

### 3.6. Классическая теория дисперсии света

#### 3.6.1. Дисперсия.

*Дисперсия* – зависимость показателя преломления и, следовательно, скорости распространения электромагнитных волн от длины волны. Влияние дисперсии проявляется лишь в распространении некогерентных волн. Дисперсия является следствием зависимости поляризуемости атомов и молекул от частоты падающего излучения.

Ранее мы получали формулу Релея (см Главу 1, §1.8, (1.8.9)):

$$v_{gp} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad (3.6.1)$$

где фазовая скорость равна  $v = \frac{\omega}{k}$ , а групповая -  $v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$ .

1) Если  $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ , то  $v_{gp} = v$  и в среде нет дисперсии.

2) Если  $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ , то  $v_{gp} < v$ , при этом  $\frac{\partial v}{\partial \lambda} = -\frac{c}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \lambda}$  и  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$ .

Это *нормальная дисперсия*.

3) Если  $\frac{dv}{d\lambda} < 0$ , то  $v_{gp} > v$ , и  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0$  - это *аномальная дисперсия*.



Все среды, за исключением абсолютного вакуума, обладают дисперсией. Даже в межзвездном пространстве обнаружена дисперсия.

Теория Максвелла не содержит атомных констант и не дает объяснения дисперсии, т.е. она не дает зависимости  $\epsilon = \epsilon(\lambda)$ . Дисперсия света возникает в результате **вынужденных колебаний электронов и ионов** под воздействием переменного поля электромагнитной волны. Поэтому для объяснения дисперсии необходимо в модель ввести представления о структуре атомов или молекул.

#### 3.6.2. Классическая теория дисперсии.

Рассмотрим классическую теорию дисперсии, построенную Лоренцом Х.А. (**Хенрик Антон Лоренц, нидерландский физик-теоретик, 1853–1928, Нобелевская премия 1902 г. за разработку теории эффекта Зеемана**) на основании уравнений Ньютона. Она справедлива в основном для газовых сред, где можно не учитывать сложное взаимодействие между атомами и электронами.

В простейшем случае, когда взаимодействием между атомами или молекулами можно пренебречь (разреженные среды, например, газы) и считать, что поле, действующее на отдельный атом, совпадает со средним полем волны, при этом достаточно учесть действие поля волны на изолированный атом, который упрощенно и модельно рассматривается как гармонический осциллятор (упруго связанные электроны).

Очевидно, что применение к описанию движения электрона законов классической физики с точки зрения современной физики совершенно не оправдано. Правильную теорию атома дает квантовая механика. Поэтому и последовательная теория дисперсии, использующая реалистическую модель среды, должна быть квантовой. Использование здесь упрощенной модели атома как гармонического осциллятора основано лишь на том замечательном факте, что квантовая теория дисперсии приводит к практически тем же результатам, что и классическая, хотя и с некоторыми особенностями.

Все электроны в атоме можно разделить на внешние (оптические) и электроны внутренних оболочек. Для разных длин волн разные электроны дают вклад в дисперсию. В оптическом диапазоне вклад дают только внешние электроны. В классической теории дисперсии оптический электрон (электрон внешней оболочки атома) в атоме рассматривается как затухающий гармонический осциллятор, характеризуемый определенной собственной частотой  $\omega_0$  и постоянной затухания  $\gamma$ . Запишем уравнение Ньютона,

пренебрегая магнитной силой Лоренца  $\frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}]$ :

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - g\dot{\vec{r}} + e\vec{E}' \quad (3.6.2)$$

Здесь  $\vec{r}$  – смещение электрона из положения равновесия, “ $-k\vec{r}$ ” – квазиупругая сила; “ $g\dot{\vec{r}}$ ” – аналог силы трения (учитывает, что свет может поглощаться);  $\vec{E}'$  – напряженность электрического поля, действующего на электрон. Вообще говоря, поле  $\vec{E}'$  отличается от среднего макроскопического поля  $\vec{E}$ , входящего в уравнения Максвелла, однако в случае достаточно разреженных газов этим различием можно пренебречь. Тогда уравнение движения электрона в поле  $\vec{E}(t)$  световой волны имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}(t), \quad (3.6.3)$$

