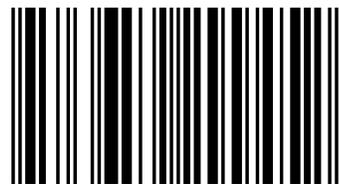


Нестационарность космических тел предопределяет богатое разнообразие эволюционных путей гравитирующих систем. Разработка динамики нестационарных гравитирующих тел является актуальной проблемой. В монографии изложены разработанные автором основы аналитической теории поступательного и поступательно-вращательного движения гравитирующих нестационарных тел - тел с переменными массами, размерами и формой. Рассмотрены сферические, осесимметричные и трехосные нестационарные тела. Исследованы поступательно-вращательные движения задачи двух, трех и многих нестационарных тел в различной постановке. Получены различные формы дифференциальных уравнений движения. Найдены частные строгие решения и приближенно аналитические решения ряда нестационарных задач. Построена теория возмущения поступательно-вращательного движения на базе специально выбранных новых промежуточных движений в различных системах переменных и в разной форме, в том числе, каноническая теория возмущения. Монография предназначена для научных работников, занимающихся нестационарными проблемами теоретической астрономии, небесной механики, а также для докторантов, магистрантов и студентов старших курсов университетов.



Мухтар Минглибаев

Минглибаев Мухтар Джумабекович, доктор физико-математических наук, профессор. Область научных интересов: теоретическая механика, теоретическая астрономия, движение искусственных небесных тел. Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, главный научный сотрудник в Астрофизическом институте имени В.Г.Фесенкова, г. Алматы.



978-3-659-29945-2

Мухтар Минглибаев

Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами

Поступательное и поступательно-вращательное движение

Мухтар Минглибаев

**Динамика гравитирующих тел с переменными
массами и размерами**

Мухтар Минглибаев

**Динамика гравитирующих тел с
переменными массами и
размерами**

**Поступательное и поступательно-
вращательное движение**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:

LAP LAMBERT Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG

Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

ISBN: 978-3-659-29945-2

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2012 AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2012

Оглавление

Введение	9
Глава 1. Каноническая теория возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению и некоторые задачи нестационарных бинарных систем	23
1.1. Постановка задачи	23
1.2. Интегрирование дифференциальных уравнений промежуточного движения методом Гамильтона-Якоби	27
1.3. Уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Якоби, Делоне и Пуанкаре	34
1.4. Уравнения возмущенного движения в форме уравнений Лагранжа	38
1.5. Канонические уравнения движения точки вокруг гравитирующего сферического тела переменной массы, окруженного гравитирующей и сопротивляющейся средой нестационарной плотности	40
1.6. Задачи Лапина двух тел с переменными массами	43
1.7. Движение точки переменной массы в поле притяжения нестационарного тела с осесимметричным потенциалом .	54
1.8. Движение пробной точки в поле притяжения нестационарного трехосного эллипсоида	59
Глава 2. Задача трех тел с переменными массами	67
2.1. Задача трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами. Исключение узла	67
2.2. Задача трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами в приближении Хилла	79

2.3. Задача трех тел с массами, изменяющимися изотропно в различных темпах	86
2.4. Задача трех тел с массами, изменяющимися анизотропно в различных темпах	101
Глава 3. Ограниченная задача трех тел с переменными массами	113
3.1. Осредненная ограниченная задача трех тел с изменяю- щимися в одинаковом темпе массами	113
3.2. Ограниченная задача трех тел с изотропно изменяющи- мися в различных темпах массами	120
3.3. Постановка ограниченной задачи трех тел с анизотропно изменяющимися в различных темпах массами	124
Глава 4. Задача многих гравитирующих тел с массами, изменяющимися в различных темпах	127
4.1. Постановка задачи и основные уравнения движения	127
4.2. Уравнения движения задачи многих тел с изотропно из- меняющимися в различных темпах массами в барицент- рической системе координат и инварианты центра масс	130
4.3. Уравнения движения в канонических оскулирующих эле- ментах	136
Глава 5. Задача о поступательно-вращательном движении многих нестационарных тел переменных размеров и массы	143
5.1. Постановка задачи и первые интегралы	143
5.2. Уравнения движения в относительной системе координат. Оскулирующие элементы	148
5.3. Уравнение возмущенного движения в форме уравнений Лагранжа	157
Глава 6. Поступательно-вращательное движение двух нестационарных тел переменных размеров и массы	165

6.1. Строгие плоские частные решения в случае нестационарных двух тел: шар - трехосное тело	165
6.2. Строгие пространственные частные решения в случае нестационарных двух тел: шар – трехосное тело	172
6.3. Строгие плоские частные решения в случае нестационарных двух тел: трехосное тело – трехосное тело	180
6.4. Уравнения движения задачи о поступательно-вращательном движении двух нестационарных тел — шар и тело — в оскулирующих элементах	188
6.5. Вековые возмущения в задаче о поступательно-вращательном движении двух нестационарных тел: шар — осесимметричное тело	194
Заключение	204
Литература	207

Введение

Классическая небесная механика рассматривает космические тела как материальные точки. Аналитическая механика системы свободных материальных точек, взаимогравитирующих по закону Ньютона, хорошо разработана и до сих пор не теряет своего значения. Однако, еще классики осознавали ограниченность задачи многих гравитирующих материальных точек в изучении некоторых проблем небесной механики, где представление небесных тел материальными точками неадекватно отражает суть физической постановки задачи.

