КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

Е.В. Боголюбова, Г.Т. Сулейменова

ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МЕТЕОРОЛОГИИ

Учебное пособие

АЛМАТЫ «ҚАЗАҚ УНИВЕРСИТЕТІ» 2016

**Аннотация**

В настоящем учебном пособии рассматриваются общие принципы, теоретические положения и задачи динамической (теоретической) метеорологии. Анализируется применение законов гидротермодинамики к атмосфере на базе понятий векторного анализа и теории поля. Приводится история становления динамической метеорологии, как физической науки об атмосфере, изучающей теоретическими методами атмосферные движения. Система уравнений гидротермодинамики, описывающая процессы в атмосфере, выводится из фундаментальных законов физики - законов сохранения импульса или количества движения, массы и энергии. Эта наука является научной основой прогнозирования погоды. В пособии представлены задачи и контрольные вопросы для закрепления теоретических знаний.

Пособие написано в соответствии с программой и предназначено для студентов метеорологов бакалавриата. Может быть полезна студентам и специалистам гидрологам, океанологам, геофизикам и всем интересующимся теоретическими методами исследования атмосферы.

**Содержание**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | С. |
|  | Предисловие | 5 |
|  | Введение | 6 |
| 1. | История развития динамической метеорологии | 6 |
| 2. | Гипотезы, принимаемые при изучении атмосферы. Предмет динамической метеорологии | 27 |
|  | Контрольные вопросы | 29 |
| Глава 1. | Поля метеорологических величин и их характеристики | 30 |
| 1.1. | Скалярные и векторные поля | 30 |
| 1.2. | Скалярная и векторная функция скалярного аргумента | 31 |
| 1.3. | Сложение и вычитание векторов  | 33 |
| 1.4. | Модуль вектора  | 33 |
| 1.5. | Годограф | 33 |
| 1.6. | Производная от скалярной функции скалярного аргумента | 34 |
| 1.7. | Производная от векторной функции скалярного аргумента | 35 |
| 1.8. | Некоторые характеристики скалярных и векторных полей: поток, поверхность уровня, линия тока  | 36 |
| 1.9. | Операции с векторами | 40 |
| 1.10. | Правила дифференцирования векторов | 42 |
| 1.11. | Индивидуальная, локальная и геометрическая производные | 43 |
| 1.12. | Градиент скалярного поля | 45 |
| 1.12.1. | Свойства градиента | 48 |
| 1.13. | Дивергенция векторного поля | 48 |
| 1.13.1. | Свойства дивергенции | 51 |
| 1.14. | Вихрь векторного поля; циркуляция вектора | 51 |
| 1.14.1. | Свойства вихря | 54 |
| 1.14.2. | Вихрь в поле прямолинейных линий тока | 54 |
| 1.15. | Операторы Гамильтона («набла»), Лапласа и Якоби | 55 |
|  | Контрольные вопросы | 60 |
| Глава 2. | Силы, действующие в атмосфере | 61 |
| 2.1. | Абсолютная (инерциальная) и правая локальная декартова системы координат | 61 |
| 2.2. | Сферическая система координат | 62 |
| 2.3. | Локальная изобарическая система координат | 63 |
| 2.4. | Натуральная система координат | 63 |
| 2.5. | Классификации сил, действующих в атмосфере | 66 |
| 2.6. | Cила тяжести | 69 |
| 2.6.1. | Общие положения | 69 |
| 2.6.2. | Зависимость силы тяжести от широты места | 70 |
| 2.6.3. | Зависимость силы тяжести от расстояния между материальной точки и центром Земли | 72 |
| 2.6.4. | Зависимость силы тяжести от собственной скорости вращения атмосферы | 73 |
| 2.7. | Отклоняющая сила вращения Земли или сила Кориолиса | 74 |
| 2.8. | Движение частицы только под действием силы Кориолиса | 77 |
| 2.9. | Сила барического градиента | 79 |
| 2.10. | Центробежная сила и её влияние на движения | 80 |
| 2.11. | Силы вязкости; тензор вязких напряжений и скоростей деформации | 81 |
| 2.12. | Закон двух третей | 86 |
|  | Контрольные вопросы | 88 |
| Глава 3. | Уравнения гидротермодинамики атмосферы | 89 |
| 3.1. | Уравнение состояния идеального газа (для сухого воздуха) | 89 |
| 3.2. | Уравнение состояния для влажного воздуха | 90 |
| 3.3. | Уравнение статики | 91 |
| 3.4. | Уравнение притока тепла в форме первого начала термодинамики | 92 |
| 3.5. | Уравнения движения в форме Навье и Навье-Стокса | 95 |
| 3.6.1. | Уравнение неразрывности | 100 |
| 3.6.2. | Различные виды уравнения неразрывности | 102 |
| 3.7. | Уравнения переноса влаги, переноса примесей | 104 |
| 3.8. | Система уравнений гидротермодинамики для нетурбулентной вязкой атмосферы в форме Навье | 106 |
| 3.9. | Система уравнений гидротермодинамики в форме Навье -Стокса | 108 |
|  | Контрольные вопросы | 110 |
| Глава 4. | Система уравнений гидротермодинамики для турбулентной атмосферы | 111 |
| 4.1. | Классификация атмосферных движений | 111 |
| 4.2. | Понятие о атмосферной турбулентности | 111 |
| 4.3. | Возникновение турбулентности | 112 |
| 4.4. | Принципы осреднения уравнении гидротермодинамики атмосферы | 116 |
| 4.5 | Осредненные уравнения гидротермодинамикаи атмосферы | 118 |
|  | Контрольные вопросы | 123 |
| Глава 5. | Задачи для практических занятий | 124 |
| 5.1. | Вычисление производных с помощью конечных разностей | 124 |
| 5.2. | Градиент скалярного поля | 126 |
| 5.3. | Дивергенция, вихрь, лапласиан | 128 |
| 5.4. | Уравнения гидротермодинамики атмосферы | 133 |
|  | Список литературы | 136 |

**Предисловие**

Динамическая или теоретическая метеорология – это общая базовая наука для метеорологов, которая является теоретической базой для дальнейших теоретических и экспериментальных исследований. Она является научной основой прогнозов погоды различной заблаговременности с помощью численных методов прогнозов погоды, а также теории общей циркуляции атмосферы и климата. Основной задачей этой науки является исследование физических процессов в атмосфере и формулировка результатов и выводов на языке математики. В процессе обучения всегда остается необходимым формирование у студентов аналитического мышления и подхода при анализе и моделировании атмосферных процессов.

Современная метеорология получила наибольший толчок к своему эффективному развитию с усовершенствованием компьютеров. Основная система уравнений гидротермодинамики была сформулирована ещё в девятнадцатом веке, и в 1858 г. изучалась Гельмгольцем как возможный вариант решения. Эти уравнения чрезвычайно трудно решать, так как необходимо решить общую пространственную задачу с начальными и граничными условиями для системы нелинейных уравнений в частных производных.

Аналитические решения были возможны лишь для частных случаев.

С развитием компьютеров и после появления возможности решения этой системы уравнений с помощью численных методов качество прогнозов погоды, особенно малой заблаговременности, значительно улучшилось. Метеорология стала физико-математической наукой.

Настоящее пособие включает в себя:

1. теоретическую часть курса «Основы динамической метеорологии» (введение и 4 главы), содержащую основные положения, формулы, уравнения, их вывод и анализ;
2. перечень задач (5 глава) для закрепления теоретических знаний;
3. перечень контрольных вопросов в конце каждой теоретической главы;
4. список используемой литературы.

Введение, первая, вторая, третья главы составлены доцентом кафедры метеорологии и гидрологии факультета географии и природопользования кандидатом физико-математических наук Е.В. Боголюбовой. Четвертая глава – старшим преподавателем кафедры метеорологии и гидрологии Г.Т. Сулейменовой. Пятая - Е.В. Боголюбовой и Г.Т. Сулейменовой. Понятия, рассмотренные в главе 1, касающиеся векторного анализа и теории поля, изложены несколько шире, чем это принято, в связи с ограничением числа часов, выделенных на изучение высшей математики в бакалавриате.

Авторы будут благодарны за пожелания и замечания, которые необходимо высылать на адрес КазНУ им. аль-Фараби (г. Алматы).

**Введение**

1. **История развития динамической метеорологии**

Теоретическая метеорология или, как её называют метеорологи, динамическая метеорология – это наука, изучающая теоретическими методами атмосферные движения, причём не сами по себе, а в тесной связи и взаимодействии с термодинамическими процессами в атмосфере. Несмотря, на то, что это - физическая наука, она никогда не была удовлетворительно разработана никем из физиков. Великие физики рассматривали только отдельные стороны этой науки, но тем не менее развивали её.

Начало истории развития динамической метеорологии как физической науки можно отнести к IV веку до нашей эры, ко времени жизни Аристотеля, крупнейшего мыслителя древнего мира. Аристотеля можно считать основателем теоретической науки [1,2]. Им был составлен систематический свод научных знаний о природе своего времени. Родился Аристотель в Стагире во Фракии в семье придворного врача царя Македонии Аминта II в 384 г. до нашей эры. Восемнадцатилетним он прибыл в Афины в академию Платона. По преданию над входом в Академию была надпись: «Пусть не входит никто, не знающий математики». Около двух лет Аристотель пробыл в Академии до встречи с ее основателем и около двадцати лет вместе с Платоном до самой смерти своего учителя. После смерти Платона по приглашению царя Македонии Филиппа прибыл в столицу Пелле, чтобы стать учителем и воспитателем Александра Македонского. В 335 году до н.э. Аристотель вернулся в Афины, где основал свой Лицей (Ликей). Умер Аристотель в 332 г. пережив Александра Македонского на 1 год в г. Халкиде на острове Эвбее, куда он был изгнан после смерти своего ученика –знаменитого полководца древности.

С ранних лет Аристотель интересовался природой. Аристотель признавал существование материального мира и его познаваемость и верил в существование богов. Он искал высшую цель Природы и был крестным отцом физической науки. Аристотелем впервые была написана книга об атмосферных явлениях под названием «Метеорология», состоящая из четырех книг. Первая книга повествовала о явлениях, происходящих, по мнению автора, в верхних слоях атмосферы – о кометах, о падающих звездах, о гидрометеорах. Верхние слои, как полагал Аристотель, являлись сухими и горячими. Вторая книга была посвящена морю, ветрам, землетрясениям, молнии и грому. Третья описывала бури, вихри, световые явления, что прямо указывает на то, что древние греки были знакомы с метеорологическими явлениями. Четвертая книга называлась «Теория четырех стихий». Именно ему принадлежала идея о круговороте воды в природе. О связи ветра с погодой Аристотель писал, что «Апарктий, Траский и Аргест (северный, северо-северо-западный, западо-северо-западный), рассеивая плотные облака, приносят ясную погоду, когда они не слишком плотны. Их действие иное, если они не столь сильны, сколь холодны, ибо они вызывают сгущение паров раньше, чем они рассеют другие облака. Аргест и Эвр (востоко-юго-восточные) – сухие ветры, последний сух лишь в начале и влажен в конце. Мез (северо-северо-восточный) и более всех Апарктий приносят снег, ибо они самые холодные. Апарктий приносит град, также как Траский и Аргест, Нот (южный), Зефир (западный) и Эвр горячи. Кайкий (востоко-северо-восточный) покрывает небо мощными облаками, при Липсе (западо-юго-западном) облака не так мощны». Идея о ветрах как о правителях погоды была отражена в «Башне ветров», построенной в Афинах во втором веке до н.э. Андронником Киррестом. На башне железный флюгер с жезлом указывал на то направление, откуда дует ветер, а на скульптурном фризе восьмиугольной башни были изображены ветры в виде мифологических фигур с атрибутами, характеризующими приносимую этими ветрами погоду.

Почему мы начали с Аристотеля? Дело в том, что в Академии Платона было развито искусство диалога, ценилось умение логически мыслить. Там был чрезвычайно высок интерес к строгим математическим доказательствам. Теоретические положения Аристотеля были приняты за истину в течение целого ряда столетий. В средневековых университетах естествознание излагалось по Аристотелю. Его даже называли предтечей Христа в истолковании Природы. Последователей Аристотеля называли перипатетиками от греческого слова «перипатос» - место для прогулок около Лицея (Ликея). Аристотель путем рассуждений приходил к тому или иному выводу. Он ставил задачу, то есть делал предположения, усматривал в них логические противоречия и делал выводы из умозаключений. Метод эксперимента большей частью был Аристотелем отброшен в сторону.

В эпоху рабовладельческого строя высшими научными кругами, философами, искусство экспериментатора не пользовалось особым уважением. Они ценили тонкую игру мысли.

Аристотель предполагал, что 4 основных противоположности - сухость, влажность, тепло и холод - дают начало четырем основным элементам: холодная и сухая Земля, холодная и влажная вода, теплый и влажный воздух и теплый сухой огонь. Эти элементы переходят друг в друга, изменяя свои первичные качества путем перехода из одного агрегатного состояния в другое. Себя Аристотель считал прежде всего философом.

В 212 г. до нашей эры при взятии города Сиракузы римским солдатом был убит Архимед, выдающейся древнегреческий ученый, физик и математик [1,2]. Он также внес значительный вклад в теоретическое естествознание. Он заложил основы гидростатики, занимался равновесием плавающих тел. Свой знаменитый закон он изложил в трактате «О плавающих телах». Но Архимед был не только теоретиком, но и одним из крупнейших инженеров своего времени, конструктором машин и технических аппаратов. Родился Архимед в 287 г. до н.э. на острове Сицилия в Сиракузах. Отец Архимеда – астроном Фидий - был приближенным правителя Сиракуз Гиерона и дал сыну хорошее образование. Приобретенные у отца знания Архимед расширил в Александрии, где он подружился с философом и геометром Эвклидом, астрономом Кононом, географом и директором знаменитой Александрийской библиотеки Эратосфеном. С его именем было связано создание целого ряда легенд. По одной из них Архимед совершил открытие своего закона, когда вошел в ванну и увидел, как выливается вытесненная его телом вода. Он выскочил из ванной и нагим побежал по улице с криком: «Эврика!». Ему также приписывают фразу: «Дайте мне точку опоры, и я переверну земной шар». Архимеда называли «Великаном из Сиракуз». Именно он помог Эратосфену измерить угол наклона эклиптики и радиус Земли.

 А кто первый объяснил радугу? - Поляк Эразм Витело, первый ученый, родившийся на польской земле между 1220 и 1230 годами около Вроцлава. Он был сыном польки и выходца из Германии, поселившегося в Польше во времена Болеслава Стыдливого. Учился Витело в иностранных университетах и занимался большей частью математикой. Во время пребывания в Риме он написал 2 книги, одна из которых – трактат по оптике в десяти книгах, где пришел к выводу, что радуга образуется от преломления лучей в отдельных каплях [2].

Оптикой также занимался выдающийся представитель науки и искусства эпохи Возрождения - Леонардо да Винчи [2]. Он родился 15 апреля 1452 года в небольшом городке Винчи. В 1469 г. отец Леонардо переселился во Флоренцию, где юноша изучал живопись, скульптуру, черчение, анатомию, астрономию, физиологию, физику, ботанику, геологию, математику и механику, которую называл «раем» математических наук. В механике он был поклонником экспериментальных исследований и пытался определить сопротивление разных материалов, выяснить особенности падения тел и вычислить траектории полета снарядов. Среди сохранившихся эскизов Леонардо были обнаружены рисунки вертолета и парашютов.

Леонардо стремился экспериментальным путем определить силу света и ее зависимость от расстояния до источника света. Он был близок к пониманию волновой природы света и заметил общее между распространением волн по воде и звуковыми, световыми волнами. Его работы в области гидротехнических сооружений привели к описанию законов поведения жидкости в сообщающихся сосудах. Он также был близок к открытию закона, который сейчас называется законом Паскаля. Леонардо интересовался также историей Земли [1,2].

15 февраля 1564 г. в семье небогатого дворянина из Пизы (по другой версии в семье купца) в местечке Арчетри близ Флоренции родился Галилео Галилей. Отец хотел, чтобы он стал врачом, и отправил его в Пизу. Галилей учился в Пизе в университете на медицинском и философском факультетах. Там он впервые познакомился с трудами греческих ученых. В 25 лет он был уже профессором математики в Пизе. После трех лет пребывания в Пизе он переселился в Падую. Галилей занимался исследованиями давления воздуха и определением его величины. Больше всего он интересовался исследованиями Архимеда, касающимися теории плавания тел и определения удельного веса. Он изучал законы падения тел и определил, что сброшенные с наклонной башни шары, чугунный и деревянный, одинакового размера, упали почти одновременно. Различие он объяснил скоростью сопротивления воздуха. Занимался он также изготовлением термоскопов, применяя в качестве расширяющихся жидкостей воду и спирт. В 1609 году Галилей построил подзорную трубу и наблюдал Луну и планеты. Он открыл 4 спутника Юпитера, пятна на Солнце и кольца Сатурна. Эти наблюдения заставили его принять теорию Коперника о строении вселенной. Инквизиция преследовала его. И ему пришлось отречься от учения Коперника и принести публичное покаяние в церкви. За те же взгляды Иоганн Кеплер был изгнан из обсерватории Тихо Браге в Праге в 1612году, откуда он переселился в город Линц. Галилей своим формальным отречением от ереси спас от инквизиции для науки свое великое произведение «Беседы о двух новых науках» [1]. Систему Коперника он обсуждал как одну из научных гипотез. Ученики Галилея Торичелли и Вивиани, которым принадлежит честь открытия атмосферного давления, стояли у гроба Галилея, символизируя несокрушимую силу науки. В 1637 году Галилей ослеп и умер 8 января 1642 года. Галилей в истории науки считается отцом экспериментальной физики. Верным он считал только то, что может быть доказано опытом.

Эванджелист Торричелли - ученик великого Галилея – также был поклонником опыта. Родился Торричелли в 1608 году и в двадцатилетнем возрасте начал обучение в Риме у ученика Галилея - Кастелли. Умер он в 1647 году, пережив Галилея всего на 5 лет [1, 2, 5].

Торричелли впервые указал на существование атмосферного давления и доказал, что может существовать «торичеллиева пустота». Исходя из того, что мы живём на дне воздушного океана, оказывающего на нас давление, он предложил Вивиани измерить это давление с помощью запаянной с одной стороны трубки, заполненной ртутью. При опрокидывании трубки в сосуд с ртутью ртуть выливалась не полностью, а останавливалась на некоторой высоте так, что в трубке образовывалось пустое пространство. Торричелли сделал два предположения: во-первых, пространство над ртутью пустое, во-вторых, ртуть не выливается полностью потому, что этому препятствует воздух, давящий на поверхность ртути в чашке. Торричелли определил высоту ртути и доказал, что эта высота составляет 1/14 высоты водяного столба. Причем высота столба ртути не оставалась постоянной, а колебалась изо дня в день в зависимости от изменения давления. Так в 1664 году был сконструирован первый ртутный барометр - прибор для измерения атмосферного давления. Эванджелист Торричелли впервые опубликовал свою работу по гидродинамике, которую можно считать началом теоретической метеорологии.

Знаменитый французский физик, математик и философ Блез Паскаль (1623-1662 гг.) в 1647 году теоретически и экспериментально подтвердил предположение Торричелли о том, что давление воздуха на вершинах гор меньше, чем у их подножия [1, 2, 5]. Предположение он проверил вместе со своим родственником - шурином. Это открытие имело огромное значение для метеорологии. Родился Паскаль 19 июня1623 г. в городе Клермон – Ферране. Паскаль уже в детстве отличался необыкновенными способностями. Его отец был математиком и, чтобы облегчить сыну учение, он переехал в Париж. Будучи еще двенадцатилетним мальчиком Паскаль стал автором многих теорем евклидовой геометрии. В 16 лет он изобрел «суммирующую машину» - предтечу арифмометра – для выполнения четырех действий арифметики, написал ряд работ по теории чисел и алгебре, нашел способ вычисления биномиальных коэффициентов.

Он открыл закон, что давление на поверхности жидкости передается равномерно внутри жидкости во всех направлениях. В своих философских мыслях Паскаль писал: «Все наше достоинство заключено в мысли. Не пространство и не время, которых мы не можем заполнить, возвышают нас, а именно она, наша мысль. Будем же учиться хорошо мыслить: вот основной принцип морали.»

Работами Торричелли и Паскаля живо интересовался один из основателей Лондонского Королевского общества Роберт Бойль (1627-1691 гг.). Он был химиком и физиком, кроме того состоятельным человеком, и мог посвятить себя науке, не думая о заработках [1, 2, 5]. Бойль исследовал упругость воздуха. Взяв U-образную трубку, запаянный конец которой был короче открытого, он установил, что ртутный столб уравновешивает избыточную упругость сжатого воздуха. Бойль проверил, что произойдет с воздухом, замкнутым над ртутью, если его постоянно сжимать. Когда заметил, что его объём постоянно уменьшается, он произвел более точные измерения объёма воздуха и давления, вызывающего его изменения. А его ученик Тоунли подметил обратную пропорциональность между избыточной высотой ртутного столба и объёмом воздуха в закрытом колене. Свои выводы Роберт Бойль опубликовал в работе «Защита доктрины, относящейся к упругости и весу воздуха» в 1662 году. Когда речь идет о газовых законах, наряду с Бойлем упоминают фамилию французского аббата Мариотта. Независимо от Бойля в своем сочинении «Опыт о природе воздуха» он описал аналогичные опыты, которые привели его к такому же выводу. Закон Бойля-Мариотта говорит о том, что при постоянной температуре объем данной массы газа обратно пропорционален давлению. С таким же успехом его можно назвать законом Бойля – Тоунли.

Вопросами атмосферного электричества активно занимался выдающийся американский политический деятель, журналист и ученый Бенджамен Франклин [1, 2]. Он родился 17 января 1706 года в семье бедного ремесленника, плавильщика свечей и мыла. Франклин разработал общую теорию электрических явлений и ввел общепринятое в настоящее время обозначение противоположенных электрических состояний заряженных тел с помощью знаков «+» и «-». Свои взгляды об электрическом характере молнии в 1750 году он представил Лондонскому Королевскому обществу. Английские ученые сочли это сообщение несерьёзным и не опубликовали его. Не ограничиваясь доказательством существования атмосферного электричества, Франклин предложил эффективное средство защиты от грозового разряда с помощью проводника, который заряды атмосферного электричества сводил бы в землю. Б. Франклина считают автором идеи громоотвода, хотя первым сконструировал громоотвод Жан Далибар в 1752 г.

На 200 лет опережали своё время научные взгляды М.В. Ломоносова [1]. Современниками его они были непонятны. Сын крестьянина-помора северной окраины России он ходил с отцом за рыбой на судах в Северный Ледовитый океан. Рано научился грамоте, а в 14 лет самоучкой изучил арифметику и грамматику. В 1730 г. пешком ушел в Москву учиться. В 1731 г. поступил в Славяно-греко-латинскую академию, по окончании которой был отправлен сначала в Петербургский университет, а потом – в Марбургский университет в Германию. Во Фрайбурге он изучал химию и горное дело. Он писал учебники, поэмы, создавал школы, строил стекольные заводы, кожевенные предприятия, шахты и плавильные печи. Ломоносов был первым русским профессором химии, работавшим во многих областях естествознания. Как теоретик он абсолютно верно сформулировал в 1748 году закон сохранения вещества и движения, на основе которого базируются уравнения гидротермодинамики атмосферы.

Ломоносов оставил для потомков ряд работ по кинетической теории газов, теории теплоты и физике атмосферы. Совместно с академиком Г.В. Рихманом он проводил опыты по атмосферному электричеству. Рихман одним из первых сконструировал ряд метеорологических и термометрических приборов и погиб от удара молнии во время проведения эксперимента. По инициативе Ломоносова и его проекту в 1755г. был открыт Московский университет [1,2].

Знаменитому английскому ученому XVIII века Генри Кавендишу принадлежит открытие состава воздуха и воды, выделения водорода и углекислого газа, а также определения средней плотности Земли [2]. Был он человеком весьма обеспеченным, унаследовал после смерти отца немалое состояние, но деньги его мало интересовали. Жил он очень скромно и деньги тратил на научные книги и пособия, на аппаратуру и химические препараты. Он также одним из первых занялся исследованиями действия электричества на воздух. В результате этой работы он открыл образование окиси азота при воздействии на воздух электрической искры. Спустя двести лет по такому же принципу начали производство азотной кислоты. При жизни он не публиковал свои открытия. Этим занялись английские учёные лишь через много лет после его смерти.