где входящие параметры определены как обычно в теории колебаний:

$$2\gamma = \frac{g}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (3.6.4)$$

Постоянная затухания  $\gamma$ , характеризующая силу “сопротивления”, пропорциональную скорости электрона, содержит вклад, обусловленный *радиационным затуханием*: согласно классической теории электрон обязательно излучает. Другие причины затухания (взаимодействие с другими атомами и неупругие соударения) связаны с *диссипацией* энергии электромагнитного поля, т.е. в конечном итоге превращением её в теплоту. Диссипативное затухание можно считать истинным поглощением и включить его вклад в константу  $\gamma$ . Относительная роль отдельных членов уравнения зависит от рассматриваемой области частот.

Например, при частотах  $\omega$ , далеких от собственной частоты  $\omega_0$  осциллятора, затуханием, как правило, можно пренебречь. Собственную частоту  $\omega_0$  атомного электрона будем рассматривать как формально введенную постоянную, которая определяет частоту линии поглощения в спектре исследуемого вещества. Эти постоянные  $\gamma$  и  $\omega_0$  не могут быть получены из классической физики, здесь они вводятся как параметры.

Пусть падает плоская монохроматическая волна, т.е. поле  $\vec{E}(t)$ , действующее на осциллятор, изменяется со временем синусоидально:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (3.6.5)$$

Заметим,  $E_0$  можно считать постоянной, если амплитуда колебаний электрона мала по сравнению с длиной волны. Нас интересует частное решение уравнения (3.6.3), описывающее *установившиеся* вынужденные колебания осциллятора (при больших временах общее решение однородного уравнения исчезает – см Главу “Колебания” в курсе Классической механики). Эти колебания, совершаемые под действием синусоидальной силы, также будут синусоидальными, а их частота совпадает с частотой вынуждающей силы. Поэтому решение уравнения для смещения  $\vec{r}(t)$  будем искать в виде  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$ . В результате получаем решение:

$$\vec{r}(t) = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \vec{E}(t). \quad (3.6.6)$$

Так как электрон смещается относительно ядра, то атом приобретает дипольный момент. Индуцируемый электрическим полем дипольный момент атома пропорционален напряженности поля  $\vec{p}(t) = e\vec{r} = \beta\vec{E}$  и, следовательно, можно записать:

$$\vec{p}(t) = \beta\vec{E} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \vec{E}(t). \quad (3.6.7)$$

Зависящий от частоты  $\omega$  коэффициент пропорциональности между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$  называется *атомной поляризуемостью*  $\beta(\omega)$ :  $\vec{p} = \beta(\omega)\vec{E}$ . Если  $N$  – концентрация атомов вещества, то вектор поляризации равен  $\vec{P} = N\vec{p}$ , тогда для восприимчивости можно записать

$$\alpha(\omega) = N\beta(\omega) = \frac{N e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (3.6.8)$$

Диэлектрическая проницаемость связана с восприимчивостью соотношением  $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$ . Таким образом, для разреженной среды, содержащей  $N$  осцилляторов в  $1 \text{ см}^3$ , получаем диэлектрическую проницаемость как функцию частоты:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (3.6.9)$$

Иногда для упрощения записи вводят константу  $\omega_p$ , имеющую размерность частоты и называемую *плазменной* или *Ленгмюровской частотой* (Ирвинг Ленгмюр, американский физик, 1881–1957, Нобелевская премия 1932 г. по химии):

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}. \quad (3.6.10)$$

Тогда диэлектрическую проницаемость можно записать в виде

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (3.6.11)$$

Вследствие затухания атомных осцилляторов диэлектрическая проницаемость оказывается комплексной величиной. Выделяя вещественную и мнимую часть, можно получить выражения для зависящих от частоты показателя преломления  $n(\omega)$  и показателя затухания  $\eta(\omega)$ . Вводим, как и ранее в §3.4 эти показатели:

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n - i\eta \quad (3.6.12)$$

Тогда, подставив (3.6.12) в (3.6.11) и приравняв отдельно реальные и мнимые части, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} n^2 - \eta^2 &= 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \\ n\eta &= \frac{\omega_p^2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

Отсюда можно получить показателя преломления и затухания, однако, в общем виде выражения для  $n(\omega)$  и  $\eta(\omega)$  весьма громоздки, поэтому анализ физических результатов электронной теории дисперсии имеет смысл провести для сравнительно простых частных случаев.