Если откажемся от представления космических тел материальными точками, то учет размеров, формы и распределения массы внутри тел приведёт нас к задаче о совместном поступательно-вращательном движении этих тел под действием их взаимной гравитации по закону Ньютона. При этом предполагается, что тела абсолютно твердые и изучается поступательное движение их центра масс и вращательное движение каждого тела вокруг собственного центра масс. Такая постановка задачи тоже была известна давно, однако систематическая разработка теории поступательно-вращательного движения твердых тел была начата относительно недавно.

Общая постановка задачи и вывод дифференциальных уравнений, описывающих совместное поступательно-вращательное движение абсолютно твердых тел, были даны в 1958 г. пионерских работах Г.Н. Дубошина [1–7], В.Т. Кондураря [8–13]. Параллельно со строгой небесно-механической постановкой задач поступательно-вращательного движения, была разработана теория поступательно-вращательного движения искусственных небесных тел. Пионерские работы в этом направлении принадлежат В.В. Белецкому [14–16], В.А. Сарычеву [17] и Ф.Л. Черноушко [18]. Эти работы фактически положили начало активному изучению проблемы поступательно-вращательного движения небесных тел и искусственных спутников

Земли в общем виде. Сегодня теория поступательно-вращательного движения абсолютно твердых небесных тел — один из крупных разделов современной классической и небесной механики, а также космодинамики. Большой вклад в теорию поступательно-вращательного движения внесли Ю.В. Баркин [19, 20], В.В. Видякин [21–24], С.Г. Журавлев [25–28], Ж.С. Ержанов, А.А. Калыбаев [29–35], А.А. Баймухаметов [36, 37] и их ученики.

Достижения теории поступательно-вращательного движения отражены в обзорах Ю.В. Баркина и В.Г. Демина [19], В.В. Видякина [21, 23] и С.Г. Журавлева и А.А. Петруцкого [25, 26].

Наблюдательная астрономия свидетельствует о том, что реальные небесные тела не только несферичные, но и не являются абсолютно твердыми телами — они нестационарные [38–46]. Со временем изменяются их массы, размеры, формы и структуры распределения массы внутри тел [41]. В настоящее время установлено, что в процессе эволюции космических тел изменяются не только их массы, но и размеры, форма и структура. Так, например, явление пульсирующих переменных звезд объясняется периодическими изменениями их радиусов [47].

Как следует из теории внутренней эволюции звезд [48], на различных этапах развития звезды испытывают значительные сжатия или расширения. Например, при переходе на стадию красного гиганта размеры звезд, в зависимости от массы, могут возрастать в 10 – 100 раз [49]. Звездные скопления, эволюционирующие на фоне газового или звездного облака, как известно [51], в целом находятся в состоянии пульсации.

Особенно интенсивно процессы диссипации и переноса массы, изменения формы и размеров компонент происходят в тесных двойных системах [50]. Соответственно становится переменной их гравитационная связь и ньютоновский потенциал взаимодействия оказывается явно зависящим от времени. Эти факторы существенно влияют на их динамическую эволюцию. В некоторых этапах эволюции грави-

тирующих систем эффекты нестационарности тел, входящих в систему, становятся ведущим фактором и дальнейший ход событий определяется состоянием системы в конце этого этапа.

Работы В.Г. Фесенкова, Г.М. Иддиса, Т.Б. Омарова, J.D. Hajidemetriou, Л.Г. Лукьянова, Е.Н. Поляховой, А.А. Бекова, А. Deprit, L. Floria и др. подчеркивают особую значимость нестационарных небесномеханических модельных задач в исследовании природы нестационарных космических систем.

Исследование нестационарных динамических проблем астрономии является основным приоритетом научной школы академика Национальной академии наук Республики Казахстан Т.Б. Омарова. С соответствующими достижениями можно ознакомиться по монографиям [38, 40] и по специальным обзорам [39, 46, 52].

Изучение только эффекта переменности масс гравитирующих систем выявило чрезвычайную важность исследований динамики нестационарных систем [38–40, 46]. Между тем естественно, что изменение массы тел влечет за собой изменение размеров и формы этих тел.

Различные комбинации динамических эффектов нестационарности гравитирующих тел, таких как переменность массы, переменность размеров и переменность формы, предопределяют богатое разнообразие эволюционных путей гравитирующих систем. Исследования этих явлений, в небесномеханическом аспекте, вскрывают природу динамической эволюции нестационарных планетных, звездных и галактических систем. Этим определяется выбор направления исследования.

К этому направлению примыкают некоторые проблемы космодинамики, в которой рассматриваются искусственные небесные тела с переменной геометрией масс и с переменным составом в поле сил естественных небесных тел, в движении которых требуется целенаправленное оптимальное управление их параметрами [17, 54–56].

Актуальной и перспективной малоизученной проблемой являет-

ся проблема поступательно-вращательного движения взаимогравитирующих небесных тел с переменной массой, с переменными размерами и с переменной формой. Эта проблема включает в себя вращательное движение вокруг центра масс, как естественных так и искусственных нестационарных небесных тел, и поступательное движение их центров масс с учетом взаимосвязи поступательного и вращательного движений.