В Петербургской Академии наук в 18-ом веке работали крупные учёные – теоретики и экспериментаторы. Среди них были Даниил Бернулли и Леонард Эйлер [1, 5]. В 18-ом веке в физику проникают методы дифференциального и интегрального исчисления. Автором ряда открытий в этой области математики был Иоганн Бернулли. Вместе с братом Якобом он был основоположником вариационного исчисления. Когда мы говорим «лемниската Бернулли», «число Бернулли», «полиномы Бернулли», «теорема Бернулли», то мы имеем в виду Иоганна Бернулли. Он был учеником немецкого математика Лейбница, фламандцем, живущим в Швейцарии, профессором Гронингенского университета (Голландия), а также почетным членом Петербургской Академии Наук, в изданиях которой опубликовал 9 работ. Именно он является создателем первого систематического изложения дифференциального и интегрального исчисления. Как физик он дал четкое определение работы и исследовал движение тел в сопротивляющейся среде. А когда мы упоминаем уравнение Бернулли или вывод закона Бойля-Мариотта на основе кинетической теории газа, то здесь речь идет о Данииле Бернулли. Именно Даниил Бернулли был автором знаменитого труда «Гидродинамика», вышедшего в свет в 1738 году, и сыном Иоганна Бернулли. Он разработал кинетическую теорию газов и сформировал уравнение Бернулли для протекающей жидкости. Интересовался Д. Бернулли вопросами теплоты, в частности он уделял внимание вопросу зависимости плотности воздуха от температуры.

В превращении «Механики» в «Аналитическую механику» важнейшую роль сыграли петербургский академик Леонард Эйлер и парижский академик Жозеф Луи Лагранж [1, 5]. И Эйлер, и Лагранж в разное время работали в Берлинской Академии наук, куда Лагранж был избран в 1759 году по представлению Эйлера, а с 1766 по1787 гг. заменял его на посту президента физико-математического класса Берлинской Академии. Эйлер был академиком Берлинской и Парижской Академий наук и членом Лондонского Королевского общества. Родился Эйлер 4 (15) апреля 1707 г. в Базеле в Швейцарии. Его отец был сельским пастором. В молодости он успешно изучал математику под руководством Якоба Бернулли, старшего брата Иоганна. Первые уроки Леонард получил от отца. Последние классы гимназии он проходил в Базеле и одновременно посещал лекции в университете, где преподавал И. Бернулли. В 1723 г. Леонард получил степень магистра искусств. В университете он изучал также богословие и медицину. В рамках занятий физиологией Эйлер занимался гидродинамическими проблемами кровообращения. Эйлер выдвинул предположение о том, что действия сил одинаковы, если силы пропорциональны массам. В своей «Механике» он записал уравнение динамики для прямолинейного движения в виде:

где дифференциал скорости, времени, коэффициент пропорциональности, сила, масса.

В «Теории движения твёрдых тел» Эйлер записывает уравнения движения, разлагая движения на 3 прямолинейные составляющие по осям x, у и z:

где p, q, r – компоненты действующей силы по осям координат, А - масса,-коэффициент пропорциональности, определяемый выбором единиц [1, 3].

В 1755 году Эйлер вывел уравнение движения невязкой несжимаемой жидкости в координатах Эйлера. Он придал основным понятиям ньютоновской механики ясный вид и выдвинул на первое место второй закон Ньютона, сделав его стержнем всей механики и придав ему аналитическую форму. Уравнение неразрывности, которое используется в теоретической метеорологии – это уравнение, предложенное Эйлером. Написанные им уравнения до сего времени используются в современных курсах и учебниках механики и гидродинамики [4]. Иногда приходиться слышать от современных студентов, что сейчас трудно учиться. Но на самом деле не очень многие из них знают, что представляет собой настоящий научный труд. Леонард Эйлер оставил в наследство 850 научных работ. Он ослеп задолго до смерти, наизусть диктовал свои теории родным, причем диктовал сложнейшие математические выкладки. Слепым взялся за составление таблиц для вычислений, но когда ему дали работу на 3 месяца, он сделал ее за 3 дня. А в каких условиях ему приходилось работать? Когда он вернулся из России в Пруссию, дочь императора встретила его ласково, но на вопрос «Как поживаете?» он промолчал, а когда его спросили: «Что с вами, господин Эйлер?» он ответил: «Я приехал от Анны Иоанновны. Там, если скажешь слово, повесят!» А Урбен Жан Жозеф Леверье был настолько больным, что во время приступов рака он выбегал во двор Парижской обсерватории и стонал, и корчился от боли. Но как только боль утихала, он опять брался за свои расчеты и кончиком пера нашел новую планету. Сегодня в Санкт-Петербурге имеется Математический институт имени Л. Эйлера.

В 1769 году Ж.Л. Лагранж записал те же уравнения, только в координатах Лагранжа [1, 5]. Он построил законченную систему аналитической механики, как теоретической науки. «Аналитическая механика» Лагранжа состоит из двух разделов: статики и динамики. Статику он определяет, как науку о равновесии сил, а динамику - как науку об ускоряющих и замедляющих силах и переменных движениях, которые она должна вызвать. Он аналитически вывел формулу, выражающую закон сохранения энергии и получил дифференциальные уравнения движения. Лагранж создал мощный метод теоретической физики, позволяющий решать большой круг задач, в том числе и в теоретической метеорологии. Лагранж утверждал, что если отделить ту часть сил, которая не направлена на движение, то эти силы удовлетворяют условию равновесия. Исходя из этого он получил из основного уравнения статики основное уравнение для динамики. Лагранж не только разработал аналитические методы классической механики, но и явился первым историком механики. Родился Лагранж в январе 1736 г. в Турине, в 19 лет стал профессором артиллерийской школы там же, накануне Великой французской революции в 1788 г. он переехал в Париж, где был председателем Комиссии по установлению метрической системы мер, вел активную педагогическую работу в Политехнической школе, которая была ведущим научным центром математических наук. В годы империи Наполеона Лагранж становится графом, сенатором, кавалером ордена Почетного Легиона. Умер Лагранж 10 апреля 1813 года.

Маркиз Пьер Симон Лаплас [1, 2, 5] также участвовал в реорганизации системы высшего образования после Великой французской революции - в создании Нормальной и Политехнической школ. Родился он 23 марта 1749 г. в местечке Бомон в Нормандии в семье крестьянина, учился в школе монашеского ордена бенедиктинцев, в1770 г. с рекомендательным письмом к Даламберу он прибыл в Париж. При помощи Даламбера Лаплас устроился преподавателем военной школы, а затем экзаменатором в королевском корпусе артиллеристов, где учился молодой Бонапарт. В 1790 г. Лаплас был избран председателем Палаты мер и весов, где работали Лагранж и Лавуазье, а в1795 г., - руководителем Бюро Долгот, которое занималось измерением длины Земного меридиана.

Пьер Симон Лаплас в 1779-1784 годах совместно с Лавуазье занимался теорией плавления тел, а в 1788 г. он опубликовал труд по динамической теории приливов, хотя окончательно задача была решена в 1799 г. В 1809 – 1816 годах Лаплас вывел формулу скорости распространения звука и барометрическую формулу определения плотности воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря. Его деятельность привела к значительному развитию экспериментальной науки. Результаты деятельности Лапласа были подытожены в его «Аналитической теории вероятностей», а для широкой публики – в книге «Опыт философии теории вероятностей». Он считал, что вероятностные рассмотрения нужны только там, где часть информации неизвестна. Наполеон присвоил ему титул графа, а в период реставрации Лаплас получил от Бурбонов титул маркиза и звание пэра Франции. По мнению современных ученых Лаплас был первым, кто обратил внимание на возможность существования «черных дыр».

Соратник Ломоносова Г.В. Рихман написал и логически обосновал совершенно правильную калориметрическую формулу и заложил основы калориметрии, хотя сам еще не подошел к понятию количества тепла [1]. Дело Рихмана продолжили шведский академик Иоганн Вильке (1732-1799 гг.) и шотландский химик Джозеф Блэк (1728-1799 гг. Вильке, исследуя в 1772 г. теплоту смеси воды и снега, обнаружил, что часть теплоты исчезает и отсюда он пришел к понятию скрытой теплоты таяния снега, т, е. к понятию теплоемкости. К такому же выводу пришел и Блэк. Однако он первым четко разграничил понятия количества тепла и температуры и первым ввел термин теплоемкость. Он обратил внимание на тот факт, что термометр остается при одной и той же температуре до тех пор, пока весь лед не растает. Отсюда Блэк пришел к понятию скрытой теплоты плавления и позже – к понятию скрытой теплоты испарения.

В 1822 году М. Навье вывел уравнения движения для вязкой несжимаемой жидкости [1,4]. Его система уравнений включала в себя 3 уравнения с 10 неизвестными и являлась незамкнутой. Но она была определена.

В 1829 году французский физик и инженер Гюстав Гаспар Кориолис доказал, что при сложном движении точки (вращательном) возникает дополнительное ускорение, которое вызывается силой инерции, обусловленной влиянием вращения движущейся системы на относительное движение точки [1,4]. Его работы сыграли большую роль в создании теории динамики машин, он независимо от Ж. Понселе в 1826 г. ввел понятие «работа». Существенный вклад в развитие термодинамики атмосферы внес С. Пуассон. В 1823 году он предложил уравнение адиабаты, а в 1836 году он установил отклоняющее влияние силы Кориолиса на движение в атмосфере. Однако незначительная величина ее дала повод долгое время считать ускорение Кориолиса второстепенным фактором. Сначала метеорологи не обратили внимания на выводы Кориолиса и Пуассона, но в 1856 году У. Феррель вторично открыл наличие отклоняющей силы вращения Земли. К слову сказать, Кориолис был настолько беден, что, просыпаясь утром, каждый раз думал: «Как бы прожить хотя бы один день?».

В начале 19-го века среди метеорологов усиленно распространяется убеждение в том, что все атмосферные явления могут быть описаны с помощью системы математических уравнений. Эта мысль высказывалась французским математиком Жан Батистом Фурье (1768-1830 гг.) и подробно изучалась немецким физиком, физиологом, философом, а по образованию врачом, Германом Людвигом Фердинандом Гельмгольцем [2]. В знаменитой работе «О сохранении силы» в 1847 г. Гельмгольц впервые дал математическую трактовку закона сохранения энергии и указал на общность его характера. Он создал теорию вихревого движения идеальных жидкостей, а в последние годы серьезно занимался вопросами термодинамики. Он построил первую теоретическую модель стационарной зональной циркуляции, доказав при этом существование поверхностей разрыва между воздушными массами различного происхождения. Понятие вихря именно у него заимствовал Л. Марки и ввел его в динамическую метеорологию. Работа Фурье «Аналитическая теория тепла» содержала математическую теорию теплопроводности, которая позволила ему вывести дифференциальное уравнение теплопроводности. Он разработал методы его интегрирования при заданных краевых условиях для некоторых частных случаев [3].

Английский физик и математик, член Лондонского Королевского общества, профессор Кембриджского университета Джордж Г. Стокс в 1845 г. разработал теорию вязких жидкостей [1]. Он высказал гипотезу о связи между силами вязких напряжений и производными от скоростей деформации объема и разработал математическую теорию движения вязкой жидкости. Стокс определил систему уравнений, где представил вязкие напряжения с помощью закона «двух третей», которыми и по сей день пользуются метеорологи. Она носит название системы уравнений гидротермодинамики Навье – Стокса.

В 1858-1860 гг. американский ученый У. Феррель осуществил попытку построения математической теории общей циркуляции и изложил конвективную теорию циклонов [2]. Именно эти работы Ферреля ознаменовали возникновение новой области метеорологической науки - динамической метеорологии. В 1887 г. он опубликовал труд: «Новейшие успехи метеорологии». А сочинение французского ученого и военного инженера Сади Карно, старшего сына знаменитого «организатора победы» французской революции Лазаря Карно, «Размышления о движущей силе огня» (1924 г.) явилось началом термодинамики. Карно ввел в эту науку метод циклов. В современных учебниках цикл Карно сопровождается диаграммой процесса и расчетами для идеального газа, которые были даны в 1834 г. Клайпероном.

Бенуа Поль Эмиль Клайперон, французский академик и инженер, был в 1820-1830 гг. профессором Петербургского института путей сообщения [2]. Он вывел объединенное уравнение газового состояния и ему принадлежит вывод зависимости точки плавления от температуры, т.е. уравнение Клайперона - Клаузиуса. Немецкий ученый Р. Клаузиус ввел понятие энтропии, которое развивает и облекает в математическую форму второе начало термодинамики. Он пришел в результате этого к теории тепловой смерти Вселенной [4]. Однако, как доказали другие ученые (Л. Больцман, Н.Н. Пирогов), понятие энтропии, полученное на основании изучения конечных систем, нельзя распространять на бесконечную во времени и пространстве Вселенную. Согласно Больцману (1872 г.), энтропия - это термодинамическая вероятность состояния системы, т.е. число микросостояний, посредством которого реализуется макросостояние.

Австрийский геофизик Маргулес (1856-1920 гг.) сформулировал условия динамической устойчивости поверхностей разрыва, дал вывод формулы изменения градиентного ветра в зависимости от горизонтального градиента температуры, исследовал образование инверсий оседания и равновесие воздушных слоев с различным содержанием водяного пара [4].

Первый этап в развитии динамической метеорологии можно считать закончившимся в период первой мировой войны 1914-1918 гг. Итогом его можно считать учебник австрийского ученого Франца Экснера «Динамическая метеорология», изданный в 1917 г., в котором впервые были отражены проблемы турбулентности и поверхностей раздела.

 Новый этап начался в первой половине 20-го века работами норвежского ученого В. Бьеркнеса и его учеников, а также выдающегося советского математика А.А. Фридмана и оригинального английского метеоролога, экономиста и статистика Л.Ф. Ричардсона [3, 4]. Динамическая метеорология окончательно оформилась в самостоятельную науку, которая впоследствии дала толчок для создания новой науки, подробно изучающей принципы решения системы гидродинамических уравнений численными методами для целей предсказания погоды.

В первой половине двадцатого века теоретическая метеорология приобретает прикладной характер, что в конечном итоге привело к формированию такого важнейшего направления метеорологической науки, как численные прогнозы и численное моделирование погоды с помощью системы уравнений гидротермодинамики атмосферы. Полная система уравнений была известна еще в девятнадцатом веке и в 1858 г. изучалась Гельмгольцем как возможный вариант решения. Но эти уравнения трудно решать, так как необходимо решить общую пространственную задачу с граничными и начальными условиями для системы из 6-8-ми нелинейных уравнений в частных производных.

Идея построения прогнозов погоды с помощью этих уравнений была сформулирована главой норвежской (бергенской) школы метеорологов - Вильгельмом Бьеркнесом - в начале двадцатого века, а первая попытка рассчитать на практике численный прогноз была предпринята во время первой мировой войны Л. Ричардсоном [1, 2, 6]. Основываясь на теоретических положениях известного немецкого математика, физика и врача Г. Гельмгольца, В. Бьеркнес, Г. Сульберг, К. Годске, Я. Бьеркнес-сын и их сотрудники провели исследование теоретических математических моделей с целью классификации атмосферных движений. Они сопоставили эти движения с решениями приведенных к линейному виду уравнений. А в качестве начальных данных были взяты наблюденные значения метеорологических величин. Даже несмотря на то, что они не нашли удовлетворительной формулировки проблемы предсказания погоды, вклад этих ученых в понимание происходящих в атмосфере движений был очень важен: поворотным пунктом в развитии динамической метеорологии было осознание того, что уравнения гидротермодинамики можно решить.

Вильгельма Фримана Корена Бьеркнеса чаще всего называют основателем научной школы в метеорологии. В 1897 году В. Бьеркнес положил начало такого важнейшего направления как физическая гидродинамика атмосферы как сжимаемой среды, в которой распределение плотности является функцией как давления, так и температуры. Он является автором теоремы об ускорении циркуляции в жидкостях и газах. Эта теорема гласит: если жидкость идеальна и массовые силы консервативны, то производная по времени от циркуляции скорости по какому – либо жидкому контуру равна разности положительных и отрицательных единичных изобаро-изостерических трубок, пересекающих контур. То есть пересечение изобаро-изостерических поверхностей является причиной образования вихрей. Эта теорема помогла разобраться в циркуляционных движениях в атмосфере и океане, объяснить механизм морских и океанических течений в зависимости от солености.

В. Бьеркнес был основоположником волновой теории циклогенеза, теории полярного фронта и предложил способ прогнозирования погоды. Под его руководством в 1917 году была создана служба погоды в Норвегии. Он был профессором Бергенского университета и университетов в Осло и Стокгольме. Первым научным руководителем В. Бьеркнеса был Г. Герц. А его сын, Я. Бьеркнес, был одним из основоположников учения об атмосферных фронтах и автором трудов об эволюции циклонов и их роли в общей циркуляции атмосферы. Первым предложил теоретическую модель общей циркуляции поверхностей разрыва, т.е. атмосферных фронтов, Г. Гельмгольц. Интересно заметить, что идея закона сохранения энергии зрела не у специалистов-физиков. Решающую роль в утверждении этого великого закона сыграли врач Майер, пивовар Джоуль и врач Гельмгольц. Это три человека, за которыми история науки закрепила славу первооткрывателей закона сохранения и превращения энергии.

Немецкий врач Майер в 1841 г. утверждал, что «движение, теплота и, как мы намерены показать в дальнейшем, электричество представляют собой явления, которые могут быть сведены к одной силе, которые измеряются друг другом и переходят друг в друга по определенным законам» [3]. «Образовавшаяся теплота пропорциональна исчезнувшему движению». Это вполне определенная и ясная формулировка закона сохранения и превращения силы, т.е. энергии. Затем Майер поставил задачу уточнить понятие силы и найти соотношение между силами. В 1851 г. он в работе «Замечания о механическом эквиваленте теплоты» сжато и популярно излагает свои идеи о сохранении и превращении силы и впервые защищает свой приоритет. Он признает, что открытие сделано им случайно по наблюдениям на Яве, но это «все же моя собственность, и я не колеблюсь защищать свое право приоритета». Он ссылается на свою статью 1842 года, цитирует ее, приводит значение механического эквивалента тепла, разъясняет свои взгляды на силу, которую он рассматривает как то, что позднее назвали энергией. Майер указывает далее, что закон сохранения энергии, «а также численное выражение его и механический эквивалент теплоты, были почти одновременно опубликованы в Германии и Англии». Он признает исследования Джоуля и тот факт, что Джоуль закон открыл самостоятельно и что ему «принадлежат многочисленные важные заслуги в деле дальнейшего обоснования и развития этого закона». Однако, Майер подчеркивает, что он не склонен уступать свое право на приоритет и, хотя он и не гонится за эффектом, это не означает отказа от прав на собственность. Это заявление было связано с травлей ученого в газетах, которые обвиняли скромного и честного ученого в мании величия. Его подвергли принудительному лечению в психической больнице. К.А. Тимирязев с негодованием писал о тех, кто преследовал Майера и искалечил его жизнь только за то, «что он был гениальным ученым в среде окружающей его жалкой посредственности». В 1850 г. он даже пытался покончить жизнь самоубийством, выбросившись из окна, и остался на всю жизнь хромым. Майер умер 20 марта 1878 г. Незадолго до смерти, в 1874 году вышло собрание его трудов по закону сохранения и превращения энергии под заглавием «Механика тепла». В 1876 году были опубликованы его последние сочинения «О торричеллиевой пустоте», «Об освобождении сил». Эксперименты Джоуля, проводимые одновременно и независимо от Майера, подвели под обобщения Майера экспериментальную основу.

Джемс Прескотт Джоуль манчестерский пивовар, владелец большого пивоваренного завода родился 24 декабря 1818 г [2, 3]. Джоуль рано увлекся наукой об электрических явлениях. В своих публикациях он утверждал, что могучие силы природы неразрушимы и «во всех случаях, когда затрачивается механическая сила, получается точное эквивалентное количество теплоты». Он сделал вывод, что теплота не может быть веществом. Она состоит в движении частиц тела. Джоуль не ограничился работой экспериментатора и решительно встал на точку зрения кинетической теории теплоты и стал одним из основоположников кинетической теории газов. Майер считал Джоуля одним из открывателей закона сохранения и превращения энергии. Он упоминает о Гольцмане, который в 1848 г. вычислил механический эквивалент тепла тем же методом, что и Майер. Можно было бы назвать и ряд других имен. Все это лишний раз доказывает, что к открытию этого и других законов приходили разными путями физики, математики, инженеры, физиологи, врачи, пивовары. Но это были люди с огромным интересом к науке и жизни во всех ее проявлениях.

Также, как и Майер, к закону сохранения энергии Г. Гельмгольц перешел от физиологии [3]. Практически он работал на стыке физиологии и физики. Результатом его исследований были его знаменитая «Физиологическая оптика», которая выдержала несколько изданий, и его «Учение о звуковых ощущениях как физиологическая основа акустики». Гельмгольц был профессором Кенигсбергского, Гейдельбергского и Берлинского университетов. Он даже создал физический институт, в который приезжали на работу физики всего мира, и был первым президентом физико-технического института – центра немецкой метрологии. Умер Гельмгольц 8 сентября 1894 г. в Берлине. Но вернемся в двадцатый век.

Остановимся на ярком представителе советской теоретической физики – Александре Александровиче Фридмане [4, 7]. Он был математиком, механиком и метеорологом. Родился Фридман в Петербурге в 17 июня 1888 года. Его отец был музыкантом и композитором. Мать, Людмила Игнатьевна Воячек, дочь чешского музыканта, давала уроки игры на рояле. Но воспитывала его тетя по отцу, Мария Александровна, после развода родителей. С матерью Александр встретился, будучи уже взрослым. В роду Фридманов имя Александр было любимым. Он был третьим Александром Александровичем. Дед его, тоже Александр Александрович, был лекарем из кантонистов (так назывались сироты, обучавшиеся в специализированных военных поселениях). Он служил в лейб-гвардии Преображенском полку и жил в здании Зимнего дворца. Фридман закончил Вторую петербургскую гимназию и еще в гимназии вместе со своим другом Яковом Тамаркиным провел исследование, связанное с числами Бернулли. После окончания Санкт-Петербургского университета в 1909 г. его оставили для подготовки к профессорской деятельности профессорами В.А. Стекловым и Д.К. Бобылевым. В 1913 г. физик и метеоролог Б.Б. Голицын предложил молодому Фридману поработать в Павловской аэрологической обсерватории. C 1913 по 1916 г. Голицын был директором Главной физической обсерватории, которая впоследствии была переименована в Главную геофизическую обсерваторию (ГГО) и ведала метеорологическими наблюдениями. В 1914 г. Александр Александрович был командирован в Лейпциг к В. Бьеркнесу – основателю норвежской школы динамической метеорологии - для ознакомления с методами синоптической и динамической метеорологии, что он успешно сделал. В августе 1914 г. Фридман принял участие в подготовке мероприятий для наблюдения за солнечным затмением и осенью он вступил в добровольческий авиационный отряд, который действовал на фронте. Лето и осень 1915 г. он провел в авиационном отряде, где изучал характер атмосферных вихрей. В 1918 г. Фридман получил назначение в Пермский университет в качестве профессора механики, а в 1920 г. вернулся в Петроград для чтения лекции по гидродинамике и тензорному исчислению. Именно тогда физики Крутков, Фридерикс, Бурсиан, и Лукирский начали читать лекции по квантовой механике, теории относительности и другим разделам теоретической физики.

Теорией относительности Фридман овладел очень быстро. В 1922 г. он написал книгу «Мир как пространство и время», где изложил простым языком эту теорию, но без дешевой популяризации. Он нашел неточности в решении А. Эйнштейна дифференциального уравнения для кривизны пространства, которую Эйнштейн считал постоянной по времени. Фридман нашел другие решения, из которых вытекало, что кривизна пространства может изменяться периодически, а может и возрастать со временем. Сначала Эйнштейну показалось, что Фридман ошибся, однако, когда Эйнштейн понял, что он неправ в оценке работы Фридмана, он в том же журнале «Annalen der Physik» признал свою ошибку и проявил научную честность. Благодаря этой теории было обнаружено перемещение галактик, т.е. расширение вселенной.

