Интерактивті электрондық оқулық

Механика-математика факультеті

әл-Фараби атындағы ҚазҰУ ГАМЛ кафедрасы

автор – К.А. Мейрембеков, қазақ тіліне аударған – Ж.Т. Таласбаева

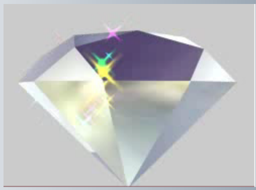
Соңғы нұсқа 26 октября 2011 г.

Алматы

Алгебра-I

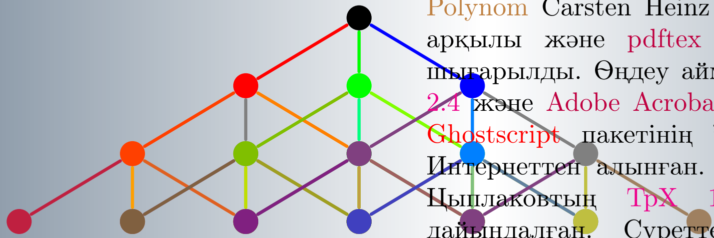
Тұжырымдама

Механика-математика факультетінің барлық мамандықтарына бірінші семестрде берілетін алгебраның негізгі түсініктері келтірілген. Стандартты кітаптарда жоқ теоремалар толық дәлелденген. Алгебралық есептерді шығару дағдылары интерактивті мысалдар және тесттер арқылы игеріледі. Мәтінде гиперсілтемелер бар. Автордың ойынша осы файл студенттің алгебраны оқу барысында ***гиды*** болады. Бұл құралды дәрістердің және оқулықтардың орнын басады деп айтуға болмайды. Бірақ ол курстың оқу бағытын нақты көрсетіп, толық дәлелдеулерді табуға сілтеме береді, негізгі дағдыларды алуға көмектеседі және тесттерді шығару әдістерін береді. Осы файл коллоквиумдарға және емтихандарға дайындалғанда өте маңызды құрал болуы мүмкін.



Файл туралы

Бұл жерде көбіне кітаптарда тараулардың өзара тәуелділігінің құрылымдық сұлбасы келтіріледі. Бізге ол керек емес, өйткені бізде ол сұлба еркін және файлдың қағазбен салыстырғанда гипермәтіндік артықшылықтары бар. Сұлбаның орнына қызықты сурет салайық.



Файл Latex-2-нің Acrotex D.P. Story, Pdfscreen C.V. Radhakrishnan, Pstricks D. Girou, TikZ Till Tantau, Polynom Carsten Heinz жаңа пакеттерін пайдалану арқылы және pdftex жалпы драйвер көмегімен шығарылды. Өңдеу аймағы – Texmaker 1.5, Miktex 2.4 және Adobe Acrobat 6.0. Суреттердің бір бөлігі Ghostscript пакетінің "Эмоции" жинағынан және Интернеттен алынған. Кейбір суреттер Александр Цыплаковтың TpX 1.3 бағдарламасы арқылы дайындалған. Суреттерді конвертациялау үшін ImageMagick және ConversionArtist бағдарламалары қолданылған.

Аңыз: Файлдағы ✔ белгісі студенттің дұрыс жауап бергенін, ал ✘ белгісі қате жауап бергенін білдіреді, дұрыс жауап ● белгісімен белгіленеді. Әр тарауда ашық сары бөлігі маңызды анықтамаларды, ал pink түсті бөлігі маңызды нәтижелерді көрсетеді.

Навигация

Панельдегі белгілерді және сөйлемдерді басу арқылы келесі әрекеттерге келеміз:

Title Page – бірінші бетке көшу;

Contents – мазмұн бетіне көшу;

◀◀ **▶▶** – бірінші немесе соңғы бетке көшу;

◀ **▶** – алдыңғы немесе келесі бетке көшу;

Page – керекті бетке көшу диалогы;

Go Back – соңғы пайдаланған бетке көшу;

Close – файлды жабу диалогы, өзгерістерді сақтау туралы сұраққа жоқ жауабын таңдау керек. Файлды қорғау жүйесі кез-келген жағдайда файлды өзгертпейді.

Навигацияның ең жылдам әдісі Contents арқылы жүргізіледі. Керек бетке Page арқылы да көшуге болады, немесе көшу белгілерін қолданып және тышқанның оң немесе сол пернелерін басуға болады. Жалғыз ерекшелік – тапсырмалардың және тесттердің шешімдері бар Solution of quizzes мазмұнының бөлігі. Оған бассаңыз жүйе сізді тапсырмалардың шарттарына жібереді. Тапсырмаларды орындағаннан кейін ғана шешімдері бар тарауды көруге болады. Шешімдер тарауындағы қызыл шаршыға бассаңыз сіз тапсырмаға қайта ораласыз. Осы құралда қолданылған барлық файлдар негізгі файлға тіркелген.

Файлдың шығарылған күні 26 октября 2011 г., файлдың көлемі 3.76 mb=3 950115 b.

Файлдың көлемі $\pm 20b$ байтқа айырмашылығы болуы мүмкін, өйткені компиляциядан кейін pdf-файлдың бұрынғы көлеміне қайта түсу қиын. Файлды жабудан бұрын AltTab-ты басыңыз және Windows-та осы файлдың атрибуттарын көріңіз. Файлға қайта оралыңыз. Авторлық барлық атрибуттарға сәйкес болса, онда барлық Attach-файлдарды тышқанның оң пернесі арқылы қорықпай ашуға болады.


Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы
Алгебра & логика
ГАМЛ кафедрасы

Алгебраны оқудың траекториясын таңдау

Математиктер үшін алгебра курсы екі семестрде оқылады, ал аналитикалық геометрия курсы бір семестр оқылады. Басқа мамандықтарда көбінесе бұл курстар бірге оқылады және алгебраның кейбір тараулары берілмейді. Осы файлда ММФ барлық мамандықтарына қажет алгебраның негіздерінен құрастырылған материал бар. Файлдың әртүрлі тараулары бір-бірінен тәуелсіз жазылған. Біз төменде қандай мамандықтарға алгебраның қайсы тарауларын оқу керек екенін көрсетеміз. Бірақ, негізінде лекторға байланысты кейбір өзгерістер болуы мүмкіндігін айтып өту керек.

Математика – барлық тараулар.

Механика magenta түсімен белгіленгеннен тыс барлық тараулар.

Информатика magenta түсімен белгіленгеннен тыс барлық тараулар.

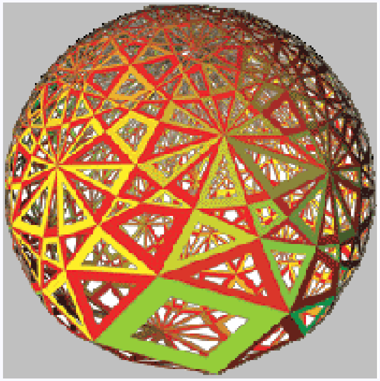
Ақпараттық жүйелер magenta түсімен белгіленгеннен тыс барлық тараулар.

Математикалық және компьютерлік пішіндеу magenta түсімен белгіленгеннен тыс барлық тараулар.

Осы файлды жазу үшін Latex пакетінің негіздері бар төрт кітапты, 2-бетінде атап өтілген пакеттер туралы ағылшын, неміс және француз тілдерінде көптеген әдебиет және *pdf*-ті бұзу туралы кітапты оқып түсіну қажет болды.

Содержание

1. КІРІСПЕ



Компьтерге және бағдарламалық қамсыздандыруға қойылатын талаптар. Pentium-II-ден бастап компьютер кез келген болуы мүмкін. Файлды оқу үшін Java script-модулі бар 6.0 нұсқасынан төмен емес Adobe Acrobat немесе Adobe Reader керек. Flash-роликтерді ойнату үшін 7.0 нұсқасынан төмен емес Macromedia Flash player қажет. Adobe Reader және Macromedia Flash player тегін бағдарламалар болып табылады және оларды http://www.google.ru сайты арқылы табуға болады. Егер сізде тек қана Adobe Reader бар болса, онда көп файлдар оқылады, бірақ тіркелген pdf-емес файлдар оқылмайды.

Файлдарға қандайда бір авторлық қорғау қойылған, бірақ pdf – ол web-технологиялар болғандықтан мыңдаған хакерлер web-тің әлсіздігін іздейді, сондықтан қорғауға толық үміт жоқ. Файлды оқу барысында сізге кейбір пішіндерді толтыруға тұра келеді (тесттердiң сұрақтарына жауап бергенде), файлмен жұмыс iстеп бiткеннен кейiн бұл өзгерiстер сақталмайды. Жаңадан файлға кiргенде жұмысты қайтадан бастайсыз. Әр бiр тарауда негiзгi анықтама жгне нәтиже түспен белгiленедi. Гиперсiлтемелерде түспен белгiленген, егер оларды бассаңыз сәйкес тарауға көшесiз.

Элементар математиканың кейбiр мағлуматтарын студенттiң есiне түсiру үшiн келесi үлкен flash-ролик келтiрiлген. Бұл ролик 2004 жылы дайындалған және орта мектептiң 8–9 класстар аблгебрасының мультимедиялық оқу құралының негiзi болды.

Бұл құралды бiрнеше авторлар және ҚазҰУ программисттерi дайындаған, және ол бүкiл Қазақстанға CD-дисклер арқылы таралды. Осы файлдың авторы жоғарыда атап өтiлген құралдың авторларын басқарып тригонометрия тарауына жауапты болған және сол flash-роликтың негiзiне қойылған идеяларының жалғыз авторы болып табылады. Роликтың менюының барлық пункттерi: конвертерлер, трансформерлер, еспешығарғыштар, анимация, графиктер басында автормен Maple арқылы құрастырылған одан кейiн ғана дайын модельдер ҚазҰУ механика-математика факультетiнiң flash-программисттерiмен iске асырылды.

Flash-роликте графиктердiң конструкторынан және түзулер арқылы графиктердiң симметрийiнан басқа менюдың барлық пункттерi жұмыс iстейдi. Мына пункттерге баспаңыз, егер бассаңыз FlashPlayer жұмыс iстемей қалады. Егер байқамай басып қойсаңыз, онда FlashPlayer-дi алдыңғы жағдайынан шығарып бастапқы файлды pdf-та оқып flash-ролик-тi жаңадан қоссаңыз болады. Flash-роликте Ән зерденi үнемдеу үшiн алынып тасталған. Осы swf-ролик алгебра, геометрия және математикалық талдау пәндерiнiң кейбiр есептерiн шығару үшiн көп көмек беруi мүмкiн.
Басында swf-файлдардың Internet Explorer браузеры мен сәйкестiгiн қарастырыңыз. Ол үшiн Пуск/Менiң компьютерiм/қызмет көрсету/папканың қасиеттерi/ файлдың типтерi басыңыз. Flash Player-ды табу үшiн 25 қараңыз.

swf-файлды ашу керек па?

Студенттердің білімдеріне қойылатын талаптар. Алгебра курсын түсіну үшін орта мектепте берілетін элементар математиканы білу қажет. Осы курстың материалы басқа барлық математикалық пәндерде қолданылады. Бұл файлда алгебра курсының барлық натижелері және анықтамалары келтірілген. Стандартты кітаптарда жоқ кейбір нәтижелердің толық дәлелдеулері келтірілген. Файл электрондық түрде оқуға арналған және қағазға басуға арналмаған. Біз файлда әртүрлі гиперссылкаларды қолданамыз және осы файл арқылы студентпен интерактивты қатынаста болуды көздеп отырмыз. Оны *Как решать тесты* тарауында және қарастырылатын мысалдарда көресіздер. Бұл мақсаттарға қағаз арқылы жете алмайтын едік.

1.1. Сандық сақиналар және өрістер, қалындалар сақиналары

Бос емес 0 белгісімен белгіленген ерекше элементі бар K жиынын қарастырайық. Осы жиында екіорынды $+$ және $\cdot$ амалдары анықталған болсын, егер $x, y \in K$ болса, онда $x + y \in K$ және $x \cdot y \in K$. Көп жағдайларда осы амалдар үшін келесі қасиеттер орындалады:

$$\forall x \forall y \forall z[(x+y)+z = x+(y+z)] \quad \text{–қосу амалының терімділігі (ассоциативтығы)}$$

$$\forall x \forall y[x+y = y+x] \quad \text{–қосу амалының ауыстырымдылығы (коммутативтығы)}$$

$$\forall x[x+0 = x] \quad \text{– нөлдің нейтралдығы}$$

$$\forall x \exists y[x+y = 0] \quad \text{– қарама-қарсы элемент}$$

$$\forall x \forall y \forall z[x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z], \quad \forall x \forall y \forall z[(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x] \quad \text{дистрибутивтық}$$

Анықтама 1 *Егер K жиынының амалдары жоғарыдағы қасиеттерді қанағаттандыратын болса, онда оны сақина деп атайды.*

Факт 1 *Сақинада қосу бойынша нейтралды элемент жалғыз болады. Сақинаның кез* *келген x элементі үшін жалғыз қарама-қарсы y элементі табылады және ол $-x$ арқылы белгіленеді.*

Анықтама 2 *Егер K сақинасында көбейту амалы ассоциативты болса*

$$\forall x \forall y \forall z[(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)],$$

онда оны ассоциативты деп атайды.

Анықтама 3 *Егер K сақинасында көбейту амалы коммутативты болса*

$$\forall x \forall y[x \cdot y = y \cdot x)],$$

онда оны коммутативты деп атайды.

Анықтама 4 *K сақинасының 1 бірлігі бар деп айтамыз, егер $\forall x[x \cdot 1 = x = 1 \cdot x]$.*

Анықтама 5 *K бірлігі бар сақинасы берілсін. K сақинасының x элементі керіленетін деп аталады егер келесі теңдікті қанағаттындыратын $x \cdot y = 1 = y \cdot x$ $y \in K$ элементі табылатын болса.*

Факт 2 *Бірлігі бар сақинаның бірлігі жалғыз болады. Егер K бірлігі бар сақина болса, онда керіленетін x элементіне жалғыз кері элемент табылып x^{-1} арқылы белгіленеді.*

Анықтама 6 *Егер бірлігі бар ассоциативты және коммутативты сақинаның кез келген нөлден өзгеше элементі керіленетін болса, онда оны өріс деп атайды.*

Сақиналарда жоғарыда айтылып өткен қасиеттер бір-бірлеп немесе барлығы бірге орындалуы мүмкін және сақинаның аты орындалып отырған барлық қасиеттері бойынша беріледі.

Мысал 1 *Төменде әртүрлі* $(K, +, \cdot, =)$ *жиындарды және олармен қоса* $+, \cdot$ *амалдарын қарастырайық.*

1. $(Q, +, \cdot, =)$ *және* $(R, +, \cdot, =)$ *рационал және нақты сандардың өрістері болып табылады.*
2. $(Z, +, \cdot, =)$ *бүтін сандар жиыны* $+, \cdot$ *амалдарымен қоса бірлігі бар ассоциативты және коммутативты сақина болады.*
3. $(2Z, +, \cdot, =)$ *жұп бүтін сандар жиыны* $+, \cdot$ *амалдарымен қоса бірлігі жоқ ассоциативты және коммутативты сақина болады.*

Басқа коммутативты емес және (немесе) ассоциативты емес сақиналардың мысалдары төменде келтіріліп жатар.

Анықтама 7 $n \geq 2$ *– белгілі натурал сан болсын.* $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ *жиынында* $x \oplus_n y = irem(x+y, n)$ *және* $x \otimes_n y = irem(x \cdot y, n)$ *ережелерімен* $\oplus_n, \otimes_n$ *амалдарын анықтайық. Бұл теңдіктерде* $irem(z, n)$ *арқылы* z*-ті* n*-ға бөлгенде шығатын қалдық белгіленген.* $(Z_n, \oplus_n, \otimes_n)$ *жиыны* n *модулі бойынша қалындылар сақинасы деп аталады. Кейбір жағдайларда оны* $(Z_n, +, \cdot, =)$ *арқылы белгілейді.*

K сақинасының x элементі нөлдің (оң) бөлгіші деп аталады егер $x \neq 0$ болса және $x \cdot y = 0$ теңдігін қанағаттандыратын $y \neq 0$ табылатын болса. Мысал үшін Z_6 қалындылар сақинасында 2 элементі нөлдің бөлгіші болады.

Факт 3 *Кез келген өрісте нөлдің бөлгіштері болмайды.*

Теорема 1 Z_n *қалындылар сақинасы өріс болуы үшін* n *санының жәй болуы қажетті және жеткілікті.*

Анықтама 8 *Егер* K *сақинасы үшін* $\forall x(mx = 0)$ *шартын қанағаттандыратын* m *натурал саны табылатын болса, онда осындай сандардың ең кішісін* K *сақинасының мінездемесі деп атайды және* $char(K)$ *арқылы белгілейді. Егер ондай* m *сандары жоқ болса, онда сақинаның мінездемесін нөлге тең деп айтады. Мысал үшін* $char(R) = 0 = char(Q)$ *және* $char(Z_n) = n$.

Теорема 2 *Кез келген өрістің мінездемесі нөлге немесе жәй санға тең болады.*

Теорема 3

1. *Рационал сандар өрісі кез келген мінездемесі нөлге тең өрістің ішкі өрісі болады.*

2. Z_p *қалындылар өрісі кез келген мінездемесі* p *жәй сан болатын өрістің ішкі өрісі болады.*

Әдебиет – Кострикинның [4] кітабы.

1.2. Комплекс санның алгебралық жазылуы

$(R, +, \cdot, 0, 1, =)$ нақты сандар өрісі экономика және евклидтық геометрияның талаптарын қанағаттандырады, бірақ оның бір кемшілігі бар, мысал үшін, $f(x) = x^2+1$ көпмүшесінің нақты түбірлері жоқ. i арқылы $i^2 = -1$ теңдігін қанағаттандыратын нақты сандар өрісінде жатпайтын жаңа символды белгілейік.

Анықтама 9 *Комплекс сандар жиыны деп* $\{a + bi \mid a, b \in R\}$ *формалды өрнектердің* C *жиынын атаймыз, бұл жерде* $i^2 = -1$ *және* $a_1+b_1 i = a_2+b_2 i \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$.

Анықтама 10 *Комплекс сандар жиынында амалдарды анықтайық.* $z_1 = a_1+b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ *комплекс сандары үшін* $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ *және* $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

Begin (2^{pts}) Көбейтіндіні есептеңіз

$$(3 + 2i) \cdot (4 - i) = \square + \square i$$

End | ScoreField | PointsField | Correct   Ans: $\square$

Теорема 4 *C комплекс сандар жиыны $+, \cdot$ амалдары бойынша нақты сандар өрісін кеңейтетін өрісті құрайды.*

Осы теоремаға сүйеніп комплекс сандар үшін барлық арифметикалық амалдар (мысал үшін қысқартылған көбейтіндің формулалары) нақты сандар үшін сияқты анықталады.

Анықтама 11 *$\bar{z} = a - bi$ комплекс саны $z = a + bi$ комплекс санына түйіндес деп аталады.*

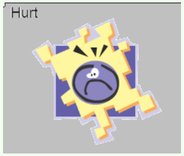
Факт 4

1. $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,
2. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
3. $z \in R \iff z = \bar{z}$,
4. $z \in iR \iff \bar{z} = -z$, *осындай сандар таза жорамал деп аталады,*
5. $z + \bar{z} \in R$,
6. $x \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in R^+$

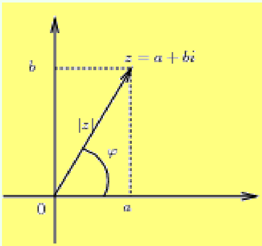
Нақты сандардың кескіндері нақты осьтің нүктелері болады. Комплекс сандардың кескіндері жазықытықтың нүктелері болады. $z = a + bi$ санына координаталары (a, b) болатын жазықтықтың нүктесі сәйкес қойылады. Осы нүктеден координаталар басына дейінгі арақашықтықты z комплекс санының модулі деп атайды. Сонымен, комплекс санның модулі туралы түсінік нақты санның абсолюттық шамасы туралы түсініктің жалпылануы болады. $z = a + bi$ комплекс санының тағы да бір кескіні координаталардың басынан шығатын және (a, b) нүктесімен аяқталатын векторы болады. Осы кескіндеуден екі комплекс санның қосындысының кескіні сәйкес векторларының геометриялық қосындысы болатыны шығады.

Әдебиет – Куроштың [3] кітабы.

1.3. Комплекс санның тригонометриялық түрі



Комплекс жазықтықтағы нүктенің орналасуы декарттық координаталардың жүйесінен тыс полярлық координаталар жүйесінде бірмәнді беріледі: сол нүктемен координаталар басының арасындағы арақашықтықпен және OX осімен координаталар басынан берілген нүктеге бағытталған сәуленің арасындағы бұрышпен. Сағаттың тіліне қарама-қарсы бағыты бұрыштың оң бағыты есептеледі. Ол бұрыш полярлық бұрыш деп аталады. α және $2\pi + \alpha$ бұрыштары беттесетінін білесіздер. Сондықтан, $0 \le \alpha \le 2\pi$ деп қарастырылады. $z = a + bi$ комплекс санының тригонометриялық түрін табайық.



ρ арқылы $|z|$-ті белгілейік. Пифагор теоремасынан $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ шығады және $\sin(\varphi) = \frac{b}{\rho}$, $\cos(\varphi) = \frac{a}{\rho}$ теңдіктердің орындалатынын көрсетуге болады. $\sin(\varphi), \cos(\varphi)$ сандар жұбы нөлмен 2π аралығында бұрышты бірмәнді анықтайды. Егер ол сандардың екеуі де оң болса, онда бұрыш бірінші ширекте орналасады, егер екеуі де теріс болса, онда бұрыш үшінші ширекте орналасады. Егер синус оң, ал косинус теріс болса, онда бұрыш екінші ширекте жатады, және егер синус теріс, ал косинус оң болса, онда бұрыш төртінші ширекте жатады.

Демек $a = \rho\cos(\varphi)$, $b = \rho\sin(\varphi)$. Сондықтан,

$z = a + bi = \rho[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$. Соңғы жазылу комплекс санның тригонометриялық түрі деп аталады.

Мысал 2 $\sqrt{3} - i$ *комплекс санының тригонометриялық түрін табайық.*

Басында осы санның модулін табайық, $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$. Комплекс санның тригонометриялық түрінде модуль алдына шығады. Соны ескеру керек. Онда $\sqrt{3} - i = 2[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i]$. Сондықтан, $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin(\varphi) = -\frac{1}{2}$. Жоғарыда келтірілген ереже бойынша φ бұрышы төртінші ширекте жатады. 0 немесе π бұрыштарына сүйір бұрышты қосып немесе алып кез келген ширекке түсуге болады. $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ болғандықтан, біз керек бұрышты табамыз $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Осыдан тригонометриялық түріне келеміз $\sqrt{3} - i = 2[\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})]$.

Комплекс санның алгебралық түрі комплекс сандарды қосу және азайту үшін ыңғайлы. Ал комплекс санның тригонометриялық түрі комплекс сандарды көбейту, дәрежелеу және кез келген дәрежелі түбірді алу амалдары үшін ыңғайлы.

Begin (3^{pts}) комплекс санның тригонометриялық түрін табыңыз

$$1-\sqrt{3}i = \boxed{}[\cos(\boxed{}) + i\sin(\boxed{})]$$

End $\underbrace{}_{\text{ScoreField}}$ $\underbrace{}_{\text{PointsField}}$ Correct

Ans: $\boxed{}$

Теорема 5 *Егер* $z_1 = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$, $z_2 = \rho[\cos(\psi) + i\sin(\psi)]$, *онда*

$$z_1 z_2 = r\rho[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)].$$

Демек, комплекс сандардың көбейтіндісінің модулі көбейткiштердiң модульдерiнiң көбейтiндiсiне тең болады және көбейтiндiнiң аргументi көбейткiштердiң аргументтерiнiң қосындысына тең болады. Әрине, егер аргументтерiнiң қосындысы 2π*-ден үлкен болса, онда аргументтерiнiң қосындысынан* 2π*-ды азайту керек.*

Салдар 1 (Муавр формуласы) *Егер* $z = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$, *онда*

$$z^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)].$$

Әрбiр комплекс саннан кез келген дәрежелi түбiр алуға болады. Комплекс санмен нақты санның бiр айырмашылығы осында. Егер комплекс сан нөлден өзгеше болса, онда оның n дәрежелi әр түрлi n түбiрi табылады.

