty}(G),$$

где интеграл берется отрезку $[0, t]$, $t \in G$.

Лемма 1. (a) $\Omega_Q(\cdot, \mu, f) \in A_G^{-\infty}$ *для любых* $\mu \in \mathbb{C}$ *и* $f \in A^{-\infty}(G)$.

(b) *Для любых* $z, \mu \in \mathbb{C}$ *выполняется равенство* $\Omega_Q(z, z, e_\mu) = l(\mu, z)$, *где функция* $l \in A(\mathbb{C}^2)$ *такая, что* $Q(\mu, z) - Q(z, z) = l(\mu, z)(\mu - z)$.

(c) $\Omega_Q(\mu, z, \cdot) \in A^{-\infty}(G)'$ *для любых* $z, \mu \in \mathbb{C}$.

С помощью функционала Ω_Q могут быть описаны линейные непрерывные правые обратные к оператору представления функций из $A^{-\infty}(G)$ рядами экспонент со специальными показателями. Пусть K - выпуклый компакт в $\mathbb{C}$; функция $L \in A_{G+K}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) существует $p_0 \in \mathbb{N}$ и последовательность $R_k > 0, k \in \mathbb{N}, R_k \uparrow +\infty$ такие, что $\log |L(z)| \geq H_{G+K}(\lambda) - p_0 \log(1 + |\lambda|), \ |\lambda| = R_k, \ k \in \mathbb{N}$.

(ii) $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ - последовательность (попарно различных) нулей L, каждый нуль λ_j простой и

$$\liminf_{j\to\infty}\frac{\log|L'(\lambda_k)|-H_{G+K}(\lambda_j)}{\log(1+|\lambda_j|)}>-\infty.$$

Введем (LB)-пространство последовательностей

$$\Lambda^{-\infty}(G):=\left\{c=(c_j)\subset\mathbb{C}\Big|\,\exists n\in\mathbb{N}:\ \|c\|_n=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|c_j|\exp H_G(\lambda_j)}{(1+|\lambda_j|)^n}<\infty\right\}.$$

Согласно [1] *оператор представления* $\Pi(c):=\sum\limits_{j=1}^{\infty}c_je_{\lambda_j}$ линейно и непрерывно отображает $\Lambda^{-\infty}(G)$ на $A^{-\infty}(G)$.

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

I. (i) *Оператор* $\Pi:\Lambda^{-\infty}(G)\to A^{-\infty}(G)$ *имеет линейный непрерывный правый обратный.*

(ii) *Выпуклый компакт* K *отличен от точки.*

(iii) *Существует функция* $Q\in A(\mathbb{C}^2)$ *такая, что* $Q(z,z)=L(z),\ z\in\mathbb{C}$, *и для* $\forall n\ \exists m\ \exists C>0:$

$$|Q(z,\mu)|\le C\exp(H_G(z)+H_K(\mu)-n\log(1+|z|)+m\log(1+|\mu|)),\ z,\mu\in\mathbb{C}.$$

II. (iv) *Если* Q *– функция, как в (iii), то оператор*

$$f\mapsto(\Omega_Q(\lambda_j,\lambda_j,f)/L'(\lambda_j))_{j\in\mathbb{N}},\ f\in A^{-\infty}(G)$$

- линейный непрерывный правый обратный к оператору Π.

(v) *Если* $R:A^{-\infty}(G)\to\Lambda^{-\infty}(G)$ *— линейный непрерывный правый обратный к* Π, *то существует единственная функция* Q, *как в (iii), такая, что* $R(f):=\left(\frac{\Omega_Q(\lambda_j,\lambda_j,f)}{L'(\lambda_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}},\ f\in A^{-\infty}(G)$.

Список литературы

[1] *Abanin A.V., Le Hai Khoi, Nalbandyan Yu.S.* Minimal absolutely representing systems of exponentials for $A^{-\infty}(\Omega)$ // Preprint, 2010.

[2] *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

[3] *Мелихов С.Н.* Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов // Матем. сб. **191**:7 (2000).

Варзиев Владислав Аликович
Южный математический институт, Владикавказ.
E-mail address: varzi@yandex.ru

БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Васильев

Мы рассматриваем двумерный интегральный оператор K с ядром Кальдерона-Зигмунда $K(x)$, определяемый формулой

$$(Ku)(x) = v.p. \int\limits_{\mathbf{R}^2} K(x-y)u(y)dy, \tag{1}$$

и его дискретный аналог

$$(K_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in \mathbf{Z}_h^2} K(\tilde{x} - \tilde{y}) u_d(\tilde{y}) h^2, \tag{2}$$

который конструируется следующим образом.

На плоскости $\mathbf{R}^2$ строится квадратная решетка с шагом h, которую мы обозначаем $\mathbf{Z}_h^2$, рассматриваются функции дискретного аргумента $u_d(\tilde{x})$, определенные на $\mathbf{Z}_h^2$. Сужение ядра $K(x)$ на решетку $\mathbf{Z}_h^2$ позволяет определить дискретный оператор K_d формулой (2), где бесконечная сумма трактуется как предел квадратных частичных сумм:

$$(K_d u_d)(\tilde{x}) = \lim_{N \to \infty} \sum_{\tilde{y} \in \mathbf{Z}_h^2 \cap Q_N} K(\tilde{x} - \tilde{y}) u_d(\tilde{y}),$$

$$Q_N = \{x \in \mathbf{R}^2 : max\{|x_1|, |x_2| \leq N\}.$$

С оператором K связано простейшее двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$au(x) + v.p. \int\limits_{\mathbf{R}^2} K(x-y)u(y)dy = v(x), \quad x \in \mathbf{R}^2 \tag{3}$$

и его дискретный аналог

$$au_d(\tilde{x}) + \sum_{\tilde{y} \in \mathbf{Z}_h^2} K_d(\tilde{x} - \tilde{y}) u_d(\tilde{y}) h^2, \quad \tilde{x} \in \mathbf{Z}_h^2. \tag{4}$$

Ранее было установлено [2-4], что (3) и (4) разрешимы или неразрешимы одновременно. Условия разрешимости (в данном случае однозначной разрешимости) формулируются в терминах символов операторов K и K_d . Эти символы, которые мы обозначим $\sigma(\xi)$ и $\sigma_d(\xi)$ выглядят следующим образом [1]:

$$\sigma(\xi) = a + F_{x\to\xi}(K(x)) = a + \lim_{\varepsilon\to 0, N\to\infty} \int\limits_{\varepsilon<|x|<N} K(x)e^{-ix\xi}dx,$$

$$\sigma_d(\xi) = a + \lim_{N\to\infty} \sum_{\tilde{x}\in \mathbf{Z}_h^2 \cap Q_N} K(\tilde{x})e^{-i\tilde{x}\xi}h^2.$$

Если символ $\sigma(\xi)$ отличен от нуля, то уравнение (3) однозначно разрешимо для любой правой части $v \in L_2(\mathbf{R}^2)$. Аналогичное утверждение имеет место и для уравнения (4) с правой частью $v_d \in L_2(\mathbf{Z}_h^2)$. Уравнение (4) - это бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Однако чтобы получить численный результат, нужна система конечная.

Вычислительная схема для уравнения (4') выглядит так. По дискретному ядру K_d и правой части v_d строятся их периодические Q_N-аппроксимации (K_d, v_d сужаются на Q_N и периодически продолжаются на все $\mathbf{Z}_h^2$)$K_{d,N}, v_{d,N}$. Вместо уравнения (4) рассматривается уравнение (система линейных алгебраических уравнений)

$$au_{d,N}(\tilde{x}) + \sum_{\tilde{y}\in\mathbf{Z}_h^2} K_{d,N}(\tilde{x}-\tilde{y})u_{d,N}(\tilde{y}) = v_d(\tilde{x}),\ \tilde{x}\in\mathbf{Z}_h^2. \tag{5}$$

На самом деле система (5) имеет лишь конечное число отличных друг от друга уравнений. Аппарат дискретного преобразования Фурье и свойства символа многомерного сингулярного интеграла [1] позволяют обосновать разрешимость уравнения (5) при больших N , а быстрое преобразование Фурье - отказаться от решения систем линейных алгебраических уравнений и ограничиться двукратным вычислением преобразования Фурье. Проведенные тестовые вычисления показали серьезную экономию времени вычислений (даже в одномерном случае).

Список литературы

[1] *Mikhlin S.G. Prössdorf S.* Singular integral operators. Berlin: Akademie-Verlag 1986.

[2] *Васильев А.В., Васильев В.Б.* Дискретные операторы Кальдерона-Зигмунда: некоторые наблюдения// Труды XIV международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики."Харьков-Херсон, 2009. Ч. 2. С. 257-261.

[3] *Васильев А.В., Васильев В.Б.* О дискретных свертках// Труды международных школ-семинаров "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". Вып. 7. Орел, 2009. С. 31-35

[4] *Васильев А.В., Васильев В.Б.* Дискретные варианты некоторых интегральных операторов и уравнений// Труды международных школ-семинаров "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". Вып.8. Орел, 2010. С. 29-33

Александр Владимирович Васильев

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского, Россия

E-mail address: alexvassel@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ КАЛЬДЕРОНА-ЗИГМУНДА

В. Б. Васильев

Оператор Кальдерона-Зигмунда K в своем простейшем варианте - это свертка вида

$$u(x) \longmapsto v.p. \int\limits_{\mathbf{R}^m} K(x-y)u(y)dy, \tag{1}$$

где ядро $K(x)$ обладает специфическими свойствами: оно однородно степени $-m$, дифференцируемо (хотя это и необязательно) и имеет нулевое среднее значение на сфере S^{m-1} .

К операторам можно применить преобразование Фурье в v.p.- смысле [1], после чего в образах Фурье оператор (1) превратится в оператор умножения на "символ"[1]

$$\tilde{u}(\xi) \longmapsto \sigma(\xi)\tilde{u}(\xi), \tag{2}$$

$\tilde{u}$ обозначает преобразование Фурье функции u.

Спектр оператора (2), как оператора $L_2(\mathbf{R}^m) \to L_2(\mathbf{R}^m)$, совпадает с множеством значений отображения $\sigma : S^{m-1} \to \mathbf{C}$. В случае гладкости σ это замкнутое связное множество (для $m = 2$ это точно замкнутая кривая в комплексной плоскости). Хорошо известно [1] (хотя интуитивно это понятно и так), что по символу ядро можно восстановить. Вопрос состоит в следующем: можно ли восстановить ядро (а, следовательно, и оператор) по спектру?

В работе [2] автор ввел в рассмотрение один мультипликатор, который представляет собой оператор умножения на характеристическую функцию конуса

$$C_+^a = \{x \in \mathbf{R}^m : \ x = (x_1, ..., x_m), \ x_m > a|x'|, \ a > 0\},$$

где $x' = (x_1, ..., x_{m-1})$. В образах Фурье этот оператор представляет собой свертку со специальным ядром Бохнера, хорошо известным в теории функций многих комплексных переменных [3]. Свертка с таким ядром трактуется как некоторый многомерный сингулярный интеграл в следующем смысле

$$(B * u)(x) = \lim_{\tau \to 0+} \int\limits_{\mathbf{R}^m} B(x'-y', x_m - y_m + i\tau)u(y)dy. \tag{3}$$

В выражении (3) фигурирует параметр a , который представляет собой "размер"телесного угла, определяемого конусом C_+^a. Будем обозначать оператор свертки (3) B_a, подчеркивая зависимость от угла раствора. Итак, оператор B_a - это фурье-образ оператора умножения на характеристическую функцию конуса C_+^a , т.е. функцию

$$m_a(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in C_+^a \\ 0, & x \notin C_+^a. \end{cases}$$

В силу своей однородности степени $-m$ ядро оператора Кальдерона-Зигмунда (а , следовательно, и сам оператор) полностью определяется так называемой характеристикой - сужением ядра на единичную сферу S^{m-1}. Таким образом, речь идет о возможности построения непрерывного отображения $f : S^{m-1} \to \mathbf{C}$ по заданной области значений γ. В принципе это возможно с точностью до автоморфизмов $S^{m-1} \to S^{m-1}$. Построить конкретный оператор Кальдерона-Зигмунда по заданной спектральной кривой можно следующим образом.

Разобьем кривую γ точками $\lambda_k \in \gamma,\ k = 1, 2, ..., n$ (выбрав произвольно направление на кривой), и на каждой дуге $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ выбираем произвольную точку $\tilde{\lambda}_k$. Далее разбиваем сферу S^{m-1} на n кусков, которые получаются в пересечении S^{m-1} конусом (выпуклым и острым, но не обязательно C_+^a); ядра Бохнера B_a будут определены и в этом случае (по крайней мере для пространств $L_2(\mathbf{R}^m)$). Каждому куску сферы S_k (соответствующему конусу раствора a_k) ставится в соответствие дуга $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ с выбранной точкой $\tilde{\lambda}_k$. Тогда оператор (1) приближенно выглядит как сумма ($a_k \leftrightarrow \tilde{\lambda}_k$)

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{\lambda}_k B_{\tilde{\lambda}_k},$$

где $B_{\tilde{\lambda}_k}$ локализован на дуге $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$.

Справедлива следующая

Теорема 1.

$$K = \int_{\gamma} \lambda B_\lambda d\lambda,$$

которая почти дословно повторяет спектральную теорему для ограниченного самосопряженного оператора [4].

Список литературы

[1] *Mikhlin S.G., Prössdorf S.* Singular integral operators. Berlin, Akademie-Verlag, 1986.

[2] *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2010.

[3] *Бохнер С., Мартин У.Т.* Функции многих комплексных переменных. М.: Изд. иностр. литературы, 1951.

[4] *Пирковский А.Ю.* Спектральная теория и функциональное исчисление для линейных операторов. М.: Издательство МЦНМО, 2010.

Владимир Борисович Васильев
Брянский государственный униыерситет им. акад. И.Г. Петровского, Россия

E-mail address: vbv57@inbox.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ДИСКРЕТНО-СТОХАСТИЧЕСКИХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ

А. В. Войтишек

1. Введение. С развитием вычислительной техники возрастает интерес к численным методам решения прикладных задач, в частности, к статистическому моделированию (или методу Монте-Карло) (см., например, [1], а также список литературы в этом учебнике). Традиционно методы Монте-Карло рассматриваются в качестве альтернативных «детерминированным» численным методам (в частности, конечно-разностным и конечно-элементным схемам). Однако во многих случаях эффективными оказываются смешанные алгоритмы, содержащие в себе элементы детерминированных методов (связанных с введением сеток и соответствующих аппроксимаций функций) и стохастических численных схем (связанных с многократной реализацией траекторий случайных процессов с последующим усреднением). Такие комбинированные алгоритмы можно назвать *дискретно-стохастическими численными методами* (см. [1], раздел 5.3, а также пособие [2]). При реализации этих методов принципиальной является проблема согласованного выбора параметров – количества узлов в сочетании с количеством траекторий – для достижения заданного уровня погрешности (в соответствующей вероятностной функциональной норме) с меньшими вычислительными затратами. Есть также возможность выбирать вероятностные распределения, определяющие «стохастическую составляющую» алгоритма. К сожалению, представления оптимальных распределений, соответствующих минимальным трудоемкостям рассматриваемых численных алгоритмов, не дают возможности их практического использования, и требуется применять приближения этих распределений. В данной работе обсуждаются особенности построения и реализации таких приближений.

2. Дискретно-стохастическая версия выборки по важности. Простейший («методический») пример эффективного сеточного приближения вероятностной плотности возникает в следующей ситуации. Хорошо известно (см., например, [1]), что плотность $f_{opt}(\mathbf{x}) = Hg(\mathbf{x})$ является

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 09-01-00035, 10-01-00040).

оптимальной (т. е. дающей минимальную – нулевую – трудоемкость) при реализации метода Монте-Карло для вычисления многократного интеграла от неотрицательной функции $g(\mathbf{x})$:

$$(1) \qquad I = \int g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}\, f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{g(\boldsymbol{\xi}_i)}{f(\boldsymbol{\xi}_i)};$$

здесь $H = \text{const}$, а $\boldsymbol{\xi}_i$ – выборочные значения случайного вектора $\boldsymbol{\xi}$, распределенного согласно плотности $f(\mathbf{x})$. Использование функции $f_{opt}(\mathbf{x})$ невозможно, так как $H = 1/I$, и для такой плотности алгоритм (1) «вырождается». Целесообразным может оказаться выбор в качестве плотности $f(\mathbf{x})$ нормированного на единицу сеточного приближения функции $f_{opt}(\mathbf{x})$. Здесь возникают определенные проблемы, связанные с выбором аппроксимационного базиса и нахождением оптимального числа узлов сетки [3].

3. Условная оптимизация функциональных алгоритмов метода Монте-Карло. Более «содержательные» (с точки зрения приложений и используемого математического аппарата) примеры приближения оптимальных распределений связаны с задачами приближения решений задач математической физики, описываемых интегральными уравнениями, допускающими вероятностную трактовку (см., например, [1]). Актуальными (и математически трудными) являются задачи оптимизации дискретно-стохастических алгоритмов приближения решения «в целом» (т. е. на компактных подобластях). Здесь достаточно хорошо разработаны рекомендации по выбору услов-но-оптимальных параметров (количества узлов сетки, на которой происходит аппроксимация решения, и количества испытаний алгоритма метода Монте-Карло в узлах сетки) [2]. Имеются также соображения (включающие, в том числе, идеи приближения оптимальных плотностей) о специальном выборе распределений, определяющих вид траекторий используемых в расчетах модельных случайных процессов.

Список литературы

[1] *Михайлов Г. А., Войтишек А. В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006.

[2] *Войтишек А. В.* Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2007.

[3] *Войтишек А. В.* Дискретно-стохастические модификации стандартного метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2009.

Антон Вацлавович Войтишек
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия
E-mail address: vav@osmf.sscc.ru

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЯВНЫХ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

С. В. Гайдомак

В данной работе представлены результаты численного решения некоторого класса линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных. Первоначально их численное решение выполнялось известными методами, разработанными для разрешённых систем уравнений в частных производных. Среди них: методы первого порядка (метод прямых, метод сеток)(см. [1], [3]) и методы второго порядка (трёхслойный разностный метод, метод сплайн-коллокации, основанный на аппроксимации искомого решения сплайном с дефектом)(см. [2], [4]). Обладая невысоким порядком аппроксимации, такие методы не дают желаемого результата. К тому же, при численном решении этими методами линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных с пучком постоянных матриц регулярной структуры и высокого индекса возникает неустранимая погрешность, названная "пограничным слоём" ошибок(см. [5]). Эта отличительная особенность вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных впервые была замечена в работе(см. [6]). Аппроксимация искомого решения линейных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных сплайнами, позволяет записать ряд неявных схем не только высокого порядка точности, но и решающих проблему "пограничного слоя" ошибок при достаточно высоких порядках сплайна.

Рассмотрена граничная задача для линейной системы дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных

$$A(x,t)\partial_t u + B(x,t)\partial_x u + C(x,t)u = f, \quad (x,t) \in \mathbb{U} = [x_0;X] \times [t_0;T] \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(1) \qquad A(x_0,t)u(x_0,t) = \psi(t), \quad B(x,t_0)u(x,t_0) = \phi(x)$$

в которой пучок достаточно гладких матричных коэффициентов $A(x,t)+\lambda B(x,t)$ по своей структуре схож с регулярным пучком постоянных матриц.

В каждой области $\mathbb{U}_{i,j} = [x_i, x_i+m_1 h]\times[t_j, t_j+m_2\tau] \subseteq \mathbb{U}_\Delta$, где $m_1 \leq \mathcal{N}_1$, $m_2 \leq \mathcal{N}_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ решение $u(x,t)$ задачи (1) представлено в виде полинома $L_{i,j}^{m_1,m_2}(x,t)$ с неопределёнными коэффициентами, со старшими степенями m_1 и m_2 по переменным x и t, соответственно, так, чтобы значения полинома $L_{i,j}^{m_1,m_2}(x,t)$ в узлах $(x_i+l_1h, t_j+l_2\tau)$, где $l_1=\overline{0,m_1}$, $l_2=\overline{0,m_2}$, сеточной области $\mathbb{U}_{i,j}$ совпадали со значениями искомой функции $u(x,t)$ в этих узлах. В результате для задачи (1) записан набор неявных разностных схем

$$A_{i+l_1,j+l_2}\sum_{l_3=1}^{m_2}\gamma_{l_2,l_3}v_{i+l_1,j+l_3}+rB_{i+l_1,j+l_2}\sum_{l_3=1}^{m_1}\bar{\gamma}_{l_1,l_3}v_{i+l_3,j+l_2}+C_{i+l_1,j+l_2}v_{i+l_1,j+l_2}=$$

$$=\tau f_{i+l_1,j+l_2}-A_{i+l_1,j+l_2}\gamma_{l_2,0}v_{i+l_1,j}-rB_{i+l_1,j+l_2}\bar{\gamma}_{l_1,0}v_{i,j+l_2}, \quad r=\tau/h,$$

(2)

$$v_{0,j}=\psi_j, \quad v_{i,0}=\phi_i, \quad i=\overline{0,\mathcal{N}_1-1}, \ i=\overline{0,\mathcal{N}_2-1}, \quad l_1=\overline{1,m_1}, \quad l_2=\overline{1,m_2}.$$

Каждое равенство из (2) – это система линейных алгебраических уравнений с неизвестной

$\bar{v}_{i+1,j+1}=(v_{i+1,j+1},\ldots,v_{i+1,j+m_2},\ldots,v_{i+m_1,j+1},\ldots,v_{i+m_1,j+m_2})^{\top}$. Коэффициенты $\bar{\gamma}_{l_1,l_3}$ и γ_{l_2,l_3} из (2) имеют вид $\bar{\gamma}_{l_1,l_3}=\mathcal{H}(m,s,l_3)|_{m=m_1,\ s=l_1}$,

$\gamma_{l_2,l_3}=\mathcal{H}(m,s,l_3)|_{m=m_2,\ s=l_2}$, где $\mathcal{H}(m,s,l_3)=(-1)^{m+l_3}\frac{C_m^{l_3}}{m!}\frac{d}{ds}\left(\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{m}(s-\nu)}{(s-l_3)}\right)$.

Для разностных схем (2) установлены достаточные условия корректности.

Список литературы

[1] *Гайдомак С.В., Чистяков В.Ф.* О системах не типа Коши-Ковалевской индекса (1,k) // Вычислительные технологии **10**:2 (2005), 45–59.

[2] *Гайдомак С.В.* Трёхслойный разностный метод решения линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных// Дифференциальные уравнения **46**:4 (2010), 583–594.

[3] *Гайдомак С.В.* Об устойчивости неявной разностной схемы для линейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных// Журнал вычислительной математики и математической физики **50**:4 (2010), 707–717.

[4] *Гайдомак С.В.* Метод сплайн-коллокации для линейных вырожденных гиперболических систем// Журнал вычислительной математики и математической физики **48**:7 (2008), 1230–1249.

[5] *Бормотова О.В., Чистяков В.Ф.* О методах численного решения и исследования систем не типа Коши-Ковалевской // Журнал вычислительной математики и математической физики **44**:8 (2004), 1380–1387.

[6] *Бояринцев Ю.Е., Корсуков В.М.* Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Вопросы прикладной математики.– Иркутск: СЭИ СО РАН (1975), 140–152.

Светлана Валерьевна Гайдомак
Учреждение РАН Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Россия
E-mail address: gaidamak@icc.ru

МНОЖЕСТВО НОРМАЛЬНОСТИ СЕМЕЙСТВА ИТЕРАЦИЙ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

А. М. Гайсин, Ж. Г. Рахматуллина

Пусть f - нелинейная целая функция комплексной переменной z. Определим ее естественные итерации следующим образом:

$$(1) \qquad f^0(z) = z,\ f^1(z) = f(z),\ \dots,\ f^{k+1}(z) = f(f^k(z)) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Определение 1. Множеством Фату $\mathcal{F}(f)$ (или множеством нормальности) функции f называется наибольшее открытое множество комплексной плоскости, на котором семейство итераций $\{f^k\}$, определяемых формулой (1), нормально в смысле Монтеля. Дополнение множества Фату называется множеством Жюлиа $\mathcal{J}(f) = \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}(f)$.

Мы рассматриваем целые трансцендентные функции вида

$$(2) \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n} \qquad (p_n \in \mathbb{N},\ 0 < p_n \uparrow \infty).$$

Как обычно, пусть $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $m(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|$.

В [1] доказана

Теорема 1. *Пусть целая функция f вида (2) удовлетворяет условию: существует $T_0 > 1$, такое, что*

$$(3) \qquad \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r^{T_0})}{\ln M(r)} > T_0.$$

Если при некотором $\eta > 0$

$$(4) \qquad p_n > n \ln n (\ln\ln n)^{2+\eta} \qquad (n \geqslant n_0),$$

то каждая компонента множества $\mathcal{F}(f)$ ограничена.

С другой стороны, при условии (4) верно утверждение (без ограничения (3)) [2]: для любой целой функции f вида (2) при $r \to \infty$ вне некоторого множества нулевой логарифмической плотности

$$(5) \qquad \ln M(r) = (1 + o(1)) \ln m(r).$$

Но последняя оценка, которая по существу используется при доказательстве теоремы 1, верна при более слабых условиях [2]: $n = o(p_n)$ при

$n \to \infty$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \ln \frac{p_n}{n} < \infty. \tag{6}$$

На этом основано усиление теоремы 1, полученное в [3].

Оказывается, теорема 1 остается верной и в самой общей ситуации, а именно: условие (6) можно заменить на пару оптимальных условий, при выполнении которых для любой функции вида (2) справедлива оценка типа (5) [4]. Данная пара условий является критерием выполнения оценки типа (5) и состоит из условия Фейера и некоторого условия на концентрацию точек p_n. Таким образом, верна

Теорема 2. *Пусть f — целая трансцендентная функция, заданная лакунарным степенным рядом* (2)*, для которой при некотором $T_0 > 1$ верна оценка* (3)*. Если выполняется пара условий*

$$\textit{1)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty; \qquad \textit{2)}\quad \int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2} dt < \infty,$$

где $c(t) = \max\limits_{p_n \leqslant t} q_n, \qquad q_n = -\ln|q'(p_n)|, \qquad q(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z^2}{p_k^2}\right)$, *то каждая компонента множества $\mathcal{F}(f)$ ограничена.*

Условие лакунарности по Фейеру является и необходимым для того, чтобы для любой целой функции f вида (2) каждая компонента множества $\mathcal{F}(f)$ была ограничена. Вопрос о существенности условия *2)* пока остается открытым.

Список литературы

[1] *Wang Yu.* On the Fatou set of an entire function with gaps // Tohoku Math. J. **53**:1 (2001), 163–170.

[2] *Гайсин А. М.* Об одной теореме Хеймана // Сиб. матем. журн. **39**:3 (1998), 501–516.

[3] *Рахматуллина Ж. Г.* О множестве Фату целой трансцендентной функции // Спектральная теория операторов и ее приложения: материалы международной конференции посвященной памяти профессора А. Г. Костюченко. Уфа: РИЦ БашГУ 2011, с. 74.

[4] *Гайсин А. М., Рахматуллина Ж. Г.* Поведение минимума модуля ряда Дирихле на системе отрезков // Уфим. матем. журн. **2**:3 (2010), 37-43.

Ахтяр Магазович Гайсин
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН
E-mail address: gaisinam@mail.ru

Жанна Геннадьевна Рахматуллина
Башкирский Государственный Университет, Россия
E-mail address: rakhzha@gmail.com

ПОЛНЫЕ АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАМЕ В ОБЛАСТИ С МАЛОЙ ПОЛОСТЬЮ

Д. Б. Давлетов

Пусть Ω и ω — связные ограниченные области в $\mathbb{R}^3$ с гладкими границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Не ограничивая общности будем считать, что начало координат лежит в Ω и ω. Пусть $\omega_\varepsilon := \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x}\varepsilon^{-1} \in \omega\}$, $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$. Через $\triangle^*$ обозначим оператор Ламе:

$$\triangle^* := \triangle + \alpha \, \nabla \operatorname{div},$$

где $\alpha := \frac{\lambda+\mu}{\mu}$, а λ, $\mu > 0$ – постоянные Ламе. Рассматривается следующая сингулярно возмущенная краевая задача Дирихле на собственные значения:

$$-\triangle^* \boldsymbol{z}_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \lambda_\varepsilon \boldsymbol{z}_\varepsilon(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_\varepsilon, \quad \boldsymbol{z}_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_\varepsilon. \tag{1}$$

Для (1) назовем предельной краевую задачу:

$$-\triangle^* \boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{x}) = \lambda_0 \boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Известно (см., например, [1]), что существуют счетные множества собственных значений краевых задач (1), (2), все собственные значения вещественны и накапливаются только на бесконечности.

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть λ_0 – простое собственное значение предельной краевой задачи (2), а $\boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{x})$ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная вектор-функция этой краевой задачи и $\boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{0}) \neq \boldsymbol{0}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) существует одно и, к тому же, простое собственное значение λ_ε возмущенной краевой задачи (1), сходящееся к собственному значению λ_0 предельной краевой задачи (2) при $\varepsilon \to 0$;

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00530) и программы "Ведущие научные школы" (НШ-6249.2010.1).

б) степенная асимптотика собственного значения λ_ε возмущенной краевой задачи (1) имеет вид:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j, \quad \varepsilon \to 0$$

с константой

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi} \boldsymbol{z}_0^T(\mathbf{0}) C(\omega, \alpha) \boldsymbol{z}_0(\mathbf{0}),$$

где T – знак транспонирования, $C(\omega, \alpha)$ – положительно определенная матрица, коэффициенты которой зависят от геометрии области ω и постоянных Ламе λ и μ, а степенные асимптотики соответствующей собственной вектор-функции $\boldsymbol{z}_\varepsilon(\boldsymbol{x})$, нормированной в $L_2(\Omega_\varepsilon)$, имеют вид:

$$\boldsymbol{z}_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = (1 + \varphi(\varepsilon)) \left(\boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{z}_i(\boldsymbol{x}) \right)$$

при $\quad \boldsymbol{x} \in \Omega \setminus \overline{B\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)} \quad$ *в* $\quad H_0^1\left(\Omega \setminus \overline{B\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)}\right)$,

$$\boldsymbol{z}_\varepsilon(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{v}_\varepsilon\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right) = (1 + \varphi(\varepsilon)) \left(\boldsymbol{v}_0\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{v}_i\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right) \right)$$

при $\quad \boldsymbol{x} \in B\left(2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) \quad$ *в* $\quad H_0^1\left(B\left(2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)\right)$, *где* $\quad \varphi(\varepsilon) \to 0 \quad$ *при* $\quad \varepsilon \to 0$, $B(R)$ *– трехмерный шар радиуса R с центром в начале координат,* $\boldsymbol{z}_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{O}\left(|\boldsymbol{x}|^{-i}\right)$ *при* $|\boldsymbol{x}| \to 0$ *и* $\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^i\right)$ *при* $|\boldsymbol{\xi}| \to \infty$, *где* $\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}$.

При построении асимптотик собственных элементов краевой задачи (1) используется метод согласования асимптотических разложений [2].

Список литературы

[1] *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990.

[2] *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1989.

Давлетов Дмитрий Борисович
Башкирский государственный педагогический университет им.М.Акмуллы, Россия

E-mail address: DavletovDB@mail.ru

ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ B-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М. Ю. Денисова

Пусть E_3^+ – полупространство $x_3 > 0$ евклидова пространства E_3 точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, D – симметричная относительно координатной плоскости $x_3 = 0$ область, ограниченная поверхностью Γ. Обозначим через D^+ и Γ^+ – части D и Γ, расположенные в E_3^+. Область D^+ ограничена поверхностью Γ^+ и частью $\Gamma^{(0)}$ координатной плоскости $x_3 = 0$.

В этой области рассматривается уравнение

$$\Delta_B^3 u = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_B = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + B_{x_3}$, $B_{x_3} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{k}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}$ – оператор Бесселя, $k > 1$.

Фундаментальные решения уравнения (1) с особенностью в произвольной точке ξ получим, применив к фундаментальным решениям этого уравнения оператор обобщенного сдвига

$$Q_1(x;\xi) = C_k \int\limits_0^\pi \left((x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + x_3^2 + \xi_3^2 - 2x_3\xi_3\cos\varphi\right)^{\frac{-k-1}{2}} \sin^{k-1}\varphi d\varphi,$$

$$Q_2(x;\xi) = C_k \int\limits_0^\pi \left((x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + x_3^2 + \xi_3^2 - 2x_3\xi_3\cos\varphi\right)^{\frac{-k+1}{2}} \sin^{k-1}\varphi d\varphi,$$

$$Q_3(x;\xi) = C_k \int\limits_0^\pi \left((x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + x_3^2 + \xi_3^2 - 2x_3\xi_3\cos\varphi\right)^{\frac{-k+3}{2}} \sin^{k-1}\varphi d\varphi,$$

где $C_k = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)/\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$.

