Министерство образования и науки российской федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ

Лекция №1

по курсу «Математические основы обработки сигналов»

Составитель: Уваров А.А.

ассистент кафедры ИИТ

Томск 2013

ВВЕДЕНИЕ

Прежде всего необходимо понять почему теория **сигналов** и их **обработка** так важны для инженера в области приборостроения. Все приборы работают созданы для работы с сигналами и их обработки. Например, для вольтметра сигналом является напряжение на его щупах, для телевизора сигналом является телевизионный сигнал, для акустического дефектоскопа сигналом является звук отраженный от исследуемого объекта.

Сигналы могут разными — электрическими, акустическими, гидравлическими и т.д. Одно общее свойство, присущее всем сигналам — это способность к переносу **информации**.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Тогда, перед тем, как рассмотреть понятие сигнала, предварительно следует дать понятие термину «**информация**», а также термину «**данные**», которые часто путают.

Информация — совокупность каких-либо сведений, содержащих знания об изучаемом процессе или явлении.

Данные – это совокупность фактов, результатов наблюдений, измерения каких-либо физических свойств объектов, явлений или процессов материального мира.

Таким образом, данные являются лишь исходным «материалом» для получения информации. Информация, содержащаяся в данных, может быть скрыта от исследователя большим количеством шумов или в принципе быть ненаблюдаемой без специальных преобразований (например, информация о спектральном составе).

Пример. *При измерении расхода жидкости расходомером, многократные замеры мгновенного расхода являются лишь исходными («сырыми») данными, после усреднения которых получается информация о истинном расходе.*

Сигнал – это физическая величина, которая содержит в себе определенную информацию и пригодная для передачи и обработки.

Примеры сигналов*: электромагнитные волны в радиосвязи; изменение электрического напряжения в электронике; звуковая волна в акустике; механические колебания земной коры в сейсмологии; изменение давления в гидравлической системе; последовательность дискретных отсчетов в ЭВМ*.

Таким образом, между понятиями «сигнал», «информация» и «данные» можно установить следующее соотношение: сигнал несут в себе информацию, представленную в виде «сырых» данных. Другими словами, получая значения сигнала, исследователь получает данные, из которых путем обработки извлекается информация.

Таким образом, можно дать наиболее простое определение.

Обработка сигналов — это преобразование сигналов. Кроме того, это также и область науки и техники, в которой изучаются сигналы и методы их преобразования.

В свою очередь, обработка сигналов требует их математического описания. И так как большинство сигналов представляют собой физические величины, изменяющиеся во времени, наиболее удобным является их представление в виде математических функций времени $s(t)$. Следовательно и все математические операции, применяющиеся к одномерным функциям, применимы в реальным сигналам, хотя и с некоторыми оговорками.

Целями обработки и анализа сигналов обычно являются:

- Определение или оценка числовых параметров сигналов (энергия, средняя мощность, среднее квадратическое значение и пр.);
- Изучение изменения параметров сигналов во времени;
- Разложение сигналов на элементарные составляющие для сравнения свойств различных сигналов;
- Сравнение степени близости, "похожести", "родственности" различных сигналов, в том числе с определенными количественными оценками.

Математический аппарат анализа сигналов весьма обширен, и широко применяется на практике во всех без исключения областях науки и техники.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

2.1 По размерности

Размерность сигнала – это число независимых переменных, по которым определяется его значение.

Большинство сигналов, рассматриваемых в теории, являются **одномерными** и имеют вид *s(x)*. Например, зависимость напряжения от времени, амплитуды от частоты т.д.

Кроме того существует также достаточно большой класс **двумерных** сигналов вида *s(x,y)*. Классическим примером двумерного сигнала является любое плоское изображение или распределение какой-либо величины по географическим координатам.

Также иногда встречаются **трехмерные** сигналы, чаще всего, когда речь идет об определении значения какой-либо величины в разных точках пространства, например траектории движения самолета или космического корабля.

Теория допускает существование также **многомерных** сигналов, а кроме того расширяет многие методы обработки на этот случай. Но в практической деятельности, такие случаи встречаются редко.

2.2 По непрерывности

Любой сигнал определенные возможные значения на определенном пространстве значений независимой переменной. Как значения, так и независимая переменная могут быть либо непрерывными, либо дискретными.

