РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО ПРОБЛЕМАМ
МАШИНОВЕДЕНИЯ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОСТРОЕНИЯ РАН
– ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО НАУЧНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ТРУДЫ

X ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
им. Ю.И. Неймарка

Нижний Новгород, 26 – 29 сентября 2016 года

Конференция проводится при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект 16-08-20664-г)

Нижний Новгород
2016

ББК В161.6
УДК 517

Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 26–29 сентября 2016 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С.Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. – 867 с.

ISBN 978-5-211-0628945

В трудах излагаются различные аспекты теории нелинейных колебаний и динамических управляемых систем и их приложения в различных областях науки и техники.

Основной тематикой конференции являются:

- моделирование динамических систем,
- аналитические, качественные и численные методы теории колебаний,
- теория бифуркаций,
- регулярные и хаотические колебания,
- волновая динамика машин и конструкций,
- управление колебаниями механических систем,
- прикладные задачи теории колебаний.

ISBN 978-5-211-0628945 ББК В161.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БУРОВОЙ КОЛОННЫ

Аскар К. Кудайбергенов
Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040 Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: as5kar@mail.ru

В данной работе разрабатывается нелинейная математическая модель пространственных поперечных колебаний бурильной колонны, моделируемой в виде упругого стержня. Стержень подвергается действию продольной сжимающей нагрузки и крутящего момента. Для получения математической модели используются основные соотношения нелинейной теории упругости В.В.Новожилова и применяется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона. Находится численное решение модели и проводится визуализация результатов.

Ключевые слова: бурильная колонна, нелинейная математическая модель, поперечные колебания, стержень, принцип Остроградского-Гамильтона.

Введение

Буровые колонны, применяемые для проходки нефтяных и газовых скважин, состоят из бурильных труб, соединенных между собой бурильными замками. Общая длина объединенных бурильных труб может составлять от нескольких десятков до нескольких сотен метров при неглубинном бурении. При бурении глубоких скважин длина бурильной колонны может достигать нескольких километров. Если предполагать, что бурильная колонна представляет собой единую конструкцию, то ее длина оказывается значительно большей, чем ее поперечные размеры. Поэтому в данной работе, как и в большинстве работ, посвященных проблемам колебаний при бурении скважин, бурильная колонна моделируется как удлиненный изгибающийся стержень, подверженный действию внешних нагрузок.

В [1] было показано, что в случае плоского изгиба нелинейная математическая модель дает меньшие амплитудные колебания стержня, чем линейная модель. При увеличении длины бурильной колонны или частоты вращения линейные поперечные колебания неограниченно возрастали, тогда как при использовании нелинейной модели наблюдался устойчивый колебательный процесс.

Исследованию взаимодействия нелинейных плоских изгибных, продольных и крутильных волн в стержнях были посвящены работы [2, 3]. В [2] также рассматривалось отдельно уравнение нелинейных изгибных колебаний закрученного стержня, решение которого искалось в классе стационарных волн.

Целью настоящей работы является разработка нелинейной математической модели пространственных поперечных колебаний бурильной колонны, возникающих при неглубинном бурении.

Разработка нелинейной математической модели

При построении математической модели движения бурильной колонны неглубинного бурения будем основываться на нелинейной теории упругости В.В.Новожилова [4]. Согласно данной теории компоненты тензора деформаций ε_{ij} для общего трехмерного случая деформирования выражаются через проекции перемещений $U(x,y,z,t), V(x,y,z,t), W(x,y,z,t)$ нелинейным образом.

Бурильная колонна представляется как изотропный упругий вращающийся стержень симметричного поперечного сечения длиной l.

Вводятся следующие зависимости:

$$e_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z},$$
$$e_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \quad e_{zx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{1}$$
$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right), \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

где e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} определяют относительные удлинения параллельно осям $x, y, z,$ соответственно; e_{xy}, e_{yz}, e_{zx} - сдвиги; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - углы поворота относительно соответствующих осей.

Принимается вторая система упрощений по В.В. Новожилову, в соответствии с которой удлинения, сдвиги и углы поворота принимаются бесконечно малыми, а перемещения не ограничиваются.