Следуя схеме, предложенной в работе [1], построим потенциалы, являющиеся решениями уравнения (1)

$$V_1(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma^+} \mu_1(\xi)\left(3\frac{\partial Q_2}{\partial n_\xi} - \frac{1}{3}\frac{\partial^3 Q_3}{\partial n_\xi^3}\right)\xi_3^k d\Gamma,$$

$$V_2(x) = \frac{k+3}{\pi}\int\limits_{\Gamma^+} \mu_2(\xi)\left(Q_1 - 2\frac{\partial^2 Q_2}{\partial n_\xi^2} + \frac{1}{9}\frac{\partial^4 Q_3}{\partial n_\xi^4}\right)\xi_3^k d\Gamma,$$

$$V_3(x) = \frac{(k+3)(k+5)}{3\pi} \int\limits_{\Gamma^+} \mu_3(\xi) \left(-\frac{\partial Q_1}{\partial n_\xi} + \frac{2}{3} \frac{\partial^3 Q_2}{\partial n_\xi^3} - \frac{1}{45} \frac{\partial^5 Q_3}{\partial n_\xi^5} \right) \xi_3^k d\Gamma,$$

где $\mu_1(\xi)$, $\mu_2(\xi)$, $\mu_3(\xi)$ – плотности соответствующих потенциалов; n_ξ – внешняя нормаль к границе Γ^+ в точке ξ; ξ – переменная точка границы Γ^+; x – переменная точка полупространства E_3^+.

Предельные значения потенциалов $V_1(x)$, $V_2(x)$ и нормальной производной потенциала $V_1(x)$ на границе Γ^+ равны их прямым значениям. Для других предельных соотношений справедливы следующие далее теоремы

Теорема 1. *Пусть $\Gamma \in \Lambda_3$, тогда справедливы следующие предельные соотношения*

$$\lim_{x \to \xi_0} \Delta_B V_1(x) = \pm A_k \mu_1(\xi_0) + \overline{\Delta_B V_1(\xi_0)},$$

$$\lim_{x \to \xi_0} \frac{\partial V_2(x)}{\partial n_{\xi_0}} = \mp A_k \mu_2(\xi_0) + \overline{\frac{\partial V_2(\xi_0)}{\partial n_{\xi_0}}},$$

$$\lim_{x \to \xi_0} V_3(x) = \pm A_k \mu_3(\xi_0) + \overline{V_3(\xi_0)},$$

$$\lim_{x \to \xi_0} \Delta_B V_2(x) = \pm B_k \mu_2(\xi_0) \widetilde{æ}(\xi_0) + \overline{\Delta_B V_2(\xi_0)},$$

$$\lim_{x \to \xi_0} \frac{\partial V_3(x)}{\partial n_{\xi_0}} = \pm B_k \widetilde{æ}(\xi_0) \mu_3(\xi_0) + \overline{\frac{\partial V_3(\xi_0)}{\partial n_{\xi_0}}},$$

$$\lim_{x \to \xi_0} \Delta_B V_3(x) = \pm N_k \mu_3(\xi_0) \overline{\overline{æ}}(\xi_0) + \overline{\Delta_B V_3(\xi_0)},$$

где $A_k = \Gamma(\frac{k+1}{2})/\Gamma(\frac{k+3}{2})$, $\quad B_k = 2\Gamma(\frac{k+1}{2})/3\Gamma(\frac{k+3}{2})$, $\quad N_k = 5\Gamma(\frac{k+1}{2})/12\Gamma(\frac{k+3}{2})$, $\widetilde{æ}(\xi_0) = \frac{æ_1(\xi_0)+æ_2(\xi_0)(k+1)}{2}$, $\overline{\overline{æ}}(\xi_0) = 3æ_1^2(\xi_0)+2æ_1(\xi_0)æ_2(\xi_0)(k+1)+æ_2(\xi_0)(k+3)(k+1)$, $æ_1$ *и* $æ_2$ *максимальные и минимальные кривизны* Γ^+.

В теореме верхний знак берется для предела изнутри, нижний – для предела извне, относительно границы Γ^+. Черта сверху означает прямое значение.

Список литературы

[1] *Лопатинский Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. матем. журнал. **2**:5 (1953), 123-151.

Марина Юрьевна Денисова
Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Россия
E-mail address: `denisova_mar@mail.ru`

О КОММУТАНТАХ И КОММУТАТОРАХ, СВЯЗАННЫХ С ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

И.С.Елисеев

В этой работе рассматриваются коммутаторы, совпадающие с коммутантами дифференцирования и коммутанты интегрирования как операции, обратной дифференцированию. Пусть

$$D^n = \frac{d^n}{dz^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad I_a f(z) = \int_a^z f(t)dt.$$

Обозначим $l_a[d,r]$ множество операторов, действующих из топологического векторного пространства (ТВП) d в ТВП r (и из ТВП $l[d]$ в ТВП $l[r]$), удовлетворяющих уравнению

(1) $$lK - Kl = A$$

и $H(m)$ — множество функций, аналитических на m.

Теорема 1. *Пусть $A \in D_0\{H(M), H(m_A)\}$. Если M, m, m_a — односвязные области из $\mathbb{C}$, то общий вид оператора K из $D_A\{H(M), H(m_A)\}$ дается формулой*

$$Kf(z) =< h, (\int f)(\eta + z) > +z < \rho, f(\eta + z) >,$$

где h и ρ удовлетворяют условиям

$$\Phi_{M,m}, \quad \Phi_{M,m_a}, \qquad < h, 1 >= 0$$

(см. [1], здесь ρ — функционал, определяющий оператор A).

Теорема 2. *Пусть $a \in m, m \in M$, а m и M — односвязные области, причем m — звездообразная относительно a. Тогда общий вид оператора из $(I_a)_0(H(M), w(m))$ дается формулой*

$$Jf(z) = cf(z) + \int_a^z J_1(t) f(z + a - t)dt,$$

где

$$J_1(t) \in H(m), c \in \mathbb{C}.$$

Список литературы

[1] *Елисеев И.С.* Об операторах, коммутирующих с кратным дифференцированием // Межвузовский сборник "Вопросы аппроксимации функций комплексного переменного". Уфа: БФАН СССР, 1980, 48–68.

Игорь Спартакович Елисеев
Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ФЛАМАНА В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА

В. И. Ершов

Ссылаясь на двукратное - трехкратное преувеличение прогноза перемещения по сравнению с натурными испытаниями в задаче о действии силы на полуплоскость, крупнейший специалист по механике грунтов М.И. Горбунов-Посадов писал [1]: "Возникает вопрос, нельзя ли решение Фламана, по традиции удерживающееся в теории упругости уже 90 лет, заменить другим, более строгим решением?". Это и аналогичные расхождения в задачах теории упругости в криволинейных координатах имеют место в связи с невыполнением одного из двух требований к задачам механики деформируемого твердого тела:

1. Все члены системы дифференциальных уравнений должны быть получены для деформированного состояния;

2. Все члены системы дифференциальных уравнений должны быть записаны в одной и той же системе отсчета.

Первое требование, являющееся абсолютным законом для теории упругости, настолько очевидно, что его выполнение предполагается естественным. Второе- тривиальная математическая истина. Нарушение любого из них приводит к некорректности решения задачи. На первом этапе вопрос состоит не в процедурах решения системы дифференциальных уравнений в частных производных для одной из сложных задач теории упругости, а в формировании этой системы уравнений с учетом указанных требований и только потом возникает вопрос о решении корректно полученной системы уравнений. В связи с этим следует подробно остановиться на вопросе о переменных, используемых в задачах механики деформируемого твердого тела, ибо именно с этим связаны рекомендации, направленные на развитие решения задачи Фламана и решений близких задач.

Главная особенность системы дифференциальных уравнений в задаче Фламана и близких к ней состоит в том, что искомые функции U, V являются разностью между переменными Эйлера и переменными Лагранжа и потому следует обсуждать не системы отсчета вообще, а частный случай, когда две системы отсчета зависимы.

Переменная Лагранжа есть координата для недеформированного состояния точки, а переменная Эйлера есть координата для деформированного состояния. В рассматриваемой задаче теории упругости искомая функция зависит от двух переменных Θ, R. Каждому искомому перемещению соответствует некоторая поверхность, которая при традиционном подходе невидима, ибо все точки рассматриваемой плоскости в процессе деформирования остаются в одной и той же плоскости, что совершенно исключает проявление эффекта пространства. Поверхность можно представить осязаемой, если ввести цилиндрическую систему координат и искать в ней положение каждой точки. Геометрическое место концов этих векторов дает искомую поверхность. Если принять значение аргументов в недеформированном состоянии (переменные Лагранжа) и из полученной точки отложить третью координату $|U|$, отличную от нуля, то получим некорректную ситуацию: нет приращения координат - нет и функции (модуль $|U|$ должен быть равен нулю). В данном случае координаты точки, являясь переменными Лагранжа, отрицают приращение координат и, следовательно, отрицают саму искомую функцию. Корректной картина для искомой поверхности будет, если отрезок $|U|$ отложить в точке, соответствующей её деформированному положению, что соответствует переменным Эйлера и заставляет задачу Фламана о перемещениях представлять только в переменных Эйлера.

В системе дифференциальных уравнений 1892 года для перемещений в задаче Фламана, решаемой в переменными Лагранжа, в левой части деформированное состояние описывается соотношениями Коши, а в правой части имеем ситуацию для абсолютно-жесткого тела (постоянная в функции напряжений определялась из уравнения равновесия абсолютно-твердого тела - нарушение требования 1). Необходимо эту систему уравнений преобразовать в переменные Эйлера, обращая особое внимание для двух функций на связь между первыми производными в переменных Лагранжа и в переменных Эйлера. Вновь получаемая система дифференциальных уравнений корректна, является физически линейной, а математически - нелинейной. Уравнения проинтегрировать не представляется возможным. При малых деформациях удается преобразовать систему уравнений к математически и физически линейному случаю и получить решение [2].

Приведенное сопоставление систем отсчета для данной задачи соответствует эксперименту, на который опирался М.И. Горбунов-Посадов. Эксперимент НИИ, приведенный в [1], подтверждает необходимость использования переменных Эйлера в рассматриваемой задаче.

Следует отметить, что решение задача Фламана получено с помощью трехмерного решения Буссинеска и потому изложенная последовательность решения задачи Фламана также распространена на задачу Буссинеска о действии силы на полупространство

Список литературы

[1] *Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И.* Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984.

[2] *Ершов В. И.* Формирование и решение системы дифференциальных уравнений в задаче Фламана в однородном базисе // Межведомственный сборник научно-методических статей "Теоретическая и прикладная механика". Выпуск 20. Минск, 2006. С. 131-133.

Виталий Ильич Ершов
Российская Академия Естествознания, Москва, Россия
E-mail address: ershov41@gmail.com

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛАМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. В. Жибер, О. С. Костригина

В работе [1] приведена схема сведения задачи Гурса для интегрируемых гиперболических систем уравнений экспоненциального вида к решению динамической системы.

Задачи Коши и Гурса для линейных систем уравнений исследовались во многих работах (см., например, [2]-[4]).

В настоящей работе рассматривается задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y) \ (u^i_{xy} = F^i, \ i = 1, 2) \tag{1}$$

с интегралами первого и второго порядка

$$\begin{gathered} \omega^1(u^1, u^2, u^1_x, u^2_x), \ \omega^2(u^1, u^2, u^1_x, u^2_x, u^1_{xx}, u^2_{xx}), \ (\bar{D}(\omega^1) = \bar{D}(\omega^2) = 0), \\ \bar{\omega}^1(u^1, u^2, u^1_y, u^2_y), \ \bar{\omega}^2(u^1, u^2, u^1_y, u^2_y, u^1_{yy}, u^2_{yy}), \ (D(\bar{\omega}^1) = D(\bar{\omega}^2) = 0). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $D(\bar{D})$ – оператор полного дифференцирования по переменной $x(y)$.

Отметим, что задача классификации интегрируемых систем уравнений (1), (2) рассматривалась в работе [5]. При этом были получены следующие интегрируемые системы уравнений

$$\begin{gathered} u^1_{xy} = \frac{u^1_x u^1_y}{X} + \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{\alpha Y}\right) u^1_x u^2_y, \quad u^2_{xy} = \frac{u^2_x u^2_y}{Y} + \left(\frac{1}{\alpha X} + \frac{1}{\alpha^2 Y}\right) u^1_x u^2_y, \\ X = u^1 + u^2 + c, \quad Y = \frac{u^1}{\alpha^2} + u^2 - c \end{gathered} \tag{3}$$

(4)

$$\begin{gathered} u^1_{xy} = \frac{u^2}{X} u^1_x u^1_y + \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{\alpha Y}\right) u^1 u^1_x u^2_y, \quad u^2_{xy} = \frac{u^1}{Y} u^2_x u^2_y + \left(\frac{\alpha}{X} + \frac{1}{Y}\right) u^2 u^1_x u^2_y, \\ X = u^1 u^2 + d_2, \quad Y = u^1 u^2 + c_2, \quad \frac{\alpha + 1}{\alpha} d_2 = (\alpha + 1) c_2, \end{gathered}$$

где c – произвольная постоянная, $c_2, \ d_2, \ \alpha$ – ненулевые постоянные.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 10-01-00088-а, 10-01-91222-СТ-а, 11-01-97005-р-поволжье-а).

В работе построены явные формулы решений задачи Гурса для систем уравнений (3),(4) с данными на характеристиках

$$
\begin{aligned}
&u^1(x_0,y)=\phi_1(y), \quad u^2(x_0,y)=\phi_2(y),\\
&u^1(x,y_0)=\psi_1(x), \quad u^2(x,y_0)=\psi_2(x).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Так, например, решение задачи Гурса (4), (5) при $\alpha=-1$ и $c_2+d_2\neq 0$ дается формулами

$$
u^1(x,y)=\left(\frac{2d_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{\Psi(x)}{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)+c}-\frac{\bar{\Phi}'(y)}{\bar{\Phi}(y)\bar{\Psi}'(y)}\right)(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)+c)^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}}\frac{\bar{\Phi}(y)}{\Phi(x)},
$$

$$
u^2(x,y)=\left(\frac{2c_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{\bar{\Psi}(y)}{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)+c}-\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)\Psi'(x)}\right)(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)+c)^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}\frac{\Phi(x)}{\bar{\Phi}(y)},
$$

где

$$
\bar{\Phi}(y)=\exp\left(-\int_{y_0}^{y}\frac{\phi_1(y)\phi_2'(y)}{c_2+\phi_1(y)\phi_2(y)}dy\right),
$$

$$
\bar{\Psi}(y)=\frac{1}{c_2}\left(\phi_2(y)\bar{\Phi}(y)-\phi_2(y_0)\right)c^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}},
$$

$$
\Phi(x)=\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{\psi_1'(x)\psi_2(x)}{d_2+\psi_1(x)\psi_2(x)}dx\right),
$$

$$
\Psi(x)=\frac{1}{d_2}\left(\psi_1(x)\Phi(x)-\psi_1(x_0)\right)c^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}.
$$

Список литературы

[1] *Лезнов А. Н., Шабат А. Б.* Условия обрыва рядов теории возмущений // Интегрируемые системы. БФАН СССР. 1982. С. 34–44.

[2] *Чекмарев Т. В.* Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, вып 9. С. 1614–1622.

[3] *Жегалов В. И., Миронова Л. Б.* Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными // Изв. вузов. Матем. 2007. Т. 3. С. 12–21.

[4] *Воронова Ю. Г.* О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 2. С. 20–26.

[5] *O. S. Kostrigina and A. V. Zhiber* Darboux-integrable two-component nonlinear hyperbolic systems of equations // J. Math. Phys. 52, 033503 (2011); doi:10.1063/1.3559134 (32 pages).

Анатолий Васильевич Жибер
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Россия
E-mail address: zhiber@mail.ru

Ольга Сергеевна Костригина
Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия
E-mail address: kostrigina@mail.ru

ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ, В КОТОРОЙ ТИП НАИЛУЧШЕЙ РЕШЕТКИ ЗАВИСИТ ОТ КОЛИЧЕСТВА УЗЛОВ

А.В. Захаров

Псевдометрика

Зададим условия на множество Con в пространстве R^{d+1}. Пусть декартовы координаты в R^{d+1} обозначены через x_0, x_1, x_2, ..., x_d, а начало координат через O.

Условие 1. Сечение множества Con плоскостью $x_0 = C$, $C > 0$, представляет собой в пространстве $R^d(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ границу выпуклого множества, симметричного относительно начала координат.

Условие 2. Сечение множества Con любой плоскостью проходящей через координатную ось Ox_0, представляет собой график функции $x_0 = f(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = \|(x_1, x_2, \ldots, x_d)\|$, $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ - точка в R^d, $\|.\|$ - евклидово расстояние от точки $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in R^d$ до начала координат O, $f(.)$ - строго возрастающая функция на луче $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$.

Рассмотрим функцию в пространстве $R^d(x_1, x_2, \ldots, x_d)$

$$\rho(0, x) = f(\tilde{x}) = f(\|x_1, x_2, \ldots, x_d\|), x \in R^d.$$

Доопределим функцию для произвольного первого аргумента:

$$\rho(x, y) = \rho(0, y - x), x, y \in R^d.$$

Несложно показать, что для функции $\rho(x, y)$ на пространстве $R^d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполняются свойства метрики, за исключением неравенства треугольника. Мы будем называть такую функцию псевдометрикой.

Если все сечения множества Con гиперплоскостью $x_0 = C$, $C > 0$, представляют собой (выпуклые) множества, гомотетичные относительно точки пересечения с осью Ox_0, псевдометрика становится обычной метрикой Римана с выпуклой индикатрисой (см., например, [1]).

Постановка общей задачи

Задача 1. Пусть функция $f(x)$, $x \in X \subset R^d$, принадлежит пространству (гельдеровых) функций

$$L = \{f : |f(x) - f(y)| < \rho(x, y)\},$$

где $\rho(., .)$ - псевдометрика.

Рассмотрим задачу апроксимации функции $f(x)$, $x \in X$, функцией

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_n)\chi(x \in \Delta_k),$$

где $\{x_k\}_{k=1}^n$ - точки из X, $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$ - разбиение X, $\chi(x \in \Delta_k) = \{0, x \notin \Delta_k; 1, x \in \Delta_k\}$.

В качестве ошибки выберем $\varepsilon = \int\limits_T |f(x) - f_n(x)|^\alpha$, $\alpha > 0$.

Задача состоит в том чтобы найти набор $\{x_k, \Delta_k\}$ доставляющий минимум (наилучшая решетка) или асимптотический минимум при $n \to \infty$ (асимптотически оптимальная решетка)

Численный эксперимент

Для нашей цели интересны псевдорасстояния, для которых сечения множества Con плоскостью $x_0 = C$, представляют собой в пространстве различные множества в зависимости от уровня $C > 0$. В качестве примера рассмотрим псевдорасстояние $\rho(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^\gamma (x, y)\right)^{-\gamma(x,y)}$, где $\|x - y\|$ - евклидово расстояние между x и y, $\gamma = \{\|x - y\|$, если $\|x - y\| \geq 1$; 1, если $0 \leq \|x - y\| < 1\}$.

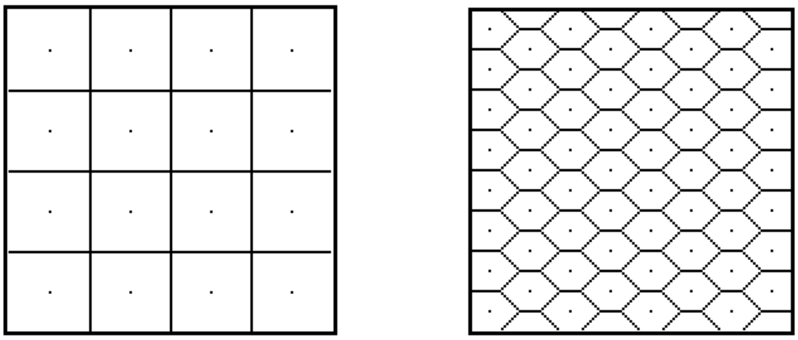

Рис.1. Для разного количества узлов тип решетки может быть разным

Список литературы

[1] Основы финслеровой геометрии и ее приложения в физике // Под общ. ред. Г.Ю.Богословского, В.О.Гладышева, Д.Г.Павлова. М.: МГТУ им. Баумана, 2010. 412 с.

Андрей Владимирович захаров
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Россия
E-mail address: andrewzakhar@mail.ru

РАССТОЯНИЕ МИНКОВСКОГО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА СО СЛУЧАЙНОЙ ИНДИКАТРИСОЙ

А. В. Захаров

Рассмотрим пространство R^{d+1} с координатами $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_d$ и началом координат O. Также рассмотрим точку O_M с координатами $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_d = 0$, плоскость P, заданную уравнением $\{x_0 = 1\}$, в плоскости P случайное выпуклое множество $M^\omega \subset P \subset R^d$, симметричное относительно точки O_M.

Рассмотрим случайный конус Con_M^ω с основанием в точке O и образующей ∂M^ω (границей случайного множества M^ω в плоскости P).

Пусть уравнение конуса Con_M^ω задается случайной функцией

$$x_0 = f^\omega(x_1, x_2, \ldots, x_d) = f^\omega(x),\ x \in R^d$$

Определим случайную функцию псевдорасстояния в пространстве $R^d(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ следующим образом:

$$\rho^\omega(0, x) = f^\omega(x),\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in R^d.$$

Доопределим случайное псевдорасстояние для произвольного первого аргумента:

$$\rho^\omega(x, y) = \rho^\omega(0, y - x), x, y \in R^d.$$

Свойство 1. Все реализации случайного псевдорасстояния $\rho^\omega(.,.)$ (при фиксированном ω) являются метрикой Минковского выпуклого множества (в частности, выполняются все свойства метрики).

Определение. Индикатрисой случайной метрики $\rho^\omega(.,.)$ назовем границу ∂M^ω множества M^ω в плоскости P.

Поскольку плоскость P параллельна плоскости $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, указанные координаты можно применять и на плоскости P. Кроме того, на P можно рассмотреть полярные кординаты:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2},\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{d-1}),$$

где φ - обобщенный угол.

Так как каждая реализация множества M^ω в плоскости P есть выпуклое множество, симметричное относительно точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_d = 0$, его границу можно задать при помощи уравнения $r = \rho^\omega(\varphi)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{d-1})$. Заметим, что $\rho^\omega(\varphi)$ - случайная функция.

Определение. Если существует математическое ожидание $\rho^E(\varphi) = \mathbf{E}\ \rho^\omega(\varphi)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{d-1})$, тогда метрику с образующей конуса $r = \rho^E(\varphi)$ назовем средней метрикой случайной псевдометрики $\rho^\omega(.,.)$.

Обозначение. $\rho^E(.,.) = \mathbf{E}\rho^\omega(.,.)$.

Определение. Если существует дисперсия $\rho^D(\varphi) = \mathbf{D}\ \rho^\omega(\varphi)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{d-1})$, тогда псевдометрику с образующей конуса $r = \rho^D(\varphi)$ назовем дисперсией случайной псевдометрики $\rho^\omega(.,.)$.

Обозначение. $\rho^D(.,.) = \mathbf{D}\rho^\omega(.,.)$.

Свойство 2. $\rho^E(.,.)$ является метрикой Минковского выпуклого множества (выполнены все свойства метрики, индикатриса - граница обычного выпуклого множества).

Свойство 3. $\rho^D(.,.)$ не является метрикой (индикатриса может не быть выпуклым множеством).

Средняя метрика $\rho^E(.,.)$ показывает усредненное значение случайной метрики, дисперсия $\rho^D(.,.)$ отображает разброс (отклонение) случайной метрики от своего среднего по каждому направлению.

Применение псевдометрики.

Определенная выше случайная псевдометрика может иметь различные применения для статистического анализа пространственных данных, например, в геостатистике. Для каждого конкретного региона характер изменения $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ некоторой характеристики $f(x)$ пласта может существенно отличаться и поэтому может трактоваться как случайная величина, в частности, при первом приближении интерпретироваться как метрика Римана выпуклого множества со случайной индикатрисой. В среднем же по большой области приращение (случайная псевдометрика) может иметь объяснимое среднее. В частности, если среднее случайной метрики имеет в качестве индикатрисы окружность, тогда несложно показать, что при всех случайных неоднородностях в целом оптимальным расположением скважин для исследования пласта будет расположение в узлах гексагональной решетки.

Список литературы

[1] *Hans Wackernagel.* Multivariate Geostatistics. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1995.

Андрей Владимирович Захаров
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Россия
E-mail address: andrewzakhar@mail.ru

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ МЕЛЛИНА МОНОМИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ВЕКТОР-РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Т. В. Зыкова

В 1921 году Х. Меллин [1] получил интегральную формулу для любой положительной степени μ решения $y(x)$ общего алгебраического уравнения, приведя его к виду

$$y^m + \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda y^\lambda - 1 = 0, \tag{1}$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}_+$ – конечное подмножество, $m > \lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Попутно было получено интегральное представление для любой отрицательной степени решения уравнения (1), т.е. для функции вида $y^{-\mu}(-x) := y^{-\mu}\left((-x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$, $\mu > 0$. Меллин не привел подробных обоснований в своей работе [1], хотя фактически применил формулу обращения для многомерного преобразования Меллина. Полное доказательство теорем обращения для многомерного преобразования Меллина приведено в работе [2].

Рассмотрим систему n алгебраических уравнений вида

$$y_i^{m_i} + \sum_{\lambda\in\Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0,\ i = 1,\dots,n, \tag{2}$$

с неизвестными $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{C}^n$ и переменными коэффициентами $x = \left(x_\lambda^{(i)}\right)$, где $\Lambda^{(i)} \subset \mathbb{Z}_+^n$ – конечные подможества, $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $y^\lambda := y_1^{\lambda_1}\cdots y_n^{\lambda_n}$. Обозначим через Λ дизъюнктное объединение множеств $\Lambda^{(i)}$ и пусть N есть мощность Λ, то есть число коэффициентов в системе (2). Рассматривается ситуация, когда $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{m_i} < 1$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Идеи Меллина, применительно к решению систем алгебраических уравнений, были развиты в ряде современных работ. В частности, в работе [3] формально вычислено преобразование Меллина мономиальной функции

$$\frac{1}{y^\mu(-x)} := \frac{1}{y_1^{\mu_1}(-x)\cdots y_n^{\mu_n}(-x)},\ \mu_i > 0, \tag{3}$$

Работа поддержана грантом Президента РФ для ведущих научных школ (НШ-7347.2010.1).

составленной из координат решения системы (2). Для вычисления интеграла, представляющего прямое преобразование Меллина функции (3) (4)

$$M\left[\frac{1}{y^{\mu}(-x)}\right](z)=\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\frac{1}{y^{\mu}(-x)}x^{z-I}dz,\ z=(z_1,\dots,z_N),\ I=(1,\dots,1),$$

в работе [3] была формально использована замена переменной $\xi\longrightarrow x$ (далее отображение $\Phi:\mathbb{R}^N_+\longrightarrow\mathbb{R}^N_+$) вида

$$(5)\qquad x_\lambda=\xi_\lambda\prod_{j=1}^{n}W_j^{-\frac{\lambda_j}{m_j}},\ W_j=1+\sum_{\tau\in\Lambda^{(j)}}\xi_\tau,\ \ \lambda\in\Lambda^{(i)},\ i=1,\dots,n.$$

Эта замена интересна уже тем, что она линеаризует систему (2) и в переменных $\xi=(\xi_\lambda)$ координаты решения системы (2) имеют простой вид $y_j(-x(\xi))=W^{\frac{1}{m_j}}$.

В настоящей работе обосновывается корректность замены (5) при вычислении интеграла (4), а именно, доказано, что степень отображения Φ (см. [4]) равна 1. Справедлива

Теорема 1. *Отображение Φ собственное. Его степень корректно определена и $deg\,\Phi=1$.*

Список литературы

[1] *Mellin H. R.* Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma // C.R. Acad. Sci., Paris Sér. I Math., **172**(1921), 658–661.

[2] *Антипова И. А.* Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений // Матем. сб., **198**:4 (2007), 3–20.

[3] *Антипова И. А.* О мономиальной функции вектор-решения общей системы алгебраических уравнений // Вестник Красноярского госуниверситета. Серия физ.-мат. науки, **1** (2005), 106–111.

[4] *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986, 760 с.

Татьяна Викторовна Зыкова
Сибирский федеральный университет, Россия
E-mail address: zykovatv@mail.ru

ОБ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЯХ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Н. В. Ибадов

Пусть Z- множество целых чисел и пусть $\alpha \in Z$. Через A обозначим множество всех числовых последовательностей на целочисленной точки $\alpha \in Z$. (См. [1]). т.е.

$$A = \{a : a = \{a_\alpha\}_{\alpha \in Z}\}. \tag{1}$$

Пусть $\rho > 0$ и $\sigma > 0$. В ведем пространство $A_{\rho,\sigma}$ - последовательностей $a = \{a_\alpha\}_{\alpha \in Z}$ удовлетворяющих неравенствам

$$|a_\alpha| \leq C(a) e^{\sigma|\alpha|^\rho}, \tag{2}$$

где $C(\alpha)$- постоянная зависящая от последовательности $a = \{a_\alpha\}_{\alpha \in Z}$ и $\sigma > 0$. Рассмотрим в случае $\rho = 1$ пространство $A_{\rho,\sigma}$, т.е.

$$A_{1,\sigma} = \{a : a = \{a_\alpha\}_{\alpha \in Z}, |a_\alpha| \leq C(a) e^{\sigma|\alpha|}\}. \tag{3}$$

В пространстве $A_{1,\sigma}$ определим норму

$$\|a\|_{1,\sigma} = \sup_\alpha \frac{|a_\alpha|}{e^{\sigma|\alpha|}} < \infty. \tag{4}$$

С нормой (4) пространства $A_{1,\sigma}$ являются нормированными пространствами, т.е. для положительного σ рассмотрим следующее нормированное пространство двухсторонних числовых последовательностей:

$$A_{1,\sigma} = \{a : a = \{a_\alpha\}_{\alpha \in Z}, |a_\alpha| \leq C(a) e^{\sigma|\alpha|}, \|a\|_{1,\sigma} = \sup_\alpha \frac{|a_\alpha|}{e^{\sigma|\alpha|}} < \infty\}. \tag{5}$$

Пространства $A_{1,\sigma}$- банаховы (См. [2], стр. 139). Рассмотрим пространство

$$A_{1,\infty} = \bigcup_{\sigma > 0} A_{1,\sigma} = \bigcup_{\sigma > 0} \{a : a = \{a_\alpha\}_{\alpha \in Z}, \in A, |a_\alpha| \leq C(a) e^{\sigma|\alpha|}, \sigma = \sigma(a)\}.$$

В пространстве $A_{1,\infty}$определена норма

$$\|a\|_{1,\sigma} = \sup_\alpha \frac{|a_\alpha|}{e^{\sigma|\alpha|}} < \infty.$$

$A_{1,\infty}$ есть индуктивный предел пространств $A_{1,\sigma}$, т.е. $A_{1,\infty} = \lim\limits_{\sigma>0} ind A_{1,\sigma}$ (см. [3], стр. 118-121 и [4]). Рассмотрим сопряженное пространство

$$A^*_{1,\infty} = \bigcap_{\sigma>0} A^*_{1,\sigma} = \bigcap_{\sigma>0} \{b : b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in Z}, \in A, |b_\alpha| \leq B(b) e^{-\widetilde{\sigma}|\alpha|}, \widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}(b)\},$$

к пространству $A_{1,\infty}$. Пространство $A^*_{1,\infty}$ есть проективный предел пространств $A^*_{1,\sigma}$, т.е. $A^*_{1,\infty} = \lim\limits_{\sigma>0} pr A^*_{1,\sigma}$ (см. [3], стр. 118-121 и [4]). Напишем $A_{1,\infty}$ в терминах преобразования Меллина.

Определение 1. Пусть функционал $F \in A^*_{1,\infty}$. Преобразованием Меллина функционала Fназывается функция $\hat{F}(z) = (F, z^\alpha)$, где $z^\alpha \in C_* = C \backslash \{0\}$, $C-$ комплексная плоскость.

Функционал F имеет вид $F = \{b : b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in Z}\}$. Тогда преобразование Мелина $\hat{F}(z)$ имеет вид ряда Лорана, т.е.

$$\hat{F}(z) = (F, b) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} b_\alpha z^\alpha$$

В работе для любого целого m определяется понятие оператора сдвига S_m и оператора свертки M_F.

Определение 2. Оператор $S_B a$, $m \in Z$, $a \in A$ действующий в пространстве всех последовательностей A по правилу $(S_m a)_\alpha = a_{\alpha+m}$ называется оператором сдвига на m позиций.

Пусть $F \in A^*_{1,\infty}$, т.е. $F = b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in Z} \in A^*_{1,\infty}$.

Определение 3. Оператором свертки порожденном функционалом $F \in A^*_{1,\infty}$, называется оператор M_F действующий по правилам:

$$M_F[a = \{a_\alpha\}_{\alpha\in Z}] = (F, \{a_{\alpha+m}\})_{m\in Z} = c\{c_m\}_{m\in Z},$$

где $c = \{c_m\}_{m\in Z} = (F, (a_{\alpha+m}))_{\alpha\in Z}$ и $a = \{a_\alpha\}_{\alpha\in Z} \in A_{1,\infty}$. Функционал $F = b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in Z} \in A^*_{1,\infty}$ определяет оператора свертки в виде

$$M_F[a] = M_b[a] \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} b_\alpha a_{\alpha+m}, m = 0, \pm1, \pm2, \pm\cdots \tag{6}$$

Лемма 1. $M_b[a] \in A_{1,\infty}$.