Непрерывность — свойство, заключающееся в постепенном, плавном, без скачков изменении значений какой-либо переменной, функции или другого математического объекта.

Дискретность — свойство, противопоставляемое непрерывности, прерывность.

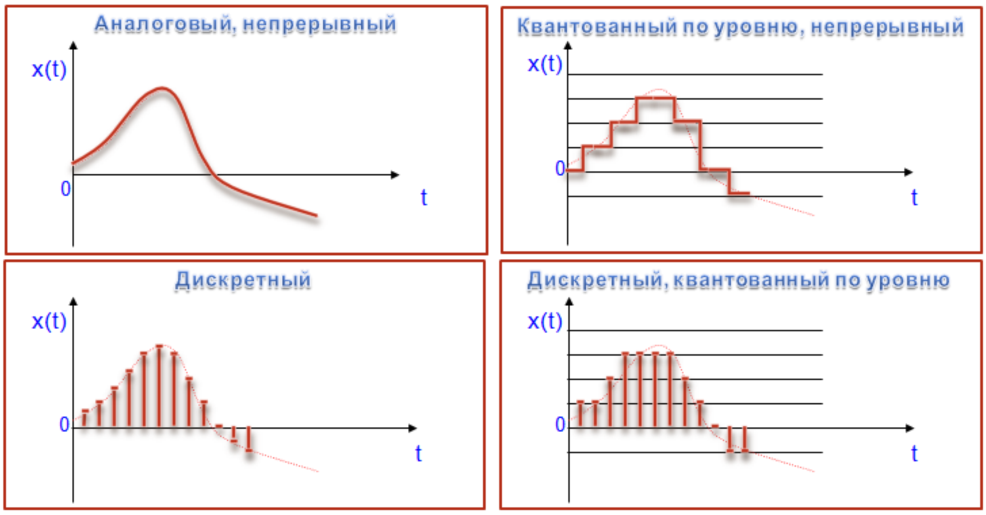
Аналоговый (непрерывный) сигнал – сигнал, значения и независимая переменная которого являются непрерывными множествами возможных значений.

Дискретный сигнал – сигнал, независимая переменная которого определена на дискретном множестве, а значения являются непрерывными.

Отсчет сигнала — значение сигнала, взятое в отдельный момент дискретного времени.

Квантованный сигнал – сигнал, значения которого дискретны, а независимая переменная непрерывна.

Цифровой сигнал — сигнал данных, у которого каждый из представляющих параметров описывается функцией дискретного времени и конечным множеством возможных значений.



Соответственно, можно определить следующие преобразования сигналов:

Дискретизация — процесс преобразования аналогового сигнала в дискретный.

Квантование — преобразование аналогового сигнала в квантованный.

Оцифровка — преобразование аналогового сигнала в цифровой.

Восстановление — преобразование сигнала из дискретного или цифрового в аналоговый.

2.3 По виду математической модели

Поскольку сигналы порождаются физическими процессами, а те в свою очередь могут иметь как случайный, так и предсказуемый характер, сигналы также могут быть разного типа. Соответственно отличаются и модели, создаваемые для корректного анализа сигнала.

Если математическая модель позволяет точно определить значение сигнала в любой точке, такая модель и такой сигнал называются **детерминированными**. Например, при анализе напряжения в электрической сети имеет смысл использовать модель вида

$$s(t) = \sin(\omega t + \varphi).$$

Если сигнал носит случайный характер, то говорят о наличии **случайного (стохастического)** сигнала. Математическая модель в таком случае задается в виде закона распределения вероятностей, корреляционной функции, спектральной плотности энергии и др.

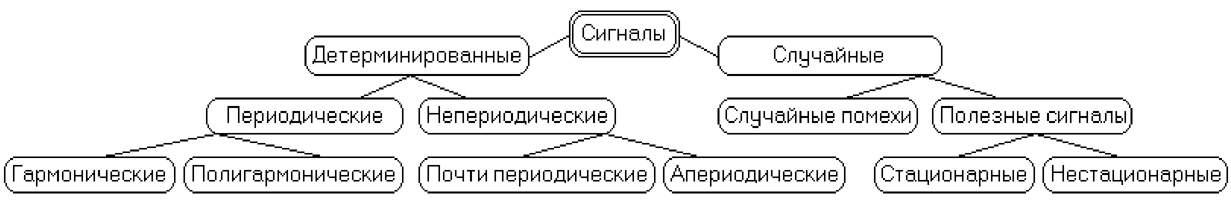


Рис. 2. Классификация сигналов.