В отличие от [1, 5], в работе рассматривается случай, когда поперечные колебания стержня происходят в двух плоскостях *Oxz* и *Oyz*. Тогда компоненты перемещений стержня задаются в виде:

$$\begin{cases} U(x,y,z,t) = u(z,t), \\ V(x,y,z,t) = v(z,t), \\ W(x,y,z,t) = \dfrac{\partial u(z,t)}{\partial z}x - \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial z}y, \end{cases} \tag{2}$$

где $u(z,t), v(z,t)$ определяют перемещения центра изгиба поперечного сечения стержня вдоль осей *x, y* вследствие изгиба.

Выражая компоненты деформаций через относительные удлинения, сдвиги и углы поворота с учетом (2), находим выражение для упругого потенциала Φ через перемещения

$$\Phi = \frac{G(1-\nu)}{1-2\nu}\left(u_{zz}{}^2x^2 + 2u_{zz}v_{zz}xy + v_{zz}{}^2y^2 - u_z{}^2v_z{}^2\right) - \frac{G}{2(1-2\nu)}\left(u_z{}^4 + v_z{}^4 - 2(u_{zz}x + v_{zz}y)\times\right.$$
$$\left.\times\left(u_z{}^2 + v_z{}^2\right) + 3u_z{}^2v_z{}^2\right) + 2Gu_z{}^2v_z{}^2, \tag{3}$$

где $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона.

Через найденный потенциал Φ определяется потенциальная энергия стержня:

$$U_0 = \frac{G(1-\nu)}{1-2\nu}\int_0^l\left(u_{zz}{}^2I_y + 2u_{zz}v_{zz}I_{xy} + v_{zz}{}^2I_x - u_z{}^2v_z{}^2F\right)dz + \frac{GF}{2(1-2\nu)}\int_0^l\left(u_z{}^4 + v_z{}^4 +\right.$$
$$\left.+ 3u_z{}^2v_z{}^2\right)dz + 2GF\int_0^l u_z{}^2v_z{}^2dz. \tag{4}$$

Здесь I_x, I_y - осевые моменты инерции, I_{xy} - центробежный момент инерции.

Выражение для кинетической энергии стержня, учитывающей вращение бурильной колонны, записывается в виде

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_0^l\left[u_t{}^2F + v_t{}^2F + u_{zt}{}^2I_y + 2u_{zt}v_{zt}I_{xy} + v_{zt}{}^2I_x + \omega^2\left(I_y + I_x\right) + \omega^2F\left(u^2 + v^2\right) +\right.$$
$$\left.+ 2u_t\omega vF - 2v_t\omega uF\right]dz, \tag{5}$$

где ρ - плотность материала, из которого изготовлена бурильная колонна, F - площадь поперечного сечения стержня, ω - угловая скорость вращения стержня.

Чтобы получить уравнения колебаний бурильной колонны в плоскостях *Oxz* и *Oyz*, применяем вариационный принцип Остроградского-Гамильтона, согласно которому

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U_0 + \Pi)dt = 0, \tag{6}$$

где Π - потенциал внешних сил, учитывающий действие продольной нагрузки $N(z,t)$ и крутящего момента $M(z,t)$.

Принимаем, что координатные оси x и y являются осями симметрии буровой колонны. Тогда относительно этих осей центробежный момент инерции равен нулю, $I_{xy} = 0$. Это означает, что в выражениях для энергий (4)-(5) мы можем пренебречь слагаемыми, содержащими влияние центробежного момента. Кроме того, т.к. бурильная колонна рассматривается как вращающийся стержень симметричного поперечного сечения, то $I_x = I_y = I$.

