Международная научная конференция

«Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их приложения»

посвящается 60-летию академика НАН РК
Джумадильдаева Аскара Серкуловича

Тезисы докладов

Алматы - 2016 года

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КОМИТЕТ НАУКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ СУЛЕЙМАНА ДЕМИРЕЛЯ

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«АЛГЕБРА, АНАЛИЗ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

посвящается 60-летию академика НАН РК Аскара Серкуловича Джумадильдаева

Алматы, 8–9 апреля 2016 года

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы – 2016

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Председатель Организационного Комитета:
академик НАН РК Кальменов Т.Ш.

Сопредседателя:
профессор Амиргалиева С.Н.(СДУ), член-корр. НАН РК Байжанов Б.С. (ИМММ), профессор Бектемесов М.А. (КазНУ)

Члены Организационного Комитета:
профессор Алексеева Л.А. (ИМММ), профессор Асанова А.Т. (ИМММ), академик Узбекской АН Аюпов Ш.А. (Узбекистан, Институт математики), профессор Бадаев С.А. (КазНУ), профессор Базарханов Д.Б. (ИМММ), доцент Бекенов М.И. (ЕНУ), профессор Бижанова Г.И. (ИМММ), профессор Вербовский В.В. (ИМММ, СДУ), PhD Гуверджин С. (СДУ), профессор Даирбеков Н.С. (ИМММ, КБТУ), профессор Дженалиев М.Т. (ИМММ), профессор Джумабаев Д.С. (ИМММ), профессор Кангужин Б.Е. (КазНУ), доцент Козыбаев Д.Х. (ЕНУ), член-корр. НАН РК Кулпешов Б.Ш. (ИМММ, МУИТ), профессор Кыдырбекулы А.Б. (КазНУ), профессор Мухамбетжанов С.Т. (КазНУ), член-корр. НАН РК Ойнаров Р.О. (ЕНУ), академик НАН РК Отелбаев М.О. (ЕНУ), член-корр. НАН РК Садыбеков М.А. (ИМММ), профессор Сихов М.Б. (КазНУ), академик РАН Тайманов И.А. (Россия, Институт математики СО РАН), профессор Тусупов Д.А. (ЕНУ), член-корр. НАН РК Умирбаев У.У. (США, Детройт, ЕНУ), академик НАН РК Харин С.Н. (ИМММ, КБТУ), профессор Хисамиев Н.Г. (Восточно-Казахстанский технический университет), профессор Шестаков И.П. (Бразилия, Университет Сан Пауло).

СЕКЦИИ

1. Алгебра, математическая логика и геометрия
Руководитель секции — д.ф.-м.н., профессор Б.С. Байжанов

2. Теория функций и функциональный анализ
Руководитель секции — д.ф.-м.н., профессор Д.Б. Базарханов

3. Теория дифференциальных уравнений и их приложения
Руководитель секции —д.ф.-м.н., профессор М.Т. Дженалиев

4. Математическое моделирование и уравнения математической физики
Руководитель секции —д.ф.-м.н., профессор Л.А. Алексеева

СОДЕРЖАНИЕ

Рассмотрим в пространстве R^n поверхность $\Lambda(t)$ заданную системой уравнений

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda = \lambda(x,t) \in C^{21}_{xt}$ – r-мерная вектор-функция, $r \leq n$.

Определение 1. Интегральным многообразием уравнения 1 называется гладкая поверхность $\Lambda(t)$ такая, что из условия $(x(t_0), t_0) \in \Lambda(t_0)$ следует, что с вероятностью 1 $(x(t), t) \in \Lambda(t)$ при всех $t \geq t_0$.

Далее, поверхность 2, являющуюся интегральным многообразием для уравнения 1 (см. теорему 1 из [3]), исследуем на экспоненциальную устойчивость.

Рассмотрим функции Ляпунова вида $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda xt} : R^r \times R^n \times R^+ \to R^+$ и $V(0; x, t) \equiv 0$.