Работая в Отделе теоретической метеорологии, Фридман привлекал молодых ученых, хотя сам был совсем не старым: Н.Е. Кочина, В.А. Фока, И.А. Кибеля и несколько более старшего по возрасту - Б.И. Извекова. Он не побоялся пригласить в отдел и совсем пожилого, шестидесятилетнего, Л.В. Келлера, который провел в отделе крупные исследования по статистической теории турбулентности. А.А. Фридман обладал колоссальной трудоспособностью. Был жаден до работы и умел передавать этот энтузиазм другим. Он организовал семинар по динамической метеорологии, в котором принимали участие сотрудники других отделов ГГО: все чертили карты изобар, наносили линии фронтов, следили за перемещениями циклонов и антициклонов. Диапазон научных интересов Фридмана был очень широким. С самого начала научной деятельности его интересовали основные вопросы теоретической метеорологии, теоретической геофизики: объяснение существования верхней инверсии атмосферы, теория атмосферных вихрей и порывистости ветра, теория разрыва метеорологических величин, теория атмосферной турбулентности. А в начале своей научной деятельности он составил инструкцию для обработки подъемов змейковых метеорографов.

Фридман привлекал своих сотрудников для совместной работы с зарубежными учеными и работал сам. Он принимал деятельное участие в приемах немецкого физика П. Эренфеста, голландского гидромеханика И. Бюргерса, итальянского исследователя Т. Леви-Чивита. Он выступал на 1 Международном конгрессе прикладной механики, где докладывал о совместной работе с Келлером, о работе Кочина и других сотрудников. Встречи Фридмана с другими учеными нередко выливались в совместную работу. Например, работа с Т. Гессельбергом дала положительный результат и вылилась в теорию о порядке метеорологических величин и их производных и теорию подобия. Александр Александрович был очень живым, эмоциональным и общительным человеком. Если его сотруднику удавалось получить интересный результат, то Фридман не скупился на похвалы, хотя мог и за дело побранить. Ему была свойственна самокритичность, и он часто высказывался по поводу своих недостатков, действительных и мнимых. В феврале 1925 г. Фридман стал директором Главной геофизической обсерватории и сделал бы очень много для ее развития и развития метеорологической науки, физики и гидромеханики, если бы не преждевременная смерть. В сентябре 1925 г. в возрасте 37 лет он скончался от брюшного тифа. «С ним отошла крепчайшая надежда теоретической метеорологии» - так о нем сказал директор Прусского метеорологического института профессор Фикер. О нем говорили: «Фридман имел высокую душу исследователя вечных вопросов мироздания и благородный облик жреца чистого знания».

В 1922 г. на работу в Главную физическую обсерваторию, которая в 1924 г. была переименована в Главную геофизическую обсерваторию (ГГО), к А.А. Фридману поступил Николай Евграфович Кочин [8]. В обсерватории в то время занимались изучением физики земного шара, или геофизики, и особенное внимание уделялось изучению атмосферы. Для выяснения физических законов, действующих в атмосфере, нужно было иметь большой материал наблюдений за метеорологическими величинами и уметь применять к ним более строгие методы вычислительной математики. Эта роль выпала на долю советских математиков, к которым относился и молодой Н.Е. Кочин. По распоряжению А.А. Фридмана в ГГО было организовано Математическое бюро, и он предложил Кочину заняться изучением своей книги «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости». Очень скоро молодой вычислитель освоил ее, и Фридман со свойственной ему экспансивностью утверждал: «Кочин знает мою книгу лучше меня! Теперь посмотрим, как он сам будет решать задачи!» Однажды, когда Николаю Евграфовичу было двенадцать лет, его сестра сказала с невольным уважением к нему: «Коля, да ты профессором будешь». А он усмехнулся и сказал: «Это конечно, профессором я буду, а вот вопрос: буду ли я ученым?». Он стал выдающимся ученым.

В ГГО Кочин занялся важнейшей задачей – построением теоретической модели циклона и антициклона, перемещающегося над земной поверхностью. Он провел обширные вычисления, построил общую модель и дал конкретные иллюстрации к теоретическим схемам. Он рассмотрел пересечение для циклона и антициклона изобарических, изотермических и изостерических поверхностей и на основании теоремы Бьеркнеса сделал вывод о том, что должно иметь место образование и разрушение вихрей. По воспоминаниям его жены, тоже математика, Пелагеи Яковлевны, задаваясь определенной траекторией центра циклона, т.е. точки минимума давления у поверхности земли, можно найти траектории отдельных частиц. Они оказываются сложными линиями, имеющими петли и точки возврата, и очень похожи по своему характеру на те траектории частиц воздуха, которые наблюдались в действительности. Для некоторых значений угловой скорости вращения оказалось возможным такое движение, которое Кочин назвал аномальным циклоном: у него минимум давления в центре, как у циклона, но с вращением по часовой стрелке, что характерно для антициклона. Такие движения наблюдаются в действительности в смерчах и торнадо.

Известно, что если жидкость баротропна, и давление зависит только от плотности, но не зависит от температуры, то в поле силы тяжести, которая является консервативной силой, образование и разрушение вихрей невозможно. Следовательно, если вихри были в жидкости или газе, то они будут сохраняться, если же их не было, то они и не могут возникнуть.

При рассмотрении примера адиабатического движения, для которого вихревые линии не сохраняются, Кочин положительно ответил на вопрос Фридмана: могут ли вихри образовываться без притока энергии? Николай Евграфович развил общую теорию поверхностей разрыва – фронтов – в жидкостях и газах, которая вошла во все учебники по газовой динамике. Полученное Кочиным полное решение задачи об устойчивости поверхностей раздела привело к дальнейшим исследованиям и обобщениям в работах А.А. Дородницына, М.И. Юдина, Е.К. Блиновой, И.А. Кибеля. Кибель указывал, что «работа Кочина по циклогенезу не только дала исчерпывающее решение вопроса, но была революционной по своей методике: она позволила совершенно по-новому подойти к большому кругу новых вопросов, указала, как стать на путь обобщений, так далеко сейчас уведший вперед нашу отечественную динамическую метеорологию».

Позднее Отдел теоретической метеорологии ГГО вырос в Институт теоретической метеорологии. В 1933 г. Кочин стал директором этого института после Л.В. Келлера, которому принадлежат исследования по статистической теории турбулентности и задаче обнаружения периодических колебаний в рядах метеорологических величин. В связи с переводом Академии наук в Москву Николай Евграфович покинул Ленинград (Санкт-Петербург). Во главе Института теоретической метеорологии стал И.А. Кибель, который вместе со своими сотрудниками продолжал развивать теоретическую метеорологию.

Осенью 1934 г. Кочин переехал в Москву на работу в Математическом институте. Николай Евграфович начал работать в Физико-математическом институте Академии наук с 1932 года, а в 1934 году этот институт был разделен на два. Одному из них – Математическому – было присвоено имя В.А. Стеклова. В связи с переездом в Москву от непосредственной работы в ГГО Кочин продолжал интересоваться теоретической метеорологией. В 1935-1936 годах Кочин разработал фундаментальную задачу об общей циркуляции атмосферы, где основную роль играют увлечение атмосферы вращающейся Землей, неравномерность нагрева атмосферы и наличие турбулентной вязкости, количественный анализ которых чрезвычайно сложен. На общую циркуляцию атмосферы было перенесены методы теории пограничного слоя. На основании своих оценок Кочин упростил уравнения движения атмосферы на поверхности шара и получил возможность определить поле скоростей и давления после того, как было задано распределение температур. Последними по времени исследованиями Николая Евграфовича в области метеорологии были работы, посвященные обтеканию гор и хребтов, которые имеют важные применения в вопросах планеризма и пилотирования самолетов. Скончался Н.Е. Кочин 31 декабря 1944 г. в Москве. В 1932 г. он в соавторстве с Н.В. Розе опубликовал учебник «Введение в теоретическую гидромеханику» который впоследствии стал первым томом всемирно известного двухтомника Н.Е. Кочина, И.А. Кибеля, Н.В. Розе «Теоретическая гидромеханика». Переиздавался этот двухтомник многократно.

Николай Владимирович Розе родился 21 июля 1890 г. в Санкт-Петербурге. Окончил Санкт-Петербургский университет. В 1912-1917 гг., работал в Главной физической обсерватории. Он был выдающимся гидрологом, геомагнитологом, механиком, исследователем Севера, контр-адмиралом. Работая в ГГО, он обобщил опыт климатологических наблюдений в Архангельске. В 1929 г. Розе был приглашен на заведование кафедрой аналитической механики. Преподавал теоретическую механику и физику в Военно-морской академии РККА, в Ленинградском государственном университете, в Ленинградском институте точной механики и оптики. За короткий срок Н.В. Розе опубликовал несколько прекрасных учебников. Помимо вышеуказанных в 1932-1933 гг. в составе авторского коллектива он опубликовал двухтомный труд «Теоретическая механика», учебник «Динамика твердого тела». Он занимался исследованиями Карского и Баренцева морей. В 1938 году были опубликованы «Лекции по аналитической механике». В начале1942 года Н.В. Розе был необоснованно репрессирован по сфальсифицированному делу «Союза старой русской интеллигенции» и умер в тюрьме 12 апреля 1942 года.

Член-корреспондент Академии наук СССР Илья Афанасьевич (Эфраимович) Кибель был выдающимся ученым, который внес очень большой вклад в механику и геофизику [9, 10]. Круг исследований этого ученого был чрезвычайно широким – здесь и теоретическая гидромеханика, и динамическая метеорология, и математические модели климата и общей циркуляции атмосферы и океана. Но главным делом его жизни стало создание принципиально новых методов прогноза погоды, основанных на решении уравнений гидродинамики и термодинамики, того, что положило начало новому направлению в метеорологической науке - численным методам прогноза погоды. В годы пробуждения интереса И.А. Кибеля к метеорологии теория и практика прогнозов погоды была еще несовершенной. Как указывал С.А. Машкович, не случайно академик А.Н. Крылов, возглавлявший в годы Первой мировой войны Главную физическую (ныне Геофизическую) обсерваторию, вспоминая о своих контактах с синоптиками, написал, что есть науки точные – математика, физика, астрономия, а есть ещё астрология, хиромантия, метеорология [10]. Работы И.А. Кибеля и были направлены на превращение метеорологии в научную дисциплину, стоящую в одном ряду с точными науками, а не среди астрологии и хиромантии. И именно Илье Афанасьевичу со временем этого удалось добиться. Кибель родился 19 октября 1904 года в городе Саратове в семье врача-окулиста Афанасия (Эфроима) Моисеевича. Его мать была фельдшером, она умерла, когда сыну было десять лет, в 1913 году, отец скончался в Ленинграде в 1938 году. Брат –Моисей- был расстрелян в 1939 году. Детство и юность И.А. Кибеля прошли в г. Саратове. Окончив школу, в 1921 году И.А. Кибель поступил на физико-математический факультет Саратовского университета, который успешно окончил, защитив дипломную работу на тему «Малые колебания сплошной среды». После окончания университета в Саратове он в 1925 году переезжает в Ленинград и, по рекомендации профессора А.А. Фридмана, поступает в аспирантуру в Главную физическую обсерваторию. Здесь разрабатывались и решались фундаментальные проблемы теоретической метеорологии. Научный коллектив этого бюро был очень сильным, здесь в 1920-тые годы работали выдающиеся ученые, например, будущие академики Н.Е. Кочин, В.А. Фок, А.А. Дородницын, П.Я. Полубаринова-Кочина. В последующие годы название этого подразделения несколько раз изменялось: Институт теоретической метеорологии (ИТМ), Отдел динамической метеорологии (ОДМ). В Математическом бюро Главной физической обсерватории и начал в 1925 году работать И.А. Кибель. Быстро войдя в круг проводимых здесь исследований, он уже в 1929 году защищает кандидатскую диссертацию на тему «Условия динамической возможности движения сжимаемой среды с притоком энергии», а затем и докторскую (1935 г.), и становится одним из ведущих ученых в области теоретической метеорологии. А в 1934 году И.А. Кибель возглавляет ИТМ - ОДМ. Научную работу Илья Афанасьевич сочетал с педагогической: с 1929 года читал лекции по аэрогидродинамике в Ленинградском университете, сначала в качестве доцента, а с 1932 года в качестве профессора кафедры аэромеханики. Кроме того, в отдельные годы читал лекции в Путейском, в Политехническом и Педагогическом институтах. Свою работу по теоретической метеорологии Кибель начал с упрощения системы уравнений, с удаления слагаемых, не имеющих погодообразующего значения. И нашел решение задачи в виде довольно простых формул, позволяющих сравнительно легко рассчитать прогноз давления на сутки. Эти результаты позднее были названы методом Кибеля. Из-за начавшейся войны работы по методу Кибеля временно приостановились, но затем возобновились уже в г. Свердловске, куда была эвакуирована Главная геофизическая обсерватория (ГГО), так теперь называлась Главная физическая обсерватория. А в 1943 году Кибель вместе с группой сотрудников был переведен в г. Москву в Центральный институт прогнозов, где он создал отдел динамической метеорологии. Мероприятие это имело целью активизацию исследований по «методу Кибеля» и применению этого метода в оперативной практике. Отдел динамической метеорологии Центрального института прогнозов под руководством Кибеля и стал центром исследований по численным методам прогнозов погоды, гидродинамической теории климата и общей циркуляции атмосферы. Он был человек увлекающийся, у него появился ряд других интересных идей и задач, им и отдавалось предпочтение. В это время Кибель готовил к переизданию учебник по теоретической гидромеханике, написанную им в соавторстве с Н.Е. Кочиным и Н.В. Розе. Обеих соавторов уже не было в живых, и на Илью Афанасьевича легла вся тяжесть этой работы. Он существенно переработал и дополнил книгу, почти заново написав разделы по пограничным слоям и по газовой динамике. Книга выдержала 6 изданий и была настольной для многих учащихся и специалистов.

В 1946 году в США был разработан первый компьютер «ЭНИАК». И вскоре была опубликована первая статья (1950 г.) о решении прогностической задачи с использованием компьютера. Была предложена модель краткосрочного прогноза в средней тропосфере, дан метод решения задачи и приведены первые результаты расчетов на компьютере, весьма обнадеживающие. Илья Афанасьевич прекрасно это понимал и прилагал большие усилия, чтобы получить возможность работать на компьютерах. К началу 50-х годов исследования в области динамической метеорологии подготовили почву для создания современных схем прогноза полей давления, температуры и крупномасштабных вертикальных движений во всей толще атмосферы. Наиболее существенные результаты в этой области были получены в работах Н.И. Булеева, Г.И. Марчука, И.А. Кибеля и М.И. Юдина.

Именно Кибель поручил С. Л. Белоусову разработку и реализацию сравнительно простой модели для прогноза в средней тропосфере, а С.А. Машковичу - реализовать на ЭВМ БЭСМ модель краткосрочного прогноза на разных уровнях, в том числе и на уровне моря. Кибель в 1957 году решил полностью перейти на работу в Институт прикладной геофизики АН СССР, где проработал до 1961 г. Итак, в Институте прикладной геофизики и в отделе динамической метеорологии Центрального института прогнозов были получены серьезные результаты, но внедрить их в оперативную практику «по-настоящему» всё же не удавалось. Было также понятно, что организовать оперативные расчеты прогнозов вне Гидрометслужбы нереально и нецелесообразно. И.А. Кибель начал добиваться создания специализированного вычислительного центра, оснащенного высокопроизводительными ЭВМ. В этом существенную поддержку оказали академик Е.К. Федоров и директор вычислительного центра АН СССР академик А.А. Дородницын, помогла и Гидрометслужба. В 1961 году по постановлению правительства был создан Объединенный вычислительный метеорологический центр АН СССР и Гидрометслужбы. В этот вычислительный центр перешли из Института прикладной геофизики И.А. Кибель со своими сотрудниками, а из Центрального института прогнозов – большинство сотрудников отдела динамической метеорологии. Фактически Кибель стал научным руководителем этого вычислительного центра, хотя формально такого статуса у него не было. Илья Афанасьевич посвятил свою жизнь развитию динамической метеорологии и гидродинамических прогнозов погоды.

За время работы в отделе динамической метеорологии Центрального института прогнозов и в академических институтах И.А. Кибель подготовил немало высококвалифицированных специалистов. Список его учеников и сотрудников обширен: это академики Г.И. Марчук (президент АН СССР), А.С. Монин, А.С. Саркисян, А.А. Дородницин. Его деятельность обеспечила весьма высокий теоретический уровень работ по численным прогнозам погоды в СССР. Однако теоретические результаты по численным методам прогнозов всегда опережали возможности их реализации на компьютерах. И теперь впереди оказывался тот, кто располагал более мощными компьютерами.

В последние годы И.А. Кибель страдал тяжелой гипертонией. Скончался он от инсульта 5 сентября 1970 года и похоронен на Новодевичьем кладбище. Его плодотворная работа была отмечена государственными наградами: орденом Ленина, двумя орденами Трудового Красного Знамени, в 1941 г. - Сталинской премией. В 1972 г. - премией им. А.А. Фридмана.

Также значительный вклад в развитие динамической метеорологии и гидродинамических методов прогнозов погоды внесла Блинова Екатерина Никитична - русский учёный-геофизик, член-корреспондент АН СССР, которая предложила численный метод долгосрочного прогноза погоды путем интегрирования уравнений гидротермодинамики атмосферы [11]. Екатерина Никитична Блинова родилась 7 декабря (по старому стилю 24 ноября) в станице Каменская (ныне город Каменск-Шахтинский), в Донецком округе, в Области Войска Донского. В 1928 году окончила Северо-Кавказский университет в Ростове-на-Дону. (В настоящее время - это Ростовский государственный университет).

С 1935 по 1943 год работала в Главной геофизической обсерватории, а с 1943 по 1958 год — в Центральном институте прогнозов в Москве. С 1958 по 1961 год продолжила свою научную деятельность в Институте прикладной геофизики. В 1961 году Екатерина Никитична была принята на должность заведующей отделом в Вычислительном метеорологическом центре, где проработала до самой своей смерти.

Продолжая работы Николая Евграфовича Кочина, Блинова в 1936 году детально исследовала условия устойчивости атмосферного фронта. С 1938 года занималась изучением общей циркуляции атмосферы. Разработала полную теорию лучистого равновесия в атмосфере. Ей удалось количественно объяснить существование центров действия атмосферы. Для этого Екатерина Никитична подробно изучила волновые возмущения, возникавшие в общем восточно-западном потоке атмосферы. Тот же метод волн она использовала для количественного анализа макропроцессов атмосферы, например, зарождения и развития циклонов и антициклонов.

В 1943 году Блинова опубликовала работу «Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы», которая положила начало гидродинамическому долгосрочному прогнозу погоды. Екатерина Никитична Блинова показала способы долгосрочного прогноза погоды при помощи интегрирования уравнения вихря, предложенного Александром Александровичем Фридманом, широко применяемого в настоящее время для численного прогноза погоды и ее численного моделирования, а также для решения других задач динамики атмосферы. Это был первый практический опыт долгосрочных прогнозов погоды. Е.Н. Блинова разработала гидродинамическую теорию волн давления и центров действия атмосферы и заложила основы для численных долгосрочных прогнозов погоды. Успехи вычислительной техники, появление первых советских вычислительных машин сделали возможным применение на практике многоуровенных, более совершенных схем краткосрочного прогноза, получивших название численных прогнозов погоды. Рабочие схемы численных прогнозов основных метеорологических элементов были подготовлены и испытаны В.В. Быковым, С.Л. Белоусовым, Ш.А. Мусаеляном, П.К. Душкиным, Е.Г. Ломоносовым и другими учеными.

Работы А.А. Фридмана, Н.Е. Кочина, Л.В. Келлера были первыми основными работами по динамической метеорологии в бывшем Советском Союзе. Развитие их идей другими сотрудниками Фридмана содержались в двухтомном курсе «Динамическая метеорология», вышедшем в 1935 г., а затем1937 гг. под редакцией Н.Е. Кочина и Б.И. Извекова. В последующих работах курс теоретической метеорологии широко разрабатывался многими советскими метеорологами. К подобного рода работам можно отнести и двухтомник «Теоретическая гидромеханика» Н.Е. Кочина, И.А. Кибеля. Н.В. Розе. В 1948 г. вышла книга В.А. Белинского «Динамическая метеорология», а в 1955 г. – «Основы динамической метеорологии» Л.С. Гандина, Д.Л. Лайхтмана, Л.Т. Матвеева, М.И. Юдина. В 1976 году был опубликован учебник «Динамическая метеорология» под редакцией Д.Л. Лайхтмана. Все это говорит о том, что проблема совершенствования этой теоретической науки, а также прогнозов погоды путем применения математических методов получила большое развитие и продолжает успешно развиваться и углубляться, особенно с разработкой новых методов численного моделирования.

Благодаря практической направленности работ И.А. Кибеля, Е.Н. Блиновой и их учеников и сотрудников, результаты этих исследований послужили катализатором развития и создания оперативных технологий численных прогнозов погоды. Большой вклад в численное прогнозирование внесли модели С.Л. Белоусова, С.А. Бортникова, В.М. Кадышникова, Л.В. Берковича, Д.Я. Прессмана, М.С. Фукс-Рабиновича, С.О. Кричака, В.П. Дымникова, Г.Р. Контарева, В.М. Лосева и других.

1. **Гипотезы, принимаемые при изучении атмосферы.**

**Предмет динамической метеорологии**

При описании и анализе атмосферных процессов и явлений, а также при построении моделей движения жидкостей и газов принимаются во внимание некоторые гипотезы. Изучая атмосферу, можно в некоторых случаях, во-первых, учитывать её молекулярную структуру и, во-вторых, отвлекаться от неё. Перечислим эти гипотезы [4, 15].

* 1. Атмосфера представляет собой смесь газов, подчиняющих закону Дальтона. Он говорит на о том, что в смеси идеальных газов при постоянной температуре *Т* давление смеси *Р* равно сумме парциальных давлений газов, составляющих эту смесь. В этом случае атмосферу представляют как систему, состоящую из огромного числа молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении. Парциальное давление – это та часть общего давления, которая обусловлена конкретным газом или водяным паром.
	2. Атмосфера – это сплошная среда, то есть при изучении физических законов в атмосфере принимается гипотеза сплошности. В механике жидкостей и газов изучается поведение вещества в макроскопическом масштабе, довольно большом по сравнению с расстоянием между молекулами. Принимаются во внимание следующие положения гипотезы сплошности, которая рассматривает атмосферу как совокупность элементарных объёмов:
1. макроскопическое поведение жидкостей и газов считается одинаковым по все направлениям – атмосфера считается идеально непрерывной, то есть сплошной;
2. физические величины внутри рассматриваемого элементарного объёма считаются равномерно распределенными по этому объёму и равными центральному значению.

Гипотеза сплошности позволяет считать эти центральные значения метеорологических величин непрерывными функциями координат и времени.

Этот факт даёт возможность сформулировать уравнения, описывающие изменения этих величин в пространстве и времени с помощью производных, так как непрерывные функции можно дифференцировать. С другой стороны гипотеза сплошности предоставляет возможность применять осреднение метеовеличин по элементарным объёмам, содержащим довольно большое число молекул, но все-таки малое по сравнению с масштабом всего потока в целом. Метеорологическая величина определяется как средняя по элементарному объёму. Элементарный объём должен удовлетворять следующим требованиям:

1 - линейные размеры элементарного объёма должны быть велики по сравнению с длиной свободного пробега молекул :

;

2 - линейные размеры должны быть малы по сравнению с характерным масштабом рассматриваемого явления L:

L; т.е.

 L. (1)

Первое условие необходимо для того, чтобы устранить флуктуации молекулярных движений, а второе позволяет пренебречь изменениями осредненных величин в пределах выделенного объёма. Когда выполняется левая часть неравенства (1), , то число молекул в объёме настолько велико, что при осреднении флуктуации движения молекул незначимы.

Гипотеза сплошности нарушается на больших высотах, когда длина свободного пробега молекул велика. А так как атмосферные движения характеризуются широким диапазоном масштабов движений, то выполнение гипотезы сплошности зависит как от высоты, так и от специфики рассматриваемого явления.