Рассмотрим однородные уравнение свертки

$$M_b[a] = 0. \tag{7}$$

Напишем решение однородного уравнение свертки (7). Пусть $\widetilde{z} = (z^\alpha)_{\alpha\in Z} \in A_{1,\infty}$.

Теорема 1. Для любогоj, $\widetilde{z}_j = \{z_j^\alpha\}$ есть решение однородного уравнение свертки $M_b[a] = 0$.

Доказательство. Обозначим через $\hat{b}(\widetilde{z})$ характеристическую функцию вида

$$\hat{b}(\widetilde{z}) = (b, \widetilde{z}) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} b_\alpha z^\alpha. \tag{8}$$

Пусть $z_1, z_2, ...z_n, ...$ простые нули характеристические функции $\hat{b}(\widetilde{z})$. Тогда,

$$\widetilde{z}_1 = \{z_1^\alpha\}, \widetilde{z}_2 = \{z_2^\alpha\}, \ldots, \widetilde{z}_n = \{z_n^\alpha\}, \cdots \in A_{1,\infty}.$$

$$M_b[z_j^\alpha] = \sum b_\alpha z_j^{\alpha+m} = \sum (b_\alpha z_j^\alpha) z_j^m = z_j^m \hat{b}(\widetilde{z}_j) = 0,$$

где $\hat{b}(\underset{j}{\widetilde{z}}) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} b_\alpha z_j^\alpha = 0$, $\hat{b}(\widetilde{z}_j)$ есть преобразование Мелина. В случае $z_1, z_2, ...z_n, ...$есть нули функции (8) соответственно порядка $p_1, p_2, ...p_n, ...$ Теорема 1 доказывается аналогично.

Список литературы

[1] *Ibadov N. V.* Biunique correspondence between the spaces $A^*_{1,\infty}$ and $H\ (C_*)$ through Mellin transformation // Book of conference of new problems mathematics saints and practice and methods, 2011, Gandja, Azerbaijan, p.12-18.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1976, 544 стр.

[3] *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967, 258 стр.

[4] *Себастьян-и-Сильва Ж.* О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях // Сб. Математика, 1957, Т. 1. № 1, 60-77.

Надир Вели Ибадов
Гянджинский Государственный Университет , Азербайджан
E-mail address: nadir_ibadov@yahoo.com

ОБ ОПЕРАТОРЕ СУЖЕНИЯ НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ УТОЧНЕННЫМ ПОРЯДКОМ

О. А. Иванова

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок для порядка $\rho > 0$; h, k — ρ-тригонометри-чески выпуклые, ограниченные, 2π-периодические функции, причем

$$\min_{\theta\in\mathbb{R}}[h(\theta)+h(\theta+\frac{\pi}{\rho})]>0.$$

$H(z) := h(\arg z)|z|^{\rho(|z|)}$, $K(z) := k(\arg z)|z|^{\rho(|z|)}$, $z \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим пространство $[\rho(r), h(\theta))$ всех целых (в $\mathbb{C}$) функций f конечного типа относительно $\rho(r)$ таких, что $\limsup\limits_{r\to\infty} \frac{\ln|f(r\exp(i\theta))|}{r^{\rho(r)}} < h(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. В $[\rho(r), h(\theta))$ вводится топология внутренного индуктивного предела банаховых пространств

$$B_n = \{f \in A(\mathbb{C}) \Big| q_n(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp[(h(\arg z) - 1/n)|z|^{\rho(|z|)}]} < \infty\}$$

с нормой q_n, $n \in \mathbb{N}$.

Согласно [1, глава III] существует специальная целая функция L, обладающая свойствами:

(i) для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется постоянная $C > 0$ такая, что

$$|L(z)| \le C\exp(H(z) + |z|^{\rho(|z|)}/n + K(z)),\ z \in \mathbb{C};$$

(ii) существует последовательность $R_s \uparrow \infty$ такая, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\inf_{s\in\mathbb{N}} \inf_{|z|=R_s} |L(z)|\exp(-H(z) + |z|^{\rho(|z|)}/m - K(z)) > 0;$$

(iii) $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность всех (различных) нулей L, причем $|\lambda_j| \le |\lambda_{j+1}|$, $j \in \mathbb{N}$, каждый из нулей λ_j простой и для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} |L'(\lambda_j)|\exp(-H(\lambda_j) + |\lambda_j|^{\rho(|\lambda_j|)}/m - K(\lambda_j)) > 0$$

Пусть $K_{\infty,n} := \{c = (c_j)_j \subset \mathbb{C}:$

$$|c|_n := \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|c_j|}{\exp[(h(\arg\lambda_j) - 1/n)|\lambda_j|^{\rho(|\lambda_j|)}]} < \infty\}$$

($K_{\infty,n}$ — банаховы пространства с нормой $|\cdot|_n$, $n \in \mathbb{N}$); $K_\infty := \underset{n\to}{\operatorname{ind}} K_{\infty,n}$.

Оператор сужения $R(f) := (f(\lambda_j))_{j\in\mathbb{N}}$, $f \in [\rho(r), h(\theta))$, линейно и непрерывно отображает $[\rho(r), h(\theta))$ в K_∞.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок при порядке $\rho > 0$, функции L, h, k такие, как выше. (1) Если существует $\alpha > 0$ такое, что $h(\theta) - \alpha$, $k(\theta) - \alpha$, $\theta \in \mathbb{R}$, являются ρ-тригонометрически выпуклыми функциями, то оператор сужения $R : [\rho(r), h(\theta)) \to K_\infty$ имеет линейный непрерывный левый обратный. (2) Если функция k или h имеет хотя бы один интервал ρ-тригонометричности, то R не имеет линейного непрерывного левого обратного.*

Список литературы

[1] *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.

Ольга Александровна Иванова
Южный федеральный университет, Россия
E-mail address: *neo_ivolga@mail.ru*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ ДЛЯ ПОРИСТЫХ СРЕД (ДИССИПАТИВНЫЙ СЛУЧАЙ)

Х. Х. Имомназаров, А. А. Михайлов

В данном докладе рассматривается эффективный алгоритм численного решения системы линеаризованных уравнений для двухмерной динамической задачи распространения сейсмических волн в пористых средах с учётом диссипации энергии. Исходная система записывается в виде гиперболической системы в терминах скоростей матрицы вмещающей среды, скорости насыщающей жидкости, тензора напряжений и давления жидкости. Рассматривается математическая модель пористой среды, предложенная в 1989 году В.Н. Доровским [1]. В отличие от моделей типа Френкеля-Био в линеаризованной модели В.Н. Доровского среда описывается тремя упругими параметрами [2]. Эти упругие параметры взаимно-однозначно выражаются тремя скоростями упругих колебаний. Данное обстоятельство является важным для численного моделирования распространения упругих волн в пористых средах, когда известны распределения скоростей акустических волн, физических плотностей матрицы и пористости.

В этом случае распространение сейсмических волн в пористой средой насыщенной жидкостью при наличии потери энергии описывается следующей начально-краевой задачей [2, 3]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{0,s}}\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\rho_{0,l}}{\rho_{0,s}}\chi\rho_{0,l}(u_i - v_i) = F_i,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \chi\rho_{0,l}(u_i - v_i) = F_i,$$

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} + \mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}K - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ik} div\vec{u} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}K\delta_{ik} div\vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - (K - \alpha\rho_0\rho_{0,s})\, div\vec{u} + \alpha\rho_0\rho_{0,l}\, div\vec{v} = 0,$$

$$u_i|_{t=0} = v_i|_{t=0} = h_{ik}|_{t=0} = p|_{t=0} = 0,$$

$$h_{22} + p|_{x_2=0} = h_{12}|_{x_2=0} = \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}p\bigg|_{x_2=0} = 0,$$

где $\vec{u} = (u_1,\, u_2)$ и $\vec{v} = (v_1,\, v_2)$ - вектора скорости упругого пористого тела с парциальной плотностью $\rho_{0,s}$ и жидкости с парциальной плотностью $\rho_{0,l}$ соответственно, p - поровое давление, h_{ik} - тензор напряжений, $\vec{F} = (F_1,\, F_2)$ - вектор массовых сил, $\rho_0 = \rho_{0,l} + \rho_{0,s}$, $\rho_{0,s} = \rho^f_{0,s}(1 - d_0)$, $\rho_{0,s} = \rho^f_{0,l} d_0$, $\rho^f_{0,s}$ и $\rho^f_{0,l}$ - физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, d_0 - пористость, χ - коэффициент межфазного трения, δ_{ik} - символ Кронекера, $K = \lambda + 2\mu/3$, $\alpha = \rho_0\alpha_3 + K/\rho_0^2$, $\rho_0^3\alpha_3 > 0$ - модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды. Упругие модули K, μ, α_3 выражаются через скорость распространения поперечной волны c_s и две скорости продольных волн c_{p_1}, c_{p_2} соответствующими формулами [3, 4].

На первом этапе решения исходной задачи используется интегральное преобразование Лагерра по времени вида:

$$\overrightarrow{W}_m(x_1, x_2) = \int\limits_0^\infty \overrightarrow{W}(x_1, x_2, t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht)\, d(ht),$$

с формулой обращения

$$\overrightarrow{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} \overrightarrow{W}_m(x_1, x_2) l_m^\alpha(ht),$$

где $l_m^\alpha(ht)$ - функции Лагерра.

Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования аналитического преобразования Лагерра и конечно-разностного метода. Данный метод решения динамических задач теории упругости и вязкоупругости был впервые рассмотрен в работах [5, 6]. Используемый метод решения можно рассматривать как аналог известного спектрально-разностного метода на основе Фурье-преобразования, только вместо частоты ω мы имеем параметр $\boldsymbol{m}$ - степень полиномов Лагерра. Однако, в отличие от Фурье, применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. В отличие от разностного решения в спектральном методе с помощью аналитического преобразования можно свести исходную задачу к решению дифференциальной системы уравнений с производными только по пространственным координатам. Это позволяет использовать известные устойчивые разностные схемы высокого порядка точности для последующего решения подобных систем. Такой подход является эффективным при решении нестационарных динамических задач для пористых сред.

Так, как из-за наличия второй продольной волны с малой скоростью при использовании разностных схем по всем координатам для устойчивости решения необходимо задание согласованного малого шага дискретизации и по времени, и по пространству, что неизбежно увеличивает объем требуемых вычислений.

Список литературы

[1] *Доровский В. Н.* Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.

[2] *Blokhin A. M., Dorovsky V. N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Science, 1995.

[3] *Imomnazarov Kh. Kh.* A Mathematical Model for the Movement of a Conducting Liquid Through a Conducting Porous Medium: I. Excitation of Oscilations of the Magnetic Field by the Surface Rayleigh Wave // Mathl. Comput. Modelling. 1996. Vol. 24, № 1. P. 79–84.

[4] *Имомназаров Х. Х.* Несколько замечаний о системе уравнений Био // Доклады РАН. 2000. Т. 373, № 4. С. 536–537.

[5] *Konyukh G. V., Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A.* Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // Journal of Computational Acoustics. 2001. Vol. 9, № 4. P. 1523–1541.

[6] *Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V.* Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting. 2003. № 51. P. 37–48.

Холматжон Худайназарович Имомназаров
Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail address: imom@omzg.sscc.ru

Александр Анатольевич Михайлов
Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail address: alex_mikh@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТЯХ ФОКУСИРОВКИ

Е. Б. Ипатов, В. И. Чивилев, Е.А. Палкин, Д. Е. Ипатов

Эффективным аппратом для исследования тонкой дифракционной структуры волнового поля в областях фокусировки является метод канонического оператора Маслова (КОМ) [1-4]. Области фокусировки, помимо их классического возникновения в оптических системах, наблюдаются при распространении электромагнитных волн в атмосфере Земли и планет, акустических волн в океане и земной коре, при канализации светового сигнала в стекловолокне, визуально в диапазоне волн видимого света (как различные оптические явления: солнечные блики, радуга...) и т.д. Волновое поле в регулярно-неоднородной среде описывается либо одним, либо системой линейных дифферанциальных уравнений в частных производных с граничными или начальными условиями, заданными в виде быстроосцилирующих функций.

В докладе исследуется применение метода КОМ для решения линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{|\vec{\beta}|=0}^{m} \alpha_{\vec{\beta}}(\vec{q}) \frac{\partial^{|\vec{\beta}|} U(\vec{q})}{(i\Lambda \partial q_1)^{\beta_1} \times (i\Lambda \partial q_2)^{\beta_2} \times ...(\times i\Lambda \partial q_n)^{\beta_n}} = 0 \tag{1}$$

с коэффциентами $\alpha_{\vec{\beta}}(\vec{q}\ ) \in C^k(R^n)$ и начальными или граничными условиями, заданными на поверхности $G(\vec{q} = \vec{q}^{\ 0}(\vec{\alpha}) \in G, \vec{\alpha} \in R^{n-1}$ - координаты на G) и содержащими быстроосцилирующие функции вида $exp(i\Lambda S_0(\vec{q}))$. Здесь $\Lambda >> 1$ - большой параметр задачи; $\vec{q} \in R^n$ - пространственно-временные координаты, $\vec{\beta}$ - мультииндекс. Для задачи (1), решаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial H(\vec{q},\vec{p})}{\partial \vec{p}}; \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\partial H(\vec{q},\vec{p})}{\partial \vec{q}} \tag{2}$$

с данными Коши $\vec{q}|_{\tau=0} = \vec{q}^{\ 0}(\vec{\alpha})$ и $\vec{p}|_{\tau=0} = \vec{p}^{\ 0}(\vec{\alpha}) = \frac{\partial S_0}{\partial \vec{q}}|_{\vec{q}=\vec{q}^{\ 0}}$, где $H(\vec{q},\vec{p}) = \sum_{|\vec{\beta}|=0}^{m} \alpha_{\vec{\beta}}(\vec{q}) p_1^{\beta_1} \times ... \times p^{\beta_n}$ - гамильтониан задачи. Здесь τ - параметр вдоль решения, $\vec{p} \in R^n$ - сопряженные импульсные координаты. Найдя решение

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы.

системы (2) $\{\vec{q}=\vec{q}(\tau,\vec{\alpha});\vec{p}=\vec{p}(\tau,\vec{\alpha})\}$, определяем при фиксированном $\vec{\alpha}$, точки τ_i в которых якобиан $J=det\|\frac{\partial\vec{q}(\tau,\vec{\alpha})}{\partial\vec{\alpha}\partial\tau}\|=0$. Множество таких точек образуют в R^n поверхности, которые называются каустиками. Далее выбираем новую систему переменных $\{\vec{p}_k,\vec{q}_k\}(k=1,...,\varrho;\overline{k}=\varrho+1,...,n)$ так, чтобы в окрестности точек $(\tau_i,\vec{\alpha})$ якобиан $\widetilde{J}=det\|\frac{\partial(p_k,q_{\overline{k}})}{\partial(\vec{\alpha},\tau)}\|\neq 0$. По методу КОМ в окрестности каустики асимптотическое решение задачи (1) строится на основе интегралов от быстроосциллирующих функций

$$(3)\quad U(\vec{q})=(\frac{i\Lambda}{2\pi})^{\frac{\varrho}{2}}l^{i\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}A|\widetilde{J}|^{-\frac{1}{2}}exp\{i\Lambda(S_\varrho+\sum_{k=1}^{\varrho}p_kq_k)\}dp_1\times...\times dp_\varrho$$

где $S_\varrho=\int_{(p_k^0,q_{\overline{k}}^0)}^{(p_k,q_{\overline{k}})}(\sum_{\overline{k}=\varrho+1}^{n}p_{\overline{k}}dq_{\overline{k}}-\sum_{k=1}^{\varrho}p_kq_k)$; σ - индекса Маслова; A - амплитудный множитель определяемый условиями излучения волны.

Список литературы

[1] *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическаое приближение для уравнений квантовой механики. -М.: Наука, 1976.-296 с.

[2] *Лукин Д.С., Палкин Е.А.* Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения радиоволн в неоднородных средах. -М.: МФТИ, 1982. - 159 с.

[3] *Ипатов Д.Е. Лукин Д.С., Палкин Е.А.* Численная реализация метода канонического оператора маслова в задачах распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли. Изв. вузов. Радиофизика. 1990, **Т. 32**, №5, с. 562.

[4] *Ipatov E.B., Lukin D.S. and Palkin E.A.* Maslov canonical operator in problems of numerical simulation of diffraction and propagation of waves in inhomogeneous media./Soviet journal of numerical analysis and mathematical modelling. VNU Sciencepress BV. 1990. **V.5.** №6. P.465–488.

Евгений Борисович Ипатов
Московский физико-технический институт, Россия
E-mail address: ipatoveb@mail.ru

Евгений Алексеевич Пакин
Российский Новый Университет, Россия
E-mail address: palkin@rosnou.ru

Виктор Иванович Чивилев
Московский физико-технический институт, Россия
E-mail address: chivil@bk.ru

Дмитрий Евгеньевич Ипатов
Московский физико-технический институт, Россия
E-mail address: ipde777@gmail.com

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РАВНОМЕРНЫХ АТТРАКТОРОВ ПОЛУПРОЦЕССОВ

В.М. Ипатова

В [1, 2] предложен и обоснован алгоритм приближенного построения аттракторов автономных дифференциальных уравнений при помощи аттракторов конечных систем. В настоящей работе этот вопрос изучается применительно к равномерным аттракторам неавтономных уравнений. Ниже мы будем придерживаться терминологии, принятой в [3, 4, 5]. Пусть E – полное метрическое пространство с метрикой $R(\cdot,\cdot)$; $\mathbb{T}$ – нетривиальная подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $\mathbb{T}_+$ – полугруппа неотрицательных элементов из $\mathbb{T}$. Пусть при всех $h \in \mathbb{T}_+$, $t \in \mathbb{T}_+$, $t \geq h$ на E определены непрерывные операторы $U(t,h) : E \to E$ такие, что $U(t,s)U(s,h) = U(t,h)$, $\forall t,s,h \in \mathbb{T}_+$, $t \geq s \geq h$, и $U(t,t)$ – тождественный оператор. Тройку $\{U, \mathbb{T}_+, E\}$ будем называть *полупроцессом.* Рассмотрим семейства операторов $U_f(t,h)$, функционально зависящие от символа $f = f(t)$, где под $f(t)$ подразумеваются зависящие от времени коэффициенты и члены в правой части уравнения. Пусть F – некоторое множество символов и каждому $f \in F$ поставлен в соответствие полупроцесс $\{U_f, \mathbb{T}_+, E\}$. Множество всех полупроцессов $\{U_f, \mathbb{T}_+, E\}$ таких, что $f \in F$, будем называть *семейством полупроцессов* (СПП) и обозначать как $\{U_f, \mathbb{T}_+, E, F\}$. *Равномерным аттрактором* семейства полупроцессов называется его наименьшее замкнутое равномерно притягивающее множество. Равномерный аттрактор СПП будем для краткости называть просто *аттрактором.* Предполагается, что на F заданы операторы $T(h)$, $h \in \mathbb{T}_+$ такие, что: $T(0)f = f$, $T(t)T(h) = T(t+h)$, $T(h)F \subset F$, $U_f(t+h,h) = U_{T(h)f}(t,0)$ при всех $t,h \in \mathbb{T}_+$, $f \in F$.

Перейдем к изучению алгоритма для приближенного построения аттрактора A локально равномерно непрерывного СПП $\{U_f, \mathbb{R}_+, E, F\}$. Пусть известно компактное в E множество X такое, что $A \subset X$ и $U_f(t,0)X \subset X$ при всех $f \in F$, $t \in \mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что операторы U_f удовлетворяют на X условию Липшица с общей константой L. Пусть заданы семейсва полупроцессов $\{U^d_f, \mathbb{Z}_+, X, F\}$, зависящие от параметра d, пробегающего метрическое пространство $\hat{D}$ с метрикой $\rho(\cdot,\cdot)$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы.

Будем считать, что $d = 0$ является неизолированной точкой $\hat{D}$ и этому значению параметра соответствует исходное СПП $\{U_f, \mathbb{Z}_+, X, F\}$, то есть $U_f^0 = U_f$. Параметрам $d \in D \equiv \hat{D} \backslash \{0\}$ соответствуют некоторые приближенные численные схемы, в которых d представляет собой совокупность всех используемых параметров дискретизации. Предполагается, что операторы U_f^d аппроксимируют операторы U_f, причём для всех $d \in D$, $f \in F$, $x \in X$ справедлива оценка $R(U_f^d(1,0)x, U_f(1,0)x) \le \alpha(d)$, где $\alpha(d) \to 0$ при $d \to 0$. Зададимся произвольной функцией $r(d) > 0$, $d \in D$, такой, что $r(d) \to 0$ при $d \to 0$, и построим при каждом $d \in D$ конечное семейство замкнутых множеств $B_n \subset X$, $n = 1, \ldots, N$, а также конечный набор точек $b_n \in B_n$, $n = 1, \ldots, N$, удовлетворяющие условиям $\cup_{n=1}^N B_n = X$, $R(x, b_n) \le r(d)$ $\forall x \in B_n$. Здесь N, B_n, b_n зависят от параметра d, но для краткости мы эту зависимость не указываем. Обозначим $\nu = \nu(d) = \alpha(d) + Lr(d)$, $O_\nu(x) = \{y \in X : \ R(x, y) \le \nu(d)\}$. Для всех $f \in F$ и $t \in \mathbb{N}$, построим множества $Q_f(1) = \cup_{n=1}^N O_\nu(U_f^d(1,0)b_n)$, $I_f(t) = \{i : B_i \cap Q_f(t) \ne \emptyset\}$, $G_f(t) = \cup_{n \in I_f(t)} B_n$, $Q_f(t+1) = \cup_{n \in I_f(t)} O_\nu(U_{T(t)f}^d(1,0)b_n)$, $G(t) = \cup_{f \in F} G_f(t)$. Для любого $d \in D$ существует момент времени $t_d \in \mathbb{N}$ такой, что $G(t) = G(t_d)$ $\forall t \in \mathbb{N}$, $t > t_d$. Обозначим $A_d = G(t_d)$.

Справедлива следующая теорема об аппроксимации аттрактора A.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $d \in D$, удовлетворяющих условию $\rho\,(d, 0) \le \delta(\varepsilon)$, расстояние между A и A_d по метрике Хаусдорфа не превосходит ε.*

Список литературы

[1] *Костин И. Н.* Об одном способе аппроксимации аттракторов // Зап. научн. семин. ЛОМИ. **188** (1991), 87–104.

[2] *Костин И. Н.* Аппроксимация аттракторов эволюционных уравнений с помощью аттракторов конечных систем // Зап. научн. семин. ЛОМИ. **197** (1992), 71–86.

[3] *Chepyshov V. V., Vishik M. I.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. **73** (1994), 279–333.

[4] *Ипатова В. М.* Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Матем. сборник. **188**:6 (1997), 47–56.

[5] *Ипатова В. М.* О равномерных аттракторах явных аппроксимаций // Дифф. уравнения. **47**:4 (2011), 574–583.

Валентина Михайловна Ипатова
Московский физико-технический институт, Россия
E-mail address: ipatval@mail.ru

О ЧАСТОТЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗУСЛОВНЫХ БАЗИСОВ ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ

К.П. Исаев

Пусть I — ограниченный интервал вещественной прямой, $h(t)$ — выпуклая функция на I. Рассматривается пространство

$$L_2(I,h) = \{f : ||f||^2 = \int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt < \infty\}.$$

В работе [1] доказано, что если весовая функция $h(t)$ имеет достаточно регулярное поведение и для каждого $\alpha > 0$ $(1-|t|)^\alpha = O(e^{h(t)})$, $|t| \to 1$, тогда безусловных базисов из экспонент в пространстве $L_2(I,h)$ $(I = (-1,1))$ не существует. Насколько нам известно, когда $e^{h(t)} = O((1-|t|)^\alpha)$, $|t| \to 1$, проблема существования безусловных базисов из экспонент не решена.

Для $\alpha > 0$ через $L_2(\alpha)$ мы обозначаем пространство $L_2(I,h)$, где $I = (-1;1)$, $h(t) = -\alpha \ln(1-|t|)$.

Теорема 1. *Предположим, что система экспонент $\{e^{z_j t}\}$ — безусловный базис в пространстве $L_2(\alpha)$. Пусть $Q(x_0,\delta_1,\delta_2,M)$ — прямоугольник*

$$\{z :\ \delta_1(|x_0|+1) < |Re\, z| < \delta_2(|x_0|+1),\ \ |Im\, z| < M(|x_0|+1)\}.$$

Тогда найдутся положительные числа $\delta_1 < 1, \delta_2, M$, такие что каждый прямоугольник Q $(x_0,\ \delta_1,\ \delta_2,\ M)\ +\ iy_0$ содержит по крайней мере один показатель этой системы.

Безусловный базис $\{e_k\}$, $k = 1,2,...$, в гильбертовом пространстве называется базисом Рисса, если $||e_k|| \asymp 1$. Если система экспонент является базисом Рисса в пространстве $L_2(I,h)$, тогда все показатели этой системы лежат в некоторой вертикальной полосе. Таким образом, из теоремы следует, что в пространстве $L_2(\alpha)$ не существует безусловных базисов Рисса из экспонент.

Список литературы

[1] *Башмаков Р. А.* Системы экспонент в весовых гильбертовых пространствах на R. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, 2006.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00233-а).

Константин Петрович Исаев
Учреждение Российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Россия
E-mail address: Orbit81@list.ru

О ЗАДАЧЕ ПОТРАЕКТОРНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИФФУЗИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Н. С. Исмагилов

Рассматривается задача оптимального управления диффузионными процессами следующего вида

$$dx_t = b(x_t, u_t, t)dt + \sigma(x_t, t) * dW(t), \tag{1}$$

$$J(u) = g^0(x(T), T) + \int_0^T f^0(x_t, u_t, t)dt \to \min, \tag{2}$$

где u_t – управляющее воздействие, W_t – стандартный винеровский процесс, дифференциал которого понимается в смысле интеграла Стратоновича, $J(u)$ – функционал потерь, характеризующий качество управления.

Задачи оптимального управления диффузионными процессами рассматривались и ранее (см. например [1],[2]), но в отличии от них в задаче (1), (2) функционал потерь является потраекторным, и ищется управление минимизирующее потери для каждой траектории процесса W_t.

Используя технику описанную в работе [3] удалось свести задачу (1), (2) к задаче следующего вида

$$\dot{y} = \frac{b(\varphi^*(t, W_t + y), u_t, t) - \frac{\partial}{\partial t}\varphi^*(t, W_t + y)}{\sigma(\varphi^*(t, W_t + y), t)}, \tag{3}$$

$$J(u) = g^0(\varphi^*(T, W_T + y), T) + \int_0^T f^0(\varphi^*(t, W_t + y), u_t, t)dt \to \min, \tag{4}$$

которая является задачей классического оптимального управления в том смысле, что не содержит стохастических дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1] *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы. Киев: Наукова думка, 1977.

[2] *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.

[3] *Насыров Ф.С.* Симметричные интегралы и стохастический анализ // Теория вероятностей и ее применение. - 2006. - Т. 51. - в. 3.- С. 496-517.

Нияз Салаватович Исмагилов

Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия

E-mail address: niyaz.ismagilov@gmail.com

ТЕОРЕМА ФЛЕТТА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

С. И. Калинин

В 1958 г. в работе [1] была установлена следующая теорема, дополняющая список хорошо известных классических «французских» теорем о среднем значении для дифференцируемых функций.

Теорема 1. *(The T. M. Flett Theorem). Пусть $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ – дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ числовой прямой функция, при этом $f'(a) = f'(b)$. Тогда найдется хотя бы одна точка ξ, $\xi \in (a; b)$, такая, что*

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} = f'(\xi). \tag{1}$$

Приведенная формулировка теоремы выполнена в авторской редакции. Детальный анализ ее доказательства позволяет заключить, что она может быть сформулирована и в отношении другого конца отрезка $[a, b]$: в условиях теоремы найдется хотя бы одна точка η, $\eta \in (a; b)$, такая, что будет справедливо соотношение

$$\frac{f(b) - f(\eta)}{b - \eta} = f'(\eta). \tag{2}$$

Формально (2) получается из (1) заменой значения a на значение b. Целью доклада является анонсирование обобщений приведенной теоремы. В первом из них мы ослабляем условия, связанные с дифференцируемостью функции f, а второе посвящается формулированию многомерного аналога теоремы.

Итак, справедливы

Теорема 2. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ – функция, обладающая на отрезке $[a, b]$ односторонними производными $f'_{\pm}(x), x \in (a; b)$, $f'_{+}(a)$, $f'_{-}(b)$, при этом $f'_{+}(a) = f'_{-}(b)$. Тогда в интервале $(a; b)$ найдутся точки ξ и η такие, что выполнятся условия: значение $\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$ будет принадлежать отрезку с концами в точках $f'_{-}(\xi), f'_{+}(\xi)$, а значение $\frac{f(b)-f(\eta)}{b-\eta}$ будет содержаться в отрезке с концами в точках $f'_{-}(\eta), f'_{+}(\eta)$.*

Теорема 3. *Пусть $[a; b]$ – отрезок, соединяющий точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ в пространстве $\mathbf{R}^n$, т. е.*

$$[a; b] = \{x = (x_1, \ldots x_n) : x_i = a_i + t(b_i - a_i), t \in [0; 1], i = 1, \ldots, n\},$$

и $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *– дифференцируемая функция, обладающая свойством* $grad\ f(a) = grad\ f(b)$. *Тогда внутри отрезка* $[a;b]$ *найдутся точки* ξ *и* η *такие, что будут иметь место соотношения*

$$f(\xi) - f(a) = (\xi - a, grad\ f(\xi)),$$
$$f(b) - f(\eta) = (b - \eta, grad\ f(\eta)),$$

где символ $(\cdot,\cdot)$ *обозначает скалярное произведение векторов пространства* $\mathbf{R}^n$.

Очевидно, теоремы 2 и 3 расширяют класс объектов, к которым применяется теорема Флетта.

Список литературы

[1] *Flett T. M.* A mean value theorem // Mathematical Gazette. – Vol. 42, № 339. (1958), 38–39.

Сергей Иванович Калинин
Вятский государственный гуманитарный университет, Россия
E-mail address: Kalinin_gu@mail.ru

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ш.Т.Каримов

В области $D = \{(x, y, z): \ x > z > 0, \ y > z > 0\}$ рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$(1) \qquad u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y - \frac{2\gamma}{z}u_z - \lambda u = 0,$$

с начальными условиями

$$(2) \qquad u(x, y, 0) = \tau(x, y), \ \ x \geq 0, \ y \geq 0,$$

$$(3) \qquad \lim_{z \to +0} z^{2\gamma} u_z(x, y, z) = \nu(x, y), \ \ x > 0, \ y > 0,$$

где $\tau(x, y), \nu(x, y)-$ заданные непрерывные функции, $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in R$, причем $0 < \alpha, \beta < 1, \ \ 0 < \gamma < 1/2$.

Для решения поставленной задачи используем следующий многомерный обобщенный дробный интеграл

$$(4) \qquad J_\lambda \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n \\ \eta_1, \ \eta_2, \ \ldots, \ \eta_n \end{array} \right) f(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{2x_k^{-2(\alpha_k + \eta_k)}}{\Gamma(\alpha_k)} \right] \int\limits_0^{x_1} \int\limits_0^{x_2} \ldots \int\limits_0^{x_n} \prod_{k=1}^{n} \left[t_k^{2\eta_k + 1} \left(x_k^2 - t_k^2 \right)^{\alpha_k - 1} \right] \times$$

$$\times \bar{J}_{\alpha_n - 1} \left(\lambda \sqrt{x_n^2 - t_n^2} \right) f(t_1, t_2, ..., t_n) dt_1 dt_2 \ldots dt_n,$$

где $\alpha_k > 0, \ \eta_k \geq -1/2, \ k = \overline{1, n}, \ \bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu + 1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z), \ \ J_\nu(z)-$ функция Бесселя порядка $\nu, \Gamma(z)$ - гамма функция.

Дробный интеграл (4) является многомерным аналогом одномерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера [1].

