

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ И ЖЕСТКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А.Б.Кыдырбекулы

Институт механики и машиноведения им. У.А.Джолдасбекова,
050010 Алматы, ул. Курмангазы, 29, e-mail: almatbek@list.ru

Аннотация. Рассматриваются резонансные колебания по основной частоте системы с нелинейно-вязким сопротивлением и жесткой характеристикой. Установлена необходимость уточнения первой зоны неустойчивости основного резонанса для нелинейных систем с нелинейно-вязким сопротивлением. Определена вторая зона неустойчивости основного резонанса. Проведен сравнительный анализ зон.

Ключевые слова: нелинейная система, резонанс, колебания, зона неустойчивости, нелинейно-вязкое сопротивление.

Исследование резонансных режимов и вопросов их устойчивости является одним из основных вопросов динамики механических систем.

В работе исследуется устойчивость резонанса по основной частоте в нелинейных системах с жесткой характеристикой и нелинейно-вязким сопротивлением вида:

$$\ddot{x} + K_1\dot{x} + K_2\dot{x}^2 + \alpha_1x + \alpha_3x^3 = F \cos \Omega t . \quad (1)$$

Нелинейные системы типа (1) находят широкое применение при моделировании движения отдельных, а также связанных элементов конструкций и машин. Они моделируют движение механических систем как с одной степенью свободы, так и упругих систем с распределенными параметрами, имеющих бесконечное число степеней свободы. Для последних многомерные уравнения движения могут быть приведены известными методами механики деформируемых сред (методы разделения переменных, например, прямой метод Бубнова-Галеркина) к уравнениям типа (1).

Нелинейно-вязкое сопротивление имеет место в высокоскоростных механических системах, а также при движении в вязкой среде. Нелинейная характеристика жесткого типа может быть обусловлена геометрической нелинейностью моделей, то есть конечностью деформаций упругих систем [1].

Известно, что исследование резонанса по основной частоте в нелинейных системах дает первое приближение в решении непростой задачи анализа поведения данной системы на частотах, кратных частоте возмущающей силы (суб- и ультрагармонические колебания). Кроме того, уточнение зон неустойчивости основного резонанса (первая, вторая и т.д.) позволяет исследователю еще на стадии изучения основного резонанса судить о возможности появления резонансов по высшим частотам с определением их частот.

В работе [2] был исследован резонанс по основной частоте в нелинейной системе (1) и его первая зона неустойчивости. При этом решение (1) аппроксимировано простой гармоникой в виде:

$$x_0 = r_1 \cos(\Omega t - \varphi_1) . \quad (2)$$

С помощью метода гармонического баланса осуществлялось моделирование амплитудно-частотных характеристик:

$$r_1^2 \left[(-\Omega^2 + \alpha_1 + 0,75\alpha_3 r_1^2)^2 + K_1^2 \Omega^2 \right] = F^2 . \quad (3)$$

При определении зон неустойчивости основного резонанса системы (1) рассматривалась устойчивость решения (2) x_0 по Ляпунову, т.е. задавалось малое возмущение для решения (2):

$$x = x_0 + \delta x \quad (4)$$

и строилось уравнение возмущенного состояния системы (1):

$$\frac{d^2 \delta x}{dt^2} + \left(K_1 + 2K_2 \frac{dx_0}{dt} \right) \frac{d\delta x}{dt} + (\alpha_1 + 3\alpha_3 x_0^2) \delta x = 0, \quad (5)$$

или в общем виде:

$$\frac{d^2 \delta x}{dt^2} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \right)_0 \frac{d\delta x}{dt} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 \delta x = 0, \quad (6)$$

где $\Phi(x, \dot{x})$, символ $()_0$ означает подстановку исследуемого решения $x_0(t)$ и $\dot{x}_0(t)$ после проведения операции дифференцирования.

Устойчивость рассматриваемого решения $x_0(t)$ зависит от характера поведения малого возмущения δx во времени: если все решения возмущенного состояния (4) $\delta x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то решение $x_0(t)$ по определению устойчиво; если величина δx неограниченно растет при $t \rightarrow \infty$, то решение $x_0(t)$ – неустойчиво.