* 1. Из идеальной непрерывности и равномерной распределённости её характеристик следует, что атмосферу можно считать однородной средой. В такой среде водяной пар также распределён однородно, и имеют место уравнения состояния для сухого и влажного воздуха.
	2. Атмосфера представляет собой легкоподвижную среду. Основное свойство, которое отличает жидкости и газы от твёрдых тел, заключается в том, что эти вещества не способны сдерживать напряжение сдвига. Их с легкостью можно деформировать, так как любые касательные усилия вызывают относительное скольжение частиц относительно друг друга. Мерой лёгкости является вязкость.
	3. Атмосфера является вязкой средой. То есть средой, в которой возникают силы внутреннего трения, характеризующиеся коэффициентами вязкости.
	4. Атмосфера представляет собой сжимаемую среду. Дифференциальный нагрев подстилающей поверхности вызывает изменение теплового состояние воздуха, которое приводит к изменению плотности и давления на высотах. Скорость нагревания и охлаждения воздуха зависит от широты места, свойств подстилающей поверхности, времени года. Благодаря сжимаемости изменяется горизонтальное распределение давления на высотах и возникает ветер. Таким образом, сжимаемость атмосферы приводит к возникновению силы барического градиента.

Динамическая метеорология, используя методы теоретического анализа уравнений гидротермодинамики атмосферы, изучает атмосферные движения вместе с термодинамическими процессами в атмосфере, вскрывает основные закономерности погоды и климата и использует их для решения практических задач, важнейшими из которых являются разработка методов прогнозов погоды и развитие теории и практики воздействия на погоду и климат.

Задачами динамической метеорологии являются [4]:

* количественное представление законов динамики атмосферы;
* выявление основных факторов, определяющих изменение во времени и пространстве метеорологических величин на основе использования различных методов решения системы уравнений;
* построение на основе уравнений гидротермодинамики и теории излучения теоретических моделей процессов тепло-, влаго-, энерго- и массообмена, происходящих в атмосфере;

- экспериментальная проверка этих моделей.

**Контрольные вопросы**

1. Что изучает динамическая метеорология?
2. Каковы основные задачи этого предмета?
3. Перечислите гипотезы, принимаемые при изучении атмосферы, и укажите, что из них следует.
4. Приведите основные положения гипотезы сплошности и требования, предъявляемые к элементарным объёмам.

**Глава 1. Поля метеорологических величин и их характеристики**

* 1. **. Скалярные и векторные поля**

Атмосферные движения, процессы тепло- и влагообмена определяются характером пространственного распределения в атмосфере метеорологических величин: давления, температуры, влажности, ветра и т.д.

Часть пространства, каждой точке которого соответствует значение какой-либо метеовеличины, называется ***полем*** этой величины.

Поля различных метеорологических величин, как и сами величины, бывают скалярными и векторными. Совокупность скалярных переменных образуют скалярные поля, а векторных переменных – векторные. К скалярным полям относятся поля температуры, характеристик влажности, геопотенциала и другие. К векторным – поле ветра, поля силы тяжести, Кориолиса и других векторных величин.

Наряду с распределением метеорологических величин в трехмерном пространстве, при решении ряда задач анализируется распределение величин на горизонтальной поверхности, на вертикальной плоскости, т.е. рассматриваются плоские и поверхностные поля метеорологических величин.

Имеется математическое определение таких полей [12].

***Скалярное поле*** есть скалярная функция точки в декартовой системе координат вместе с областью её распределения, т.е. . Положение точки в декартовой системе координат определяется её координатами (рис1.1):



Рис.1.1. Координаты точки в декартовой системе координат

***Векторное поле*** есть векторная функция точки в декартовой системе координат вместе с областью её определения . Положение вектора в декартовой системе координат определяется его проекциями на оси координат (рис. 1.2):



Рис. 1.2. Координаты радиус-вектора в декартовой системе координат

Вектор всегда можно рассматривать как силу, поэтому векторное поле часто называют *силовым*. Если поле не зависит от времени, то оно называется *стационарным*.

Некоторые поля, например, поле давления или геопотенциала на земном шаре, полушарии или на какой-либо ограниченной территории можно представить заданным в какой-то сеточной области (рис.1.3):



Рис. 1.3. Точки квадратной или шахматной сетки

На рисунке цифры означают номер точки. Поле скоростей ветра можно хорошо видеть на любой синоптической карте, где указано значение скорости ветра U, и её направление на разных станциях:



**1.2. Скалярная и векторная функция скалярного аргумента**

Переменная скалярная величина называется ***скалярной однозначной функцией*** переменной величины , которую называют аргументом, если каждому допустимому численному значению соответствует определенное численное значение [12, 13].

 Если каждому допустимому численному значению скалярной переменной величины соответствует определенный вектор , то говорят, что вектор есть векторная функция скалярного аргумента т.е.

При изменении вектор меняется как по модулю, так и по направлению, т.е. каждому соответствует определенное значение модуля и определенное направление в пространстве. Проекции вектора на координатные оси являются скалярными функциями скалярного аргумента - , , (рис. 1.4).



Рис. 1.4. Проекции вектора в декартовой системе координат

Согласно формуле разложения вектора по ортам (единичным векторам) прямоугольный декартовой системы координат , , , вектор может быть представлен в виде суммы его составляющих вдоль осей координат, которые называются проекциями, умноженных на единичные вектора:

 . (1.2.1)

*Единичные вектора* или *орты* декартовой системы координат – это вектора с длиной (величиной), равной единице, направления которых совпадают с направлениями осей декартовой системы координат.

Таким образом, задание векторной функции скалярного аргумента равносильно заданию трех скалярных функций этого аргумента. Для составляющих скорости ветра в динамической метеорологии имеются специальные обозначения:

++++,

где - составляющая вектора скорости вдоль оси *X*;- составляющая вектора скорости вдоль оси *Y*; - составляющая вектора скорости вдоль оси *Z*; , – единичные вектора прямоугольной декартовой системы координат.

**1.3. Сложение вычитание векторов**

Пусть имеется вектор , который необходимо сложить с вектором .

Сумма двух векторов и есть вектор, соединяющий «ноги» первого вектора с «головой» второго вектора, т.е. диагональ параллелограмма, построенного на этих двух векторах: . Разность двух векторов и – это вектор, соединяющий «головы» двух векторов: (рис. 1.5).



Рис. 1.5. Сумма и разность двух векторов

**1.4. Модуль вектора**

Модуль вектора , т.е. его абсолютная величина, определяется следующей формулой:

 , (1.4.1)

т.е. он равен корню квадратному из суммы квадратов его проекций. Модуль вектора есть скаляр.

**1.5. Годограф**

При изменении аргумента конец вектора описывает некоторую кривую, называемую *годографом* векторной функции [13]. Точка, из которой исходит вектор называется *полюсом* (рис. 1.6):



Рис. 1.6. Годограф вектора

Вектор с постоянным направлением, то есть изменяющийся только по модулю, имеет своим годографом луч, выходящий из полюса (рис. 1.7):



Рис. 1.7. Годограф при постоянном направлении вектора

Вектор, изменяющийся только по направлению, модуль которого постоянен, имеет своим годографом кривую, лежащую на сфере с центром в полюсе (рис. 1.8).



Рис. 1.8. Годограф при постоянном модуле вектора

**1.6. Производная от скалярной функции скалярного аргумента**

Вспомним определение производной [12, 13]. Пусть мы имеем функцию , определенную в промежутке .

Если существует предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению независимой переменной , при стремлении к нулю, т.е.

 (1.3)

то он называется производной скалярной функции по независимой переменной в данной точке .

Угловой коэффициент касательной есть производная от ординаты по абсциссе (рис. 1.9):



Рис.1.9. Производная скалярной функции

 или .

**1.7. Производная от векторной функции скалярного аргумента**

Пусть мы имеем векторную функцию , определенную на промежутке .

Если существует предел отношения приращения векторной функции к вызвавшему его приращению независимой переменной , при стремлении к нулю, т.е.

то он называется производной векторной функции  .

Производная векторной функции равна

 (1.7.1)

Производная от векторной функции скалярного аргумента лежит на касательной к годографу и направлена в сторону возрастания аргумента (рис. 1.10):



Рис. 1.10. Производная от векторной функции

Пусть мы имеем расстояние, определяемое радиус-вектором . Производная от радиус-вектора движущейся точки по времени есть вектор скорости:

Производная от вектора скорости по времени есть вектор ускорения :

**1.8. Некоторые характеристики скалярных и векторных полей: поток, поверхность уровня, линия тока**

Рассмотрим скалярное поле, заданное функцией , которая предполагается однозначной, непрерывной функцией координат , имеющей непрерывные частные производные первого порядка, то есть дифференцируемой функцией. **Поток скалярного поля через поверхность *S* определяет количество жидкости (или газа), протекающей через единицу поверхности *S* за единицу времени.** Поток вектора скорости через замкнутую поверхность будет положительным, если из объема, ограниченного поверхностью, вытекает воздуха больше, чем втекает. И будет отрицательным, если втекает воздуха больше, чем вытекает.

Те точки скалярного поля, в которых явление протекает одинаковым образом, т.е. точки, **где функция принимает одно и то же значение, , называются** **поверхностями уровня**. В метеорологии принято рассматривать пересечение поверхностей определенного уровня с горизонтальной поверхностью карты, в результате которого получаются изолинии на карте, которые имеют свои названия. Линии одинакового давления называют *изобарами*, одинакового геопотенциала – *изогипсами*, одинаковой температуры – *изотермами*, одинаковой плотности – *изопикнами*, линии равных сумм осадков – *изогиетами*, одинаковых значений скорости ветра на карте или на вертикальном разрезе – *изотахами*.

**Кривая, в каждой точке которой в данный момент времени скорости ветра совпадают с касательными к это кривой, называется линией тока.**

Векторное поле можно рассматривать как векторную функцию радиуса-вектора точки или как векторную функцию трех скалярных переменных: . Любой вектор можно представить в виде суммы его проекций, умноженных на единичные вектора декартовой системы координат: , где проекции являются скалярными функциями координат *.*

Для графического изображения векторного поля вводится понятие о векторных или силовых линиях, имеющих определенный физический смысл [13].

Векторной или силовой линией векторного поля называется кривая, в каждой точке которой касательная к ней совпадает с направлением векторного поля в точке касания (рис. 1.11):



Рис. 1.11. Векторная (силовая) линия векторного поля

Для положительного заряда электростатического поля векторными линиями будут лучи, выходящие из заряда (рис. 1.12):



Рис. 1.12. Векторные линии электростатического поля

А для магнитного поля векторными линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Таким образом, линия тока – это векторная или силовая линия.

Поток несжимаемой жидкости также представляет собой векторное поле. Если в каждой точке жидкости скорость зависит исключительно от положения точки в пространстве и не зависит от времени, то мы имеем стационарное течение жидкости. Векторные линии и будут линиями тока.

Рассмотрим важное понятие потока векторного поля. Пусть векторное поле определено векторной функцией , где представляет собой вектор скорости некоторого потока несжимаемой жидкости, движущейся стационарно. Для того, чтобы рассчитать какое количество жидкости протекает через эту поверхность за единицу времени, разобьём поверхность *S* на элементарные площади . Каждая площадка считается плоской, а вектор скорости будет постоянным по модулю и одинаково направленным в каждой точке. Если площадка расположена перпендикулярно линиям тока, т.е. вектору , то количество жидкости, протекающей сквозь площадку в единицу времени равно . В случае наклонной к линиям тока площадки сквозь неё будет протекать такое же количество жидкости, как сквозь проекцию этой площадки на плоскость, перпендикулярную направлению тока жидкости, т.е. вектору . При неограниченном увеличении числа площадок и стремлении к нулю их размеров, интегральная сумма будет стремится к определенному пределу, т.е. к интегралу по поверхности:

который и определяет количество жидкости, протекающее через поверхность *S* за единицу времени. Этот интеграл по поверхности называют потоком векторного поля через поверхность *S*. В интеграле

выражающем поток в скалярной форме, - проекция вектора на направление нормали к поверхности, – элемент площади поверхности. В векторной форме поток равен:

где – вектор поля, – вектор, направленный по нормали к каждой точке, численно равный элементу площади.

Таким образом, поток поля через поверхность *S* определяет количество жидкости, протекающей через *S* в единицу времени. Рассмотрим выражение потока вектора по координатам. Вектор , разложенный по ортам декартовой системы координат, имеет вид: .

Рассмотрим разложение вектора по ортам прямоугольной системы координат в пространстве. Так как вектор направлен по нормали к поверхности, то угол между и осью равен углу между площадкой и плоскостью и поэтому проекция вектора на ось равна . Таким же образом можно найти проекцию вектора на другие оси. Тогда для вектора имеем

.

Откуда

.

Тогда для потока вектора имеем

Поток вектора представляет собой скалярную величину. Если поверхность замкнута и ограничивает некоторый объем, то имеем

В этом случае за направление вектора обычно берут направление внешней нормали (рис. 1.13).



Рис. 1.13. Поток вектора через замкнутую поверхность

Здесь - вектор скорости, - внешняя нормаль.

**1.9. Операции с векторами**

Как уже было сказано выше, согласно формуле разложения вектора по ортам прямоугольной декартовой системы координат, любой вектор можно представить в виде суммы его проекций, умноженных на соответствующие единичные вектора. Пусть имеется два вектора и :

,

.

1. Сумма (или разность) двух векторов равна сумме (или разности) соответствующих проекций, умноженных на единичные вектора:

 . (1.9.1)

1. Скалярное произведение двух векторов есть скаляр, величина которого равна произведению их модулей на косинус угла между ними:

 . (1.9.2)

В проекциях имеем:

 . (1.9.3)

1. Для скалярного произведения единичных векторов существуют правила:
	1. скалярное произведение одноименных единичных векторов равно единице, т.е.

 ; (1.9.4)

* 1. скалярное произведение разноименных единичных векторов равно нулю, т.е.

 . (1.9.5)

Следует заметить, что скалярное произведение двух векторов перестановочно.

1. Векторное произведение двух векторов есть новый вектор , длина которого равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах, а направление совпадает с поступательным движением правого винта в направлении от вектора к вектору (рис. 1.14):

.



Рис. 1.14. Векторное произведение векторов и

1. Величина векторного произведения равна произведению их модулей на синус угла между ним:

 . (1.9.6)

1. Для векторного произведения единичных векторов также существуют правила:
	1. векторное произведение одноименных единичных векторов равно нулю, т.е.

 . (1.9.7)

* 1. векторное произведение разноименных единичных векторов не перестановочно и при перестановке векторов оно меняет свое направление на противоположное:

;

 и определяется формулами:

;

 (1.9.8)

*.*

1. Векторное произведение в проекциях по ортам прямоугольной декартовой системы координат можно определить с помощью тензора, с помощью определителей третьего и второго порядков:

+

+ . (1.9.9)

**1.10. Правила дифференцирования векторов**

Приведем правила дифференцирования векторных функций [13].

1. Производная суммы векторных функций равна сумме производных слагаемых:
2. Производная скалярного произведения векторной функции скалярного аргумента на скалярную функцию того же аргумента равна сумме скалярного произведения скалярной функции на производную от векторной и производной от скалярной функции на векторную:
3. Производная скалярного произведения двух векторов равна сумме скалярных произведений первой векторной функции на производную от второй и второй векторной функции на производную от первой:
4. Производная векторного произведения двух векторов равна сумме векторных произведений первого вектора слева на производную от второго вектора и производной от первого вектора на второй вектор справа:

.

**1.11. Индивидуальная, локальная и геометрическая производные**

В динамической метеорологии различают индивидуальную или полную, локальную или частную и геометрическую производные [4, 14].

Индивидуальная или частная производная характеризует изменение метеорологической величины в движущейся массе воздуха, т.е. характеризует индивидуальные изменения. В метеорологии – это могут быть изменения метеорологической величины в воздушной массе в результате трансформации, которые могут быть зафиксированы радиозондом, перемещающимся вместе с воздушной массой. Пусть метеорологическая величина является функцией координат и времени , т.е. . Тогда по правилу дифференцирования сложной функции имеем

 . (1.11.1)

В прямоугольной декартовой системе координат изменения координаты в единицу времени характеризуют соответствующие скорости: = u – составляющая вектора скорости вдоль оси – составляющая вектора скорости вдоль оси – составляющая вектора скорости вдоль оси

Тогда для индивидуальной производной имеем

 . (1.11.2)

Так выражаются индивидуальные изменения при движении воздушной частицы в координатах Лагранжа. Буквами обозначается локальная или частная производная по времени *t*.

**Локальная или частная производная характеризует изменение метеорологической величины во времени в неподвижной фиксированной точке пространства.** В метеорологии – это изменения метеорологической величины, зафиксированные на метеорологической станции через определенные промежутки времени, то есть это изменения во времени в данной неподвижной точке скалярного и векторного поля. Это могут быть адиабатические изменения, которые можно определить по двум последовательным наблюдениям или по самописцам.

**Геометрическая производная характеризует изменение метеорологической величины в целом в пространстве или в каком-либо данном направлении.**

В результате следует, что индивидуальная или полная производная некоторой величины равна алгебраической сумме локальной и геометрической производных, умноженных на соответствующие составляющие скорости движения.

Когда вертикальная составляющая отсутствует, то есть рассматриваются изменения на поверхности уровня (иначе, на карте), вычисляют плоскую производную:

 . (1.11.3)

Практическое вычисление производных для простой сетки, состоящей из четырех точек (рис. 1.15), выполняется по формулам:



Рис. 1.15. Узлы сетки, состоящей из четырех точек

; - с помощью центральных разностей;

; - с помощью односторонних разностей (вперед).

Здесь - значение метеовеличины в *i*-той точке; *r* – шаг сетки, т.е. расстояние между соседними точками – узлами сетки; нижний индекс указывает на номер узла сетки.

Приращения независимых переменных должны отвечать некоторым правилам. При вычислении производных для переменных *X* и *Y*  эти приращения должны быть не менее среднего расстояния между пунктами наблюдений. Приращения по расстоянию выбираются в пределах 250-500 км, приращение давления по вертикали – от 50 до 200 гПа, приращение по времени от 1 до 24 часов, но на одном шаге часто оно равно 15 минутам.

Замена производных конечными разностями обусловливает наличие погрешности. Однако оказалось, что средняя квадратическая ошибка, обусловленная случайными погрешностями в исходных данных, в 2-3 раза меньше ошибки расчета по формулам конечных разностей. С помощью центральных разностей производные вычисляются точнее, чем с помощью односторонних. Уменьшить погрешность возможно если привлечь добавочное число исходных данных или произвести осреднение по большему числу точек. Хотя чрезмерное увеличение может привести к излишнему сглаживанию.

Производные с помощью конечных разностей можно вычислять для разных сеток. Однако, наиболее распространенная шахматная сетка имеет вид (рис. 1.16):



Рис. 1.16. Узлы шахматной сетки, состоящей из 24 точек

На рисунке цифры означают номера точек.

**1.12. Градиент скалярного поля**

Любой вектор можно разложить по ортам или единичным векторам (, , ) прямоугольной декартовой системы координат:

 .

(Единичные вектора или орты прямоугольной декартовой системы координат – это вектора , , , величина которых равна единице, а направления совпадают с направлением осей координат).

Пусть точка описывает кривую *L* в пространстве (рис. 1.17):



Рис. 1.17. Производная вектора по длине дуги *S*

Параметром, определяющим положение точки на кривой, можно считать длину *S* дуги кривой, отсчитываемую от точки кривой до точки . Радиус-вектор точки будет функцией скалярного аргумента *S*: . В проекциях радиус-вектор точки равен

,

где – скалярные функции длины дуги *S*. Продифференцируем по скаляру *S*, получим новый вектор , направленный по касательной к кривой в сторону возрастания *S*. Модуль этого вектора равен

.

Но – хорда, а =АВ – дуга. Из геометрии известно, что отношение длины хорды, стягивающей дугу, к длине дуги стремится к единице, когда длина дуги стремится к нулю. Следовательно, , т.е. вектор есть единичный вектор касательной к кривой направленный в сторону возрастания *S*. В проекциях вектор и его модуль определяется формулами

.

Пусть - сложная функция переменной *S*, где – промежуточные аргументы. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

 . (1.12.1)

Если рассмотреть кривую, лежащую на поверхности уровня, то вдоль кривой . Вектор – есть единичный вектор выбранного направления.

Если ввести в рассмотрение новый вектор с проекциями , , , то правую часть формулы (1.19) можно рассматривать как скалярное произведение этого нового вектора на единичный вектор выбранного направления. Этот новый вектор называется градиентом скалярного поля , и обозначается как

 . (1.12.2)

Приведем следующее определение градиента: **градиент скалярной функции есть вектор, направленный по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции и численно равный скорости изменения функции по этому направлению.** Проекции градиента на оси координат и его модуль, т. е. его величину, можно выразить формулами:

 ; ; .

.

Градиент может быть тождественно равен нулю, если представляет собой постоянную величину.

Для того, чтобы получить скорость изменения функции по любому направлению, достаточно спроектировать вектор на это направление. Таким образом, в каждой точке скалярного поля можно построить вектор – градиент поля – который образует векторное поле.

Модуль градиента является скаляром. Такой скаляр называется асцендентом, что означает «растущий».

Полный градиент является вектором, направленным в сторону наиболее интенсивного роста скаляра, численно определяющим изменение этого скаляра на единицу длины.

Однако, в метеорологии по решению Международной Метеорологической организации в 1876 году метеорологическим градиентом называется уменьшение скаляра, приходящегося на единицу длины, в силу естественности падения давления с высотой в тропосфере. Тогда, например, для барического градиента (градиента давления) с учетом формулы (1.20), для математического градиента имеем

 . (1.12.3)

А для метеорологического градиента давления, приходящегося на единицу массы, используется формула

 . (1.12.4)

Тогда горизонтальный барический градиент на плоскости определяется формулой

 . (1.12.5)

а вертикальный барический градиент

 . (1.12.6)

* + 1. **Свойства градиента**
1. Градиент суммы скалярных полей равен сумме градиентов слагаемых:

;

1. Градиент скалярного произведения скалярных полей определяется формулой:

;

Отсюда вытекает следствие:

**1.13. Дивергенция векторного поля**

Мы выяснили, что градиент скалярного поля есть вектор. Теперь определим понятие дивергенции через интеграл. **Дивергенция вектора скорости в данной точке векторного поля – это предел потока вектора, представляющего поле скоростей движущегося воздуха (или жидкости), вытекающего или втекающего в объём, ограниченный поверхностью *S*, отнесенный к объему, когда объём стремится к нулю, а поверхность стягивается в точку.** Поток вектора может быть положительным и отрицательным в зависимости от того, сколько воздуха (или жидкости) вытекает из точки или втекает в нее. От этого воздух расширяется или сжимается, что сопровождается увеличением или уменьшением его удельного объема, которое зависит от распределения в пространстве скоростей ветра, т.е. связано с потоком вектора скорости. Дивергенция вектора скорости определяется формулой:

(1.13.1)

где *S* – ограниченная контуром площадь, – проекция вектора скорости на внешнюю нормаль к поверхности *dS*, *Т* - объем воздуха. Обычно вычисляется дивергенция на плоскости.

Рассчитывая дивергенцию, мы определяем, сколько жидкости или газа вытекает из данного объёма или втекает в него. Дивергенция векторного поля есть величина скалярная. Поток определяет количество жидкости или газа, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, а поток через внешнюю поверхность равен сумме потоков из всех внутренних частей.

С дивергенцией связан **отток** воздуха (или жидкости) от данной точки, тогда дивергенция *D* больше нуля, а также **приток** воздуха (или жидкости) к данной точке, тогда дивергенция *D* меньше нуля.

В поле криволинейных линий тока на плоскости это выглядит следующим образом:

линии тока расходятся от точки *O* при оттоке воздуха. В этом случае дивергенция положительна, т.е. D>0 при расходящихся линиях тока и точка *О* представляет собой источник.



линии тока сходятся к точке *О* при притоке жидкости или газа. Дивергенция в этом случае отрицательна, т.е. D<0 при сходящихся линиях тока и точка *О* представляет собой сток.