2.3.1. Детерминированные сигналы

Детерминированные сигналы также дополнительно классифицируются на периодические и непериодические.

К множеству периодических относят гармонические и полигармонические сигналы. Для периодических сигналов выполняется общее условие $s(t) = s(t + kT)$, где $k = 1, 2, 3, ...$ - любое целое число (из множества целых чисел от $-\infty$ до ∞), T - период, являющийся конечным отрезком независимой переменной.

Гармонические сигналы (синусоидальные), описываются следующими формулами:

$$s(t) = A\cdot sin\ (2\omega f_o t+\phi) = A\cdot sin\ (\omega_o t+\phi), \quad s(t) = A\cdot cos(\omega_o t+\varphi),$$

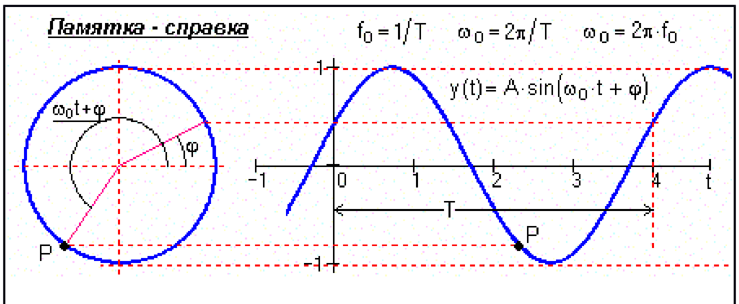


Рис. 3. Гармонический сигнал амплитуд

где A, f_o, ω_o, ϕ, φ - постоянные величины, которые могут исполнять роль информационных параметров сигнала: A - амплитуда сигнала, f_o - циклическая частота в герцах, $\omega_o = 2\pi f_o$ - угловая частота в радианах, φ и ϕ- начальные фазовые углы в радианах. Период одного колебания $T = 1/f_o = 2\pi/\omega_o$. При $\varphi = \phi-\pi/2$ синусные и косинусные функции описывают один и тот же сигнал.

Полигармонические сигналы составляют наиболее широко распространенную группу периодических сигналов и описываются суммой гармонических колебаний:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N} A_n \sin\ (2\omega f_n t+\varphi_n) \equiv \sum_{n=0}^{N} A_n \sin\ (2\omega B_n f_p t+\varphi_n), \quad B_n \in I, \qquad (1.1.2)$$

или непосредственно функцией $s(t) = y(t \pm kT_p)$, $k = 1,2,3,...$, где T_p - период одного полного колебания сигнала $y(t)$, заданного на одном периоде. Значение $f_p = 1/T_p$ называют фундаментальной частотой колебаний.

Рис. 4. Полигармонический сигнал

Полигармонические сигналы представляют собой сумму определенной постоянной составляющей (f_o=0) и произвольного (в пределе - бесконечного) числа гармонических составляющих с произвольными значениями амплитуд A_n и фаз φ_n, с частотами, кратными фундаментальной частоте f_p. Другими словами, на периоде фундаментальной частоты f_p, которая равна или кратно меньше минимальной частоты гармоник, укладывается кратное число периодов всех гармоник, что и создает периодичность повторения сигнала.

2.3.2. Непериодические сигналы

К непериодическим сигналам относят почти периодические и апериодические сигналы.

Почти периодические сигналы близки по своей форме к полигармоническим. Они также представляют собой сумму двух и более гармонических сигналов (в пределе – до бесконечности), но не с кратными, а с произвольными частотами, отношения которых (хотя бы двух частот минимум) не относятся к рациональным числам, вследствие чего фундаментальный период суммарных колебаний бесконечно велик.