Настоящая монография посвящена исследованию именно этой проблемы. Её выбор обусловлен широким кругом актуальных не исследованных или малоисследованных физических явлений в нестационарных гравитирующих системах, требующих теоретического описания созданием новых небесномеханических модельных задач. Целью исследования являются постановка нестационарных небесномеханических модельных задач поступательно-вращательного движения гравитирующих тел с переменными массами, размерами и формой в совместном рассмотрении и создание основ аналитической теории их движения. В соответствии с целью исследования определены следующие задачи исследования:

- изучить поступательное движение многих нестационарных гравитирующих сферических тел или точек (барицентров тел);
- изучить поступательное движение пробной частицы в поле притяжения центрального нестационарного тела переменной массы, размеров и формы;
- изучить совместное поступательно-вращательное движение нестационарных тел переменной массы, размеров и постоянной формы, когда размеры тел меняются гомотетично (подобно исходному);
- изучить совместное поступательно-вращательное движение многих нестационарных осесимметричных тел переменной массы, размеров и с переменным коэффициентом сжатия (вытянутости).

Объектом исследования является поступательно-вращательное движение как естественных, так и искусственных небесных тел с переменной массой и размерами.

Для достижения вышеуказанной цели в сформулированных задачах широко используется метод Гамильтона-Якоби, специально выбранные новые промежуточные движения, теория возмущений в различных переменных и в различной форме, в том числе, каноническая теория возмущений, математический аппарат теории гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, аналитическая геометрия систем материальных точек. В частном случае, когда массы и размеры тел постоянные, наши результаты совпадают с данными теории поступательно-вращательных движений твердых тел, полученными другими авторами. Отметим что, модельные задачи, исследуемые в монографии адекватно отражают вековые изменения механических параметров индивидуальных тел в динамике реальных нестационарных гравитирующих систем.

В первой главе подготовлен математический аппарат исследования – каноническая теория возмущения на базе аperiodического движения по квазиконическому сечению в аналогах элементов Якоби, Делоне и Пуанкаре. Выведены также уравнения возмущенного движения в форме уравнений Лагранжа для элементов аperiodического движения по квазиконическому сечению – аналоги классических кеплеровских элементов. Полученные различные виды уравнений возмущенного движения далее используются во всех главах монографии.

В первой главе также рассматриваются четыре задачи нестационарных гравитирующих бинарных систем. Выведены канонические уравнения в аналогах элементов Делоне задачи о движении точки вокруг сферического тела переменной массы, окруженного гравитирующей и сопротивляющейся средой нестационарной плотности. Получены решения канонических дифференциальных уравнений, описывающие вековые возмущения.

Исследуется задача Лапина двух тел с переменными массами. Задача описывается каноническими уравнениями Гамильтона и получены строгие частные решения этих уравнений. В общем случае, получены канонические уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Делоне и показано, что исследование вековых возмущений сводится к неавтономной канонической системе только с одной степенью свободы.

Изучается движение точки переменной массы в поле притяжения нестационарного тела с осесимметричным потенциалом. Движения точки описываются каноническими уравнениями Гамильтона. При приближенном значении силовой функции, учитывающей разложение осесимметричного потенциала по полиномам Лежандра до пятой гармоники включительно, получен класс частных решений канонических неавтономных дифференциальных уравнений. При этом предполагается, что размеры, масса и сжатие осесимметричного тела зависят явно от времени.

Далее исследуется движение пробной точки в поле притяжения нестационарного трехосного эллипсоида. В разложении потенциала по полиномам Лежандра учитывается главный член – вторая гармоника. Используются уравнения возмущенного движения в форме уравнений Лагранжа. Получены уравнения возмущенного движения в оскулирующих элементах апериодического движения по квазиконическому сечению. Выведены дифференциальные уравнения, описывающие вековые возмущения и найдены строгие решения этих уравнений.

Во второй главе исследуется задача трех тел (точек) с переменными массами в случае, когда массы тел меняются со временем в одинаковом темпе и в случае, когда темпы изменения масс тел различны. В случае, когда темп изменения масс тел одинаков, получены дифференциальные уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Делоне и путем исключения узла порядок системы понижен до восьми при любом законе изменения масс.

Полученная в этой главе система канонических неавтономных дифференциальных уравнений с четырьмя степенями свободы является базовой для различных приложений. Соответствующая система канонических дифференциальных уравнений, описывающая вековые возмущения, имеет две степени свободы.

В случае плоских движений уравнения вековых возмущений имеют только одну степень свободы. При этом, если массы тел изменяются в одинаковом темпе в соответствии с законами Мещерского, уравнения вековых возмущений в случае плоского движения сводятся к квадратуре.

Далее, задача трех тел (точек) с изменяющимися в одинаковом темпе массами исследуется в приближении Хилла. Показано, что в этом приближении уравнения, определяющие вековые возмущения в аналогах элементов Делоне, сводятся к неавтономной канонической системе с одной степенью свободы. В случае изменения массы по законам Мещерского, эта система с одной степенью свободы интегрируется до конца. Качественная картина, в отличие от соответствующего стационарного случая, зависит не от двух, а от трех параметров, где третий параметр характеризует закон изменения массы.