Для анализа уравнения возмущенного состояния (5) вводится новая переменная η , задаваемая как:

$$\delta x = \eta \exp \left(-0,5 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \right)_0 t \right), \quad (7)$$

что приводит к параметрическому уравнению типа Хилла относительно переменной η :

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \eta [\theta_0 + \theta_{1s} \sin \Omega t + \theta_{1c} \cos \Omega t + \theta_{2s} \sin 2\Omega t + \theta_{2c} \cos 2\Omega t] = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \alpha_1^2 + 1,5 \alpha_3 r_1^2 - 0,25 k_1^2 - 0,5 k_2^2 r_1^2 \Omega, \\ \theta_{1s} &= -k_2 r_1 \Omega^2 \sin \varphi_1 + k_1 k_2 r_1 \Omega \cos \varphi_1, \\ \theta_{1c} &= -k_2 r_1 \Omega^2 \cos \varphi_1 - k_1 k_2 r_1 \Omega \sin \varphi_1, \\ \theta_{2s} &= 1,5 \alpha_3 r_1^2 \sin 2\varphi_1 + 0,5 k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \sin 2\varphi_1, \\ \theta_{2c} &= 1,5 \alpha_3 r_1^2 \cos 2\varphi_1 + 0,5 k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \cos 2\varphi_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (8) можно представить как:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta \left[\theta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_{\nu s} \sin \nu \Omega t + \sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_{\nu c} \cos \nu \Omega t \right] = 0. \quad (10)$$

Частным случаем рассматриваемого уравнения (10) является обобщенное уравнение Хилла, известное в литературе как уравнение вида:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta \left[\theta_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \theta_{\nu s} \sin 2\nu\Omega t + 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \theta_{\nu c} \cos 2\nu\Omega t \right] = 0, \quad (11)$$

которое получается путем линеаризации уравнений (8)-(9) при допущении отсутствия нелинейно-вязкого сопротивления ($K_2 = 0 \Rightarrow \theta_{1s} = \theta_{1c} = 0$) и было исследовано автором работы [3] для модели (1) в случае линейно-вязкого сопротивления. Другими словами, рассматриваемая здесь модель обобщает известные в литературе модели, и целью работы является изучение влияния нелинейно-вязкого сопротивления на резонансные явления, происходящие в нелинейной модели.

В соответствии с известной методикой исследование уравнений возмущенного состояния, анализ последнего сводится к решению уравнения типа Хилла (8).

Согласно теории Флоке, частное решение уравнения (8) находится, когда η задается как:

$$\eta = e^{\mu t} \phi(t), \quad (12)$$

где μ – характеристический показатель, а $\phi(t)$ – есть периодическая функция времени, имеющая разложение в ряд Фурье:

$$\phi(t) = \sum_n b_n \cos(n \Omega t - \delta_n). \quad (13)$$

В зависимости от числа составляющих разложения в ряд Фурье функции $\phi(t)$ строятся характеристические определители, задающие границы соответствующих областей неустойчивости рассматриваемого решения. В данном случае – для гармонического решения, характеризующего резонанс по основной частоте.

Получена первая область неустойчивости основного резонанса, когда

$$\phi(t) = b_1 \cos(\Omega t - \delta_1). \quad (14)$$

Границы этой области задаются характеристическим определителем:

$$\Delta_1(\mu) = \begin{vmatrix} \Omega^2 - \mu^2 - \theta_0 - 0,5\theta_{2c} & 2\mu\Omega + 0,5\theta_{2s} \\ 2\mu\Omega - 0,5\theta_{2s}, & \mu^2 - \Omega^2 + \theta_0 - 0,5\theta_{2c} \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

и представлены на рисунках 1 и 2 (кривые 1). Они получены в результате численного решения полинома четвертой степени.

Для уравнений типа Хилла, задаваемого уравнением (10), согласно [4] рассматривается улучшенное условие устойчивости (14), когда $\phi(t)$ представляется следующим разложением ряда (13):

$$\phi(t) = b_0 + b_1 \cos(\Omega t - \delta_1). \quad (16)$$

В этом случае границы улучшенной зоны неустойчивости задаются характеристическим определителем:

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \mu^2 + \theta_0 & 0,5\theta_{1s} & 0,5\theta_{1c} \\ \theta_{1s} & \mu^2 + \theta_0 - \Omega^2 - 0,5\theta_{2c} & -2\mu\Omega + 0,5\theta_{2s} \\ \theta_{1c} & 2\mu\Omega + 0,5\theta_{2s} & \mu^2 - \Omega^2 + \theta_0 + 0,5\theta_{2c} \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Очевидно, что данный характеристический определитель (17) является расширением характеристического определителя (15) и действительно задает уточнение границ для первого случая. Иными словами,

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \mu^2 + \theta_0 & 0,5\theta_{1s} & 0,5\theta_{1c} \\ \theta_{1s} & \left[\begin{array}{c} \Delta_1(\mu) \end{array} \right] \\ \theta_{1c} & \left[\begin{array}{c} \Delta_1(\mu) \end{array} \right] \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Решение полинома шестой степени дает уточненные границы области неустойчивости основного резонанса, которые представлены на рисунках 1 и 2 (кривые 2).