Теорема 6 *Егер* $z = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$, *онда*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right], \quad 0 \le k \le n-1.$$

Анықтама 12 *Бірдің n дәрежелі түбірі деп $\alpha^n = 1$ теңдігін қанағаттандыратын α комплекс санын айтамыз. Бірдің n дәрежелі түбірлер жиыны n-ші ретті циклдық топты құрайды, өйткені бұл жиын көбейту және кері элементті алу амалдары бойынша тұйық болады. Бірдің n дәрежелі барлық түбірлері бір түбірінен сол түбірдің дәрежелері арқылы шығады. Ондай түбірлерді бірдің n дәрежелі алғашқы түбірлері деп атайды.*

α саны бірдің n дәрежелі түбірі болады сонда және тек қана сонда, егер $\alpha^n = 1$ және $(\forall k < n)[\alpha^k \neq 1]$. Бірдің түбірлері радиусы 1-ге тең шеңберде іштей сызылған көпбұрыштың төбелерінде орналасады және төбелердің біреуі 1 нақты саны болады.

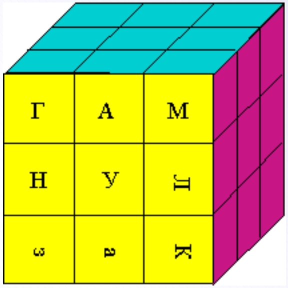
Begin (3^{pts}) Комплекс санның барлық түбірлерін табыңыз

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt{\boxed{}}[\cos(\boxed{}) + i\sin(\boxed{})]$$

End | ScoreField | PointsField | Correct   Ans:

Әдебиет – Куроштың [3] кітабы.

1.4. Анықтауыштар



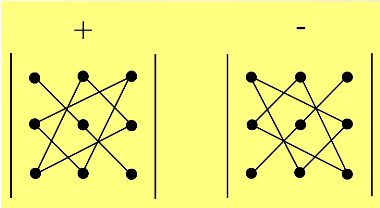
K қандайда бір өріс болсын. Рационал, нақты, комплекс сандар өрістерін және жай модулі бойынша қалындылар өрісін сәйкес Q, R, C, Z_p арқылы белгіленетінін айтып өтейік. Екінші ретті анықтауыш (детерминант) деп екі жолы және екі бағаны бар кестені айтамыз, ол кестеге K өрісінің келесі саны сәйкес қойылады:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}.$$

Бұл жерде анықтауыштың элементтерінің координаттық жазылуы қолданылады: $a_{i,j}$ элементі i-ші жолдың және j-ші бағанның қиылсуында орналасады. Үшінші ретті анықтауыш (детерминант) деп үш жолы және үш бағаны бар кестені айтамыз, ол кестеге K өрісінің келесі саны сәйкес қойылады:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} - \\ -a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3} \end{array}$$

Title Page
Contents
Page 23 of 142
Go Back
Close



Δ_3 үшін формуланы есте сақтау қиындау, бірақ бірінші кестенің үшбұрыштарының төбелеріне және бас диагональға сәйкес сандар үштіктерінің көбейтінділері анықтауышқа қосу таңбасымен кіреді, ал екінші кестенің сәйкес көбейтінділері Δ_3-ға алу таңбасымен кіреді. Екінші ретті анықтауыштары берілген формула бойынша оңай есептеледі. Бірақ біздің ойымызша үшінші ретті анықтауышты келтірілген формула бойынша есептеу тиымды емес. Үшінші және одан жоғарғы ретті анықтауыштарды n-ші ретті анықтауыштардың қасиеттерін пайдаланып есептеген дұрыс болады.

n – тіркелген натурал саны болсын, J_n арқылы $\{1, 2, \ldots, n\}$ сандар жиынын белгілеп алайық. J_n жиынының алмастыруы деп J_n-ның әр түрлі сандарынан құрылған $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ реттелген тізбегін айтамыз. $S(n)$ арқылы J_n жиынының барлық алмастыруларының жиынын белгілейміз. Мысалы үшін, $n = 3$ болған жағдайда $S(3)$жиыны келесі алмастырулардан құрастырылады:

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1).$$

Лемма 1 *$S(n)$ жиынында алмастырулар саны $n!$-ға тең.*

Title Page
Contents
Page 24 of 142
Go Back
Close

$n!$ саны n-нің өсуімен өте үлкен жылдамдықпен өсетінін ескерейік. Оның мәндерінің тізбегін келтірейік $2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040, 8! = 40320, 9! = 362880$ және $10! == 3628800$ саны үш миллионнан асатынын айтып өтейік. $13! = 6227020800$ саны алты миллиардтан үлкен және $100!$ санының жазылуында 158 цифр бар, демек ол гуглданда үлкен (гугл – жүз нөлі бар бірлік, осы сөзден әйгілі Интернеттегі іздегіш google шыққан).

Келесі файлға қарасаңыз – дауысы бар қызықты анимация, алмастырулар табиғатта ең жие кездесетін объектілердің біреуі екенін көресіз. Анимацияны көру үшін Macromedia Flash Playerдың 7.0 немесе оданда жоғарғы нұсқасы кажет. Егерде сіз Интернетпен пайдаланып жүрсеңіз, онда ол браузеріңізде бар болады. Егер файл ашалмасаңыз, онда кез келген Интернет-кафеге барып http://www.google.ru сайтына кіріп Macromedia Flash Player іздеңіз. Сілтемелерге қарап сол программаның download тауып флешкаға көшіріп өзіңіздің компьютеріңізге орнатыңыз. Ол программаны пайдалану туралы 11 қараңыз. Қайта оралу үшін Go Back басасыз. Бұл тегін программа. Белгіні тышқанның оң кнопкасымен белгілеп шыққан менюда открыть swf-файл таңдаңыз.

Анықтама 13 *π алмастыруы берілсін $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. α_i, α_j екі элементі π алмастыруында инверсия құрайды, егер $i < j$, бірақ $\alpha_i > \alpha_j$ болса. π алмастыруындағы инверсиялар санын $I(\pi)$ арқылы белгілейміз. Алмастыруды жұп деп айтамыз, егер $I(\pi)$ жұп болса, ал кері жағдайда оны тақ деп айтамыз.*

Анықтама 14 *π және τ $S(n)$-ның алмастырулары болсын. τ алмастыруы π алмастыруынан транспозиция арқылы шықты деп айтамыз, егер π-да тек қана α_i, α_j екі элементінің орындарын аустырсақ τ шығатын болса.*

Теорема 7 *Кез келген транспозиция берілген алмастырудың жұптығын өзгертеді.*

Мысал 3 *Рубиктың кубигі алмастыруларды пайдаланудың жақсы мысалы. Біздің кубиктың бір қырында сөздер жазылған болсын (тараудың басын қараңыз). Кубикты бірнеше рет айналдырайық. Енді кубикты бастапқы қалпына келтірейік. Әріптер орындарын аустырмайдыма?*

Анықтама 15 *n-ші ретті анықтауыштың анықтамасын берейік. Алдымен келесі формуланы келтірейік*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S(n)} (-1)^{I(\pi)} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)}$$

Бұл күрделі формуланы түсіндірейік:

- анықтауыш $n!$ қосылғыштардың қосындысы (қосынды $\pi \in S(n)$ бойынша);
- Δ_n-дағы әрбір қосылғыш Δ_n-ның әр түрлі қатарларында орналасқан n көбейткіштердің көбейтіндісі;
- Δ_n-дағы әрбір қосылғыш Δ_n-ның әр түрлі бағандарында орналасқан n көбейткіштердің көбейтіндісі (Өйткені екінші белгілер $S(n)$-ның алмастыруы);

- анықтауыштың қосылғышының таңбасы екінші белгілерден құрылған алмастырудың жұптығынан тәуелді.

Анықтауыштың қасиеттерін келтірейік. Ең негізгі қасиеттері - ол біріншісі және екіншісі.

Қасиет 1 Егер анықтауыштың екі қатарының орнын ауыстырсақ, онда анықтауыштың таңбасы өзгереді.

Қасиет 2 Анықтауышты төңкерсек, (анықтауышты бас диагоналдан айналдырамыз) ол өзгермейді. Осы қасиет бойынша қатарлар үшін дәлелденген қасиеттер бағандар үшін да орындылады.

Қасиет 3 Нөлдік қатары бар анықтауыш нөлге тең болады.

Қасиет 4 Екі бірдей қатары бар анықтауыш нөлге тең болады.

Қасиет 5 Егер анықтауыштың қатарын λ санына көбейтсек, онда анықтауыш λ есе көбейеді.

Қасиет 6 Екі пропорционал қатарлары бар анықтауыш нөлге тең болады.

Қасиет 7 Егер анықтауыштың бір қатарының элементтері екі қосылғыштың қосындысы болса, онда ол екі анықтауштың қосындысына тең болады: бірншісінде белгілі қатардың бірінші қосылғыштары тұрады, екіншісінде белгілі қатардың екінші қосылғыштары тұрады, бұл анықтауыштардың басқа элементтері бастапқы элементтерімен бірдей болады.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{i,1}+a'_{i,1} & a_{i,2}+a'_{i,2} & \dots & a_{i,n}+a'_{i,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & \dots & \dots & \\ a'_{i,1} & a'_{i,2} & \dots & a'_{i,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Қасиет 8 Егер анықтауыштың бір қатарына басқа қатарды кез келген λ санына көбейтіп алып қоссақ, онда анықтауыш өзгермейді.

Қасиет 9 Егер анықтауыштың бір қатары басқа қатарларының сызықты комбинациясы болса, онда анықтауыш нөлге тең болады.

Біз есептерде келесі белгіленулерді пайдаланамыз: $(i) \leftrightarrow (j)$ – i-ші және j-ші қатарлардың орындарын ауыстырылғанын білдіреді, $\lambda(i)$ – i-ші қатарды λ санына көбейтіндісін білдіреді және $(i) + \lambda(j)$ – i-ші қатармен λ санына көбейтілген j-ші қатардың қосындысын білдіреді. Бұл жерде j-ші қатар өзгермейді, ал өзгерістің барлығы i-ші қатарда болады. Бағандармен Гаусс түрлендірулері үшін сәйкес белгіленулер қолданылады. Тек қана жазылуында бір айырмашылық бар: $[i]$ – i-ші бағанды білдіреді.

Quiz Екінші анықтауыш бірінші анықтауыштан қандай түрлендіру арқылы шыққанын анықтау керек.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\square\square\square.\square} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Ans

Clear

Келесі есептерді шығару үшін Start кнопкасын басу керек, одан кейін керекті радиокнопкаға басып әрбір есептің сіздің ойыңызша дұрыс жауабын толтырыңыз. Start кнопканы қайталап бассаңыз бұрынғы таңдау өшіріледі және жүйе жаңа жұмысқа дайын болады. Шешімді тексеру үшін end басу керек және жауабын тексеру үшін Correct кнопкасын басу керек. Жасыл дөңгелек кнопкасын бассаңыз дұрыс жаубымен сәйкес есептің шешімі бар бетке көшуге болады. Шешімі бар беттегі қызыл шаршы кнопкасын бассаңыз сізді қарастырылып жатқан есепке көшіреді.

Start

1. Егер анықтауыштың екі еселенген бірінші қатарынан екінші қатарын азайтсақ, анықтауыш қалай өзгереді?
Жауаптар:

☐ өзгермейді, ☐ нөлге тең болады, ☐ екі еселенді.

2. Егер бір уақытта бірінші қатардан екінші қатарды азайтсақ, екіншіден үшіншіні азайтсақ, үшіншіден біріншіні азайтсақ, онда анықтауыш қалай өзгереді?
Ответы:

☐ нөлге тең болады, ☐ өзгермейді, ☐ таңбасы өзгереді.

End Score: Correct

Әдебиет – Курощтың кітабы [3].

1.5. n-ші ретті анықтауыштар.

Анықтауыштардың барлық қасиеттерін білмей анықтауышты сенімді есептей алмайсыз. Қасиеттерді классификациялау және есте сақтау үшін келесі ережелерді келтірейік. Бұл қасиеттерді дәлелдеулерінің реті бойынша жазудың қажеті жоқ. Оқырман қасиеттердің жинақтарын салыстырып белгіленулерді түсінеді.

I. $\Delta = 0$

a) $\Delta[(k) = \theta] = 0$;

b) $\Delta[(k) = (s)] = 0$;

c) $\Delta[(k) = \lambda \cdot (s)] = 0$;

d) $\Delta[(k) = \sum_{i \neq k} \lambda_i \cdot (i)] = 0$.

II. Δ өзгермейді.

a) $\Delta' = \Delta$; (штрих төңкеріленуді білдіреді)

b) $\Delta[(k) + \lambda \cdot (s)] = \Delta$.

III. Δ өзгереді.

a) $\Delta[(k) \leftrightarrow (s)] = -\Delta$;

b) $\Delta[\lambda \cdot (k)] = \lambda \cdot \Delta$;

c) $\Delta[(k) = (k') + (k'')] = \Delta[(k')] + \Delta[(k'')]$.

Кейбір анықтауыштар детерминантың анықтамасынан бірден есептеледі. Олардың ішінде жоғарғы үшбұрышты анықтауыш бар

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$$

Мысал 4 *Анықтауышты есептеңіз*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Берілген анықтауышты II.b және III.a қасиеттерін пайдаланып үшбұрышты түрге келтірейік (қатарларды орнын ауыстырғанда анықтауыштың таңбасы өзгеретінін умытпайық). Біз сізбен бірге боламыз. Теңдіктердің үстінде түрлендірулердің белгіленулері тұрады. Бұл жерде $(k) \leftrightarrow (s)$ k-ші және s-ші қатарлардың орнын ауыстыруын білдіреді және $(k) + \lambda(s)$ k-ші қатарға λ санына көбейтілген s-ші қатардың қосындысын білдіреді. Бағандардың сәйкес түрлендулері $[k] \leftrightarrow [s]$ және $[k] + \lambda[s]$ арқылы белгіленеді. Пункттерді толтырғанда Right немесе Wrong сөздері шығады. Оларды өшіріңіз. Есептеулердің дұрыс пункттері жасылмен дөңгелектенеді, қателері – қызылмен. Ans пунктінде қате есептеулердің саны шығады. Егер Ans кнопкасына бассаңыз сәйкес пункттегі дұрыс жауап шығады. Егер сіз қатардың өзгемейтінін білсеңіз, онда толтыруды тездетуге болады.

Quiz Үшбұрышты түрге келтіру арқылы анықтауышты есептеңіз

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{(3)\text{-}3\ (1)\\(4)\ \text{-}(1)}}{\overset{(2)+2(1)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix} \overset{(3)+(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix} \overset{(3)\leftrightarrow(4)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix} = \square$$

Ans

Clear

Кез келген анықтауышты осындай түрлендірулер арқылы жоғарғы үшбұрышты түрге келтіруге болатынын түсіну қиын емес. Ол үшін неше арифметикалық амалдың керектігін есептейік. Қажет болса, сол жоғарғы бұрышта тұрған элемент нөлден өзгеше болу үшін, қатарлардыңорнын ауыстырамыз. Біздің алгоритм бойынша екінші қатардан бастап барлық қатарлардан, бірінші элементі нөл болатындай қылып, сәйкес келетін санға бірінші қатарды көбейтіп алып азайту керек. Ол үшін $n(n-1)$ көбейту және $n(n-1)$ азайту жасау керек. Одан кейін сол түрлендірулерді бірінші қатары және бірінші бағаны жоқ кестеге қайталап жүргізу керек. Демек, көбейту амалының жалпы саны

$$n(n-1)+(n-1)(n-2)+(n-2)(n-3)+\cdots+3\cdot 2+2\cdot 1=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)=\frac{n(n^2-1)}{3}$$

болады.

Қосу амалынында сонша саны қажет. Сонымен, n-ші ретті анықтауышты үшбұрышты түрге келтіру арқылы есептеу үшін реті $\frac{2}{3}n^3$ сәйкес арифметикалық амалдарды орындау қажет. 100-ші ретті анықтауышты есептеу үшін реті миллионға сәйкес арифметикалық амалдарын орындау қажет және оны детерминантың анықтамасы бойынша қажет гуглдардың трилиондар амалдарымен салыстыруға болмайды. 100-ші ретті анықтауыш сіздің жеке компьютеріңізде есептеледі.

Анықтама 16 *Δ n-ші ретті анықтауыш болсын және $1\le k\le n$. Егер біз сандардың келесі екі жиындығын қарастырсақ $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$, $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$, онда Δ-ның ішіндегі $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$ нөмірлі қатарлармен $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$ нөмірлі бағандардың қиылысуында тұрған кесте k-ші ретті анықтауыш құрайды, оны Δ-ның миноры деп айтады.*

Δ анықтаушында $\binom{n}{k}^2$ k-ші ретті минорлары бар. Бірінші ретті минорлар – анықтауыштың элементтері болады. n-ші ретті минор – Δ анықтауышының өзі. M минорының $\widetilde{M}$

толықтаушы миноры деп Δ-да M минорының қатарлары мен бағандарын сызып алып тастағанда шығатын $(n-k)$-ретті минорын айтамыз. S_M арқылы $i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + j_2 + \cdots + j_k$ санын белгілейік.

Теорема 8 (минор туралы) *$M \cdot (-1)^{S_M} \widetilde{M}$ көбейтіндісі Δ анықтауышының жіктелуінің қосындыларынан құрылған, және таңбалары да сақталады.*

Минорлар туралы теоремадан комбинаторлық әдістермен келесі теорема шығады

Теорема 9 (Лаплас) *n-ші ретті Δ анықтауышы болсын, $1 \leq k < n$ және $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ сандар тізбегі берілсін. Ω арқылы $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ нөмірлі қатарларындағы k-ші ретті барлық минорлар жиынын белгілейік. Онда*

$$\Delta = \sum_{M \in \Omega} M \cdot (-1)^{S_M} \widetilde{M}.$$

Анықтама 17 *Егер $a_{i,j}$ – Δ анықтауышының элементі болса, онда $a_{i,j}$ элементі үшін $A_{i,j}$ алгебралық толықтауышы деп $(-1)^{i+j} M_{i,j}$-ны айтамыз, бұл жерде $M_{i,j}$ – $a_{i,j}$-ның толықтаушы миноры.*

Анықтауышты есептегенде көбіне келесі тепе-теңдіктер қолданылады

Салдар 2 *Анықтауышты қатар немесе баған бойынша жіктелуі.*

a) $\Delta = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}$;

b) $\Delta = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}$.

Келесі анықтауышта бір айрықшылық бар, бірдей сандар әр түрлі қатарларда әр түрлі жолмен орналасқан. Онда әрбір қатардың элементтерінің қосындысы бірдей болады. Сондықтан, бірінші бағанға қалған барлық бағандарды қоссақ, онда бірінші бағанның барлық элементтері бірдей болады.

Quiz Анықтауышты есептеңіз

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{[1]+[2]+[3]+[4]}{=} \begin{vmatrix} \square & 1 & 1 & 1 \\ \square & 2 & 1 & 1 \\ \square & 1 & 2 & 1 \\ \square & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\textit{из (2), (3), (4) строк отнять первую}}{=} \begin{vmatrix} \square & 1 & 1 & 1 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix} = \square$$

Ans

Clear

Келесі анықтауышта айрықшылықтар көрінбейді. Сондықтан оны ретін төмендету арқылы шығарамыз. Алдымен анықтаушты әлсіз қатарын табайық – ол бірінші қатар. Демек, біздің бірінші мақсатымыз – бірінші қатарда көп элементті нөлге келтіру.

Quiz Анықтауышты ретін төмендету арқылы шығарыңыз

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix} \overset{[1]+[2]}{\underset{\substack{[3]+[2] \\ [4]\ \text{-}2[2]}}{=}} \begin{vmatrix} \square & -1 & \square & \square \\ \square & 3 & \square & \square \\ \square & -1 & \square & \square \\ \square & 0 & \square & \square \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} \overset{(1)+2(2)}{\underset{(2)+2(3)}{=}} \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square$$

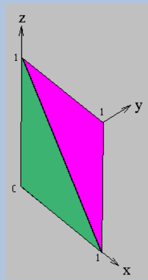
Ans

Clear

Әдебиет – Курощтың кітабы [3].

1.6. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйелері.

Анықтама 18 *n белгісізі бар сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі деп келесі түрдегі теңдеулер жүйесін айтамыз*



$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = b_m, \end{cases} \tag{1.6.1}$$

бұл жердегі $a_{i,j}, b_i$ коэффициенттері K сандық өрісіне тиісті. Жүйені біртекті деп айтамыз, егер оның барлық бос мүшелері нөлге тең болса.

Бізге осы теңдеулер жүйесінің қысқаша жазылуы керек, оларды біз енді САТЖ деп айтамыз.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, \quad 1 \le i \le m. \tag{1.6.2}$$

Арасында біз осы теңдеулер жүйесінің матрицалық түрін де пайдаланамыз.

Анықтама 19 *Реттелген сандар тізбегін $\bar\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ САТЖ-ның (1.6.2) шешімі деп атайды, егер $1 \le j \le n$ үшін $x_j = \rho_j$ теңдеулерге қойсағанда, сол теңдеулер тепе-теңдікке айналса. САТЖ үйлесімсіз деп аталады, егер оның шешімі жоқ болса және кері жағдайда үйлесімді деп аталады. Үйлесімді САТЖ анықталған деп аталады, егер САТЖ-ның жалғыз шешімі бар болса.*

Title Page
Contents
Page 37 of 142
Go Back
Close

Анықтама 20 *Бірдей белгісіздері бар теңдеулер жүйелерін эквивалентті деп атайды, егер олардың шешімдер жиыны бірдей болса.*

САТЖ-ның шешімі оңай табылатын айрықша түрлері болады (сатылы).

Мысал 5 *САТЖ-ның барлық шешімдерін табыңыз.*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 & = 5 \\ \quad x_2 + 4x_3 - 2x_4 & = -2 \\ \quad\quad x_3 + 2x_4 & = -4 \\ \quad\quad\quad x_4 & = 1 \end{cases}$$

Бұл САТЖ-ның төртінші теңдуінен $x_4 = 1$ екені анық, оны үшінші теңдеуге қоямыз және $x_3 = -6$ табамыз, нәтижелерді екінші теңдеуге қойып $x_2 = 24$ табамыз, соңында бірінші теңдеуден $x_1 = -26$ шығады. Сондықтан САТЖ-ның жалғыз (-26,24,-6,1) шешімі бар. Демек, біздің ендігі мақсатымыз: кез келген САТЖ үшін эквивалентті сатылы түрдегі САТЖ-ны табу.

Анықтама 21 *(1.6.1) теңдеулерінің негізгі түрлендірулерін қарастырайық. Оларды Гаусс түрлендірулері деп атайды және олар алгебра курсының сызықтық кеңістіктер және матрицалар теориясында басқа түрде кездеседі.*

a) **Теңдеулердің орындарын ауыстыру;**

b) **Бір теңдеуді $\lambda \neq 0$ санына көбейту;**

c) **Бір теңдеуге басқа теңдеуді кез келген λ санына көбейтіп алып қосу.**

Бұл түрлендірулер тәуелсіз екенін ескертейік және a)-ны b) және c)-ның бірнеше түрлендірулерімен ауыстыруға болады.