В случае, когда темпы изменения масс тел различны, рассматриваются изотропное и анизотропное изменения масс тел. Получены уравнения движения в координатах Якоби и в барицентрической системе координат. Найдены инварианты центра масс в барицентрической системе координат. В одном частном случае, когда предполагается, что выражение скорости барицентра имеет классический вид, инварианты центра масс существенно упрощаются. В этом случае с использованием инвариантов центра масс получены частные решения задачи трех тел с изотропно изменяющимися в различных темпах массами. Выведены уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Якоби, Делоне и Пуанкаре. Уравнения движения в аналогах второй системы Пуанкаре удобны для изучения двух-

планетной задачи трех тел с изменяющимися в различных темпах массами.

В третьей главе изучается ограниченная задача трех тел с переменными массами. Сначала рассмотрена осредненная ограниченная задача трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами. В случае, когда массы активно гравитирующих тел изменяются изотропно согласно законам Мещерского, принимаются их квазикруговые движения. Отмечается, что можно получить интегрируемые случаи рассматриваемой ограниченной задачи трех тел с переменными массами осредняя по схеме Гаусса в пространственной задаче и осредняя по схемам Фату, Моисеева, Делоне-Хилла в плоской задаче.

Более подробно рассматривается схема Гаусса в пространственной задаче. Получены первые интегралы, наличие которых сводит задачу к квадратуре. В приближении Хилла эти квадратуры упрощаются: решения сводятся к эллиптическим квадратурам и их можно представить как функции времени. Отмечаются интегрируемые случаи задачи, когда массы активно гравитирующих тел изменяются со временем анизотропно.

Далее исследуется случай, когда массы активно гравитирующих тел изменяются в различных темпах. При этом суммарная масса этих тел изменяются со временем по законам Мещерского, а индивидуальная масса каждого тела по другим законам. Показана интегрируемость пространственной схемы Гаусса в приближении Хилла. Отмечается, что аналогично могут быть рассмотрены и другие схемы осреднения.

Рассматривается общий случай, когда массы активно гравитирующих тел изменяются анизотропно в различных темпах и их движения описываются задачей Лапина. На основе найденных частных решений задачи Лапина, приведенных в первой главе, сформулирована новая постановка ограниченной задачи трех тел переменной массы.

В четвертой главе исследуется задача многих гравитирующих тел (точек) с изменяющимися в различных темпах массами. Получены уравнения движения задачи в координатах Якоби в барицентрической системе координат, когда массы тел изменяются со временем изотропно и анизотропно по произвольному закону. В барицентрической системе координат получены инварианты центра масс в рассматриваемой задаче многих тел с массами, изменяющимися в различных темпах. В частном случае, когда предполагается, что массы тел изменяются со временем приблизительно в одинаковом темпе, получена аналитическая оценка времени перехода системы многих тел убывающей массы из начального состояния с отрицательной энергией в распадающееся состояние с положительной энергией. Исходя из уравнений движения задачи, полученных в координатах Якоби на базе соответствующих аperiодических движений по квазиконическому сечению, строится каноническая теория возмущений. Получены уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Якоби, Делоне и Пуанкаре.

Глава пятая посвящена задаче о поступательно вращательном движении многих тел переменных размеров и массы. Здесь сформулирована постановка задачи о поступательно-вращательном движении многих тел постоянной формы, но переменных размеров и массы. Получены уравнения движения в различных системах координат, выведены некоторые первые интегралы задачи при достаточно общих предположениях относительно изменения масс и размеров.

Выводятся уравнения возмущенного движения в различных системах оскулирующих элементов. При этом в качестве промежуточного для поступательного движения центра масс тел принимается соответствующее аperiодическое движение по квазиконическому сечению, а в качестве невозмущенного для вращательного движения каждого тела вокруг собственного центра масс принимается вращение по инерции нестационарного тела вокруг центра масс – нестационарный аналог движения Эйлера-Пуансо. Выведены урав-

нения возмущенного движения в аналогах элементов Якоби, Делоне-Андуайе, Делоне-Пуассона (Делоне – «действие-угол»).

Получены также уравнения возмущенного поступательно-вращательного движения нестационарных тел переменной массы и размеров в форме уравнений Лагранжа. Здесь поступательные движения центра масс тел характеризуются оскулирующими элементами аperiодического движения по квазиконическому сечению, введенные в первой главе. Вращательное движение каждого нестационарного тела описываются соответствующими аналогами элементов Белецкого-Черноуьско. При этом невозмущенные вращательные движения описываются нестационарными аналогами уравнений Уиттекера.

Отмечено, что уравнения невозмущенного вращательного движения интегрируются кроме случая нестационарных трехосных тел постоянной формы, переменного размера и массы и ещё для случая нестационарных осесимметричных тел переменной массы, переменного размера и переменной формы – переменного сжатия. Это обстоятельство очень важно тем, что угловая скорость угла собственного вращения каждого тела может менять знак.

Получены нестационарные аналоги уравнений возмущенного движения Белецкого-Черноуьско, которые применимы и в случае, когда возмущающие моменты имеют непотенциальную природу.