В метеорологии положительная дивергенция называется просто дивергенцией, а отрицательная – конвергенцией. Напомним, что **линия тока – это кривая, в каждой точке которой в данный момент времени скорость ветра совпадает с касательной к этой кривой.** На картах барической топографии при расходимости линий тока мы имеем дивергенцию, а при сходимости – конвергенцию. С помощью интегральной формулы (1.25) ее трудно считать. Дивергенция, характеризующая расходимость и сходимость изолиний на картах барической топографии, в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат определяется формулой:

где – составляющие вектора скорости вдоль осей *x, y, z*. Горизонтальная дивергенция или плоская дивергенция равна:

Дивергенция может характеризовать отток или приток массы также в поле параллельных линий тока. Если модуль скорости ветра в направлении потока возрастает, то дивергенция положительна и происходит отток массы (рис. 1.18):



Рис. 1.18. Отток массы в поле прямолинейных линий тока при положительной дивергенции

Если модуль скорости ветра в направлении потока убывает, то дивергенция отрицательна и происходит приток массы (рис. 1.19):



Рис. 1.19. Приток массы в поле прямолинейных линий тока при отрицательной дивергенции

Дивергенцию можно интерпретировать в пространстве как сумму вертикальной и горизонтальных её составляющих. Дивергенция может характеризовать относительное увеличение или уменьшение плотности за счет притока или оттока массы. Например:

Если плотность частицы постоянна, то есть , газ или жидкость является несжимаемыми. Для несжимаемых субстанцией

Горизонтальную или плоскую дивергенцию можно интерпретировать как относительную скорость увеличения площади, а вертикальную – как относительную скорость увеличения толщины элементарного объёма. Если дивергенция скорости равна нулю (), то поле называется бездивергентным или соленоидальным.

**1.13.1. Свойства дивергенции**

* + 1. Дивергенция суммы векторных полей равна алгебраической сумме дивергенций слагаемых:

. (1.13.1.1)

* + 1. Дивергенция скалярного произведения скалярной величины на векторную равна сумме произведений скалярной величины на дивергенцию векторной и векторной величины на градиент скалярной:

 (1.13.1.2)

**1.14. Вихрь векторного поля; циркуляция вектора**

Площадь тоже можно рассматривать как вектор. Причем вектор, представляющий площадь, нужно откладывать по нормали к площади в определенную сторону и его модуль должен быть равен численному значению площади. В случае произвольного векторного поля можно считать, что на небольших участках векторное поле будет вести себя примерно так, как поле линейных скоростей вращающейся жидкости. Поэтому можно предположить, что для произвольного векторного поля в каждой точке существует новый вектор, который в основном определяет циркуляцию поля по границам малых площадок, содержащих эту точку.

Рассмотрим поле линейных скоростей жидкости, вращающейся вокруг некоторой оси с угловой скоростью . Определим циркуляцию вектора скорости вдоль произвольной замкнутой плоской кривой *L*, ограничивающей поверхность *S*.

Если линейный интеграл берётся по замкнутому контуру *L*, то линейный интеграл называется циркуляцией *c* вектора вдоль кривой *L*:

где – радиус-вектор точки.

Циркуляция скорости является скалярной величиной, характеризующей общую тенденцию частиц воздуха, лежащих на произвольном замкнутом контуре, двигаться вдоль этого контура [13, 14].

Именно отношение циркуляции векторного поля по замкнутой кривой к величине площади, ограниченной этой кривой, равно проекции этого нового вектора на нормаль к площадке. Это приводит к понятию вихря.

**Вихревым вектором векторного поля называется вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции векторного поля по контуру плоской площадки , перпендикулярной этому направлению, к величине этой площадки, когда размеры этой площадки стремятся к нулю, а площадка стягивается в точку:**

Нормаль к площадке направлена так, чтобы при вычислении циркуляции обход по контуру производился против часовой стрелки.

Кроме термина «вихрь» используется термин «ротор», что означает по-латыни «вращатель» или термин «кёрл» (сurl ), что в переводе с английского означает «завиток».

Практически вихрь скорости представляет собой векторное произведение вектора набла на линейную скорость :

Для записи градиента в векторной форме пользуются символическим вектором "набла" ∇, или так называемым дифференциальным оператором Гамильтона, обозначающим векторную операцию образования градиента от какой-либо величины

Это выражение рассматривается как символический вектор ∇, проекции которого на оси координат равны:

который будет рассмотрен подробнее в следующем параграфе.

Вихрь можно проектировать на оси ординат и рассматривать по отношению к координатным плоскостям декартовой системы координат. Его можно выразить через проекции с помощью тензора второго ранга следующим образом:

++=

+. (1.14.3)

Проекции вихревого вектора на оси координат равны:

; (1.14.4)

; (1.14.5)

 . (1.14.6)

В метеорологии, как правило, используют вертикальную составляющую вихря скорости, которая характеризует тенденцию вращения на горизонтальной плоскости (рис. 1.20):



Рис. 1.20. Вертикальная составляющая вихря скорости при положительном направлении

Механический смысл вихря скорости заключается в следующем: вихревой вектор поля линейных скоростей вращающейся жидкости или газа есть постоянный вектор, направленный параллельно оси вращения, модуль которого равен удвоенной угловой скорости вращения:

.

Вихревые линии поля линейных скоростей вращающейся жидкости являются прямыми, параллельными оси вращения, ибо для такого поля направление вихря совпадает с направлением вектора угловой скорости.

**1.14.1. Свойства вихря**

* 1. Дивергенция вектора вихря равна нулю:
	2. Вихрь суммы векторных полей равен сумме вихрей:

.

* 1. Вихрь скалярного произведения вектора на скалярную функцию *u* равен сумме скалярного произведения скаляра на вихрь вектора и векторного произведение градиента скаляра *u*, умноженного на вектор справа:

.

* 1. Дивергенция векторного произведения векторных полей определяется формулой:

.

Нужно заметить, что не следует полностью отождествлять вихрь скорости с перемещением частиц воздуха по криволинейным траекториям. Речь идет не столько о вращательном движении, сколько о тенденции возникновения такого движения.

**1.14.2. Вихрь в поле прямолинейных линий тока**

Можно представить такое поле скоростей, когда при прямолинейном движении имеется неравномерное распределение скоростей вдоль нормали к воздушному течению, тогда вихрь скорости не равен нулю (рис. 1.21). В циклоне вихрь положительный, а в антициклоне отрицательный.

|  |  |
| --- | --- |
| *а)* циклонический вихрь | *б)* циклонический вихрь |
| *в)* антициклонический вихрь | *г)* антициклонический вихрь |
|  |  |

Рис. 1.21. Вихрь в поле прямолинейных линий тока

Когда при движении вдоль оси Х u– составляющая вектора скорости уменьшается в положительном направлении по нормали к движению (вдоль оси У), то имеем циклонический вихрь, т.е. (рис. 1.21а).

Когда при движении вдоль оси Yv – составляющая вектора скорости увеличивается в положительном направлении по нормали к движению, то имеем также циклонический вихрь, т.е. (рис. 1.21б).

Когда при движении вдоль оси Х u– составляющая вектора скорости увеличивается в положительном направлении по нормали к движению, то имеем антициклонический вихрь, т.е. (рис. 1.21в).

Когда при движении вдоль оси Yv – составляющая вектора скорости уменьшается в положительном направлении нормали к движению, то имеем также антициклонический вихрь, т.е. (рис. 1.21г).

В циклоне вихрь положительный, а в антициклоне отрицательный.

**1.15. Операторы Гамильтона («набла»), Лапласа и Якоби**

В теории поля, понятия которой широко используются в динамической метеорологии, основное значение имеют следующие характеристики:

1. Градиент скалярной функции , являющийся вектором:
2. Дивергенция вектора , являющаяся скаляром:

где проекции вектора на оси декартовой системы координат.

1. Вихрь вектора , являющийся вектором:

Эти 3 важнейших понятия можно записать с помощью символического оператора – вектора «набла» ∇ - предложенного Гамильтоном:

 (1.15.1)

Выражение, сообщающее о том, что необходимо провести операцию вычисления производной, называется оператором. Оператор полной производной имеет вид:

 (1.15.2)

Сам оператор реального значения не имеет. Он приобретает определенный физический смысл лишь в комбинации со скалярными или векторными функциями.

Скалярное произведение вектора на скалярную функцию является градиентом:

 (1.15.3)

Скалярное произведение вектора на векторную функцию является дивергенцией:

 . (1.15.4)

Для вектора скорости имеем:

.

Векторное произведение вектора на вектор является вихрем вектора :

 (1.15.5)

Для вектора скорости имеем:

 (1.15.6)

С помощью оператора можно записать различные понятия векторной алгебры. Например:

Из векторной алгебры известно, что векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю, а смешанное произведение трех векторов перестановочно, тогда

=.

Поэтому .

Рассмотрим дивергенцию градиента скалярной функции:

.

.

Принимая во внимание, что скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату модуля этого вектора, получим:

 . (1.15.7)

Этот оператор называется оператором Лапласа или лапласианом:

 . (1.15.8)

Обозначается этот оператор символами или Δ. Его можно применять как к скалярной, так и к векторной функции. Применим его к давлению и скорости ветра .

(1.15.9)

Таким образом, лапласиан от векторной функции есть вектор, проекции которого – лапласианы от соответствующих проекций вектора, причем они (лапласианы) получаются из формулы (1.15.9) путем подстановки вместо проекций вектора.

Производные, входящие в формулу лапласиана, можно вычислить с помощью односторонних или центральных разностей.

При использовании аппроксимации вторых производных с помощью односторонних разностей для квадратной, шахматной сетки, состоящей из 4-х точек, имеем формулы:

Тогда оператор Лапласа определяется по следующему выражению:

 (1.15.10)

При использовании аппроксимации вторых производных с помощью центральных разностей для той же сетки имеем формулы:

Тогда оператор Лапласа вычисляется по следующей формуле:

 (1.15.11)

Наиболее часто оператор Лапласа рассчитывается для давления или геопотенциала.

Помимо операторов Гамильтона и Лапласа в метеорологии для некоторых задач рассчитывается оператор Якоби или якобиан. Якобиан представляет собой определенную комбинацию горизонтальных производных двух функций. Его можно записать с помощью тензора-определителя, который имеет вид:

 (1.15.12)

При использовании аппроксимации производных конечными разностями якобиан можно вычислить с помощью центральных или односторонних разностей. Например, для простой сетки, состоящей из четырех точек, где в каждой точке имеется информация о двух метеорологических величинах – давлении P и температуре T – якобиан с помощью центральных разностей можно рассчитать по следующей формуле:

Вычисление якобианов бывает необходимым при расчете конвективных характеристик метеорологических параметров.

Выражения

являются дифференциальными операторами первого порядка. А выражения , , , являются дифференциальными операторами второго порядка, так как они сводятся к двукратному дифференцированию скалярных или векторных функций. Например, , где оператор Гамильтона встречается два раза.

**Контрольные вопросы**

1. Что мы называем полем скалярной или векторной величины?
2. Какое поле называют скалярным и какое – векторным?
3. Дайте определение скалярной или векторной функции.
4. Чему равен модуль (абсолютная величина) вектора?
5. Что называется годографом?
6. Дайте определение производной от скалярной или векторной функции скалярного аргумента.
7. Что представляет собой поверхность уровня?
8. Что такое линия тока?
9. Что называют потоком скалярного поля? потоком векторного поля?
10. Перечислите операции с векторами.
11. Как определяется векторное произведение в проекциях по ортам прямоугольной декартовой системы координат?
12. Приведите правила дифференцирования векторов.
13. Что характеризует индивидуальная или полная производная? локальная или частная производная? геометрическая производная?
14. Какие формулы используются для аппроксимации первых производных с помощью конечных разностей?
15. Дайте определение и приведите формулу градиента скалярного поля.
16. Перечислите свойства градиента.
17. Дайте определение дивергенции векторного поля.
18. Приведите формулы для дивергенции в пространстве и для плоской дивергенции.
19. Объясните дивергенцию в поле прямолинейных линий тока.
20. Перечислите свойства дивергенции.
21. Приведите формулу циркуляции векторного поля и дайте определение вихря векторного поля.
22. Как вычисляется вихрь векторного поля через проекции на оси декартовой системы координат с помощью тензора второго ранга?
23. Объясните механический смысл вихря скорости.
24. Перечислите свойства вихря.
25. Объясните вихрь в поле прямолинейных линий тока.
26. Приведите формулы для операторов Гамильтона, Лапласа, Якоби.

**Глава 2. Силы, действующие в атмосфере**

Поскольку движения в атмосфере рассматриваются в определенной системе координат, определим некоторые из них.

**2.1. Абсолютная (инерциальная) и правая локальная декартова система координат**

Основная система уравнений гидротермодинамики базируется на фундаментальных физических законах. Все уравнения принято относить к воздушной частице единичной массы. Легко представить себе, что она движется вместе с воздушным потоком. Движение можно относить к «неподвижным» звездам или рассматривать его по отношению к земной поверхности. Для характеристики движения в первом и во втором случае его можно рассматривать в разных системах отсчета, то есть в разных системах координат. Рассмотрим инерциальную (абсолютную) и правую локальную декартову системы координат [4, 12, 14, 15].

Инерциальная (абсолютная) декартова система координат рассматривается по отношению к неподвижным звездам. Её центр жестко связан с центром Земли. Ось Х имеет фиксированные направление в экваториальной плоскости, ось Y также расположена в экваториальной плоскости и перпендикулярна оси Х. она тоже фиксирована. Положение точки в этой системе определяется абсциссой *х*, ординатой *у*, аппликатой *z*. Вектор угловой скорости вращения Земли совпадает с направлением оси Z с юга на север (рис. 2.1).



Рис. 2.1. Абсолютная, правая локальная декартова и сферическая системы координат

Правая (или правовращающаяся) локальная декартова координат, движение в которой определяется по отношению к поверхности Земли. В этой системе бывает важным знать относительную скорость и относительное ускорение частицы воздуха по отношению к земной поверхности. Ось Z в этой системе направлена по местной вертикали вверх, которая определяется локальным направлением силы тяжести. Ось Х направлена по касательной вдоль широтного круга на восток, а ось Y – по касательной вдоль меридиана на север. Декартова система координат является ортогональной и имеет некоторые преимущества перед другими системами отсчёта. Во-первых, сохраняет проекции, соответствующие отношению площадей на местности и на карте. Во-вторых, она позволяет просто выполнять векторные операции, в-третьих, в ней производные выражаются с помощью простых соотношений.

В силу связанности этой системы с вращающей Землей скорости движения в ней являются относительными. Для правой локальной декартовой системы координат проекции угловой скорости вращения Земли на оси координат определяются формулами:

;

;

.

Независимыми координатами здесь являются Х, Y, Z и t, где t-время.

**2.2. Сферическая система координат**

При решении некоторых задач теоретической метеорологии и прогноза погоды более удобной является сферическая система координат [4, 14, 15]. В этой системе положение точки в пространстве определяется её расстоянием до начала координат, которое помещается в центр Земли, то есть радиус-вектором , который можно представить в виде суммы проекций следующим образом: . А также полярным углом θ и долготой λ. Полярный угол θ – это угол между радиус-вектором и полярной осью, который отсчитывается с севера на юг. Это направление считается положительным. Угол λ – это угол между меридиональной плоскостью, проходящей через току и зафиксированной плоскостью меридиана, которая может проходить через гринвичский меридиан. Практически θ и λ представляют собой широтную и долготную координаты, направленные на юг и на восток. Восточная долгота считается положительной.

**2.3. Локальная изобарическая система координат**

Локальная изобарическая система координат – это система пространственных координат, в которой в качестве вертикальной координаты принято атмосферное давление [15]. Её называют системой координат (x, y, p, t) (рис. 2.2). Независимыми переменными являются , , , .

Полная производная в изобарической системе координат определяется по формуле:

Однако индекс внизу обычно опускают:

где – аналог вертикальной скорости, который определяется формулой:

Сопоставление декартовых и изобарических координат можно представить следующим образом:



Рис. 2.2. Локальная правая декартова и изобарическая системы координат

**2.4. Натуральная система координат**

Натуральная система координат – это ортогональная криволинейная система координат, в которой координатными линиями являются линии тока, обозначаемые буквой *S*, и нормали к ним – *n* (рис. 2.3). Как было указано ранее, линия тока – это кривая, в каждой точке которой в момент времени *t* скорости движения совпадают с касательными к ним [4, 15, 16]:



Рис. 2.3. Натуральная система координат

Здесь – скорость, – линия тока, – нормаль к линии тока, – угол между направлением скорости и осью абсцисс.

Это правая система координат, для которой кратчайший поворот от положительного направления к положительному направлению совершается против часовой стрелки, то есть справа налево. Угол между осью *ОХ* декартовой системы координат и касательной к линии тока отсчитывается против часовой стрелки и характеризует направление скорости ветра от точки к точке, те есть .

Кривизна линии тока определяется частной производной от по :

Она характеризует поворот линии тока на единицу длины её дуги.

Кривизна нормалей к линиям тока выражается производной от угла по :

Она характеризует поворот нормалей к линиям тока на единицу длины дуги нормалей к линиям тока.

Если линии тока или нормали к ним поворачивают влево при положительном приращении аргумента, то угол увеличивается, кривизна линий будет положительной или циклонической. Если же соответствующие кривые поворачивают вправо в направлении роста аргумента, то кривизна будет отрицательной или антициклонической:

При положительной, циклонической кривизне нормалей линии тока расходятся по течению, а при отрицательной, антициклонической – линии тока сходятся по течению (рис. 2.4).

|  |  |
| --- | --- |
|  а) |   б) |

Рис.2.4. Положительная (а) и отрицательная (б) кривизна нормалей

Кривизна траектории – это поворот пути частицы, рассчитанный на единицу пройденного расстояния. Определяется она из выражения для полной производной от угла по времени:

где – представляет собой поворот пути частицы на единицу пути.

А так как

то

Скорость ветра на плоскости карты определяется формулой:

,

или

Как следует из рис. 2.3, составляющие вектора скорости определяются следующими выражениями:

 ; (2.4.5)

Взяв производные от и по х и у и совместив ось абсцисс с касательной к линиям тока для дивергенции имеем следующее выражение:

Горизонтальная дивергенция определяется изменением модуля скорости ветра вдоль линий тока кривизной нормалей к линиям тока, то есть сходимостью и расходимостью линий тока. Величина положительна при увеличении модуля скорости в направлении потока, отрицательна при уменьшении модуля скорости и равна нулю, если скорость в направлении потока не меняется. Величина положительна при расходимости линий тока, отрицательна при сходимости и равна нулю в случае параллельных линий тока.

Для вертикальной составляющей вихря скорости в натуральных координатах имеем

Вертикальная составляющая вихря скорости определяется кривизной линий тока , то есть завихренностью воздушных потоков и изменением модуля скорости в направлении перпендикулярном движению – нормальном к линиям тока.

Величина - положительна при циклонической кривизне линий тока, отрицательна при антициклонической и обращается в нуль в случае прямолинейных линий тока.

Производная отрицательна, если скорость ветра растет вправо от направления потока, положительна при увеличении скорости ветра влево от направления движения и равна нулю, если скорость ветра поперек потока не меняется.

**2.5. Классификации сил, действующих в атмосфере**

Силы, действующие в атмосфере по признаку действия на физические объекты подразделяются на действительные и инерционные [17].

Действительные силы – это силы взаимодействия между реальными физическими объектами. К ним относятся: сила гравитационного притяжения, силы давления и трения. Сила гравитационного притяжения определяется известной формулой:

где – масса Земли, равная 5,98⋅1021 тонн; – радиус Земли, равный 6378,4 км на экваторе, 6356,9 км на полюсе, – постоянная тяготения или гравитационная постоянная равная 6,67⋅10-8.

Давление Р характеризует силу взаимодействия между частицами воздуха: как физическая величина она представляет собой силу, действующую на единицу поверхности: .

Сила вязкости или сила внутреннего трения характеризуется тензором вязких напряжений .

Инерционные силы – это фиктивные силы, обусловленные силой инерции.

Это отклоняющая сила вращения Земли или сила Кориолиса и центробежная сила.

Сила Кориолиса равна удвоенному векторному произведению линейной скорости на угловую скорость вращения Земли:

где – угловая скорость вращения Земли, равная c-1.

Центробежную силу можно определить через линейную и угловую скорость. В первом случае она равна

где – линейная скорость, – радиус кривизны траектории движения.

Во втором случае

,

где – широта места.

По характеру воздействия силы, действующие в атмосфере подразделяются на **массовые** и **поверхностные.** Массовые силы иначе называют объемными. Они имеют следующие свойства:

* Это силы, действующие на данный элемент массы или объёма независимо от существования других элементов массы или объёма;
* это силы, «дальнего действия»; т.е. действуют на больших расстояниях на всё, что находится на Земле;
* это силы медленно убывающие с расстоянием, которые способны проникать внутрь жидкости (или газа) и воздействовать на все её элементы.

Поверхностные силы характеризуют воздействие внешней среды. Они отличаются следующими свойствами:

* это силы, характеризующие взаимодействие некоторого объёма и окружающей среды, приложенные к поверхности и исходящие от частиц, лежащих вовне объёма;
* это силы взаимодействия между различными частицами среды, силы «близкого действия»;
* это силы быстро убывающие с расстоянием.

К массовым силам относятся сила тяжести, сила Кориолиса и центробежная сила (рис. 2.5).

Сила тяжести представляет собой векторную сумму двух сил: силы гравитационного притяжения и центробежной силы:



Рис. 2.5. Силы гравитационного притяжения , центробежная и сила тяжести

Формулы для силы гравитационного притяжения и центробежной силы были приведены выше.

В каждом выделенном объёме силы, действующие между частицами внутри его, будут уравновешивать. Не будут уравновешиваться силы, приложенные к поверхности, то есть поверхностные силы. К таким силам относятся сила барического градиента и силы вязкости. Любая сила представляет собой вектор, который можно разложить по его проекциям на соответствующие оси координат. Сила барического градиента определяется формулой

Силы вязкости можно охарактеризовать с помощью тензора вязких напряжений, который можно представить в виде:

Поверхностные силы всегда направлены внутрь объёма.

**2.6. Cила тяжести**

**2.6.1. Общие положения**

Сила тяжести – эта массовая действительная сила, входящая в уравнения движения [4, 15, 16, 17]. На каждую покоющуюся или движущуюся на Земле материальную частицу действует сила тяжести (рис. 2.6). Сила тяжести представляет собой векторную сумму двух сил: силы земного притяжения и центробежной силы :



Рис. 2.6. Силы, действующие на точку *А*

Сила земного притяжения есть вектор , направленный по радиусу Земли к её центру, равная по величине:

где – гравитационная постоянная, равная 6,67⋅10-8 – масса Земли, равная 5,98⋅1021 тонн; – радиус Земли, равный 6378,4 км на экваторе, 6356,9 км на полюсе, – масса материальной частицы, которая много меньше массы Земли:.

Тогда имеем

Центробежная сила всегда направлена по радиусу круга вращения материальной точки наружу, широта которого проходит через рассматриваемую точку. Её можно выразить через линейную скорость и через угловую скорость вращения Земли:

где – линейная скорость вращения Земли, – радиус кривизны круга вращения материальной точки.

Центробежная сила для единицы массы практически равна центробежному ускорению: .

Центробежное ускорение (силу) можно определить через угловую скорость вращения Земли следующим образом: линейная скорость связана с угловой скоростью вращения Земли формулой . Из треугольника АОО′ следует, что . Тогда, как следует из формулы для центробежной силы, в конечном итоге имеем:

где – угловая скорость вращения Земли, равная

здесь – широта места, – радиус Земли.

При решении задач динамической метеорологии следует принимать во внимание, что основная масса атмосферы сосредоточена в нижнем 30-километровом слое и расстояние воздушной частицы незначительно отличается от радиуса Земли.

В состоянии покоя поверхность океана должна быть перпендикулярна силе тяжести, иначе частицы жидкости перемещались. Поверхности уровня разных радиусов будут представлять собой эллипсоиды вращения, как и Земля.

Однако, при исследовании атмосферных процессов Землю считают сферой и поверхности уровня на разных высотах – сферическими. Кроме этого зависимостью силы тяжести от широты места и от высоты материальной частицы над поверхностью Земли обычно пренебрегают. Для свободной атмосферы в расчетах нормальным значением силы тяжести считают её величину на широте на уровне моря. Она равна .