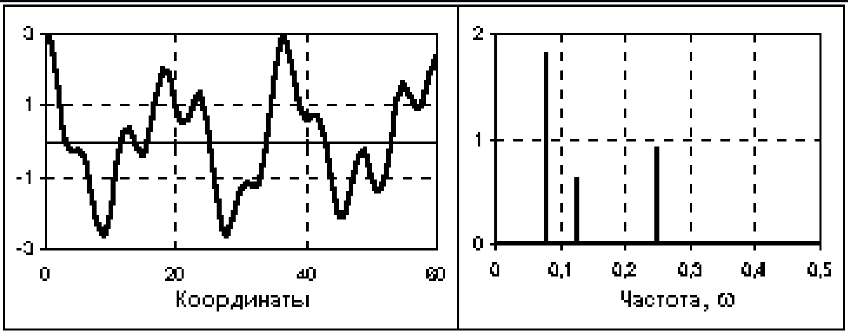


Рис. 6. Почти периодический сигнал и спектр его амплитуд

Так, например, сумма двух гармоник с частотами $2f_0$ и $3.5f_0$ дает периодический сигнал (2/3.5 – рациональное число) с фундаментальной частотой $0.5f_0$, на одном периоде которой будут укладываться 4 периода первой гармоники и 7 периодов второй. Но если значение частоты второй гармоники заменить значением $\sqrt{12}\,f_0$, то сигнал перейдет в разряд непериодических, поскольку отношение $2/\sqrt{12}$ не относится к числу рациональных чисел. Как правило, почти периодические сигналы порождаются физическими процессами, не связанными между собой. Математическое отображение сигналов тождественно полигармоническим сигналам (сумма гармоник), а частотный спектр также дискретен (рис. 6).

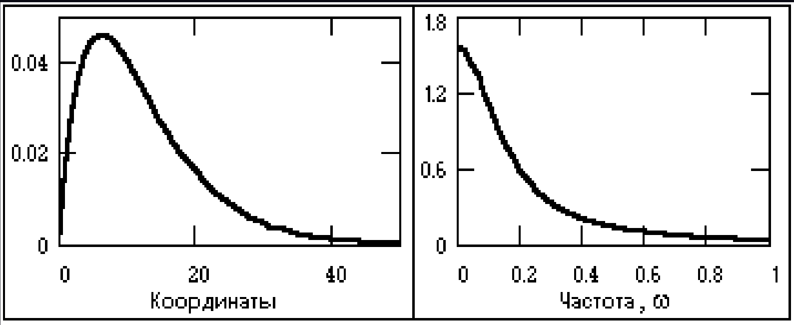


Рис. 7. Апериодический сигнал и модуль спектра

Апериодические сигналы составляют основную группу непериодических сигналов и задаются произвольными функциями времени. На рис. 6 показан пример апериодического сигнала, заданного формулой на интервале (0, ∞):

$$s(t) = \exp(-a \cdot t) - \exp(-b \cdot t),$$

где a и b – константы, в данном случае a = 0.15, b = 0.17.

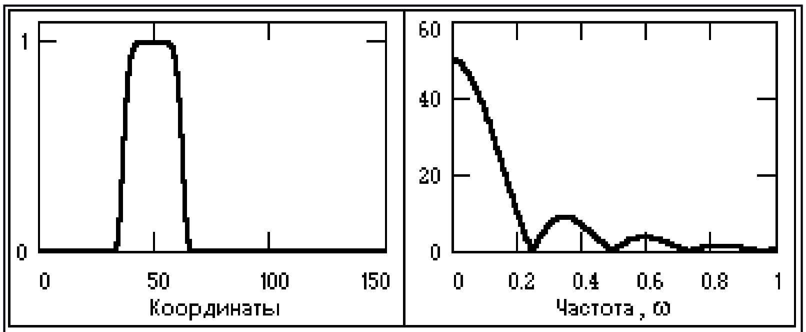


Рис. 7. Импульсный сигнал и модуль спектра

К апериодическим сигналам относятся также **импульсные сигналы**, которые в радиотехнике и в отраслях, широко ее использующих, часто рассматривают в виде отдельного класса сигналов. Импульсы представляют собой сигналы определенной и достаточно простой формы, существующие в пределах конечных временных интервалов. Сигнал, приведенный на рис. 7, относится к числу импульсных.