Обозначим $V_1(x,t) = V(\lambda(x,t), x, t)$. Очевидно, что $V_1(x,t) \in C^{21}_{xt}$. Будем рассматривать такие функции Ляпунова, чтобы

$$\int\limits_{R^n} \left\| \left[V_1(x + f(x,t,u), t) - V_1(x,t) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T f_i(x,t,u) \right] \right\| \Pi(du) < \infty.$$

Введем следующий производящий оператор

$$\tilde{L}V(\lambda(x,t), x, t) = \tilde{L}V_1(x,t) =$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T X_i + \frac{1}{2} tr \left[\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_{ik} \sigma_{jk}^T \right] +$$

$$+ \int\limits_{R^n} \left[V_1(x + f(x,t,u), t) - V_1(x,t) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T f_i(x,t,u) \right] \Pi(du).$$

Определение 2. Интегральное многообразие $\Lambda(t)$, определяемое формулой 2, уравнения 1 называется p-устойчивым относительно вектор-функции $\lambda = \lambda(x,t)$ $(p > 0)$ при $t \geq t_0 > 0$, если

$$\lim_{\|\lambda(x_0,t_0)\| \to 0} \sup_{t \geq t_0} E \|\lambda(x^{x_0,t_0}(t), t)\|^p = 0.$$

Определение 3. Интегральное многообразие $\Lambda(t)$, определяемое формулой 2, уравнения 1 называется экспоненциально p-устойчивым относительно вектор-функции $\lambda = \lambda(x,t)$ $(p > 0)$, если при некоторых положительных постоянных A и γ

$$E \|\lambda(x^{x_0,t_0}(t), t)\|^p \leq A \|\lambda(x_0, t_0)\|^p \exp\{-\gamma(t - t_0)\}.$$

Применением к процессу $V(\lambda; x, t)$ обобщенной формулы Ито [2, стр. 276] доказывается справедливость следующей теоремы.

Теорема. Если для уравнения 1 и множества 2 существует функция Ляпунова $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda xt}$, удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных k_1, k_2, k_3 неравенствам

$$k_1 \|\lambda(x,t)\|^p \leq V(\lambda; x, t) \leq k_2 \|\lambda(x,t)\|^p,$$

$$\tilde{L}V(\lambda; x, t) \leq -k_3 \|\lambda(x,t)\|^p,$$

тогда интегральное многообразие $\Lambda(t)$ 2 уравнения 1 экспоненциально p-устойчиво относительно вектор-функции $\lambda = \lambda(x,t)$ $(p > 0)$.

Литература

1. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М.: Наука, 1969. - 368 с.
2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. -Киев: Наукова думка, 1968. - 356 с.
3. *Василина Г.К., Тлеубергенов М.И.* О решении задачи стохастической устойчивости интегрального многообразия вторым методом Ляпунова // Укр. матем. журнал. - 2016. -Т. 68, № 1. -С. 14-27.

УДК 517.95

[1,2]Дилдабек Г., [1,3]Ержанов Н.Е., [1,4]Тенгаева А.А.

[1]*Институт математики и математического моделирования (Казахстан, Алматы)*

[2]*Казахский национальный университет им. Аль-Фараби (Казахстан, Алматы)*

[3]*Региональный социально-инновационный университет (Казахстан, Шымкент)*

[4]*Казахский национальный аграрный университет (Казахстан, Алматы)*

e-mail: [2]*dildabek.g@gmail.com*, [3]*imanbaevnur@mail.ru*, [4]*aijan0973@mail.ru*

Функция Грина задачи теплопроводности с краевым условием Самарского-Ионкина

Наряду с классическими краевыми и начально-краевыми задачами, в последнее время внимание многих учёных привлекают задачи математической физики с нелокальными (неклассическими) дополнительными условиями. Теория нелокальных краевых задач важна сама по себе как раздел общей теории краевых задач для дифференциальных уравнений и как раздел математики, имеющий многочисленные приложения в механике, физике, биологии и других естественно-научных дисциплинах. Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых вместо задания значений решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех же функций на иных внутренних или граничных многообразиях. К ним относятся краевые задачи с условиями типа периодичности, с условием Бицадзе-Самарского, с условиями интегрального типа, а также задачи с многоточечными граничными условиями общего вида. Актуальность изучения этих задач обусловлена также наличием ряда физических приложений в области электростатики, электродинамики, теории упругости, физики плазмы, многослойной оптики и т.п.

Возможность представления решения задачи в интегральном виде, основанном на функции Грина начально-краевой задачи имеет существенные преимущества для практики. Интегральное представление решения позволяет дать физическую интерпретацию: сопряженная функция Грина в точке с координатой y_0 в момент времени s_0, при наблюдении температуры в точке (x_0, t_0), есть температура в точке x_0 в момент времени t_0, если в точку y_0 в момент времени s_0 помещен импульсный тепловой источник единичной мощности.