Применяя дробный интеграл (4) (при $n = 3$) как оператор преобразования, позволяющий преобразовать уравнения с сингулярными коэффициентами в уравнения без сингулярных коэффициентов, нами получена формула для решения поставленной задачи в следующем виде

$$(5) \qquad u(x, y, z) = \frac{z^{-2\gamma}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_{B_z} \tau(\xi, \eta) R_\lambda(\xi, \eta; x, y, z; \alpha, \beta, \gamma) d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B_z}\nu(\xi,\eta)R_\lambda(\xi,\eta;x,y,z;\alpha,\beta,-\gamma)d\xi d\eta$$

где $R_\lambda(\xi,\eta;x,y,z;\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha \left(\frac{\eta}{y}\right)^\beta r^{2\gamma-1}{}_3\Phi_B^{(5)}(\alpha,\beta,1-\alpha,1-\beta,\frac{1}{2}+\gamma;\sigma_1,\sigma_2,$
$\sigma_3)$, $r^2 = z^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2, \sigma_1 = r^2/(4\xi x)$, $\sigma_2 = r^2/(4\eta y)$, $\sigma_3 = -(\lambda/4)r^2$, $B_z = \{(\xi,\eta) : (\xi-x)^2+(\eta-y)^2 \le z^2\}$, ${}_3\Phi_B^{(5)}(a,a',b,b',c;x,y,z)-$ вырожденная гипергеометрическая функция трех переменных [2],[3], которая определяется с помощью ряда

$$(6)\qquad {}_3\Phi_B^{(5)}(a,a',b,b',c;x,y,z) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty}\frac{(a)_m(a')_n(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n+k}\,m!\;n!\;k!}x^m y^n z^k.$$

Если в уравнении (1) $\alpha = 0$ (или $\beta = 0$), то учитывая свойство функции (6) получим решение задачи (1)–(3) в виде (5) в котором $R_\lambda(\xi,\eta;x,y,z;\beta,\gamma) = \left(\frac{\eta}{y}\right)^\beta r^{2\gamma-1}\Xi_2(\beta,1-\beta,\frac{1}{2}+\gamma;\sigma_2,\sigma_3)$, $(R_\lambda(\xi,\eta;x,y,z;\alpha,\gamma) = \left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha r^{2\gamma-1}\Xi_2(\alpha,1-\alpha,\frac{1}{2}+\gamma;\sigma_1,\sigma_3))$, где $\Xi_2(a,b,c;x,y)-$ вырожденная гипергеометрическая функция Горна [4], а при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ имеем $R_\lambda(\xi,\eta;x,y,z;\gamma) = r^{2\gamma-1}\bar{J}_{\gamma-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)$.

Аналогично можно найти решение задачи Коши для уравнения (1) и при других значениях параметров $\alpha,\beta,\gamma,\lambda$.

Пусть $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$.

Теорема 1. *Если* $\tau(x,y) \in C(\bar\Omega)\cap C^3(\Omega)$ *и* $\nu(x,y) \in C^2(\Omega)$ *то функция* $u(x,y,z)$ *определяемая формулой* (5) *будет единственным регулярным решением задачи* (1)–(3).

Список литературы

[1] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. -702с.

[2] *Jain.R.N.* The confluent hypergeometric functions of three variables // Proc. Nat. Acad.Sci., India, 1966, A36, No2., 395–408.

[3] *Hasanov.A.* The solution of the Cauchy problem for generalized Euler-Poisson-Darboux equation // International Journal of Applied Mathematics and Statistics, 2007, No8(7)., 30–43.

[4] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т.1. - М.: Наука, 1973. - 296 с.

Каримов Шахабиддин Туйчибаевич
Ферганский государственный университет, Узбекистан
E-mail address: `shkarimov09@rambler.ru, shkarimov@fdu.uz`

О РОСТЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА МАКЛЕЙНА

В. Э. Ким

В [1] было показано существование такой целой функции f, что система ее последовательных производных $\{f^{(n)}, n = 0, 1, \cdots\}$ плотна в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$. Целые функции, обладающие таким свойством, принято называть универсальные функциями Маклейна. В [2] было показано существование универсальных функций типа Маклейна, для которых система $\{D^n f, n = 0, 1, \cdots\}$ плотна в $H(\mathbb{C})$, где D - оператор обощенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева. В данном докладе обсуждается вопрос о допустимых характеристиках роста указанных универсальных функций типа Маклейна.

Список литературы

[1] *MacLane G. R.* // J. Analyse Math. **2** (1952), 72-87.
[2] *Ким В. Э.* // Матем. заметки **85**:6 (2009), 849-856.

Виталий Эдуардович Ким
Учреждение Российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Россия
E-mail address: kim@matem.anrb.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-00572 и 11-01-97019).

ВАРИАНТ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА С УЗЛАМИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА

К. А. Кириллов

Пусть $f(x_1, x_2)$ — функция, определенная на $[0,1]^2$, допускающая разложение в абсолютно сходящийся ряд Фурье – Хаара

$$f(x_1,x_2)=\sum_{n=1}^{2}\sum_{m_n=0}^{\infty}\sum_{j_n\in\Lambda_{m_n}} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2), \tag{1}$$

где $\Lambda_{m_n}=\{1,\ldots,2^{m_n-1}\}$ при $m_n>0$, $\Lambda_{m_n}=\{0\}$ при $m_n=0$, $n=1,2$.

Классическое двумерное дискретное преобразование Хаара есть взаимно однозначное соответствие между множеством значений функции $f(x_1,x_2)$ в узлах $(x_1^{(i)},x_2^{(i)})\in[0,1]^2$ $(i=1,\ldots,2^D)$ и множеством коэффициентов этого преобразования $A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ $(m_n=0,\ldots,M_n,\ \ j_n\in\Lambda_{m_n},$ $n=1,2)$, при котором

(2)

$$f(x_1^{(i)},x_2^{(i)})=\sum_{n=1}^{2}\sum_{m_n=0}^{M_n}\sum_{j_n\in\Lambda_{m_n}} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\chi_{m_1,j_1}(x_1^{(i)})\chi_{m_2,j_2}(x_2^{(i)}),\ i=1,\ldots,2^D,$$

$$A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}=2^{-D}\sum_{i=1}^{2^D} f(x_1^{(i)},x_2^{(i)})\chi_{m_1,j_1}(x_1^{(i)})\chi_{m_2,j_2}(x_2^{(i)}), \tag{3}$$

$$c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}=\int_0^1\!\!\int_0^1 f(x_1,x_2)\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2)\,dx_1\,dx_2\approx A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)},$$

$m_n=0,1,\ldots,M_n,\ j_n\in\Lambda_{m_n},\ n=1,2,\ M_1+M_2=D$. Считается, что

$$\{(x_1^{(i)},x_2^{(i)}):\ i=1,\ldots,2^D\}=\{\left(\tfrac{2i_1-1}{2^{M_1+1}},\tfrac{2i_2-1}{2^{M_2+1}}\right):\ i_n=1,\ldots,2^{M_n},\ n=1,2\}.$$

Таким образом, в соответствии с (2) классический метод дискретного преобразования Хаара предполагает множество индексов m_1, m_2 таковым, что

$$S(x_1,x_2)=\sum_{n=1}^{2}\sum_{m_n}\sum_{j_n\in\Lambda_{m_n}} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2) \tag{4}$$

есть прямоугольная частичная сумма ряда (1) — индексы m_n в сумме из правой части равенства (4) принимают значения $0,1,\ldots,M_n$, $n=1,2$.

При разработке варианта двумерного дискрентого преобразования Хаара автором настоящей работы использована идея построения дискретного преобразования Фурье, предложенная и реализованная в [1]. Рассматриваемый вариант дискретного преобразования Хаара с 2^D узлами связан с треугольной частичной суммой ряда (1), т. е. с суммой (4), в которой нижние индексы m_1, m_2 входящих в нее коэффициентов Фурье – Хаара $c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ удовлетворяют условию $m_1 + m_2 \leqslant d$, где $d \in \mathbb{N}$, $d \leqslant D$. Коэффициенты $A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ этого преобразования вычисляются по формулам (3). Считается, что узлы $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in [0,1]^2 \quad (i = 1, \ldots, 2^D)$ образуют Π_0–сетку.

Если $D = 2^{r+1} + r + s - 1$, где $s = 0, 1, \ldots, 2^{r+1}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, то полагаем $d = 2^{r+1} + s - 2$ (очевидно, для каждого $D \in \mathbb{N}$ такое представление существует и единственно). Общее число коэффициентов $A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$, для которых $m_1 + m_2 \leqslant d$, равно $N_d = 2^d(0.5\,d + 1)$. Выбранное указанным образом d есть максимальное целое число, при котором $N_d \leqslant 2^D$. Следовательно, в треугольной частичной сумме (4), содержащей мономы Хаара $\chi_{m_1,j_1}(x_1) \times$ $\times \chi_{m_2,j_2}(x_2)$ степеней не выше d, не больше слагаемых, чем в соответствующей прямоугольной частичной сумме, включающей мономы Хаара, для которых $m_n \leqslant M_n$, $n = 1, 2$, $M_1 + M_2 = D$ (указанные суммы содержат одинаковое число слагаемых, равное 2^D, лишь при $D = 2^{r+2} + r - 1$, $r = 0, 1, 2, \ldots$). Однако, учитывая стремление к нулю коэффициентов $c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ при увеличении $m_1 + m_2$, можно ожидать, что качество предлагаемого варианта дискретного преобразования Хаара не хуже, чем при использовании классической схемы.

В то же время предложенный в настоящей работе вариант дискретного преобразования Хаара обладает некоторыми преимуществами по сравнению с классическим преобразованием. Во–первых, при одинаковом числе узлов расширяется множество функций $f(x_1, x_2)$, для которых $A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} = c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$, причем в отличии от классического преобразования все используемые коэффициенты $A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье – Хаара $c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ для полиномов Хаара степеней, не превосходящих $D - m_1 - m_2$. Во–вторых, уменьшение числа слагаемых в частичной сумме (4) приводит к уменьшению объема вычислений при аппроксимации функции указанной частичной суммой, в которой вместо коэффициентов Фурье – Хаара $c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ заданной функции берутся соответствующие значения $A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} \approx c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$.

Список литературы

[1] *Кашкин В. Б., Носков М. В., Осипов Н. Н.* Вариант дискретного преобразования Фурье с узлами на параллелепипедальных сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **41**:3 (2001), 355–359.

Кирилл Анатольевич Кириллов
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
E-mail address: kkirillov@rambler.ru

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для анизотропного квазилинейного параболического уравнения второго порядка рассматривается первая смешанная задача

$$(1) \qquad (|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad k > 1, \quad (t, \mathbf{x}) \in D;$$

$$(2) \qquad u(t, \mathbf{x})\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega;$$

$$(3) \qquad u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega), \quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega), \quad \alpha = \overline{1, n}.$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s),\ s \geq 0,\ \alpha = \overline{1, n}$, подчиняются условиям: $a(0) = 0,\ a(s) \in C^1(0, \infty)$,

$$\overline{a}s^{(p_\alpha-2)/2} \leq a_\alpha(s) \leq \widehat{a}s^{(p_\alpha-2)/2}, \quad \frac{p_1}{2}a_\alpha(s) \leq a_\alpha(s) + a'_\alpha(s)s \leq \widehat{b}a_\alpha(s), \quad \alpha = \overline{1, n},$$

с положительными константами $\widehat{a} \geq \overline{a}$, $2\widehat{b} \geq p_1 > k$ $(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n)$. Например, $a_\alpha(s) = s^{(p_\alpha-2)/2}$, $\alpha = \overline{1, n}$, $\widehat{b} = p_n$.

Работа посвящена исследованию зависимости скорости стабилизации решения задачи (1) – (3) при $t \to \infty$ от показателей нелинейности в предположении финитности функции $\varphi(\mathbf{x})$. В изотропном случае, т.е. когда все p_α равны между собой и равны p, $p \geq 2$, при $k = 2$ задача (1)–(3) исследовалась в работе [1]. Анизотропный случай для смешанных задач является малоизученным.

Приведем результат для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{1, n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$, сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$).

Для $r > 0$ введем следующие обозначения:

$$\mu_q(r) = \inf\left\{\|g_{x_q}\|_{L_{p_q}(\Omega^r)} \;\Big|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega^r)} = 1\right\}, \ \Omega^r = \{\mathbf{x} \in \Omega \,| x_s < r\}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00440-а).

Здесь $q = 1$ для $s \neq 1$ и $q = 2$ для $s = 1$. Предполагается, что выполнено условие: $\lim\limits_{r\to\infty} \mu_q(r) = 0$. Иначе достигается максимальная скорость убывания решения, т.е. справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq Mt^{-1/(p_q-k)}, \quad t > 0.$$

Теорема 1. *Существуют положительные числа* $\kappa(k, p_s), M(k, p_s, p_q, \|\varphi\|_{L_k(\Omega)})$ *такие, что для ограниченного решения* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1) – (3) *с ограниченной финитной начальной функцией* $\varphi(\mathbf{x})$ *справедливы оценки*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}(C(\varphi)t + 1)^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M\left(t\mu_q^{p_q}(r(t))\right)^{-1/(p_q-k)}, \quad t > 0, \tag{5}$$

с произвольной положительной функцией $r(t)$, *удовлетворяющей неравенству*

$$\left(\mu_q^{p_q}(r(t))t\right)^{-1/(p_q-k)} \exp\left(\kappa\left(\frac{r^{p_s}(t)}{t}\right)^{1/(p_s-1)}\right) \geq 1, \quad t > 0.$$

Если для $r > 1$ выполнены условия:

$$\mu_q(r) \geq Ar^{-a}$$

с положительными постоянными $a < p_s/p_q, A$, то можно положить

$$r(t) = t^{\varepsilon/(ap_q)}, \quad t > 0, \quad \varepsilon \in (ap_q/p_s, 1), \tag{6}$$

и оценка (5) принимает вид

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq Mt^{-(1-\varepsilon)/(p_q-k)}, \quad t > 0. \tag{7}$$

Выбор функции $r(t)$ формулой (6) является удовлетворительным, поскольку при $s \neq 1$ оценка (7) имеет показатель степени близкий к показателю $1/(p_1 - k)$ оценки снизу (4).

Список литературы

[1] *Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М.* Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами // Матем. сб. **201**:9 (2010), 3–26.

Лариса Михайловна Кожевникова
Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Россия
E-mail address: `kosul@mail.ru`

Алексей Александрович Леонтьев
Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Россия
E-mail address: `axe1erat@mail.ru`

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДИСПЕРСИЮ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

С. С. Кожичин

При распространении звуковой энергии в водной среде возникают интересные физические явления, технически не реализованные в современной гидроакустической технике. Аномально высокая скорость распростанения высокочастотного ультразвука в воде давно занимает современных физиков [1].

В работе показано, что наблюдаемая в экспериментах дисперсия плоских акустических волн в воде может быть описана с помощью математической модели наследственной упругой среды Поинтинга и Томсона

$$\left(1 + \frac{E}{E_0}\right)\sigma + \frac{\eta}{E_0}\sigma_t = E\varepsilon + \eta\varepsilon_t.$$

Здесь $\sigma\left(t\right)$ и $\varepsilon\left(t\right)$ – напряжение и деформация соответственно, а E, E_0, η – феноменологические коэффициенты.

В работе получены формулы для вычисления феноменологических коэффициентов определяющих уравнений модели через скорости низкочастотных и ультразвуковых волн и через декремент затухания ультразвука. Система уравнений гидроакустики, учитывающей дисперсию волн, приведена к симметричной t – гиперболичной форме.

Список литературы

[1] *Стародубцев П. А, Алифанов Р. Н, Гуторова С. В.* Современные методы передачи звуковой энергии в водной среде и их теоретическое развитие // Журнал СФУ. Сер. мат. и физ. Красноярск. **2**:2 (2009), 230–237.

Станислав Сергеевич Кожичин
Сибирский федеральный университет, Россия
E-mail address: siblist24@list.ru

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КОНЦАМИ

С. А. Корольков, А. Г. Лосев

Пусть M — полное некомпактное риманово многообразие. Открытое множество $D \subset M$ называют концом, если оно является связным, неограниченным и его граница ∂D – компакт. Говорят, что M является многообразием с концами если оно представимо в виде объединения компактного множества B и конечного числа непересекающихся концов.

Данная работа посвящена изучению поведения L-гармонических функций, т.е. решений уравнения

$$Lu(x) \equiv \Delta u(x) + (b(x), \nabla u(x)) - c(x)u = 0$$

на многообразиях с концами. Здесь $b(x)$ - гладкое векторное поле, а $c(x)$ - гладкая неотрицательная на M функция. Всюду далее мы предполагаем, что $c(x) \not\equiv 0$ на каждом конце многообразия M.

Предположим, что на конце D существует L-гармоническая функция u_D такая, что $0 \leq u_D \leq 1, \quad u_D = 0$ на ∂D и $\sup_D u_D = 1$. Будем говорить в этом случае, что D является L-массивным. Конец, не являющийся L-массивным, будем называть L-субтильным. Говорят, что конец D является L-регулярным, если на нем выполнено неравенство Харнака для всякой неотрицательной L-гармонической функции.

Множество всех римановых многообразий, представимых в виде $M = B \cup D_1 \cup \dots \cup D_{s+l}$, где $D_1, \dots, D_l$ — L-массивные концы ($D_{l+1}, \dots, D_{l+s}$ — L-субтильные концы), будем обозначать через $E_L(l,s)$.

Обозначим $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание конца D. Пусть f_1 и f_2 — непрерывные на D функции. Будем говорить, что функции f_1 и f_2 *эквивалентны на* D, и обозначать $f_1 \sim f_2$, если для некоторого гладкого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ конца D выполнено равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{D \setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$.

Пусть $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательность решений следующих задач Дирихле

$$\begin{cases} Lv_k = 0 & \text{на} \quad B_k, \\ v_k = 1, & \text{на} \quad \partial D, \\ v_k = 0 & \text{на} \quad \partial B_k \setminus \partial D. \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-97004-р_поволжье_а).

Последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к предельной функции $v_D = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$, которая является L-гармонической на D и $0 \le v_D \le 1$.

Говорят, что конец D является L-строгим, если $v_D \sim 0$.

Будем говорить, что непрерывные функции f_1 и f_2 *слабо эквивалентны на* D, и обозначать $f_1 \simeq f_2$, если найдется такая константа C, что

$$|f_1(x) - f_2(x)| \le C v_D + |A(x)|, \qquad x \in D.$$

для некоторой непрерывной функции $A(x)$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{D\setminus B_k} |A(x)| = 0$.

Будем говорить, что функция f является *L-допустимой на конце* D, если на D существует L-гармоническая функция u такая, что $u \sim f$.

Обозначим через $\mathbb{H}_L(M)$ пространство L-гармоничесих на M функций.

Теорема 1. *Пусть $M \in E_L(l,s)$. Тогда для любого набора L-допустимых на D_i $(i = 1,\ldots,l+s)$, непрерывных функций f_i, существует функция $u \in \mathbb{H}_L(M)$ такая, что $u \simeq f_i$, $i = 1,\ldots,l+s$.*

Теорема 2. *Пусть $M \in E_L(l,s)$. Если все L-массивные концы являются L-строгими, то для любого набора L-допустимых на D_i $(j = 1,\ldots,l+s)$ непрерывных функций f_i, существует единственная функция $u \in \mathbb{H}_L(M)$ такая, что $u \sim f_i$ на D_i, $i = 1,\ldots,l$ и $u \simeq f_j$ на D_j, $j = l+1,\ldots,l+s$.*

Обозначим через $\mathbb{BH}_L(M)$, $\mathbb{H}'_L(M)$ и $\mathbb{H}^+_L(M)$ пространство ограниченных, пространство ограниченных с одной стороны на каждом конце многообразия и конус неотрицательных L-гармонических на M функций, соответственно.

Теорема 3. *Пусть $M \in E_L(l,s)$. Тогда*

$$\dim \mathbb{BH}_L(M) \ge l, \quad \dim \mathbb{H}^+_L(M) \ge l+s, \quad \dim \mathbb{H}'_L(M) \ge l+s.$$

В случае, когда все концы многообразия являются L-регулярными, оценки размерностей являются точными.

Сергей Алексеевич Корольков
Волгоградский Государственный Университет, Россия
E-mail address: sergei.korolkov@rambler.ru

Александр Георгиевич Лосев
Волгоградский Государственный Университет, Россия
E-mail address: alexander.losev@volsu.ru

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

И. В. Корытов

Определение 1. Экстремальной функцией данного функционала называется функция, для которой выполнено равенство

$$\langle l, \psi_l \rangle = \| l \,| B^* \| \, \| \psi_l \,| B \| \,, \tag{1}$$

где B — банахово пространство основных функций, B^* — сопряженное ему пространство сопряженных функций.

Банаховым пространством основных функций $\varphi(x)$ нескольких действительных переменных $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$ выступает весовое пространство Соболева $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ с нормой

$$\left\| \varphi \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega) \right\| = \left(\int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \, |D^\alpha \varphi|^p \, dx \right)^{1/p} . \tag{2}$$

Весом является положительная на R_n функция $\omega(x)$, имеющая обобщенные частные производные $D^\alpha \omega(x)$ до порядка m включительно и такая, что произведения $\omega^{1/p}(x)|D^\alpha \omega(x)|$ суммируемы в p-й степени, $1 < p < \infty$. На параметры пространства $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ накладываются ограничения

$$pm > n, \quad 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1. \tag{3}$$

Первое из них обеспечивает вложение пространства Соболева с нормой (2) в пространство непрерывных функций, второе — равномерную выпуклость единичной сферы.

Функционал погрешности кубатурной формулы

$$\langle l, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}_n} \left(\chi_\Omega(x) - \sum_{k=0}^{N} c_k \delta \left(x - x^{(k)} \right) \right) \varphi(x) dx, \tag{4}$$

является финитным: $\exists r > 0$: $\operatorname{supp} l \subset B(a, r)$. Здесь $B(a, r)$ шар с центром $a \in \mathbf{R}_n$ и радиусом r, c_k — коэффициенты и $x^{(k)}$ — узлы кубатурной формулы, $\delta(x)$ — дельта-функции Дирака. Область интегрирования ограничена $\Omega \subset B(a,r)$ и представлена в функционале характеристической функцией

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Утверждения для функционала (4), приведенные ниже, являются обобщением исследований автора, опубликованных в [1] для пространств Соболева, нормированных со степенным весом на пространства, нормированные с произвольным весом.

Теорема 1. *Фундаментальное решение $E(x)$ оператора*

$$\sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} \tag{6}$$

при выполнении условий (3) *принадлежит пространству* $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$.

Теорема 2. *Существует функция $u \in W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$, реализующая на произвольной функции $\varphi \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ с нормой* (2) *при условиях* (3) *функционал* (4) *в виде*

$$\langle l, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha u D^\alpha \varphi dx. \tag{7}$$

Теорема 3. *Для функционала* (4) *в условиях* (3) *существует экстремальная функция вида*

$$\psi_l = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha E * \left(\left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sign}\left(\frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right) \right) \tag{8}$$

Теорема 4. *Экстремальная функция ψ_l функционала* (4) *в условиях* (3) *единственна.*

Список литературы

[1] *Корытов И. В.* Представление функционала погрешности кубатурной формулы в весовом пространстве Соболева // Вычислительные технологии. **11**: Специальный выпуск (2006), 59–66.

Игорь Витальевич Корытов
Иркутский государственный университет, Россия
E-mail address: kor2003@inbox.ru

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАНУЛЯЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В. А. Красиков

Задача определения сложности функции является важной задачей математики, на решение которой существует множество точек зрения. Рассмотрим подход, предложенный В. К. Белошапкой [1], позволяющий определить класс сложности аналитической функции двух переменных как некоторое дифференциально-алгебраическое множество.

Введем *базовую функцию* двух переменных $\phi(x, y) = x + y$ и определим классовую иерархию следующего вида: $Cl_0 \subset Cl_1 \subset \ldots \subset Cl_n \subset \ldots \subset \mathbf{Cl}$, где Cl_0 – множество функций одного переменного (x или y), $Cl_{N+1} = \{C_N(\phi(A_N(x, y), B_N(x, y)))\}$, здесь $C_N(t)$ – некоторая функция одного переменного, $A_N(x, y), B_N(x, y)$ – функции из класса Cl_N. Представимость функции из Cl_{N+1} в виде композиции подразумевается локальная, в некоторой окрестности регулярной точки.

Определение 1. (см. [1]) *Функция аналитической сложности* n – это аналитическая функция f, принадлежащая $Cl_n \backslash Cl_{n-1}$.

Оказывается, n-й класс аналитической сложности Cl_n можно задать дифференциально-алгебраическим соотношением, то есть уравнением вида
$\Delta_n(z) = P_n(x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, \ldots) = 0$, которому удовлетворяют все функции $z(x, y) \in Cl_n$. Здесь P_n – это некоторый многочлен переменных $x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, \ldots$

Класс аналитической сложности 1 (см. [1]) задается соотношением

$$\Delta_1(z) = z'_x z'_y (z'''_{xxy} z'_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy}((z'_x)^2 z''_y y - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0,$$

однако уже для 2-го класса просто выписать оператор Δ_2 представляется сложной задачей.

В работе введено определение промежуточных классов сложности, то есть множеств функций, принадлежащих классу N, но не принадлежащих классу $N - 1$. Примером такой функции может служить $Z(x, y) = a(x+y)+b(x)$, где $a(x+y)$ и $b(x)$ – произвольные аналитические функции. Легко проверить, что $Z(x, y) \notin Cl_1$, но $Z(x, y) \in Cl_2$.

Предложен алгоритм нахождения операторов для различных классов сложности средствами коммутативной алгебры. Укрупненный вид этого алгоритма:

1. Вычисление множества дифференциальных следствий

$$D(z) = \{z^{(n)} - Q_n(A_0, A_1 \dots, A_i, \dots, B_i, \dots, C_i, \dots, A'_i, \dots, B'_i, \dots, C'_i, \dots, A''_i, \dots, C_N^{(n)}) | n = 1, 2, \dots, S\},$$

исходя из общего вида аналитической функции $z(x, y)$ заданного класса сложности.

2. Замена производных функции в выражениях из $D(z)$ на символьные переменные приводит к множеству $\mathcal{A}(z)$.

3. Построение идеала $\mathcal{I}$ (над кольцом алгебраических многочленов), содержащего многочлены из $\mathcal{A}(z)$.

4. Вычисление базиса Гребнера $\mathcal{I}$.

5. Исключение «лишних» переменных.

Данная последовательность действий приведет к многочлену, лежащему в $\mathcal{I}$, при замене переменных в котором на соответствующие производные получим результат действия на $z(x, y)$ искомого оператора.

Пример. Функция $z(x, y) = u(ax+by)+v(cx+dy)$, где u, v – некоторые аналитические функции, a, b, c, d – константы, удовлетворяет дифференциальному уравнению $bdz''_{xx} - (ad + bc)z''_{xy} + acz''_{yy}$.

Список литературы

[1] *Beloshapka V. K.* Analytic complexity of functions of two variables // Russian Journal of Mathematical Physics. **14**:3 (2007), 243–249.

Виталий Александрович Красиков
Сибирский федеральный университет, Россия
E-mail address: vkrasikov@sfu-kras.ru

О ТЕОРЕМЕ ПОЛИА - ЛЕОНТЬЕВА

О. А. Кривошеева

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратная последовательность комплексных чисел, т.е. λ_k – различные комплексные числа и m_k – их кратности, $k = 1, 2, \ldots$ Будем считать, что $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – неограниченная и возрастающая по модулю последовательность. Рассмотрим систему функций

$$\mathcal{E} = \{z^n exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}.$$

Пусть w — произвольная фиксированная точка плоскости, и $H(\{w\})$ обозначает пространство функций, каждая из которых аналитична в окрестности точки w. Топология в $H(\{w\})$ задается следующим образом. Последовательность $\{\varphi_l\}_{l=1}^{\infty}$ из $H(\{w\})$ является сходящейся, если она равномерно сходится в некоторой окрестности точки w. Через W обозначим замыкание в пространстве $H(\{w\})$ линейной оболочки системы $\mathcal{E}$.

Рассматривается следующая задача. При каких условиях на последовательность Λ область существования каждой функции из W является выпуклой.

Пусть σ обозначает верхнюю плотность последовательности Λ, т.е.

$$\sigma = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{j}{|\mu_j|},$$

где $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность, состоящая из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно m_k раз.

В работе Полиа [1] доказано, что при условиях $m_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\sigma = 0$ область существования каждой суммы вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k exp(\lambda_k z)$$

является выпуклой. А.Ф. Леонтьев [2] обобщил этот результат, показав, что при тех же условиях область, в которой равномерно ограничена последовательность полиномов Дирихле

$$P_s(z) = \sum_{k=1}^{s} a_{s,k} exp(\lambda_k z)$$

является выпуклой. Результат А.Ф. Леонтьева равносилен тому, что область существования каждой функции из W является выпуклой.

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема. *Для того чтобы область существования каждой функции из W была выпуклой необходимо и достаточно выполнение равенства $\sigma = 0$.*

Таким образом, эта теорема обращает результат А.Ф. Леонтьева. Кроме того, в ней допускаются кратные последовательности Λ.

Список литературы

[1] *1. Polya G.* Eine verallgemeinerung des Fabryschen Lucensatzes, Nachr. Geselesch Wissensch. Gottingen (1927), 187–195.

[2] *2. Леонтьев А.Ф.* Об области ограниченности последовательности полинома Дирихле.// Матем сб. **35** (177), №1, 1954, 175–186.

Олеся Александровна Кривошеева
Башкирский Государственный Университет, Россия
E-mail address: kriolesya2006@yandex.ru

О НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ПОДСТАНОВКАМИ С УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

М. Н. Кузнецова

Как известно, при исследовании интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений важную роль играют дифференциальные подстановки (см., например, [1] – [5]). В настоящей работе рассматриваются нелинейные гиперболические уравнения с двумя независимыми переменными

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y). \tag{1}$$

Определение 1. Соотношение

$$v = \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial y^m}\right)$$

называется дифференциальной подстановкой из уравнения (1) в уравнение

$$v_{xy} = g(v, v_x, v_y),$$

если для любого решения $u(x, y)$ первого уравнения функция v удовлетворяет второму.

Дифференциальные подстановки являются частными случаями преобразований Беклунда и позволяют получать решения уравнений из решений известных интегрируемых моделей. Наличие у нелинейного уравнения дифференциальной подстановки влияет на свойства обобщенных инвариантов Лапласа [6], [7]. Кроме того, существует тесная связь между преобразованиями Беклунда, связывающими пару нелинейных уравнений (1) и преобразованиями Лапласа, связывающими их линеаризации [8].

В настоящей работе описаны все уравнения вида (1), которые дифференциальными подстановками

$$v = \varphi(u, u_x, u_y)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-91222-СТ-а, 11-01-97005-р-поволжье-а).

сводятся к уравнению Клейна-Гордона $v_{xy} = F(v)$. Так, например, получено уравнение

$$u_{xy} = \frac{\mu(u)}{\beta'(u_x)\gamma'(u_y)},$$

сводящееся подстановкой

$$v = \beta(u_x) + \gamma(u_y) + \alpha(u)$$

к уравнению Лиувилля $v_{xy} = \exp v$. Здесь функции β, γ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_x + \frac{1}{\beta'(u_x)} = \exp\beta, \quad u_y + \frac{1}{\gamma'(u_y)} = \exp\gamma,$$

а функции μ, α удовлетворяют соотношениям $\alpha'' = \exp\alpha, \quad \mu = \exp\alpha/\alpha'$.

Список литературы

[1] Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. *Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли-Беклунда.* // Функц. анализ и его прил., 1980, Т.14, вып. 1, С.25–36

[2] Свинолупов С.И., Соколов В.В., Ямилов Р.И. *О преобразованиях Беклунда для интегрируемых эволюционных уравнений* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 4. С. 802–805.

[3] Хабиров С.В. *Решения эволюционных уравнений второго порядка, полученные с помощью дифференциальных подстановок.* // Матем. проблемы гидродинамики. вып. 85. 1988. С. 146 – 161.

[4] Хабиров С.В. *Бесконечно параметрические семейства решений нелинейных дифференциальных уравнений.* // Математический сборник. Т. 183. №11. 1992. С.45 – 54.

[5] Соколов В.В. *О симметриях эволюционных уравнений* // УМН. 1998. Т. 43. № 5. С. 133–163.

[6] Старцев В.Н. *Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой* // ТМФ. Т. 120, вып. 2. 1999. С. 237–247.

[7] Старцев В.Н. *О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные посдтановки* // ТМФ. Т. 127, вып. 1. 2001. С.63–74.

[8] Кузнецова М.Н. *Преобразование Лапласа и нелинейные гиперболические уравнения.* // УМЖ. Т. 1, вып. 3. 2009. С.87–96.

Мария Николаевна Кузнецова
Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия
E-mail address: KuznMN@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В $\mathbb{C}^n$

В. И. Кузоватов

В данной работе рассматриваются вещественно – аналитические функции, заданные на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n, n > 1$, и обладающие одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых. Исследуется вопрос о существовании голоморфного продолжения таких функций в область D в зависимости от вида области.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f \in C(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой l $(l \cap \partial D \neq \emptyset)$, если существует функция f_l со следующими свойствами

a) $f_l \in C\left(\overline{D} \cap l\right)$,

b) $f_l = f$ на множестве $\partial D \cap l$,

c) функция f_l голоморфна во внутренних (относительно топологии l) точках множества $\overline{D} \cap l$.

Пусть $\mathbb{B}^n$ – шар в $\mathbb{C}^n$, $\partial\mathbb{B}^n$ – сфера, $z_0 \in \partial\mathbb{B}^n$ и C^w обозначает класс вещественно – аналитических функций.

