Лекция №6. Введение в анализ. Функция. Предел функции

Определение. Множеством называется совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы. Объекты, входящие в данное множество, будем называть элементами множества.

Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A (принадлежит множеству A); в противном случае пишут $a \in A$ (или $a \bar{\in} A$). Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$. Запись $A \subset B$ (A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B, в этом случае множество A называется подмножеством множества B. Множества A и B называются равными $(A = B)$, если $A \subset B$ и $B \subset A$, другими словами, множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Символика математической логики. Для сокращения записи в дальнейшем будем употреблять некоторые основные логические символы, или кванторы. Пусть α и β некоторые предложения.

1)Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: «из α следует β», «⇒» символ импликации.

2) Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает «α и β эквивалентны» т.е. что, из $\alpha \Rightarrow \beta$ и из $\beta \Rightarrow a$. «⇔»– символ эквивалентности.

Любую теорему в математике можно записать в виде $\alpha \Rightarrow \beta$ или в виде $\alpha \Leftrightarrow \beta$, α – условия теоремы, а β – ее утверждение.

3) Знак «∀» означает: «каждый, любой, для каждого» и т. д. ∀– квантор общности. Например, $\forall x \in X \quad \alpha(x)$ означает: «для всякого элемента $x \in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$».

4) Знак «∃» означает «существует, найдется, имеется». «∃»– квантор существования. ∃ - перевернутая E - начальная буква слова «Existenz» - «существует». Например, $\exists x \in X \quad \alpha(x)$ означает: существует элемент $x \in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$. Если элемент x из X, для которого истинно утверждение $\alpha(x)$, не только существует, но и единствен, то пишут: $\exists x \in X \quad \alpha(x)$.

Отрезок, интервал, ограниченное множество. Введем следующие обозначения для подмножеств в R.

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$, называется отрезком (с концами a,b) или сегментом и обозначается так:

$[a,b]$, т.е. $[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$.

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется интервалом (с концами a,b) или открытом отрезком и обозначается так: a,b, т.е. $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$.

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$ или $a < x \le b$, обозначаются соответственно $[a,b)$, $(a,b]$ и называются полуоткрытыми отрезками или полуинтервалами. Первый, например, закрыт слева и открыт справа.

Отрезки, интервалы и полуинтервалы называются числовыми промежутками или просто промежутками.

Произвольный интервал (a,b), содержащий точку x_0 мы будем называть окрестностью точки x_0. В частности, интервал $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ называют ε - окрестностью точки x_0

$$U_{\varepsilon}(x_0)=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

Часто рассматривают множества, называемые бесконечными интервалами или полуинтервалами: 1) $(-\infty,+\infty)$, 2)$(-\infty,a]$, 3)$(-\infty,a)$, 4)$(a,+\infty)$, 5)$[a,+\infty)$.

Первые их них есть множество всех действительных чисел (действительная прямая), остальные состоят их всех чисел, для которых соответственно: 2) $x\le a$, 3) $x<a$, 4) $a<x$, 5) $a\le x$.

Если a и b конечны и $a<b$, то число $b-a$ называется длиной сегмента $[a,b]$ или интервала (a,b), или полуинтервала $(a,b]$, $[a,b)$.

Пусть X есть произвольное множество действительных чисел.

Говорят, что множество X ограничено сверху, если $\exists$ (действительное), число M такое, что $\forall x\in X: x\le M$.

Ограничено снизу, если $\exists$ число т такое, что $\forall x\in X: x\ge m$.

Ограничено, если оно ограничено как сверху, так и снизу. В противном случае, оно называется неограниченным.

Ясно, что множество X ограничено, если $\exists M>0:\forall x\in X\Rightarrow |x|\le M$, так как $(|x|\le M)\Leftrightarrow(-M\le x\le M)$.

Неограниченное множество X можно определить так: множество X неограниченно $\Leftrightarrow \forall M>0,\exists x_0\in X:|x_0|>M$.

Область значений переменной величины. Множество всех значений переменной величины составляет ее область значений. Областью значений переменной часто бывает интервал.

Последовательности. Предположим, что все значения, принимаемые переменной величиной x, можно пронумеровать с помощью всевозможных натуральных (целых положительных) чисел: $x_1, x_2,..., x_n,...$ причем значение с большим номером принимается после значения с меньшим номером: если $n<m$, то значение x_n предшествует значению x_m, в частности x_n предшествует x_{n+1}. В этом случае говорят, что переменная x пробегает последовательность значений $x_1, x_2,..., x_n,...$ или что имеется последовательность (или числовая последовательность). Числа $x_1, x_2,..., x_n,...$ называются членами последовательности: x_1 - первый член, x_2, - второй и т.д. Число x_n с произвольным номером n называется общим членом последовательности. Последовательность определена, если мы знаем закон, по которому для любого номера n образован соответствующий член x_n последовательности. Иными словами, если мы знаем закон зависимости

общего члена x_n от его номера n. Последовательность часто обозначают $\{x_n\}$ $(n=1,2,...)$.