**2.6.2. Зависимость силы тяжести от широты места**

Представим Землю эллипсоидом вращения. Рассмотрим малую материальную частицу на вращающейся Земле, расположенную в точке А на широте (рис. 2.7). Рассмотрим действие на неё двух сил: силы тяжести и центробежной силы (не в естественных масштабах). А так как любой вектор можно разложить на нормальную и касательную (или тангенциальную) составляющие, разложим на такие составляющие силу земного притяжения ( ),), принимая во внимание, что земля не сфера, а эллипсоид вращения [4, 15].



Рис. 2.7. Разложение сил на нормальную и касательную составляющие

Сила тяжести представляет собой сумму двух сил:

 ()

Но из чертежа видно, что касательные составляющие особой роли не играют, а действительными являются нормальные составляющие. Тогда величина силы тяжести определится нормальными составляющими, направленными в противоположные стороны:

так как

(так как угол мал по сравнению с углом ),

тогда имеем:

То есть сила тяжести, действующая на единицу масс, представляет собой разность нормальных составляющих силы земного притяжение и центробежной силы.

В результате введением силы тяжести учитывается и центробежная сила. Так как сила тяжести представляет собой вектор, то её можно выразить в виде суммы проекции на соответствующие оси координат:

Значение силы тяжести различно на экваторе и на полюсе, ибо радиус Земли у экватора на 21 км больше, чем на полюсе, то есть от на экваторе мы отнимаем большую величину, чем на полюсе. Следовательно сила тяжести минимальна на экваторе и максимальна на полюсе. А центробежная сила, определяемая формулой максимальна на экваторе и минимальна на полюсе. Следовательно, космодромы лучше располагать ближе к экватору. Из вышесказанного можно составить следующую таблицу:

Таблица

Сила притяжения , центробежная и сила тяжести на полюсе и на экваторе

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  (сила притяжения) |  (центробежная) |  (тяжести) |
| Полюс | max | min | max |
| Экватор | min | max | min |

Хотя центробежная сила максимальна на экваторе, однако даже здесь она составляет часть от силы тяжести.

**2.6.3. Зависимость силы тяжести от расстояния между материальной точкой и центром Земли**

Для некоторых задач динамической метеорологии необходимо учитывать зависимость изменения силы тяжести с высотой, то есть зависимость от расстояния между воздушной частицей и центром Земли [4, 15]. Сила тяжести изменяется с высотой по гравиметрическому закону:

где – радиус Земли (средний), - высота точки на поверхностью Земли, – величина силы тяжести (ускорения) на уровне моря.

Было установлено, что с увеличением высоты сила тяжести уменьшается. Например, для

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  км | g = 9,78 м/с2, |  км | g = 9,51 м/с2, |
|  км | g = 9,72 м/с2, |  км | g = 9,22 м/с2, |
|  км | g = 9,66 м/с2, |  км | g = 8,01 м/с2. |

То есть с высотой сила тяжести уменьшается. Для свободной атмосферы нормальной считается сила тяжести на широте и на уровне море, равная 9,81 м/с2, которая принимается за постоянную. В этом случае необходимо учитывать только влияние широты. Однако для некоторых задач бывают необходимыми более точные расчёты. Тогда для свободной атмосферы используется следующая эмпирическая формула:

 см/с2.

А для условий гор формула приобретает вид:

 см/с2.

**2.6.4. Зависимость силы тяжести от собственной скорости вращения атмосферы**

В реальных условиях атмосфера вращается относительно Земли с некоторой скоростью, не совпадающей со скоростью вращения Земли. Она будет иметь собственную угловую скорость. Это может сказаться на величине силы тяжести при решении некоторых задач [4, 15].

Пусть – угловая скорость вращения Земли, - угловая скорость вращения атмосферы. Тогда уравнение силы тяжести для атмосферы будет иметь вид:

Знак (+) в скобках () означает перемещение воздуха на восток, знак (-) означает перемещение на запад.

Уменьшение силы тяжести в силу влияние высоты до 20 км составляет 6 см/с2.

Влияние собственной угловой скорости атмосферы зависит, во-первых, от направления зонального потока, т.е. от широтного перемещения, во-вторых, от скорости самого потока, т.е. от угловой скорости вращения Земли.

При западных потоках в формуле (2.6.4) мы будем отнимать большую величину, и сила тяжести будет меньше. При восточных потоках мы будем отнимать меньшую величину, и сила тяжести будет больше. При увеличении скорости проявляется зависимость от широты. Наибольшие изменения наблюдаются на экваторе с увеличением скорости.

Всё это приводит к следующему выводу: при рассмотрении небольших объёмов воздуха для общих задач можно принять силу тяжести постоянной:

 м/с2.

При рассмотрении больших объёмов воздуха в конкретных задачах общей циркуляции атмосферы необходимо учитывать все факторы, влияющие на изменения силы тяжести.

**2.7. Отклоняющая сила вращения Земли или сила Кориолиса**

Сила Кориолиса относится к массовым инерционным силам [4, 15,16]. При действии на единицу массы она представляет собой добавочное ускорение, возникающие при движении материальной точки во вращающейся системе координат, в том числе и во вращающейся атмосфере. То есть при движении в атмосфере появляется дополнительная поворотная отклоняющая сила. Сила Кориолиса равна удвоенному векторному произведению линейной скорости на угловую вращения Земли . Линейную скорость часто называют скоростью переносного движения, а – скоростью относительного движения, которое возникает во вращающейся с ускорением системе координат. Сила Кориолиса определяется формулой:

Вектор угловой скорости вращения Земли направлен вдоль оси вращения Земли в сторону, с которой вращение происходит против часовой стрелки. Отклоняющая сила вращения Земли направлена перпендикулярно направлению движения и оси вращения. Величина силы Кориолиса равна удвоенному произведению модулей векторов линейной и угловой скоростей на синус угла между направлением движения точки и осью вращения Земли:

Она действует только на движущиеся тела и отклоняет его движение по горизонтали в северном полушарии вправо, а в южном – влево от направления перемещения (рис. 2.8 и рис. 2.9).

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Рис. 2.8. Сила Кориолиса при изменении направления движения  | Рис. 2.9. Вид с полюса |

Отклоняющая сила вращения Земли может быть разложена по осям координат. Любой вектор можно представить в виде суммы проекций, умноженных на соответствующие единичные вектора декартовой системы координат:

 (3)

То есть

здесь u - зональная составляющая вектора скорости, v - меридиональная составляющая вектора скорости, w - вертикальная составляющая вектора скорости.

В правой локальной декартовой прямоугольной системе координат составляющие вектора угловой скорости вращения Земли определяются следующими формулами (рис. 2.10):

 (4)



Рис. 2.10. Составляющие вектора угловой скорости в правой локальной декартовой системе координат

Поэтому составляющие силы Кориолиса будут равны:

 (2.7.5)

Из соотношений (2.7.5) следует, что вертикальная составляющая силы Кориолиса определяется только направлением зональной составляющей скорости . Однако, в уравнения движения вертикальная составляющая силы Кориолиса не учитывается. Это обусловлено тем, что величина вертикальной составляющей на 4 порядка, то есть в 10000 раз меньше численного значения силы тяжести: .

Если необходимо её учитывать, то принимаются во внимание следующие выводы. Если скорость направлена на восток – положительна -, то вертикальная составляющая силы Кориолиса направлена вверх и действует в направлении обратном силе тяжести, поэтому уменьшает её. Наоборот, если зональная составляющая направлена на запад и тормозит общий зональный поток, так как является отрицательной, то вертикальная составляющая силы Кориолиса действует в направлении силы тяжести и увеличивает её.

Горизонтальная составляющая отклоняющей силы вращения Земли определяется всеми тремя составляющими вектора скорости движения *u, v, w*. Наблюдения в атмосфере показывают, что горизонтальные компоненты силы Кориолиса во много раз превышают вертикальные: .

А так как вертикальная составляющая вектора скорости *w* мала по сравнению с горизонтальными *u, v,* для горизонтальных составляющих силы Кориолиса будут справедливы следующие соотношения:

 ()

Тогда величина полной горизонтальной составляющей силы Кориолиса равна:

Из выражения (2.7.7) следует, что горизонтальная составляющая силы Кориолиса зависит от синуса широты места, максимальна на полюсе (т.к. ), убывает с приближением к экватору, а на экваторе не имеет смысла (т.к. ). Графически зависимость силы или ускорения Кориолиса от широты изображается синусоидой следующего вида (рис. 2.11):



Рис. 2.11. График зависимости силы Кориолиса от широты

**2.8. Движение частицы только под действием силы Кориолиса**

Горизонтальная составляющая силы Кориолиса всегда нормальна к скорости движения, поэтому её величины не меняет [4]. Докажем это. Пусть материальная точка или частица воздуха движется только под действием отклоняющей силы вращения Земли. Если точка не движется, то сила Кориолиса на неё не действует. Тогда уравнения движения, отражающие закон сохранения количества движения на плоскости, будут иметь вид:

Умножим первое уравнение на , а второе - на и сложим их:

Выражение левой части можно представить в следующем виде

так как

Следовательно

выражение

можно представить

тогда

Для единичной массы представляет собой кинетическую энергию. Следовательно, отклоняющаяся сила вращения Земли или сила Кориолиса не изменяет величины кинетической энергии частицы воздуха, то есть не производит работу и не влияет на величину скорости движения . Однако, так как она направлена перпендикулярно к скорости, она заметно влияет на направление этой скорости.

**2.9. Сила барического градиента**

Направление математического градиента противоположено направлению метеорологического градиента. Поэтому формула градиента давления или барического градиента будет иметь вид:

В расчетах на единицу массы (1) приобретает следующее выражение:

где - оператор Гамильтона, равный

Поставим задачу следующим образом [4]: рассмотрим некоторый объём воздуха, находящийся в равновесии, на который действует только сила тяжести. Сила тяжести представляет собой вектор, который можно записать с помощью проекций следующей формулой:

Эта сила тяжести уравновешивается со стороны окружающей среды только силой гидростатического давления. Следовательно, сумма соответствующих компонент силы тяжести и силы давления будут равны нулю:

Отсюда следует

Поместим наш объем в правую локальную декартову систему координат. в этой системе горизонтальные составляющие силы тяжести равны нулю, так как она действует только в вертикальном направлении. Тогда

 и из первых двух соотношений имеем

 .

Плотность нулю не равна, следовательно

А производная равна нулю только в том случае, если берётся от постоянной, тогда:

Следовательно, в состоянии покоя, при отсутствии движения, для равновесия воздуха необходимо, чтобы давление в горизонтальной плоскости оставалось неизменным. Поэтому, если есть движение воздуха, то причиной движения воздуха является неравномерное распределение давления по горизонтали, которое характеризуется горизонтальным барическим градиентом:

Такая постановка задачи даёт возможность получить также уравнение статики.

**2.10. Центробежная сила и её влияние на движение**

Центробежная сила непосредственно в систему уравнений гидротермодинамики атмосферы не входит, но она является составляющей силы тяжести и оказывает влияние не движение.

Также как и сила Кориолиса, центробежная сила относится к массовым инерционным силам и возникает при связанном криволинейном движении [4, 5].

С одной стороны она может определятся линейной скоростью по формуле

где – радиус кривизны траектории.

С другой, так как линейная скорость связана с угловой выражением

 , (2)

где – угловая скорость вращения Земли, то центробежную силу можно выразить через угловую скорость. Радиус кривизны траектории можно представить через широту φ и радиус Земли ( км). Из рисунка 2.12 видно, что

где – радиус Земли, φ – широта места точки А.



Рис. 2.12. Сила притяжения , сила тяжести и центробежная силы действующие на точку А

Тогда центробежная сила будет равна:

где

Из (4) видно, что наибольшее значение центробежной силы отмечается у экватора, где она равна что составляет приблизительно от ускорения земного притяжения; с увеличением широты места величина центробежной силы или ускорение убывает.

Из формулы () видно, что центробежная сила быстро возрастает с увеличением скорости и уменьшением радиуса кривизны. В этих случаях она оказывает ощутимое влияние на движение. Однако, она не является активной силой. Это инерционная сила, входящая в состав инерционных сил, которые описываются полными или индивидуальными производными по времени от составляющих вектора скорости вдоль осей *x, y, z*.

**2.11. Силы вязкости; тензор вязких напряжений и скоростей деформации**

Поскольку любая сила является векторной величиной, то её можно разложить на касательную (тангенциальную) и нормальную составляющие (рис. 2.13). В декартовой системе координат это будет выглядеть следующим образом:



Рис. 2.13. Разложение силы на касательную и нормальную составляющие

Касательные составляющие вызывают появление в жидкостях и газах силы противодействия, которую называют вязкой силой или силой внутреннего трения [4, 15, 16]. То есть вязкие силы – это поверхностные силы, обусловленные молекулярным строением жидкостей и газов. Рассмотрим некоторые характеристики вязкости.

Представим движение жидкости в трубе, нижняя стенка которой неподвижна, а верхний слой передвигается со скоростью . Тогда сила вязкости или сила внутреннего трения будет пропорциональна изменению скорости в направлении перпендикулярном движению. Благодаря вязкости нижний слой будет оставаться неподвижным, верхний - перемещаться со скоростью , а промежуточные слои будут двигаться со скоростью пропорциональной удалению слоя от неподвижной стенки (рис. 2.14):



Рис. 2.14. Изменение скорости в вязкой среде

Сила вязкости определяется следующей формулой:

где – коэффициент молекулярной вязкости или динамический коэффициент вязкости, который зависит от физических свойств жидкости, молекулярного строения и температуры. Он равен:

где – плотность, - длина свободного пробега молекул, – средняя скорость движения молекул.

Его отношение к плотности называется кинематическим коэффициентом вязкости :

Отсюда

Следовательно, динамический коэффициент вязкости равен плотности, умноженной на кинематический коэффициент вязкости.

Выделим в жидкости или газе элементарный объём в виде параллелепипеда с гранями и предположим, что на каждую грань действуют вязкие силы σ (рис. 2.15) .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| *a)* | *б)* |

Рис. 2.15. Действие составляющих вязких сил

Составляющие силы вязкости будут действовать как в положительном, так и в отрицательном направлениях: , , , , , . Cоставляющие вязких сил можно представить в виде тензора вязких напряжений следующего вида:

который является симметричным, т.е. ,,.

В этом тензоре 3 диагональные компоненты () представляют собой нормальные напряжения, а 6 внедиагональных компонент (, , , , , ) – касательные напряжения или напряжения сдвига.

Поверхностные силы также можно представить в виде симметричного тензора:

Тензоры вида (2.11.5), (2.11.6) называют тензорами второго ранга. Поверхностные силы имеют следующие свойства:

1. нормальные составляющие поверхностных сил во много раз превосходят касательные;
2. если нормальные составляющие равны друг другу и постоянны во времени, то объём не деформируется;
3. если нормальные составляющие не равны друг другу, то давление определяется как взятое с обратным знаком среднее арифметическое трёх нормальных составляющих поверхностных сил (так как поверхностные силы направлены внутрь объёма, а давление - наружу), приложенных к взаимно перпендикулярным площадкам:

Если мы из этих нормальных составляющих поверхностных сил вычтем давление, которое направлено в противоположную сторону, то получим тензор вязких напряжений

Отсюда

В тензоре вязких напряжений (2.11.5) все 9 величин пропорциональны динамическому коэффициенту вязкости и вызываемым этими силами скоростям деформации.

Деформацию элементарного объёма характеризуют компоненты тензора скоростей деформации:

В тензоре (2.11.9) диагональные элементы характеризуют скорости растяжения или сжатия, которые могут быть без деформации и с деформацией (рис. 2.16).

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| *а)* | *б)* |

Рис. 2.16. Растяжение без деформации а) и с деформацией б)

Они определяются формулами:

где *u, v, w* - составляющие вектора скорости вдоль соответствующих осей координат.

А внедиагональные элементы представляют собой скорости скашивания углов или скорости деформации. Скоростью деформации называют половину угла между жидкими линиями (рис. 2.17).

|  |  |
| --- | --- |
| *а)* | *б)* |

Рис. 2.17. Поверхность без деформации а) и с деформацией б)

Скос угла вызывается парой сил и . Внедиагональные элементы симметричного тензора определяются следующими формулами:

 =;

=; (2.11.11)

 =.

**2.12. Закон двух третей**

По гипотезе Стокса касательные составляющие тензора вязких напряжений пропорциональны плотности , кинематическому коэффициенту вязкости ν, а также скоростям деформации *Д*. Таким образом, коэффициент пропорциональности между касательным напряжением и соответствующей деформацией зависит от плотности и вязкости жидкости. Для этого коэффициента принято обозначение . Тогда для касательных составляющих имеем:

Нас интересуют нормальные составляющие, которые могут деформировать и изменить объем и которые характеризуют давление. Учтем растяжение (или сжатие) и изменение объема с помощью следующих выражений:

где первый член правой части характеризует растяжение (или сжатие) элементарного объема вдоль соответствующей оси координат, а второй – изменение этого объёма из-за притока или оттока массы.

Из третьего свойства поверхностных сил следует, что

следовательно,

Известное свойство тензоров второго порядка заключается в том, что при изменении направления осей прямоугольной декартовой системы координат, что бывает при давлении по поверхности земного шара, имеет место соотношение:

Тогда после суммирование правых и левых частей соотношений () имеем:

Таким образом мы получили закон «двух третей», из которого следует вывод: для того, чтобы определить вязкие напряжение необходимо определить лишь одну функцию – кинематический коэффициент вязкости ,

**Контрольные вопросы**

1. Определите абсолютную (инерциальную) и правую локальную декартову системы координат.
2. Опишите сферическую и локальную изобарическую системы координат.
3. Опишите натуральную систему координат.
4. Определите выражения для дивергенции и вертикальной составляющей вихря скорости в натуральной системе координат.
5. Определите действительные и инерционные силы, действующие в атмосфере.
6. По какому признаку силы, действующие в атмосфере, подразделяются на массовые и поверхностные?
7. Как зависит сила тяжести от широты места?
8. Как зависит сила тяжести от расстояния между материальной точкой и центром Земли?
9. Как зависит сила тяжести от собственной скорости вращения атмосферы?
10. Какой формулой определяется отклоняющаяся сила вращения Земли или сила Кориолиса? чему равны составляющие силы Кориолиса по осям декартовой системы координат?
11. Изменяет ли сила Кориолиса величину кинетической энергии? величину скорости движения?
12. Влияет ли сила Кориолиса на направление скорости?
13. От каких физических характеристик зависит динамический коэффициент вязкости?
14. Чему равен кинематический коэффициент вязкости?
15. Перечислите свойства поверхностных сил.
16. Объясните действие составляющих сил вязкости.
17. Какими формулами определяются диагональные и внедиагональные компоненты тензора скоростей деформации?
18. Выведите закон двух третей, используя выражения для нормальных составляющих тензора вязких напряжений.
19. Что является причиной движения воздуха?
20. Как влияет на движение центробежная сила?

**Глава 3. Уравнения гидротермодинамики атмосферы.**

**3.1. Уравнение состояния идеального газа (для сухого воздуха)**

Уравнением состояния некоторого газа называется уравнение, которое устанавливает зависимость между основными параметрами газа – давлением *Р*, плотностью ρ и температурой *Т* – при переходе его из одного состояния в другое. (Идеальный газ – это уcловный газ между молекулами которого отсутствуют силы сцепления, и молекулы которого представляют собой материальные точки). Это уравнение Клайперона-Менделеева, которое также называют уравнением Бойля-Шарля [4, 15, 16].

При выводе его использовались законы Бойля-Мариотта и Гей-Люссака.

Согласно закону Бойля-Мариотта, произведение давления на его удельный объем при постоянной температуре есть величина постоянная:

Согласно закону Гей-Люссака отношение давления к температуре для фиксированной массы воздуха при постоянном объёме есть величина постоянная:

После проведения операций дифференцирования и интегрирования функции, которое мы представляем читателю, можно получить следующий вывод: отношение давления к произведению плотности на температуру также должно быть величиной постоянной:

Это постоянная является удельной газовой постоянной, равной

т.е. отношению универсальной газовой постоянной к молекулярному весу.

Причем

;

Таким образом, для сухого воздуха имеет место следующее уравнение состояния:

которое можно прочитать и так: изменение параметров идеального газа протекает по строгой зависимости так, что частное от деления давления на произведение плотности на температуру остается величиной постоянной, равной удельной газовой постоянной.

**3.2. Уравнение состояния для влажного воздуха**

Для влажного воздуха необходимо учитывать водяной пар. Тогда принимается во внимание, что плотность смеси, то есть влажного воздуха, будет представлять собой сумму плотности сухого воздуха и водяного пара, взятых при соответствующих давлениях. Вместо температура берется виртуальная температура. (Виртуальная температура – это та температура, при которой сухой воздух будет иметь ту же плотность, что и влажный при температуре *Т* и давлении *Р*). Тогда уравнения состояния для влажного воздуха будет:

где – виртуальная температура, определяемая соотношением:

В этом выражении – виртуальный добавок, – упругость водяного пара, – массовая доля водяного пара (количество граммов водяного пара, содержащегося в 1г влажного воздуха.)

Отсюда следует, что виртуальная температура, всегда выше обычной, поэтому при одном и том же давлении плотность сухого воздуха больше плотности влажного: . А для того, чтобы при прочих равных условиях плотности были равными, влажный воздух должен быть теплее, поскольку он легче сухого.

**3.3. Уравнение статики**

Поставим задачу следующим образом: рассмотрим некоторый объем воздуха, находящийся в равновесии, на который действует только сила тяжести [4, 15, 16].

Эта сила тяжести, которая является вектором с проекциями соответственно вдоль осей Х, Y, Z правой локальной декартовой системы координат. Сила тяжести уравновешивается со стороны окружающей среды только силой гидростатистического давления. Следовательно, сумма соответствующих компонент силы тяжести и силы давления будут равны нулю:

Отсюда следует, что

В правой локальной декартовой системе координат горизонтальные составляющие силы тяжести равны нулю, т.е. . Тогда

Тогда

Обратимся к последнему выражению формул (3.1.1)

Из последнего выражения формул (3.1.1) имеем:

В правой локальной декартовой системе координат вертикальная составляющая силы тяжести направлена вниз к центру Земли, а положительное направление оси Z - вверх по местной вертикали, следовательно где /с2.

Тогда

то есть

Откуда

Мы получим уравнение статики, которое описывает приближенный баланс между силой вертикального градиента давления и силой тяжести и относится к теории неподвижной жидкости.

В самом общем случае оно не имеет решения, так как если плотность меняется произвольным образом, то нет возможности уравновесить силы. Тогда в атмосфере могут возникнуть разные конвекционные потоки.

Уравнение – уравнение статики – указывает на то, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем больше плотность воздуха. Плотность больше в нижних слоях атмосферы, следовательно, в нижних слоях воздуха давление убывает быстрее.

**3.4. Уравнение притока тепла в форме первого начала термодинамики**

В атмосфере, как в материальной среде, имеет место закон сохранения энергии [4, 15, 16]. Он утверждает, что в замкнутой системе полная энергия системы остается постоянной. Замкнутая система – это система, которая энергетически не взаимодействует с другими системами. В замкнутой системе энергия никогда не исчезает и не возникает вновь. Все процессы, которые в ней происходят, могут только превращать один вид энергии в другой. Незамкнутая система – это система, которая подвергается тепловым и механическим воздействиям извне. Закон сохранения энергии отражает тот факт, что всякий приток тепловой энергии к системе, уравновешивается изменением её внутренней энергии и работой, которую производит система против сил давления. Рассмотрим его математическое выражение. Элементарный объём воздуха является незамкнутой системой. Основными видами энергии в расчёте на единицу массы являются:

кинетическая энергия:

гравитационная энергия:

внутренняя энергия, которая является характеристикой средней кинетической энергии движения молекул:

где - удельная теплоемкость влажного воздуха при постоянном объёме;

энергия фазовых переходов воды:

где - удельная теплота парообразования, - массовая доля водяного пара.

В атмосфере важную роль играет лучистая энергия, но та её часть, которая поглощается атмосферой и переходит во внутреннюю. А излучающий газ теряет часть своей энергии. Под полной энергией системы понимается кинетическая, потенциальная и внутренняя энергии. Внутренняя энергия – это кинетическая и потенциальная энергия молекул, образующих систему, которая зависит от температуры, давления и объёма.