Тогда, применяя вариационный принцип Остроградского-Гамильтона и проводя необходимые преобразования, получаем следующую нелинейную математическую модель поперечных колебаний бурильной колонны с учетом продольного сжатия и крутящего момента:

$$\begin{gathered}
\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(M(z,t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(N(z,t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \\
- \frac{EF(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{EF}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 - \rho F \omega^2 u + 2\rho F \omega \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\
\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(M(z,t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(N(z,t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \\
- \frac{EF(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{EF}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^3 - \rho F \omega^2 v - 2\rho F \omega \frac{\partial u}{\partial t} = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Принимается шарнирное закрепление стержня по концам, которое соответствует следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered}
u(z,t) = v(z,t) = 0 \qquad (z = 0, z = l) \\
EI \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = EI \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = 0 \qquad (z = 0, z = l).
\end{gathered} \tag{8}$$

Опуская слагаемые, несущие в себе геометрическую нелинейность в математической модели (7), мы приходим к ее линейной модели, полученной и изученной в [6].

Численные результаты

Ввиду того, что прямое интегрирование уравнений движения (7) крайне затруднительно, методом Бубнова-Галеркина задача о поперечных колебаниях бурильной колонны сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой далее находится численно с применением метода с переключением жесткости [5].

Чтобы удовлетворить всем условиям метода Бубнова-Галеркина, компоненты вектора перемещений $u(z,t), v(z,t)$ выражаются в виде:

$$\begin{gathered}
u(z,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l} \right), \\
v(z,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l} \right).
\end{gathered} \tag{9}$$

Рассматриваются случаи одномодового приближения решения ($n = 1$) и двухмодового приближения ($n = 2$).

Полагаем, что действие от продольной нагрузки и крутящего момента равномерно распределяется по всей длине штанги, т.е. $N(z,t) = N,\ M(z,t) = M$.

Получены графики поперечных колебаний стальной бурильной колонны с внешним диаметром $D = 0.2 м$, внутренним диаметром $d = 0.12 м$ и следующими значениями остальных параметров: $F = 2.01 \times 10^{-2} м^2$, $I = 6.84 \times 10^{-5} м^4$, $N = 2.2 \times 10^3 Н$.

Рис. 1,2 показывают результаты, полученные при рассмотрении одномодового приближения решения по методу Бубнова-Галеркина, который дает затухающий колебательный процесс. Однако характер поперечных колебаний стержня сильно меняется при учете второй моды колебаний. Если в начальный промежуток времени колебания являются затухающими, то при дальнейшем непрерывном процессе бурения они бесконечно возрастают с большой интенсивностью (Рис.3) и наблюдается расхождение поперечных колебаний в плоскостях *Oxz* и *Oyz*, что обуславливается действием крутящего момента (Рис.4).

Таким образом, в отличие от [7], была подтверждена необходимость учета второй моды в разложении метода Бубнова-Галеркина для получения достоверной картины возникающих поперечных колебаний бурильной колонны.

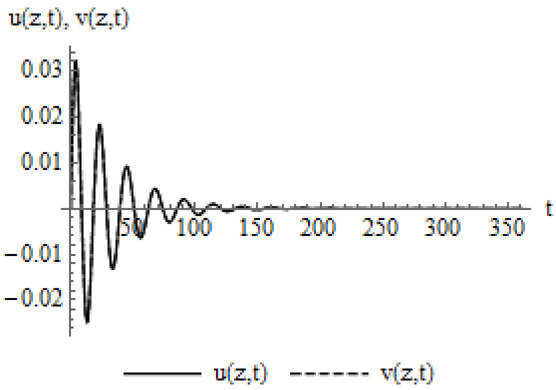

Рис. 1. Поперечные колебания бурильной колонны при $\omega = 0.033\, рад/с, M = 5 \times 10^3\, Нм$, $t = 360с$ (одномодовое приближение)

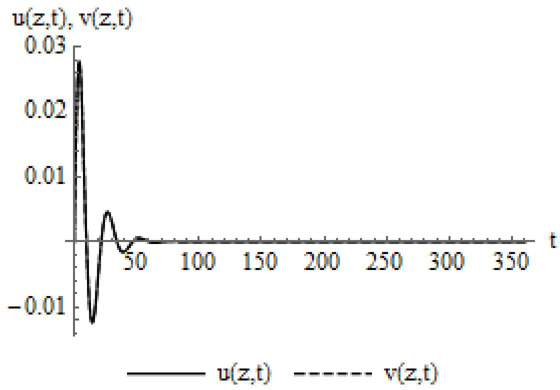

Рис. 2. Поперечные колебания бурильной колонны при $\omega = 0.083\, рад/с, M = 5 \times 10^3\, Нм$, $t = 360с$ (одномодовое приближение)