Тұжырым 1 *Егер САТЖ басқа САТЖ-дан бірнеше Гаусс түрлендірулер арқылы алынса, онда бұл САТЖ-лар эквивалентті болады.*

Теорема 10 *Кез келген САТЖ-ны Гаусс түрлендірулері арқылы сатылы түрге келтіруге болады. Егер сатылы түрде b_i нөлден өзгеше сан бола тұра $0 = b_i$ теңддіктері бар болса, онда САТЖ үйлесімсіз. Егер сатылы түрі үшбұрышты болса және жоғарыдағыдай теңдіктері жоқ болса, онда САТЖ-ның жалғыз шешімі болады. Егер сатылы түрі трапецияға ұқсаса және жоғарыдағыдай теңдіктері жоқ болса, онда САТЖ-ның жалғыз емес шешімдері болады.*

Мысал 6 *Үйлесімсіз САТЖ-ларды мысалын қарастыру үшін тікбұрышты төбелері координаталар басында кездесетін және өстері үш сыбайлас қабырғалары бойынша жүргізілген тараудың басындағы теңбүйірлі тікбұрышты пирамиданы қарастырайық. Пирамиданың қырларының жазықтықтарының теңдеулері келесі түрде жазылады:*

$$\begin{cases} x = & 0 \\ y = & 0 \\ z = & 0 \\ x + y + z = & 1 \end{cases}$$

Бұл теңдеулердің кез келген үшеуін қарастырсақ - үйлесімді болады (пирамиданың кез келген үш қырының жалпы нүктесі болады), бірақ барлық төрт теңдеулер үйлесімсіз болады.

Гаусс әдісі көне болғаны мен САТЖ-ны есептеудің ең жылдам әдісі. (1.6.1) САТЖ-ны практикалық есептеу үшін оған Гаусс кестесі сәйкес қойылады:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Онда теңдеулердің Гаусс түрлендірулеріне келесі кестенің қатарларының Гаусс түрлендірулері сәйкес болады:

a) Қатарлардың орындарын ауыстыру;

b) Бір қатарды $\lambda \neq 0$ санына көбейту;

c) Бір қатарға басқа қатарды кез келген λ санына көбейтіп алып қосу.

Түрлендірулердің мақсаты - Гаусс кестесін сатылы түрге келтіру. Негізінде Гаусс кестелерінде анықтауыштар үшін пайдаланатын түрлендірулердіде қолдануға болады, бірақ қосымша қатарларды орнын ауыстырып және қатарды кез келген $\lambda \neq 0$ санына көбейтуге болады. САТЖ-ны шешу барысында бағандармен жұмыс істеудің мағынасы жоқ. Негізгі элемент ретінде ± 1 санын алған дұрыс.

САТЖ-ны шешу барысында Гаусс кестесін құрып алып, кестенің сол жоғарғы бұрышында негізгі элементті таңдап алу керек. Ол элементті бір жасауға әрекет қылайық. Одан кейін негізгі элементтің астындағы элементтердің барлығын Гаусс түрлендірулері арқылы нөлге келтірейік және т.с.с.

Quiz САТЖ-ны шешіңіз.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 & = 10 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = -7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 2 & 10 \\ -1 & 3 & -4 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{(3)+(2)}{\overset{(1)+(2)}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ -1 & 3 & -4 & -7 \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \overset{(2)+(1)}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \overset{(2)-7(3)}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right)$$

Ans

Ans

Ответ: $(\square, \square, \square)$

Clear

Әдебиет – Курош тың кітабы [3].

1.7. Крамер ережесі

Шаршылы САТЖ-ны қарастырайық, бұл САТЖ-ның белгісіздер саны теңдеулер санына тең болады.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = b_n \end{cases} \tag{1.7.1}$$

(1.7.1) САТЖ-ның негігі анықтауышы деп келесі анықтауышты айтамыз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ & \ldots & \ldots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Title Page
Contents
Page 42 of 142
Go Back
Close

$1 \leq j \leq n$ үшін көмекші Δ_j анықтауышы деп Δ анықтауышының j-ші бағанын жүйенің бос мүшелер бағанына ауыстырғанда шығатын анықтауышты айтады. Келесі теңдіктер орындалады:

$$b_1 A_{1,j} + b_2 A_{2,j} + \cdots + b_n A_{n,j} = \Delta_j; \tag{1.7.2}$$

$$a_{1,i} A_{1,j} + a_{2,i} A_{2,j} + \cdots + a_{n,j} A_{n,j} = \begin{cases} \Delta & \text{если } i = j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{1.7.3}$$

Лемма 2 *Басқа сөзбен айтқанда (1.7.3) формуласы анықтауыштың бағандарының элементтерінің басқа бағанның элементтерінің алгебралық толықтауыштарына көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең болатынын, ал өзінің алгебралық толықтауыштарына көбейтінділерінің қосындысы анықтауышқа тең екенін білдіреді.*

Теорема 11 (Крамер ережесі) *Егер САТЖ-ның (1.7.1) негізгі анықтауышы нөлден өзгеше болса, онда жүйенің жалғыз шешімі болады*

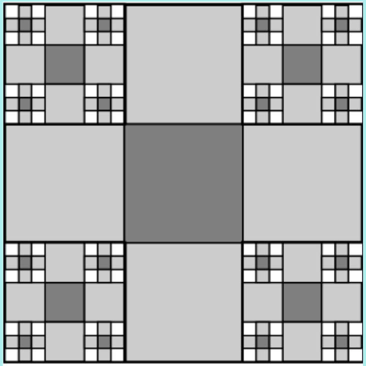
$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

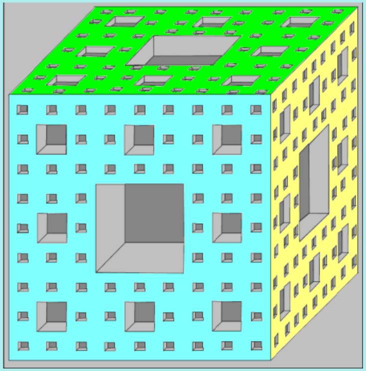
Бұл әдістің Гаусс әдісімен салыстыруға болмайды. Өйткені САТЖ-ны Крамер әдісімен шешу үшін Гаусс әдісіне қарағанда n есе көп арифметикалық амалдар қолданылады. Бірақ дифференциалдық теңдеулерді қолдану барысында көп математиктер кейбір дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің жалғызыдығын көрсету үшін осы теореманы пайдаланады.

Егер САТЖ біртекті болса, онда ол арқашан үйлесімді болады, өйткені нөлдік жиындығы оның шешімі болады.

Салдар 3 *Шаршылы біртекті САТЖ-ның нөлдік емес шешімі табылады сонда және тек қана сонда, егер жүйенің негізгі анықтауышы нөлге тең болады.*

Есеп 1 *Серпинскийдың кілемі бірлік шаршыдан келесі жолмен шығады: шаршының қабырғалары тең үш болікке бөлінеді және ортасындағы шаршысы алынады, одан кейін бұрыштағы $\frac{1}{3}$ қабырғасы бар төрт шаршының ортасындағы шаршылары алынады және т.с.с. Сол сияқты Серпинскийдың кубы құрылады. Серпинскийдың кілемінің ауданы және кубының көлемі қандай?*





Әдебиет – Курoштың кітабы [3].

1.8. Матрицалар алгебрасына кіріспе.

$m \times n$ матрицасы деп m қатары және n бағаны бар K өрісінің сандарынан құрылған тікбұрышты кестені айтамыз.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{1.8.1}$$

Егер $m = n$ тең болса да матрицаны және анықтауышты айырып білу керек. Матрицаға ешқандай шама сәйкес қойылмайды. Екі матрицаны тең деп айтамыз, егер олардың өлшемдері бірдей болса және сәйкес элементтері тең болса.

(1.8.1) матрицасын қысқаша $(a_{ij})_m^n$ арқылы белгілейміз. Матрицаларға пайдаланатын амалдарды еңгізейік.

1.8.1. Матрицалардың қосындысы

Егер $A = (a_{i,j})_m^n$ және $B = (b_{i,j})_m^n$ бірдей өлшемді матрицалар болса, онда $A + B$ қосындысы $(a_{i,j} + b_{i,j})_m^n$ матрицасына тең болады.

1.8.2. Матрицаны санға көбейту амалы.

Егер $A = (a_{i,j})_m^n$ матрицасы берiлсе және K өрiсiнен λ саны берiлсе, онда λA матрицасы $(\lambda a_{ij})_m^n$ матрицасы арқылы анықталады.

1.8.3. Матрицалардың көбейтiндiсi

Егер $A = (a_{i,j})_m^n$ матрицасының бағандар саны $B = (b_{i,j})_n^k$ матрицасының қатарлар санына тең болса, онда элементтерi келесi теңдiктер бойынша есептелетiн

$$(\forall i \leq m)(\forall j \leq k)[c_{ij} = a_{i1}b_{1,j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}]$$

$C = (c_{i,j})_m^k$ матрицасын A және B матрицаларының көбейтiндiсi деп айтамыз. C матрицасының қатарлар саны A матрицасының қатаралар санына тең, ал бағандар саны B матрицасының бағандар санына тең.

Start

1. (4^{pts}) Матрицалардың көбейтiндiсiн есептеңiз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

End Correct

Answers:

Матрицаларға пайдаланатын амалдардың қасиеттері

Кез келген A, B, C матрицалары үшін және λ, μ сандары үшін келесі тепе-теңдіктер орындалады:

1. $A+B = B+A$ – қосу амалының (коммутативтығы) аустырымдылығы (матрицалардың өлшемдері бірдей);
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ – қосу амалының терімділігі (ассоциативтығы);
3. $A+\theta = A$. Бұл жерде θ нөлдерден құрылған матрица, оның өлшемі A матрицасының өлшемімен бірдей;
4. $A+(-A) = \theta$. Бұл жерде $-A$ матрицасының элементтері A матрицасының элементтеріне қарама қарсы;
5. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
6. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
8. $1 \cdot A = A$.

Бұл қасиеттердің дәлелдеулері K өрісінің сандарының қасиеттерінен оңай шығады. Матрицаны скалярға көбейту амалы бинарлық амал болмайды, өйткені көбейту әр түрлі жиындардың элементері үшін орындалып отыр. Бұл амалды скалярдың матрицаға әсер етуі деп түсінуге болады. Матрицалардың басқа қасиеттерінің дәлелдеулерінде қосындылардың қасиеттері қолданылады. Сол қасиеттерді келтірейік.

1.
$$\sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2. Тұрақты көбейткішті қосындының сыртына шығаруға болады
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda b_i = \lambda b_1 + \lambda b_2 + \cdots + \lambda b_n = \lambda(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i$$

3. Егер қосындының әр бір қосылғышы екі қосылғыштың қосындысы болса, онда
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

4.
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})+\cdots+(a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn})$$

Бұл қосындыны (1.8.1) кестесінің қатарларының қосындысының қосындысы деп түсінуге болады. Және оны басқаша жинақтауға болады - жоғарыдағы кестенің бағандарының қосындысының қосындысы деп
$$(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1})+(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2})+\cdots+(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

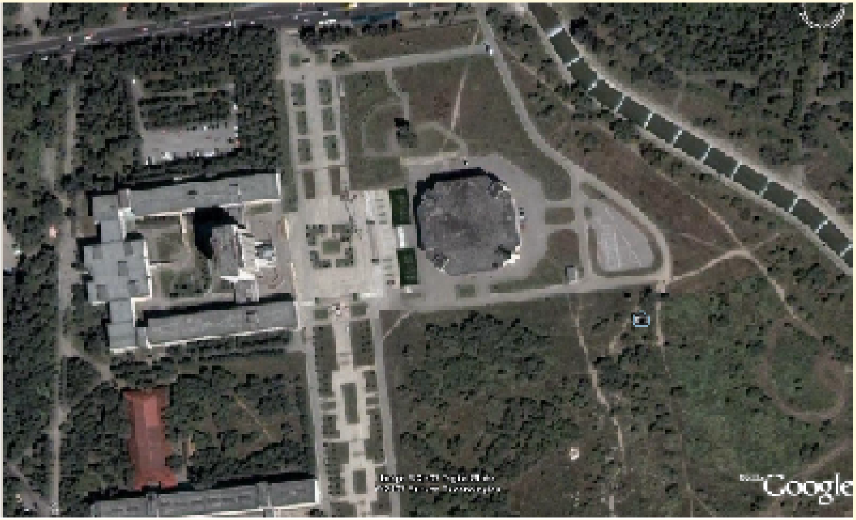
Матрицалардың келесі қасиеттерінің дәлелдеулері күрделі болып келеді:

1. Егер A, B, C матрицаларының өлшемдері келесі болса $A = (a_{ij})_m^n$, $B = (b_{ij})_n^k$, $C = (c_{ij})_k^s$, онда $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
2. Егер A, B, C матрицаларының өлшемдері келесі болса $A = (a_{ij})_m^n$, $B = (b_{ij})_n^k$, $C = (c_{ij})_n^k$, онда $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
3. Егер A, B, C матрицаларының өлшемдері келесі болса $A = (a_{ij})_k^s$, $B = (b_{ij})_n^k$, $C = (c_{ij})_n^k$, онда $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.

3) қасиет 2)-ші қасиеттің салдары болмайтынын ескерейік. Олай болу үшін матрицалардың көбейту амалы ауыстырымды болу керек. Бірақ кейбір матрицалар үшін $A \cdot B$ бар болса да $B \cdot A$ табылмауы мүмкін. Екі көбейтінді бар болса да (екі матрицада бірдей өлшемді шаршылы), олар бірдей болуға міндетті емес, бұны тексеру үшін тривиалды емес екінші ретті матрицаларды алуға болады.

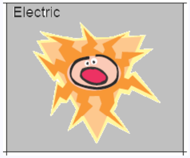
Біз көбіне K өрісінің элементтерінен құрылған шаршылы n-өлшемді матрицалармен жұмыс істейміз. Бұл жиынды $M_n(K)$ арқылы белгілейміз. Жоғарыдағы қасиеттерден $M_n(K)$ жиыны қосу және көбейту амалдарымен қоса ассоциативты сақина құратыны шығады (ол сақинаның бірлігі бар екенін келесі дәрісте дәлелдейміз). Егер сақинанада элenттерді өрістің скалярларына көбейту амалы орындалып, сол амалы үшін 5. — 8 қасиеттері орындалатын болса, онда оны алгебра деп атайды. Сондықтан, $(M_n(K), +, \cdot, \odot_\lambda, =)_{\lambda \in K}$ – ассоциативты алгебра (бірлігі бар).

Әдебиет – Куроштың кітабы [3].



ҚазҰУ кампусынан алынған GoogleEarth сурeтi

1.9. Кері матрица.



Егер кері айтылмаса ары қарай барлық матрицалар $M_n(K)$-дан алынған шаршылы матрицалар. E матрицасын бірлік деп айтамыз, егер $(\forall X \in M_n(K))[X \cdot E = X = E = X]$.

Факт 5 *(сақиналар теориясының белгілі тұжырымы) Егер кез келген сақинада бірлік элемент бар болса, онда ол жалғыз болады.*

Егер E_1, E_2 екі бірлік элементтер болса, онда $E_1 = E_1 \cdot E_2 = E_2$. $M_n(K)$ сақинасында бірлік элемент табылады. Әріне, бірлік матрица келесі болады

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

B матрицасын A матрицасына кері деп айтамыз, егер $A \cdot B = E = B \cdot A$.

Факт 6 *(бірлігі бар ассоциативты сақиналар теориясының белгілі тұжырымы) Егер бірлігі бар ассоциативты сақинада кері элемент табылатын болса, онда ол жалғыз болады.*

A-ның екі кері элементі B_1, B_2 бар деп кері жорайық. Онда $(B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2$. Бір жағынан, ассоциативтық қасиеті орындалғандықтан бұл матрица келесі матрицаға тең $B_1 \cdot (A \cdot B_2) = B_1 \cdot E = B_2$. Кері матрица табылғандықтан, ол жалғыз болады және A^{-1} арқылы белгіленеді. Кері матрицаның негізгі қасиеті $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$.

Теорема 12 *Егер $A, B \in M_n(K)$, онда матрицалардың көбеіндісінің анықтауышы $det(A \cdot B)$ көбейткіштердің анықтауыштарының көбейтіндісіне тең.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін $2n$-ретті қосымша анықтауыш қарастырылады:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{A} & \text{0} \\ \text{-E} & \text{B} \end{vmatrix}$$

Лапласс теоремасынан $\Delta = det(A) \cdot \det(B)$ теңдігі тікелей шығады. Басқа жағынан, B матрицасы орналасқан шаршыны нөлге айналдыру үшін анықтауыштың бағандарына амал жасайық.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{A} & \text{D} \\ \text{-E} & \text{0} \end{vmatrix}$$

D матрицасын $C = A{\cdot}B$ матрицасымен беттесетіне және $\Delta = det(C)$ теңдігі орындалатынына көзімізді жеткізу керек.

Салдар 4 *Егер A матрицасының керісі бар болса, онда $det(A) \neq 0$.*

Теорема 13 *Анықтауышы нөлден өзгеше болатын* $A = (a_{ij})_n^n$ *матрицасы берілсін. Онда* A^{-1} *кері матрицасы табылады және ол келесі матрицаға тең болады*

$$B = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Бұл теореманың дәлелдеуі оңай. Ол үшін A және B матрицаларын көбейтіп алып, (1.7.2, 1.7.3) пункттерінде дәлелденген қасиеттердің көмегімен $AB = E = BA$ теңдігінің орындалатынын түсіну жеткілікті. Жоғарғы формуланы есте сақтау үшін ойша A матрицасының әрбір элементін алгебралық толықтауышына өзгертіп, шыққан матрицаны төңкеріп, d санына бөліңіз. Бұл теорема бойынша кері матрицаны табу өте тиімсіз. Өйткені, ол үшін $(n-1)$-ретті n^2 анықтауыштарды есептеу керек. Үшінші ретті матрицаларынан бастап үшін бұл әдіс тиімсіз.

1.9.1. Кері матрицаны элементар түрлендірулер арқылы есептеу

A матрицасы үшін кері матрицасының есептеу немесе кері матрицасының табылмайтынын дәлелдейтін әдісті келтірейік. $A = (a_{ij})_n^n$ берілген матрица болсын. A^{-1} кері матрицасын анықталмаған түрде $A^{-1} = X = (x_{ij})_n^n$. Есеп матрицалық теңдеуге $AX = E$ келтірілді. $AX = E$ матрицалық теңдеуі n скалярлық теңдеулер жүйесіне эквивалентті.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_{11}+a_{1,2}x_{21}+\dots+a_{1,n}x_{n1} &= 1\\ a_{2,1}x_{11}+a_{2,2}x_{21}+\dots+a_{2,n}x_{n1} &= 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n,1}x_{11}+a_{n,2}x_{21}+\dots+a_{n,n}x_{n1} &= 0\end{cases}, \quad \begin{cases} a_{1,1}x_{12}+a_{1,2}x_{22}+\dots+a_{1,n}x_{n2} &= 0\\ a_{2,1}x_{12}+a_{2,2}x_{22}+\dots+a_{2,n}x_{n2} &= 1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n,1}x_{11}+a_{n,2}x_{21}+\dots+a_{n,n}x_{n2} &= 0\end{cases}, \dots$$

$$\dots, \begin{cases} a_{1,1}x_{1n}+a_{1,2}x_{2n}+\dots+a_{1,n}x_{nn} &= 0\\ a_{2,1}x_{1n}+a_{2,2}x_{2n}+\dots+a_{2,n}x_{nn} &= 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n,1}x_{1n}+a_{n,2}x_{2n}+\dots+a_{n,n}x_{nn} &= 1\end{cases}$$

Бірінші теңдеу кері матрицаның бірінші бағанының белгісіздері бойынша, екінші теңдеу кері матрицаның екінші бағанының белгісіздері бойынша және т.с.с. Бұл шаршаылы САТЖ-лардың бос мүшелері бірлік матрицаның бағандары. Бірінші жүйені Гаусс әдісімен шешу деген келесі кетені білдіреді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & |0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & |1\end{pmatrix} \text{ к виду } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & |b_{11}\\ 0 & 1 & \dots & 0 & |b_{21}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & |b_{n1}\end{pmatrix}$$

Бұл жағдайда $x_{11}=b_{11}, x_{21}=b_{21}, \dots, x_{n1}=b_{n1}$ шығады және A^{-1} кері матрицасының бірінші бағанының элементтері табылады. Соны екнші САТЖ үшінде айтуға болады. Барлық n САТЖ-ны бір уақытта қалай шешуге болады? Жүйелерде белгісіздер әр түрлі болғанымен, белгісіздердің матрицасы біреу екенін ескерейік. Бұл жүйелерде бос мүшелерде әр түрлі. Онда кестені қатаралының Гаусс түрлендірулері арқылы өзгертуге тырысайық

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & |0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & |0 & 0 & \dots & 1. \end{pmatrix}$$

Демек, $(A|E)$ түріндегі матрицаны $(E|B)$ түріндегі матрицаға келтіріңіз. Егер біз E матрицасының бірінші бағанынан басқа барлық бағандар туралы ұмытатын болсақ, онда бірінші САТЖ-ны шешеміз және кері матрицаның бірінші бағанын табамыз. Сол сияқты кері матрицаның басқа бағандарын табамыз. Егер түрлендірулер барысында A матрицасының біреуі нөлге айналса, онда A матрицасының керісі табылмайды. Сонымен, біз күрделі, бірақ эффективті кері матрицаны есептеу әдісін келтірдік:

Теорема 14 *A матрицасының керісін есептеу үшін $(A|E)$ кестесін құрып, оны қатарларының Гаусс түрлендірулерімен $(E|B)$ түріне келтіру керек. Егер оның нәтижесі жақсы болса (A-ның бірден-бір қатары нөлге айналмаса), онда B A-ның кері матрицасы болады. Кері жағдайда, A^{-1} матрицасы табылмайды.*

Quiz A матрицасы үшін кері матрицаны есептеңіз

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(2)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \xrightarrow[(1)+(2)]{(3)+2(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \xrightarrow[(1)+(3)]{(2)-(3)}$$

Ans

$$\xrightarrow[(1)+(3)]{(2)-(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \xrightarrow[-1(2)]{-1(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right)$$

Ans

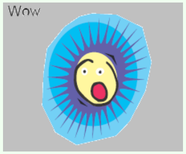
Ответ: $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$

Ans

Clear

Әдебиет – Курoштың кітабы [3].

1.10. Матрицалардың ұқсастығы



Матрицалар теориясы математиканың күрделі және үлкен бөлімі болып есептеледі, оның өте көп қолданулары бар және осы теорияда көптеген ғылыми зерттеулер жүргізіледі. Осы тарауда біз матрицалар теориясының бастапқы түсініктерін, матрицалардың ұқсастығын, ұқсастықтың инварианттарын және матрицалармен жұмыс істеу технологиясын келтіреміз.

Анықтама 22 *n тұрақты сан болсын және $i, j \leq n$. n-ші ретті e_{ij} матрицасын матрицалық бірлік деп айтамыз, егер оның i-ші қатарымен j-ші бағанының қиылысуындағы элемент бірге тең болып, қалған барлық элементтер нөлге тең болса. Келесі теңдік орындалады*

$$e_{ij} \cdot e_{ks} = \begin{cases} e_{is} & \text{егер } j = k, \\ 0 & \text{егер } j \neq k \end{cases}$$

Кез келген $A = (a_{ij})_n^n$ матрицасы матрицалық бірліктердің бірмәнді сызықтық комбинациясы болады.