### 3.6.3. Нормальная и аномальная дисперсии.

*Нормальная дисперсия.* При частотах, далеких от собственной частоты  $\omega_0$  атомных осцилляторов, выполняется условие

$$2\omega\gamma \ll \left| \omega_0^2 - \omega^2 \right|, \quad (3.6.14)$$

поэтому мнимой частью, ответственной за поглощение, в выражении для дисперсии можно пренебречь. Тогда зависимость показателя преломления от частоты принимает вид:

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.6.15)$$

Для разреженных сред второй член этого выражения мал по сравнению с первым, поэтому можем приближенно записать ( $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$  при  $x \ll 1$ ):

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.6.16)$$

При тех частотах, где полученная формула применима, показатель преломления возрастает с увеличением частоты. Такой характер зависимости  $n(\omega)$  называют *нормальной дисперсией*.

Для низких частот ( $\omega < \omega_0$ ) показатель преломления больше единицы, т.е. фазовая скорость  $\frac{c}{n}$  волны в среде меньше скорости света в пустоте. Это значит, что измененная средой волна отстает от падающей волны по фазе.

Если же частота света больше собственной частоты осцилляторов ( $\omega > \omega_0$ ), то  $n < 1$  и фазовая скорость волны в среде оказывается больше скорости света в вакууме, т.е. измененная волна опережает по фазе падающую. Известно, фазовая скорость может быть больше скорости света, что не противоречит релятивистской теории, утверждающей, что скорость материальных тел и скорость сигнала не могут превышать  $c$ . Понятие показателя преломления применимо к *монохроматической волне*, имеющей бесконечную протяженность в пространстве и во времени, т.е. к установившимся вынужденным колебаниям осцилляторов среды. А монохроматическая волна не может служить для передачи сигнала.

На рисунке показана зависимость (3.6.16), однако надо иметь в виду, что область около собственной частоты колебаний  $\omega \approx \omega_0$  здесь схвачена неверно. Зависимость показателя преломления от частоты была получена для разреженной среды, т.е. предполагалось, что действующее на отдельный атом поле совпадает со средним макроскопическим полем  $\vec{E}$ . В плотном веществе (жидкости, твердые тела) это предположение несправедливо.

*Аномальная дисперсия.* Обратимся опять к выражению (3.6.9), описывающему диэлектрическую проницаемость разреженной среды, и исследуем на его основе дисперсию *вблизи собственной частоты*  $\omega_0$  атомного осциллятора. В этом случае диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon(\omega)$  и показатель преломления  $\sqrt{\epsilon(\omega)} = n - i\eta$  являются комплексными величинами.

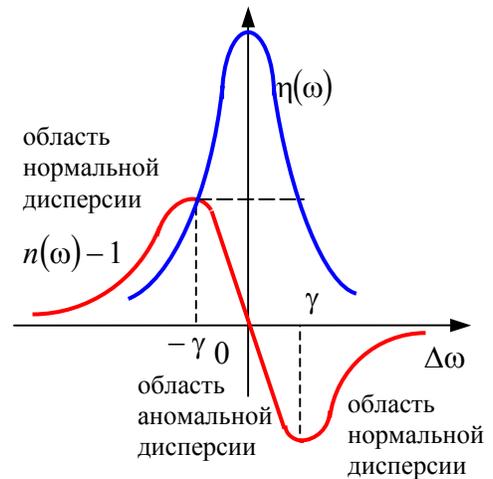
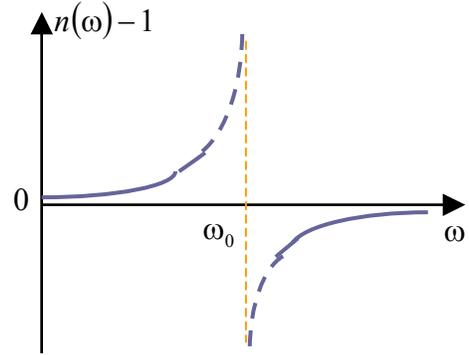
Найдем вещественную  $n$  и мнимую  $\eta$  части показателя преломления из выражений (3.6.13). При частотах, близких к собственной частоте осциллятора в полученных выражениях возможны упрощения. При  $\omega \approx \omega_0$  везде кроме разности  $\omega_0^2 - \omega^2$  можно заменить  $\omega$  на  $\omega_0$ , а разность квадратов частот можно преобразовать следующим образом:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0 \Delta\omega,$$