Первый закон термодинамики гласит: изменение полной энергии системы слагается из изменения количества тепла, содержащегося в системе и из затрат энергии системы на производимую работу. Поставим задачу следующим образом. Пусть единица массы занимает объем имеет температуру и обладает запасом внутренней энергии . Получив некоторое количество тепла , температура единицы массы изменится на внутренняя энергия увеличиться на . При нагревании воздух расширяется, объём увеличивается на , элементарная масса совершает работу которая идёт на преодоление внешнего давления и которая пропорциональна приращению объёма

Подведенное к единице массы тепло будет израсходовано на увеличение внутренней энергии и на работу которую совершает воздух, преодолевая давление:

Сухой и влажный ненасыщенный воздух можно рассматривать как идеальный газ, внутренняя энергия которого пропорциональна абсолютной температуре:

Поэтому

где (

Работа расширения зависит от величины внешнего давления и от приращения удельного объёма:

где – тепловой эквивалент работы, равный 0,239 .

Тогда

Для практических расчетов удобнее, чтобы в правую часть этого уравнения входили измеряемые величины, а изменение объёма газа рассчитать невозможно. Воспользуемся уравнением состояния в виде

и продифференцируем его:

Отсюда

Подставим это выражение в

или

При постоянном давлении , а так как обычно мы рассматриваем изменение метеорологических величин на изобарической поверхности, где , то

С другой стороны, для изобарического процесса, при постоянном давлении количества тепла определятся формулой:

где – удельная теплоемкость при постоянном давлении, равная

 (

Тогда из имеем

Так как , , то подставив в , получим

Воспользовавшись уравнением состояния

имеем

В таком виде уравнение притока тепла в форме первого начало термодинамики используется для решения ряда задач теоретической метеорологии.

Если рассматривать изменение со временем составляющих уравнения , то уравнение для первого начала термодинамики приобретает следующий вид:

**3.5. Уравнение движения в форме Навье и Навье-Стокса**

Уравнения движения для атмосферы отражают второй закон Ньютона. Второй закон Ньютона утверждает, что изменение количества движения тела за единицу времени равно равнодействующей сил, приложенных к данному телу и происходит в направлении этой равнодействующей. Уравнения движения связывают ускорение в данном направлении с компонентами сил, действующих в том же направлении [4, 15, 16, 17, 18].

Так как в атмосфере имеет место гипотеза сплошности, то функции будем считать непрерывными, а силы будем рассматривать на единицу массы.

Уравнение движения в самом общем виде в векторной форме можно представить следующим уравнением:

то есть ускорение движущейся частицы воздуха уравновешивается равнодействующей силы тяжести, силы барического градиента, силы Кориолиса и сил вязкости.

В правой локальной декартовой системе координат его можно заменить тремя скалярными уравнениями.

Принимая во внимание, что все силы представляют собой векторы, сила тяжести определяется формулой:

сила барического градиента:

сила Кориолиса:

=

где – угловая скорость вращения Земли;

сила вязкости представляет собой тензор вида:

;

а – вектор скорости:

Тогда соответствующие компоненты вектора ускорения, которые уравновешиваются равнодействующей компонентов сил, будут представлены уравнениями:

Уравнения в форме с членами, содержащими вязкие напряжения , называют уравнениями Навье.

Стокс записал эти уравнения по-другому, используя закон «двух третей»:

По гипотезе Стокса коэффициент пропорциональности между касательным напряжением и соответствующей деформацией зависит от плотности и вязкости жидкости, для которого было принято выражение , где - кинематический коэффициент вязкости. Нормальные вязкие напряжения могут вызвать растяжение или сжатие жидких линий, которое может быть с деформацией. Деформация связана со скоростью деформации. В результате нормальные напряжения могут привести к изменению всего объёма жидкости или газа. Так как скорости деформации пропорциональны вязким напряжениям, то для нормальных составляющих вязких напряжений имеем следующие выражения:

Касательные напряжения определяются формулами:

так как тензор вязких напряжений – симметричный тензор второго порядка.

Запишем составляющие вязких напряжений для - компоненты вектора скорости в уравнении Навье:

Как следует из первого уравнения (3.5.2), продифференцируем первое выражение из (3.5.5) по , второе – по и третье по , считая и постоянными. Затем сложим полученное, сократив на . Получим следующее выражение:

Аналогично были получены уравнения для и – составляющих вектора скорости.

В результате 3 уравнения движения в форме Навье-Стокса имеют вид:

или

Мы получили уравнения движения на вращающейся Земле, отнесенные к прямоугольной правовращающейся системе координат. Эти уравнения описывают движение ламинарного вязкого потока жидкости или газа.

**3.6.1. Уравнение неразрывности**

Уравнение неразрывности называют также уравнением сплошности. Это частная форма общего закона сохранения массы, установленного ещё М.В. Ломоносовым для сплошной среды. Масса не может исчезать или возникать сама по себе, и полный баланс массы характеризует приток или отток, т.е. изменение массы внутри рассматриваемого объёма.

При изучении движения жидкости или газа нельзя отрывать рассмотрение распределения скоростей от распределения масс, ибо при движении некоторого объема жидкости или газа распределение масс внутри этого объёма со временем будет меняться. При этом считается, что при движении некоторого объёма могут изменяться величина и форма объема, а масса за все время движения остаётся неизменной.

Уравнение неразрывности устанавливает связь между изменением плотности и распределением скоростей в пространстве и отражает необходимость уравновешивания любого изменения плотности соответствующим изменением массы [4, 15, 16, 17, 18].

Рассмотрим элементарную массу воздуха , заполняющую элементарный объём . Тогда закон сохранения массы при её движении можно выразить соотношениями:

Тогда элементарная масса не изменяется со временем, ибо производная от постоянной равна нулю:

Элементарную массу можно выразить через плотности:

где – плотность, – элементарная масса, – элементарный объём.

Тогда для элементарной массы через промежуток времени должно выполнятся:

Рассмотрим изменение массы жидкости или газа при прохождении её через бесконечно малый воздушный параллелепипед, т.е. определим разность между притоком через исходные грани и оттоком через соответствующие противоположные грани (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Изменение массы жидкости или газа при прохождении её через бесконечно малый воздушный параллелепипед

За положительное принимается направление движения, совпадающее с положительным направлением осей декартовой системы координат.

Через грань a1, b1, c1, d1 вдоль оси X втекает масса, равная а через грань a, b, c, d вытекает Иными словами, должно вытекать воздуха столько же, сколько вошло в объём с учетом изменения массы воздуха по пути перемещения через элементарный параллелепипед вдоль оси *X*.

Через грань a, b, b1, a1, вдоль оси Y втекает масса, равная а через грань d, c, c1, d1 вытекает

Через грань b, b1, c1, c вдоль оси Z втекает масса, равная а через грань a, a1, d1,d, вытекает

В результате разность между притоком и оттоком массы будет обусловливать изменение плотности воздуха в элементарном параллелепипеде на .

Тогда разность между притоком и оттоком массы в неподвижной точке пространства будет равна:

Тогда

Мы получили уравнение неразрывности.

**3.6.2. Различные виды уравнения неразрывности**

Продифференцируем произведения в уравнении неразрывности:

 индивидуальная производная дивергенция скорости

Тогда получим

Это означает, что рост или падение плотности в движущейся массе воздуха должно быть сбалансировано притоком или оттоком массы.

Можно определить изменение массы в локальной неподвижной точке пространства:

Уравнение неразрывности можно записать так:

Это уравнение неразрывности в форме Эйлера. Можно это уравнение представить через удельный объём

Таким образом, имеем:

Из (3.6.2.3) имеем, что при для несжимаемой жидкости получим уравнение

.

или

Рассмотрим ещё одну форму уравнения неразрывности, исходя из уравнения (3.6.2.1):

разделим это уравнение на :

воспользуемся уравнением состояния:

продифференцируем это выражение:

Можно раскрыть полные производные, умножив на *P*:

**3.7. Уравнения переноса влаги, переноса примесей**

Атмосферный воздух можно считать смесью сухого воздуха и водяного пара. Закон сохранения массы справедлив не только для полной массы воздуха, но и для каждой из компонент смеси в отдельности [4, 14, 15, 16, 17, 18]. Можно получить соотношение, аналогичное уравнению неразрывности, для переноса влаги. Полная масса влаги может находиться в любом агрегатном состоянии, и фазовые переходы воды вызывают некоторые особенности для уравнения баланса влаги, которые необходимо учитывать в некоторых задачах. Необходимо принимать во внимание следующее. Во-первых, должна сохраняться и переноситься воздухом полная масса влаги, так как вода может находиться в любых агрегатных состояниях. Во-вторых, средняя скорость движения капель и ледяных кристаллов может отличаться от скорости самого воздуха. Могут наблюдаться следующие ситуации. Мельчайшие частички полностью увлекаются воздушным потоком, а для более крупных необходимо учитывать скорость гравитационного оседания и вызванный этим процессом приток влаги к единице массы. Возможна ситуация, когда крупные капли не оседают из более высоких слоев, а образуются в данном объёме и оседают в нижний слой.

Тогда наблюдается отток из рассматриваемого слоя. В другой ситуации крупные капли оседают из верхних слоев, тогда в рассматриваемом слое они могут дробиться, а иногда и испаряться. Оседание прекращается и имеет место приток влаги. В-третьих, водяной пар, капли и кристаллики льда переносятся не только средним потоком, но и отдельным вихрями и скоплениями молекул. Тогда возникает диффузный приток влаги. Из-за хаотического движения водяной пар перемещается из слоя в слой. Из слоя с высокой концентрацией молекул уходит больше молекул, чем приходит, и возникает диффузный отток. А если в слой приходит больше молекул, чем уходит, возникает диффузный приток. В наиболее общем виде с учетом массовой доли водяного пара уравнение переноса влаги имеет следующий вид:

где – скорость изменения количества водяного пара в единице объёма (чаще всего за счёт конденсации и испарения).

Уравнение притока влаги, находящейся во всех агрегатных состояниях с учетом влагосодержания будет:

где – влагосодержание воздуха, равное , здесь – плотность водяного пара, – плотность капельной воды, – плотность льда, – плотность влажного воздуха, – скорость изменения влаги за счет гравитации, - скорость изменения влаги за счет молекулярной диффузии. Таким образом, изменение влагосодержания движующейся частицы воздуха обусловлено скоростью изменения влагосодержания за счёт гравитации и за счет молекулярной диффузии. А.А. Киселев предлагает для уравнения переноса влаги следующии вид:

где - коэффициент молекулярной диффузии, – конденсирующаяся или сублимирующаяся масса водяного пара.

Если пренебречь молекулярной диффузией и учесть турбулентную, то уравнение будет:

где – коэффициент турбулентности. Отсюда следует, что изменение массовой доли водяного пара уравновешивается турбулентностью и конденсацией или испарением.

Для оценки перноса примесей имеем следующее уравнение:

где – скорость изменения количества примесей в единице объёма.

Изменение примесей движущейся частицы воздуха уравновешивается скоростью изменения количества примесей в единице объёма. Это уравнение используется при решении задач загрязнения атмосферы.

**3.8. Система уравнений гидротермодинамики для нетурбулентной вязкой атмосферы в форме Навье**

Основная система уравнений гидротермодинамики характеризует движение ламинарного вязкого потока жидкости или газа; уравнения движения отражают второй закон Ньютона или закон сохранения импульса или количества движения [4, 14, 15, 16, 17, 18]. Их можно записать в форме Навье или Навье-Стокса. В первом случае система уравнений выглядит следующим образом:

Эти уравнения отражают тот факт, что ускорения движущейся частицы воздуха в ламинарном вязком потоке уравновешивается равнодействующей силы тяжести, силы барического градиента, силы Кориолиса и силы вязкости.

Вместо третьего уравнений во многих задачах динамической метеорологии и численных методах прогноза погоды используют уравнение статики:

или

Это уравнение указывает нам на то, давление с высотой убывает тем быстрее, чем больше плотность воздуха.

Уравнение неразрывности отражает закон сохранения массы:

Которое можно записать и в таком виде:

.

Для несжимаемой жидкости оно приобретает форму .

Оно отражает тот факт, что локальный рост или падение плотности должно быть сбалансировано притоком или оттоком массы.

Следующее уравнение – уравнение притока тепла – отражает закон сохранения энергии, который мы рассматриваем в форме первого начала термодинамики:

Оно отражает то, что для идеального газа всякий приток тепловой энергии к системе должен быть сбалансирован изменением её внутренней энергии и работой, которую совершает система против сил давления, т.е. работой расширения или сжатия.

Следующими уравнениями в системе уравнений гидротермодинамики являются уравнения переноса влаги и переноса примесей, которые имеют следующий вид:

где – массовая доля водяного пара; –количество примесей; - скорость изменения количества водяного пара в единице объёма; - скорость изменения количества примесей в единице объёма.

Ещё одно уравнение используется для решения системы уравнений гидротермодинамики – это уравнение состояния идеального газа, которое имеет вид

или

которое отражает тот факт, что изменение параметров идеального газа протекает по строгой зависимости так, что частное от деления давления на произведение плотности на температуру остаётся величиной постоянной.

Мы получили основную систему уравнений динамики и термодинамики атмосферы. Строго говоря, эта система не замкнута, т.е. не решаема, так как содержит число неизвестных, которое больше числа уравнений. Это , а также внешний приток тепла, фазовый приток тепла (внутренний), приток водяного пара и примесей. Эти характеристики требуют дополнительных уравнений. В дальнейшем будут получены уравнения, учитывающие турбулентное трение и турбулентные притоки тепла и влаги. Представляется, что добавление все новых и новых уравнений не имеет конца.

В то же время во многих атмосферных процессах притоки тепла так малы, что ими можно пренебречь или определить их очень грубо. В таком случае первые 6 уравнений могут образовать замкнутую систему. А последние уравнения решаются независимо при условии какого-то дополнительного предположения относительно притока влаги.

**3.9. Система уравнений гидротермодинамики в форме Навье-Стокса**

В этом случае изменяются только уравнения движения, которые имеют вид:

или

Остальные уравнений остаются без изменений.

Полная система уравнений гидротермодинамики атмосферы будет иметь вид:

**Контрольные вопросы**

1. Приведите уравнения состояния для сухого и влажного воздуха.
2. Выведите уравнение статики.
3. Приведите уравнение притока тепла в форме первого начала термодинамики.
4. Приведите уравнения движения в форме Навье.
5. Приведите уравнения движения в форме Навье-Стокса.
6. Запишите уравнение неразрывности а) через индивидуальную производную; б) оцените изменение массы в локальной неподвижной точке пространства; в) приведите уравнение неразрывности в форме Эйлера.
7. Приведите уравнение переноса влаги а) в наиболее общем виде; б) с учетом молекулярной диффузии и конденсации водяного пара; в) с учетом турбулентной диффузии и конденсации (или испарения).
8. Приведите уравнение переноса примесей.
9. Приведите систему уравнений гидротермодинамики атмосферы в форме Навье.
10. Приведите систему уравнений гидротермодинамики атмосферы в форме Навье-Стокса.

Глава 4. Система уравнений гидротермодинамики для турбулентной атмосферы

4.1 Классификация атмосферных движений

Разнообразие атмосферных процессов и явлений связано с разнообразием внутренние присущих атмосфере пространственных масштабов, каждому из которых отвечает свой круг физических механизмов и явлений. Для земной атмосферы характерны процессы с широким диапазоном пространственных и временных масштабов. Пространственные масштабы определяются размерами или длиной волны возмущений, а временные – временем их существования или периодом колебаний. В атмосфере одновременно имеет место широкий спектр атмосферных движений от мелкомасштабной турбулентности с размерами возмущений от 10-3 м до движений макромасштаба (зональный поток, струйные течения) с горизонтальными размерами порядка 107 м.

1. К процессам макрометеорологического масштаба относятся движения планетарного и синоптического масштабов. Макромасштабные или крупномасштабные процессы характеризуются горизонтальными размерами и длинами волн от нескольких сотен километров до тысяч километров и временем жизни до нескольких суток.
2. Мезомасштабные процессы характеризуется горизонтальными размерами от нескольких сотен метров до нескольких сотен километров и временем жизни от нескольких минут до нескольких часов.
3. Процессы микрометеорологического масштаба – это так называемая область мелкомасштабной турбулентности. Микромасштабные процессы – это процессы с горизонтальными размерами от нескольких сантиметров до нескольких сотен метров и временем жизни от нескольких секунд до нескольких минут.

4.2 Понятие о атмосферной турбулентности

Движение жидкостей и газов подразделяется на ламинарное и турбулентное. Если движение жидкости происходит упорядоченно в виде не перемешивающихся между собой струй, то такое движение называется ламинарным. При сравнительно малых скоростях течения отдельные случайные возмущения потока под влиянием вязкости затухают и течение сохраняет ламинарный характер.

При скорости потока, превышающей некоторое критическое значение, зависящее от физических свойств данной жидкости, отдельные случайные возмущения потока не затухают, а развиваются. При этом струи жидкости перемешиваются, разбиваются на множество вихрей, совершающих беспорядочное движение на фоне общего переноса, в результате этого ламинарное течение теряет устойчивость и приобретает турбулентный характер.

Турбулентным называется такое движение, характеристики которого нерегулярно и беспорядочно изменяются во времени и в пространстве при неизменных внешних условиях. Именно случайный характер изменения па­раметров является главной особенностью турбулентных течений, отличаю­щий их от плавных, ламинарных движений, свойства которых в любой мо­мент времени однозначно определяются внешними условиями.

При турбулентных движениях воздушные частицы совершают неустановившиеся беспорядочные перемещения по сложным траекториям. В атмосфере турбулентные движения характеризуются наличием вихрей разных размеров, перемещающихся с различными скоростями в общем среднем потоке. Для турбулентного движения характерны резкие беспорядочные колебания скорости, давления и плотности, которые называются пульсациями или флуктуациями.

Характерной чертой турбулентных процессов, происходящих в реальных жидкостях и газах, является турбулентный обмен масс данной жидкости или газа и связанное с ним перемешивание. В реальных жидкостях зарождающиеся элементы турбулентности, проникая из слоя в слой, с течением времени перемешиваются с окружающей средой, что сопровождается турбулентной вязкостью, диффузией и теплопроводностью.

Атмосферные движения, как правило, носят турбулентный характер, что наиболее резко проявляется в порывистости ветра. О турбулентном характере атмосферных движений свидетельствуют записи изменений во времени и в пространстве метеорологических величин (скорости, температуры, давления, влажности и др.), полученные с помо­щью специальной малоинерционной аппаратуры, а также наблюдения за распространением дыма от промышленных источников.

Атмосферные движения не являются единственным примером турбу­лентных течений. Большинство течений, встречающихся в природе и техни­ке, оказываются турбулентными.

Отличительными чертами атмосферной турбулентности являются:

1. многомасштабность;
2. существенное влияние стратификации.

4.3. Возникновение турбулентности

Механизм турбулентности является своего рода регулятором атмосферных процессов, сглаживающим резкие контрасты в распределении скорости ветра, температуры, влажности, примеси. В реальных условиях турбулентное состояние атмосферы является суммарным проявлением взаимодействия различных факторов, приводящих к потере устойчивости ламинарного состояния потока: это резкие изменения во времени и пространстве полей ветра и температуры воздуха, неравномерность нагрева и трение о подстилающую поверхность, неоднородность рельефа. *Причиной* же возникновения турбулентности атмосферы является малая вязкость атмосферного воздуха и неравномерность притока и распределения энергии в пространстве и во времени. Условии эволюции атмосферных возмущений зависят также от параметров возмущений, т.е. их пространственных размеров, интенсивности и скорости распространения. Источники возмущения могут быть как временными, так и постоянными.

Ламинарные и турбулентные течения представляют собой два вида движений, при определенных условиях, переходящих одно в другое, со свойствами, которые существенно отличаются. Различия между ними про­являются в целом ряде процессов, имеющих большое практическое и науч­ное значение.

При турбулентном режиме воздействие потока на обтекаемые жид­костью или газом тела оказывается значительно большим, чем при ламинар­ном. Важным также является то, что в турбулентных потоках гораздо интен­сивнее происходит диффузия тепла и примесей. Вследствие этого определе­ние условий перехода ламинарного режима в турбулентный оказывается очень важным для решения многих прикладных задач.

Выяснение механизма возникновения турбулентности должно спо­собствовать пониманию природы турбулентного движения, поэтому изуче­ние этого вопроса представляется интересным и в плане фундаментальных метеорологических исследований.

Критерий возникновения турбулентности был получен в 1883 г. английским фи­зиком О. Рейнольдсом при изучении движений жид­кости в стеклянных трубах. Он показал, что ламинарное движение переходит в турбулентное тогда, когда безразмерное число

которое впоследствии было названо его именем, становится больше некото­рого критического значения .

Здесь *и* и *L* - соответственно характерные масштабы скорости и длины, ν *-* кинематический коэффициент вязкости:

где μ - ди­намический коэффициент вязкости, ρ - плотность воздуха.

Число Рейнольдса характеризует относительную роль сил инерции и молекулярной вязкости в динамике течения. Это следует из оценки по­рядков величин соответствующих членов в уравнении Навье-Стокса.

Силы инерции, роль которых состоит в пространственном переносе ко­личества движения, способствуют возникновению неоднородностей в пото­ке. Силы вязкости, наоборот, сглаживают возникающие неоднородности.

При малых числах преобладают силы вязкости, стремящиеся выравнить скорости в соседних точках, т.е. сгладить мелкие неоднородности течения и движение яв­ляется ламинарным. Большие значения числа говорят о преобладании сил инерции, приводящих к сближению объемов воздуха с разной скоростью движения и появления больших градиентов. Движение становится турбу­лентным, когда число достигает некоторого критического значения.

Критические значения были установлены экспериментально для различных типов турбулентных течений. Было обнаружено, что величина , во-первых, существенно зависит от степени возмущенности ламинар­ного потока — начальной турбулизации потока, во-вторых, она тем мень­ше, чем больше начальная турбулизация. Согласно экспериментальным исследованиям в аэродинамических трубах =2500÷5000.

 Число применимо для оценки возможности турбулизации потока только в тех случаях, когда можно пренебречь влиянием сил плавучести, а это возможно либо в очень тонких слоях, либо при безразличной стратификации атмосферы. Поэтому число в реальной атмосфере не всегда пригодна для описания причин возникновения турбулентности.

Л.Ф. Ричардсоном был предложен другой критерий устойчивости потока для термически стратифицированной среды, так называемое число Ричардсона . Число определяет отношение работы архимедовых сил к работе сил инерции или по-другому: число , входящее в уравнение кинетической энергии турбулентности, характеризует рост или уменьшение этой энергии в зависимости от значения . Оно определяется следующим образом:

где . Или

Число при устойчивой стратификации положительное, при неустойчивой стратификации отрицательное, при безразличной стратификации равно нулю. Так как

то

где .

При устойчивой стратификации силы плавучести противодействуют развитию турбулентности, при безразличной стратификации - не влияют на развитие турбулентных режимов, при неустойчивой стратификации силы плавучести способствуют развитию и возникновению турбулентности. Динамическая неустойчивость потока будет тем больше, чем больше вертикальный сдвиг ветра. Теоретически установлено, что возникновение турбулентности в каком-либо слое вследствие гидродинамической неустойчивости возможно при значении числа , а для сохранения турбулентного режима достаточно число . Однако, число характеризует лишь степень неустойчивости основного потока и не учитывает влияние возмущений, вызванных дополнительными источниками. Эти возмущения приводят к потере устойчивости потока и образованию турбулентности при значениях больше критического. Поэтому в реальных условиях не всегда можно назвать значение при котором исключалась бы возникновение турбулентных зон. Как уже указывалось, в атмосфере возникновение турбулентности связано с действием целого рода факторов.

Условно турбулентность в зависимости от причин ее возникновения можно разделить на три вида: динамическая (механическая), термическая (конвективная) и орографическая. Динамическая турбулентность обусловливается большими вертикальными и горизонтальными сдвигами ветра в атмосфере. Термическая турбулентность является следствием развития конвективных движений при неустойчивой термической стратификации атмосферы и результатом неравномерного прогрева подстилающей поверхности. Орографическая турбулентность вызвана деформацией воздушного потока при обтекании горного препятствия.