Анықтама 23 *$t_{ij}(\alpha) = E + \alpha \cdot e_{ij}$ $(i \neq j)$ түрдегі матрицалар және диагоналындағы i-ші элемент β- ға тең болып, қалған барлық элементтері бірге тең болатын $d_i(\beta)$ диагоналды матрицалар элементар матрицалар деп аталады.*

Title Page
Contents
Page 57 of 142
Go Back
Close

A матрицасының элементар матрицаларға көбейтіндісі сол матрицаның Гаусс түрлендірулеріне эквивалентті.

Тұжырым 2

- *A матрицасының сол жағынан (оң жағынан) $d_i(\beta)$ матрицасына көбейтіндісі A матрицасының i-ші қатарын (бағанын) β санына көбейтіндісіне эквивалентті.*

- *A матрицасының сол жағынан $t_{ij}(\alpha)$ матрицасына көбейтіндісі A матрицасының i-ші қатарының және α санына көбейтілген j-ші бағанының қосындысына эквивалентті. $A{\cdot}t_{ij}(\alpha)$ көбейтіндісі j-ші бағанға α санына көбейтілген i-ші бағанның қосындысына эквивалентті.*

$M_n(K)$ матрицалар сақинасының $Z(M_n(k))$ центрі деп $M_n(K)$-ның кез келген матрицасымен ауыстырымды болатын барлық матрицалардың топтастырылуын айтамыз.

Тұжырым 3 *$M_n(K)$-ның центрі скалярлық матрицалардан құрылады. Скалярлақ матрицалар деп келесі түрдегі ρE матрицаларды айтады, бұл жерде $\rho \in K$.*

$A \in Z(M_n(K))$ болсын. Онда $\alpha \neq 1$ болған жағдайда $A{\cdot}d_i(\alpha) = d_i(\alpha){\cdot}A$ болғандықтан A матрицасының i-ші қатардың және i-ші бағанның элементтері нөлге тең болу керек. Сондықтан, A матрицасы диагонал болу керек. Егер бұл матрица скалярлық емес болса және оның i-ші және j-ші диоганалдық элементтері әр түрлі болса, онда $\beta \neq 0$ болған жағдайда $A \cdot t_{ij}(\beta) \neq t_{ij}(\beta)A$ болады.

Тұжырым 4 *Матрица ерекше емес болу үшін элементар матрицалардың ақырлы санының көбейтіндісінің түрінде жазылу керек.*

Ерекше емес матрица қатарларының және бағандарының Гаусс түрлендірулерімен бірлік матрицаға келтіріледі. Жоғарыдағы тұжырым бойынша $E = U_1 \cdot U_2 \ldots U_k \cdot A \cdot$

$V_1 \cdot V_2 \ \dots V_m$. Элементар матрицаның керісіде элементар болғандықтан, A матрицасы элементар матрицалардың көбейтіндісі болады.

Анықтама 24 *A матрицасының $tr(A)$ ізі деп диагонал элементтерінің қосындысы аталады.*

Тұжырым 5 *Егер AB және BA көбейтінділері табылатын болса, (дербес жағдайда, екі матрицада бірдей өлшемді шаршылы болса), онда $tr(AB) = tr(BA)$.*

Тұжырым 6 *Кез келген матрицалардың көбейтіндісін төңкергенде $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$ тепе-теңдігі орындалады.*

Келесі тұжырымда іздің және төңкеру амалының басқа қасиеттері келтірілген

Тұжырым 7

- $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$;
- $tr(\beta A) = \beta \cdot tr(A)$;
- $(A \pm B)' = A' \pm B'$;
- $(\beta A)' = \beta A'$;
- $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

Анықтама 25 *Шаршылы матрицаның мінездемелік көпмүшесі деп $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E)$ көпмүшесі аталады, ал оның түбірлері сол матрицаның мінездемелік сандары деп аталады.*

Егер $f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} + a_k$ көпмүшесі және A шаршылы матрицасы берілсе, онда $f(A)$ дегеніміз $f(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \cdots + a_{k-1}A + a_k \cdot E$.

Есеп 2 *Бізге келесі матрица берілсін* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *$A$ матрицасын $x^2 - tr(A) \cdot x + det(A) = 0$ матрицалық теңдеудің түбірі болатынын дәлелдеңіз.*

Анықтама 26 *$A, B \in M_n(K)$ матрицаларының $[A, B]$ сақиналық коммутаторы деп $AB - BA$ матрицасы аталады.*

Келесі тұжырымның тікелей дәлелдеуі өте күрделі болады.

Есеп 3 *Кез келген $A, B, C \in M_2(K)$ матрицалары үшін $[[A, B]^2, C] = 0$ тепе-теңдігі орындалады.*

Ескерту: $D = [A, B]$ деп алып алдыңғы есептің көмегімен D^2 скалярлық матрица болатыны дәлелдеу керек.

Анықтама 27 *$A, B \in M_n(K)$ матрицалары ұқсас деп аталады, егер $(\exists C \in M_n(K))[A = C^{-1}BC]$ және осы түсінік $A \approx B$ түрінде жазылады.*

Факт 7 *Матрицалардың ұқсастығы эквиваленттік қатынас болады, өйткені ол рефлексивты $A \approx A$, симметриялы $A \approx B \Rightarrow B \approx A$ және транзитивты $A \approx B, B \approx C \Rightarrow A \approx C$.*

Анықтама 28 *Егер кейбір k саны үшін $A^k = 0$ теңдігі орындалса, онда A матрицасы нильпотентті деп аталады, егер $A^2 = A$, онда идемпотентті, егер $A^2 = E$, онда инволютивты, егер $A^k = A$, онда периодты.*

Теорема 15 *A матрицасы және B матрицалары ұқсас болсын. Онда*

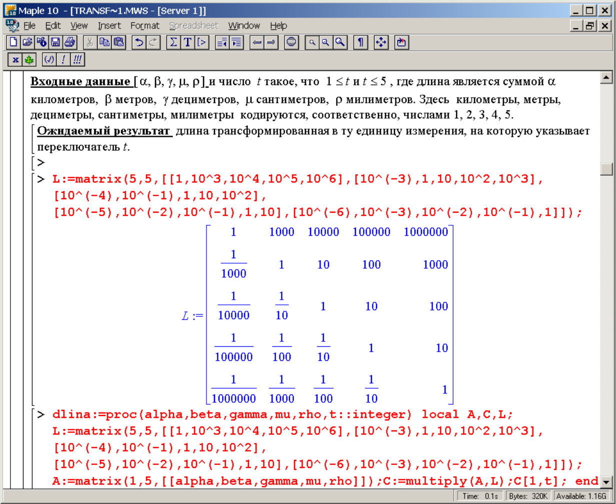
- $A^k = C^{-1}B^kC$;
- $tr(A) = tr(B)$;
- $det(A) = det(B)$;
- *Ұқсас матрицалардың мінездемелік көпмүшелері бірдей болады;*
- *Егер ұқсас матрицалардың біреуі келесі қасиетті қанағаттандырса: нильпотенттік, идемпотенттік, инволютивтік, периодтық, онда екіншісі де сол қасиетті қанағттандырады.*

Келесі есепті қарастырайық. Берлген A матрицасы үшін $A = C^{-1}BC$ теңдігі орындалатындай қарапайымдау B матрицасын және өзгертуші C матрицасын табу керек. Бұл есептің матрицалармен есептеулерді жүргізу үшін маңызы өте зор. Шешімі өте күрделі және ол сызықтық операторлар тақырыбын қаратсырғанда табылады.

Мысал. 11 бетінде келтірілген swf-ролигының трансформерлер менюында ұзындықтардың, аудандардың, көлемдердің мөлшерлерін трансформациялау инструменттері бар болған. Мысал үшін сіздерге әр түрлі бірліктермен берілген келесі ұзындықты km, m, dm, sm, mm мөлшелеу бірліктерінің біреуіне трансформациялау керек болсын

$$\alpha\,\mathrm{km} + \beta\,\mathrm{m} + \gamma\,\mathrm{dm} + \delta\,\mathrm{sm} + \rho\,\mathrm{mm}.$$

t арқылы $1 \leq t \leq 5$ натурал санын белгілейік, ол сан соңғы тізімдегі таңдалған бірліктің орналасуын білдіреді.



Суреттегі өлшеу бірліктерінің қарым-қатынасын көрсететін L матрицасын құруға болады. Егер A матрицасы арқылы $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho)$ қатарын белгілесек, онда есепті шешу үшін AL матрица қатарын табамыз, одан кейін оның t-шi элементін табамыз. Суретте осы есептің шешілуі үшін Maple-дағы толық коды келтірілген. Бір өте жақсы программист осы есепті Flash-та программасын құра алмай, біздің Maple-программамызды қарап ғана Flash-та программаны құрды.

Есеп. Бусидо жекпе жектерін қарағанда таразының және ұзындықтың ағылшын мөлшерлін түсіну көбінесе қиындық тудырады. Ағылшын мөлшерлін СМ көшіру матрицалырын құрыңыз. Мысал үшін бусидошының бойы 5 фут 11 дюйм болсын. Ол неше см тең?

Әдебиет – Хорн және Джонсонның [6] фундаменталды монографиясы. Және бір кітап – Скорняковтың оқу құралы [5].

Title Page
Contents
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 62 of 142
Go Back
Close

1.11. Бір белгісізі бар көпмүшелерді қалдықпен бөлу алгоритмі

Қарапайым $f(x) = ax + b = b + ax$ және $g(x) = ax^2 + bx + c = c + bx + ax^2$ көпмүшелермен мектепте кездескен боларсыңдар. K өрісіндегі бір белгісізі бар көпмүше деп $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ түрдегі өрнекті айтамыз, бұл жерде n – натурал сан және a_i коэффициенттері K өрісіне тиісті. K өрісінің кез келген саны көпмүше болады. Көпмүшенің жоғарыдағы жазылуы белгісіздің дәрежелерінің өсу бойынша жазылуы болады. Көпмүшенің белгісізінің дәрежелерінің кему бойынша да жазуға болады $f(x) = d_0x^n + d_1x^{n-1} + \cdots + d_n = \sum_{i=0}^{n} d_ix^{n-i}$. Бұл жазылуда $d_0 \neq 0$ деп ұйғарып n-ді f-тің дәрежесі де атаймыз және $deg(f)$ арқылы белгілейміз. Әрине, кері жағдайда $f = 0$. $f(x), g(x)$ көпмүшелері үшін қосу және көбейту амалдарын оңай анықтауға болады. Егер $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ және $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$, онда $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$. Егер $f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ және $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$, онда $f(x) \cdot g(x) = c_0x^{n+m} + c_1x^{n+m-1} + \cdots + c_{n+m}$, бұл жерде $c_k = \sum_{i+j=k} c_kx^{n+m-k}$. Дербес жағдайда $c_0 = a_0b_0$, сондықтан нөлдк емес көпмүшелердің көбейтіндісі нөлдік емес көпмүше болады және дәрежесі көбейткіштердің дәрежелерінің қосындысына тең болады. Коэффициенттері K өрісінен алынған бір белгісізі бар көпмүшелер жиынын

Title Page
Contents
Page 63 of 142
Go Back
Close

Quiz Көпмүшелерді көбейтіңіз

$K[x]$ арқылы белгілейміз. $(2x^2 - 3x + 4)(x^2 + 5x - 2) = \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$

Ans

Clear

Теорема 16 *$K[x]$ көпмүшелер жиыны көпмүшелердің қосу және көбейту амалдары бойынша коммутативті және ассоциативті бірлігі бар нөлдің бөлгіштері жоқ сақина құрайды.*

$(K[x], +, \cdot, =)$ сақинаның қасиеттері көбіне бүтін сандар сақинасының қасиеттеріне ұқсайды. Екі сақинада евклидтік сақиналар классына кіреді, олардың екеуіндеде қалдықпен бөлу алгоритмі анықталған. Егер m, n $n \neq 0$ болатындай бүтін сандар болса, онда $m = nq + r$ теңдігі орындалатындай жалғыз бүтін q және теріс емес бүтін сандары табылады. q саны бөлінді, ал r қалдық деп аталады.

Теорема 17 *Егер $f(x), g(x) \in K[x]$ және $g(x) \neq 0$, онда келесі шарттарды қанағаттандыратын $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, $deg(r(x)) < deg(g(x))$ жалғыз $q(x), r(x) \in K[x]$ көпмүшелері табылады.*

Бір көпмүшені басқа көпмүшеге қалдықпен бөлу жоғарғы теореманың дәлелдеуіне сүйеніп бұрышпен бөлу арқылы шығады. Осыған арифметикадағы натурал сандарды бұрышпен бөлу әдісі негізделеді. Шынымен, мысал үшін, 3289 санын 48 санына бөлу керек. Ол үшін сандардың келесі жазылуын пайдаланайық $3289 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9$, $\quad 48 = 4 \cdot 10 + 8$. Келесі көпмүшелерді қарастырайық $f(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x +$

9, $\quad g(x) = 4 \cdot x + 8$. Онда бірінші көпмүшені екінші $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ көпмүшеге бұрышпен бөлген жеткілікті болады. Осында x-тың орнына 10 санын қойсақ, онда $3289 = f(10) = g(10) \cdot q(10) + r(10)$ шығады.

Көбіне $f(x)$ көпмүшесін сызықты көпмүшеге бөлуге тура келеді $x-c$. Бұл жағдайда Горнер сұлбасын пайдаланған жөн болады. $f(x) = a_0^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ көпмүшесі берілсін. Бөліндіні келесі түрде іздейміз $q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \cdots + b_{n-2} x + b_{n-1}$. Онда $f(x) = (x-c)q(x) + r$, бұл жерде r нөлдік дәрежелі көпмүше - сан. Осында $f(x)$, $g(x)$ қойсақ және бірдей дәрежелілердің коэффициенттерін салыстырсақ келесі теңдіктерге келеміз:

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1 - cb_0, a_2 = b_2 - cb_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2}, a_n = r - cb_n$$

Осы теңдіктерді b_i бойынша өзгертіп жазсақ, Горнер сұлбасына келеміз:

$$b_0 = a_0, b_1 = a_1 + cb_0, b_2 = a_2 + cb_1, \ldots, b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2}, r = a_n + cb_{n-1}$$

Келесі теореманың дәлелдеуі өте қарапайым, бірақ өзі жие қолданылады

Теорема 18 (Безу) *с саны $f(x)$ көпмүшесінің түбірі болады сонда және тек сонда ғана, егер $f(x)$ $x - c$ көрмүшесіне қалдықсыз бөлінсе.*

Анықтама 29 *с саны $f(x)$ көпмүшесінің k-еселі түбірі деп аталады, егер $f(x) = (x-c)^k \cdot q(x)$ болса және с саны $q(x)$ көпмүшесінің түбірі болмаса.*

Теорема 19 *Егер с саны $f(x)$ көпмүшесінің k-еселі түбірі болса, онда с $f'(x)$ туындысының $(k-1)$-еселі түбірі болады.*

Горнер сұлбасы арқылы көпмүшелердің түбірлерінің еселігін анықтау қиын емес. Кейбір жағдайларда $f(x)$ көпмүшесін басқа жолмен жіктеу керек

$$f(x) = A_0(x-c)^n + A_1(x-c)^{n-1} + A_2(x-c)^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(x-c) + A_n.$$

Бұл есепті үш жолмен шешуге болады:

- Анықталмаған коэффициенттер әдісімен. $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $n+1$ коэффициенттерді табу үшін $n+1$ белгісізі бар САТЖ құру керек.

- $f(x)$ функциясын c нуктенің маңайында Тейлор қатарына жіктеу керек

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}\cdot(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}\cdot(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n,$$

  бұл жерде сол қатар $f(x)$ үшін көпмүше болады. Бұл формуладан $A_0 = a_0, \quad A_n = f(c)$ теңдіктері шығады;

- Ең жылдам әдіс - $f(x)$ көпмүшесін $x-c$ көпмүшесіне Горнер сұлбасымен бөлу керек, нәтижеде $f(x) = (x-c)q_1(x) + r_0$ теңдігі шығады, одан кейін бірінші бөліндіні $x-c$ көпмүшесіне бөлу керек $q_1(x) = (x-c)q_2(x) + r_1$ және т.с.с., бөлінді $q_{n-1} = (x-c)\cdot q_n + r_{n-1}$ санына тең болмағанша. Одан кейін

$$f(x) = q_n(x-c)^n + r_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + r_1(x-c) + r_0$$

  болатынын түсіну қиын емес.

Келесі жаттығу бізге басқа дәрісте коэффициенттері бүтін сандар болатын көпмүшелердің рационал түбірлерін табу үшін керек болады.

Есеп 4 *Бүтін коэффициенттері бар $f(x)$ көпмүшесін қарастырайық (қысқаша жазсақ $f(x) \in Z[x]$) және c – бүтін саны болсын. Онда*

$$f(x) = A_0(x-c)^n + A_1(x-c)^{n-1} + A_2(x-c)^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(x-c) + A_n$$

жіктелудегі барлық коэффициенттер бүтін сандар болады.

Көпмүшелерді қалдықпен болу әдісін және Горнер сұлбасын жақсы үйрену үшін қосымша файлға кіру керек. Ол файлда бөлу рет-ретімен көрсетілген. Біз бөлек файлға кіруіміздің себебі мынадай: әрбір амал киноның бөлек кадрі сияқты және беттердің саныда бірден көбейеді. Бұл бастапқы файлдың навигациясын бұзу мүмкін. Қосымша тіркелген файлда қызыл *қайту* сөзді бассаңыз бастапқы файлға ораласыз. Өзгертулерді сақатмасаңызда болады, өйткені файлдарда қорғаныс бар.

Қосымша pdf-файлға кіресіз бе?

Ол үшін тышқанның оң кнопкасымен кнопка белгісін белгілеп сыртқы файлды жүйенің ескертулеріне қарамай ашыңыз.

Ал енді тіркелегн файлдың алгоритмдерін қалай түсінгеніңізді тексерейік. Қателеріңіз аз болсын.

Title Page
Contents
Page 67 of 142
Go Back
Close

Quiz $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ көпмүшесін $g(x) = x^2 - 3x + 1$ көпмүшесіне бөліңіз.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 & x^2 - 3x + 1 \\
\cline{2-2}
\square x^4 + \square x^3 + \square x^2 & \square x^2 + \square x + \square \\
\cline{1-1}
\square x^3 + \square x^2 + \square x + \square & \\
\square x^3 + \square x^2 + \square x & \\
\cline{1-1}
\square x^2 + \square x + \square & \\
\square x^2 + \square x + \square & \\
\cline{1-1}
\square x + \square &
\end{array}
$$

Ans

Ответ: $f(x) = g(x) \cdot (\square x^2 + \square x + \square) + (\square x + \square)$

Ans

Clear

Quiz $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5$ көпмүшесін $g(x) = x + 2$ көпмүшесіне Горнер сұлбасы бойынша бөліңіз.

	1	-3	-10	2	5
c=-2	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

Ans

Ответ: $f(x) = (x + 2)(\square x^3 + \square x^2 + \square x + \square) + \square$

Ans

Clear

Quiz $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 10x + 20$ көпмүшесін $x + 2$ көпмүшесінің дәрежелері бойынша Горнер сұлбасы бойынша жіктеңіз.

	1	4	6	10	20
c=-2	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	
	$\square$	$\square$	$\square$		
	$\square$	$\square$			

Ans

Ответ: $f(x) = \square(x+2)^4 + \square(x+2)^3 + \square(x+2)^2 + \square(x+2) + \square$

Ans

Clear

Әдебиет – Куроштың кітабы [3].

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

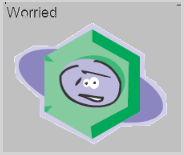
◀ ▶

Page 69 of 142

Go Back

Close

1.12. Көпмүшелердің ең үлкен ортақ бөлгіші



Анықтама 30 *$f(x)$ көпмүшесін $g(x)$ көпмүшесіне бөлінеді деп айтамыз, егер келесі теңдік орындалатындай $f(x) = g(x) \cdot q(x)$ $q(x)$ көпмүшесі табылатын болса. Басқаша айтқанда, $f(x)$-ты $g(x)$-ке бөлгендегі қалдық нөлге тең.*

Көпмүшелердің бөлу амалының қасиеттері

Көпмүшелердің бөлу амалының қасиеттері бүтін сандардың бөлу амалының қасиеттеріне ұқсайды.

- Егер $f(x)$ көпмүшесі $g(x)$ көпмүшесіне бөлінсе және $g(x)$ көпмүшесі $h(x)$ көпмүшесіне бөлінсе, онда $f(x)$ көпмүшесі $h(x)$ көпмүшесіне бөлінеді;
- Егер $f(x)$ көпмүшесі $h(x)$ көпмүшесіне бөлінсе және $g(x)$ көпмүшесі $h(x)$ көпмүшесіне бөлінсе, онда $f(x) \pm g(x)$ көпмүшесі $h(x)$ көпмүшесіне бөлінеді;
- Егер $f(x)$ көпмүшесі $h(x)$ көпмүшесіне бөлінсе және $g(x)$ көпмүшесі $h(x)$ көпмүшесіне бөлінсе және $u(x), v(x)$ – кез келген көпмүшелер болса, онда $f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x)$ көпмүшесі $h(x)$ көпмүшесіне бөлінеді;

Title Page
Contents
Page 70 of 142
Go Back
Close

- Егер $f(x)$ көпмүшесі $g(x)$ көпмүшесіне бөлінсе және $c \neq 0$, онда $f(x)$ көпмүшесі $c \cdot g(x)$ көпмүшесіне бөлінеді;$f(x)$ көпмүшесі $g(x)$ көпмүшесіне бөлінсе және $g(x)$ көпмүшесі $f(x)$ көпмүшесіне бөлінсе, онда $f(x) = c \cdot g(x)$ теңдігі орындалатындай c констанатасы табылады.

Екі бүтін санның ең үлкен ортақ бөлгішінің анықтамасын есімізге түсірейік. Бізге екі сан берілсін -24 и 36. Бірінші санның бөлгіштері $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ сандары және олардың қарама-қарсылары болады. Екінші санның бөлгіштері $1, 2, 3.4.6, 9, 12, 18, 36$ сандары болады. Берілген сандардың ортақ бөлгіштері $1, 2, 3, 4, 6, 12$ сандары және олардың қарам-қарсылары болады. $gcd(-24, 36)$ ең үлкен ортақ бөлгіші 12 саны болады. Енді осыған қарап екі көпмүшенің ең үлкен ортақ бөлгіштің анықтамасын қалай беруге болады? Көпмүшелер үшін жақсы сызықты реттелу жоқ. Егер берілген сандық мысалға мұқият қарасақ, онда 12 және -12 берілген сандардың ортақ бөлгіштері болатынын және олардың басқа кез келген осы сандардың бөлгіштеріне $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ бөлінетінін байқауға болады.

Анықтама 31 *$f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелерінің ең үлкен ортақ бөлгіші деп келесі шарттарды қанағаттандыратын $gcd(f(x), g(x)) = d(x)$ көпмүшесін айтамыз*

- *$d(x)$ көпмүшесі $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелерінің ортақ бөлгіші;*
- *$d(x)$ көпмүшесі $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелерінің кез келген басқа ортақ бөлгішіне бөлінеді;*
- *$d(x)$-тың бас коэффициенті* 1*-ге тең.*

Анықтаманың соңғы пункті ең үлкен ортақ бөлгішті бірмәнді анықтау үшін қажет.