Определение. Функцией f с областью определения D и областью значений E называется некоторое отображение из D в E, т. е. соответствие, при котором каждому элементу $x \in D$ сопоставляется единственный элемент $y = f(x) \in E$.

Для того чтобы функция была определена, надо знать: а) область определения; б) закон соответствия. Обычно функция задается аналитически - какой-нибудь формулой. Иногда закон соответствия задается разными формулами на разных участках ее области определения.

Возрастание и убывание функций на интервале. Функция $f(x)$ называется возрастающей на некотором интервале, если для любых двух значений аргумента, взятых на этом интервале, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция $f(x)$ называется убывающей на некотором интервале, если для любых двух значений аргумента, взятых на этом интервале, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Запишем эти определения с помощью логических символов - кванторов: для интервала $[a,b]$ $\forall x_1 x_2 \in [a,b]$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ - условие возрастания; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ - условие убывания.

Интервал, на котором функция возрастает или убывает, называется интервалом монотонности этой функции, а про функцию говорят, что она монотонна на этом интервале.

Четные и нечетные функции. Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D. Функция $y = f(x)$ называется четной, если выполняется условие

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$$

функция $f(x)$ называется нечетной, если

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$$

Период. Периодические функции. Число $l \neq 0$ называется периодом функции $f(x)$ с областью определения D, если

$$f(x+l) = f(x) \quad \forall x \in D$$

Функция $f(x)$, обладающая периодом, называется периодической. Условие предполагает, конечно, что наряду с любым $x \in D$ и $x + l \in D$.

Сложная функция (функция от функции). Пусть дана функция $y = f(x)$ от аргумента x, причем аргумент x, в свою очередь, является функцией от независимой переменной t: $y = f(x)$.

Возьмем какое-либо значение t. В силу функциональной зависимости x от t этому значению t отвечает определенное значение $x : x = \varphi(t)$. Полученному значению x, в свою очередь, отвечает определенное значение y: $y = f(x)$.

Получаем $y = F(t) = f(\varphi(t))$. Функция $F(t)$ называется сложной функцией от независимой переменной t или функцией от функции (функция f от функции φ). При этом функция $y = f(x)$ называется заданной или внешней функцией, а $x = \varphi(t)$- промежуточным аргументом. Функции f и φ называют еще составляющими для сложной функции F; говорят также, что F является суперпозицией функций f и φ. Чтобы образовать функцию от функции, нужно, чтобы область значений промежуточной переменной $x = \varphi(t)$ «укладывалась» в область определения заданной функции $y = f(x)$. В противном случае среди значений функции $x = \varphi(t)$ будут и такие, от которых значение функции $f(x)$ образовать нельзя. В таких случаях сложную функцию (или функцию от функции) можно задать только для тех значений независимой переменной t, для которых значения промежуточной переменной $x = \varphi(t)$ попадают в область определения внешней функции $y = f(x)$.

Обратная функция. Пусть на некотором интервале X задана функция $y = f(x)$, область значений которой обозначим Y. Согласно определению функции каждому значению $x \in X$ соответствует определенное значение $y = f(x)$, $y \in Y$. Если же интервал X является интервалом монотонности для $f(x)$, то и каждому значению $y \in Y$ отвечает одно вполне определенное значение $x \in X$, для которого $y = f(x)$ (рис.20). Таким образом, в этом случае функциональная зависимость между X и Y может рассматриваться и как функция $x = \varphi(y)$, т.е. y можно рассматривать как аргумент, а x - как функцию. У функции $x = \varphi(y)$ областью определения является Y, а областью значений - X. Функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ называются взаимно обратными $x = \varphi(y)$ обратная функция к функции $y = f(x)$; $y = f(x)$ - обратная функция к функции $x = \varphi(y)$. Уравнение $x = \varphi(y)$ получается в результате разрешения, если это возможно, уравнения $y = f(x)$ относительно переменной x.

Если f и φ - взаимно обратные функции, то имеют место тождества

$$f(\varphi(y)) \equiv y; \ \ \varphi(f(x)) \equiv x.$$

Графиком функции $x = \varphi(y)$ является та же линия, которая изображала функцию $y = f(x)$: ведь уравнение $x = \varphi(y)$ - просто иначе переписанное уравнение $y = f(x)$.