В шестой главе исследуется поступательно-вращательное движение двух нестационарных тел: шар – трехосное тело. Предполагается, что первое тело есть шар со сферическим распределением с переменными плотностью, радиусом и массой, второе — трехосное тело с произвольным динамическим строением, формой и с переменной массой, размеры которого меняются гомотетично, т.е. подобным образом (лучистое расширение или сжатие). Допускается, что массы тел изменяются в одинаковом темпе и абсолютная скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц равна нулю и они не создают дополнительный вращательный момент. Относительное

поступательно-вращательное движение описывается каноническими уравнениями в цилиндрической системе координат. С использованием одного интеграла площадей понижается порядок системы дифференциальных неавтономных канонических уравнений и найдены шесть частных решений этих неавтономных канонических уравнений. Эти частные решения обобщают известные плоские движения в соответствующей стационарной задаче типа «стрела», «спица» и «поплавок» в рассмотренном нестационарном случае. При этом использовано приближенное выражение силовой функции, учитывающее вторую гармонику включительно. Законы изменения масс и размеров достаточно произвольные, на них налагаются лишь определенные условия.

Далее рассматривается случай, когда массы тел изменяются в различных темпах. Поступательное движение двух тел характеризуется соответствующим обобщением задач двух тел-точек – задачей Лапина. Получены канонические уравнения рассматриваемой задачи в квазисферических координатах. Найдены также шесть частных решений типа «стрела», «спица» и «поплавок», которые, в отличие от предыдущего случая, пространственные. При этом центр масс нестационарного трехосного тела относительно центра нестационарного шара движется в пространстве по поверхности конуса, вершина которого совпадает с центром нестационарного шара (начало координат).

В случае шара и осесимметричного тела при полном выражении силовой функции методом автономизации найдены также шесть частных решений типа «стрела», «спица» и «поплавок». В решениях типа «стрела» и «поплавок» для осесимметричного тела предполагается симметрия относительно экватора. При этом центр масс осесимметричного тела движется вокруг нестационарного шара в неизменной плоскости по спирали. Изменения масс и размеров тел во времени взаимосвязаны и характеризуются законами Мещерского.

Исследуются плоские частные решения двух нестационарных тел: трехосное тело – трехосное тело при приближенном выражении силовой функции. Предполагается, что массы и размеры тел изменяются в одинаковом темпе. Задача исследуется в квазицилиндрических координатах. Получены канонические уравнения. Каждое тело, относительно другого, допускает шесть равновесных положений, поэтому, в совокупности имеем тридцать шесть различных частных плоских решений типа «стрела», «спица» и «поплавок».

Далее задача о поступательно-вращательном движении двух нестационарных тел: шар – трехосное тело, исследуется в оскулирующих элементах. Поступательное движение центра масс трехосного нестационарного тела описывается оскулирующими элементами аperiodического движения по квазиконическому сечению. Вращательное движение трехосного тела вокруг собственного центра масс характеризуется аналогами элементов Белецкого-Черноусько. Получено выражение возмущающей функции через оскулирующие элементы. Задачи описываются уравнениями возмущенного движения в форме уравнений Лагранжа, введенными в первой главе и аналогами уравнений Белецкого-Черноусько, введенными в пятой главе. Эти уравнения, хотя и не являются каноническими, удобны для исследования вековых возмущений, в силу своей наглядности. Подробно исследуется случай, когда поступательно-вращательное движение совершает нестационарное осесимметричное тело. Получены уравнения, описывающие вековые возмущения и найдены полные вековые возмущения первого порядка. Этот случай интересен тем, что можно рассмотреть два типа нестационарности тела. Первый – гомотетичное изменение размера осесимметричного тела переменной массы и постоянной формы, второй – нестационарное осесимметричное тело переменного размера, переменной массы и переменной формы – переменного сжатия (вытянутости). Во втором случае, когда эллипсоид инерции переходит через сферу, скорость собственного угла вращения равна нулю и в последующий момент меняет

знак. При этом нестационарное осесимметричное тело начинает вращаться в противоположную сторону.

В заключении приведен краткий вывод по результатам, полученных в монографии, и перспектива дальнейших исследований.

Автор выражает глубокую благодарность своему Учителю в науке, академику Национальной академии наук Республики Казахстан Т.Б. Омарову за постоянное внимание и ценные советы в ходе выполнения и написания работы.

Глава 1

Каноническая теория возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению и некоторые задачи нестационарных бинарных систем

1.1. Постановка задачи

Широко известная задача Гюльдена-Мещерского описывает динамические эффекты нестационарности гравитационной связи между двумя телами вследствие только изотропного изменения их масс. Причем тела рассматриваются как материальные точки или шары (сферы) со сферическим распределением плотности, зависящей от времени и переменного радиуса. Наряду с задачей Гюльдена-Мещерского изучались также и другие, более общие, схемы нестационарной задачи двух точечных тел. Так как ньютоновское притяжение шара со сферическим распределением переменной плотности совпадает с ньютоновским притяжением соответствующей материальной точки, расположенной в его центре, под точечными телами подразумевается шаровидные тела с вышеуказанными свойствами. Небесно-механические аспекты этих задач рассмотрены в работах [52, 109, 142, 145, 146].

Рассмотрим обобщенную задачу двух точечных тел с переменными массами в прямоугольной декартовой системе координат $OXYZ$

при наличии возмущающей силы

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -f m(t) \frac{x}{r^3} - a(t) \dot{x} - b(t) x + \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -f m(t) \frac{y}{r^3} - a(t) \dot{y} - b(t) y + \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -f m(t) \frac{z}{r^3} - a(t) \dot{z} - b(t) z + \frac{\partial R}{\partial z},\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

где $R = R(t, x, y, z)$ — силовая функция возмущающей силы, f — гравитационная постоянная, $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а $m = m(t)$, $a = a(t)$, $b = b(t)$ — функции времени, характеризующие соответствующие силы, причем $m(t)$ — дифференцируемая функция.