4.4. Принципы осреднения уравнении гидротермодинамики атмосферы

В связи с тем, что в атмосфере одновременно существуют системы движений разного масштаба, встает вопрос об их описании. Так, классические уравнения гидротермодинамики, записанные для мгновенных метеорологических величин, справедливы для масштабов , заключенных между молекулярным масштабом и размером наименьших турбулентных вихрей. Эти уравнения описывают движения ламинарного вязкого потока, т.е. линии тока гладкие и квазипараллельные. Эти уравнения можно использовать для мгновенных значений неосредненных величин (скорости, плотности, давления, температуры, влажности). Непосредственно эти уравнения в атмосфере можно использовать только в вязком подслое воздуха вблизи подстилающей поверхности, причем толщиной, не превышающей нескольких миллиметров. Классические уравнения гидротермодинамики непосредственно для атмосферы не применимы, так как движение и процессы в атмосфере почти всегда носят турбулентный характер, поэтому практически невозможно определить мгновенные скорости переноса и значения метеорологических величин в любой заданной токе пространства и времени. Можно найти не мгновенные значения, а осреднённые значения метеорологических величин, т.е. можно найти статистические характеристики метеорологических величин. Обычно, следуя Рейнольдсу, движение разделяют на средние или основное и турбулентное или пульсационное:

Средние величины будут иметь черту сверху, а отклонение – штрих. В векторной форме:

или

, ,

Для определения среднего потока необходимо выполнить осреднение по статистическому множеству (ансамблю), т.е. по достаточно большому числу независимых реализаций движений при идентичных внешних условиях. Такого рода процедуру осуществить трудно, а часто и невозможно реализовать технически, т.е. практически невозможно осуществить множество опытов (измерений) при неизменных внешних условиях. В связи с этим осреднение по статистическому ансамблю или множеству заменяется в действительности по времени (или в пространстве).

Будем предполагать, что течение является статистически стационарным так, что средние по ансамблю не меняются во времени и могут быть заменены средними по времени:

,

Причем средние по времени определяются в какой-либо одной точке пространства, это так называемые эйлеровые средние значения. Ограничения, которые накладывается сделанным предположением (4.4.3), часто называют эргодической гипотезой. Как она влияет на исследуемые процессы до сих пор до конца не исследовано. Для статистически стационарного процесса средние по ансамблю совпадают со средним во времени, тогда средняя по времени равна:

где *T* – период возмущения.

В общем случае поля метеорологических величин не являются статистически стационарными (эргодическими) так как в большинстве случаев получаемые при осреднении величины зависят от времени. Поэтому замена средних вышеуказанным образом служит лишь приближением к реальной ситуации.

На практике в выражении (4.4.4) вместо периода времени *Т*, стремящегося к бесконечности выбирается некоторый конечный интервал осреднения, удовлетворяющий следующему неравенству:

 .

В неравенстве (4.4.5) – характерное время изменения осреднённого поля, – характерный период турбулентных пульсаций.

Рейнольдсом были получены постулаты (операции) осреднения, которые использовались для вывода осредненных уравнений гидротермодинамики атмосферы. Постулаты статистической теории турбулентности записываются в виде:

1. Среднее значение алгебраической суммы точно равно алгебраической сумме средних значений слагаемых, т. е.
2. Среднее значение производной функции точно равно производной от ее среднего значения, если производная от этой функции возможна, т. е.

или

, , .

1. Выполнимы следующие приближенные соотношения: =
2. Средние значения пульсации равно нулю: , --=0.
3. ,

.

1. , = =

Если мгновенные величины в системе классических уравнений гидротермодинамики атмосферы заменить через суммы средней и пульсационной величины, затем полученное уравнение осреднить, используя постулаты осреднения, то в результате можно получить осредненные уравнения гидротермодинамики атмосферы.

**4.5. Осредненные уравнения гидротермодинамики атмосферы**

В случае ламинарного режима система уравнений гидротермодинамики позволяет однозначно определить значения всех характеристик в любой мо­мент времени по их начальным значениям при соответствующих граничных условиях. При турбулентном режиме начальные значения соответствующих характеристик также в принципе определяют их будущие значения. Однако эти будущие значения зависят от неконтролируемых возмущений началь­ных и граничных условий, задать которые точно невозможно, поэтому ин­тегрирование соответствующих дифференциальных уравнений, описываю­щих мгновенные реализации турбулентных полей, практически оказывается невыполнимым. Могут быть заданы лишь распределения вероятностей этих полей, а не их точные значения. Поэтому в случае турбулентных потоков уравнения гидротермодинамики атмосферы можно использовать только для исследования соответствующих распределений вероятности или определяе­мых этими распределениями осредненных характеристик случайных метео­рологических полей.

Если движение частиц турбулентного потока и удовлетворяет уравнениям движения, неразрывности н притока тепла, то для описания этих движений потребовалось настолько зна­чительное усложнение уравнений, что отыскание решений их было бы равносильно отысканию траекторий отдельных мо­лекул, движущихся среди, других молекул. Несомненно, и то, что по отношению потока в целом такое движение частиц бу­дет являться случайным. Изучение таких случайных движе­ний, конечно, не может раскрыть картины общего характера движения. Сказанное приводит к необходимости, начинать изучение турбулентного движения с рассмотрения свойств элементов осредненного движения или, как его называют, сглаженного во времени движения. В то же время из рассмотрения нельзя исключать и случайные скорости отдельных частиц, т. е. отдельные колебания-флюктуации, изменения, связанные с поперечными размерами и, следовательно, с пе­реносом количества движения. Это приводит к убеждению в том, что среднее значение пульсирующей величины является наиболее важным параметром, которое характеризует турбулентное движение. Таким образом, вместо получения точной математической картины для каждой точки пространства того, что происходит в турбулентном движении, и для каж­дого момента времени применяется метод суммарного стати­стического описания.

Используя указанные свойства осреднения, преобразуем уравнения движения так, чтобы они выполнялись для осредненных (сглаженных) величин. Все операции будем вести на одном уравнении - в проекциях на ось абсцисс, а затем по аналогии запишем систему уравнений.

Первое уравнение движения для потока запишется так:

где, составляющая силы вязкости.

Умножим уравнение неразрывности несжимаемой жидкости

на и после сложения его с первым уравнением движения применим операцию осреднения и получим:

Используем постулаты осреднения, согласно которым имеем:

но

поэтому

По аналогии также получим, что:

+

Здесь последние слагаемые в правых частях отличны от нуля. Поэтому к величинам напряжения () вследствие переноса некоторого количества потока, обусловленного неу­порядоченным, вихревым движением отдельных масс, приба­вятся новые члены. Однако при дифференцировании пер­вые слагаемые в новых членах обратятся в нуль. Поэтому окончательно получим:

Здесь кроме напряжений появились дополнительные величины выражающие суммарный эф­фект всех беспорядочных отклонений от средних величин (введены в рассмотрение Рейнольдсом). Отметим, что введением величин *,* называемых турбулентными напря­жениями (или добавочными напряжениями), проводится ана­логия с кинетической теорией газов, в которой многие свой­ства газов объясняются суммарным эффектом молекулярных движений.

Если обозначить:

то после аналогичных преобразований со вторым и третьим уравнениями движения и введения принятых обозначений си­стема уравнений сглаженного движения запишется в виде:

К полученным уравнениям следует добавить уравнение неразрывности, уравнение притока тепла, уравнения состояния, переноса влаги и примесей.

Вместо третьего уравнения движения в некоторых случаях можно использовать уравнение статики:

Уравнение неразрывности:

Уравнение притока тепла:

Уравнение состояния:

Уравнение переноса влаги:

Уравнение переноса примесей:

где – составляющие тензора турбулентных напряжений:

;

Все члены с нижним индексом «Т» означают турбулентные составляющие: .

Можно эти уравнения записать в следующем виде с использованием приближения Буссинеска, т.е. считая атмосферу несжимаемой

Уравнения движения:

Уравнение статики:

Уравнение неразрывности:

Уравнение притока тепла:

Уравнение состояния:

Уравнение переноса влаги:

где θ – потенциальная температура.

где – коэффициент турбулентной диффузии притоков тепла; – коэффициент турбулентной диффузии притоков влаги.

Полученная система дифференциальных уравнений (наи­более распространенная форма) для сглаженного движения оказывается нелинейной. Для полного решения ее необходи­мо иметь шесть новых функций, выражающих величины со­ставляющих турбулентного напряжения. Как образно выра­зился Л. Ф. Ричардсон, такова «расплата» за сглаживание. В самом деле, уравнение неразрывности и состояния совместно с тремя уравнениями движения дает пять уравнений, с по­мощью которых надлежит определить 11 неизвестных функ­ций *(, , , ,* и шесть добавочных напряжений). Таким образом, для замыкания системы нужно либо строить допол­нительно, шесть новых уравнений, либо необходимо знание не­которых закономерностей флюктуационного движения. Пока известен второй путь, для чего рассматривают аналоги между турбулентным, и молекулярным напряжениями, т. е. осущест­вляют линеаризацию системы с помощью той или иной полуэмпирической теории.

**Контрольные вопросы**

1. На какие классы подразделяются атмосферные движения по масштабам движения?
2. Какие факторы приводят к турбулентности?
3. Что является важным следствием турбулентности?
4. Что положено в основу статистической теории турбулентности?
5. Чем отличается система уравнений турбулентной атмосферы от системы уравнений для нетурбулентной атмосферы?

**Глава 5. Задачи для практических занятий**

**5.1. Вычисление производных с помощью конечных разностей**

Определение характеристик метеорологических полей сводится к вычислению производных по направлению координатных осей от данной скалярной величины или от составляющих вектора. Поля метеорологических величин задаются графически с помощью карт их распределения дискретно в узлах сетки. В случае дискретного задания метеорологических величин для определения производных применяются методы численного дифференцирования. Производная в данной точке поля, согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, заменяется отношением конечных разностей и вычисляется её приближённое значение по формулам [4, 19, 20]:

где , - координаты точки в декартовой системе координат на плоскости, - значение метеорологической величины в точке.

**Задача 1.**

Получить формулы для вычисления первых производных с помощью центральных разностей по данным в четырёх точках квадратной сетки с шагом r (рис.5.1):

**Задача 2.**

Получить формулы для вычисления первых производных с помощью односторонних разностей (вперёд) по данным в четырёх точках квадратной сетки с шагом r (рис. 5.1):



Рис. 5.1

**Задача 3.**

Получить формулы для вычисления первых производных с помощью центральных разностей для шахматной сетки, состоящей из восьми точек с шагом r (рис. 5.2):



Рис. 5.2

**Задача 4.**

Получить формулы для вычисления первых производных с помощью односторонних разностей (вперёд) для шахматной сетки, состоящей из восьми точек с шагом r (рис. 5.2):

**Задача 5.**

Получить формулы для вычисления первых производных с помощью центральных разностей для следующей сетки точек с радиусом круга, равным r (рис. 5.3):



Рис. 5.3

**Задача 6.**

Получить формулы для вычисления первых производных с помощью центральных разностей для следующей сетки точек (рис. 5.4):



Рис. 5.4

**Задача 7.**

Получить формулы для вычисления первых производных с помощью односторонних разностей (назад) по данным в четырёх точках квадратной сетки с шагом r (рис. 5.1).

**Задача 8.**

Получить формулы для вычисления вторых производных с помощью односторонних разностей (вперёд) по данным в четырёх точках квадратной сетки с шагом r (рис. 5.1).

**Задача 9.**

Получить формулы для вычисления вторых производных с помощью центральных разностей для квадратной сетки, состоящей из 24-х точек с шагом r (рис. 5.5):



Рис. 5.5

**Задача 10.**

Дан вектор . Определить поток векторного поля через поверхность.

**5.2 Градиент скалярного поля**

Градиентом скалярного поля называют вектор, направленный по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции и численно равный скорости изменения функции по этому направлению. Он рассчитывается по формуле:

. (5.2.1)

Величина градиента равна:

 . (5.2.2)

**Задача 11.**

Даны 2 вектора: постоянный вектор и радиус-вектор точки . Определить градиент скалярного произведения этих векторов.

**Задача 12.**

Определить значение и направление горизонтального градиента давления, если известно, что в широтном направлении его значение изменяется на 3 гПа, а в меридиональном – на 5 гПа на каждые 100 км.

**Задача 13.**

Расстояние между двумя точками, расположенными на одной широте, составляет 600 км. Давление в этих точках отличается на 12 гПа и возрастает в восточном направлении. Изобара 1005 гПа проходит посередине между этими двумя точками и пересекает широтный круг под углом 60°. Определить значение и направление горизонтального градиента давления.

**Задача 14.**

Давление в точках *А, В, С, Д* равноотстоящих от центральной точки и друг от друга, составляют соответственно 1008,3 гПа; 1005,9 гПа; 1004,0 гПа; 1006,5 гПа. Найти величину градиента давления и угол между ним и *ОА*, если а) *ОА* = 400 км; б) *ОА* = 300 км (рис. 5.6):



Рис. 5.6

**Задача 15.**

Пункт А, где давление 993,9 гПа, и пункт В, где давление 997,6 гПа, лежат на одном меридиане. Изобара 995 гПа проходит с северо-запада на юго-восток. Найти горизонтальный градиент давления, если *АВ* = 370 км.

**Задача 16.**

На изобарической поверхности 700 гПа отрезок *АВ* = 480 км образует с изогипсой 296 гПдкм угол 30°. Найти величину градиента геопотенциала, если *НА* = 294 гПдкм, *НВ* = 298 гПдкм.

**Задача 17.**

Вычислить величину и направление горизонтального градиента температуры в центре круга радиусом 500 км, если в восьми точках, равномерно расположенных по окружности (рис.5.3), значения температуры равны: t1 = 16,7°; t2 = 11,1°; t3 = 14,9°; t4 = 21,0°; t5 = 12,8°; t6 = 10,2°; t7 = 19,3°; t8 = 22,4°.

**Задача 18.**

Рассчитать те же характеристики, если точки 5, 6, 7, 8 являются серединами квадрата (рис. 5.4).

**5.3. Дивергенция, вихрь, лапласиан**

С дивергенцией связан приток воздуха (или жидкости) к данной точке или отток его от данной точки. Если дивергенция положительна (Д > 0), то имеется отток воздуха, если дивергенция отрицательна (Д < 0), то наблюдается приток воздуха.

На картах барической топографии при положительной дивергенции линий тока расходятся от точки, а при отрицательной – линии тока сходятся к точке. Горизонтальная (плоская) дивергенция выражается формулой:

(5.3.1)

где – ограничиваемая контуром площадь; – замкнутый контур, лежащий в горизонтальной плоскости; – малый элемент контура; – составляющая вектора скорости ветра по внешней нормали к контуру.

Через составляющие вектора скорости ветра на горизонтальной плоскости и дивергенция D рассчитывается по формуле:

 (5.3.2)

Вертикальная составляющая вихря скорости ветра определяется формулой:

(5.3.3)

где – составляющая вектора скорости ветра по касательной, ориентированной в направлении обхода контура против часовой стрелки. Вертикальная скорость на верхней границе слоя толщиной равна:

Через горизонтальные составляющие вектора ветра и вихрь скорости выражается следующим образом:

. (5.3.4)

Деформации *А* и *В* равны:

; .

Горизонтальный лапласиан скалярного поля определяется формулой:

. (5.3.5)

где - оператор Гамильтона, определяемый выражением:

 (5.3.6)

(Выражение, сообщающее о том, что необходимо произвести операцию вычисления производных называется оператором).

При использовании аппроксимации производных с помощью односторонних разностей лапласиан определяется формулой:

 (5.3.7)

А с помощью центральных разностей для квадратной (шахматной) сетки, состоящей из 24 точек, формулой:

 (5.3.8)

С помощью оператора Гамильтона рассмотренные дифференциальные характеристики записываются следующим образом:

**Задача 19.**

Оценить средние значение лапласиана давления в центре циклонической области, если известно, что изобары, проведенные через 5 гПа, имеют форму концентрических окружностей. Давление в центре циклона Р0 = 1000 гПа, а удаление изобары 1005 гПа от центра составляет 350 км. Какой знак имеет лапласиан в циклоне?

**Задача 20.**

Найти значение лапласиана давления в окрестности максимума Р0 = 995,5 гПа, ограниченного круговой изобарой 990 гПа и диаметром 1000 км. Определить, какой знак имеет лапласиан в антициклоне.

**Задача 21.**

Рассчитать горизонтальный градиент давления в квадратной сетке точек 3×3 с шагом 300 км, если поле давления описывается следующим выражением , и если значения коэффициентов соответственно равны: гПа/км2; гПа/км2;

 гПа/км2; гПа/км; гПа/км; Р0 = 1000 гПа. Рассчитать лапласиан давления.

**Задача 22.**

Рассчитать дивергенцию скорости ветра (в прямолинейном потоке), если в направлении движения скорость возрастает на 3 м/с на каждые 500 км.

**Задача 23.**

Рассчитать дивергенцию скорости ветра, если скорость ветра меняется поперек потока на 5 м/с на каждые 300 км.

**Задача 24.**

Определить средние значение дивергенции скорости в области, ограниченной круговой линией антициклонической кривизны радиусом 1000 км при скорости потока 20 м/с.

**Задача 25.**

Найти средние значение лапласиана давления в окрестности минимума 990,6 гПа, ограниченного изобарой 995 гПа, диаметром 880 км.

**Задача 26.**

Определить горизонтальный градиент и лапласиан давления в точке, где давления Р0 = 1001 гПа, если в окружающих точках, удаленных на расстояние r = 500 км в широтном и меридиональном направлениях давление равно: Р1 = 991 гПа; Р2 = 993 гПа; Р3 = 995 гПа; Р4 = 994 гПа.

**Задача 27**

Найти дивергенцию радиус-вектора r точки.

**Задача 28.**

Выведите формулу для дивергенции скалярного произведения скалярной функции на векторную: .

**Задача 29.**

Определить, чему равно скалярное произведение горизонтальных составляющих вектора ветра на горизонтальную составляющую барического градиента.

**Задача 30.**

Определить механический смысл вихря скорости, определяемого формулой если линейная скорость равна векторному произведению угловой скорости на радиус-вектор точки вращения:

**Задача 31.**

Определить среднее значение дивергенции и вихря скорости в области, ограниченной круговой линией антициклонической кривизны радиусом 500 км при скорости потока 10 м/с.

**Задача 32.**

Определить дивергенцию скорости ветра в окрестности некоторой точки с юго-западным ветром, если известно, что поле ветра безвихревое, модуль ветра не меняется по горизонтали, а широтная компонента скорости ветра возрастает в меридиональном направлении на 2 м/с на каждые 100 км.

**Задача 33.**

Определить величину вихря скорости в прямолинейном потоке, если скорость ветра меняется поперёк потока на 3 м/с на каждые 500 км.

**Задача 34.**

Определить с помощью теоремы Остроградского-Гаусса поток радиус-вектора точки через замкнутую поверхность , ограничивающую произвольный объём

(Теорема Остроградского-Гаусса гласит: поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу от – дивергенции этого вектора – взятому по объёму , ограниченному поверхностью

где – малый элемент поверхности - малый элемент объёма

**Задача 35.**

Определить дивергенцию, вихрь и деформации *А* и *В* скорости ветра по данным, приведенным на рисунке 5.7 при шаге сетки , равном 500 км.



Рис. 5.7

**Задача 36.**

Определить дивергенцию, вихрь и деформации *А* и *В* по данным, приведенным на рисунке 5.8 при шаге сетки , равном 500 км.



Рис. 5.8

**Задача 37.**

Определить вертикальную скорость на верхней границе слоя толщиной 1 км, если в направлении движение скорость ветра возрастает на 2 м/с на 500 км расстояния.

**Задача 38.**

Каков должен быть градиент скорости ветра в циклоне вблизи линии тока с радиусом кривизны 800 км, чтобы движение было безвихревым? Скорость ветра равна 15 м/с.

**5.4 Уравнения гидротермодинамики атмосферы**

Скалярное произведение двух векторов перестановочно. Скалярное произведение одноименных единичных векторов равно единице:

Скалярное произведение разноименных единичных векторов равно нулю:

Векторное произведение двух векторов не перестановочно, при перестановке векторов оно меняет свой знак на противоположный.

Векторное произведение одноименных единичных векторов равно нулю:

Векторное произведение разноименных единичных векторов определяется формулой:

**Задача 39.**

Определить, чему равно векторное произведение полного вектора угловой скорости вращения Земли на полный вектор линейной скорости движения частицы, который равен:

**Задача 40.**

Определить, чему равно выражение где – составляющая вектора скорости вдоль оси , а – горизонтальная линейная скорость, равная

**Задача 41.**

Определить, чему равно скалярное произведение единичного вектора на векторное произведение вида , где – горизонтальная линейная скорость, равная

**Задача 42.**

Определить, чему равно выражение где – составляющая вектора скорости вдоль оси , а – горизонтальная линейная скорость, равная

**Задача 43.**

Определить, чему равно скалярное произведение горизонтальной составляющей линейной скорости на горизонтальную составляющую барического градиента.

**Задача 44.**

Определить горизонтальную дивергенцию и вертикальную составляющую вихря скорости в натуральной системе координат, причём ; - горизонтальная составляющая вектора скорости.

**Задача 45.**

Вывести уравнение движения для – составляющей вектора скорости в форме Навье-Стокса с помощью выражений для составляющих тензора вязких напряжений из уравнения в форме Навье.

**Задача 46.**

Вывести уравнение движения для – составляющей вектора скорости в форме Навье-Стокса с помощью выражений для составляющих тензора вязких напряжений из уравнения в форме Навье.

**Задача 47.**

Вывести уравнение движения для – составляющей вектора скорости в форме Навье-Стокса с помощью выражений для составляющих тензора вязких напряжений из уравнения в форме Навье.

**Задача 48.**

Вывести уравнение неразрывности, определив разность между притоком и оттоком массы жидкости или газа через соответствующие грани параллелепипеда.

**Задача 49.**

Из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости или газа получить выражение для вертикальной скорости

**Задача 50.**

Получить формулу для определения вертикальной составляющей вихря скорости в квазигеостафическом приближении (т.е. с учетом геострафического ветра). Принять во внимание, что параметр Кориолиса и плотность воздуха ρ не зависят от горизонтальных координат.

**Список литературы**

1. Кудрявцев П.С. Курс истории физики. –М.: Просвещение, 1974, 312 С.
2. Собесяк Ришард. Шеренга великих физиков. – Варшава: Наша Ксенгарня, 1969, 175 С.
3. Храмов Ю.А. Физики. Библиографический справочник. –М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983, 299 С.
4. Куликов Г.И. Динамическая метеорология. Учебное пособие. Ч.1. -Пермь: Пермский государственный университет им. А.М. Горького, 1966, 273 С.
5. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. –М.: Терра, 2013, 500 С.
6. Томпсон Ф. Анализ и предсказание погоды численными методами. –М.: Изд-во иностр. лит., 1962, 239 С.
7. Александр Александрович Фридман. В кн. «П.Я. Кочина. Воспоминания». –М.: Наука, 1974, с. 50-57.
8. Николай Евграфович Кочин. В кн. «П.Я. Кочина. Воспоминания». –М.: Наука, 1974, с. 57-63.
9. Кибель Илья Афанасьевич. -3-е изд. –М.: Советская энциклопедия, 1969.
10. Машкович С.А. «И.А. Кибель. К 100-летию со дня рождения» –М.: Семь искусств, №11, 2014.
11. Блинова Екатерина Никитична. -3-е изд. –М.: Советская энциклопедия, 1969.
12. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. –М.: Наука, 1978, 831 С.
13. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. –М.: Наука, 1968, 128 С.
14. Аргучинцев В.К. Динамика атмосферы. Учебное пособие. –Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та. 2006, 130 С.
15. Гандин Л.С., Лайхтман Д.Л., Матвеев Л.Т., Юдин М.И. Основы динамической метеорологии. –Л.: Гидрометеоиздат, 1955, 647 С.
16. Динамическая метеорология /Под ред. Д.Л.Лайхтмана. –Л.: Гидрометеоиздат, 1976, 607 С.
17. Подольская Э.Л. Механика жидкости и газа. Геофизическая гидродинамика. –Санкт-Петербург: Изд-во РГГМУ, 2007, 152 С.
18. Киселёв А.А. Динамическая метеорология. Учебное пособие. –Алматы: Қазақ Университеті, 1999, 101 С.
19. Задачник по динамической метеорологии /Гаврилов А.С. и другие. –Л.: Гидрометеоиздат, 1984, 165 С.
20. Белов П.Н. Сборник упражнений по численным методам прогнозов погоды. –Л.: Гидрометеоиздат, 1980, 136 С.