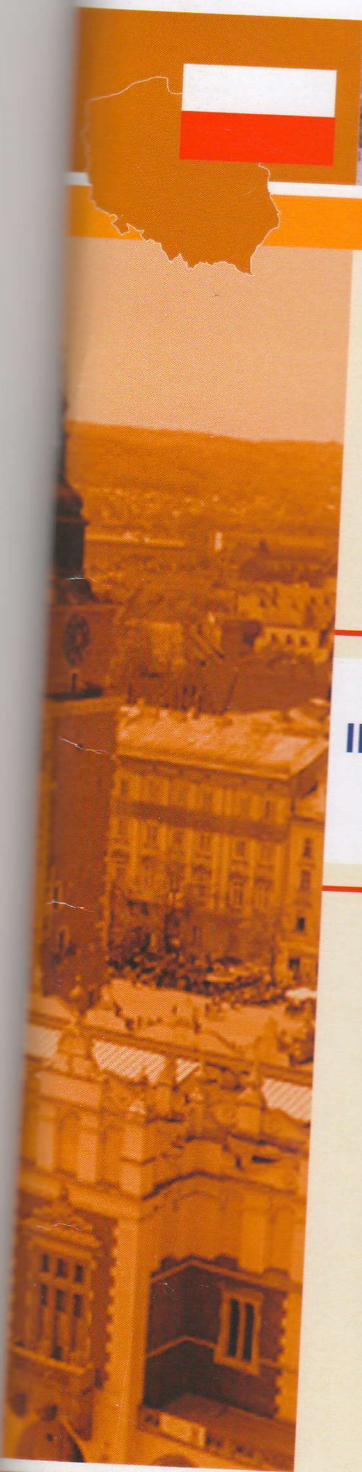

MATERIAŁY XI MIĘDZYNARODOWEJ NAUKOWI-PRAKTYCZNEJ KONFERENCJI

NAUKOWA MYŚL INFORMACYJNEJ POWIEKI - 2015

07-15 marca 2015 roku

Volume 14

Matematyka
Fizyka
Budownictwo i architektura
Nowoczesne informacyjne technologie
Techniczne nauki

Przemyśl
Nauka i studia
2015

SPIS

MATEMATYKA

DYFERENCJALNE I INTEGRALNE ZRYWNANIE

STOSOWANA MATEMATYKA

FIZYKA

FIZYKA CIAŁA STAŁEGO

BUDOWNICTWO I ARCHITEKTURA

NOWOCZESNE TECHNOLOGIE BUDOWNICTWA, REKONSTRUKCJI I RESTAURACJI

NOWOCZESNE BUDOWLANE MATERIAIY

NOWOCZESNE INFORMACYJNE TECHNOLOGIE

KOMPUTEROWA INŻYNIERIJA

OBLICZENIOWA TECHNIKA I PROGRAMOWANIE

INFORMACYJNE BEZPIECZECSTWO

TECHNICZNE NAUKI

METALURGIA

MECHANIKA

TRANSPORT

Wydawca: Sp. z o.o. «Nauka i studia»

Redaktor naczelna: Prof. dr hab. Sławomir Górniak.

Adres wydawcy i redacji:
37-700 Przemyśl , ul. Łukasińskiego 7
tel (0-16) 678 33 19
e-mail: praha@rusnauka.com

Druk i oprawa:
Sp. z o.o. «Nauka i studia»

Cena 54,90 zł (w tym VAT 22%)

Materiały XI Międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji «Naukowa myśl informacyjnej powieki - 2015» Volume 14. Matematyka. Fizyka. Budownictwo i architektura. Nowoczesne informacyjne technologie. Techniczne nauki.: Przemyśl. Nauka i studia - 112 str.

W zbiorze ztrzymają się materiały XI Międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji
«Naukowa myśl informacyjnej powieki - 2015». 07-15 marca 2015 roku
po sekcjach: Matematyka. Fizyka. Budownictwo i architektura.
Nowoczesne informacyjne technologie. Techniczne nauki.