1.12.1. Евклид алгоритмі

$f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелерінің ең үлкен ортақ бөлгішін табу үшін $f(x)$-ты $g(x)$-қа қалдықпен бөлейік, одан кейін $g(x)$-ты бірінші қалдыққа бөлеміз, одан кейін бірінші қалдықты екінші қалдыққа бөлу керек және т.с.с. қалдық келесі қалдыққа бөлінгенше. Міндетті түрде ондай қалдық табылады, өйткені қалдықтардың дәрежелері кеміп барады және ең кештегенде бұл процесс $deg(g(x))$ қадамнан кейін бітеді.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot q_0(x) + r_0(x) \\ g(x) &= r_0(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) \\ r_0(x) &= r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x) \cdot q_k(x) + r_k(x) \\ r_{k-1}(x) &= r_k(x) \cdot q_{k+1}(x) \end{aligned}$$

Теорема 20 *Ең үлкен ортақ бөлгіш* $d(x) = gcd(f(x), g(x))$ *с* $\cdot\, r_k(x)$ *көпмүшесіне тең болады, бұл жерде с саны* $c \cdot r_k(x)$ *көпмүшесінің бас коэффициенті 1-ге тең болатындай таңдалады.*

Мысал. $f(x) = x^4 + x^3 - 3 * x^2 - 4 * x - 1$ және $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ көпмүшелерінің ең үлкен ортақ бөлгішін табыңыз. Евклид алгоритміндегі көпмүшелерін машиналық құрастыру үшін Latex-тегі *polynom* пакетін пайдаланайық

Title Page
Contents
Page 72 of 142
Go Back
Close

Евклид алгоритмін қолданамыз

$$x^4+x^3-3x^2-4x-1=(x^3+x^2-x-1)\cdot x+\left(-2x^2-3x-1\right)$$
$$x^3+x^2-x-1=\left(-2x^2-3x-1\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\right)+\left(-\tfrac{3}{4}x-\tfrac{3}{4}\right)$$
$$-2x^2-3x-1=\left(-\tfrac{3}{4}x-\tfrac{3}{4}\right)\cdot\left(\tfrac{8}{3}x+\tfrac{4}{3}\right)+0$$

Бұл жерде алдыңғы көпмүшеге қалдықсыз бөлінетін соңғы көпмүше

$$-\frac{3}{4}x--\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}(x+1)$$

болатыны көрініп тұр. Демек, жауабы: $gcd(f(x),g(x))=x+1$

Ескерту. Мысалда бөлу дәл жүргізілді және соңында $-\frac{3}{4}$ көбейткішін алып тасталды. Адам кез келген сандармен оңай жұмыс істейтін машина емес. Евклид алгоритмінде бөлшектерден қалай құтылсақ болады? Жауап өте қарапайым: егер $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$, онда $cf(x)=g(x)(cq(x))+cr(x)$ және $f(x)=(cg(x))(c^{-1}q(x))+r(x)$, $c\neq 0$ болған жағдайда. Осындай түрлендірулерден кейін қалдықтар көп өзгермейді. Бұндай түрлендірулерді ең үлкен ортақ бөлгішті табудың кез келген этапында қолдансақ болады. Осындай қарапайым ескретулер бүтін коэффициенттері бар көпмүшелердің gcd табу барысында бөлшектермен жұмыс істемеу үшін көмектеседі. Компьютер үшін бұл мағынасыз болғанымен, адам үшін өте мағыналы болып табылады.

Title Page
Contents
Page 73 of 142
Go Back
Close

Quiz $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ және $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ көпмүшелерінің ең үлкен ортақ бөлгішін табыңыз.

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3-3x^2-4x-1 & x^3+x^2-x-1 \\ \hline \square x^4+\square x^3+\square x^2+\square x & \square x+\square \\ \hline \square x^2+\square x+\square & \\ \hline \square x+\square & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2(\square x^3+\square x^2+\square x+\square 1) & \\ \square x^3+\square x^2+\square x & \\ \hline 2(\square x^2+\square x+\square) & \\ \square x^2+\square x+\square & \\ \hline \square x+\square & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \square x^2+\square x+\square & \square/(x+1) \\ \hline \square x^2+\square x & \square x+\square \\ \hline \square x+\square & \\ \square x+\square & \\ \hline \square & \end{array}$$

Ans

Жауап: $gcd(f(x), g(x)) = \square x + \square$

Ans

Clear

Келесі теореманың өрңстерді кеңейту үшін маңызы өте зор.

Теорема 21 *Егер* $d(x) = gcd(f(x), g(x))$, *онда келесі шарттарды қанағаттандыратын* $d(x) = f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x)$, $deg(u(x)) < deg(g(x))$, $deg(v(x)) < deg(f(x))$ $u(x), v(x) \in K[x]$ *көпмүшелері табылады.*

$f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелері өзара жәй деп аталады, егер олардың ең үлкен ортақ бөлгіші 1-ге тең болса.

Факт 8 $f(x)$ *және* $g(x)$ *көпмүшелері өзара жәй болады сонда және тек сонда ғана, егер* $f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1$ *теңдігі орындалатындай* $u(x), v(x)$ *көпмүшелері табылатын болса.*

Теорема 22

- *Егер* $f(x)$ *және* $h(x)$ *көпмүшелері өзара жәй болса және* $f(x) \cdot g(x)$ *көпмүшесі* $h(x)$ *көпмүшесіне бөлінсе, онда* $g(x)$ *көпмүшесі* $h(x)$*-ке бөлінеді;*
- *Егер* $f(x)$ *көпмүшесі* $g(x)$ *және* $h(x)$ *көпмүшелеріне бөлінсе,* $g(x)$ *және* $h(x)$ *өзара жәй болса, онда* $f(x)$ $g(x) \cdot h(x)$ *көпмүшесіне бөлінеді.*

Келесі есептің шешу барысында студентөте пайдалы кеңес табады.

Start

1. "Сборник задач по алгебре под ред. Кострикина, М. Факториал, 1995" кітабында 2502k есебі келтірілген: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ және $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ көпмүшелерінің ең үлкен ортақ бөлгішін табыңыз. Жауап ретінде $d(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 1$ көпмүшесі келтірілген. Жауап дұрыс па? *Жауаптар:*

a) ☐ иә, b) ☐ жоқ.

End Score: Correct

Әдебиет: Куроштың кітабы [3].

1.13. Көпмүшелердің түбірлері

$f(x) = a_0x + a_1$ бірінші дәрежелі көпмүшесінің $x = -a_1/a_0$ жалғыз түбірі болады. $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ екінші дәрежелі көпмүше үшін түбір табу қиындау. Түбірлерді табу формуласынан

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} \tag{1.13.1}$$

детерминантқа байланысты $f(x)$-тың R өрісінде түбірлер саны екіден аспайды, ал C өрісінде екі түбірі болады.

Теорема 23 *Кез келген K өрісі үшін n-дәрежелі $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in K[x]$ көпмүшесінің түбірлер саны кез келген $F \supset K$ өрісіндегі түбірлердің еселігін ескергенде n-нен аспайды. Егер $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ $f(x)$ көпмүшесінің F өрісіндегі түбірлері болса, онда*

$$f(x) = a_0(x - \rho_1)(x - \rho_2)\ldots(x - \rho_n).$$

Дәлелдеуі индукция бойынша жүргізіледі.

1.13.1. Виет формулалары

Бізге бас коэффициенті 1-ге тең $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ көпмүшесі және оның барлық түбірлері берілсін $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Онда

$$\begin{cases} a_1 = -\sum_i \lambda_i \\ a_2 = \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j \\ a_3 = -\sum_{i<j<k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i \end{cases}$$

Start

1. $x^3 - 5x^2 + 4x + 1$ көпмүшесінің түбірлерінің квадраттарының қосындысын табыңыз.

a) ☐ 0 , b) ☐ 20 , c) ☐ 8.

End | Score: | Correct

Егер K өрісі ақырлы болса, онда 23 теоремасы бойынша $f(x) \in K[x]$ көпмүшесінің K өрісіндегі түбірлерін $f(x)$-ты әртүрлі $x - \rho$ бірмүшелеріне бөлу арқылы табуға болады, бұл жерде $\rho \in K$. Ақырсыз K өрістері үшін $f(x)$ көпмүшесінің түбірін табу есебі қолданбалы есептерді шешкенде өте қажет, бірақ оны шешу оңай емес. Кейбір деректер бойынша, (1.13.1) формуласы 2 – 3 мың жыл бұрын белгілі болған, ал үшінші және төртінші дәрежелі теңдеулердің радикалдардағы шеімдерінің формулаларын 16-шы ғасырда Кардано және Тарталья шығарған. Осы формулаларды көргіңіз келсе [3] кітабын қараңыз. Кардано мен Тартальядан кейін көп математиктер бесінші және одан жоғарғы дәрежелі теңдеулердің шешуін табумен айналысқан. 1825 – 1830 ж. екі жас дана математиктер Францияда Эварист Галуа, және Норвегияда Нильс Абель бесінші және одан жоғарғы дәрежелі теңдеулердің шешуін табудың жалпы алгоритмі жоқ екенін дәлелдеген. Галуаның шешуінен абстрактты алгебралық жүйелер пайда болды және бірнеше ғасырларға алгебраның маңызды бағыттарының дамуына жол берді.

Енді біз көпмүшенің түбірлерін табуға көмектесетін бірнеше әдістерді келтіреміз.

1.13.2. Еселі түбірлерді жекелеу.

$f(x)$ көпмүшелерінің еселі түбірі бар болсын

$$f(x) = a_0(x-\lambda_1)^{k_1}(x-\lambda_2)^{k_2}\dots(x-\lambda_s)^{k_s},$$

бұл жерде $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ сандары әр түрлі. Біз талдау жасап жатырмыз және бізге негізінде көпмүшенің түбірлері белгісіз. Түбірлері $f(x)$-тың түбірлерімен бірдей және еселі түбірлері жоқ $g(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_s)$ көпмүшесін қалай табуға болады? Біздің шешім 19 теоремасына сүйенеді. Осы теорема бойынша
$f'(x) = (x-\lambda_1)^{k_1-1}(x-\lambda_2)^{k_2-1}\dots(x-\lambda_s)^{k_s-1}\cdot h(x)$, бұл жерде $h(x)$ пен $f(x)$ өзара жәй. Осыдан $d(x) = gcd(f(x), f'(x))$ ең үлкен ортақ бөлгіші
$(x-\lambda_1)^{k_1-1}(x-\lambda_2)^{k_2-1}\dots(x-\lambda_s)^{k_s-1}$ көпмүшесіне тең болады. Сондықтан, $f(x) = a_0\cdot d(x)\cdot g(x)$ және еселі түбірлерді жекелеу есебі шешілді.

Quiz $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$ копмүшесінің еселі түбірлерін жекелеңіз.
Шешуі. $f'(x) = 5(x^4 - 6x^2 - 8x - 3) =: 5g(x)$ туындысын табамыз, одан кейін көпмүшенің және туындының ең үлкен ортақ бөлгішін табамыз.

$$\begin{array}{r|l} x^5-10x^3-20x^2-15x-4 & x^4-6x^2-8x-3 \\ \square x^5+\square x^3+\square x^2+\square x & \square x+\square \\ \hline \square x^3+\square x^2+\square x+\square & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \square x^4+\square x^2+\square x+\square & \cancel{\square}(x^3+\square x^2+\square x+\square) \\ \square x^4+\square x^3+\square x^2+\square x & \square x+\square \\ \hline \square x^3+\square x^2+\square x+\square & \\ \square x^3+\square x^2+\square x+\square & \\ \hline \square & \end{array}$$

Ans

Сондықтан, $d(x) = gcd(f(x), g(x)) = \square x^3 + \square x^2 + \square x + 1 = (\square x + \square)^3$ Ans

Clear

Бұл жерде бөлінділер көп өзгерген жоқ, сондықтан бұл бөлулер өрнектелулерді табу үшін қолдануға болады. Сонымен

$$g(x) = (x+1)^3(x-3)$$

$$f(x) = g(x)x - 4(x+1)^3 = (x+1)^3(x-3)x - 4(x+1)^3 = (x+1)^3[(x-3)x-4] = (x+1)^4(x-4)$$

Жауабы: $f(x) = (x+1)^4(x-4)$

1.13.3. Бүтін коэффициентті көпмүшелердің рационал түббірлері.

Егер $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ көпмүшелерінің коэффициенттері бүтін болса, онда $f(x)$-тың барлық рационал түбірлерін табуға болады:

Теорема 24 *Егер $f(x) \in Z[x]$ және қысқартылмайтын $\frac{p}{q}$ бөлшегі $f(x)$-тың түбірі болса, онда*

- *p a_n-ның бөлгіші;*
- *q a_0-ның бөлгіші;*
- *$(\forall m \in Z)[(p - mq)|f(m)]$, дербес жағдайда $p - q$ $f(1)$-ның бөлгіші және $p + q$ $f(-1)$-ның бөлгіші.*

Осы теорема бойынша көпмүшенің түбірі болу мүмкін сандардың ақырлы саны шығады. Үшінші пункт бойынша осы сандардың жиыны бірден азайады. Осы пунктті дәлелдеу үшін 4 жаттығуы қажет болады. Сандарды түбір болуына тексеруді Горнер сұлбасы бойынша жүргізген ыңғайлы.

Quiz $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ көпмүшесінің рационал түбірлерін табыңыз.
Шешуі. $p \in \{\pm1, \pm2, \pm3\pm4, \pm6, \pm12\}$ және $q \in \{1, 2, 3, 6\}$ сандары үшін қысқартылмайиын $\frac{p}{q}$ бөлшектері $f(x)$-тың түбірлері болуы мүмкін. Осы санда тағы екі тексеруден өту керек $p+q$ $f(1)$-дің бөлгіші және $p-q$ $f(-1)$-дың бөлгіші. $\frac{p}{q}$ бөлшегіне q -ші жолының және p-ші бағанының қиылысуындағы шаршыны сәйкес қоятын, -1 және 1 сандарымен толтырылған іріктеу таблицасын сызамыз. Басында барлық қысқартылатын жерлерде және $1, -1$ нүктелерінде -1 санын қоямыз. Егер сәйкес сан екі тексеруденде өтсе, онда

шаршыға 1 санын жазамыз, кері жағдайда -1 қоямыз.

$q \setminus p$	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	6	-6	12	-12
1	-	-										
2			-	-			-	-	-	-	-	-
3					-	-			-	-	-	-
6			-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ans

Сондықтан, осы іріктеуден кейін түбір болуы мүмкін келесі сандар қалады

$$\square,\ \square,\ \frac{\square}{\square},\ \frac{\square}{\square}$$

Ans

Енді осы сандардың қайсысы түбір болатынын анықтау үшін Горнер сұлбасын пайдаланамыз. Безу теоремасы бойынша c саны көпмүшенің түбірі болады, егер сол көпмүшені $x-c$-ға бөлгендегі қалдық нөлге тең болса. Біртіндеп $f(x)$-ты $x-c$-ға бөлеміз, бұл жерде c табылған тізімдегі сан. Егер қалдық нөлдік болмаса, онда сәйкес жол керек емес және c түбір емес. Ал қалдық нөлге тең болса, онда c түбір болады және басқа сандарды тексеру үшін бөліндіні келесі $x-c$-ға бөлеміз.

	6	19	-7	-26	12
$\frac{\square}{\square}$					

Ans

Title Page
Contents
Page 82 of 142
Go Back
Close

Осыдан шығады

$$f(x) = (x + \square)\left(x - \frac{\square}{\square}\right)\left[\square x^2 + \square x + \square\right]$$

Ans

Сонымен, $f(x)$ көпмүшесінің екі рационал түбірі бар, қалған екеуі соңғы жақшадағы квадратты үшмүшенің иррационал түбірлері болады.

$$\square, \quad \frac{\square}{\square}.$$

Ans

Clear

1.13.4. Комплекс сандар өрісінің алгебралық тұйықтығы.

18-ші ғасырдың математикасының негізгі жетістіктерінің біреуі болып комплекс коэффициентті кез келген көпмүшенің түбірінің табылуы туралы Гаусс теоремасы табылады. Сол кезде бұл теорема алгебраның негізгі теоремасының атын алды. Кәзіргі кезде бұл теорема кәдімгі теоремалардың қатарында. Дегенменде, дәлдеуінде көпмүшенің үзіліссіздігін комплекс айнымалылы функциянікі сияқты қолданады және компакттағы минимум нүктесін табылуын қолданады. Математикалық талдауда бұл түсініктер кешірек беріледі, сондықтан теореманың дәлелдеуін бермейміз.

Салдар 5 *Егер $f(x) \in C[x]$ n-ші дәрежелі көпмүше болса, онда $f(x)$-тың C өрісінде еселігін ескергенде n түбірі болады.*

1.13.5. Нақты коэффициентті көпмүшелердің түбірлері.

Теорема 25 *$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ нақты коэффициентті көпмүше болсын және $\alpha \in C - R$ саны $f(x)$-тың k-еселі түбірі болсын. Онда $\bar{\alpha}$ саныда $f(x)$-тың k-еселі түбірі болады.*

Осыдан нақты коэффициентті кез келген көпмүшенің бірінші және (немесе) екінші дәрежелі нақты коэффициентті көпмүшелердің көбейтіндісіне жіктелетіні шығады.

1.13.6. Интерполяция

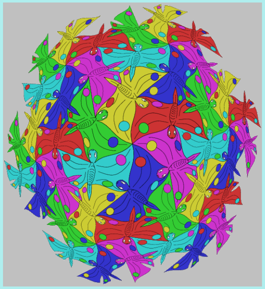
Әр түрлі n сандары $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ және кез келген $b_0, b_1, \ldots, b_n$ сандары берілсін. $1 \leq i \leq n$ сандары үшін $f(\rho_i) = b_i$ теңдігі орындалатындай $f(x)$ көпмүшесін табу керек. Келесі $n-1$-дәрежелі көпмүше қажет қасиеттері бар екенін түсіну қиын емес

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{i-1})(x-\rho_{i+1})\ldots(x-\rho_n)}{(\rho_i-\rho_1)(\rho_i-\rho_2)\ldots(\rho_i-\rho_{i-1})(\rho_i-\rho_{i+1})\ldots(\rho_i-\rho_n)} \cdot b_i$$

Бұл формула Лагранждың интерполяциялық формуласы деп аталады. Бұл формула көптеген практиктердің керексіз талдауларын тоқтатады. Олар жүздеген өлшеулерді жүргізіп және графигін салып, графигін мысал үшін синустың графигына ұқсастығын байқайды. Бірақ осы параметрлердің өзгеруінің жаңа заңын синусың графигі ретінде табылды деп ойлауға ертерек. Бірнеше нүктеден көпмүшеде өтеді және оның пікірін нақты тексеруден өткізу керек.

Әдебиет: Куроштың кітабы [3].

1.14. Штурм әдісі



Бізге нақты коэффициенттері бар $f(x)$ көпмүшесі берілсін. $f(x)$ көпмүшесінің (a, b) интервалында қанша нақты түбірлері бар екенін қарастырайық. (a, b) интервалының шеткі нуктелерінде $f(x)$-тың әр түрлі таңбаларды қабылдауы - түбірдің табылуының қарапайым белгісі. Бірақ интервалдағы көпмүшенің сандарының саны туралы критерий қарапайым емес және оны Э. Штурм дәлелдеген. Біз есепті оңайлату үшін $f(x)$ көпмүшесінің еселі түбірлері жоқ деп алайық. Келесі тақырыбта неге осылай алуға болатыны көрсетеміз.

Егер бізге нақты сандардың ақырлы реттелген тізбегі берілсе, онда бұл жүйеде таңбалардың өзгеруінің саны келесі жолмен есептеледі: осы тізбектегі барлық нөлдерді алып тастаймыз, одан кейін қалған сандардың тек таңбаларын қалдырамыз және екі түрлі таңбаның көршілігі таңбалардың өзгеруі деп аталады. Мысалы үшін, $-3, -5, 0, -1, 2, 4, -5, -6, 0$ сандар жүйесіне $-, -, -, +, +, -, -$ таңбалар жүйесі сәйкес болады, бұл жерде таңбалардың екі өзгеруі бар.

1.14.1. Штурм жүйесі

Егер $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_k(x)$ көпмүшелердің реттелген тізбегі үшін келесі шарттар орындалатын болса

- $f(x) = f_0(x)$;
- $f_k(x)$ көпмүшесінің нақты түбірлері жоқ болса;
- $f_i(x), f_{i+1}(x), \quad 0 \leq i \leq k-1$ жүйесінің көршілес көпмүшелерінің бірдей нақты түбірлері жоқ болса;
- Егер α саны $1 \leq i \leq k-1$ үшін $f_i(x)$ көмекші көпмүшесінің нақты түбірі болса, онда $f_{i-1}(\alpha) \cdot f_{i+1}(\alpha) < 0$;
- Егер α саны $f_0(x)$ көпмүшесінің нақты түбірі болса, онда $f_0(x) f_1(x)$ көбейтіндісі α-ның кіші аймағында өседі,

онда $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_k(x)$ тізбегі $f(x)$ көпмүшесі үшін Штурм жүйесі деп аталады.

Теорема 26 *Кез келген нақты коэффициентті еселі түбірлері жоқ көпмүшесі үшін Штурм жүйесі табылады.*

Штурм жүйесінің құрылуы Евклид алгоритміне ұқсайды. Басында

$$f_0(x) = f(x),$$
$$f_1(x) = f'(x),$$

болады деп алайық. Одан кейін $f_0(x)$-ді $f_1(x)$-ке қалдықпен бөлейік және қалдығын қарама қарсы таңбасымен алып $f_2(x)$ деп атайық және т.с.с.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_1(x)\cdot q_0(x) - f_2(x) \\ f_1(x) &= f_2(x)\cdot q_1(x) - f_3(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{i-1}(x) &= f_i(x)\cdot q_{i-1}(x) - f_{i+1}(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{k-1}(x) &= f_k(x)\cdot q_{k-1}(x) \end{aligned}$$

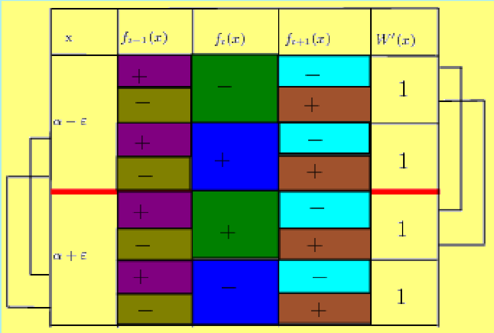
1.14.2. Штурм теоремасы

Электронды құжаттың мүмкіндіктерін қолданып әдістің негізгі жерлерін анықтап қарастырайық. $W(\alpha)$ арқылы $f(x)$ көпмүшесінің $f_0(\alpha), f_1(\alpha), \ldots, f_k(\alpha)$ Штурм жүйесінің кестесіндегі сандардың таңбаларының өзгерулерінің санын белгілейік.

Теорема 27 *Егер $f(x)$ нақты коэффициентті еселі түбірлері жоқ көпмүше болса және $a < b$ сандары $f(x)$-тың түбірлері болмаса, онда көпмүшенің (a, b) интервалындағы нақты түбірлерінің саны $W(a) - W(b)$ санына тең.*

$W(x)$ функциясының мәні натурал сан болады, сондықтан ол "секіріп"өзгеруі мүмкін. Көпмүшелер үзіліссіз функциялар болғандықтан, мәні "секіріп"отыратын нүктелер Штурм жүйесінің қандайда бір көпмүшесінің түбірлері болады. Әрбір көпмүшенің түбірлерінің саны ақырлы болғандықтан, мәндеріде "секіру"болатын нүктелердің саныда ақырлы болады. x $-\infty$-ден өзгерсін және α жоғарыдағыдай нүктелердің біреуі болсын.