2.4. Шумы и помехи

Отдельную категорию сигналов составляют **шумы** и **помехи** – сигналы, искажающие интересующий сигнал. Строго говоря, они не являются сигналами в исходном определении, т.к. не несут никакой полезной информации. Но в то же время, часто их называют сигналами в том смысле, что они имеют зависимость от той же независимой переменной, что и основной сигнал, и также порождаются физическими процессами. Поэтому, чтобы не создавать путаницы, часто говорят о «**полезном сигнале**» и «**шумах и помехах**».

Однако существуют случаи, когда они меняются местами и помехи становятся полезным сигналом. Например, при определении характеристик шума для эффективной борьбы с ним.

Помехами называют сторонние (т.е. внешние по отношению к системе) воздействия, искажающие полезный сигнал. Классическими примерами помех являются сетевая помеха частотой 50 Гц и электромагнитная наводка (помеха), являющаяся результатом воздействия различных электромагнитных колебаний на систему.

Под шумом зачастую понимают искажения, порождаемые самой системой и носящие случайный характер. Например, существует тепловой шум резисторов и фликкер-шум транзисторов. Шумы, встречающиеся в реальной жизни, часто имеют схожие характеристики, поэтому можно выделить ряд типовых шумов.

Существует и такое понятие, как цветные шумы. Эти шумы названы различными цветами спектра по аналогии со светом видимого спектра.

«Белый» шум – случайный сигнал, значения которого определяются нормальным (Гаусовским) распределением. **Пример**: тепловой (джонсовский) шум

Также существуют розовый, красный (броуновский, коричневый), синий, фиолетовый, серый, оранжевый, зеленый и черный шумы.

3. ПАРАМЕТРЫ СИГНАЛОВ

Длительность сигнала T определяет интервал времени, в течение которого сигнал существует (отличен от нуля);

Максимальное и минимальное значения показывают диапазон изменения значений сигнала.

Динамический диапазон — логарифм отношения наибольшего возможного значения какой-либо величины к наименьшему возможному:

$$D = 10lgP_{max}/P_{min}$$

Ширина спектра сигнала — полоса частот, в пределах которой сосредоточена основная энергия сигнала;

Отношение сигнал/шум равно отношению мощности полезного сигнала к мощности шума;

Частота дискретизации дискретного сигнала — частота следования отсчетов.

Период дискретизации — расстояние между двумя соседними отсчетами.

Текущее среднее значение за определенное время:

$$(1/T)\int_{t}^{t+T} s(t)\,dt.$$

Постоянная составляющая:

$$(1/T)\int_{0}^{T} s(t)\,dt.$$

Среднее выпрямленное значение:

$$(1/T)\int_{0}^{T} |s(t)|\,dt.$$

Среднее квадратичное значение:

$$\sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)^2\,dt}.$$

3.1. Энергетические параметры

В теории сигналов широко используются энергетические характеристики. Пусть сигнал представляет изменение напряжения $U(t)$ или тока $i(t)$. Тогда на резисторе с сопротивлением R выделяется мгновенная (текущая) мощность

$$p(t) = \frac{U^2(t)}{R} = R \cdot i^2(t)$$

Если мгновенная мощность сигнала используется для сравнения различных сигналов, то можно принять R = 1 Ом («нормировать» мощность). Тогда выражения для мгновенной мощности имеют одинаковый вид. Поэтому в теории сигналов при нято определять мгновенную мощность следующим образом:

$$p(t) = x^2(t)$$

Энергия и средняя мощность сигнала, заданного на интервале [t 1 , t2] , соответственно определяются выражениями:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt$$

Если сигнал определен на интервале 0 < t < ∞ , то средняя мощность

$$P_{\text{ср}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\, dt$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А.В. Лекции по теории сигналов и ЦОС http://prodav.narod.ru/
2. Вадутов О.С. http://portal.tpu.ru/SHARED/v/VOS
3. А. Оппенгейм Цифровая обработка сигналов
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов
5. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB обработка сигналов и изображений
6. Юкио Сато Обработка сигналов. Первое знакомство
7. Баскаков С.И. Радиотехнические сигналы и цепи
8. Гоноровский И.С. Радиотехнические сигналы и цепи