В области $\Omega = \{0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) \tag{1}$$

К классическим задачам теории теплопроводности относят первую и вторую начально-краевые задачи. Это задачи нахождения решения уравнения 1, удовлетворяющего начальному условию

$$u_{|t=0} = \tau(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u_{|x=0} = \varphi_0(t),\ u_{|x=1} = \varphi_1(t),\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

или

$$u_{x\,|x=0} = \psi_0(t),\ u_{x\,|x=1} = \psi_1(t),\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

соответственно.

Эти задачи хорошо исследованы, их решение (в классическом и обобщенном смыслах) существует, единственно и может быть построено методом разделения переменных. Также решение может быть представлено с помощью функции Грина. Для упрощения записи считаем, что $\varphi_j(t) = \psi_j(t) = 0,\ j = 0, 1$. Тогда решение задачи 1-3 представляется в виде

$$u(x,t) = \int_0^t dt \int_0^1 G_D(x,y,t-s) f(y,s) dy, \tag{5}$$

а решение задачи 1, 2, 4 в виде

$$u(x,t) = \int_0^t dt \int_0^1 G_N(x,y,t-s) f(y,s) dy, \tag{6}$$

Функции Грина этих задач имеют по два эквивалентных представления – в виде бесконечного ряда по тригонометрическим функциям и через функцию Якоби. Преимуществом второго представления является экспоненциальное убывание членов бесконечного ряда при больших значениях времени t.

В докладе рассматривается нелокальная краевая задача для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности. Ставится классическое начальное условие по переменной t. По пространственной переменной x ставится нелокальное краевое условие Самарского-Ионкина.

ЗАДАЧА $S - I$. *Найти решение уравнения 1, удовлетворяющее начальному условию 2 и неклассическим краевым условиям - нелокальным условиям Самарского–Ионкина:*

$$u(0,t) = \varphi_0(t),\ u_x(0,t) - u_x(1,t) = \varphi_1(t),\ 0 \le t \le T. \tag{7}$$

Хорошо известно, что решение этой задачи может быть построено в виде сходящегося биортогонального ряда по собственным и присоединенным функциям спектральной задачи Самарского-Ионкина для оператора кратного дифференцирования. Поэтому функция Грина задачи может быть также выписана в виде бесконечного ряда по тригонометрическим функциям. Для классических первой и второй начально-краевых задач существует также и второе представление функции Грина - через функцию Якоби. Преимуществом данного представления является экспоненциальное убывание членов бесконечного ряда при больших значениях времени t. В настоящей работе найдено представление функции Грина нелокальной начально-краевой задачи в виде ряда по экспонентам.

Авторы выражают благодарность Т.Ш. Кальменову и М.А. Садыбекову за постановку задачи и ценные советы во время работы.

Эта работа была поддержана грантом 0825/ГФ4 МОН РК.

УДК 517.956.6

[1,2]Дилдабек Г., [1,3]Тенгаева А.А.

[1]*Институт математики и математического моделирования (Казахстан, Алматы)*

[2]*Казахский национальный университет им. Аль-Фараби (Казахстан, Алматы)*

[3]*Казахский национальный аграрный университет (Казахстан, Алматы)*

e-mail: [2]*dildabek.g@gmail.com*, [3]*aijan0973@mail.ru*

Существование собственного значения задачи со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа

В отличие от теории разрешимости, спектральные вопросы задач для уравнений смешанного типа являются мало изученными. Здесь необходимо отметить исследования, которые внесли существенный вклад в этом направлении. Это работы Т.Ш. Кальменова [1, 2], Е.И. Моисеева [3], С.М. Пономарева [4]. Основная библиография по этим вопросам приведена в монографии Е.И. Моисеева [5]. В этих работах исследуются существование и расположение собственных значений у задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа, построение и полнота системы собственных функций задачи.

Спектральные вопросы для уравнения параболо-гиперболического типа изучены сравнительно меньше. Основная библиография по этим вопросам приведена в недавно вышедшей монографии А.С. Бердышева [6].

Пусть $\Omega \in R^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B, $A = (0,0)$, $A_0 = (0,1)$, $B_0 = (1,1)$, $B = (1,0)$, а при $y < 0$ - характеристиками $AC:\ x + y = 0$ и $BC:\ x - y = 1$ уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \left\{ \begin{array}{l} u_x - u_{yy},\ y > 0 \\ \\ u_{xx} - u_{yy},\ y < 0 \end{array} \right\} = f(x,y). \tag{1}$$

Через $W_2^l(\Omega) = H^l(\Omega)$ обозначим пространство Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$; $\Omega_1 = \Omega \bigcap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \bigcap \{y < 0\}$.