1-ші жағдай. α **саны** $f_i(x)$, $\quad i \geq 1$ **көмекші көпмүшенің түбірі болсын.** $f_{i-1}(x), f_{i+1}(x)$ функциялары $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ интервалында өзгермейтін таңбаны қабылдайтын жеткілікті кіші оң ε санын таңдайық. $f_{i-1}(x), f_i(x), f_{i+1}(x)$ функциялары үшін $W'(\alpha-\varepsilon)$ және $W'(\alpha+\varepsilon)$ таңбаның өзгеруінің функциясының бөліктерінің мәндерін қалай өзгеретінін анықтайық. Кестені толтырайық



x	$f_{i-1}(x)$	$f_i(x)$	$f_{i+1}(x)$	$W'(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$+$	$-$	$-$	1
	$-$		$+$	
	$+$	$+$	$-$	1
	$-$		$+$	
$\alpha+\varepsilon$	$+$	$+$	$-$	1
	$-$		$+$	
	$+$	$-$	$-$	1
	$-$		$+$	

Кестеге толықтырулар. $f_i(x)$ көпмүшесінің түбіріне дейінгі және кейінгі мүмкін жағдайлар үш түстің бірдей топтастырылуы арқылы α-ға дейінгі және кейінгі нүктелерде белгіленген. $f_i(x)$ функциясы берілген аймақта таңбасын алудан қосуға немесе керісінше өзгереді. $f_i(x)$-тың сол және оң жағындағы көршілері таңбалары бойынша өзгермейді және бір біріне қарама қарсы. Онда α нүктесіне дейін төрт мүмкіндік бар, және одан кейінде төрт мүмкіндік. Қалай болса да, таңбалардың өзгеруінің санында өзгеріс жоқ.

2-ші жағдай. α $f_0(x)$ **көпмүшесінің түбірі болсын.**

$f_1(x)$ функциясы $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ интервалында өзгермейтін таңбалы болатын жектілікті кіші оң ε санын таңдайық. $f_0(x), f_1(x)$ ішкі жүйесіндегі α-ға дейінгі және кейінгі таңбалардың өзгеруін сипаттайтын $W'(X)$ фрагментінің өзгеруінің кестесін толтырайық.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$W'(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$-$	$+$	1
	$+$	$-$	
$\alpha+\varepsilon$	$+$	$+$	0
	$-$	$-$	

Кестеге толықтырулар. Түбірге дейінгі және кейінгі мүмкін жағдайлар екі түстің бірдей топтастырылуы арқылы белгіленген. $f(x)$ көпмүшесінің еселі түбірлері жоқ болғандықтан, өзінің кез келген түбірінің маңайында бұл функция өседі немесе кемиді (графигі абциссалар өсін жанап өте алмайды). Штурм жүйесінің көпмүшелерінің соңғы қасиеті бойынша $f_0(x)$-тың осындай өзгеруі кесстедегі $f_1(x)$-тың өзгеруімен ғана сәйкес бола алады. Нәтижеде түбір арқылы өткенде таңбалардың бір өзгеруі жоғалып қалады. Сондықтан, $W(x)$ тек кемиді және бұл функцияда өзгерістер тек $f(x)$-тың түбірлерінде болады. Демек, $f(x)$ көпмүшесінің (a, b) интервалындағы түбірлерінің саны $W(a) - W(b)$ санына тең.

Теорема дәлелденді.

Осы теореманың дәлелдеуіндегі қолданған әдіс эффективті және түбірлердің санын жуықтап табу үшін жартылай бөлу әдісімен бірге қолдануға жарайды.

Quiz $f(x) = x^3 - 3x - 1$ көпмүшесінің түбірлерін Штурм әдісі арқылы айырып алыңыздар.

Шешуі.

$f_0(x) = x^3 - 3x - 1$ $f_1(x) = \frac{1}{3} f'(x) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x - 1 & x^2 - 1 \\ \hline \Box x^4 + \Box x & \Box x + \Box \\ \hline \Box x + \Box & \end{array}$$

Ans

Сондықтан, $f_2(x) = 2x + 1$

$$\begin{array}{l|l} & \Box x + \Box \\ 2(x^2 - 1) & \\ \hline \Box x^2 + \Box x & \Box x + \Box \\ \hline \Box(\Box x + \Box) & \\ \Box x + \Box & \\ \hline \Box & \end{array}$$

Ans

Сондықтан, $f_3(x) = 3$. Енді Штурм кестесін құрамыз. + немесе - таңбаларының орнына +1 немесе -1 қойыңыз, бұл Java Script бағдарламасының талабы.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$W(x)$
$-\infty$	□	□	□	□	□
∞	□	□	□	□	□
0	□	□	□	□	□
-1	□	□	□	□	□
-2	□	□	□	□	□
1	□	□	□	□	□
2	□	□	□	□	□

Ans

Жауабы: келесі интервалдарда үш түбір(□, □) ∪ (□, □) ∪ (□, □)

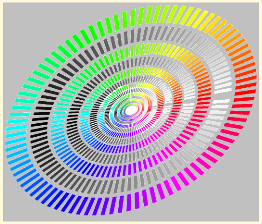
Ans

Clear

Әдебиет: Курощтың кітабы [3].

Title Page
Contents
Page 91 of 142
Go Back
Close

1.15. Полиномиалды теңдеулердің жүйелері



K өрісінің үстіндегі n айнымалылы полином деп $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ түрдегі бірмүшелердің ақырлы алгебралық қосындысы аталады, бұл жерде $a \in K$ және $k_1, k_2, \dots, k_n \in N$. K өрісінің үстіндегі n айнымалылы полиномдардың жиынын $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ арқылы белгілейміз. Егер $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ полином болса және x_i айнымалыларының біреуі болса, онда f -тың қосылғыштарын x_i-дың дәрежелерінің кемуі бойынша жазуға болады

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_0(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)x_i^{m_i} + \varphi_1(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)x_i^{m_i-1} + \dots$$
$$\dots + \varphi_{m_i-1}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)x_i + \varphi_{m_i}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

бұл жердегі m_i санын көпмүшенің x_i айнымалысы бойынша дәрежесі деп аталады және $deg_{x_i}(f)$ арқылы бойынша белгіленеді. Осы жіктелудегі коэффициенттер өздеріде басқа айнымалылар бойынша көпмүшелер болады.

20-ші ғасырдың 70-ші жылдардың басында Бухбергер өзінің диссертациясында полиномиалды теңдеулердің шешудің әдісін келтірді, бұл әдістің атын өзінің ғылыми жетекшісі Гребнер атауымен атады. Бұл әдіс өте эффективті және жылдам, және программалауға оңай әдіс болып табылды. Гребнер әдісі САТЖ шешудің Гаусс әдісінің

Title Page
Contents
Page 92 of 142
Go Back
Close

жалпылануы болады. Осыны ойлайтын болсақ бұл әдістің жақында табылғаны таң қалдырады.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(0, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_3(0, 0, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_m(0, 0, \dots, x_m, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Полиномиалды теңдеулер жүйесін түбірлерін жоғалтпай сатылы полиномиалды теңдеулер жүйесіне түрлендіру керек. Кәдімгі САТЖ-ларда полиномиалды теңдеулер жүйелер болады және олардың шешуін Гаусс әдісі арқылы табылады.

Гребнер түрлендірулері

Полиномиалды теңдеулер жүйесінде келесі түрдегі түрлендірулерді қолдануға болады:

- теңдеулрдің орындарын ауыстыру;
- жүйенің кез келген теңдеуін нөлдік емес $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ көпмүшеге көбейту;
- бір көпмүшеге басқа көпмүшені кез келген көпмүшеге көбейті алып қосу.

Гребнер түрлендірулері эквивалентті болмайды, түрленегең жүйенің түбірлер жиыны өзгеруі мүмкін, бірақ бастапқы жүйенің түбірлеріде осы жиынның ішінде болады. Осы жерде Гаусс әдісі мен Гребнер әдісінің айырмашылығы.

Лемма 3 *Егер бізге екі полиномиалды теңдеудің жүйесі берілсе*

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases},$$

онда оны Гребнер түрлендірулері арқылы келесі түрге келтіруге болады

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_2(0, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases},$$

Дәлелдеуі Гребнер түрлендірулерімен $deg_{x_1}(f_i)$ дәрежесін біртіндеп кеміту арқылы жүргізіледі. Осыдан кез келген полиномиалды теңдеудің жүйелері үшінде жалпы нәтиже бірден шығады. Сатылы жүйенің шешімдерін бастапқы жүйені қанағаттандыратынын тексеру керек.

Мысал 7 *Полиномиалды теңдеудің жүйесін шешіңіз*

$$\begin{cases} y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 & = 0 \\ y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 & = 0 \end{cases}$$

Шешуі. Берілген полиномдарды y-айынмалылы ретінде жазайық және коэффициенттері $R[x]$-тен алынған болсын:

$$\begin{cases} y^2 - (7x + 2)y + (4x^2 + 13x - 3) & = 0 \\ y^2 - (14x + 4)y + (9x^2 + 28x - 5) & = 0 \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден екіншіні азайтайық, y-ке қатысты бірінші дәрежелі теңдеу шығады. Енді екінші теңдеуге біріншіні қосайық, сонда келесі жүйе шығады

$$\begin{aligned}(7x+2)y-(5x^2+15x-2)&=0\\ y^2-(7x+2)y+(4x^2+13x-3)&=0\end{aligned}$$

Бірінші теңдеуді y-ке көбейтсек, ал екіншіні $(7x+2)$-ге көбейтсек біз екі теңдеудегі y^2-ның алдындағы коэффициенттерін теңестіреміз. Осыдан кейін екінші теңдеуден біріншіні азайтып (-1)-ге көбейтейік.

$$\begin{aligned}(44x^2+13x+6)y-(28x^3+99x^2+5x-6)&=0\\ (7x+2)y-(5x^2+15x-2)&=0\end{aligned}$$

Енді y-тің алдындағы коэффициенттерді теңестірейік. Ол үшін бірінші теңдеуді $(7x+2)$ көпмүшесіне көбейтейік, ал екіншісін $(44x^2+13x+6)$ көпмүшесіне және шыққан теңдеулерді азайтайық. Сонда y айнымалысы жоқ теңдеу шығады

$$24x^4-24x^3-96x^2+96x=0$$

.

Бастапқы жүйе Гребнер түрлендірулері арқылы келесі сатылы түрге келеді

$$\begin{cases}y^2-(7x+2)y+(4x^2+13x-3) & =0\\ 24x^4-24x^3-96x^2+96x & =0\end{cases}$$

Соңғы теңдеу оңай шешіледі

$$24x(x^3-x^2-4x+4)=24x[x(x^2-4)-(x^2-4)]=24x(x^2-4)(x-1)=24x(x-1)(x-2)(x+2)$$

Сонымен $x \in \{0, 1, 2, -2\}$. Осы мәндерді бірінші теңдеуге қойайық:

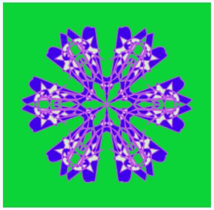
- Егер $x = 0$, онда $y^2 - 2y - 3 = 0$. Осыдан $y \in \{3, -1\}$;
- Егер $x = 1$, онда $y^2 - 9y + 14 = 0$. Осыдан $y \in \{2, 7\}$;
- Егер $x = 2$, онда $y^2 - 16y + 39 = 0$. Осыдан $y \in \{3, 13\}$;
- Егер $x = -2$, онда $y^2 + 12y - 13 = 0$. Осыдан $y \in \{-13, 1\}$.

Осы сандарды екінші теңдеуге қойып шыққан кейін, шешімдері тек қана $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ $(0, -1)$ жұптары болатыны шығады.

Бұрын полиномиалды теңдеулердің жұбын біртіндеп жою әдісі арқылы шешу үшін арнайы анықтауыш – көпмүшелердің результанты [3], қолданылатын. Кез келген профессионалды математикалық пакет көпмүшелермен жақсы жұмыс жасайды. Гребнер әдісі барлық кәзіргі заманға сай Maple, Mathematica, Matlab, Mathcad компьютерлік математиканың жүйелеріне кіргізілген, және ол негізгі полиномиалды алгоритм болып табылады.

Әдебиет: осы дәріс.

1.16. Сызықтық кеңістіктер



1.16.1. Арифметикалық векторлық кеңістіктер

Әрине студенттерге вектордың түсінігі бағытталған кесінді ретінде геометриядан және физикадан таныс болар. Біздер вектордың түсінігіне аксиоматикалық жағынан келейін деп отырмыз, және бұрыннан студенттер үшін тансы түсініктер біздің анықтаманың дербес жағдайы болады. K сандық өрісі берілсін. K өрісінің эелементтерін скаляр деп атаймыз және грек әріптерімен белгілейміз $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \rho, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. $n \geq 1$ натурал саны берілсін. Келесі түрдегі ұзындығы n болатынерттелген тізбекті $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ вектор деп атаймыз. Векторларды $x, y, z, a, b, c, d, a_1, a_2, \ldots$ әріптерімен белгілейміз, сондықтан студент ешқашан векторды скалярмен шатыстырмайды. $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ және $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ векторлары тең деп есептеледі егер $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

Векторлардың қосу ережесін келтірейік

$$x + y = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

Title Page
Contents
Page 97 of 142
Go Back
Close

$\beta \in K$ скалярын x векторына көбейту ережесін келтірейік

$$\beta \cdot x = \beta \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \dots, \beta\alpha_n)$$

Барлық векторлар жиынын $(K^n, +.\odot_\lambda, =)_{\lambda \in K}$ немесе қысқартылғанда K^n арқылы белгілейміз. Бұл жерде $(K^n, +.\odot_\lambda, =)_{\lambda \in K}$ белгілеуі – K^n жиынын векторларды қосу және скалярға көбейту амалдарымен қарастырылып отырғанын білдіреді. K^n-ді K өрісінің үстіндегі арифметикалық кеңістік деп атайды.

Quiz $a_1 = (1, 2, -3)$, $a_2 = (-2, 3, -4)$, $a_3 = (4, 1, -5)$ векторларының $a_1 - 3a_2 + 4a_3$ сызықтық комбинациясын есептеңіз.

$$a_1 - 3a_2 + 4a_3 = \left(\square, \square, \square\right)$$

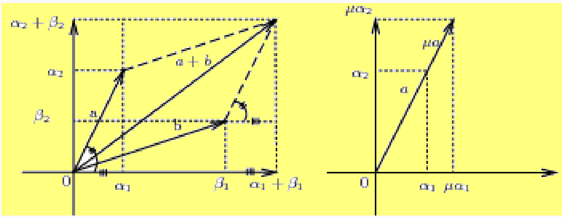
Ans

Clear

K^n векторлық кеңістігінде келесі тепе-теңдіктер орындалады

$$
\begin{aligned}
&\forall x \forall y[x+y=y+x]\\
&\forall x \forall y \forall z[(x+y)+z=x+(y+z)]\\
&\exists \theta \forall x[x+\theta=x], \quad \theta \text{ нөлдік элемент}\\
&\forall x \exists y[x+y=\theta], \quad \text{қарама-қарсы}\\
&(\forall \lambda \in K) \forall x \forall y[\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y]\\
&(\forall \lambda \in K)(\forall \mu \in K) \forall x[(\lambda+\mu) \cdot x=\lambda x+\mu x]\\
&(\forall \lambda \in K)(\forall \mu \in K) \forall x[(\lambda \cdot \mu) \cdot x=\lambda \cdot(\mu \cdot x)]\\
&\forall x[1 \cdot x=x \wedge 0 \cdot x=\theta].
\end{aligned} \tag{1.16.1}
$$

Бір қарағанда, геометриядағы жазықтықтағы және кеңістіктегі вектордың түсінігі біздің R^2 немесе R^3-тегі вектордың түсінігінен өзгеше сияқты болып көрінеді. Бірақ, егер a және b векторларының бастары координаталар басында орналасса және ұштары (α_1, α_2), (β_1, β_2) нүктелерінде орналасса, онда осы векторлардың қосындысының ұшының координаттары қосу параллелограмм ережесі бойынша дәл келесі сандар болады $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2)$.



Сол сияқты, a векторының μ санына көбейтіндісінің ұшының координаттары $(\mu\alpha_1, \mu\alpha_2)$ болады. Параллел көшіру арқылы бір біріне көшірілетін векторлардың тең болатынын есімізге алсақ, геометриядағы және физикадағы кез келген вектор координаталар басынан шығатын қандайда бір векторға тең екенін түсінуге болады. Сонымен, біз геометриядағы және физикадағы векторлар R^2 және R^3-тегі векторлардың дербес жағдайы болатынын дәлелдедік. Бұл меншікті дербес жағдай, өйткені біз үшін n кез келген натурал сан және K өрісі біз білетін Q, R, C, Z_p өрістерінің бірі, бұл жерде p – жәй сан.

1.16.2. Өріс үстіндегі сызықтық кеңістіктер

V қандай да бір жиыны берілсін және осы жиында $+$ бинарлық амалы берілсін. K – сандық өріс болсын, кез келген $\beta \in K$ санына және кез келген $a \in V$ векторына бірмәнді сәйкес қойылған векторы βa арқылы белгіленсін. Онда $(V, +, \odot_\lambda, =)_{\lambda \in K}$ K өрісінің үстіндегі сызықтық кеңістігі деп аталады, егер осы амалдар арифметикалық сызықтық кеңістіктің анықтамасындағы (1.16.1) қасиеттерін қанағаттандыратын болса.

Өріс үстіндегі сызықтық кеңістіктің мысалдары.

- Кез келген $n \geq 1$ үшін K өрісінің үстіндегі K^n арифметикалық сызықтық кеңістігі;
- K өрісінің үстіндегі матрицаларды қосу және санға көбейту амалдарымен $M_n(K)$ шаршы матрицалар жиыны;
- K өрісінің үстіндегі дәрежелері n-нен аспайтын $K^n[x]$ көпмүшелер жиыны;

- Тізбектерді қосу және санға көбейту амалдарына қатысты сандары K өрісінен алынған ақырсыз сандық тізбектердің K^{ω} жиыны;
- K өрісінің үстіндегі көпмүшелерді көбейту және санға көбейту амалдарына қатысты барлық көпмүшелер жиыны $K[x]$;
- Функцияларды нүктелік қосу және санға көбейту амалдарына қатысты барлық үзіліссіз нақты функциялардың $L_p^{a,b}$ жиыны.

Өріс үстіндегі сызықтық кеңістіктердің әр түрлілігіне қарамастан, біз бір өрістің үстіндегі өлшемдері бірдей болатын кез келген екі сызықтық кеңістіктің изоморфтығын дәлелдейміз, басқа сөзбен айтқанда қосу және санға көбейту амалдары бірдей екенін көрсетеміз. Алгебра курсында ақырлыөлшемді кеңістіктер қарастырылады, біз өлшем туралы керекті болмаса ескермейміз. Мысалы үшін, кейбір нәтижелерді дәлелдеуі кеңістіктің өлшеміне тәуелді болады.

Факт 9

- *Сызықтық кеңістікте нөлдік элемент жалғыз болады;*
- *Сызықтық кеңістікте кез келген элементінің қарама қарсы элементі жалғыз болады.*

Анықтама 32 *V сызықтық кеңістігінің бос емес ішкі жиыны V-ның ішкі кеңістігі деп аталады, егер ол өзінің векторларының қосындысы және олардың K өрісінің кез келген санға көбейтіндісі бойынша тұйық болса.*

$\{\theta\}$ және V-ның өзі тривиалды ішкі кеңістіктер деп аталады.

Анықтама 33 *$a_1, a_2, \ldots, a_k$ векторларының сызықтық комбинациясы деп келесі түрдегі $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_k a_k$ қосындыны атаймыз. Егер $\mu_i \neq 0$ болатындай i индексі табылатын болса, онда бұл комбинация тривиалды емес деп аталады.*

Анықтама 34 *$J = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ векторлар жүйесінің $\mathfrak{L}(J)$ сызықтық қабықшасы деп J жүйесінің векторларының барлық сызықтық комбинацияларының $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_k a_k$ жиынын атаймыз.*

Факт 10 *J векторлар жүйесінің сызықтық қабықшасы V кеңістігінің ішкі кеңістігі болады, және ол J жиынын алып отыратын ішкі кеңістіктердің ең кішісі болады.*

Векторлар жүйесінің сызықтық тәуелділігі туралы түсінік сызықтық алгебраның негізгі түсініктерінің бірі.

Анықтама 35 *$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ векторлар жүйесі сызықтық тәуелді деп аталады, егер нөлдік векторға тең болатын осы векторлардың тривиалды емес комбинациясы табылатын болса.*

Бұл түсінік алгебрадан басқа дифференциалды теңдеулерде, математикалық физиканың теңдеулерінде және функционалды анализде қолданылады. Сондықтан барлық математиктер осы түсінікті жақсы біледі. Өкінішке өрай мемлекеттік емтихандада осы түсінікті шатыстратын студенттер кездеседі. Мүмкін студенттердің қателесуіне сызықтық тәуелділіктің төрт жеткілікті белгілері, сызықтық тәуелсіздіктің түсінігі себеп болған шығар. Сызықтық тәуелділіктің әр түрлі эквиваленттерін айырып білу үшін математикалық логиканың элементар заңдарын білген жеткілікті болады.

Анықтама 36 $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *векторлар жүйесі сызықтық тәуелсіз де аталады, егер* $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_k a_k = \theta \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = 0.$

Векторлар жүйесінің сызықтық тәуелділігінің белгілері.

- Егер векторлар жүйесінде нөлдік вектор бар болса, онда ол сызықтық тәуелді болады;
- Егер векторлар жүйесінде екі бірдей векторлар бар болса, онда ол сызықтық тәуелді болады;
- Егер векторлар жүйесінде екі пропорционал векторлар бар болса, онда ол сызықтық тәуелді болады;
- Егер жүйенің бір векторы қалған векторларының сызықтық комбинациясы болса, онда ол жүйе сызықтық тәуелді болады.

Бұл жерде осы белгілерінің анықтауыштың нөлге тең болу белгілерімен ұқсастығын байқауға болады. Ары қарай біз анықтауыштармен олардың векторлар ретінде қарастырылып отырған жолдарының (бағандарының) арасындағы терең байланысты қарастырамыз.

Лемма 4 $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *векторлар жүйесі сызықтық тәуелді болады сонда және тек қана сонда, егер* a_j *векторы алдынғы векторларының сызықты комбинациясы болатындай* j *ең кіші индексі табылатын болса, немесе* $a_1 = \theta$ *болса.*

Лемма 5 *Егер* H V *сызықтық кеңістігінің ішкі кеңістігі болса және* $H = \mathfrak{L}(J)$

болса және a векторы J-дағы қалған векторлардың сызықтық комбинациясы болса, онда $H = \mathfrak{L}(J - \{a\})$.

Теорема 28 *Егер H, V сызықтық кеңістігінің ішкі кеңістігі болса, $H = \mathfrak{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \mathfrak{L}(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ теңдіктері орындалып $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ векторлар жүйесі сызықтық тәуелсіз болса. Онда $k \leq m$.*

Анықтама 37 *$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ векторлар жүйесі V кеңістігінің H ішкі кеңістігінің базисы деп аталады, егер ол H-дағы максималды сызықтық тәуелсіз жүйе.*

Бізді ең негізгі ақырлы базисы бар кеңістіктер қызықтырады. Базистегі векторлардың саны *ішкі кеңістіктің өлшемі деп аталады және* $\dim(H)$ *арқылы белгіленеді.*

Теорема 29 (Базис туралы теорема.) *H ішкі кеңістігінің кез келген екі базисіндегі векторларының сандары бірдей болады.*

Факт 11 *H ішкі кеңістігіндегі кез келген сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесін H-тың базисіне дейін кеңейтуге болады.*

Quiz $a_1 = (2, 1, 0)$, $a_2 = (0, 1, -2)$, $a_3 = (0, 1, 1)$ векторлар жүйесі R_3 кеңістігінің базисы болады ма?

Шешуі. Жолдары берілген векторлардан құрылған көмекші анықтауышты есептейік.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \square \neq 0$$

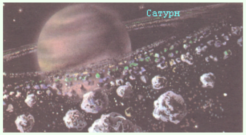
Ans

Демек, бұл анықтауыштың ешбір жолы басқа жолдарының сызықты комбинациясы болмайды, сондықтан олар сызықтық тәуелсіз. Векторлардың саны кеңістіктің өлшемі мен бірдей, сондықтан олар R_3 кеңістігінің базисын құрайды.