Неявные функции. Иногда функциональная зависимость величин y и x задается некоторым уравнением, связывающим x и y, но нерешенным ни относительно y, ни относительно x т.е. $F(x, y) = 0$.

Параметрическое задание функции. Кривые на плоскости часто задаются параметрическими уравнениями. В этих уравнениях координаты x и y точки на кривой выражены как функции третьего, вспомогательного переменного t (параметра), как правило $t \in R$.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$$

Это новый, иногда наиболее удобный, способ задать функциональную зависимость между x и y. Считаем, что функция $x=\varphi(y)$ имеет обратную: $t=\hat{O}(x)$. [т.е. решаем уравнение $x=\varphi(y)$ относительно t]. Поставив это во второе уравнение, получим:

$$y=\phi(\hat{O}(x))=f(x)$$

т.е. y есть функция от x (сложная функция).

Переменная величина x стремится к пределу a (a- постоянное число), если абсолютная величина $|x-a|$ разности между x и a становится в процессе изменения переменной величины сколь угодно малой.

То же самое определение можно сказать и другими словами.

Пределы

Определение. Постоянное число а называется **пределом переменной величины** x, если $|x-a|$ - абсолютная величина разности между x и a становится в процессе изменения переменной величины х сколь угодно малой.

Тот факт, что число a, является пределом переменной величины, записывается следующим образом: $a=\lim x$ ($\lim$ - первые буквы слова limes - предел) или $x\to a$.

Уточним, что следует понимать под словами «величина $|x-a|$ становится сколь угодно малой», имеющимися в определении предела. Зададимся произвольным положительным числом $\varepsilon(\varepsilon>0)$, тогда, если, начиная с некоторого момента в изменении переменной величины x, значения $|x-a|$ сделаются, и будут становиться меньше, чем это $\varepsilon:|x-a|<\varepsilon$.

Переменная величина x стремится к пределу a, если для любого положительного ε. начиная с некоторого момента в изменении переменной x, выполняется неравенство $|x-a|<\varepsilon$.

Определение предела имеет простой геометрический смысл: неравенство $|x-a|<\varepsilon$ означает, что x находится в ε - окрестности точки a, т.е. в интервале $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. Таким образом, определение предела в геометрической форме: число a является пределом переменной величины x, если для любой (произвольно малой) ε - окрестности точки a можно указать такой момент в изменении переменной x начиная с которого все ее значения попадают в указанную ε - окрестность точки а.

Определение. Числовой последовательностью называется действительная функция натурального аргумента, т. е. функция, у которой $D=N$ и $E\subset R$.

Она обозначается символом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $n\in N$, или короче, $\{x_n\}$. Число x_n, зависящее от n, называется n-ым членом последовательности. Расставив значения последовательности по порядку номеров, получаем, что последовательность можно отождествить со счетным набором действительных чисел, т. е. $\{x_n\}=\{x_1,x_2,x_3,...\}=\{x_n: n\in N\}$.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число n_0, что все числа x_n, у которых $n \geq n_0$, удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Соответствующее обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0):(\forall n \geq n_0) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon .$$

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ можно также записывать в виде $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ или $x_n \in U_z(a)$. В этих записях подчеркнуто, что величина x_n становится сколь угодно мало отличимой от a, когда номер члена n неограниченно возрастает. Геометрически определение предела последовательности означает следующее: для сколь угодно малой ε-окрестности числа a найдется такой номер N, что все члены последовательности с большими, чем N, номерами попадают в эту окрестность, вне окрестности оказывается лишь конечное число начальных членов последовательности. Это все или некоторые из членов $x_1, x_2, ..., x_N$. Число N в нашем определении зависит от $\varepsilon : N = N(\varepsilon)$. Как говорилось ранее, определение предела следует понимать в развитии, в динамике, в движении: если мы возьмем другое, меньшее значение для ε, например $\varepsilon_1 < \varepsilon$ то найдется, вообще говоря, другой номер $N_x > N$, такой, что неравенство $|x_n - a| < \varepsilon_1$, выполняется при всех $n > N_1$. Будем записывать определение предела с помощью логических символов (кванторов). Определение предела последовательности с помощью кванторов выглядит так:

$\lim x_n = a \Leftrightarrow (\forall \underset{n\to\infty}{\varepsilon > 0})(\exists N) = N(\varepsilon)$: $\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ **дадим определения пределов функции при** $x \to a,\ x \to a-,\ x \to a+,$ $x \to +\infty,\ x \to -\infty$**,** $x \to \infty.$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, этой точки.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $\mathrm{x} \to \mathrm{a}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое δ>0, что для всех $\mathrm{x} \in \mathrm{U}_\xi(\mathrm{a}) \setminus \{\mathrm{a}\}$ выполняется неравенство $|\mathrm{f(x)} - \mathrm{A}| < \varepsilon$, т. е.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta) > 0 : (\forall \mathrm{x} \in \mathrm{U}_\delta(\mathrm{a}) \setminus \{\mathrm{a}\}) \Rightarrow |\mathrm{f(x)} - \mathrm{A}| < \varepsilon .$$

(Обозначается $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} \mathrm{f(x)} = \mathrm{A}$ или $f(x) \to A$ при $(x \to a)$.

Определение. Число A называется пределом слева функции $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ при $\mathrm{x} \to \mathrm{a}$, если $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0):(\forall \mathrm{x} \in (\mathrm{a} - \delta, \mathrm{a})) \Rightarrow |\mathrm{f(x)} - \mathrm{A}| < \delta$. (Обозначается $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}-} \mathrm{f(x)} = \mathrm{A}$ или $\mathrm{f(a-0)} = \mathrm{A}$).

Определение. Число А называется пределом справа функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+\delta)) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. (Обозначается $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$ или $f(a+0) = A$).

Теорема. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют пределы $\lim\limits_{x \to a-} f(x), \lim\limits_{x \to a+} f(x)$, и они равны между собой.

Определение. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для каждого ε>0 найдётся такое число N, что при любом $x > N$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N) : (\forall x > N) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. (Обозначается $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$).

Определение. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : (\forall x : x < -N) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon)$. (Обозначается $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A)$.

Определение. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N) : (\forall x : |x| > N) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon)$. (Обозначается $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$).

Последнее определение подразумевает, что $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(N, +\infty)$, пятое определение подразумевает, что она определена в интервале $(-\infty, -N)$, а из шестого определения следует, что она определена при $x > N$ и $x < -N$, т. е. в промежутках $(-\infty, -N) \cup (N, +\infty)$.

Теорема. Предел $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ и они равны между собой.

Свойства функций и последовательностей, имеющих предел. Рассматриваемые ниже свойства справедливы для всех видов пределов функций и пределов последовательности. Однако для краткости будем формулировать их для одного предела (при $x \to a$).

1) Предел постоянной функции (или последовательности) равен этой постоянной, т.е.

$$\lim_{x \to a} C = C.$$

2) Если предел функции (последовательности) существует, то он единствен.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху в промежутке Δ, если найдется такое число C, что для всех x принадлежащих Δ, $f(x) \le C$. Если $f(x) \ge C \forall x \in \Delta$, то такая функция называется ограниченной снизу в Δ.

Функция, ограниченная сверху и снизу в Δ, называется ограниченной в Δ. Если Δ не упоминается, то подразумевается, что $\Delta = R$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной (сверху, снизу), если найдётся такое C, что для всех $n \in N$, $-C \le x_n \le C$, (или $x_n \le C$, или $x_n \ge -C$).

Определение. Функция $y = f(x)$ называется неубывающей (возрастающей) в интервале (a, b), если для любых $x_1 < x_2$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$. Если $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$, имеет место $f(x_1) \ge f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, то такая функция называется невозрастающей (убывающей) в (a, b). Такие функции называют монотонными на $(a; b)$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если для любых $n_1 < n_2, n_1, n_2 \in N$ выполняется $x_{n_1} \le x_{n_2} (x_{n_1} \ge x_{n_2})$.

Теорема. Пусть функция монотонно возрастает (убывает) на интервале (a, b) и ограничена сверху (снизу) на этом интервале числом C, тогда существует

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = C \quad \left(\lim_{x \to a+0} f(x) = A\right) \text{ и } \quad A \le C (A \ge C) .$$

Здесь число b может быть равным $+\infty$, тогда рассматривается $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то существует $\lim_{n \to +\infty} x_n = A$ и число C, что $A \le C$ $(A \ge C)$.

Аналогичное утверждение можно сформулировать для $\lim_{x \to a+} f(x)$ и $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Теорема. Пусть в некоторой окрестности точки a, кроме этой точки, для функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ выполняется соотношение $f(x) \le g(x) \le h(x)$ и пусть пределы $\lim_{x \to a} f(x)$ и $\lim_{x \to a} h(x)$ существуют и равны между собой, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$. Тогда $\lim_{x \to a} g(x)$ также существует и равен A.