Как видно из рисунков 1 и 2, в случае линейно-вязкого сопротивления, когда $K_2 = 0$, уточненная граница первой зоны неустойчивости основного резонанса практически совпадает с первым случаем (рисунок 1, кривые 1 и 2). Для случая нелинейно-вязкого сопротивления уточнение границ зон неустойчивости вносит существенную поправку (рис.2, кривые 1 и 2) в области неустойчивости. Наблюдается расширение зоны неустойчивости при уточненном решении, что необходимо учесть при исследовании динамики механических систем и исключения их рабочих скоростей из зон резонансных режимов колебаний.

Аналитическое определение границ областей неустойчивости основного резонанса в зависимости от геометрических и физических параметров рассматриваемой системы с нелинейной характеристикой жесткого типа и нелинейно-вязким сопротивлением дает возможность отстраивать данные системы от резонансных режимов колебаний путем вариации их параметров.

Данная методика позволяет исследовать резонансные режимы колебаний по высшим частотам с определением соответствующих им областей неустойчивости.

Вторая область неустойчивости основного резонанса данной системы (кривые 3 на рисунках 1 и 2) получена при

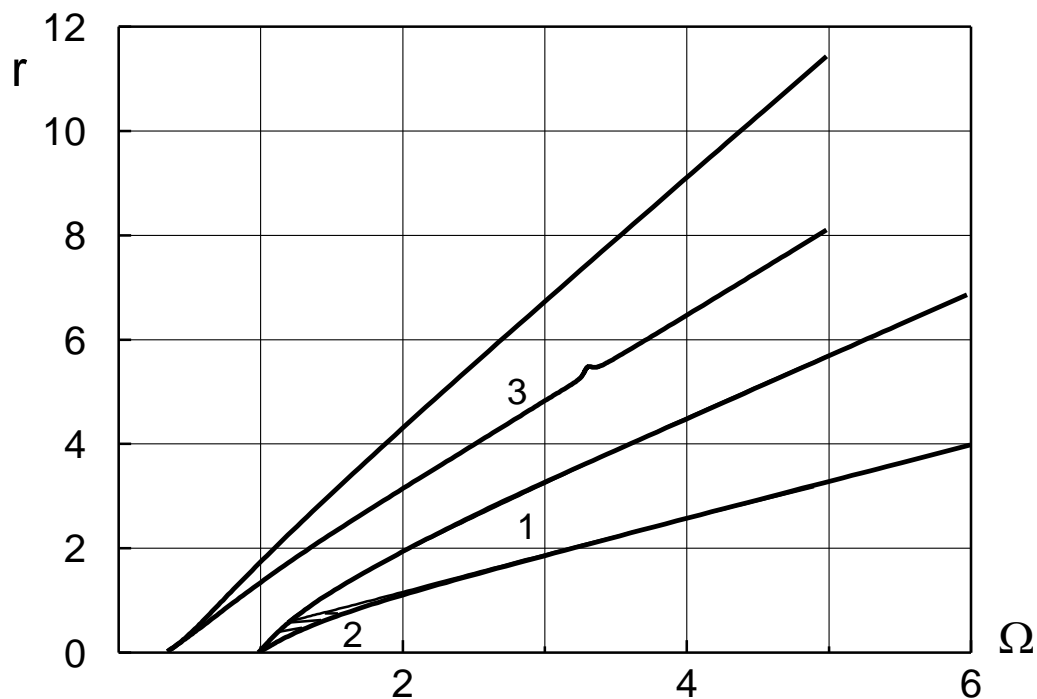
$$\eta = e^{\mu t} [b_0 + b_2 \cos(2\Omega t - \delta_2)]. \quad (19)$$

Границы этой области задаются характеристическим определителем:

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \mu^2 + \theta_0 & 0,5\theta_{2s} & 0,5\theta_{2c} \\ \theta_{2s} & \mu^2 - 4\Omega^2 + \theta_0 & -4\Omega\mu \\ \theta_{2c} & 4\mu\Omega & \mu^2 - 4\Omega^2 + \theta_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