ISBN 978-966-8736-05-6

MATEMATYKA

DYFERENCJALNE I INTEGRALNE ZRYWNANIE

К.ф.-м.н. Сарсекеева А.С.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан

РАЗРЕШИМОСТЬ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Пусть $D_1 = \{x \mid x' \in R^{n-1}, x_n < 0\}$, $D_2 = \{x \mid x' \in R^{n-1}, x_n > 0\}$, $D_T^{(m)} = D_m \times (0,T)$, $m = 1,2$, $R_T = \{(x,t) \mid x' \in R^{n-1}, \quad x_n = 0, \quad 0 < t < T\}$.

Требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $\rho(x',t)$ по условиям

$$\partial_t u_m - \Delta u_m - 0 \ \text{ в } D_T^{(m)}, m = 1,2, \tag{1}$$

$$u_m|_{t=0} = 0 \text{ в } D_m, m = 1,2, \ \rho|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u_m - d_m \rho|_{R_T} = 0, \tag{3}$$

$$\kappa \partial_t \rho + b\frac{\partial u_1}{\partial x_n} - c\frac{\partial u_2}{\partial x_n}|_{R_T} = \varphi(x',t) \tag{4}$$

где b, c, κ, d_m – постоянные коэффициенты, $m = 1,2$.

Задача (1) – (4) исследована в пространстве Соболева. Дадим определение пространств [1].

$L_q(\Omega_T)$, $1 \le q < \infty$, – банахово пространство функций $u(x,t)$, имеющих норму

$$\|u\|_{q,R_T} = \left(\int_{\Omega_T} |u(x,t)|^q \, dxdt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

$W_q^{2l,l}(\Omega_T)$, $1 \le q < \infty$, l- целое, – банахово пространство функций $u(x,t)$, имеющих норму

$$\|u\|_{W_q^{2l,l}(\Omega_T)} \equiv \|u\|_{q,\Omega_T}^{(2l)} = \sum_{2k+|m| \le 2l} \|D_t^k D_x^m u\|_{q,\Omega_T} \equiv \sum_{2k+|m| \le 2l} \left(\int_{\Omega_T} |D_t^k D_x^m u(x,t)|^q \, dxdt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

$W_q^{l,\frac{l}{2}}(S_T)$, $1 \le q < \infty$, l- нецелое, – банахово пространство функций $\Phi(x,t)$, имеющих норму

$$\|\Phi\|_{W_q^{l,\frac{l}{2}}(S_T)} \equiv \|\Phi\|_{q,S_T}^{(l)} = \sum_{2k+|m|\le[l]} \|D_t^k D_x^m \Phi\|_{q,S_T} + [\Phi]_{q,S_T}^{(l)},$$

где $\quad [\Phi]_{q,S_T}^{(l)} = [\Phi]_{q,x,S_T}^{(l)} + [\Phi]_{q,t,S_T}^{(\frac{l}{2})}, \qquad [\Phi]_{q,x,S_T}^{(l)} = \sum_{2k+|m|\le[l]} \|D_t^k D_x^m \Phi\|_{q,x,S_T}^{(l-[l])},$

$$[\Phi]_{q,t,S_T}^{(\frac{l}{2})} = \sum_{2k+|m|\le[l]} \|D_t^k D_x^m \Phi\|_{q,t,S_T}^{(\frac{l-[l]}{2})} + \sum_{2k+|m|\le[l]-1} \|D_t^k D_x^m \Phi\|_{q,t,S_T}^{(\frac{l+1-[l]}{2})},$$

$$[v]_{q,x,S_T}^{(\alpha)} = \left(\int_0^T dt \int_S \int_S \frac{|v(x,t)-v(z,t)|^q}{|x-z|^{n-1+q\alpha}}\,dx\,dz\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$[v]_{q,t,S_T}^{(\alpha)} = \left(\int_S dx \int_0^T \int_0^T \frac{|v(x,t)-v(x,\tau)|^q}{|t-\tau|^{1+q\alpha}}\,dt\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{где } 0 < \alpha < 1.$$

Теорема. Для любой функции $\varphi \in W_q^{2-\frac{1}{q},\,1-\frac{1}{2q}}(R_T)$, задача (1) – (4) имеет единственное решение $u_m \in W_q^{2,1}\left(D_T^{(m)}\right)$, $m = 1,2$, $\rho \in W_q^{2-\frac{1}{q},\,1-\frac{1}{2q}}(R_T)$, $\rho_t \in W_q^{1-\frac{1}{q},\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}(R_T)$, для которого справедлива оценка

$$\sum_{m=1}^{2} \|u_m\|_{q,D_T^{(m)}}^{(2)} + \|\rho\|_{q,R_T}^{(2-\frac{1}{q})} + \|\rho_t\|_{q,R_T}^{(1-\frac{1}{q})} \le C_1 \|\varphi\|_{q,R_T}^{(1-\frac{1}{q})}. \tag{5}$$