Если

$$R = 0,\tag{1.1.2}$$

$$a = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right), \quad b = - \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{m}}{m} \right) \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right],\tag{1.1.3}$$

то уравнения (1.1.1) допускают решение в элементарных функциях [98], где

$$\gamma = \gamma(t),\tag{1.1.4}$$

безразмерная, достаточно произвольная функция времени, по меньшей мере, дважды дифференцируемая, причем $\gamma(t_0) = 1$.

В этом случае уравнение (1.1.1) имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -f m(t) \frac{x}{r^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \dot{x} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right] x, \\ \ddot{y} &= -f m(t) \frac{y}{r^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \dot{y} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right] y, \\ \ddot{z} &= -f m(t) \frac{z}{r^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \dot{z} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right] z.\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

Решение уравнений (1.1.5), в общем случае описывающее аperiодическое движение по квазиконическому сечению, было предложено

нами в качестве промежуточного решения для проблем гравитирующих систем с переменными массами, а также были выведены уравнения возмущенного движения в форме уравнений Ньютона [98,103].

Отметим, что в силу произвольности функции (1.1.4), уравнения (1.1.5) фактически описывают целый класс промежуточных движений.

Некоторые частные случаи уравнения (1.1.5) были изучены позднее другими авторами [99, 102, 124]. Если предположим, что

$$\gamma = \left(\frac{m(t)}{m(t_0)} \right)^{1/3}, \quad (1.1.6)$$

то будем иметь периодическое движение по квазиконическому сечению и система уравнений (1.1.5) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -f m(t) \frac{x}{r^3} + \frac{2\dot{m}}{3m} \dot{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{\ddot{m}}{m} - \frac{4\dot{m}^2}{3m^2} \right) x, \\ \ddot{y} &= -f m(t) \frac{y}{r^3} + \frac{2\dot{m}}{3m} \dot{y} + \frac{1}{3} \left(\frac{\ddot{m}}{m} - \frac{4\dot{m}^2}{3m^2} \right) y, \\ \ddot{z} &= -f m(t) \frac{z}{r^3} + \frac{2\dot{m}}{3m} \dot{z} + \frac{1}{3} \left(\frac{\ddot{m}}{m} - \frac{4\dot{m}^2}{3m^2} \right) z. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Частный случай (1.1.7), вытекающий из уравнения (1.1.5) при условии (1.1.6) были рассмотрены А.Т. Майлыбаевым [99], А.А. Бекковым [124]. В частности, А.Т. Майлыбаев на основе промежуточного движения (1.1.7) получил изменение периода нестационарных двойных систем, описываемое уравнением Гюльдена-Мещерского [101].

Другой частный случай, когда

$$\gamma = \left(\frac{m(t)}{m(t_0)} \right)^k, \quad k = \text{const}, \quad (1.1.8)$$

и соответствующие уравнения

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= -f m(t) \frac{x}{r^3} + \frac{1}{2}(k+1) \frac{\dot{m}}{m} \dot{x} + k \left[\frac{\ddot{m}}{m} + \frac{1}{2}(k-3) \frac{\dot{m}^2}{m^2} \right] x, \\
 \ddot{y} &= -f m(t) \frac{y}{r^3} + \frac{1}{2}(k+1) \frac{\dot{m}}{m} \dot{y} + k \left[\frac{\ddot{m}}{m} + \frac{1}{2}(k-3) \frac{\dot{m}^2}{m^2} \right] y, \\
 \ddot{z} &= -f m(t) \frac{z}{r^3} + \frac{1}{2}(k+1) \frac{\dot{m}}{m} \dot{z} + k \left[\frac{\ddot{m}}{m} + \frac{1}{2}(k-3) \frac{\dot{m}^2}{m^2} \right] z,
 \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

был рассмотрен А.А. Бековым [102], и подтверждены наши аналитические результаты [103], причем это было выполнено другим методом .

Уравнения возмущенного движения в форме уравнений Ньютона, хотя и являются наиболее общими в случае, когда возмущающие силы допускают силовую функцию, неудобны. В этом случае предпочтительнее уравнения возмущенного движения в форме канонических уравнений Гамильтона, которые обладают, как и в классических задачах, рядом преимуществ и изяществом [70].

Система уравнений (1.1.5) допускает, в общем случае, построение канонической теории возмущений за исключением некоторых частных случаев, когда добавочная сила пропорциональная скорости препятствует этому. Например $\gamma = \text{const}$, т.е.,

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= -f m(t) \frac{x}{r^3} + \frac{\dot{m}}{2m} \dot{x}, \\
 \ddot{y} &= -f m(t) \frac{y}{r^3} + \frac{\dot{m}}{2m} \dot{y}, \\
 \ddot{z} &= -f m(t) \frac{z}{r^3} + \frac{\dot{m}}{2m} \dot{z}.
 \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Последние уравнения описывают широко известное аperiодическое движение по коническому сечению, представленные впервые одновременно и независимо Т.Б. Омаровым [104] и Хаджидеметриу [105], которые допускают интегрирование методом Гамильтона-Якоби [106]. Однако, из-за добавочной силы

$$\vec{F} = \frac{\dot{m}}{2m} \dot{\vec{r}} \tag{1.1.11}$$

непотенциальной природы, не удается построение канонической теории возмущений на базе уравнений (1.1.10).