Теорема 1 ([1]). *Пусть функция $f \in C^w(\partial\mathbb{B}^n)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых, проходящих через точку z_0. Тогда функция f голоморфно продолжается в $\mathbb{B}^n$.*

Пусть D – ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ с вещественно – аналитической границей ∂D. Обозначим функцию, задающую границу области D, через $\rho(z_1, \ldots, z_n)$, т. е. $D = \{z \mid \rho(z) < 0\}$.

Далее все индексы $i, j, k, s \in \{1, \ldots, n\}$.

Пусть для всех точек границы выполнены условия

Работа выполнена при поддержке программы Президента РФ "Ведущие научные школы РФ" (проект НШ-7347.2010.1).

1. $i < j$, $k < s$

$$4\frac{\partial\rho}{\partial z_i}\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_k\partial z_s} - 2\frac{\partial\rho}{\partial z_k}\frac{\partial\rho}{\partial z_i}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_s\partial z_j} - 2\frac{\partial\rho}{\partial z_s}\frac{\partial\rho}{\partial z_i}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_k\partial z_j} - 2\frac{\partial\rho}{\partial z_k}\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_s\partial z_i} -$$
$$- 2\frac{\partial\rho}{\partial z_s}\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_k\partial z_i} + 4\frac{\partial\rho}{\partial z_k}\frac{\partial\rho}{\partial z_s}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i\partial z_j} = 0.$$

2. $i < j$

$$2\frac{\partial\rho}{\partial z_i}\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_k^2} - 2\frac{\partial\rho}{\partial z_k}\frac{\partial\rho}{\partial z_i}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_k\partial z_j} - 2\frac{\partial\rho}{\partial z_k}\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_k\partial z_i} + 2\left(\frac{\partial\rho}{\partial z_k}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i\partial z_j} = 0.$$

3. $i < k$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial z_i}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial z_k^2} - 2\frac{\partial\rho}{\partial z_k}\frac{\partial\rho}{\partial z_i}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_k\partial z_i} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_k}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i^2} = 0.$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_{z_0}$ – семейство комплексных прямых, проходящих через точку z_0, $z_0 \in \partial D$.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in C^w(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из $\mathfrak{L}_{z_0}$, пересекающих D, тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

Следствие 1. *В двумерном случае условия на границу области принимают следующий вид:*

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial z_2}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial z_1^2} - 2\frac{\partial\rho}{\partial z_1}\frac{\partial\rho}{\partial z_2}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_1\partial z_2} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_1}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial z_2^2} = 0.$$

Список литературы

[1] *Baracco L.* Holomorphic extension from the sphere to the ball // arxiv.org/abs/0911.2560.

Вячеслав Игоревич Кузоватов
Сибирский федеральный университет, Россия
E-mail address: kuzovatov@yandex.ru

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ

И. И. Латыпов

Интерес к изучению различного рода локально-неравновесных систем и процессов переноса (энергии, массы, импульса) связан с одной стороны с естественным направлением развития науки (равновесные системы – локально-равновесные – локально-неравновесные), а с другой с быстрым развитием технологии, использование материалов со сложной структурой (полимеров, жидких кристаллов, капиллярно-пористых и других дисперсных систем), лазерной техники. В настоящее время все больше внимания уделяется абляции под действием ультракоротких лазерных импульсов пикосекундного и фемтосекундного диапазонов, для которых квази-стационарный режим абляции не достигается [1,2]. В докладе рассматривается задача нахождения распределения температуры в твердом материале при облучении ультракороткими лазерными импульсами, приводится двухтемпературная модель описания переходных явлений в неравновесном электронном газе и решетке при субпикосекундном лазерном воздействии. Двухтемпературная модель [2] описывает транспорт энергии внутри металла с помощью системы уравнений теплопроводности для температуры электронов T_e и решетки T_i:

$$c_e\frac{\partial T_e}{\partial t}=c_e\nu\frac{\partial T_e}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_e\frac{\partial T_e}{\partial z}\right)+D_k\cdot Q-\mu_e\left(T_e-T_i\right),$$

$$c_i\frac{\partial T_i}{\partial t}=c_i\nu\frac{\partial T_i}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_i\frac{\partial T_i}{\partial z}\right)+\mu_e\left(T_e-T_i\right),$$

$$T_e|_{t=t_k}=T_{e,k}\left(z\right),\quad T_i|_{t=t_k}=T_{i,k}\left(z\right),\quad -\chi\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=J_e,$$

$$J_e=-k_0b_0(T_{e,s}+T_\infty)^2\exp\left\{-\frac{T_u}{T_{e,s}+T_\infty}\right\},\quad D_k=\left\{\begin{array}{ll}1, & k=2p,\\ 0, & k=2p+1,\end{array}\right.$$

$$-\chi\frac{\partial T_i(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=J_i=\varrho\nu L,\quad -\chi\frac{\partial T_i(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=H}=J_i=\psi_i(t),$$

$$-\chi\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=H}=J_i=\psi_e(t),\quad T_e|_{z=0}=T_{e,s},$$

$$(z,t)\in\Omega\left\{(z,t):0<z<H,0<t<\overline{t_0}\right\},\quad 0=t_0,\ t_1,\ t_1,\cdots,\ t_n=\overline{t_0},$$

где $\mu_e = c_e/\tau$ - коэффициент скорости обмена энергией между электронной и решеточной подсистемами (τ - характерное время обмена для электронной подсистемы); b_0 - постоянная Ричардсона; $k_0 = k_b\left(T_{e,s} - T_\infty\right)/e$ - коэффициент преобразования плотности потока энергии J_e в энергетические единицы; индекс s - обозначает соответствующие величины на поверхности $z = 0$; H, ϱ, L - толщина, плотность и удельная теплота плавления материала; ν_0, T_a - константы характеризующие модель испарения, которые берутся из справочников; $r_k = \left(t_{2k+1} - t_{2k}\right)$, $k = \overline{0, m-1}$ - время k-го импульса лазерного излучения, $\left.T_e\right|_{t=t_0} = T_{e,0}\left(z\right) = T_0$, $\left.T_i\right|_{t=t_0} = T_{i,0} = T_0$, $t_0 = 0$. Функции ψ_e, ψ_i определяют режимы теплообмена на обратной стороне пластины. Источник тепла Q определяется следующим образом $Q = -\frac{\partial I}{\partial z} = \alpha \cdot I$, $I\left(0, t\right) = I_s\left(t\right)$, $t \in [0,\ r_k]$, где α, I_s - коэффициент поглощения и интенсивность излучения на поверхности материала ($z = 0$), при этом $I_s\left(t\right) = A \cdot I\left(t\right)$ зависит от формы лазерного импульса. Данная модель применима в случае, когда можно использовать классические законы Фурье, то есть применима для времен, много больших, чем характерное время τ_e установления равновесного распределения в электронном газе. Время τ_e - зависит от электронной температуры (плотности энергии в лазерном импульсе), в большинстве задач оно составляет несколько сотен фемтосекунд. Распространение электронной температуры возникает на пространственных масштабах больших, чем длина свободного пробега электрона l_e. На более коротких длинах транспорт электронов в основном баллистический: $\tau_e \approx \nu_F \cdot \tau_e$, где τ_F - фермиевская скорость электрона (например: для электронов никеля $l_e \approx 10$ нм, для золота $l_e \approx 100$ нм). Если время релаксации $\tau \to 0\,(\mu \to \infty)$ двухтемпературная модель переходит в тепловую модель с единой температурой тела $T \equiv T_i \equiv T_e$, где $c = c_e + c_i$, $\chi = \chi_e + \chi_i$ - полная теплоемкость и теплопроводность твердого тела.

Список литературы

[1] *Соболев С. Л.* Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // Успехи физических наук. **161** (1991).

[2] *Анисимов С. И., Лукьянчук Б. С.* Избранные вопросы теории лазерной абляции // Успехи физических наук. **172**:3 (2002).

[3] *Латыпов И. И.* Моделирование испарения материала короткими лазерными импульсами // Труды четвертой РНК по теплообмену, т. 5. М.: Изд.дом МЭИ, 2006.

Ильмир Ибрагимович Латыпов
Бирская государственная социально-педагогическая академия
E-mail address: `Latypov196@rambler.ru`

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ ПОРИСТЫМ ОХЛАЖДЕНИЕМ

И.И. Латыпов

В работе ставится и решается задача определения нерегулярного нестационарного температурого поля пористого защитного материала, облучаемого лазером интенсивности I , с учетом радиационно-конвективных теплопотерь и температурной зависимости поглощательной способности материала [1,2].

Согласно [1], в предположении, что теплозащитный композиционный материал не подвергается разрушению, уравнение сохранения энергии записывается в виде

$$(\rho c)_\Sigma \frac{\partial U}{\partial \tau} + C_g G_g \frac{\partial U}{\partial \xi} + A(U) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_\Sigma \frac{\partial U}{\partial \xi}\right),$$

где Σ–индекс, означающий теплофизические свойства соответствующей системы: пористая среда + газообразная составляющая; C_g, G_g – теплоемкость и расход газообразной составляющей; λ_Σ – теплопроводность системы; $A(U)$ – поглощательная способность системы; U – температура точки (ξ, τ).

Допуская, что теплофизические свойства системы не зависят ни от температуры, ни от пространственных и временных координат, исходная задача [3] может быть сформулирована в виде нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = Fo \cdot \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + k(t) \cdot \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + A(U(x,t)),$$

$$U(x,t) = u_0(x), \qquad t \to 0,$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \gamma_1 [U(x,t) - u_{1c}(t)] - \sigma \left[U^4(x,t) - u_{1c}^4(t)\right] + A_v \cdot I(t), \quad x = 0,$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \gamma_2 [U(x,t) - u_{1c}(t)], \qquad x = L,$$

$$(x,t) \in \Omega' = \{(x,t): \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < t_0 < +\infty\},$$

$$Fo = a^2\bar{t}/\bar{x}^2, \quad a = \lambda_\Sigma / \left(\rho c\right)_\Sigma, \quad k = C_g G_g / \left(\rho c\right)_\Sigma,$$

$$I\left(t\right) = I_0 \cdot \exp\left\{-\frac{\left(t - t_1\right)^2}{t_{10}^2}\right\}, \qquad I_0,\ t_1,\ t_{10} = const,$$

$$A\left(U\right) = A_0 + A_1 \cdot U\left(x,t\right), \quad A_i = const, \quad i = 0,1;$$

где $x,\ t$ – безразмерные координаты; $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \sigma$ – постоянные; a – температуропроводность системы; $\bar{t},\ \bar{x}$ – соответственно временной и пространственный масштабы; $u_0\left(x\right)$ – начальное распределение температуры в пористом материале; $u_{1c},\ u_{2c}$ – температуры рабочего тела и охлаждающего газа; A_v – доля энергии излучения, выделяющаяся в единицу времени в единичном объеме материала; Fo – малый параметр–критерий Фурье: $Fo \ll 1$. Малость Fo обеспечивается низкой температуропроводностью конструкционного материала, массивностью тела или малостью рассматриваемого интервала времени.

Список литературы

[1] *Алпатьев А.Н., Данилов А.А., Никольский Н.Ю., Прохоров А.Н., Цветков В.Б., Щербаков И.А.* Особенности тепловых и генерационных режимов оптически плотных активных сред// Изд. АН СССР. Труды института общей физики. 1990, Т.26. С.107-124.

[2] *Несененко Г.А., Латыпов И.И., Насельский С.П.* Приближенный расчет температурного поля активного элемента лазера при охранном нагреве // Нелинейные краевые задачи мат. физики и их приложения. Киев: Инт. Математики АН Украины, 1993. С.94-95.

[3] *Латыпов И.И., Несененко Г.А.* Асимптотика решения нелинейной сингулярно возмущенной задачи тепловой защиты пористым охлаждением // Тепломассообмен – ММФ – 96. Радиационный и комбинированный теплообмен. Т. 2. – Минск: АНК "ИТМО им. А. В. Лыкова" АНБ, 1996. – С.167-171.

[4] *Латыпов И.И.* Приближенный расчет распределения температурного поля активного элемента твердотельного лазера // Труды кафедры экспериментальной и теоретической физики института физики молекул и кристаллов УНЦ РАН. Вып. 1. - Уфа, Изд. "Гилем", 2001. -С.82-92.

Ильмир Ибрагимович Латыпов

Бирская государственная социально-педагогическая академия, Россия

E-mail address: Latypov196@rambler.ru

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ “ВЛАСТЬ-ОБЩЕСТВО”

И. И. Латыпов, А. З. Латыпова

Постановка задачи

Ставиться задача численно-аналитического исследования математической модели, описывающей иерархию государственных структур в системе “государственная власть - гражданское общество”. Где под иерархической структурой понимается упорядоченная по старшинству совокупность институтов инстанций, должностей, постов и т.д.), обладающих официальной властью с четким порядком подчиненности; гражданское общество – это часть общества, непосредственно не обладающая государственной властью [1].

Рассматривается модель, описывающая иерархию власти и/или властных полномочий, как совокупности иерархий (в простейшем виде ”центральная властная структура – республиканская властная структура – местная властная структура”, каждая со своей вертикалью власти), предложенная Михайловым А.П. в [1,2].

Математическое описание данной модели имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p_i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa_i(p_i, x,\ t)\,\frac{\partial p_i(x,t)}{\partial x}\right] + \int\limits_{L_i}^{L_{i+1}} \chi_i(p_i,\xi,t)\left[p_i(\xi,t) - p_i(x,t)\right]\partial\xi +$$

(1) $$+F_i(p_i, p_1, p_2, x, t)\,,\quad L_i < x < L_{i+1},\ \ i=\overline{0,n-1}, (x,t)\in\Omega,$$

(2) $$\Omega = \left\{(x,t):\ \ L_i < x < L_{i+1},\ \ i=\overline{0,n-1};\ L_0=0,\ L_n=L,\ t>t_0\right\};$$

начальные условия

(3) $$p_i(x,t_0) = p_{i,0}(x) \geq 0,\quad L_i < x < L_{i+1},\quad i=\overline{0,n-1},$$

граничные условия

(4) $$-\kappa_0(p_0,x,t)\,\frac{\partial p_0}{\partial x}|_{x=0} = 0,\quad -\kappa_n(p_0,x,t)\,\frac{\partial p_n}{\partial x}|_{x=L} = 0,$$

условия согласования

(5) $$\alpha_i p_i + \beta_i\kappa_i\frac{\partial p_i}{\partial x}|_{x\to L_{i+1}^-} = \alpha_{i+1}p_{i+1} + \beta_{i+1}\kappa_{i+1}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial x}|_{x\to L_{i+1}^+},\quad i=\overline{1,n-1},$$

где $\kappa_i(p_i,x,t) > 0$, $\chi_i(p_i,x,t) \geq 0$, $i=\overline{0,n}$, $p_1(x,t) \geq 0$, $p_2(x,t) \geq 0$ монотонно убывающие по x функции.

Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i \in \{0 \vee 1\}$ задают условия согласования функции распределения властных полномочий между подобластями Ω.

Смысл введенных величин следующий:

$p_i(x,t)$ – описывает динамику распределения власти в иерархической структуре, т.е. зависимость уровня реально осуществляемой инстанцией власти от ее местоположения (x) и времени (t);

$\kappa_i(p_i,x,t) > 0$ – коэффициент передачи властных полномочий между соседними уровнями (механизм "близкодействия");

$\chi_i(p_i,x,t) > 0$ – коэффициент передачи властных полномочий между отдаленными уровнями (механизм "дальнодействия");

$F_i(p_i,p_1,p_2,x,t)$ – характеризует реакцию системы (общества); реакция общества – ответ (положительный, отрицательный или безразличный) гражданского общества на действия того или иного института власти (с помощью выборов, референдумов, через средства массовой информации, митинги, забастовки и т.д.);

$p_i(x,t_0) = p_{i,0}(x)$ – начальное распределение власти в структуре;

$p_1(x,t) \geq 0$, $p_2(x,t) \geq 0$ – минимальные и максимальные властные полномочия в иерархии,

$p_1(x,t) \leq p_i(x,t) \leq p_2(x,t)$, $t \geq t_0$, $i=\overline{0,n}$;

различают следующий области:

"Диктатура" - $\Omega_D = \{p_i(x,t) : p_2(x,t) \leq p_i(x,t)\,,\ 0 \leq x \leq L,\ \ t \geq t_0\}$;

"Анархия" - $\Omega_A = \{p_i(x,t) : p_i(x,t) \leq p_1(x,t)\,,\ 0 \leq x \leq L,\ \ t \geq t_0\}$;

"Правовое поле" -

$\Omega_P = \{p_i(x,t) : p_1(x,t) \leq p_i(x,t) \leq p_2(x,t)\,,\ 0 \leq x \leq L,\ \ t \geq t_0\}$.

Список литературы

[1] *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование (идеи, методы, примеры). М.: Наука, 1997.

[2] *Михайлов А. П.* Моделирование системы "власть-общество". М.: Физматлит, 2006.

Ильмир Ибрагимович Латыпов, Анфиса Забировна Латыпова
Бирская государственная социально-педагогическая академия, Россия

E-mail address: Latypov196@rambler.ru

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМ РЕШЕНИЕМ И УПРАВЛЕНИЕМ В КОЭФФИЦИЕНТЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ

Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов, А. Р. Манапова

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть область Ω разделена прямой $x_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ (контактной границей $\overline{S} = \{x_1 = \xi, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$, $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 = \{0 < x_1 < \xi, 0 < x_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 = \{\xi < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$ с границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. Через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1, 2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Ниже, при постановках краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой будут разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью. Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух подобластей Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решением: Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2$, где компоненты $u_k(x)$, $k = 1, 2$ удовлетворяют условиям: 1) функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$ определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, удовлетворяют в Ω_k, $k = 1, 2$ уравнениям

$$L_k u_k = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(k)}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right) + d_k(x) q_k(u_k) = f_k(x), x \in \Omega_k, k = 1, 2,$$

а на границе $\overline{\Gamma}_k = \partial\Omega_k \backslash S$ условиям $u_k(x) = 0$, $x \in \overline{\Gamma}_k$, $k = 1, 2$; 2) искомые функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$ удовлетворяют дополнительным условиям на S, позволяющим "сшить" решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2, следующего вида

$$G(x) = k_1^{(1)}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)(u_2(x) - u_1(x)), \qquad x \in S.$$

Здесь $[u] = u_2(x) - u_1(x)$ – скачек функции $u(x)$ на S, $k_\alpha^{(1)}(x)$, $k_\alpha^{(2)}(x)$, $\alpha = 1,2$, $d_k(x)$, $f_k(x)$ и $q_k(\xi)$, $k = 1,2$ – известные функции, определяемые по разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S; $\theta(x_2) \equiv g(x_2)$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2)$, $d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $f_\alpha(x) \in L_2(\Omega_\alpha)$; $0 < \nu_\alpha^{(p)} \leq k_\alpha^{(p)} \leq \overline{\nu}_\alpha^{(p)}$, $p = 1,2$, $0 \leq d_0 \leq d(x) \leq \overline{d}_0$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\nu_\alpha^{(p)}$, $\overline{\nu}_\alpha^{(p)}$, $p = 1,2$, d_0, $\overline{d}_0$ – заданные константы, функция $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1,2$ определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0$, $0 \leq q_0 \leq (q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2))/(\xi_1 - \xi_2) \leq L_q < \infty$ для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \neq \xi_2$. Введем множество допустимых управлений $U = \{g(x_2) \equiv \theta(x_2) \in L_2(0,l_2) : g_0 \leq g(x_2) \leq \overline{g}_0 \text{ п.в. на } (0,l_2)\}$. Зададим функционал цели $J : U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \left\| u(x,g) - u_0^{(1)}(x) \right\|_{L_2(\Omega_1)}^2 = I(u(x;g)),$$

где $u_0^{(1)} \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве U функционал цели $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(x) = u(x;g)$ задачи для состояния, отвечающих всем допустимым управлениям $g = \theta(x_2) \in U$ требуется минимизировать функционал цели $J(g)$.

Исследована корректность постановки задачи оптимального управления. Построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу, доказана слабая сходимость аппроксимаций по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций по Тихонову.

В теплофизических терминах, поставленную задачу можно трактовать как задачу оптимального управления контактным тепловым сопротивлением $\theta^{-1}(x_2)$ ($\theta(x_2)$ – контактная проводимость), характеризующим теплопередачу между соприкасающимися теплопроводящими средами (телами) с неидеальным контактом с целью обеспечения в Ω_1 заданного температурного режима $u_0^{(1)}(x)$.

Федор Владимирович Лубышев
Башкирский Государственный Университет, Россия
E-mail address: v.lubyshev@mail.ru

Махмут Эрнстович Файрузов
Башкирский Государственный Университет, Россия
E-mail address: fairuzovme@mail.ru

Айгуль Рашитовна Манапова
Башкирский Государственный Университет, Россия
E-mail address: aygulrm@mail.ru

ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИБЛИЖЕННЫХ СИММЕТРИЙ

В.О. Лукащук

Рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$y'' = F_{(0)}(x, y, y') + \varepsilon F_{(1)}(x, y, y') \tag{1}$$

с малым параметром ε, допускающие приближенные алгебры Ли с двумя или тремя существенными операторами [1] вида

$$X = X_{(0)} + \varepsilon X_{(1)} \qquad \text{или} \qquad X = \varepsilon X_{(0)}, \tag{2}$$

где $X_{(0)} \neq 0$. Классификация таких уравнений была проведена в работе [2].

В данной работе приводятся примеры интегрирования конкретных уравнений (1) с использованием допустимых симметрий. Алгоритм поиска приближенного решения сводится к следующим шагам: 1) путем вычисления коммутаторов операторов (2) определяется тип приближенной алгебры Ли; 2) строится замена переменных, после которой операторы исходной алгебры приводятся к операторам соответствующей неподобной алгебры; 3) найденная замена используется в исходном уравнении для приведения к инвариантному уравнению, которое легко может быть проинтегрировано в квадратурах.

Список литературы

[1] *Baikov V.A., Gazizov R.K., N.H. Ibragimov N.H.* Approximate transformation groups and deformations of symmetry Lie algebras // CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 3. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996.

[2] *Лукащук В.О.* Приближенные алгебры Ли малых размерностей, допускаемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с малым параметром // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Уфа, 2010.

Вероника Олеговна Лукащук
Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет, Россия
E-mail address: voluks@gmail.com

О РЕШЕНИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С. Ю. Лукащук

Рассматривается задача отыскания общего решения дифференциального уравнения дробного поряда смешанного типа

$$(1) \qquad {}_0D_x^\alpha \left({}_x^C D_\infty^\alpha y\right) + \lambda y = f, \quad \alpha \in (0,1), \quad \lambda > 0,$$

где ${}_0D_x^\alpha y$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля, ${}_x^C D_\infty^\alpha y$ – правосторонняя дробная производная Капуто [1]. Уравнение (1) возникает, в частности, в задаче отыскания оптимальной весовой функции при идентификации коэффициентов уравнения диффузии дробного порядка методом объемно-временных интегральных характеристик [2].

Доказана следующая

Теорема 1. *Для функций $y(x) \in L_1(R_+)$, $f(x) \in L_1(R_+)$ общее решение уравнения (1) имеет вид*

$$(2) \quad y = c_1 \int_0^\infty \frac{\cos(\xi x)}{\xi^{2\alpha} + \lambda} d\xi + c_2 \int_0^\infty \frac{\xi^{2\alpha-1}\sin(\xi x)}{\xi^{2\alpha} + \lambda} d\xi - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(x-\xi) f(\xi) d\xi,$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные и

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(\xi x)}{\xi^{2\alpha} + \lambda} d\xi.$$

Получены также представления решения (2) в виде бесконечных сходящихся рядов для различных случаев рациональных и иррациональных значений параметра α. Показано, что в некоторых частных случаях эти решения могут быть записаны через обобщенные функции Райта и функцию Фокса [1].

Список литературы

[1] *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations (Mathematics studies 204), Elsevier, Amsterdam, 2006.

[2] *Шаталов Ю. С.* Интегральные представления постоянных коэффициентов теплопереноса, Уфа: Изд-во УАИ, 1992.

Станислав Юрьевич Лукащук

Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия

E-mail address: lsu@mail.rb.ru

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ТОРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЦЕЛЫМ ФУНКЦИЯМ

Л. С. Маергойз

Доклад посвящен описанию множества функций, голоморфных в торическом пространстве, представляющего собой расширение класса целых функций.

Полагаем $H(\mathbb{T}^n)$ – класс функций, голоморфных в торическом пространстве $\mathbb{T}^n,\ n > 1$ $(\mathbb{T} = \mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Определение 1. Функцию $f(z)$ из класса $H(\mathbb{T}^n)$ назовем *эквивалентной целой функции*, если существует мономиальное отображение

$$\mathcal{A} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n; \quad z = \mathcal{A}(w), \ \ z_k = \prod_{j=1}^{n} w_j^{s_{kj}},\ k = 1, ..., n,$$

такое, что $\|s_{kj}\|$ – целочисленная невырожденная квадратная $n \times n$ матрица, причем $F(w) = [f \circ \mathcal{A}](w)$ - целая функция. Класс всех таких функций обзначим символом $H(\mathbb{T}^n_+)$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in H(\mathbb{T}^n)$; $f(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k z^k, \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},\ z \in \mathbb{T}^n$ *– ее разложение в кратный ряд Лорана. Символом* $S_f = \{k \in \mathbb{Z}^n :\ a_k \neq 0\}$ *обозначим носитель этого ряда. Полагаем* K_f *–наименьший выпуклый конус с вершиной в* $0 \in \mathbb{R}^n$, *содержащий* S_f. *Функция* f *принадлежит* $H(\mathbb{T}^n_+)$ *тогда и только тогда, когда множество* K_f *– строго выпуклый конус. Кроме того, если* $\dim K_f = m \leq n$, *то в обозначениях определения* 1 F *– целая функция* m *комплексных переменных.*

В докладе обсуждается подход к построению теории роста функций класса $H(\mathbb{T}^n_+)$, опирающийся на многомерную теорию роста целых функций [1].

Список литературы

[1] *Маергойз Л. С.* Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1991. 262 с.—Engl. transl. Second edition (revised and enlarged). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2003. 362 p.

Лев Сергеевич Маергойз
Сибирский Федеральный Университет, Россия
E-mail address: bear.lion@mail.ru

ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е. А. Мазепа

В работе изучаются вопросы существования целых решений неравенств

$$Lu \equiv div(A(|\nabla u|)\nabla u) \geq f(u) \tag{1}$$

на модельных римановых многообразиях M.

Будем считать, что функция A удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} A \in C(0,\infty), \quad A(p) > 0 \quad \text{при} \ \ p > 0, \\ pA(|p|) \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(0,\infty), \\ (pA(p))' > 0 \ \text{для} \ p > 0, \end{cases}$$

а функция $f \not\equiv 0$ такова, что $f \in C(0,\infty), \quad f(u) \geq 0$ при $u \geq 0$ и $f(0) = 0$.

Целым решением неравенства (1) будем называть функцию $u \in C^1(M)$ такую, что $A(|\nabla u|)\nabla u \in C^1(M)$, и удовлетворяющую неравенству (1) в каждой точке $x \in M$.

Фиксируем начало координат $O \in \mathbb{R}^n$ и некоторую гладкую функцию $q(r)$ на $[0,+\infty)$ такую, что $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$. Определим модельное риманово многообразие M следующим образом:

1) множество точек M является $\mathbb{R}^n$;

2) в полярных координатах (r,θ) (где $r \in (0,R_0)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $M \setminus \{O\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2, \tag{2}$$

где $d\theta^2$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1};

3) риманова метрика в O является гладким продолжением метрики (2).

Введем обозначение

$$I_n(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)} \int\limits_0^r q^{n-1}(s)\, ds.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-97004-р_поволжье_а).

В первых двух утверждениях работы будем считать, что существует неубывающая функция $g \in C(0,\infty)$ такая, что при $u > 0$ выполнено

$$0 < g(u) \le f(u).$$

Теорема 1. *Пусть* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$ *и* M *таково, что* $\lim\limits_{p\to\infty} I_n(p) = \infty$. *Тогда на* M *не существует целых положительных решений неравенства (1).*

Далее рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$. Определим непрерывную функцию $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ в виде

$$\Psi(p) = p^2 A(p) - \int\limits_0^p tA(t)dt, \qquad p \ge 0.$$

Очевидно, что Ψ строго возрастающая и $\Psi(0) = 0$. Также можно показать, что $\lim\limits_{p\to\infty} \Psi(p) = \infty$. Таким образом, обратная к Ψ функция Φ определена на $[0,\infty)$. Ясно, что Φ строго возрастающая функция и $\lim\limits_{p\to\infty} \Phi(p) = \infty$.

Обозначим

$$J = \int\limits^{\infty} \left(\Phi \left(k \int\limits^{s} g(t)dt \right) \right)^{-1} ds.$$

Теорема 2. *Пусть* $\lim_{p\to\infty} pA(p) = \infty$ *и* M *таково, что* $I'_n(r) \ge k > 0$. *Тогда если* $J < \infty$, *то на* M *не существует целых положительных решений неравенства (1).*

Теорема 3. *Пусть* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$ *и* M *таково, что* $q'(r) \ge 0$. *Тогда если* $J = \infty$, *то неравенство (1) имеет континуум положительных целых решений.*

Рассмотрим частный случай, когда

$$(3) \qquad 0 < \liminf_{p\to\infty} \frac{p^2 A(p)}{p^m} \le \limsup_{p\to\infty} \frac{p^2 A(p)}{p^m} < \infty \text{ для некоторого } m > 1.$$

Следствие 1. *Пусть* $A(p)$ *удовлетворяет условию (3),* $f(u) > 0$ *при* $u > 0$, $f(u)$ *неубывает на* $(0,\infty)$ *и многообразие* M *таково, что при некотором* $0 < k < 1$ *и* $r \ge 0$ *выполнено* $k \le I'_n(r) \le 1$. *Тогда неравенство*

(1) имеет положительные целые решения тогда и только тогда, когда

$$\int^{\infty}\left(\int^{s} f(t)dt\right)^{-\frac{1}{m}} ds = \infty.$$

Елена Алексеевна Мазепа
Волгоградский Государственный Университет, Россия
E-mail address: `lmazepa@rambler.ru`

ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С УСЛОВИЯМИ СМЕШАННОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ КРАЯ ОБОЛОЧКИ

Е.Б. Макарова

1°. **Определение пространства** $\tilde{H}_2^2(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$.

Пусть Ω – ограниченная область на плоскости R^2 с границей $\Gamma \in C^3$, обладающей ограниченными четвертыми производными. Причем $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 являются объединениями связных компонент Γ. Все неограниченные компоненты Γ, если они есть, содержатся в Γ_1. Обозначим через $A(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$ множество всех функций $\omega \in C^3(\Omega)$, обладающих ограниченными производными четвертого порядка, равных нулю в некоторой окрестности Γ_1 и финитных в случае неограниченности Ω и удовлетворяющих условию. На функциях $u,v \in A(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$ введем билинейную форму $(u,v)_{A(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)} = \left(\Delta^2 u, v\right)_{L_2(\Omega)} + (u,v)_{L_2(\Omega)}$.

Пополнение $A(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$ по норме

$$\|\omega\|_{\tilde{H}_2^2(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)} = \sqrt{(\Delta^2\omega,\omega)_{L_2(\Omega)} + (\omega,\omega)_{L_2(\Omega)}} \tag{1}$$

назовем пространством $\tilde{H}_2^2(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$ [1].

2°. **Задача на собственные значения**.

Рассмотрим задачу на собственные значения для бигармонического оператора

$$\Delta^2\zeta = \lambda\zeta, \tag{2}$$

$$\zeta\,|_{\Gamma_1} = \left.\frac{d\zeta}{dn}\right|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \zeta\,|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{d^2\zeta}{dn^2} - \mu\chi\frac{d\zeta}{dn}\right)\right|_{\Gamma_2} = 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть граница ограниченной области Ω $\Gamma \in C^3$ и имеет ограниченные производные четвертого порядка. Тогда задача* (2), (3) *имеет обобщенный дискретный спектр $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_m \le \ldots$ из счетного числа стремящихся к бесконечности положительных собственных значений, каждому из которых соответствует лишь конечное число линейно независимых собственных функций ζ_l. Собственные*

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико–математических наук, профессору Седенко В.И..

функции ζ_l, $l = 1, 2, \dots$ *образуют полную ортонормированную систему в* $L_2(\Omega)$ *и полную ортогональную систему в* $\tilde{H}_2^2(\Omega, \mu; \Gamma_1, \Gamma_2)$.

Доказательство непосредственно получаем из общей теоремы о спектре положительно определенного симметричного оператора [2].