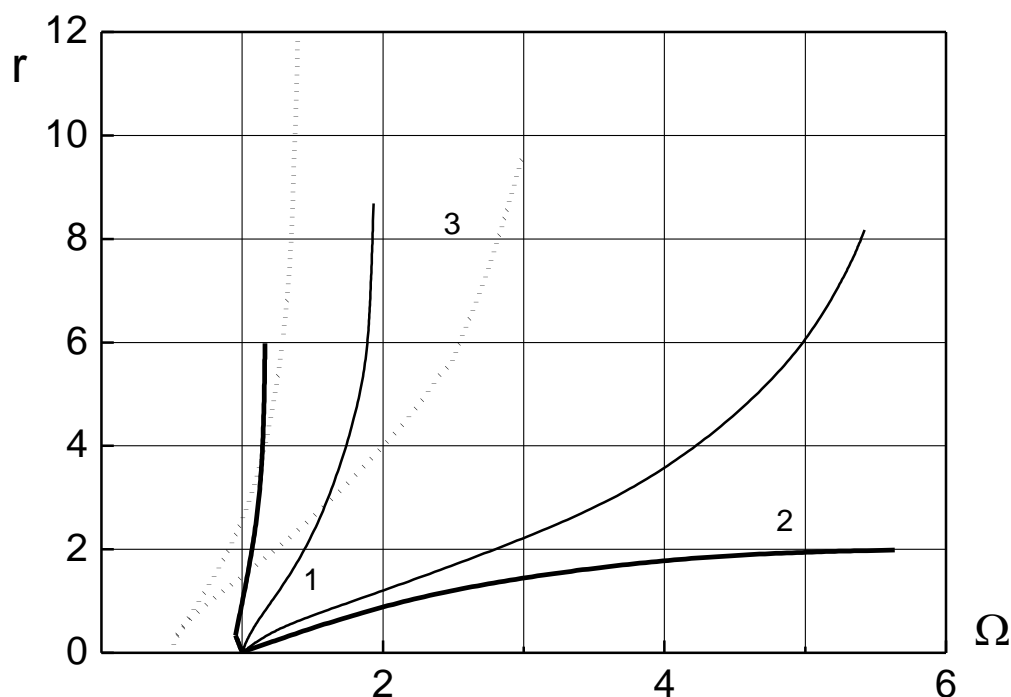
Как видно из рисунков, вторая зона неустойчивости основного резонанса смещена влево в сравнении с первой зоной. Подобные явления имеют место в нелинейных системах. В данном случае они вызваны нелинейностью вязкого сопротивления, тогда как результаты исследований, представленные на рисунках 1 и 2, были проведены при одних и тех же параметрах нелинейной упругой характеристики ($\alpha_1 = 1$; $\alpha_3 = 1$). Согласно [3], в этой зоне следует ожидать появления резонанса по второй частоте.

Таким образом, в результате исследований установлено, что уточнение зон неустойчивости, в частности первой зоны основного резонанса, имеет принципиальное значение для нелинейных систем и существенно зависит от нелинейности закона сопротивления, тогда как нелинейность упругой характеристики практически не влияет на нее. Поэтому при изучении движения высокоскоростных систем, а также при движении в вязкой среде, где имеет место нелинейно-вязкое сопротивление, данные результаты весьма необходимы для дальнейших прикладных исследований.



- 1— первая зона неустойчивости основного резонанса;
- 2— уточненная первая зона неустойчивости основного резонанса;
- 3— вторая зона неустойчивости основного резонанса.

Рисунок 1 – Зоны неустойчивости основного резонанса при $K_1 = 0,2$; $K_2 = 0$; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_3 = 1$.



- 1– первая зона неустойчивости основного резонанса;
 2– уточненная первая зона неустойчивости основного резонанса;
 3– вторая зона неустойчивости основного резонанса.

Рисунок 2 – Зоны неустойчивости основного резонанса при $K_1 = 0$; $K_2 = 0,5$; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_3 = 1$.

Список литературы

1. Амандосов А.А., Алмухамбетов С.С., Молдакулов Н.З. Колебания гибких тел произвольном повороте поперечных элементов // Вестник АН КазССР. 1987. №6. С.60-68.
2. Кыдырбекулы А.Б. Анализ устойчивости гармонических колебаний нелинейных систем с нелинейно-вязким сопротивлением и жесткой характеристикой // Вестник КазНУ. 2008. №2. С.25-30.
3. Szemplinska-Stupnicka W. Higher harmonic oscillations in heteronomous nonlinear systems with one degree of freedom // Internal.J. Nonlinear Mech. 1968. Vol.3. N 1. P.17-30.
4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968.