Для построения канонической теории возмущений аналогичный недостаток имеет промежуточное движение, описываемое системой (1.1.9), на котором акцентирует внимание А.А. Беков [102]. Здесь сила, пропорциональная скорости

$$\vec{F} = \frac{1}{2}(k+1)\frac{\dot{m}}{m}\dot{\vec{r}}, \quad k \neq 1, \quad (1.1.12)$$

препятствует построению канонической теории возмущений, хотя уравнения движения и интегрируются методом Гамильтона-Якоби.

В предложенной нами канонической теории возмущений [70], при необходимости, силы, аналогичные (1.1.12), включаются в исходное невозмущенное движение благодаря произвольности функции (1.1.4) соответствующим выбором $\gamma = \gamma(t)$ и таким образом исключаются из структуры возмущающей функции. Итак, построим каноническую теорию возмущений на базе уравнений (1.1.5), предполагая произвольность функции

$$\gamma = \gamma(t) \neq \text{const.}$$

1.2. Интегрирование дифференциальных уравнений промежуточного движения методом Гамильтона-Якоби

Рассмотрим дифференциальные уравнения аperiодического движения по квазиконическому сечению при наличии возмущающей силы в прямоугольной декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -fm\frac{x}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{x} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]x + \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -fm\frac{y}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{y} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]y + \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -fm\frac{z}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{z} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]z + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Перейдем к квазисферическим обобщенным координатам ρ, λ, δ посредством формул

$$x = \gamma\rho \cos \delta \cos \lambda, \quad y = \gamma\rho \cos \delta \sin \lambda, \quad z = \gamma\rho \sin \delta. \quad (1.2.2)$$

Выражение кинетической энергии имеет вид

$$K = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\gamma^2 \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \cdot \dot{\delta}^2 + \rho^2 \cos^2 \delta \cdot \dot{\lambda}^2 \right) + \gamma\dot{\gamma}\rho\dot{\rho} + \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2\rho^2.$$

Вычисляя по обычным правилам [107] обобщенные импульсы

$$P_\rho = \frac{\partial K}{\partial \dot{\rho}} = \gamma^2\dot{\rho} + \gamma\dot{\gamma}\rho, \quad P_\delta = \frac{\partial K}{\partial \dot{\delta}} = \gamma^2\rho^2\dot{\delta}, \quad P_\lambda = \frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}} = \gamma^2\rho^2 \cos^2 \delta \dot{\lambda}, \quad (1.2.3)$$

перепишем систему (1.2.1) в следующей форме

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial P_\rho}, & \dot{P}_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) P_\rho, \\ \dot{\delta} &= \frac{\partial H}{\partial P_\delta}, & \dot{P}_\delta &= -\frac{\partial H}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) P_\delta, \\ \dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial P_\lambda}, & \dot{P}_\lambda &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) P_\lambda, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

где функция Гамильтона H имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\gamma^2} \left\{ (P_\rho - \gamma\dot{\gamma}\rho)^2 + \frac{P_\delta^2}{\rho^2} + \frac{P_\lambda^2}{\rho^2 \cos^2 \delta} \right\} - \\ &- \left\{ \frac{fm}{\gamma\rho} + \frac{1}{2} \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right] \gamma^2\rho^2 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2\rho^2 \right\} - R. \end{aligned}$$

Переходя к новым импульсам

$$P_\rho = \psi\tilde{P}_\rho, \quad P_\delta = \psi\tilde{P}_\delta, \quad P_\lambda = \psi\tilde{P}_\lambda, \quad (1.2.5)$$

$$\psi = \psi(t) = \left(\frac{m}{m_0} \gamma \right)^{1/2}, \quad m_0 = m(t_0), \quad (1.2.6)$$

придадим системе уравнений (1.2.4) канонический вид

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{P}_\rho}, & \dot{\delta} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{P}_\delta}, & \dot{\lambda} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{P}_\lambda}, \\ \dot{\tilde{P}}_\rho &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \rho}, & \dot{\tilde{P}}_\delta &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \delta}, & \dot{\tilde{P}}_\lambda &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda}.\end{aligned}\tag{1.2.7}$$

В системе канонических уравнений (1.2.7) функция Гамильтона выражается соотношением

$$\tilde{H} = H_0 + H_1,\tag{1.2.8}$$

$$\begin{aligned}H_0 &= \frac{\psi}{2\gamma^2} \left\{ \left(\tilde{P}_\rho - \frac{\gamma\dot{\gamma}}{\psi}\rho \right)^2 + \frac{\tilde{P}_\delta^2}{\rho^2} + \frac{\tilde{P}_\lambda^2}{\rho^2 \cos^2 \delta} \right\} - \\ &- \frac{1}{\psi} \left\{ \frac{fm}{\gamma\rho} + \frac{1}{2} \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right] \gamma^2 \rho^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \rho^2 \right\}, \\ H_1 &= -\frac{1}{\psi} R(t, \rho, \delta, \lambda).\end{aligned}$$