Clear

Әдебиет – Архангельскийдың кітабы [1]

1.17. Ішкі кеңістіктердің қосындысы және қиылысуы



Факт 12 *Егер* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *векторлар жүйесі* V *сызықтық кеңістігінің* K *өрісі үстіндегі базисы болса, онда кез келген* $a \in V$ *векторының бірмәнді өрнектелуі табылады* $a = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n$. *Осы өрнектің коэффициенттері a векторының* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *базисіндегі коэффициенттері деп аталады. a векторына* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ *жолы сәйкес қойылады.*

Вектордың e базисіндегі коэффициенттерін анықтау үшін матрицасы A' болатын САТЖ-ны шешу қажет, бұл жерде A матрицасының жолдары $e_1, e_2, \ldots, e_n$ векторларымен бірдей, ал бос мүшелер бағаны a' векторымен бірдей.

Анықтама 38 *Бір өрістің үстіндегі* V_1, V_2 *сызықтық кеңістіктері изоморфты деп аталады, егер келесі шартты қанағаттандыратын* $\pi : V_1 \overset{1-1}{\underset{на}{\rightarrow}} V_2$ *биекциясы табылатын болса*
$(\forall \alpha \in K)(\forall \beta \in K)\forall x \forall y[\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y)]$

Теорема 30 *Бір өрістің үстіндегі* V_1, V_2 *сызықтық кеңістіктері изоморфты болады сонда және тек сонда ғана, егер* $\dim(V_1) = \dim(V_2)$.

Сонымен, K өрісінің үстіндегі n-өлшемді барлық сызықтық кеңістіктер, элементтерінің табиғатына қарамастан, K^n арифметикалық сызықтық кеңістігіне ұқсас болады.

Title Page
Contents
Page 106 of 142
Go Back
Close

Анықтама 39 *V сызықтық кеңістігінің H_1, H_2 ішкі кеңістіктерінің қосындысы деп келесі жиынды атаймыз $H_1 + H_2 = \{x + y \mid x \in H_1 \wedge y \in H_2\}$.*

Теорема 31 *Егер H_1, H_2 V сызықтық кеңістігінің ішкі кеңістіктері болса, онда*

- *$H_1 \cap H_2 = \{x \mid x \in H_1 \wedge x \in H_2\}$ қиылысуыда V сызықтық кеңістігінің ішкі кеңістігі болады.*
- *$H_1 + H_2$ қосындысы V сызықтық кеңістігінің $H_1 \cup H_2$ қиылысуын алып отыратын ең кіші ішкі кеңістігі болады.*

Теорема 32 (Модулярлық заң) *Егер H_1, H_2 V сызықтық кеңістігінің ішкі кеңістіктері болса, онда*

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2).$$

H_1, H_2 ішкі кеңістіктерінің қосындысы тура деп аталады, егер $H_1 \cap H_2 = \{\theta\}$. Бұл жағдайда қосынды келесі белгі арқылы белгіленеді $H_1 \oplus H_2$.

Тұжырым 8 *H_1, H_2 V сызықтық кеңістігінің ішкі кеңістіктері болсын және H олардың қосындысы болсын. Онда*

$$H = H_1 \oplus H_2 \Leftrightarrow (\forall x \in H)(\exists! y \in H_1)(\exists! z \in H_2)[x = y + z]$$

Бұл жерде $\exists! y$ кванторы табылады жалғыз y деп оқылады.

Quiz $\mathcal{L}(a_1, a_2)$ және $\mathcal{L}(b_1, b_2)$ ішкі кеңістіктерінің қиылысуының базисын табыңыз, бұл жерде $a_1 = (1, 2, 1),\ a_2 = (1, 1, -1),\ b_1 = (1, 2, 2),\ b_2 = (1, 1, -3)$.

Шешуі. t берілген ішкі кеңістіктерінің қиылысуындағы вектор болсын. Онда $t = x_1a_1 + x_2a_2$ және $t = x_3b_1 + x_4b_2$. $x_1a_1 + x_2a_2 = x_3b_1 + x_4b_2$ теңдігі алгебралық теңдеулер жүйесін береді

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\
2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\
x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Бұл жүйені Гаусс әдісімен шешеміз. Гаусс кестесін құрамыз

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-2(1)}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow[-1(2)]{(3)-2(2)}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 0 \end{array}\right)
$$

Ans

Сондықтан, $x_4 = \beta, \quad x_3 = 2\beta, \quad x_2 = \beta, \quad x_1 = 2\beta$. Осыдан $x = 2\beta a_1 + \beta a_2 = 2\beta b_1 + \beta b_2$ шығады. Демек

$$d = 2a_1 + a_2 = (\square, \square, \square)$$

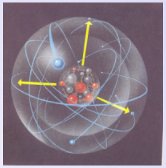
Ans

векторы берілген ішкі кеңістіктерінің қиылысуының базисы болады.

Clear

Әдебиет – Куроштың кітабы [3].

1.18. Матрицаның рангі



$A = (\alpha_{ij})_m^n$ K өрісінің үстіндегі матрица болсын. A матрицасының жолдарын келесі белгілермен белгілейміз $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Осы матрицаның бағандарын келесі белгілермен белгілейміз $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$. A матрицасының жолдары K^n сызықтық кеңістігіндегі векторлар болады, ал бағандары K^m сызықтық кеңістігіндегі векторлар болады.

Анықтама 40 *Уақытша терминдерді еңгізейік:*

- *A матрицасының жолдар рангі деп $r_c(A) = \dim(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ санын атаймыз.*
- *A матрицасының бағандар рангі деп $r_b(A) = \dim(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m)$ санын атаймыз.*

Егре $k \leq \min(m, n)$ және A матрицасының k-ші ретті барлық минорлары нолге тең болса, онда A матрицасының $k+1$-ші ретті барлық минорлары да нолге тең болады, өйткені осындай минорды бірінші жол бойынша жіктесек, осы жолдың элементтерінің толықтаушы минорлары A матрицасының k-ші ретті барлық минорлары болатыны көрініп тұрады.

Title Page
Contents
Page 109 of 142
Go Back
Close

Анықтама 41 *A матрицасының рангі деп осы матрицаның нөлден өзгеше минорларының ең үлкен ретін атайды. Оны $r(A)$ белгісі арқылы белгілейміз.*

Анықтамадан $r(A) \le \min(m, n)$ теңсіздігі шығады. Келесі лемманың айқындығы көрініп тұр

Лемма 6

- *A кез келген матрицасы үшін келесі теңдіктер орындалады $r_c(A) = r_b(A')$, $\quad r_b(A) = r_c(A')$;*
- *A кез келген матрицасы үшін келесі теңдік орындалыдыдля $r(A') = r(A)$.*

Матрицаны аударғанда жолдары бағандар болатын және бағандары жолдар болатыны білеміз. Осыдан лемманың дәлелдеуі шығады. Егер M A матрицасының нөлден өзгеше миноры болса, онда A' матрицасында M-ға бас диагонал бойынша симметриялы орында нөлдік емес M' миноры тұрады. Кейбір матрицалар үшін $r_c(A) = r(A)$ болады.

Тұжырым 9 *Егер A сатылы матрица болса, онда $r(A)$ және $r_c(A)$ сандары A матрицасындағы нөлдік емес сатылардың санына тең.*

Кез келген матрицаны Гаусс түрлендірулері арқылы жолдар бойынша сатылы түрге келтіруге болады. Рангінің барлық түсініктері бірдей екенін түсіну үшін матрицаның рангі және жолдар рангі жолдармен жүргізілетін Гаусс түрлендірулерінің инварианттары екенін түсінген жеткілікті болады.

Теорема 33 *B матрицасы A матрицасы арқылы жолдармен жүргізілетін Гаусс түрлендірулерінің ақырлы тізбегінен шығатын болсын. Онда $r_c(A) = r_c(B)$, $\quad r(A) = r(B)$.*

Бұл теорема матрицаның рангін есептеудің эффективты әдісін береді.

Салдар 6 (Матрицаның рангі туралы теорема.) *Кез келген A матрицасы үшін матрицаның рангінің $r_c(A), r(A), r_b(A)$ үш түсінігі бірдей болады.*

Енді сызықтық теңдеулер жүйесіне векторлық көзқараспен қарауға болады

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = b_m, \end{cases}$$

Бұл жүйені матрицалық түрде қарастыруға болады

$$Ax = b.$$

Егер $[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n]$ бағаны САТЖ-ның шешімі болса, онда b бос мүшелер бағаны A матрицасының $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ бағандарының $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ коэффициенттерімен сызықтық комбинациясы болады. $\widetilde{A}$ арқылы A матрицасына b бос мүшелер бағанын біріктіру арқылы шығатын матрицаны белгілейміз. Жоғарыда біз келесі теореманы дәлелдедік

Теорема 34 (Кронекер-Капелли теоремасы) *Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі үйлесімді болады сонда және тек сонда ғана, егер* $r(A) = r(\widetilde{A})$.

Келесі тұжырымды дәлелдеу үшін де сол жоғарыдағы идеяларды пайдаланамыз.

Тұжырым 10

- A, B *матрицаларының көбейтіндісі табылатындай матрицалары болсын. Онда* $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.
- A *шаршы ерекше емес матрица болсын және* B *матрицасы* AB *кобейтіндісі табылатындай матрица болсын. Онда* $r(AB) = r(B)$. *Сол сияқты, егер* BA *көбейтіндісі табылатын болса, онда* $r(BA) = r(B)$.

Quiz Матрицаның рангін табыңыз

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Шешуі. САТЖ-ның түбірлерін тапқандағы сияқты матрицаны Гаусс түрлендірулері арқылы сатылы түрге келтіреміз. Бұл жерде Гаусс түрлендірулерін бағандарға пайдалануға да болады.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(4)-5(1)\\(5)-(1)\\(6)-(1)}]{\substack{(2)-4(1)\\(3)-(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3)\leftrightarrow(5)\\(4)\leftrightarrow(6)}]{(2)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Ans

Әрине, екінші жолды 3-ке қысқартып және үшіншіні 2-ге қысқартып, бірнеше түрлендірулері арқылы бесінші және алтыншы жолдарды нолдік жасауға болады. Бірақ біз ондай артық амал жасамаймыз. Өйткені, соңғы матрицада бірінші төрт жолдағы төртінші ретті минор сатыл және нолден өзгеге екені көрініп тұр. A матрицасының 4 бағаны болғандықтан, оның рангі 4-тен аспайды, сондықтан

$$r(A) = \square.$$

Ans

Clear

Әдебиет – Скорняковтың кітабы [5]

1.19. Коши-Буняковского-Шварц теңсіздігі

Анықтама 42 *a векторының нормасы немесе ұзындығы деп $|a| = \sqrt{(a,a)}$ оң санын атаймыз.*

Теорема 35 (Коши-Буняковского-Шварц теңсіздігі) *V унитарлық кеңістігінің кез келген x, y векторлары үшін*

$$|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$$

теңсіздігі орындалады. Теңсіздік теңдікке айналады сонда және тек сонда ғана, егер x, y векторлары коллинеар болса.

Ескерту. Бұл жерде $|(x,y)|$ – (x,y) комплекс санының модулі, вектордың нормасымен шатыстырмау керек.

Дәлелдеу. t нақты айнымалы болсын. $x + ty$ векторын қарастырайық. Скаляр көбейтіндінің аксиомаларынан $(x+ty, x+ty) \ge 0$ шығады. Осы теңсіздікті дистрибутивтық бойынша ашайық

$$(x,x) + t(x,y) + t(y,x) + t^2(y,y) \ge 0.$$

$(y,x) = \overline{(x,y)}$ және $(x,y) + \overline{(x,y)} = 2Re((x,y))$ нақты сандар екенін ескерейік. (Бұл жерде $Re(z)$ саны z комплекс санының нақты бөлігін білдіреді.) Нақты коэффициенттерімен берілген t-дан тәуелді нөлден үлкен квадратты үшмүше шығады

$$(y,y)t^2 + 2Re((x,y))t + (x,x) \ge 0. \tag{1.19.1}$$

Бұл көпмүшенің дискриминанты оң емес.

$$4[Re((x,y))]^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0$$

Осыдан

$$[Re((x,y))]^2 \leq (x,x)(y,y) \tag{1.19.2}$$

теңсіздігі шығады. Евклидтік кеңістікте $Re((x,y)) = (x,y)$ және дәлелденген теңісіздік нақты векторлар үшін Коши-Буняковский теңсіздігіне айналады

$$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y).$$

Жалпы унитарлық жағдайда (1.19.2) теңсіздігі кез келген x, y векторлары үшін орындалады, сондықтан ол y-ті $(x,y)y$ векторына ауыстырсақта орындалады. Шығып жатқан теңсіздікті түрлендірейік және $Re(x,(x,y)y) = Re(\overline{(x,y)}(x,y) = |(x,y)|^2$, $((x,y)y,(x,y)y) = (x,y)\cdot\overline{(x,y)}(y,y) = |(x,y)|^2(y,y)$ теңдіктерін есекрейік. Онда

$$|(x,y)|^4 \leq (x,x)(y,y)|(x,y)|^2.$$

Егер $(x,y) = 0$ болса, онда дәлелденетін теңсіздік айқын. Кері жағдайда соңғы теңсіздіктің екі жағында оң $|(x,y)|^2$ санына қысқартамыз

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y).$$

Егер $x = \alpha y$, онда $x - \alpha y = \theta$. Сондықтан, $(x - \alpha y, x - \alpha y) = 0$ және (1.19.2) дискриминанттың нөлге теңдігі шығады. Бұл қажет $|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$ теңдігіне келтіреді.

Теорема дәлелденді.

Унитарлық (евклидтік) кеңістікте вектордың нормасы келесі қасиеттерді қанағаттындырады:

- $|x| \geq 0$ – норманың терісеместігі;
- $|x| = 0$ сонда және тек сонда ғана, егер $x = 0$;
- $\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$ – біртектілік;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ – үшбұрыш теңсіздігі.

Соңғы қасиеттерден басқа қасиеттер оңай дәлелденеді. Осы қасиетті тексерейік

$$|x+y| = \sqrt{(x+y, x+y)} = \sqrt{(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2Re((x,y))}$$

(1.19.2) дәлелденген теңсіздігі бойынша

$$|x + y| \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|} \leq |x| + |y|.$$

Норманың бұл қасиеттерінен бір (нақты немесе комплексті) айнымалылы үзіліссіз функциялардың қасиеттерінің n айнымалылы үзіліссіз функциялар үшінде орындалатыны шығады. Ең негізгі бұл жерде аргументтің жақын мәндеріне функцияның жақын мәндері сәйкес болуы керек.

Егер x, y нөлдік емес векторлар болса, онда осы векторлардың арасындағы α бұрышы келесі жолмен анықталады

$$\cos(\alpha) = \frac{(x,y)}{|x||y|}.$$

Бұл анықтаманың дұрыстығы Коши-Буняковский теңсіздігінен шығады, өйткені

$$\frac{(x,y)^2}{(x,x)(y,y)} \leq 1.$$

Ортогонал векторлар үшін бұл анықтама алдында берілген түсінікпен ұйқасады $x \perp y \iff (x, y) = 0 \iff cos(\alpha) = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Коши-Буняковский-Шварц теңсіздігі математиканың әр түрлі аймақтарында көбіне әрқалай беріледі. Оларды келтірейік.

1. Кез келген $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ және $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ нақты сандары үшін $(\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 + \cdots + \mu_n\rho_n)^2 \leq (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2) \cdot (\rho_1^2 + \rho_2^2 + \cdots + \rho_n^2)$ теңсіздігі орындалады;

2. Кез келген $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ және $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ комплекс сандары үшін $|\mu_1\bar{\rho_1} + \mu_2\bar{\rho_2} + \cdots + \mu_n\bar{\rho_n}|^2 \leq (|\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 + \cdots + |\mu_n|^2) \cdot (|\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 + \cdots + |\rho_n|^2)$ теңсіздігі орындалады;

3. Кез келген $f(x), g(x) \in L_p^{a,b}$ үзіліссіз нақты функциялары үшін
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2 dx\right)$$
теңсіздігі орындалады.

Бұл теңсіздіктердің арасындағы байланысты табу оңай емес. Дегенменде, олардың барлығы евклидтік (унитарлық) кеңістіктердегі сәйкес скаляр көбейтіндісі таңдалған Коши-Буняковский-Шварц теңсіздігінің дербес жағдайлары. Алдыңғы екі пункттер R^n-дегі (C^n-дегі) ортонормаланған базисті таңдауына және осы базистегі скаляр көбейтіндіге байланысты. Үшінші пункт
$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

бейнелеуінің $L_p^{a,b}$ кеңістігінде скаляр көбейтінді болатынынан шығады. Кез келген скаляр көбейтінді үшін сәйкес өзінің Коши-Буняковский-Шварц теңсіздігі болады, ал оларды алдыңғы дәріске сәйкес өте көбін ойлап табуға болады.

Егер H V унитарлық (евклидтік) кеңістігінің ішкі кеңістігі болса, онда $H^\perp$ арқылы $\{x \in V \mid (\forall y \in H)(x \perp y)\}$ жиынын белгілейміз және оны H-тың ортогонал толықтауышы деп атаймыз.

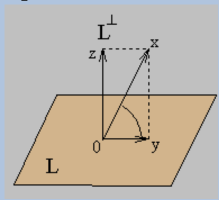
Тұжырым 11 *Егер H V-ның ішкі кеңістігі болса, онда $H^\perp$ V-ның ішкі кеңістігі болады.*

Теорема 36 *Егер H V-ның ішкі кеңістігі болса, онда $V = H \oplus H^\perp$. Демек, V кеңістігі H ішкі кеңістігінің және оның ортогонал толықтауышының тура қосындысы болады.*

Quiz x векторы және $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$ ішкі кеңістігі арасындағы бұрышты табыңыз. Және x векторының ұшынан L ішкі кеңістігіне дейінгі арақашықтықты табыңыз. Бұл жерде $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$ және $x = (4, -1, -3, 4)$.

Шешуі. $a_3 = 2a_1 - a_2$ болғандықтан $L = \mathcal{L}(a_1, a_2)$ және a_3 векторы керек емес.

x векторын $x = y + z$ түріне келтірейік, бұл жерде $y \in L$ және $z \in L^\perp$. Онда $y = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2$. Теңдеулер жүйесін құрайық:



$$(x, a_1) = (y + z, a_1) = (y, a_1) + (z, a_1) = (y, a_1) = \mu_1(a_1, a_1) + \mu_2(a_1, a_2)$$
$$(x, a_2) = (y + z, a_1) = (y, a_2) + (z, a_2) = (y, a_2) = \mu_1(a_1, a_2) + \mu_2(a_2, a_2)$$

Есептейік

$$\begin{aligned} 4\mu_1 + 4\mu_2 &= 4 \\ 4\mu_1 + 10\mu_2 &= -8. \end{aligned}$$

Енді келесі жүйені шешейік

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}(2)]{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array}\right), \quad \mu_2 = \square, \quad \mu_1 = \square$$

Ans

Сондықтан,

$$y = \square a_1 + \square a_2 = (\square, \square, \square, \square) \quad \text{и} \quad z = x - y = (\square, \square, \square, \square).$$

Ans

x векторы және L ішкі кеңістігі арасындағы α бұрышы x және y векторларының арасындағы бұрыш болады.

$$\cos(\alpha) = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{\square \cdot \square + \square \cdot \square + \square \cdot \square + \square \cdot \square}{\sqrt{\square^2 + \square^2 + \square^2 + \square^2}\sqrt{\square^2 + \square^2 + \square^2 + \square^2}} = \sqrt{\frac{\square}{\square}}$$

Ans

x векторының ұшынан L ішкі кеңістігіне дейінгі арақашықытық z векторының ұзындығына тең. Сонымен

$$\alpha = \arccos\sqrt{\frac{\square}{\square}}, \quad |z| = \sqrt{(z,z)} = \sqrt{\square^2 + \square^2 + \square^2 + \square^2}$$

Ans

Clear

Әдебиет – Хорнның және Джонсонның кітабы [6]

Список литературы

[1] *А.А. Архангельский*, Конечномерные векторные пространства, М. Наука, 1991.

[2] *Л.А. Головина*, Линейная алгебра и некоторые её применения, М. Наука, 1990.

[3] *А.Г. Курош*, Курс высшей алгебры, М. Наука, 1998.

[4] *А.И. Кострикин*, Введение в алгебру, М. Наука, 1999.

[5] *Л.С. Скорняков*, Элементы алгебры, М. Наука, 1991.

[6] *Р. Хорн, Ч. Джонсон*, Матричный анализ, М., Мир, 1989.

2. ЗАТТЫҚ НҰСҚАУШЫ

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 122 of 142

Go Back

Close

Заттық нұсқаушы

3. АЛГЕБРА ПӘНІНЕН ЕМТИХАНҒА ҰСЫНЫЛАТЫН СҰРАҚТАР

ҚазҰУ ректораты

1. Комплекс сандар және оларға қолданатын амалдар.
2. Комплекс сандарға қолданатын амаладардың қасиеттері.
3. Түйіндестіру амалының қасиеттері.
4. Комплекс санның модулі және аргументі. Тригонометриялық түрі.

5. Комплекс сандарды көбейту және бөлу. Комплекс сандарды дәрежелеу.
6. Комплекс санынан n-ші дәрежелі түбір алу.
7. Ақырлы жиынның алмастырулары және олардың саны.
8. Транспозициялар туралы лемма, ауыстырулар.
9. n-ші ретті анықтауыштың есептеу формуласы.
10. Анықтауыштың нөлге тең болу белгілері.
11. Анықтауыштың мәнін өзгертпетін түрлендірулер.
12. Анықтауыштың жолдарының орнын алмастыру, жолын санға көбейту және анықтауыштың екі анықтауыштың қосындысына жіктелуі.
13. Минор туралы теорема.
14. Лапласс теоремасы.
15. Анықтауыштың жол бойынша жіктелуі.
16. Анықтауыштарды есептеу әдістері.
17. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі, жүйелердің эквиваленттігі.
18. Гаусс түрлендірулері. Гаусс әдісі.
19. Сатылы САТЖ.

20. Анықтауыштың бір бағанының элементтерінің басқа бағанның элементтерінің алгебралық толықтауыштарына көбейтінділерінің қосындысы.
21. Крамер ережесі.
22. Матрицаларға қолданатын алгебралық амалдар және олардың қасиеттері.
23. Матрицалардың көбейтіндісінің ассоциативтығы.
24. Матрицалардың дистрибутивтық қасиеттері.
25. Матрицаларды аудару.
26. Матрицаның ізі.
27. Матрицалардың көбейтіндісінің анықтауышы.
28. Бірлік және кері матрицалар.
29. Кері матрицаны есептеу формуласы.
30. Кері матрицаны элементар түрлендірулер арқылы есептеу.
31. Матрицалық теңдеулер.
32. САТЖ-ның матрицалық жазылуы.
33. Сатылы матрицаның рангі.
34. Аударылған матрицаның рангінің өзгермеуі.

35. Гаусс түрлентірулеріне қатысты матрицаның рангінің инварианттығы.
36. Матрицаның рангі туралы теорема.
37. Бір айнымалылы көпмүшелер. Қалдықпен бөлу алгоритмі.
38. Көпмүшелердің ең үлкен ортақ бөлгіші. Евклид алгоритмі.
39. Горнер сұлбасы. Безу теормасы.
40. Көпмүшенің еселі түбірлері.
41. Көпмүшенің түбірінің табылу туралы негізгі теорема және оның салдарлары.
42. Өзара жәй көпмүшелер.
43. Виет формулалары.
44. Бүтін коэффициентті көпмүшенің рационал түбірлері.
45. Штурм жүйесі.
46. Штурм теоремасы.
47. n белгісізі бар полиномиалды теңдеулер жүйесін Гребнер әдісімен шешу.
48. Көп айнымалылы көпмүшелер, лексикографикалық рет.
49. Симметриялық көпмүшелер туралы негізгі теорема.
50. Арифметикалық сызықтық кеңістіктер.