Теорема 2. *В условиях теоремы 1*

$$\zeta_l \in \tilde{H}_2^2(\Omega, \mu; \Gamma_1, \Gamma_2) \cap H_2^4(\Omega), l = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Пусть ζ_l *– собственные функции краевой задачи* (2), (3), *тогда* $\zeta_l \in \tilde{H}_2^2(\Omega, \mu; \Gamma_1, \Gamma_2)$. *Положив в* (2), (3) $f = \lambda_l \zeta_l$, *рассмотрим следующую краевую задачу*

$$\Delta^2 \zeta_l = f, \tag{4}$$

$$\zeta_l|_{\Gamma_1} = \left.\frac{d\zeta_l}{dn}\right|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \zeta_l|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{d^2\zeta_l}{dn^2} - \mu\chi\frac{d\zeta_l}{dn}\right)\right|_{\Gamma_2} = 0. \tag{5}$$

Так как $\zeta_l \in \tilde{H}_2^2(\Omega, \mu; \Gamma_1, \Gamma_2)$, *то* $\zeta_l \in L_2(\Omega)$. *Тогда и правые части в* (4) $f \in L_2(\Omega)$, *а значит согласно* [3], *обобщенные решения краевой задачи* (4), (5) $\zeta_l \in H_2^4(\Omega)$. *Теорема доказана.*

Список литературы

[1] *Седенко В. И., Клитина Н.А.* Разрешимость в $H_4^2(\Omega)$ краевой задачи для бигармонического оператора с краевыми условиями смешанного края закрепления оболочки. // Известия ВУЗов. Северо–Кавказский регион. Естественные науки. – №3. – 2008. – с. 22–25. – ISSN-0321-3005.

[2] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. – 431с.

[3] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Елена Борисовна Макарова

Кубанский Государственный Технологический Университет, Россия

E-mail address: `e.b.makarova@mail.ru`

ПРОЕКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ СЧЕТНЫХ ИНДУКТИВНЫХ ПРЕДЕЛОВ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Мелихов С.Н.

Одна из наиболее важных проблем в теории индуктивных пределов E локально выпуклых пространств, называемая проблемой их проективного описания, – построение удобной в приложениях фундаментальной системы непрерывных преднорм в E. В последние десятилетия усилился интерес к теории проективного описания индуктивных пределов пространств Фреше аналитических, в первую очередь, целых функций, естественно возникающих в анализе Фурье. С помощью преобразования Фурье-Лапласа в виде таких индуктивных пределов можно получить реализации сопряженных к пространствам аналитических, вещественно аналитических, бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций (т.е. пространств аналитических функционалов, гиперфункций, распределений, ультрараспределений). Счетные индуктивные пределы весовых пространств целых функций естественным образом возникают при исследовании линейных уравнений в частных производных, уравнений свертки, в теории распределений и представления распределений как граничных значений аналитических функций, в спектральной теории и в голоморфном функциональном исчислении.

В настоящем докладе идет речь о проблеме проективного описания для двух классов индуктивных пределов пространств Фреше аналитических фукций, определяемых выпуклыми множествами со смешанной геометрической структурой. Первый из них – индуктивные пределы последовательности весовых пространств Фреше целых функций, реализующих (с помощью преобразования Лапласа) сопряженные к пространствам $A(Q)$ ростков аналитических функций на выпуклых локально замкнутых множествах Q в $\mathbb{C}^N$. К таким пространствам $A(Q)$ относятся, например, пространство Фреше $A(Q)$ функций, аналитических в выпуклой области $Q \subset \mathbb{C}^N$, пространство $A(\mathbb{R}^N)$ вещественно аналитических функций. Побудительным мотивом к описанию топологии весовых индуктивных пределов пространств аналитических функций такого типа явилась работа Л. Эренпрайса [2] об аналитически равномерных (AU-) пространствах, имеющая непосредственное отношение к фундаментальному принципу.

Второй рассмотренный класс индуктивных пределов – пространства ростков аналитических функций на множествах $Q \subset \mathbb{C}^N$. А. Бернштейном [1] было получено проективное описание для пространства $A(Q)$ в случае, когда Q – локально связный (не обязательно выпуклый) компакт в $\mathbb{C}$. П. Лобин [3] получила проективное описание, аналогичное данному в [1], для пространства $A(Q)$ ростков голоморфных функций на некотором компакте Q в пространстве Фреше. (При этом вместо sup-норм в [3] использованы преднормы типа Уитни.) А. Мартино [4] доказал, что индуктивная и проективная топология в $A(Q)$ совпадают, если Q – выпуклое локально замкнутое подмножество $\mathbb{C}^N$, пересечение которого с любой комплексной опорной гиперплоскостью к его замыканию компактно. В настоящем докладе рассмотрен случай, когда Q – выпуклое подмножество $\mathbb{C}^N$, обладающее счетным базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей. Класс таких множеств, как и семейство выпуклых локально замкнутых множеств, содержит все выпуклые области и компакты в $\mathbb{C}^N$.

Список литературы

[1] Baerstein A. II. Representation of holomorphic functions by boundary integrals // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— V. — P.27-37.

[2] Ehrenpreis L. Fourier Analysis in Several Complex Variables.— Wiley-Interscience Publ., New York, 1970.

[3] Laubin P. A projective description of the space of holomorphic germs // Proc. Edinburgh Math. Soc.— 2001.— V.44.— P.407-416.

[4] Martineau A. Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes // Math. Annal.— 1966.— V.163.— P.62-88.

Мелихов Сергей Николаевич

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону; Южный математический институт, Владикавказ.

E-mail address: melih@math.rsu.ru

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ $u_x = f(u,v)$, $v_y = \varphi(u,v)$

Р. Д. Муртазина

В работе Жибера А.В., Шабата А.Б. [1] для исследования системы уравнений

$$(1) \qquad u_x = f(u,v), \quad v_y = \varphi(u,v)$$

применен симметрийный метод класификации и было показано, что если выполнены первые три D и $\overline{D}$–условия существования высших симметрий, то система (1) приводится к виду

$$(2) \qquad \begin{gathered} u_x = v, \quad v_y = \sin u, \\ u_x = v, \quad v_y = e^u + e^{-2u}, \\ u_x = \sin v, \quad v_y = \sin u, \\ u_x = \alpha(v), \quad v_y = e^u, \\ u_x = \tfrac{1}{v}, \quad v_y = uv + 1, \\ u_x = v, \quad v_y = e^u v + e^{2u}, \\ u_x = uv + 1, \quad v_y = uv + 1. \end{gathered}$$

Характеристическое кольцо Ли системы уравнений (1) порождается векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{и} \quad X_2 = f\frac{\partial}{\partial u} + \overline{D} f \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{D}^2 f \frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \dots .$$

Положим $X_3 = [X_1, X_2]$, $X_4 = [X_1, X_3]$ и $X_5 = [X_2, X_3]$.

Требование конечномерного или "медленного" роста (см. [2]–[4]) достаточно для классификации уравнений $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$.

При условии, что размерность линейной оболочки операторов $\dim L < X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 > \leq 4$ выполнены следующие случаи:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\text{либо} \quad (i) \quad X_3 = c_1X_1 + c_2X_2, \quad c_1 = c_1(v),\ c_2 = c_2(v); \\ &\text{либо} \quad (ii) \quad X_4 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3,\ X_5 = \widetilde{c}_1X_1 + \widetilde{c}_2X_2 + \widetilde{c}_3X_3, \\ &\qquad c_i = c_i(v),\ \widetilde{c}_i = \widetilde{c}_i(v),\ i = 1,2,3; \\ &\text{либо} \quad (iii) \quad X_4 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_5X_5, \\ &\qquad c_i = c_i(v),\ i = 1,2,3,5; \\ &\text{либо} \quad (iv) \quad X_5 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4, \\ &\qquad c_i = c_i(v),\ i = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 10-01-9122-СТ-а, 11-01-97005-р-поволжье-а).

Показано, что для систем уравнений (2) выполнено одно из условий (3). А именно, для первой, второй, шестой и седьмой систем (2) $X_4 = 0$. Для третьей системы $X_4 = -X_2$.

Характеристическое кольцо Ли четвертой системы уравнений $u_x = \alpha(v)$, $v_y = e^u$ для каждого из случаев (i)–(iv) определяет функцию $\alpha(v)$ следующим образом: при $X_3 = c_2 X_2$ функция $\alpha = \gamma e^{c_2 v}$ (c_2, γ–постоянные); в случае (ii) функция α удовлетворяет соотношениям вида

$$c_2\alpha + c_3\alpha' - \alpha'' = 0, \quad \widetilde{c}_2\alpha + \widetilde{c}_3\alpha' = 0,$$
$$\widetilde{c}_2' + c_2\alpha = 0, \quad \widetilde{c}_3' + c_3\alpha - \alpha' = 0, \quad c_1 = \widetilde{c}_1 = 0,$$

где c_2, c_3 – постоянные, $\widetilde{c}_2 = \widetilde{c}_2(v)$, $\widetilde{c}_3 = \widetilde{c}_3(v)$.

В случае (iii) функция α удовлетворяет соотношениям вида

$$c_2\alpha + c_3\alpha' - \alpha'' = 0, \quad c_2' - c_2c_5\alpha = 0,$$
$$c_3' + c_5\alpha' - c_3c_5\alpha = 0, \quad c_5' - c_5^2\alpha = 0, \quad c_i = c_i(v),\ i = 2, 3, 5.$$

При этом $X_4 = c_2X_2 + c_3X_3 + c_5X_5$.

А в случае (iv) $X_5 = c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4$ и функция α такая, что

$$c_2\alpha + c_3\alpha' + c_4\alpha'' = 0, \quad c_3' = \alpha',$$
$$c_4' = -\alpha, \quad c_2 - const, \quad c_i = c_i(v),\ i = 3, 4.$$

Пятая система уравнений $u_x = \frac{1}{v}$, $v_y = uv + 1$ заменой $v = e^{-w}$ приводится к виду

$$u_x = e^w, \quad w_y = u + e^w.$$

Для последней системы уравнений $X_4 = 0$.

Список литературы

[1] *Жибер А.В., Шабат А.Б.* Системы уравнений $u_x = p(u, v)$, $v_y = q(u, v)$ обладающие симметриями // Доклады АН СССР. **277**:1 (1984), 29–33.

[2] *Жибер А.В., Муртазина Р.Д.* О векторных полях интегрируемых уравнений Клейна–Гордона // Межвузовский научный сборник, УГАТУ. (2004) 131–144.

[3] *Жибер А.В., Муртазина Р.Д.* О нелинейных гиперболических уравнениях с характеристической алгеброй медленного роста // Вестник УГАТУ. **7**:2 (2006), 131–136.

[4] *Муртазина Р.Д.* Нелинейные гиперболические уравнения и характеристические алгебры Ли // Дисс. … канд. физ.–мат. наук. Уфа.: УГАТУ, 2009.

Регина Димовна Муртазина

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

E-mail address: ReginaUFA@yandex.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА В ТРЕХФАЗНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Е.А. Никитина

Устройства индукционного нагрева являются сложными техническими объектами, в которых протекают физические процессы различной природы. Математическое описание таких объектов представляет собой систему детерминированных нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений, записанных для многомерных и многосвязных областей.

В общем случае процесс индукционного нагрева в трехфазном магнитном поле описывается нелинейной взаимосвязанной системой уравнений Максвелла и Фурье соответственно для электромагнитного и теплового полей с соответствующими краевыми условиями:

$$\mathrm{rot}\left\{\bar{H}\right\} = \gamma_{\mathrm{el};}\bar{E};$$

$$\mathrm{rot}\left\{\bar{E}\right\} = -\left\{\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right\};$$

$$\mathrm{div}\left\{\bar{B}\right\} = 0;$$

$$\mathrm{div}\left\{\bar{E}\right\} = 0;$$

$$c\left(r,\theta,x,T\right)\rho\left(r,\theta,x,T\right)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\left(r,\theta,x,T\right)\frac{\partial T}{\partial t}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda\left(r,\theta,x,T\right)\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\left(r,\theta,x,T\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

Здесь $\left\{\bar{H}\right\}$, $\left\{\bar{E}\right\}$, $\left\{\bar{B}\right\}$ - векторы напряженности магнитного и электрического полей и магнитной индукции; $\gamma_{\mathrm{el};}$ - удельная электропроводимость; T - температура; t - время; $\lambda\left(r,\theta,x,T\right)$- компоненты тензора теплопроводности (теплопроводность как функция температуры представляется кубическим сплайном); q_v - удельная мощность тепловыделения (в линейной постановке - константа, в нелинейной постановке - задаваемая кубическим сплайном функция температуры); $c\left(r,\theta,x,T\right)$- удельная теплоемкость (в нелинейном случае это функция температуры, аппроксимированная кубическими сплайнами); $\rho(r,\theta,x,T)$- плотность, θ - угловая координата.

В рассматриваемом случае одномерная математическая модель объекта не позволяет достичь требуемой точности описания процесса нагрева. В связи с необходимостью учитывать и неравномерность распределения температурного поля по длине, температурное поле $T(r,z,t)$ описывается двумерным уравнением теплопроводности.

$$\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T(r,z,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial r} + \frac{\partial T(r,z,t)}{\partial z^2}\right) + \frac{w(r,z,t)}{c\gamma},$$
$$(0 < r < R,\ 0 < z < Z,\ t > 0).$$

Потери тепла как с боковой, так и с торцевых поверхностей цилиндра будут описываться краевыми условиями третьего рода:

$$\frac{\partial T(R,z,t)}{\partial r} + \frac{\alpha}{\lambda}\left(T(R,z,t) - T_c\right) = 0,$$
$$\frac{\partial T(0,z,t)}{\partial r} = 0, t \geq 0,$$
$$\frac{\partial T(r,Z,t)}{\partial z} + \frac{\alpha}{\lambda}\left(T(r,Z,t) - T_c\right) = 0,$$
$$-\frac{\partial T(r,0,t)}{\partial z} + \frac{\alpha}{\lambda}\left(T(r,0,t) - T_c\right) = 0.$$

Несмотря на общность уравнений для электромагнитного и теплового полей, между ними существует значительная разница. С одной стороны, тепловое поле описывается скалярным уравнением относительно одной переменной Т, а область, в которой определяется поле, обычно составляет только часть пространства, в котором существует электромагнитное поле. Это упрощает задачу. С другой стороны, наличие внутренних источников и нестационарность температурных полей усложняют решение по сравнению с электромагнитной задачей.

Аналитическое описание электромагнитных и тепловых процессов ввиду сложной геометрии требует дополнительно разбиения модели на участки и рассмотрения процессов уже в них, что вводит в расчеты дополнительную погрешность, а также лишает возможности представления о целостности системы и протекающих в ней процессов, и в то же время не дает точного решения. Это обстоятельство обусловливает необходимость использования численных методов для исследования процессов, протекающих при индукционном нагреве в трехфазном магнитном поле.

Екатерина Александровна Никитина
Самарский государственный технический университет, Россия
E-mail address: nikitinaekaterina63@gmail.com

СВЯЗЬ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ФИШЕРА

А. А. Нуятов

Известно (см. [1]), что разрешимость задачи Валле–Пуссена для оператора свертки эквивалентна тому, что существует представление Фишера

$$H(\mathbb{C}) = KerM_\varphi + (\psi), \tag{1}$$

где M_φ - оператор свертки с характеристической функцией φ из определенного класса целых функций экспоненциального типа, (ψ) - идеал в пространстве $H(\mathbb{C})$, порожденный функцией ψ.

В работе [2], в случае оператора свертки в пространстве целых функций найдены условия, при которых имеет место разложение Фишера

$$H(\mathbb{C}) = KerM_\varphi \oplus (\sin \pi z), \tag{2}$$

тем самым решается задача Валле-Пуссена в целых точках.

Согласно методам разработанным Напалковым В.В., найдены условия на нулевые последовательности функций φ и ψ, когда имеет место равенство (1).

Автор также выражает благодарность Р.С. Юлмухаметову.

Список литературы

[1] *Напалков В. В., Попенов С. В.* Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера //Доклады академии наук. **381**:2 (2001), 164–166.

[2] *Напалков В. В.* Комплексный анализ и задача Коши для операторов свертки //Труды математического института имени В. А. Стеклова. **235** (2001), 165–168.

Андрей Александрович Нуятов
Нижегородский Государственный Университет им. Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород
E-mail address: Nuyatov1aa@rambler.ru

АЛГЕБРА ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА МНОГООБРАЗИИ

В. А. Павленко

Основной целью работы является построение алгебры относительных интегральных операторов на многообразиях с выделенными подмногообразиями.

В работах [1], [2] было введено понятие конормальной функции на компактном многообразии X размерности n, в котором выделено гладкое подмногообразие Y размерности $n-1$. По определению, конормальная функция u на X является гладкой функцией на $X \setminus Y$, допускающей асимптотическое разложение определенного вида вблизи Y. Можно также ввести понятие относительной полуплотности на X. Пространство относительных полуплотностей будем обозначать через ${}^r\Omega^{\frac{1}{2}}$

Пусть X, Y — гладкие компактные многообразия (без края), такие что $\dim X = n$, $\dim Y = m$. Предположим, что X_0, Y_0 — гладкие подмногообразия многообразий X и Y соответственно, такие что $\dim X_0 = n-1$, $\dim Y_0 = m-1$.

Рассмотрим интегральный оператор вида

$$A : C_0^\infty(Y \setminus Y_0, {}^r\Omega^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(X \setminus X_0, {}^r\Omega^{\frac{1}{2}})$$

действие которого на полуплотность $\mu \in C_0^\infty(Y \setminus Y_0, {}^r\Omega^{\frac{1}{2}})$ задаётся формулой:

$$A\mu(x) = \int\limits_Y K_A(x,y)\mu(y),$$

где полуплотность

$$K_A \in C^\infty\Big((X \times Y) \setminus (\{X_0 \times Y\} \cup \{X \times Y_0\}), {}^r\Omega^{\frac{1}{2}}\Big)$$

— ядро данного оператора.

Оператор A называется относительным интегральным оператором, если его ядро является конормальной полуплотностью относительно выделенного подмногообразия $\{X_0 \times Y\} \cup \{X \times Y_0\}$ многообразия $X \times Y$.

Можно показать, что любой относительный интегральный оператор переводит конормальные полуплотности в конормальные полуплотности. Более того, если A, B — относительные интегральные операторы,

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00389-а).

то $\alpha A + \beta B$ — тоже относительный интегральный оператор. Наконец, при определенных условиях на индексные семейства ядер относительных интегральных операторов A и B определена их композиция $A \circ B$, являющаяся относительным интегральным оператором.

Пусть f — конормальная плотность, заданная на компактном многообразии X с выделенным гладким подмногообразием X_0. Относительный интеграл плотности f по X определяется формулой

$$\int\limits_X^r f = \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg(\int\limits_{|x| > \varepsilon} f + \ln \varepsilon \int\limits_{X_0} f \Big|_{X_0} \Bigg),$$

где x — определяющая функция подмногообразия X_0.

Относительным следом относительного интегрального оператора A, который был определён выше, с ядром K_A называется число

$$\text{r-Tr}(A) = \int\limits_X^r K_A \Big|_{\Delta},$$

где Δ — диагональ многообразия $X \times X$.

Любому относительному интегральному оператору A на многообразии X с выделенным гладким подмногообразием X_0 ставится в соответствие целое семейство $\{I_\nu(A, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ интегральных операторов с гладким ядром, действующих в пространстве $C^\infty(X_0)$.

Другим важным результатом работы является следующая формула для относительного следа коммутатора относительных интегральных операторов A и B:

$$r - Tr([A, B]) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tr(\partial_\lambda I_\nu(A, \lambda) \circ I_\nu(B, \lambda)) d\lambda,$$

где $I_\nu(A, \lambda)$, $I_\nu(B, \lambda)$ — индициальные семейства операторов A и B соответственно.

Список литературы

[1] *Павленко В. А.* // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского, 2007. – Т. 35. – С. 103–105.

[2] *Павленко В. А.* // Сборник трудов международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых учёных. Уфа: БашГУ, 2009. – Т. 1. – С. 311-320.

Виктор Александрович Павленко
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Россия
E-mail address: PVA100186@mail.ru

ВЕСОВАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА С ПЛОХИМИ ВЕСАМИ В ПЛОХИХ ОБЛАСТЯХ

А. И. Парфенов

Пусть $n = 2, 3, \dots$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная почти плоская по Райфенбергу область класса $C^{0,1}$ (например, область с малой постоянной Липшица). Для $1 < p < \infty$ и весовой в Ω функции w положим

$$\|u\|_{L^p_w(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p w\,dx\right)^{1/p}, \quad \|u\|_{W^{2,p}_w(\Omega)} = \sum\nolimits_{k=0}^{2} \|\nabla^k u\|_{L^p_w(\Omega)}.$$

Теорема 1. *Пусть $w \in \mathfrak{A}_p^{\mathrm{comp}}(\Omega)$, а Ω принадлежит классу* LLD *и является $W^{2,p}_w$-распрямляемой. Тогда для любого $f \in L^p_w(\Omega)$ задача Дирихле*

$$u \in W^{2,p}_w(\Omega) \cap \bigcup\nolimits_{1<q<\infty} \mathring{W}^{1,q}(\Omega), \quad \Delta u = f \ \text{в}\ \Omega, \tag{1}$$

имеет единственное решение u, причем $\|u\|_{W^{2,p}_w(\Omega)} \leqslant C(\Omega, p, w)\|f\|_{L^p_w(\Omega)}$.

В связи с недостатком места только наметим значение использованных понятий. Класс $\mathfrak{A}_p^{\mathrm{comp}}(\Omega)$ есть пересечение класса $A_p^{\mathrm{comp}}(\Omega)$ весов, удовлетворяющих A_p-условию Макенхаупта на кубах $Q \subset \Omega$ с ребром $\ell(Q) \leqslant \operatorname{dist}(Q, \partial\Omega)$, с одним классом, выделяемым поведением весов около $\partial\Omega$. К примеру,

$$w = W\big|_\Omega \in \mathfrak{A}_p^{\mathrm{comp}}(\Omega) \text{ при } W \in A_{p\frac{n+1}{n}}(\mathbb{R}^n) \text{ и } W\big|_\Omega \in A_p^{\mathrm{comp}}(\Omega); \tag{2}$$

$$w_\alpha \in \mathfrak{A}_p^{\mathrm{comp}}(\Omega) \text{ при } -n < \alpha < np - n + p,\ w_\alpha(x) = |x - z|^\alpha,\ z \in \partial\Omega; \tag{3}$$

$$\varrho^\alpha \in \mathfrak{A}_p^{\mathrm{comp}}(\Omega) \text{ при } -1 < \alpha < 2p - 1,\ \varrho^\alpha(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^\alpha. \tag{4}$$

Если $w \in \mathfrak{A}_p^{\mathrm{comp}}(\Omega)$, то $W^{2,p}_w(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega)$ для некоторого q, $1 < q < \infty$. Буквами LLD обозначено одно расширение класса областей Ляпунова-Дини. Понятие $W^{2,p}_w$-распрямляемости вводится аналогично работам [1, 2] автора. Для $\Omega \in C^{1,1}$ $W^{2,p}_w$-распрямляемость имеет место для любого $w \in \mathfrak{A}_p^{\mathrm{comp}}(\Omega)$.

Следствие 1. *Если $w \in \mathfrak{A}_p^{\mathrm{comp}}(\Omega)$ и $\Omega \in C^{1,1}$, то для задачи Дирихле* (1) *верно утверждение об однозначной разрешимости из теоремы 1.*

В силу (2) следствие 1 обобщает результаты из [3, 4], относящиеся к весам $w = W\big|_\Omega$ с $W \in A_p(\mathbb{R}^n)$. Указанные результаты из [3, 4] позволяли изучить «веса Куфнера» w_α в меньшем в сравнении с (3) диапазоне $-n < \alpha < np - n$, а в остальном задача (1) в пространстве $W^{2,p}_{w_\alpha}(\Omega)$ с $\alpha \neq 0$ ранее, по-видимому, не рассматривалась. Что же касается веса ϱ^α, то в силу (4) следствие 1 охватывает полный диапазон $-1 < \alpha < 2p - 1$ из работ [5, 6], а не только более часто встречаемые в литературе значения $-1 < \alpha < p - 1$.

Возможно получить вариант теоремы 1 без условия $\Omega \in \mathrm{LLD}$.

Теорема 2. *Если $w \in \mathfrak{A}^{\mathrm{comp}}_p(\Omega)$, а Ω является $W^{2,p}_w$-распрямляемой с достаточно малой постоянной, то выполнено утверждение об однозначной разрешимости задачи* (1) *из теоремы 1.*

В книге [7], в частности, для весов $w = \varrho^\alpha$ с $-1 < \alpha < p - 1$ даны близкие к необходимым достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1) в пространстве $W^{2,p}_{\varrho^\alpha}(\Omega)$. Условия формулируются в терминах малости норм в пространстве поточечных мультипликаторов для пространства Слободецкого градиентов $\nabla\omega$ задающих $\partial\Omega$ функций ω. Указанные результаты из [7] можно вывести из теоремы 2 и результатов в [2]. При этом теорема 2 является более общей, поскольку малость мультипликаторных норм $\nabla\omega$ гарантирует малость постоянной Липшица области Ω, тогда как существуют области с большой постоянной Липшица и малой постоянной Райфенберга.

Отметим также, что проверка условий теоремы 2 дает такое

Следствие 2. *Если $p - 1 < \alpha < 2p - 1$, то задача* (1) *однозначно разрешима в пространстве $W^{2,p}_{\varrho^\alpha}(\Omega)$, причем $\|u\|_{W^{2,p}_{\varrho^\alpha}(\Omega)} \leqslant C(\Omega, p, \alpha)\|f\|_{L^p_{\varrho^\alpha}(\Omega)}$.*

Список литературы

[1] *Парфенов А. И.* Критерии распрямляемости липшицевой поверхности по Лизоркину-Трибелю. III // Мат. труды **13**:2 (2010), 139–178.

[2] *Парфенов А. И.* Характеризация мультипликаторов в пространствах Хедберга-Нетрусова // Мат. труды **14**:1 (2011), 158–194.

[3] *Schumacher K.* The Navier-Stokes Equations with Low-Regularity Data in Weighted Function Spaces. TU Darmstadt: Dissertation, 2007.

[4] *Durán R. G., Sanmartino M., Toschi M.* Weighted a priori estimates for the Poisson equation // Indiana Univ. Math. J. **57**:7 (2008), 3463–3478.

[5] *Goudjo C.* Problèmes aux limites dans les espaces de Sobolev avec poids // Bollettino U.M.I. (4) **8** (1973), 468–493.

[6] *Апушкинская Д. Е., Назаров А.И.* Эллиптическая задача Дирихле в весовых пространствах // Зап. научн. сем. ПОМИ **288** (2002), 14–33.

[7] *Maz'ya V. G., Shaposhnikova T. O.* Theory of Sobolev Multipliers. With Applications to Differential and Integral Operators. Berlin: Springer, 2009.

Антон Игоревич Парфенов
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия
E-mail address: parfenov@math.nsc.ru

ДВЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ЛАПЛАСИАНОМ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ГИПЕРОКТАЭДРА

А.К. Пономаренко

Для интеграла $I(f) = \int\limits_{\mathbf{R}_n} p(r)f(x)\,dx$, $x = (\,x_1, \ldots, x_n\,)$, $r = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} {x_j}^2\right)^{1/2}$, $p(r)$ — неотрицательная весовая функция такая, что существуют моменты $\nu_k = \int\limits_0^\infty r^k p(r)\,dr$, $k = 0, 1, \ldots$, $\nu_0 > 0$, построены две кубатурные формулы, инвариантные относительно группы O_nG ортогональных преобразований гипероктаэдра O_n в себя и точные для любого алгебраического многочлена относительно $x_1, \ldots, x_n$ не выше девятой и седьмой степени соответственно. Формула с 9-свойством имеет вид :

$$
(1)\quad \begin{aligned} I(f) \;&\cong\; A\Delta f(O) + \sum_{j=1}^{2} A_j \sum_{1}^{2n} f(a_j g^{(0)}) + F \sum_{1}^{4n(n-1)} f(rg(t)) + \\ &+\; D \sum_{1}^{16C_n^4} f(dg^{(3)}) + E \sum_{1}^{n2^{n-1}} f(eg^{(n-2)})\,, 4 \le n. \end{aligned}
$$

Здесь использованы обозначения:
$g^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{s+1}}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s+1}, 0, \ldots, 0)$, $s = 0, 1, \ldots$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2t^2-2t+1}}(1-t, t, 0, \ldots, 0)$, $a_j (j = 1, 2)$, d, R, e — радиусы сфер с центрами в точке $O(0, \ldots, 0)$, A, $A_j (j = 1, 2)$, F ,D, E — коэффициенты, t — параметр, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа.

В формуле суммирование распространяется на все элементы O_nG–орбит точек, указанных в круглых скобках после знака функции f.

Для нахождения радиусов орбит, коэффициентов формулы и параметра t применяется модификация теоремы С. Л. Соболева об инвариантных кубатурных формулах (см. [1],[2]), согласно которой формула (1) должна быть точна для многочленов ${\sigma_2}^k$ $(k = 0, 1, \ldots, 4)$, $\sigma_4{\sigma_2}^k$ $(k = 0, 1, 2)$, ${\sigma_4}^2$, $\sigma_6{\sigma_2}^k$ $(k = 0, 1)$, σ_8, где $\sigma_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} {x_j}^2$, $\sigma_4 = \sum\limits_{j<k} {x_j}^2{x_k}^2$, $\ldots$, $\sigma_{2n} = {x_1}^2{x_2}^2\ldots{x_n}^2$ — базисные инвариантные формы группы O_nG.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-01-00637).

Это требование для формулы (1) приводит к ступенчатой системе 12 нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров формулы, для решения которой частично использована методика, предложенная в работе [3].

Построена также следующая формула с 7-свойством:

$$
\begin{aligned}
I(f) \; &\cong \; A\Delta f(O) + B\sum_{1}^{2n} f(bg^{(0)}) + D\sum_{1}^{2n(n-1)} f(dg^{(1)}) + \\
&+ \; E\sum_{1}^{16C_n^4} f(eg^{(3)})\,, n \le 4.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Для весовых функций $p(r) = \begin{cases} r^{\alpha}, & 0 < r < 1, \\ 0, & 1 \le r \end{cases}$, $p(r) = r^{\alpha}e^{-r}$, $p(r) = r^{\alpha}e^{-r^2}$ произведены вычисления параметров формул (1) и (2) при $n = 4, 5, \ldots 30$ и $\alpha = -1, 0, 1$. В большинстве случаев они оказались вещественными.

Список литературы

[1] *Соболев С. Л.* О формулах механических кубатур на поверхности сферы. // Сибирск.мат.журн.,1962. Т. 3, № 5. С . 769–791.

[2] *Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.:Наука, 1981.

[3] *Лебедев В. И.* О квадратурах на сфере. // ЖВМ и МФ, 1976. Т. 16, № 2. С. 293–306.

Аркадий Кузьмич Пономаренко
Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
E-mail address: akpspb@yandex.ru

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ НА МОМЕНТЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О. А. Пыркова, А. А. Онуфриев

В модели с учетом перемежаемости [1], т.е. в предположении, что поток есть смесь чисто колморовского и чисто вязкого режимов, с точки зрения автомодельного решения Лыткина Ю. М. и Черных Г.Г. [2] рассматривается поведение $\dfrac{B_{LL,L}}{u^3}(\xi)$, где $\xi = \dfrac{r}{\lambda}$, λ – тейлоровский микромасштаб, $B_{LL,L}$ - продольный корреляционный момент третьего порядка.

Без учета перемежаемости автомодельности в переменных $\dfrac{B_{LL,L}}{u^3}$ и ξ не наблюдается, поведение $\dfrac{B_{LL,L}}{u^3}(\xi)$ качественно и количественно согласуется с данными Стюарта и Таунсенда [3].

В модели с перемежаемостью, согласно [1],

$$B_{LL,L} = \gamma \cdot (B_{LL,L})_T + (1-\gamma)(B_{LL,L})_\nu,$$

здесь γ - коэффициент перемежаемости (доля жидкости, находящейся в чисто турбулентном колмогоровском режиме), индекс $()_T$ относится к колмогоровскому режиму, индекс $()_\nu$ - чисто вязкому режиму.

Принимая гипотезу, что в чисто вязком режиме момент третьего порядка $(B_{LL,L})_\nu = 0$, имеем $B_{LL,L} = \gamma \cdot (B_{LL,L})_T$. Влияние перемежаемости приводит к изменению поведения кривых при малых значениях ξ.

В рамках рассматриваемой модели при предположении, что в автомодельном решении Лыткина и Черных [2] для продольной корреляционной функции второго порядка f_T

$$-2\sqrt{1-f_T} + \ln(1+\sqrt{1-f_T}) - \ln(1+\sqrt{1-f_T}) = B\xi_1,$$

где $\xi_1 = \frac{r}{\Lambda}$, Λ – интегральный корреляционный масштаб, величина B зависит от значения числа Рейнольдса в начальный момент времени, находим $\dfrac{B_{LL,L}}{u^3} = -2\sqrt{2}\kappa B f_T \xi_1$, где κ - эмпирическая постоянная. Учитывая, что $f_T = f_T(\xi_1)$, получаем $\dfrac{B_{LL,L}}{u^3} = \dfrac{B_{LL,L}}{u^3}(\xi_1)$.

Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы " Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/11133).

Гипотезу об автомодельности турбулентности за решеткой в аэродинамической трубе потдтверждает совпадение кривых в различные моменты времени в переменных $\dfrac{B_{LL,L}}{u^3}$ и ξ_1.

Список литературы

[1] *Онуфриев А. А., Онуфриев А. Т., Пыркова О. А.* Задача о затухании однородной изотропной турбулентности с учетом явления перемежаемости // Актуальные проблемы фундаментальной и прикладной математики: Сб. науч. трудов – М.: МФТИ, (2009), 124–135.