Доказательство. Применяя преобразования Фурье по x' и Лапласа по t, найдем решение задачи (1) – (4) с производной по времени в граничном условии в виде

$$\rho(x',t) = \frac{1}{\kappa}\int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \varphi(y',\tau)\, G(x'-y',t-\tau)\, dy',$$

$$u_m(x,t) = \frac{d_m}{\kappa}\int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \varphi(y',\tau)\, G_m(x'-y',x_n,t-\tau)\, dy', \quad m = 1,2,$$

где
$$G(x',t) = \int_0^t \frac{az}{\left(2\sqrt{\pi(t-z)}\right)^n (t-z)} e^{-\frac{x'^2+a^2z^2}{4(t-z)}}\, dz,$$

$$G_1(x',t) = \int_0^t \frac{az - æx_n}{(2\sqrt{\pi(t-z)})^n\,(t-z)} e^{-\frac{æ^2x'^2+(az-æx_n)^2}{4æ^2(t-z)}}\, dz, \quad x_n < 0,$$

$$G_2(x',t) = \int_0^t \frac{az + æx_n}{(2\sqrt{\pi(t-z)})^n\,(t-z)} e^{-\frac{æ^2x'^2+(az+æx_n)^2}{4æ^2(t-z)}}\, dz, \quad x_n > 0.$$

Покажем, что функции $\rho \in W_q^{2-\frac{1}{q},\,1-\frac{1}{q}}(R_T)$, $\rho_t \in W_q^{1-\frac{1}{q},\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}(R_T)$ и удовлетворяют оценке

$$\|\rho\|_{q,R_T}^{(2-\frac{1}{q})} + \|\rho_t\|_{q,R_T}^{(1-\frac{1}{q})} \le C_2 \|\Phi\|_{q,R_T}^{(1-\frac{1}{q})}. \tag{6}$$

Для этого используем определение нормы функции $\rho \in W_q^{2-\frac{1}{q},\,1-\frac{1}{q}}(R_T)$:

$$\|\rho\|_{q,R_T}^{(2-\frac{1}{q})} = \|D_{x'}\rho\|_{q,R_T} + \|D_t\rho\|_{q,R_T} + \|\rho\|_{q,R_T} + [D_{x'}\rho]_{q,t,R_T}^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2q})} +$$
$$+[D_t\rho]_{q,t,R_T}^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2q})} + [\rho]_{q,t,R_T}^{(1-\frac{1}{2q})} + [D_{x'}\rho]_{q,x',R_T}^{(1-\frac{1}{q})} + [D_t\rho]_{q,x',R_T}^{(1-\frac{1}{q})}.$$

Выражая функцию u_m через ρ из уравнений и условий задачи (1) – (4), получим задачу для функций u_m, $m = 1,2$, рассмотренную в [2]. Аналогично тому, как это сделано в работе [1], можем доказать, что функции $u_m \in W_{q,D_T^{(m)}}^{2,1}$, $m = 1,2$, и выполняется оценка

$$\sum_{m=1}^{2} \|u_m\|_{q,D_T^{(m)}}^{(2)} \le C_{13}\left(\|\rho\|_{q,R_T}^{(2-\frac{1}{q})} + \|\rho_t\|_{q,R_T}^{(1-\frac{1}{q})} + \|\varphi\|_{q,R_T}^{(1-\frac{1}{q})}\right) \le C_{14}\|\varphi\|_{q,R_T}^{(1-\frac{1}{q})}. \tag{7}$$

Из оценок (6) и (7) следует справедливость оценки (5). Тем самым теорема доказана.

Литература:

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. :Наука, 1967. 736с.
2. Бижанова Г.И. Оценки решения n-мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в весовых гельдеровских нормах I,II //Изв. АН РК, серия физ.-мат., 1992. №5. С.7-13; Изв. АН РК, серия физ.-мат., 1993. №1. С.11-17 с.