где  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ . Теперь получаем из (3.6.13):

$$n^2 - \eta^2 \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{D\omega}{(D\omega)^2 + \gamma^2} \quad \text{и} \quad n\eta \approx \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{\gamma}{(D\omega)^2 + \gamma^2}. \quad (3.6.17)$$

Зависимость показателя затухания от частоты характеризует *спектральный контур линии поглощения*. В рассматриваемой модели среды (система неподвижных затухающих атомных осцилляторов) этот контур имеет *лоренцевскую* форму с максимумом при  $\Delta\omega \approx 0$ , т.е. при  $\omega \approx \omega_0$ . Ширина максимума на половине высоты равна  $2\gamma$  и растет с увеличением постоянной затухания.



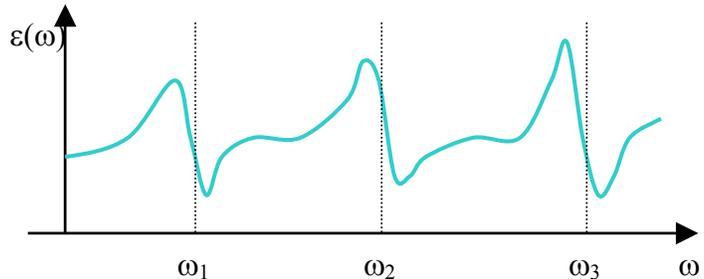
Примечание 1. Здесь и на графике стоит знак равенства примерно  $\omega \approx \omega_0$ , т.к. строго говоря, резонансная частота  $\omega_{рез}$  отличается от  $\omega_0$ . Она сдвигается при наличии затухания и вынуждающей силы - см раздел Колебания. Поэтому максимум в показателе затухания происходит примерно при частоте  $\omega_0$  только при небольших значениях постоянной затухания  $\gamma$ .

Уменьшение показателя преломления с частотой, которое происходит в пределах ширины спектрального контура линии поглощения, называют *аномальной дисперсией*. Экспериментально она была открыта Леру в 1860 г. (Франсуа Пьер Леру, французский физик, 1832–1907) в опытах по преломлению белого света призмой, наполненной парами йода. Оказалось, что синие лучи преломляются меньше красных, т.е. показатель преломления убывает с частотой.

Примечание 2. Если в атомах имеются другие электроны с другими собственными частотами  $\omega_k$ , то диэлектрическая проницаемость принимает вид:

$$\varepsilon = 1 + \sum_k \frac{4\pi N_k e_k^2 / m_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\gamma_k \omega} \quad (3.6.18)$$

По мере приближения к собственным частотам дисперсия имеет нормальный характер, а внутри полосы поглощения дисперсия становится аномальной.



Примечание 3. Помимо дисперсии, связанной с вынужденными колебаниями электронов и ионов, существует другой вид дисперсии в средах с полярными молекулами. Меняется “ориентационная” поляризация и обусловленная ей диэлектрическая проницаемость. При облучении светом частоты  $\omega$  появляется вынужденное вращение (колебание) молекул с той же частотой, а амплитуда вращений зависит от частоты  $\omega$  или длины волны света  $\lambda$ . У полярных диэлектриков дисперсия проявляется начиная с сантиметрового диапазона и показатель преломления убывает с ростом частоты – аномальная дисперсия.

Примечание 4. В области радиоволн ( $\lambda > 1\text{см}$ ) существенна только одна собственная частота  $\omega_0 = 0$ , которой обладают свободные электроны. Тогда получаем:

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2 / m}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Если нет свободных электронов, то нет и дисперсии для радиоволн.

Литература:  
Сивухин Оптика §§84