[2] *Лыткин Ю. М., Черных Г. Г.* Об одном способе замыкания уравнения Кармана-Ховарта // Динамика сплошной среды: Сб. ст. / СО АН, ин-т Гидродинамики – Новосибирск **27** (1976), 124–130.

[3] *Пыркова О. А.* Поведение моментов третьего порядка в модели с перемежаемостью // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // материалы Десятой международной Казанской летней научной школы-конференции. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Казанского государственного университета **43** (2011), 295–296.

Ольга Анатольевна Пыркова
ФГБОУ ВПО «Московский физико-технический институт (ГУ)», Россия

E-mail address: opyr@mail.ru

Александр Анатольевич Онуфриев
ФГБОУ ВПО «Московский физико-технический институт (ГУ)», Россия

E-mail address: onfr@mail.ru

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

А. У. Сакиева

Уравнение в частных производных гиперболического типа

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

называется уравнением типа Лиувилля, если оно имеет интегралы по обоим характеристическим направлениям: т.е. имеет x-интеграл $W(x, y, u, u_y, u_{yy}, ...)$ и y-интеграл $V(x, y, u, u_x, u_{xx}, ...)$.

Аналогично, дифференциально-разностное уравнение вида

$$\frac{d}{dx}u(n+1, x) = f(x, u(n, x), u(n+1, x), \frac{d}{dx}u(n, x)) \tag{2}$$

с неизвестной функцией $u(n, x)$, зависящей от непрерывной переменной x и дискретной переменной n является полу-дискретным уравнением Лиувиллевского типа, если существуют функции F и I, зависящие от конечного числа аргументов x,
$\{u(n+k, x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\left\{\frac{d^k}{dx^k}u(n, x)\right\}_{k=1}^{\infty}$, такие, что $D_xF = 0$ и $DI = I$, где D_x -оператор полного дифференцирования по x, а D -оператор сдвига: $Dp(n) = p(n+1)$, (см.[1], [2]).

Уравнение (2) называется дискретным аналогом уравнения (1), если в пределе при сгущении сетки по $n = y/\epsilon$ уравнение (2) переходит в уравнение(1). В докладе предполагается обсуждение эффективного алгоритма отыскания дискретных аналогов Лиувиллевского типа для уравнений вида (1), которые сами являются уравнениями Лиувиллевского типа. Суть алгоритма состоит в том, что предполагается, что уравнение (1) и его дискретный аналог имеют общий интеграл. Для интегрируемых по Дарбу уравнений (1) построены их полудискретные аналоги. Для этого мы берем для каждого интегрируемого уравнения (1) его интеграл $W(x, y, u, u_y, u_{yy})$ или $V(x, y, u, u_x, u_{xx})$ и по этому интегралу строим полудискретное уравнение $u_{1x} = f(x, u, u_1, u_x)$ такое , что для этого искомого уравнения функция W или V является n-интегралом (см.[3]).

Для уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$ y-интегралом является функция $V = u_{xx} - 0.5u_x{}^2$. Вычисления показывают, что полу-дискретный аналог

Работа выполнена при поддержке гранта МК 8247.2010.1.

этого уравнения есть уравнение $u_{1x} = u_x + Ce^{0.5(u+u_1)}, C = const$, для которого эта же функция V является n-интегралом.

Список литературы

[1] *Habibullin I. T., Zheltukhina N. A., Sakieva A. U.* On Darboux Integrable Semi-Discrete Chains //J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 434017 (14pp)

[2] *Адлер В. Э., Старцев С. Я.* О дискретных аналогах уравнения Лиувилля // ТМФ.121:2.1999. с. 271–289.

[3] *Habibullin I. T., Zheltukhina N. A., Sakieva A. U.* Discretization of hyperbolic type Darboux integrable equations preserving integrability // arXiv:1102.1236v1 [nlin.SI] 7 feb 2011

Альфия Ураловна Сакиева
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Россия
E-mail address: alfiya85.85@mail.ru

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ РОТОРА И СТОКСА

Р. С. Сакс

В произвольной ограниченной области с гладкой границей найдены соотношения между собственными значениями и собственными функциями операторов ротора и Стокса при определенных краевых условиях.

В случае шара, собственные значения этих операторов определяются явно нулями бесселевых функций полу-целого порядка, а их собственные функции выражаются через сферические и бесселевы функции.

Полнота системы собственных функций ротора позволяет раскладывать заданные и искомые вектор-функции в ряды Фурье и изучать начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса в ограниченной области трехмерного пространства.

Список литературы

[1] *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

[2] *Сакс Р. С.* Спектральные задачи для операторов ротора и и Стокса // Доклады РАН. **416**:4 (2007), 446-450.

[3] *Сакс Р. С.* Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье // Уфимский математический журнал. **3**:1 (2011), 53-79.

Ромэн Семенович Сакс
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия
E-mail address: romen-saks@yandex.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ГИДРОАКУСТИКЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Г. А. Салимова

Рассмотрим уравнение [1, 2]

$$\varepsilon^2 u_{tttt}(x,t) - u_{ttxx}(x,t) + u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = a(t)g(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

в области $D_T = \{\, (x,t) : \ 0 \le x \le 1,\, 0 \le t \le T \,\}$ и поставим для него обратную задачу с начальными данными Коши

(2)

$$u(x,0) = \varphi_0(x), u_t(x,0) = \varphi_1(x), u_{tt}(x,0) = \varphi_2(x), u_{ttt}(x,0) = \varphi_3(x), (0 \le x \le 1)$$

граничным условием Неймана

$$u_x(0,t) = 0 \quad (0 \le t \le T), \tag{3}$$

нелокальным интегральным условием

$$\int\limits_0^1 u(x,t)dx = 0 \ \ (0 \le t \le T), \tag{4}$$

и дополнительным условием

$$u(0,t) = h(t) \ \ (0 \le t \le T) \tag{5}$$

где $0 < \varepsilon \le 1$ – заданное число, $f(t,x)$, $g(t,x)$, $\varphi_i(x)$ $(i = \overline{0,3})$, $h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Примем следующее

Определение 1. Классическим решением задачи (1)-(5) назовём пару $\{u\,(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:
1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
2) функция $a(t)$ непрерывна на $C[0,T]$;
3) все условия (1)-(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения.

Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Список литературы

[1] *Габов С.А., Малышева Г.Ю., Свешников А.Г.* Об одном уравнение составного типа, связанном с колебаниями сжимаемой стратифицированной жидкости // Дифференц. уравнения **19**:7 (1983), 1171-1180.

[2] *Габов С.А., Малышева Г.Ю., Свешников А.Г., Шатов А.К.* О некоторых уравнениях, возникающих в динамике вращающейся стратифицированной и сжимаемой жидкости // ЖВМ и Мат. Физ. **24**:12 (1984), 1850-1863.

Гюлбахар А. Салимова
Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
E-mail address: gulbahar_58@mail.ru

К ЗАДАЧЕ СОХРАНЕНИЯ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА

Г. Ф. Сафина

В продолжение иследований работ [1], [3] рассмотрим задачу определения закреплений трубопровода, сохраняющих собственные частоты его изгибных колебаний при изменениях параметров жидкости.

Уравнение малых изгибных колебаний трубы с несжимаемой жидкостью имеет вид (см. [1], [2]):

$$(1)\qquad EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+(m+\widetilde{m})\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\widetilde{m}V_0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\widetilde{m}\left(\frac{p_0}{\rho_0}+V_0^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0.$$

Здесь I — момент инерции трубчатого сечения, EI — жесткость трубы, p_0 — внутреннее давление, m и $\widetilde{m}$ — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу l длины трубы, V_0, ρ_0 — скорость и плотность жидкости.

В работе [3] с помощью безразмерных переменных

$$\widetilde{x}=x/l,\quad \widetilde{w}=w/r,\quad \widetilde{t}=t/\tau$$

и выражения прогиба $\widetilde{w}(\widetilde{x},\widetilde{t})=X(\widetilde{x})\,e^{i\,\omega\,\widetilde{t}}$ (ω — частота колебаний), уравнение (1) приведено к виду

$$(2)\qquad X^{(4)}+a\,X''+2b\,i\,\omega X'-\omega^2\,X=0,$$

где коэффициенты a и b зависят от физических параметров трубопровода.

Поставим к задаче (2) краевые условия:

$$(3)\qquad \begin{aligned} U_1(X)&=a_1\,X(0)-a_2\,X'''(0)=0, &\quad U_2(X)&=X''(0)=0,\\ U_3(X)&=b_1\,X(1)+b_2\,X'''(1)=0, &\quad U_4(X)&=X''(1)=0, \end{aligned}$$

которые в зависимости от значений коэффициентов a_1, a_2 и b_1, b_2 характеризуют упругие закрепления, соответственно, на правом и левом концах трубопровода.

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$X_j(\widetilde{x},\omega)=\sum C_j\,e^{\lambda_j\,\widetilde{x}},$$

где $\lambda_j=\lambda_j(\omega)$ — различные корни характеристического уравнения. Стандартными способами получено частотное уравнение:

$$(4)\quad \Delta(\lambda_j(\omega))\equiv a_1\,b_1\cdot f_1(\lambda_j)+a_1\,b_2\cdot f_2(\lambda_j)-a_2\,b_1\cdot f_3(\lambda_j)-a_2\,b_2\cdot f_4(\lambda_j).$$

Здесь функции $f_j(\lambda_j)$ зависят от частоты изгибных колебаний трубопровода.

Для математической постановки задачи сохранения собственных частот колебаний трубопровода введена в рассмотрение матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \end{matrix} \right\|.$$

В таких обозначениях определение закреплений, сохраняющих частоты колебаний трубы при изменениях параметров жидкости, равносильно нахождению линейной оболочки $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, построенной на векторах $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{b} = (0, 0, b_1, b_2)^{\mathrm{T}}$.

Доказана теорема о единственности решения поставленной задачи. Найден метод определения закреплений, сохраняющих первые собственные частоты колебаний трубы с жидкостью при изменениях параметров жидкости.

Построенный алгоритм решения задачи сохранения частот колебаний упруго закрепленного трубопровода может быть применен для диагностики недоступных для визуального осмотра закреплений элементов механических систем и строительных конструкций, составляющими которых являются трубы с жидкостью.

Список литературы

[1] *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, – 1969. 184 с.

[2] *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука – 1979.

[3] *Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф.* Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика.– 2008. Т.49, ч. 1.– с. 139 - 147.

Гульнара Фриловна Сафина

Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета, Россия

E-mail address: Safinagf@mail.ru

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ И ТЕХНОЛОГИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

С. И. Спивак, А. С. Исмагилова

Современные технологии параллельных вычислений позволяют при интерпретации экспериментальных исследований обратиться к таким классам задач, решение которых традиционными методами крайне затруднено. При этом в первую очередь важно не сокращение машинного времени при решении обратных задач. Под параллелизмом мы будем понимать разбиение всей задачи на подзадачи меньшей размерности, анализ которых существенно повышает уровень надежности решения обратных задач. Возможности выделения таких "внутренних параллелизмов"должны следовать из физического содержания решаемых задач. Целью настоящей работы является выделение такого внутреннего разделения при решении обратных задач химической кинетики.

В работе [1] предложен метод, позволяющий существенно упростить исследование на информативность кинетических моделей сложных реакций. При этом существенно используется понятие маршрута химической реакции [2]. Маршрут есть путь исключения неизмеряемых промежуточных веществ. Показано, что маршруты дают возможность разделить исходную сложную схему на группу подсистем меньшей размерности, каждая из которых имеет самостоятельную химическую интерпретацию.

Далее, анализ информативности сложной схемы реакций разделяется на анализ информативности для тех схем, которые отвечают за протекание реакции по каждому из независимых маршрутов. Вместо одной сложной системы мы получаем несколько существенно более простых. Число исследуемых упрощенных систем равно числу независимых маршрутов.

Основным методом решения становится анализ графов химических реакций, введенных А.И.Вольпертом [3]. В работе [4] доказана

Теорема 1. *Маршрут реакции есть циклический подграф исходного графа. Объединение таких подграфов образует полный граф, т.е. граф исходной системы реакции. Число независимых маршрутов равно числу независимых циклов графа Вольперта.*

Построены алгоритмы и разработано программное обеспечение выделения независимых циклов и соответствующих независимых маршрутов.

При построении кинетических моделей сложных реакций важное значение имеет понятие ключевого вещества [5]. Под ключевыми веществами понимают такие, что концентрации всех веществ линейно выражаются через базис ключевых веществ. Справедлива следующая

Теорема 2. *Существует преобразование, переводящее исходный граф в граф, часть вершин которого не имеет исходящих дуг. Указанные вершины достижимы из базиса ключевых веществ.*

Полученные результаты интерпретируются при анализе конкретных реакций, механизмы которых изучаются в Институте нефтехимии и катализа РАН.

Список литературы

[1] *Спивак С.И., Исмагилова А.С.* Метод анализа информативности кинетических измерений при определении параметров кинетических моделей химической кинетики // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т.12. № 4. С. 51-58.

[2] *Темкин М.И.* Механизм и кинетика сложных каталитических реакций. Лекции, прочитанные на первом симпозиуме Международного конгресса по катализу. М.: Наука, 1970. С. 57-76.

[3] *Вольперт А.И., Худяев С.И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М: Наука, 1975. 394 с.

[4] *Спивак С.И., Исмагилова А.С., Хамитова И.А.* // ДАН. 2010. Т. 434. № 4. С.499-501.

[5] *Горский В.Г.* Планирование кинетических экспериментов. М: Наука, 1984. 241 с.

Семен Израилевич Спивак
Башкирский государственный университет, Институт нефтехимии и катализа РАН, Россия
E-mail address: Spivak@bashnet.ru

Альбина Сабирьяновна Исмагилова
Башкирский государственный университет, Россия
E-mail address: IsmagilovaAS@rambler.ru

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ПОЛУДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

И. Т. Хабибуллин, К. В. Желтухин, М. В. Янгубаева

Исследуется интегрируемость системы полудискретных уравнений экспоненциального типа:

$$r^i_{1,x} - r^i_x = e^{\sum a^+_{i,n} r^n_1 + \sum a^-_{i,n} r^n}, \quad i, n = 1, 2, ..., N, \tag{1}$$

порожденной произвольной постоянной матрицей A. Для отыскания коэффициентов $a_{i,j}$ нужно представить матрицу A в виде суммы $A = A_+ + A_-$, где $A_+ = \{a^+_{ij}\}$ верхнетреугольная матрица, с единицами на главной диагонали, а $A_- = \{a^-_{ij}\}$ нижнетреугольная матрица. Здесь $r^n = r^n(j, x)$, $n = 1, ..., N$ неизвестные функции; нижние индексы обозначают сдвиг дискретного аргумента j функции или производную функции по переменной x: $r^n_k = r^n(j + k, x)$ и $r^n_{[i]} = \frac{\partial^i}{\partial x^i} r^n(j, x)$.

Система полудискретных уравнений (1) является дискретизацией системы гиперболических уравнений вида:

$$r^i_{x,y} = e^{\sum a_{ik} r^k}, \tag{2}$$

где $a_{i,j}$ элементы матрицы A. Система уравнений (2) имеет приложения в геометрии и теории поля и поэтому является хорошо изученной (см. например, [1], [2]). Отметим, что системы уравнений (1) и (2) тесно связаны.

Предположение 1. Если A является матрицей Картана полупростой алгебры Ли, то система (1) допускает полный набор нетривиальных интегралов.

Это предположение доказано для случаев матриц Картана A_2, C_2, B_2, G_2. Для соотвествующих систем вида (1) найдены $x-$ и $n-$интегралы. Причем $n-$интегралы системы (1) в упомянутых случаях совпадают с $y-$интегралами системы гиперболических уравнений (2) с той же матрицей Картана.

Предположение 2. Если A является матрицей Картана бесконечномерной аффинной алгебры Ли, то система (1) S-интегрируема.

Предположение 2 доказано для случая матриц Картана серии $D^{(2)}_N$. Для соотвествующей системы вида (1) предъявлена пара Лакса.

Список литературы

[1] *Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* Экспоненциальные системы уравнений типа I и матрицы Картана Препринт,Баш.филиал академии наук СССР, Уфа,(1981)

[2] *Дринфельд В. Г., Соколов В. В.* Алгебры Ли и уравнения Кортевега-де Фриза //Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., 1984. Т.24, с. 1–180.

[3] *Habibullin I. T., Zheltukhina N. A., Sakieva A. U.* Discretization of hyperbolic type Darboux integrable equations preserving integrability //submitted to JMP. 2011. //arXiv : 1102.1236

Исмагил Талгатович Хабибуллин
Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Россия

E-mail address: habibullinismagil@gmail.com

Константин Викторович Желтухин
Middle East Technical University, Турция

E-mail address: zheltukh@metu.edu.tr

Марина Валерьевна Янгубаева
Бирская государственная социально-педагогическая академия, Россия

E-mail address: marmarishka@list.ru

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИХ РОСТ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Б. Н. Хабибуллин, Е. Г. Кудашева, Ф. Б. Хабибуллин, Л. Ю. Чередникова

Дается сводка части результатов работ [1]–[5] в упрощенной форме.

Всюду ниже $k = 1, 2, \dots$, а $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ и $\Gamma = (\gamma_k)_{k=1}^{\infty}$ — две последовательности точек в единичном круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем и Λ, и Γ не имеют предельных точек в $\mathbb{D}$.

Для функции $M \colon \mathbb{D} \to [-\infty, +\infty]$ вводим класс $\operatorname{Hol}(M)$ голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f, для которых $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant C_f e^{M(z)}$, $\forall z \in \mathbb{D}$, где C_f — постоянная.

Последовательность Λ — *последовательность* (соотв. *<u>под</u>последовательность*) *нулей для* $\operatorname{Hol}(M)$, если найдется $f \in \operatorname{Hol}(M)$, кратность корня которой $\forall z \in \mathbb{D}$ *равна* (соотв. *не меньше*) числа повторений точки z в Λ.

Через $n_\Lambda(S)$ обозначаем число точек из Λ, попавших в $S \subset \mathbb{D}$.

Всюду далее $\Sigma := \{S_l\}_{l=1}^{\infty}$ — счетная система непересекающихся борелевских подмножеств в $\mathbb{D} \supset \overline{S}_l$ — замыкание S_l, $l = 1, 2, \dots$, для которой $\inf\{|z| \colon z \in S_l\} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 1$, а все точки из Λ содержатся в объединении $\bigcup_{l=1}^{\infty} S_l$.

Всюду ниже p — *субгармоническая функция* в $\mathbb{D}$, $p \not\equiv -\infty$, с мерой Рисса $\nu_p := \frac{1}{2\pi}\Delta p$, где Δ — оператор Лапласа. Функция p *радиальная,* если $p(z) = p\bigl(|z|\bigr)$, $\forall z \in \mathbb{D}$; $\bigl($радиальная функция p в $\mathbb{D}$ субгармонична$\bigr)$ $\iff$ $\bigl($функция $x \mapsto p(e^x)$, $x \in [-\infty, 0)$, — возрастающая непрерывная и выпуклая$\bigr)$ $\iff$ $\bigl($сужение $p\,\bigr|_{[0,1)}$ на $[0,1)$ возрастает, его правая производная p'_{right} существует всюду, а функция $t \mapsto tp'_{\mathrm{right}}(t)$, $t \in (0,1)$, также возрастает$\bigr)$.

Теорема 1 (о (под)последовательностях нулей)**.** *Пусть* $p \geqslant 0$ *на* $\mathbb{D}$ *и*

(1)
$$D(\Sigma) := \limsup_{l\to\infty} \frac{\sup\{|z-w| \colon z, w \in S_l\}}{1 - \sup\{|z| \colon z \in S_l\}} < +\infty, \quad \limsup_{l\to\infty} \frac{n_\Lambda(S_l)}{\nu_p(S_l)} < +\infty.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00046-а).

Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдутся числа $c_1, c_2 \geqslant 0$, для которых Λ — <u>под</u>последовательность нулей для класса $\operatorname{Hol}(M)$ с функцией

$$(2)\qquad M(z) \equiv c_1 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\bigl(z+\varepsilon(1-|z|)e^{i\theta}\bigr)\,\mathrm{d}\theta + c_2 \log\frac{1}{1-|z|}\,, \quad z\in\mathbb{D}.$$

В частности, если функция p еще и радиальная, а $B_p(z) := \frac{1}{1-|z|}\int\limits_{|z|}^{1} p(t)\,\mathrm{d}t$, то Λ — последовательность нулей для $\operatorname{Hol}(cB_p)$, где $c \geqslant 0$ — постоянная.

Теорема 2. *Если Λ — <u>под</u>последовательность нулей для $\operatorname{Hol}(p)$, $p \geqslant 0$, и*

$$(3)\qquad \limsup_{k\to\infty} \delta(\lambda_k,\gamma_k) < +\infty, \quad \delta(\lambda,\gamma) := \frac{|\lambda-\gamma|}{1-\max\{|\lambda|,|\gamma|\}}\,,$$

то Γ — <u>под</u>последовательность нулей для $\operatorname{Hol}(M)$ с весом M из (2), а в случае радиальной функции p — и последовательность нулей для $\operatorname{Hol}(cB_p)$.

Если в Теоремах 1 и 2 снять условие $p \geqslant 0$, но первое условие в (1) заменить на $D_\Lambda(\Sigma) < 1$, а (3) — на $\limsup\limits_{k\to\infty} \delta(\lambda_k,\gamma_k) < 1$, то заключения их также верны. Дальнейшие ужесточения (1) или (3) дают и значительно более тонкую серию (шкалу) теорем. Для результатов, касающихся только <u>под</u>последовательностей нулей, вместо круга $\mathbb{D}$ можно рассматривать и *произвольные ограниченные области* в $\mathbb{C}$ (см. [1]), а для последовательностей нулей — <u>*не*</u> *радиальные* функции p в круге [2]–[5], и даже *произвольные конечносвязные ограниченные области* вместо единичного круга [5].

Список литературы

[1] *Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I, II // Алгебра и анализ. **20**:1 (2008), 146–189; 190–236.

[2] *Кудашева Е. Г., Хабибуллин Б. Н.* Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций // Матем. сборник. **200**:9 (2009), 95–126.

[3] *Хабибуллин Ф. Б.* Последовательности нулей голомофных функций в весовых пространствах в единичном круге // Изв. вузов. 3 (2010), 102–105.

[4] *Хабибуллин Ф. Б.* Устойчивость (под)последовательностей нулей для классов голоморфных функций умеренного роста в единичном круге // Уфим. матем. журнал. **3**:3 (2011) (принято к печати).

[5] *Хабибуллин Б. Н.* Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты // Матем. сб. **198**:2 (2007), 121–160.

Булат Нурмиевич Хабибуллин, БашГУ, Уфа, РБ, Российская Федерация
E-mail address: Khabib-Bulat@mail.ru

Елена Геннадьевна Кудашева, БГАУ, Уфа, РБ, Российская Федерация
E-mail address: Lena_Kudasheva@mail.ru

Фархат Булатович Хабибуллин, БашГУ, Уфа, РБ, Российская Федерация
E-mail address: KhabibullinFB@list.ru

Любовь Юрьевна Чередникова, БГАУ, Уфа, РБ, Российская Федерация
E-mail address: Lubaleb@mail.ru

ОБОБЩЕНИЕ КОНИЧЕСКИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

С. В. Хабиров

Подмодель конических течений – инвариантная подмодель, построенная на подалгебре из вращений, переноса по времени и равномерного растяжения. Она сводится к системе из двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$sU' + V' = \rho\sigma, \quad \sigma = \operatorname{sign}(U - sV),$$
$$U'\left[1 - \rho^{-1} I_\rho^{-1}(U - sV)^2\right] - sV' + V = 0,$$

и двух интегралов

$$U^2 + V^2 + \sigma(U - sV)\,\rho + 2I(\rho) = 0, \quad W^2 = \sigma\rho\,(U - sV),$$

где U, V, W – цилиндрические координаты скорости, $s = xr^{-1}$, $I(\rho)$ – функция, определенная уравнением состояния.

Подробно исследованы конические течения без закрутки $W = 0$. Особое решение получится, если определитель системы равен нулю. Существует единственное особое решение для уравнения состояния $p = \frac{1}{2}a_0^2\rho + p_0$, которое задает раскручивающееся течение в сопле.

Частично инвариантное решение ранга нуль дефекта 4 по четырехмерной подалгебре (добавляется перенос по x) задает частное решение конической подмодели. Так получаются безударное обтекание конуса закрученным потоком, течения с траекториями спиралями на цилиндре, течения из источника со спиральными траекториями на поверхности вращения кривой, выходящей на асимптотику. Рассмотрено приближение почти одномерного потока с вращением.

Новые обобщения конических течений получаются при рассмотрении пятимерной надалгебры. Рассмотрены скоростные волны – решение ранга 1 дефекта один и дифференциально инвариантные решения ранга 1+1.

Салават Валеевич Хабиров
Институт механики УНЦ РАН, Россия
E-mail address: habirov@anrb.ru

ДИАГНОСТИКА ТОЧЕЧНОЙ ВОЗДУШНОЙ ПОЛОСТИ В ТРУБОПРОВОДЕ

А.Г. Хакимов

Постановка задачи.

Отражение продольной волны от надреза в стержне, погруженном в вязкую жидкость, рассматривается в [1]. Предполагается, что из удаленной точки трубопровода круглого поперечного сечения радиусом R слева направо распространяется изгибная волна смещения, амплитуда и частота которой в точке наблюдения O с координатой $x = 0$ равны W и ω. Принято, что затухающая часть волны равна нулю. В трубопроводе с жидкостью в точке с координатой x_c располагается точечная воздушная полость с отрицательной массой m. Требуется определить отраженную и проходящую волны по известной отрицательной массе полости и ее координате, а также указанные величины по отраженной волне в точке наблюдения. Общее решение уравнения изгибных колебаний балки имеет вид

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\rho F + \rho_i F_i\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$w = e^{i\omega t}\left(Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + Ce^{i\alpha x} + De^{-i\alpha x}\right),\ \alpha^2 = \omega\sqrt{\frac{\rho F + \rho_i F_i}{EJ}},$$
$$\alpha = \frac{2\pi}{L},\ F_i = \pi R_i^2,\ \ F = 2\pi R_i h,\ \ J \cong \pi R_i^3 h,$$

где E, ρ, J, F - модуль упругости, плотность, момент инерции и площадь поперечного сечения трубопровода, ρ_i, F_i - плотность жидкости и площадь проходного сечения трубопровода, w - прогиб трубопровода, t - время, A, B, C, D - постоянные интегрирования, i - мнимая единица, α - волновое число, R_i- внутренний радиус трубопровода, h - толщина стенки, L - длина волны. Ограниченное решение, удовлетворяющее условию отсутствия отраженных волн (A=C=0), записывается

$$w = Be^{-\alpha x + i\omega t} + De^{i(\omega t - \alpha x)}. \tag{2}$$

Обозначая функции при x=x_c слева и справа индексами „-“ и „+“, записываются условия стыкования решений (условия равенства перемещений, углов поворота θ, изгибающих моментов M, перерезывающих сил

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-01-00293-а).

Q):

$$w_+ = w_-, \theta_+ = \theta_-,\ M_+ = M_-,\ \ Q_+ = Q_- - m\frac{\partial^2 w_-}{\partial t^2}, \tag{3}$$

где m - отрицательная масса воздушной полости,

$$M = EJ\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, Q = -EJ\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}. \tag{4}$$

Условия (3) с учетом (4) записываются в виде

$$w_+ = w_-, \frac{\partial w_+}{\partial x} = \frac{\partial w_-}{\partial x}, \frac{\partial^2 w_+}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_-}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 w_+}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_-}{\partial x^3} + \frac{m\omega^2}{EJ}w_-. \tag{5}$$

Поэтому поперечное перемещение в трубопроводе задается в виде незатухающей бегущей изгибной волны $w = Wsin\,(\omega t - \alpha x)$.

Прямая задача. В дальнейшем используются обозначения:

$$\tau = \omega t,\ \ \xi = \frac{2\pi x}{L},\ \xi_c = \frac{2\pi x_c}{L},\ \beta = \frac{m\omega^2 L^3}{8\pi^3 EJ} = \frac{m\omega^2 L^3}{8\pi^4 ER_i^3 h},\ w = \frac{w}{W}.$$

Параметры отраженной и проходящей волны определяются с помощью соотношений (5), записанных в безразмерном виде. Получено, что чем больше отрицательная масса воздушной полости β, тем больше величина сигнала в отраженной волне. Сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения координаты ξ_c отрицательной массы и ее величины. С ростом параметра β происходит увеличение коэффициента отражения. Обозначив через $(w_r)_1$ и $(w_r)_2$ замеренные значения перемещения в отраженной волне в точке ξ=0 в моменты времени τ_1=0, τ_2=π/2, получено решение прямой задачи для ξ_c=2p/5, β=−0,001: $(w_r)_1$=−0.000270, $(w_r)_2$=0.000169.

Обратная задача. Решение обратной задачи для $(w_r)_1$=−0.0002, $(w_r)_2$ =0.0001 дает, что ξ_c=1.31; β=−0.000708. Получены зависимости координаты воздушной полости ξ_c и ее массы β от $(w_r)_1$ для различных значений $(w_r)_2$. Вычисления показывают, что по двум замеренным значениям $(w_r)_1$, $(w_r)_2$ определяются координата воздушной пробки и ее масса. Анализ отраженных волн в стержне позволяет сделать вывод о том, что амплитуда и сдвиг фазы зависят от координаты воздушной полости ξ_c и ее массы β. Таким образом, сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения координаты воздушной полости ξ_c и ее массы β. Решение обратной задачи позволяет определить координату воздушной полости и величину отрицательной массы по данным отраженной волны в точке наблюдения.

Список литературы

[1] *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Отражение продольной волны от надреза в стержне, погруженном в вязкую жидкость // Вычислительная механика сплошных сред, 2010, т. 3, № 3, с. 58–67.

Аким Гайфуллинович Хакимов
Учреждение Российской академии наук Институт механики Уфимского научного центра РАН
E-mail address: hakimov@anrb.ru

О СНИЖЕНИИ ДАВЛЕНИЯ ПАРА ПРИ КОНТАКТЕ С ХОЛОДНОЙ ЖИДКОСТЬЮ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Ш. Шагапов, Ю. А. Юмагулова

Интерес к процессу снижения давления пара обусловлен недавней аварией на АЭС в Фукусиме, когда из-за повышения давления в помещении произошло разрушение корпуса станции. Представляется, что наиболее простым и эффективным мероприятием, позволяющим снизить давление, не выпуская в атмосферу пар, содержащий экологически опасные составляющие, это введение холодной воды. Некоторые аспекты данной проблемы рассматривались в [1].

Пусть в емкости с вертикальными стенками находится пар. Верхнюю границу емкости представляет горизонтальная плоскость, а на нижней границе пар контактирует со слоем воды. Тепловыми потерями через верхнюю и боковые стенки емкости будем пренебрегать (материал этих стенок представляет собой идеальный теплоизолятор). Уравнение, описывающее закон изменения давления пара, запишем в виде

$$b\frac{dp}{dt} = \frac{R_v c_v T_s(p)}{l(c_v - R_v)}\lambda_w \left(\frac{\partial T_w}{\partial x}\right)_b, \tag{1}$$

где b - высота помещения, c_v - теплоемкость пара, R_v - газовая постоянная, λ_w - теплопроводность воды, $T_s(p)$ - температура насыщения при давлении p, l - удельная теплота фазового перехода.

Уравнение (1) означает, что падение давления происходит за счет конденсации пара, интенсивность которой лимитируется теплоотбором жидкостью от межфазной поверхности пар-вода.

Подставив в уравнение (1) решение уравнения теплопроводности для воды, получим интегро-дифференциальное уравнение для определения давления

$$\frac{dp}{dt} = -B\left(\frac{\Delta T}{\sqrt{\pi t}} + \int\limits_0^t \frac{A}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\frac{dp}{d\tau}d\tau\right), \tag{2}$$

где T_{w0} - исходная температура воды, ν_w - температуропроводность воды, $\Delta T = T_s(p_0) - T_{w0}$, $A = \frac{T_*}{p\ln^2\left(\frac{p_*}{p}\right)}$, $B = \frac{c_v\lambda_w}{b\sqrt{\nu_w}(c_v - R_v)\ln\left(\frac{p_*}{p}\right)}$.

Если пренебречь переменностью коэффициентов A и B из-за изменения давления, уравнение (2) представляет собой интегральное уравнение относительно dp/dt, которое может быть решено методом преобразования Лапласа [2, 3]. В результате применения к обеим частям уравнения преобразования Лапласа и используя таблицы, получим следующее уравнение для изменения давления

$$\frac{dp}{dt} = -B\Delta T \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - AB \exp\left((AB)^2 t\right) erfc\left(AB\sqrt{t}\right)\right], \tag{3}$$

где $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-\eta} d\eta$.

Уравнение (3) с учетом зависимости коэффициентов A и B от давления представляет обыкновенное дифференциальное уравнение для эволюции давления.