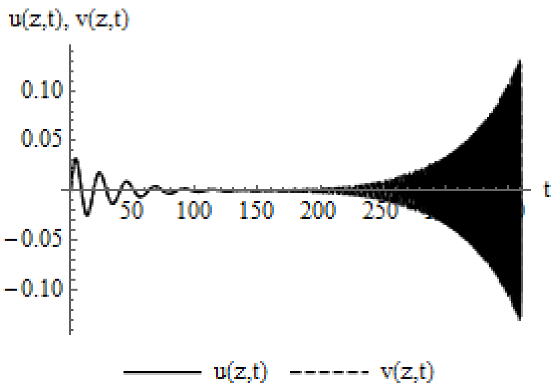

Рис. 3. Поперечные колебания бурильной колонны при $\omega = 0.033\, рад/с, M = 5 \times 10^3\, Нм$, $t = 360с$ (двухмодовое приближение)

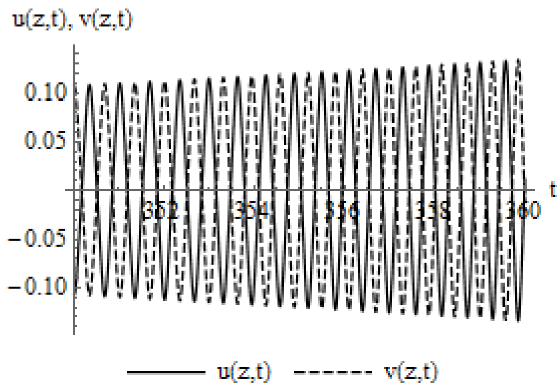

Рис. 4. Поперечные колебания бурильной колонны при $\omega = 0.033\, рад/с, M = 5 \times 10^3\, Нм$ за промежуток времени $t = 350 - 360с$ (двухмодовое приближение)

Заключение

Основываясь на нелинейной теории упругости В.В. Новожилова и использовании вариационного метода Остроградского-Гамильтона, была разработана новая нелинейная математическая модель поперечных колебаний бурильной колонны в двух плоскостях под действием продольной силы и крутящего момента. Учет в модели геометрической нелинейности позволит получать более точные результаты и исследовать колебательные процессы бурильных колонн на новом качественном и количественном уровне. Проведенные численные расчеты показали важность учета большего числа мод при изучении динамики бурильных колонн как упругих стержней методом Бубнова-Галеркина.

Данная работа была выполнена в рамках проекта ГФ4 №311 МОН РК.

Список литературы

1. Khajiyeva L.A., Kudaibergenov A.K. Modeling of nonlinear dynamics of drill strings in a supersonic air flow // Proc. 5th Int. Symposium on Knowledge Aquisition and Modeling (KAM 2015). Advances in Intelligent Systems Research. 2015. Vol.80. P. 163-167.
2. В.И. Ерофеев. Изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные волны в стержнях // Вестник науч.-техн. развития. 2012. №5 (57). С. 3-18.
3. В.И. Ерофеев, А.С. Зинченко. Распространение нелинейных изгибных и продольно-изгибных волн в упругом стержне // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. 2012. №5 (2). С. 81-83.
4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. - М.- Л.: ОГИЗ, 1948.
5. Кудайбергенов А.К., Кудайбергенов Аск.К. Сравнительный анализ численных методов при моделировании нелинейной динамики буровых штанг // Известия НАН РК, серия физ.-мат. 2015. №3 (301). С. 37-42.
6. Gulyayev V.I., Borshch O.I., Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // J. Petroleum Science and Engineering. 2011. Vol. 78. P. 759–764.
7. Kudaibergenov Askar K., Kudaibergenov Askat K. Modelling of coupled nonlinear axial and lateral vibrations of drill strings // Int. J. Math. Phys. 2015. Vol.6. No.2. P. 27-35.