В Ω рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу, являющуюся обобщением аналога задачи Трикоми для параболо - гиперболического уравнения (1).

Задача S. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{AA_0 \cup A_0 B_0} = 0, \tag{2}$$

$$\alpha u(\theta_0(t)) = \beta u(\theta_1(t)), \quad 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

где $\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$, $\theta_1(t) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$.

При $\beta = 0$ задача S совпадает с задачей Трикоми, а при $\alpha = 0$ – с задачей Трикоми с данными на противоположной характеристике.

Сильная разрешимость частных случаев задачи при $\alpha = 0$ и при $\beta = 0$ исследована в работе М.А. Садыбекова, Г.Д. Тойжановой [7]. Показано, что при $\beta = 0$ задача является вольтерровой, а при $\alpha = 0$ – у задачи существует собственное значение. Случай же произвольных α и β оставался до сих пор не исследованным. Исследованию задачи именно в этом случае и посвящена настоящая работа.

Теорема 1. *Решение задачи S единственно, если и только если $\alpha + \beta \ne 0$. При выполнении этого условия, для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x, y)$ задачи S. Это решение принадлежит классу $H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_1 \le c\,\|f\|_0, \tag{4}$$

и представляется в виде

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} K(x, y; ; x_1, y_1) f(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1, \tag{5}$$

где $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Из Теоремы 1 следует, что оператор L задачи S обратим, и обратный оператор L^{-1} является оператором Гильберта – Шмидта. Тогда спектр задачи может состоять только из собственных значений оператора L^{-1}. Естественно возникает вопрос о существовании собственных значений оператора L^{-1}, следовательно, и задачи S.

Теорема 2. *Пусть L - оператор задачи S и $(\alpha - \beta)\beta \ne 0$. Тогда существует собственное значение задачи S, то есть существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что уравнение $Lu = \lambda u$ имеет нетривиальное решение.*

Авторы выражают благодарность Т.Ш. Кальменову и М.А. Садыбекову за постановку задачи и ценные советы во время работы.

Эта работа была поддержана грантом 0825/ГФ4 МОН РК.

Литература

1. *Кальменов Т.Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева - Бицадзе // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13 – № 8. – С. 1418 – 1425.

2. *Кальменов Т.Ш.* О спектре задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 2. – С. 354 – 356.

3. *Moiseev E.I.* Properties of Solution of Lavrentev-Bitsadze Equation // Mathematical Notes. – 1979. – V. 26. - № 3–4. – P. 757 – 762.

4. *Ponomarev S.M.* Eigenvalue Problem for Lavrentiev-Bitsadze Equation // Doklady Akademii nauk SSSR. – 1977. – V. 233. – № 1. – P. 39 – 40.

5. *Moiseev E.I.* Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter. – Moscow Univ., Moscow. – 1988. – 150 p.

6. *Бердышев А.С.* Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. – Алматы. – 2015. – 224 с.

7. *Sadybekov M.A., Toizhanova G.D.* Spectral properties of a class of boundary value problems for a parabolic-hyperbolic equation // Differentsial'nye Uravneniya. – 1992. – V. 28. – № 1. – P. 176–179.

УДК 519.62

Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А.

Институт математики и математического моделирования

(Казахстан, Алматы)

e-mail: dzhumabaev@list.ru, bakirova1974@mail.ru

Алгоритмы нахождения решения нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

Многие задачи приложения приводят к нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям Фредгольма. Нелинейность уравнений приводит к принципиальным трудностям как при изучении качественных свойств решений так и при решении краевых задач для этих уравнений. Общие теоремы нелинейного анализа применимы при наличии "хорошего" начального приближения к решению. Нахождение такого приближения важно как для выяснения вопросов разрешимости нелинейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, так и построения приближенных методов решения этих задач.

В сообщении рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \int_0^T f_0(t, \xi, x(\xi))d\xi, \quad t \in [0, T],\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \tag{2}$$

где $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_0 : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - непрерывны.

Вопросы существования решения нелинейных двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследованы в работе [1] методом параметризации [2]. Были предложены алгоритмы нахождения решения задачи (1), (2) при $f_0(t, \xi, x(\xi)) = 0$ и установлены условия существования их решений.