Численные расчеты, выполненные на основе уравнения (3) показали, что продолжительность снижения давления пара в два-три раза от исходной величины длится несколько часов. С увеличением температуры воды от нуля до сорока градусов характерное время снижения давления от двух до одной атмосферы может увеличиваться в три раза. Такие времена могут быть не совсем подходящими с точки зрения ущерба из-за аварийной ситуации.

Получена приближенная формула, позволяющая описать процесс снижения давления пара при контакте с холодной водой в виде слоя жидкости на горизонтальной поверхности.

Список литературы

[1] *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч.1. 464 с. Ч.2. 360 с.

[2] *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976. 215 с.

[3] *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965. 287 с.

Владислав Шайхулагзамович Шагапов
Институт механики Уфимского научного центра РАН, Россия
E-mail address: Shagapov@rambler.ru

Юлия Александровна Юмагулова
Бирская государственная социально-педагогическая академия, Россия
E-mail address: ym_julia@mail.ru

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Р. Шакуров

Рассмотрим систему трех линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a_{ij} - произвольные постоянные коэффициенты.

Покажем, что при выполнении условия $a_{11}+a_{22}+a_{33} = 0$ система имеет полиномиальный первый интеграл вида

$$W = b_{111}x_1^3 + b_{112}x_1^2x_2 + b_{122}x_1x_2^2 + b_{113}x_1^2x_3 + b_{133}x_1x_3^2 + \\ + b_{222}x_2^3 + b_{223}x_2^2x_3 + b_{233}x_2x_3^2 + b_{333}x_3^3 + b_{123}x_1x_2x_3$$

где коэффициенты b_{lpq} - есть дробно рациональная функция.

Для этого воспользуемся методикой построения первого интеграла рассмотренной в [1]. Нахождение коэффициентов b_{lpq} основано на теореме о необходимом и достаточном условия существования первых интегралов для систем ДУ.

Основные вычисления произведены в Maple и сводятся к решению однородной линейной системы относительно b_{lpq}.

Наличие условия $tr(A) = 0$, по-видимому, позволяет строить полиномиальные первые интегралы степени равной размерности матрицы. По крайней мере, для систем четвертого порядка это условие проверено. Расчеты не приводятся в виду условия громоздкости.

Список литературы

[1] *Шакуров И. Р., Асадуллин Р. М.* Алгоритмизация построения первых интегралов для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с полиномиальными правыми частями // Научный Башкортостан: альманах **2**, Уфа: Вагант (2009), 3–14.

Ильдар Рузамирович Шакуров
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы, Россия
E-mail address: ildarshakurov@bk.ru

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. Н. Шилова, А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, Я. А. Сатин

В работе рассматривается нестационарная марковская цепь $X(t)$ с непрерывным временем $t \geq 0$ и конечным пространством состояний $0, 1, \ldots, r$ и исследуются оценки скорости сходимости, обобщающие полученные ранее для нестационарных процессов рождения и гибели (см., например [1]).

Обозначим через $p_{ij}(s,t) = Pr\left\{X(t) = j\,|X(s) = i\right\}$, $i, j \geq 0,\ 0 \leq s \leq t$, переходные вероятности цепи, а через $p_i(t) = Pr\left\{X(t) = i\right\}$ – ее вероятности состояний. Будем предполагать, что интенсивности переходов не зависят от состояния системы, а зависят от времени и величины "скачка то есть интенсивность увеличения (уменьшения) номера состояния на k в момент t в системе равна ($\lambda_k(t)$ и $\mu_k(t)$ соответственно, причем интенсивности являются локально интегрируемыми на $[0, \infty)$ функциями времени t, и кроме того, $\lambda_{k+1}(t) \leq \lambda_k(t)$, и $\mu_{k+1}(t) \leq \mu_k(t)$ при всех k и почти при всех при $t \geq 0$.

Тогда для описания вероятностной динамики процесса получаем прямую систему Колмогорова в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}(t), \tag{1}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \mu_4(t) & \cdots & \mu_r(t) \\ \lambda_1(t) & a_{11}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \cdots & \mu_{r-1}(t) \\ \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{22}(t) & \mu_1(t) & \mu 2(t) & \cdots & \mu_{r-2}(t) \\ \cdots \\ \lambda_r(t) & \lambda_{r-1}(t) & \lambda_{r-2}(t) & \cdots & \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{rr}(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

причем $a_{ii}(t) = -\sum_{k=1}^{i} \mu_k(t) - \sum_{k=1}^{r-i} \lambda_{r-k}(t)$.

Далее будем обозначать через $\| \bullet \|$ l_1-норму, то есть $\|\mathbf{x}\| = \sum |x_i|$, а $\|B\| = \sup_j \sum_i |b_{ij}|$ если $B = (b_{ij})_{i,j=0}^{r}$.

Рассмотрим вспомогательную последовательность положительных чисел $\{d_i\}$, $i = 1, \ldots, r$

Положим $d = \min_{1 \leq i \leq r} d_i, \quad G = \sum_{i=1}^{r} d_i$.

Рассмотрим величины

(3)
$$\alpha_i(t) = -a_{ii}(t)+\lambda_{r-i+1}(t)-\sum_{k=1}^{i-1}(\mu_{i-k}(t)-\mu_i(t))\frac{d_k}{d_i}-\sum_{k=1}^{r-i}(\lambda_k(t)-\lambda_{i+r-1}(t))\frac{d_{k+i}}{d_i},$$
и
$$\alpha(t) = \min_{1\le i\le r} \alpha_i(t). \qquad (4)$$

Теорема 1. *Пусть существует последовательность положительных чисел $\{d_j\}$ такая, что*
$$\int_0^\infty \alpha(t)\, dt = +\infty. \qquad (5)$$
Тогда $X(t)$ слабо эргодичен, при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$ и любых $s, t, \quad 0 \le s \le t$ справедлива оценка
$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \le \frac{8G}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u)du}. \qquad (6)$$

Список литературы

[1] *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. М.: Элекс-КМ, 2008.

Галина Николаевна Шилова
Вологодский государственный педагогический университет, Россия
E-mail address: shgn@mail.ru

Александр Израилевич Зейфман
Вологодский государственный педагогический университет, ИПИ РАН и ИСЭРТ РАН, Россия
E-mail address: a_zeifman@mail.ru

Анна Владимировна Коротышева
Вологодский государственный педагогический университет, Россия
E-mail address: a_korotysheva@mail.ru

Яков Александрович Сатин
Вологодский государственный педагогический университет, Россия
E-mail address: yacovi@mail.ru

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

Т. К. Юлдашев

Рассматриваются вопросы однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего параболический оператор высокой степени. С помощью ряда Фурье, разделив переменные, изучаемая задача сводится изучению счетной системы нелинейных интегральных уравнений, однозначная разрешимость которой доказывается методом последовательных приближений. Сходимость ряда Фурье доказывается с помощью интегрального тождества.

Итак, в области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m u(t,x)=f(t,x,u(t,x)) \tag{1}$$

с начальными

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x),\ \ \left.\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}u(t,x)\right|_{t=0}=\varphi_k(x),\ \ k=\overline{2,m} \tag{2}$$

и граничными

$$\begin{gathered} u(t,x)|_{x=0}=u(t,x)|_{x=l}=u_{xx}(t,x)|_{x=0}=u_{xx}(t,x)|_{x=l}= \\ =...=\left.\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}u(t,x)\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}u(t,x)\right|_{x=l}=0 \end{gathered} \tag{3}$$

условиями, где $f(t,x,u)\in C(D\times R),\ \varphi_i(x)\in C(D_i),\ 0<K(t,s)\in C(D_T^2)$,

$$\varphi_i(x)|_{x=0}=\varphi_i(x)|_{x=l}=\varphi_i''(x)|_{x=0}=\varphi_i''(x)|_{x=l}=...=\left.\varphi_i^{m-2}(x)\right|_{x=0}=$$

$$=\left.\varphi_i^{m-2}(x)\right|_{x=l}=0,\ i=\overline{1,m},\ D\equiv D_T\times D_l,\ D_T\equiv[0,T],\ D_l\equiv[0,l],$$

$0<l<\infty,\ 0<T<\infty,\ m\in N.$

Отметим, что в работе [1] обосновано применение метода разделения переменных к смешанным задачам для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. В работе [2] методом разделения переменных изучаются смешанные задачи для линейных вырождающиеся на границе области дифференциальных уравнений высокого порядка. А в работе [3] изучаются прямые и обратные задачи для линейных дифференциальных уравнений смешанного типа четного порядка.

В данной работе используется методика разделения переменных, основанная на поиске решения смешанной задачи (1) – (3) в виде ряда Фурье (см. [4]):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x),\ (t,x)\in D, \tag{4}$$

где $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x,\ \lambda_n=\dfrac{n\pi}{l},\ n=1,2,\ldots.$

Применение обычной методики разделения переменных в виде

$$u(t,x)=a(t)\cdot b(x),\ (t,x)\in D,$$

где $a(t)$ и $b(x)$ – неизвестные функции, к уравнению (1) не возможно, т.е. переменные здесь не разделяются. Применение ряда Фурье в виде (4) позволяет нам в отличие от других работ отказываться от непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (1). Кроме того, такой подход позволяет нам с помощью интегрального тождества свести смешанную задачу к счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ). Поскольку ССНИУ замкнуты, их практически невозможно разрешить. А методика, предложенная в данной работе, позволяет их решить.

Список литературы

[1] *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М., 1991.

[2] *Байкузиев К.* Основные смешанные задачи для некоторых вырождающихся уравнений с частными производными. Ташкент: Фан, 1984.

[3] *Юлдашева А.В.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа четного порядка // Автореф. дисс. … к.ф.-м.н., 01.01.02 - Дифференц. уравнения. - Ташкент, 2010.

[4] *Юлдашев Т.К.* О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением // Вестник ЮжУралГУ. Серия "Математика. Механика. Физика". 2011. Вып. 4. № 10 (227). С. 40-48.

Турсунбай Камалдинович Юлдашев
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М.Ф. Решетнева, Россия

E-mail address: `tursunbay@rambler.ru`

ОБ ОТСУТСТВИИ БЕЗУСЛОВНЫХ БАЗИСОВ ИЗ ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДЕР В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Р.С. Юлмухаметов

Пусть H - функциональное гильбертово пространство целых функций. Это означает, что существует функция $k_z(\lambda) \in H$, такая что $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром [1]. Функция $\sqrt{K(z)} = \|k_z(\lambda)\|_H = (k(z,z))^{\frac{1}{2}}$ называется функцией Бергмана пространства H. Нас интересует вопрос: при каких условиях на последовательность комплексных чисел $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ система $\{k(\lambda, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ может быть безусловным базисом в H.

Мы вводим следующую характеристику для непрерывной функции u, определенной на всей плоскости, которая измеряет отклонение этой функции от пространства гармонических функций. Для непрерывной функции u, для $z \in \mathbb{C}$ и для положительного числа p определим $\tau(u, z, p)$ как супремум всех $r > 0$, для которых выполняется неравенство:

$$\inf\{\sup_{w\in B(z,r)} |u(w) - h(w)|, h \text{ гармонична в } B(z,r)\} \leq p.$$

Теорема 1. *Пусть H - функциональное гильбертово пространство целых функций и $\sqrt{K(\lambda)}$ - функция Бергмана пространства H, $K(\lambda) > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Предположим, что для любого положительного числа p существует $\delta = \delta(p) > 0$, такое что функция $\tau(z) = \tau(\ lnK(\lambda), z, p)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ $\inf_{z\in B(\lambda, 2\tau(\lambda))} \tau(z) \geq \delta\tau(\lambda)$;

2) $\tau(z) = o(|z|)$, для $|z| \longrightarrow \infty$.

Тогда безусловных базисов из воспроизводящих ядер в пространстве H не существует.

Список литературы

[1] *Aronszajn N.* Theory of reproducing kernels. // Transactions of the American Mathematical Society, **68**:3 (1950), 337-404.

[2] *Никольский Н. К., Павлов Б. С., Хрущев С. В.* Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер, I. // Препринт, ЛОМИ, 8–80.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00233-а).

Ринад Салаватович Юлмухаметов
Учреждение Российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Россия
E-mail address: Yulmukhametov@mail.ru

РАЗЛЕТ ГАЗА С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ ИЗ ВИХРЯ.

Ю. В. Юлмухаметова

Рассматривается модель движения газа с линейным полем скоростей, одна из перечисленных в [1], а именно ПОДМОДЕЛЬ 1. Эту подмодель образует система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 25 порядка с начальными данными. Известна функция плотности, давления, уравнение состояния.

Найдено несколько первых интегралов данной системы. В результате порядок системы был снижен до 19 порядка. При помощи некоторых преобразований эквивалентности, сохраняющих структуру уравнений подмодели, но меняющих начальные данные, сокращено количество параметров задачи до 10. Для полученной системы, при частном выборе начальных данных, была найдена замена переменных, сводящая ее решение к решению уравнения Риккати.

При помощи пакета прикладных программ Maple 9 было построено численное решение этого уравнения. Проведена аппроксимация решения в виде интерполяционного многочлена. Это позволило найти приближенное решение уравнений подмодели со специальными начальными данными. В результате построены мировые линии частиц газа для данного решения, описывающие радиальный разлет частиц газа из вихря.

Список литературы

[1] *Юлмухаметова Ю. В.* Подмодель движения газа с линейным полем скоростей в вырожденном случае // Сиб. журн. индустр. математики **14**:2 (2011), 139–150.

Юлия Валерьевна Юлмухаметова
Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия
E-mail address: tarasova_yulya@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ l-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

С.Ф. Ягудина

Одной из важнейших задач математического анализа является исследование относительного роста двух функций. К задачам абелева типа относятся такие, в которых относительный рост дифференцируемых функций определяется по относительному росту их производных. При естественных условиях справедлива теорема Бернулли-Лопиталя. Результаты противоположного характера, когда об относительном поведении производных функций судят по относительному росту самих функций, относят к теоремам тауберова типа. Такие теоремы в общем случае неверны, но оказываются возможными, если на рассматриваемые функции накладываются дополнительные (тауберовы) условия. Одним из таких условий является выпуклость рассматриваемых функций. Как показано Брайчевым Г.Г.(см. [1]), для выпуклых функций справедливы следующие неравенства:

$$\underline{\lim}_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)} \geq a_1\,\overline{\lim}_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)},\ \ \overline{\lim}_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq a_2\,\overline{\lim}_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где a_1, a_2–корни некоторого уравнения. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ не дифференцируемы или не выпуклы, то данные формулы теряют смысл, однако эти понятия можно обобщить таким образом, что приведенные выше результаты остаются справедливыми.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале $(a;b), b\leq\infty$, а функция $l(x)$ инъективна на нем. Функция $f(x)$ называется l-выпуклой на промежутке I, если для произвольных x_1, x_2, x_3 из I, $x_1 < x_2 < x_3$, выполняется неравенство:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{l(x_2)-l(x_1)} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{l(x_3)-l(x_2)}.$$

Несколько отличные понятия выпуклости рассмотрены в [2], [3]. Известно, что l-выпуклая на интервале функция в каждой точке этого интервала имеет односторонние l-производные $f'_{l_\pm}(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0\pm}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{l(x)-l(x_0)}$.
Пусть далее $l(x)$-строго возрастающая на интервале $(a;b), b\leq\infty$ функция, а функции $f(x)$ и $g(x)$ l-дифференцируемы на нем и под $f'_l(x_0)$ будем

понимать правостороннюю l-производную. Обозначим $t := \varliminf\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $T := \varlimsup\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\delta := \varliminf\limits_{x\to b-} \frac{f'_l(x)}{g'_l(x)}$, $\Delta := \varlimsup\limits_{x\to b-} \frac{f'_l(x)}{g'_l(x)}$. В [4] доказано, что введенные характеристики удовлетворяют неравенствам

$$\delta \le t \le T \le \Delta.$$

Для функции $g(x)$, являющейся l-выпуклой на $(a;b)$ и удовлетворяющей условию

$$\lim_{x\to b-} \frac{g(x)}{l(x)} = \infty, \tag{1}$$

введем следующую характеристику:

$$\varphi_g(\xi) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{g(t_x) + \xi g'_l(x)(l(x) - l(t_x))}{g(x)}.$$

Здесь $t_x = \sup\{t : g'_l(t) \le \xi g'_l(x)\}$, а если множество в фигурных скобках пусто, то считаем, что $t_x = a$. Такая характеристика $\varphi_g(\xi)$ в случае $l(x) = x$ была ранее введена и изучена Братищевым А.В.(см. [5]).

В следующей теореме сформулирован основной результат.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются l-дифференцируемыми на $(a;b)$ и удовлетворяют условию (1), а $\dfrac{t}{T} = \theta \in (0;1)$, тогда справедливы неравенства*

$$\delta \ge \xi_1 T,\ \Delta \ge \xi_2 T,$$

в которых

$$\xi_1(\theta) = \varliminf_{x\to b-} \frac{1}{g'_l(x)} \sup_{t<x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)},$$

$$\xi_2(\theta) = \varlimsup_{x\to b-} \frac{1}{g'_l(x)} \inf_{t>x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{l(t) - l(x)}.$$

Список литературы

[1] *Брайчев Г.Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций.–М.: Прометей, 2005.

[2] *Constantin P. Niculescu, Florin Popovici* The extension of majorization inequalities within the framework of relative convexity//Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Volume 7, Issue 1, Article 27, 2006. М.: Гостехиздат, 1956.

[3] *Szyrom Wasowicz* Support-type properties of convex functions of higher order and hadamard-type inequalities//Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332(2), 2007, 1229–1241.

[4] *Ягудина С.Ф.* Об обращении правила Лопиталя для l-выпкулых функций. Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование.-М.: МПГУ, 2010, 198–201.

[5] *Братищев А.В.* Базисы Кете, целые функции и их приложения. Докт.дис.–Екатеринбург: ИММ УрО РАН,1998.

Светлана Фирдаусовна Ягудина
Московский педагогический государственный университет, Россия
E-mail address: Svetlanayagudina@yandex.ru

СПИСОК УЧАСТНИКОВ

Абанин Александр Васильевич
Россия, Ростов-на-Дону, Владикавказ
Южный федеральный университет,
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
abanin@math.rsu.ru

Абдрахманов Айдар Максутович
Россия, Уфа
Уфимский государственный Авиационный университет
ablrai@mail.ru

Алфимов Георгий Леонидович
Россия, Москва, Зеленоград
Московский институт электронной техники
galfimov@yahoo.com

Амосов Григорий Геннадьевич
Россия, Москва
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
gramos@mi.ras.ru

Андриянова Элина Радиковна
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
Elina.Andriyanov@mail.ru

Атнагулова Рушания Ахъяровна
Россия, Уфа
БГПУ им.М.Акмуллы
rushano4ka@mail.ru

Бабкин Павел Сергеевич
Россия, Красноярск
Сибирский федеральный университет
deeppaul@yandex.ru

Бадретдинов Явит Сафтдинович
Россия, г. Бирск
Бирская государственная социально-педагогическая академия
jsbadr@rambler.ru

Байтуленов Жаныбек Бахытович
Казахстан, Алматы
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
janibekbb@mail.ru

Баландин Сергей Павлович
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
balanse@bk.ru

Баранов Антон Дмитриевич
Россия, Санкт-Петербург
Санкт-Петербургский государственный университет
anton.d.baranov@gmail.com

Белов Юрий Сергеевич
Россия, Санкт-Петербург
Санкт-Петербургский государственный университет
j_b_juri_belov@mail.ru

Белошапка Валерий Константинович
Россия, Москва

МГУ им.Ломоносова
vkb@strogino.ru

Бибиков Павел Витальевич
Россия, Москва
Институт проблем управления РАН
tsdtp4u@proc.ru

Брайчев Георгий Генрихович
Россия, Москва
Московский педагогический государственный университет
braichev@mail.ru

Бронштейн Ефим Михайлович
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
bro-efim@yandex.ru

Вакал Юлия Евгеньевна
Украина, Киев
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка
iuliia.vakal@gmail.com

Варзиев Владислав Аликович
Россия, Владикавказ
Южный математический институт
varzi@yandex.ru

Васильев Александр Владимирович
Россия, Брянск
Брянский Государственный Университет имени академика И.Г.Петровского
alexvassel@gmail.com

Васильев Владимир Борисович
Россия, Брянск
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
vbv57@inbox.ru

Верещагин Вадим Леонтьевич
Россия, Уфа
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
v_vereschagin@mail.ru

Войтишек Антон Вацлавович
Россия, Новосибирск
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
vav@osmf.sscc.ru

Газизов Рафаил Кавыевич
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
gazizov@mail.rb.ru

Гайдомак Светлана Валерьевна
Россия, Иркутск
Учреждение РАН Институт динамики систем и теории управлени СО РАН
gaidamak@icc.ru

Гайсин Ахтяр Магазович
Россия, Уфа
Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
gaisinam@mail.ru

Герфанов Айдар Ренатович
Россия, Уфа

Башкирский Государственный Педагогический Университет
ager4@ya.ru

Губайдуллин Ирек Марсович
Россия, г.Уфа
Учреждение Российской академии наук Институт нефтехимии и катализа РАН
irekmars@mail.ru

Давлетов Дмитрий Борисович
Россия, Уфа
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы
davletovdb@mail.ru

Дадащова Ирада Баларза
Азербайджан, Баку
Бакинский Государственный Университет
irada-dadashova@rambler.ru

Денисова Марина Юрьевна
Россия, Казань
Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет
denisova_mar@mail.ru

Егоров Дмитрий Владимирович
Россия, Якутск
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.Аммосова
egorov.dima@gmail.com

Елеуов Абдрахман Абуович
Казахстан, г. Алматы
Казахский национальный университет имени Аль-Фараби
Eleuov@mail.ru

Елисеев Игорь Спартакович
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет

Ершов Виталий Ильич
Россия, Москва
Российская Академия Естествознания
ershov41@gmail.com

Жибер Анатолий Васильевич
Россия, Уфа
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
zhiber@mail.ru

Закирова Зольфира Хаписовна
Россия, казань
Казанский Государственный Энергетический Университет
zolya_zakirova@mail.ru

Захаров Андрей Владимирович
Россия, Уфа
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН
andrewzakhar@mail.ru

Зыкова Татьяна Викторовна
Россия, Красноярск
Сибирский федеральный университет
zykovatv@mail.ru

Ибадов Надир Вели
Азербайджан, Гянджа
Гянджинский Государственный Университет

nadir_ibadov@yahoo.com

Иванова Ольга Александровна
Россия, Ростов-на-Дону
Южный федеральный университет
neo_ivolga@mail.ru

Ипатов Евгений Борисович
Россия, г. Лобня, Моск.обл.
Московский физико-технический институт
ipatoveb@mail.ru

Ипатова Валентина Михайловна
Россия, Долгопрудный
ГОУ ВПО Московский физико-технический институт (Государственный университет)
ipatval@mail.ru

Исаев Константин Петрович
Россия, Уфа
Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
orbit81@list.ru

Исмагилов Нияз Салаватович
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
niyaz.ismagilov@gmail.com

Исмагилова Альбина Сабирьяновна
Россия, Нефтекамск
НФ БашГУ
IsmagilovaAS@rambler.ru

Калинин Сергей Иванович
Россия, Киров
Вятский государственный гуманитарный университет
kalinin_gu@mail.ru

Кангужин Балтабек Есматович
Казахстан, г.Алматы
Казахский национальный университет имени Аль-Фараби
Kanbalta@mail.ru

Капитонова Екатерина Вадимовна
Россия, Ростов-на-Дону
Южный федеральный университет
melih@math.rsu.ru

Каримов Шахабиддин Туйчибаевич
Узбекистан, Фергана
Ферганский государственный университет
shkarimov09@rambler.ru, shkarimov@fdu.uz

Касаткин Алексей Александрович
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
alexei_kasatkin@mail.ru

Ким Виталий Эдуардович
Россия, Уфа
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
kim@matem.anrb.ru

Кириллов Кирилл Анатольевич
Россия, Красноярск
Сибирский федеральный университет

KKirillov@rambler.ru

Кожевникова Лариса Михайловна
Россия, Стерлитамак
Стерлитамакская государственная педагогическая академия
kosul@mail.ru

Кожичин Станислав Сергеевич
Россия, Красноярск
Сибирский федеральный университет
siblist24@list.ru

Кордюков Юрий Аркадьевич
Россия, Уфа
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
ykordyukov@yahoo.com

Корытов Игорь Витальевич
Россия, Иркутск
Иркутский государственный университет
kor2003@inbox.ru

Костригина Ольга Сергеевна
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
kostrigina@mail.ru

Красиков Виталий Александрович
Россия, Красноярск
Сибирский Федеральный Университет
vitkras@inbox.ru

Кривошеев Александр Сергеевич
Россия, Уфа
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
kriolesya2006@yandex.ru

Кривошеева Олеся Александровна
Россия, Уфа
ГОУ ВПО „Башкирский государственный университет“
kriolesya2006@yandex.ru

Кузнецова Мария Николаевна
Россия, Уфа
УГАТУ
KuznMN@gmail.com

Кузоватов Вячеслав Игоревич
Россия, Красноярск
Сибирский федеральный университет
kuzovatov@yandex.ru

Латыпов Ильмир Ибрагимович
Россия, г. Бирск
Бирская государственная социально-педагогическая академия
Latypov196@rambler.ru

Латыпов Ильмир Ибрагимович
Россия, г. Бирск
Бирская государственная социально-педагогическая академия
Latypov196@Rambler.ru

Латыпов Ильмир Ибрагимович
Россия, Бирск
Бирская государственная социально-педагогическая академия

latypov196@rambler.ru

Лосев Александр Георгиевич
Россия, Волгоград
Волгоградский государственный университет
alexander.losev@volsu.ru

Лубышев Федор Владимирович
Россия, Уфа
Башгосуниверситет
fairuzovme@mail.ru

Лукащук Станислав Юрьевич
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
lsu@mail.rb.ru

Лукащук Вероника Олеговна
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
voluks@gmail.com

Ляпин Александр Петрович
Россия, Красноярск
Сибирский федеральный университет
LyapinAP@yandex.ru

Маергойз Лев Сергеевич
Россия, Краснояаск
Сибирский федеральный университет
bear.lion@mail.ru

Макарова Елена Борисовна
Россия, Новороссийск
Кубанский государственный технологический университет
e.b.makarova@mail

Мамедханов Джамал Ислам
Азербайджан, Баку
Бакинский Государственный Университет
jamalmamedkhanov@rambler.ru

Махмутов Шамиль Анасович
Oman, Muscat
Sultan Qaboos University
shmakhm@gmail.com

Мелихов Сергей Николаевич
Россия, Ростов-на-Дону
Южный федеральный университет; Южный математический институт
melih@math.rsu.ru

Митрохин Сергей Иванович
Россия, г. Королёв Моск. обл.
НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова
mitrokhin-sergey@yandex.ru

Михайлов Александр Анатольевич
Россия, Новосибирск
Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН
alex_mikh@mail.ru

Муртазина Регина Димовна
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет

reginaufa@yandex.ru

Мусин Ильдар Хамитович
Россия, Уфа
Учреждение Российской Академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
musin_ildar@mail.ru

Мустапокулов Хамдам Янгибаевич
Узбекистан, Ташкент
НУУз
m_hamdam@mail.ru

Напалков Валерий Валентинович
Россия, Уфа
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
vnap@mail.ru

Никитина Екатерина Александровна
Россия, Самара
Самарский государственный технический университет
nikitinaekaterina63@gmail.com

Нуятов Андрей Александрович
Россия, Нижний Новгород
ННГУ им. Лобачевского Н.И.
Nuyatov1aa@rambler.ru

Павленко Виктор Александрович
Россия, Уфа
ИМ ВЦ УНЦ РАН
PVA100186@mail.ru

Парфенов Антон Игоревич
Россия, Новосибирск
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
parfenov@math.nsc.ru

Петров Сергей Владимирович
Россия, Ростов-на-Дону
Южный федеральный университет
prostopetrov@inbox.ru

Пономаренко Аркадий Кузьмич
Россия, Санкт-Петербург
Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ)
akpspb@yandex.ru

Пыркова Ольга Анатольевна
Россия, г. Долгопрудный
ФГБОУ ВПО"Московский физико-технический институт (ГУ)"
opyr@mail.ru

Рамазанов Марат Давидович
Россия, Уфа
ИМВЦ УНЦ РАН
ramazanovmd@yandex.ru

Рахматуллин Джангир Ялкинович
Россия, Уфа
Учреждение Российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
rahmdy@gmail.com

Рахматуллина Жанна Геннадьевна

Россия, Уфа
Башкирский Государственный Университет
rakhzha@gmail.com

Сакиева Альфия Ураловна
Россия, Уфа
ИМВЦ УНЦ РАН
alfiya85.85@mail.ru

Сакс Ромэн Семенович
Россия, Уфа
ИМВЦ УНЦ РАН
romen-saks@yandex.ru

Салимова Гюлбахар Абдул
Азербайджан, Баку
Бакинский Государственный Университет
gulbahar_58@mail.ru

Сафина Гульнара Фриловна
Россия, Нефтекамск
Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета
safinagf@mail.ru

Спивак Семен Израилевич
Россия, Уфа
Башкирский государственный университет
s.spivak@bashnet.ru

Стукопин Владимир Алексеевич
Россия, Ростов-на-Дону
Донской государственный технический университет, Южный математический институт
stukopin@mail.ru

Султанов Оскар Анварович
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
OASultanov@gmail.com

Султанов Оскар Анварович
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
oasultanov@gmail.com

Сысоев Сергей Егорович
Россия, Уфа
Уфимский государственный авиационный технический университет
sysoevse@mail.ru

Тахиров Жозил Останович
Узбекистан, Ташкент
Институт математики и информационных технологий АН Республики Узбекистан
prof.takhirov@yahoo.com

Тимофеев Алексей Юрьевич
Россия, Сыктывкар
ГОУВПО „Сыктывкарский государственный университет“
tim@syktsu.ru

Тихонова Маргарита Владимировна
Россия, Уфа
margarita.vl2011@gmail.com

Тоноян Елена Гагиковна
Армения, Ереван

Ереванский Государственный Университет
elenatonoyan@gmail.com

Трунов Кирилл Владимирович
Россия, Уфа
Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
trounovkv@mail.ru

Туницкий Дмитрий Васильевич
Россия, Москва
ИПУ РАН
dtunitsky@yahoo.com

Тураев Расул Нортожиевич
Узбекистан, Ташкент
Институт математики и информационных технологий АН Республики Узбекистан
rasul.turaev@mail.ru

Филиппов Викторий Николаевич
Россия, Нижний Новгород
ННГУ им. Лобачевского Н.И.
Nuyatov1aa@rambler.ru

Хабибуллин Исмагил Талгатович
Россия, Уфа
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
habibullinismagil@gmail.com

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Россия, Уфа
ГОУ ВПО Башкирский государственный университет
Khabib-Bulat@mail.ru

Хабиров Салават Валеевич
Россия, Уфа
Институт механики УНЦ РАН
habirov@anrb.ru

Хакимов Аким Гайфуллинович
Россия, Уфа
Институт механики УНЦ РАН
hakimov@anrb.ru

Хамитова Ирина Айратовна
Россия, Нефтекамск
Нефтекамский филиал БашГУ
gabd.irina@mail.ru

Хуснуллин Ильфат Хамзиевич
Россия, Уфа
ГОУ ВПО БГПУ им. М. Акмуллы
khusnullini@yandex.ru

Черданцев Игорь Юрьевич
Россия, Уфа
Башкирский государственный университет
igor_cherd@mail.ru

Чудинов Валерий Валентинович
Россия, Бирск
БирГСПА
chudinovvv@rambler.ru

Шакуров Ильдар Рузамирович
Россия, Уфа

Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы
ildarshakurov@bk.ru

Шилова Галина Николаевна
Россия, Вологда
Вологодский государственный педагогический университет
shgn@mail.ru

Юлдашев Турсун Камалдинович
Россия,
Сибирский государственный аэрокосмический университет
tursunbay@rambler.ru

Юлмухаметов Ринад Салаватович
Россия, Уфа
Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
Yulmukhametov@mail.ru

Юлмухаметова Юлия Валерьевна
Россия, Уфа
УГАТУ
tarasova_yulya@mail.ru

Юмагулов Марат Гаязович
Россия, Уфа
Башкирский государственный университет
yum_mg@mail.ru

Юмагулова Юлия Александровна
Россия, Бирск
Бирская государственная социально-педагогическая академия
ym_julia@mail.ru

Ягудина Светлана Фирдаусовна
Россия, Москва
Московский Педагогический Государственный Университет
Svetlanayagudina@yandex.ru

Яковлев Андрей Александрович
Россия, Уфа
ИМВЦ УНЦ РАН
yakovlevandrey@yandex.ru

Янгубаева Марина Валерьевна
Россия, Бирск
Бирская государственная социально-педагогическая академия
marmarishka@list.ru

Ahmet Ocak AKDEMİR
Turkey, Ağrı
Ağrı İbrahim Çeçen University
ahmetakdemir@agri.edu.tr

Alper EKİNCİ
Turkey, Ağrı
Ağrı İbrahim Çeçen University

M. Emin ÖZDEMİR
Turkey, Erzurum
Ataturk University

Erhan SET
Turkey, Düzce
Düzce University