51. Сызықтық кеңістіктер, ішкі кеңістіктер, қабықшалар.
52. Базис туралы теорема.
53. Кеңістіктің базистерінің арасындағы байланыс.
54. Ішкі кеңістіктердің қосындысы және қиылысуы.
55. Евклидтік және унитарлық кеңістіктер.
56. Векторлардың ортогонал жүйелері, ортогоналдау процесі.
57. Өлшемдері бірдей унитарлық кеңістіктердің изоморфизмі.
58. Коши-Буняковский теңсіздігі.

2009 ж.

доцент К.А. Мейрембеков

доцент Ж.Т. Таласбаева

Title Page
Contents
Page 132 of 142
Go Back
Close

4. ТЕСТТЕРДІ ҚАЛАЙ ШЕШУ КЕРЕК

Сіздерге алгебраның бірінші семестрінің тақырыбтары бойынша тесттердің үлгілерін ұсынып отырмыз. Тесттердің күрделілігі мемлекеттік аралық бақылауда келтірілетін тесттерден жоғары. Өкінішке орай, кейбір басқа авторлардың құрған тесттерінің жауабын сол авторлардың өздеріде он-онбес минуттың ішінде таба алмайды. Нашар тесттердің мысалдары – төртінші және бесінші ретті анықтауыштар туралы есептер және төртінші ретті САТЖ-лар, олардың жауаптарының ешқандай ерекшеліктері жоқ. Сапалы тесттер пәнді білетін адамды жан-жақты тексеру керек және оларды есептеу үшін жақсы оқитын студент көп уақыт қажет болмау керек. Демек, тест ұзақ есептеулерді қажет қылмау керек және студенттің білімі бар болса оған жауап беру үшін 10 – 30 секунд жеткілікті болу керек. Дегенменде, тест қарапайым шешілмеу керек. Тесттердің жақсы жинағы студенттің негізгі анықтамаларды және нәтижелерді игергенін сапалы тексереді. Әрбір тестте жалғыз дұрыс жауап болатындығы студентке дұрыс емес жауаптарды кесіп алып тастауға көмектеседі.

Студент өзін тексеру үшін *машинамен интерактивты қарым-қатынасжасау керек.* Бұл жағдайда студент үшін білімін тексеру өте ыңғайлы, өйткені ешқандай құлық жасаудың қажеті жоқ және мұғалімнен ол тобының артынан үлгермеген үшін соғыс естімейді. Ешкім, сізден басқа тесттердің нәтижелерін білмейді. Бірақ бұл жағдайда, нағыз білім алғысы келетін студент, тапсырмаларды орындап, дұрыс емес болса автордың шешуіне қарап, қатесін талдау керек. Ал егер, студент тапсырманы орындамай тек автордың жауаптарын жаттап алса, ол ешқандай нәтижеге келмейді. Өйткені емтиханда немесе бақылауда тесттердің үлкен базалары қолдану мүмкін. Тесстердің жауаптарын жаттау – ешқандай білім бермейді және ақылдың пайдасыз қолдануын білдіреді.

Тестілеуді бастау үшін *Start* пернесін басып, рет-ретімен сіздің ойыңызша тесттердің дұрыс жауаптарын таңдап, тышқанмен керек пунктке басу керек. Егер сіз тағыда бассаңыз жүйе бұрыңғы жауаптарды жойып қайтадан тестілеуге дайын болады. Жауаптарын тексеру үшін тесттердің соңындағы *end Quiz* сөйлемге басыңыз. Егер сіз жасыл белгіге немесе жасыл дөңгелекке бассаңыз жүйе сізді сәйкес тесттің шешуі бар бетке алып барады. Егер сіз шешуі бар бетте қызыл квадрат белгісіне бассаңыз жүйе қарастырылып отырған тестке алып барады.

Егер сіз осы файлды жақсы игерсеңіз, онда тапсырма сіз үшін оңай болады. Бірақ мұқият болыңыз, жақсы тесттерде әрбір сөздің мағынасы болады. Жақсы балл алатыныңызға сенімдіміз.

Start

1. $-1+i\sqrt{3}$ санының модулін табыңыз.
Жауаптары:

☐ a) -1; ☐ b) $\sqrt{3}$; ☐ c) $\sqrt{3}-1$; ☐ d) 2; ☐ e) $1+\sqrt{3}$.

2. Анықтауышты есептеңіз

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Жауаптары:

☐ a) 0 , ☐ b) $4ab$, ☐ c) $-abcd$, ☐ d) $abcd$, ☐ e) $10ad$

3. $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ көбейтіндісі алтыншы ретті анықтауыштың ашылған түрінде минус таңбасымен кіретіндей қылып (i,j,k) мәндерін таңдаңыз
Жауаптары:

☐ a) $(2,3,2)$, ☐ b) $(4,5,6)$, ☐ c) $(5,6,1)$, ☐ d) $(4,2,2)$, ☐ e) $(3,2,3)$

4. Үшінші ретті анықтауыштың барлық элементтері беске бөлінетін тақ сандар. Онда бұл анықтауыш жоқ дегенде келесі санға бөлінеді
Жауаптары:

☐ a) 125 , ☐ b) 5! , ☐ c) 5 , ☐ d) 1000 , ☐ e) 500 .

5. n ретті Δ анықтауышында жұп нөмірлі жолдардың қосындысы тақ нөмірлі жолдардың қосындысына тең. Анықтауыштың мәнінің ең дәл бағалауын табыңыз:
Жауаптары:

☐ a) жұп сан, ☐ b) $\leq n!$, ☐ c) кез-келген сан, ☐ d) тақ сан, ☐ e) 0 .

6. A қандайда бір матрицасы болсын. Оның кері матрицасы табылу үшін келесі шарттың біреунің орындалуы қажетті және жеткілікті:
Жауаптары:

☐ a) ол тікбұрышты болу керек, ☐ b) ол квадратты болу керек, ☐ c) оның анықтауышы нөлден өзгеше болу керек, ☐ d) ол квадратты ерекше емес матрица болу керек, ☐ e) ол бірлік матрица болу керек.

7. Үшінші ретті A матрицасының анықтауышы 5-ке тең . $2 \cdot A^2$ матрицасының анықтауышы неге тең? *Жауаптары:*

☐ a) 10 , ☐ b) 25 , ☐ c) 50 , ☐ d) 200 , ☐ e) 500 .

8. Қандай да бір сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің $SLAU_1$ жалғыз шешімі $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ бар болсын және оның барлық теңдеулерінде x_1 пен x_2 алдындағы коффициенттерін орындарын ауыстырда $SLAU_2$ шықсын. $SLAU_2$ қандай шартқа бағынады?
Жауаптары:

- a) $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n)$ жалғыз шешімі бар,
- b) ол үйлесімсіз,
- c) оның ақырсыз көп шешімі бар,
- d) оның нөлдік шешімі бар,
- e) $(\beta_2, \beta_1, \beta_3, \dots, \beta_n)$ жалғыз шешімі бар.

9. Нақты коэффициенттері бар САТЖ берілсін және теңдеулердің саны белгісіздердің санынан көп болсын. Онда бұл жүйе келесі қасиетті қанағаттандырады
Жауаптары:

- a) ол үйлесімсіз,
- b) егер ол үйлесімді болса, онда оның нақты шешімі бар,
- c) оның жалғыз шешімі бар,
- d) оның жоқ дегенде комплекс шешімі бар,
- e) егер ол үйлесімді болса, онда оның ақырсыз көп шешімі бар.

10. $f(x), g(x)$ нақты коэффициентті көпмүшелер болсын. Онда екеуінің ең үлкен ортақ бөлгішінің анықтамасы келесі болады:
Жауаптары:

☐ a) осы көпмүшелердің дәрежелерінің үлкені, ☐ b) осы көпмүшелер бөлінетін ең үлкен сан, ☐ c) $f(x)+g(x)$ көпмүшесі, ☐ d) $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелерін бөлетін көпмүше, ☐ e) бас коэффициенті 1-ге тең, $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелерінің ортақ бөлгіші болатын және осы көпмүшелердің кез-келген ортақ бөлгішіне бөлінетін көпмүше.

11. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$ көпмүшесінің бір түбірі $1 + i$. Келесі санның қайсысы осы көпмүшесінің түбірі болады?
Жауаптары:

☐ a) $-1 - i$, ☐ b) 1 , ☐ c) $1 - i$, ☐ d) $-1 + i$, ☐ e) i .

12. x векторы R өрісінің үстіндегі сызықтық кеңістіктің элементі болсын, μ – R өрісінің саны. Егер $\mu \cdot x = 0$ болса, онда x және μ туралы не айтуға болады?
Жауаптары:

☐ *1* олар сызықтық тәуелді, ☐ *2* олар коллинеар, ☐ *3* екеуіде нөлге тең, ☐ *4* сан нөлге тең немесе вектор нөлдік, ☐ *5* олар сызықтық тәуелсіз.

13. Сызықтық кеңістіктің қандай жүйесі сызықтық тәуелсіз деп аталады?
Жауаптары:

☐ a) егер жүйенің бір векторы нөлдік болса, ☐ b) егер сол векторлардың тек тривиалды комбинациясы ғана нөлдік векторға тең болса, ☐ c) егер олардың сызықтық комбинациясы нөлдік векторға тең болса, ☐ d) егер жүйеде екі бірдей вектор бар болса, ☐ e) егер жүйеде коллинеар векторлар болса.

14. Егер V сызықтық кеңістігінің a векторы V сызықтық кеңістігінің $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторлары арқылы бірмәнді өрнектелсе, онда $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторлар жүйесі сызықтық тәуелсіз деп айтуға болады ма?
Жауаптары:

☐ a) иә болады, ☐ b) болады, егер олар базис құраса, ☐ c) міндетті түрде емес, ☐ d) болады, егер ол нөлдік вектор болса, ☐ e) жоқ, ол әрқашан олай емес.

15. Координаттары қандай да бір $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базисінде берілген евклидтік кеңістіктің $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ және $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ векторларының скаляр көбейтіндісі қалай жазылады?
Жауаптары:

☐ a) $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)$ ☐ b) $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$, ☐ c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$, ☐ d) $\sum_{i\neq j} \alpha_i\beta_j(e_i, e_j)$ ☐ e) $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\beta_j(e_i, e_j)$

16. Евклидтік (унитарлық) кеңістіктің a және b векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең. Онда бұл векторлар:
Жауаптары:

☐ a) сызықтық тәуелді, ☐ b) сызықтық тәуелсіз, ☐ c) коллинеар, ☐ d) егер екі вектор нөлдік емес болса, онда олар сызықтық тәуелсіз, ☐ e) олардың арасындағы бұрыш сүйір.

17. Евклидтік кеңістіктің кез-келген базисы бойынша ортонормаланған базисті қалай құрастыруға болады?
Жауаптары:

☐ a) осы базистің әрбір векторын нормалау керек, ☐ b) жүйе ортогонал болғанша, векторлардың орындарын ауыстыру керек, одан кейін оларды нормалау керек, ☐ c) ол жүйеге ортогоналдау процесін қолдану керек, одан кейін шыққан векторларды нормалау керек, ☐ d) ол жүйеге ортогоналдау процесін қолдану керек, шыққан нөлдік векторларды алып тастап, қалғандарын нормалау керек, ☐ e) осы векторларды нормалау керек және жүйе нормаланған болғанша векторлардың орындарын ауысытру керек.

18. Келесі сандардың қайсысы келесі теңдеудің

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

түбірі болады? *Жауаптары:*

☐ a) 1 , ☐ b) 5! , ☐ c) 0 , ☐ d) кез-келген сан, ☐ e) түбірі жоқ.

19. Төртінші ретті анықтауышта барлық элементтері нақты сандар және олар $[-1, 1]$ сегментінде орналасқан. Анықтауыштың мәні келесі сегменттердің ең кіші болатын қайсысына кіреді?

Жауаптары:

☐ a) $[-4,4]$, ☐ b) $[-50,50]$, ☐ c) $[-24,24]$, ☐ d) $[-90,90]$, ☐ e) $[-1,1]$.

20. Қандай түрлендірулерді қолданғанда матрицаның рангі өзгермейді?

Жауаптары:

☐ a) жолды санға көбейту, ☐ b) бір бағанға басқа бағанды $\lambda \neq 0$ санына көбейтіп қосу және бағандарды кез-келген санға көбейту, ☐ c) матрицалардың элементтерінің орындарын ауыстыру, ☐ d) бір жолға λ санына көбейтілген басқа жолды қосу және жолдарды нөлден өзгеше кез-келген санға көбейту, ☐ e) бір жолдың барлық элементтерін квадраттау.

End Score: Correct

Solutions to Quizzes

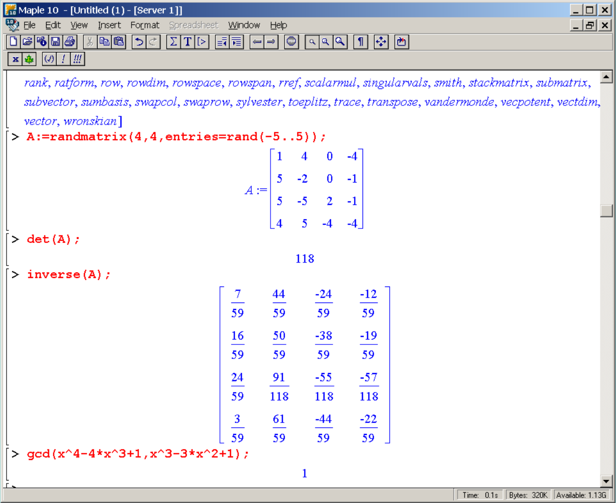
Solution to Quiz: Егер бірінші қатарды екі еселендірсек, онда анықтауыш екі еселенеді. Одан кейін анықтаушытң бірінші қатарынан екінші қатарды азайтсақ, анықтауыш өзгермейді. Демек, берілген түрлендірулерден кейін анықтауыш екі еселенеді.

Solution to Quiz: Егер түрлендірулерден кейін шыққан анықтауышта бірінші қатарға екінші және үшінші қатарларды қоссақ, онда нөлдік қатар шығады. Шынымен де,

$$[(1)-(2)]+[(2)-(3)]+[(3)-(1)]=\theta.$$

Бұл жерде (i) арқылы бастапқы анықтауыштың i-ші қатары белгіленген. Сондықтан, анықтауыш нөлге тең болады.

Solution to Quiz: Берілген $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелерінің коэффициенттері рационал сандар, сондықтан Евклид алгоритмі бойынша олардың ең үлкен ортақ бөлгішінің коэффициенттері де рационал болу керек. $\sqrt{2}$ саны иррационал болғандықтан, берілген жауап дұрыс емес. Әрине студент әйгілі кітаптардың авторларын сыйлау керек, бірақ кез келген берілген жауапқа сенебермей әр нәрсеге сынқа көзқараспен қарау керек. Енді осы есептің шығарылуын көрсетейік.



Maple-дың дистрибутивін табуды ұсынамыз. Бұл математиканың барлық салаларында керек профессионалды математикалық пакет. Оны түсіну өте оңай. Суретте кездесоқ төртінші ретті матрицаның анықтауышы және кері матрицасы табылған. Ал берілген көпмүшелердің ең үлкен ортақ бөлгіші 1-ге тең.

Title Page
Contents
Page 145 of 142
Go Back
Close

Solution to Quiz: Бұл есепте көпмүшеснің түбірлерін табудың қажеті жоқ. Түбірлерді x_1, x_2, x_3 арқылы белгілейік. Онда Виет формулалары арқылы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 5^2 - 2 \cdot 4 = 8$$

шығады.

■

Solution to Quiz: Модуль келесі формула бойынша есептеледі

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

.

Solution to Quiz: Анықтауышты соңғы жол бойынша жіктейміз, одан кейін бірінші баған бойынша жіктеп $abcd$ жауабына келеміз.

Іріктеу әдісі: Анықтауыш d-дан тәуелді екені анық, өйткені $d = 0$ анықтауышқа қойсақ ол нөлге айналады. Сол сияқты ол c-данда тәуелді. Сондықтан ол өзінің параметрлерінен көпмүше ретінде cd-ға бөліну керек. Егер анықтауыштың басқа қасиеттерін білмесеңіз a), c), d) жауаптарының біреуін таңдау керек.

Solution to Quiz: Іріктеу әдісі: Көбейтіндіні жолдардың ретімен жазайық

$$a_{1j}a_{i6}a_{35}a_{44}a_{51}a_{6k}./$$

Осыдан i-дың мәні 2-ге тең екені шығады. Бізде тек бірінші жауап 2-ден басталады, демек сол дұрыс жауап.

Ал уақытыңыз жеткілікті болса, онда $(j, 6, 5, 4, 1, k)$ алмастыруындағы $j = 3$ және $k = 2$ болған жағдайда инверсиялар санын санаңыз. Ол 11. Сонымен, дұрыс жауап – бірінші.

Solution to Quiz: Анықтауыштың барлық жолдары беске бөлінетін болғандықтан, ол $5^3 = 125$ санына бөлінеді. Бірақ, біз анықтауыштың барлық элементтері тақ сандар екенін пайдаланбадық. Егер екінші және үшінші жолға біріншіні қоссақ, онда жұп сандардан құрылған екі жол шығады. Демек, біздің анықтауыш $2^2 = 4$ санына бөлінеді және ол 500-ге бөліну керек. Дұрыс жауап e).

Іріктеу әдісі: Тақ сандардан құрылған реті $n > 1$ болатын анықтауыш әрқашан жұп сан болады. Сонымен, сіз d) немесе e) жауабын таңдауыңыз керек.

■

Solution to Quiz: Іріктеу әдісі: Егер бірінші жолға барлық тақ нөмірлі жолдарды қоссақ, екінші жолға барлық жұп нөмірлі жолдарды қоссақ, онда анықтауыштың екі жолы бірдей болып, нөлге тең болады.

■

Solution to Quiz: Матрицаны керіленетін деп атаймыз, егер ол квадратты болса және оның анықтауышы нөлден өзгеге болса. Жауап d).

Solution to Quiz: A^2 матрицасының анықтауышы $(det(A))^2 = 25$ санына тең. Матрицаны санға көбейткенде сол санға барлық элементтері көбейтіледі. Сондықтан, $det(2A^2) = 2^3(det(A))^2 = 200$.

Іріктеу әдісі: $2 \cdot A^2$ матрицасының барлық элементтері жұп, сондықтан b) жауабы дұрыс емес. Матрицаны квадраттағанда, анықтауыштардың көбейтіндісі туралы теоремадан, анықтауышыда квадратталанады. Сондықтан a) жауабы да дұрыс емес. c), d), e) жауаптарының біреуін таңдау керек.

■

Solution to Quiz: Егер тепе-теңдікте екі қосылғыштың орнын ауыстырсақ, онда теңдік сақталады. Дұрыс жауап e) болатыны айқын.

Іріктеу әдісі: d) жауабы мағынасыз, өйткені бастапқы шартты қанағаттандыратын нөлдік шешімі жоқ САТЖ-ны құру өте оңай.

■

Solution to Quiz: Гаусс әдісі бойынша K өрісінде қарастырлып отырылған САТЖ-ның үйлесімділігінен оның K өрісінде шешімі табылатыны шығады. Кез-келген САТЖ сатылы жүйеге эквиваленттi. Сондықтан b) жауабы дұрыс.

Іріктеу әдісі: Қарапайым екі белгісізі бар жүйелерді есептеу жолдарына a), c), e) жауаптары қарсы келеді. Сондықтан, b) және d) жауаптарының біреуін таңдау керек. ■

Solution to Quiz: $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелерінің ең үлкен ортақ көпмүшесі деп бас коэффициенті 1-ге тең, $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшелерінің ортақ бөлгіші болатын және осы көпмүшелердің кез-келген ортақ бөлгішін бөлінетін көпмүшені айтамыз. ЕҮОБ кез-келген нөлден өзгеше көпмүшелер үшін табылады. Жауап е).

Іріктеу әдісі: $gcd(f(x), g(x)$ – бұл көпмүше, сондықтан a) және b) жауаптары дұрыс емес. Ол екі көпмүшеніңде бөлгіші болу керек, сондықтан c) жауабы дұрыс емес. d) және е) жауаптарының жауаптарының біреуін таңдайсыз.

∎

Solution to Quiz: Егер α нақты коэффициентті көпмүшенің түбірі болса, онда $\bar{\alpha}$ санында сол көпмүшенің түбірі болады. Жауап c).

Іріктеу әдісі: $f(1) = 9 \neq 0$ болғандықтан b) жауабы дұрыс емес. Сол сияқты, $f(i) = 1 - i - 1 - 4i + 10 \neq 0$ сондықтан e) жауабы да жалған. a), c) және d) жауаптарының біреуін таңдау керек.

∎

Solution to Quiz: d) жауабының дұрсытығы айқын.

Іріктеу әдісі: Вектор және сан әр түрлі математикалық объектілер, сондықтан a), b), c) және e) жауаптарының мағынасы жоқ.

■

Solution to Quiz: Сызықтық кеңістіктің векторлар жүйесін сызықтық тәуелсіз деп атайды, егер сол векторлардың тек тривиалды комбинациясы ғана нөлдік векторға тең болса.

Іріктеу әдісі: Егер $a_2 = \lambda a_1$, онда сызықтық тәуелсіздік туралы айтуға болады ма? Сондықтан a), d) және e) жауаптары дұрыс емес. c) жауабы ды дұрыс емес, өйткені тек тривиалды комбинациясы ғана нөлдік векторға тең болу керек. Сондықтан a) жауабы қалады.

∎

Solution to Quiz: $a = \mu_1 a_1 + \mu 2 a_2 + \cdots + \mu_n a_n$ болсын және $a_1, a_2, \ldots, a_n$ векторлары сызықтық тәуелді болсын. Онда кейбір тривиалды емес $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ үшін $\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \cdots + \rho_n a_n = \theta$. Сонда $a = a + \theta$ векторының өрнектелуі бірмәнді емес. Жауап а).

Іріктеу әдісі: е) пункті күдік тудырады, ал қалғандарының біреуін таңдау үшін білім қажет.

Solution to Quiz: Скаляр көбейтіндінің екі координаталар бойынша дистрибутивтық қасиетін есімізге алсақ, e) жауабы дұрыс екені анық.

Іріктеу әдісі: Ортонормаланған базисте $(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. Бірақ, бұл жерде кез-келген базис. Сондықтан, b) және c) жауаптар қате. Сіз a), d), e) жауаптарының біреуін таңдауыңыз керек.

∎

Solution to Quiz: Нөлдік емес векторлардың ортогонал жүйесі сызықтық тәуелсіз. Жауап d).

Іріктеу әдісі: Егер $a \neq \theta$, онда $(a, a) \neq 0$. Сондықтан, a) және c) жауаптары дұрыс емес.

■

Solution to Quiz: Ортогоналдау процесі кез-келген базисті ортогонал базиске түрлендіреді.
Іріктеу әдісі: Геометрия жағынан a), b), e) жауаптары мағынасыз.

■

Solution to Quiz: Анықтауышты соңғы жол бойынша жіктесек, оның x жоқ минорына тең екенін көреміз және ол минор нөлге тең емес. Шешімі жоқ. Дұрыс жауап е). ■

Solution to Quiz: 4-ші ретті анықатуыш $4! = 24$ қосылғыштардың қосындысына тең, олардың әр қайсысы $[-1, 1]$ интервалында орналасқан. Демек, дұрыс жауап c).

Solution to Quiz: Гаусс түрлендірулері матрицаның рангін өзгертпейді. Дұрыс жауап d).

Іріктеу әдісі: е) және с) жауабы мағынасыз. а) жауабы да дұрыс емес, өйткені жолдарды нөлге көбейтсек, барлық матрица нөлдік болып кетеді. Сіз b) және d) жауаптарының біреуін таңдауыңыз керек.