Лекция №6

Пропускная способность каналов связи

Скорость передачи информации. Пропускная способность, формула Шеннона. Каналы связи: детерминистический, равномерный, двоичный.

1. Рассмотрим непрерывное сообщение x(t), наблюдаемый сигнал y(t) и гауссовский шум ξ(t) через отсчеты $\{x(i\Delta t)\}$, $\{y(i\Delta t)\}$, $\{\xi(i\Delta t)\}$. Примем обозначения для N+1 – мерных векторов – столбцов (со знаком T)

$$X = X(i) = [x_0, .. x_N]^T, Y = Y(i) = [y_0, .. y_N]^T.$$

После этого информация сообщения X при наблюдении Y определяется как

$$I(X \to Y) = S(Y) - S(Y/X) =$$
$$= -\int ... \int \rho(Y) ln\rho(Y) dy_0 ... dy_N + \int ... \int \rho(X,Y) ln\rho(Y/X) dx_0 ... dx_N ... dy_0 ... dy_N. \quad (1)$$

Условная энтропия $S(Y/X)$ учитывает память источника.

Многомерность интегралов обусловлено тем, что при наличии шума каждый отсчет может иметь множество значений.

Количество информации одного отсчета (символа):

$$R = \lim_{N\to\infty} I(X \to Y)/(N+1). \quad (2)$$

Пропускной способностью называется максимальная скорость передачи информации:

$$C = R_{max} = \lim_{N\to\infty} max\ I(X \to Y)/(N+1), \frac{бит}{символ}. \quad (3)$$

Модель отсчетов наблюдаемого сигнала представим в виде

$$y(i)=x(i)+\xi(i),\ Y(i)=X(i)+\Xi(i), \quad (4)$$

где Ξ(i)= $[\xi_0, .. \xi_N]^T$ - (N+1) – мерный вектор – столбец отсчетов гауссовского шума.

Поскольку X(i), Ξ(i) – гауссовские величины, то Y(i) тоже будет гауссовским с плотностью вероятности:

$$\rho(Y)=(2\pi)^{\frac{(N+1)}{2}} det^{-\frac{1}{2}} \|V_Y\| \exp\left(-\frac{1}{2} Y^T V_Y Y\right),$$

$$V_Y = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 + \sigma_\xi^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \sigma_X^2 + \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $det\|V_Y\| = (N+1)\ (\sigma_X^2 + \sigma_\xi^2)$ - определитель матрицы V_Y, σ_X^2, σ_Y^2 - дисперсии сигнала и шума.

Аналогично определяется условная плотность вероятности ρ(Y/X):

$$\rho(Y/X)=(2\pi)^{-\frac{(N+1)}{2}} det^{-\frac{1}{2}}\|V_\xi\| \exp\left[-\frac{1}{2}(Y-X)^T Y_\xi^{-1}(Y-X)\right],$$

$$V_\xi = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

где V_ξ - (N+1)(N+1) – мерная корреляционная диагональная матрица.

Подставляя формулы (5), (6) в формулу (1) и вычислив интегралы типа Пуассона, учитывая нормировку суммы вероятностей на единицу, получим

$$C = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sigma_X^2}{\sigma_\xi^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{P_X}{P_\xi}\right), \qquad (7)$$

где P_X, P_ξ – средняя мощность сигнала и помехи соответственно.

Максимальная скорость передачи символов для одномерных сигналов $B_{max} = B_1 = 2\Delta f$. Пропускная способность для полосы частот Δf равна:

$$C_{\Delta f} = R_{\Delta f max} = 2\Delta f c = \Delta f ln\left(1+\frac{P_X}{P_\xi}\right). \qquad (8)$$

Формула (8) называется формулой Шеннона.

Если принять $P_\xi = \Xi_0 \Delta f$, где Ξ_0 - спектр мощности шума, то при $\Delta f \to \infty$ имеем

$$\lim_{\Delta f\to\infty} C_{\Delta f} = \frac{P_X}{\Xi_0}. \qquad (9)$$

2. Примеры определения пропускной способности конкретных каналов связи.

<u>Канал без потерь.</u> Пусть канал не имеет шума, наоборот, число состояний приемника y_i превосходит число состояний передатчика x_i. Примем матрицу, элементы которой описывают схему канала связи ($X \to Y$):

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	1/8	3/8	1/2	0	0	0
x_2	0	0	0	1/3	1/3	0
x_3	0	0	0	0	0	1

В каждом столбце имеется только один ненулевой элемент, следовательно, при любом принятом y_i можно достоверно восстановить, какой сигнал x_i был передан. Условная вероятность $P(x_i/y_j)$ по всем значениям y_i равна либо единице, либо нулю:

$$P(x_i) = \sum_j P(x_i/y_j) = \begin{cases} 1, \text{если } i = 1, 2, 3 \ldots \\ 0, \text{если } i \neq 1,2,3 \ldots \end{cases} . \quad (10)$$

Если фиксировать значение y_i (выбрать апостериорную вероятность при отсутствии шума) результат (10) остается в силе, т.к. $i_{max} < j_{max}$. Поэтому

$$S(Y/X)=0,\ \ I(X \to Y)= S(X) - S(X/Y)= S(X)>0, \quad (11)$$

где $S(X)$ – энтропия передатчика, состояние которого менее определено. После этого

$$\mathrm{C} = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{3} = \log_2 3\,, \quad (12)$$

так как число состоянии X равно 3 (X=[x_1 , x_2 , x_3]).

Детерминистический канал

В этом канале число состояний передатчика x_i больше состояний приемника y_j. Матрица такого канала имеет в каждой строке только один ненулевой – источник элемент x_i и он должен быть равен единице:

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0
x_2	1	0	0
x_3	1	0	0
x_4	0	1	0
x_5	0	1	0
x_6	0	0	1

В этом случае передача информации описывается как

$$I(X \to Y)= S(X) - S(X/Y)>0, \quad (13)$$

т.к. неопределенность больше у состояний приемника, число известных состояний y_j меньше чем у x_i.
$S(X/Y)$=0 из- за $P(y_j\ /x_i)$=0; 1. Поэтому

$$C = max S(Y) = \log_2 3. \quad (14)$$

Темы самостоятельных работ

1. Вывести формулу Шеннона по вышеуказанному алгоритму.
2. Определить пропускную способность равномерного канала.
3. Определить пропускную способность двоичного симметричного канала.

Литература [ ]