Определение. Функция $y = \alpha(x)$ называется **бесконечно малой** (б.м.) при $x \to a$, если $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$ или $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$.

Теорема 1. Пусть $\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_n(x)$ - б.м. при $x \to a$, тогда их сумма $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \cdots + \alpha_n(x)$, также является б.м. при $x \to a$.

Теорема 2. Пусть $\alpha(x)$ б.м. при $x \to a$, а $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки а, тогда $\alpha(x) \cdot f(x)$ является б.м. при $x \to a$.

Теорема 3. Предел $\lim_{x \to a} f(x)$ равен числу A в том и только в том случае, когда $(f(x) - A)$ является б.м. при $x \to a$.

Основные теоремы о пределах. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ - функции, для которых существуют пределы при $x \to a$ (или при $x \to \infty$): $\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to a} g(x) = B$. Сформулируем основные теоремы о пределах.

1. Функция не может иметь более одного предела.

2. Предел алгебраической суммы, то тогда $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)$ существует и равен $A\pm B$.

3. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ существуют, то тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ существует и равен $A\cdot B$.

4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ и $B\neq 0$ существуют, то тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен $\dfrac{A}{B}$.

Первый замечательный предел. Второй замечательный предел

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Доказательство. Пусть $x\to 0+$ и $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим круг единичного радиуса с центральным углом $\angle AOB=x$. Из рис.34 непосредственно видно: $OA=OB=1, BC=\mathrm{tg}x$. $S_{\Delta AOB}<S$ сектора $AOB<S_{\Delta OB}$.

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx\Rightarrow \sin x<x<tgx\Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}\Rightarrow \cos x<\frac{\sin x}{x}<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x\Rightarrow \left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<2\sin^2\frac{x}{2}<2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\to 0$$

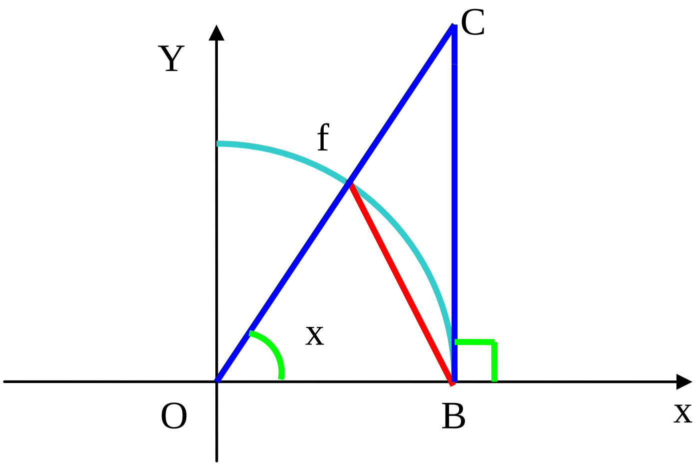
$$1-\frac{\sin x}{x}=\alpha(x)\Rightarrow \frac{\sin x}{x}=1-\alpha(x)\Rightarrow \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Так как функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ чётная, то

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\left|-x=y\right|=\lim_{y\to 0+}\frac{\sin y}{y}=1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 2x}{1\cdot 3x}=\frac{2}{3}$$



Следствия из первого замечательного предела: а) $\lim\limits_{x\to 0} tg = 1$; б) $\lim\limits_{x\to 0} arc\sin x = 1$.

Второй замечательный предел

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \text{в) } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Здесь e ≈ 2,718282… – иррациональное число. Эта последовательность $\{x_n\}$ обладает двумя свойствами:

а) Она монотонно возрастает, так как в x_{n+1} на одно слагаемое больше, и каждое слагаемое в x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в $\{x_n\}$.

б) $$\mathrm{x_n} < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} < 3,$$ т.е. x_n ограничена сверху числом 3. Следовательно, по свойству 4 пределов $2 < \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{x_n} < 3$.

Пример. Вычислим предел, следствия из первого замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x+3}-1\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1-2x-3}{2x+3}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2x+3}(3x+2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x-4}{2x+3}} = e^{-3}.$$

Основная литература**:** [2] Глава 1 § 1.1-1.11 стр. 9-31

Дополнительная литература: [20] Глава 2 § 2.1-2.12 стр. 34-64

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение функции. Что называется областью определения функции?
2. Какая функция называется элементарной, сложной? Приведите примеры.
3. Сформулируйте определения предела последовательности, предела функции при стремлении аргумента к некоторому конечному пределу и предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.
4. Основные теоремы о пределах функций.