При $H_1 = 0$ ($R = 0$) упрощенная система

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{P}_\rho}, & \dot{\delta} &= \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{P}_\delta}, & \dot{\lambda} &= \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{P}_\lambda}, \\ \dot{\tilde{P}}_\rho &= -\frac{\partial H_0}{\partial \rho}, & \dot{\tilde{P}}_\delta &= -\frac{\partial H_0}{\partial \delta}, & \dot{\tilde{P}}_\lambda &= -\frac{\partial H_0}{\partial \lambda}.\end{aligned}\tag{1.2.9}$$

интегрируется методом Гамильтона-Якоби [70, 108, 147]. Соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0 = 0$$

имеет полный интеграл

$$S = -\alpha_1 \int_{t_0}^t \left(\frac{m}{m_0 \gamma^3} \right)^{1/2} dt + \frac{\gamma\dot{\gamma}}{2\psi} \rho^2 + W_1(\rho) + W_2(\delta) + W_3(\lambda),$$

причем

$$W_1(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \left(2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2} + \frac{2fm_0}{\rho} \right)^{1/2} d\rho,$$

$$W_2(\delta) = \int_0^{\delta} \left(\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \delta} \right)^{1/2} d\delta, \quad W_3(\lambda) = \alpha_3 \lambda,$$

где ρ_1 – меньший корень уравнения $2\alpha_1\rho^2 + 2fm_0\rho - \alpha_2^2 = 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – произвольные постоянные. В результате находим общий интеграл упрощенной системы (1.2.9)

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \beta_3,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \rho} = \tilde{P}_\rho, \quad \frac{\partial S}{\partial \delta} = \tilde{P}_\delta, \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \tilde{P}_\lambda,$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ новые произвольные постоянные.

Учитывая преобразование (1.2.5) напомним общий интеграл промежуточного движения в виде

$$\int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{2\alpha_1 + 2\frac{fm_0}{\rho} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}} = \phi(t) + \beta_1,$$

$$\alpha_2 \int_0^{\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \delta}}} - \alpha_2 \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\alpha_1 + 2\frac{fm_0}{\rho} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}} = \beta_2, \quad (1.2.10)$$

$$\lambda - \alpha_3 \int_0^{\delta} \frac{d\delta}{\cos^2 \delta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \delta}}} = \beta_3,$$

$$\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2fm_0}{\rho} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}} = \frac{\gamma^2}{\psi} \dot{\rho}, \quad \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \delta}} = \frac{\gamma^2}{\psi} \rho^2 \dot{\delta}, \quad (1.2.11)$$

$$\alpha_3 = \frac{\gamma^2}{\psi} \rho^2 \cos^2 \delta \cdot \dot{\lambda},$$

где $\phi(t)$ — первообразная функции $(m/m_0\gamma^3)^{1/2}$.

Соотношения (1.2.10), (1.2.11) содержат шесть необходимых для общего интеграла промежуточного движения произвольных постоянных

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad (1.2.12)$$

которые являются аналогами канонических элементов Якоби кеплеровского движения [7] и превращаются в них при

$$m = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}.$$

Из системы интегралов (1.2.10), полагая

$$\sin \delta = \sin i \cdot \sin u,$$

получим

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad p = a(1 - e^2), \quad \vartheta = u - \omega, \quad (1.2.13)$$

причем

$$-2\alpha_1 = \frac{fm_0}{a}, \quad \alpha_2 = \sqrt{fm_0p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{fm_0p} \cos i, \quad (1.2.14)$$

$$\beta_1 = -\phi(\tau), \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega,$$

где

$$a, \quad e, \quad \omega, \quad \Omega, \quad i, \quad \phi(\tau) \quad (1.2.15)$$

аналоги классических кеплеровских элементов, введенные нами в работе [98].

Из интегралов (1.2.10), (1.2.11) также следуют

$$\dot{\rho} = \frac{\psi}{\gamma^2} \sqrt{\frac{fm_0}{p}} e \sin \vartheta, \quad (1.2.16)$$

$$\dot{i} = \frac{\psi}{\gamma^2} \frac{\sqrt{fm_0p}}{\rho^2}, \quad u = \vartheta + \omega, \quad (1.2.17)$$

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \frac{\sqrt{f m_0}}{p^{3/2}} [\phi(t) - \phi(\tau)]. \quad (1.2.18)$$

Общий анализ рассмотренного промежуточного движения – аperiodического движения по квазиконическому сечению выполнен в работе [98]. Соотношение (1.2.18) в случае квазиэллиптических движений

$$e < 1, \quad (1.2.19)$$

посредством стандартного преобразования

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

приводится к уравнению Кеплера

$$E - e \sin E = M, \quad (1.2.20)$$

где

$$M = n[\phi(t) - \phi(\tau)], \quad E \quad (1.2.21)$$

— аналоги средней и эксцентрической аномалий кеплеровского движения, соответственно, а

$$n = \frac{\sqrt{f m_0}}{a^{3/2}} \quad (1.2.22)$$

есть аналог кеплеровского среднего движения.

Формулы для координат и скорости в прямоугольной декартовой системе координат, для компактности, приведем в системе элементов (1.2.15)

$$\begin{aligned} x &= \gamma \rho [\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i], \\ y &= \gamma \rho [\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i], \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

$$z = \gamma \rho [\sin u \sin i], \quad r = \gamma \rho,$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) x + \gamma \rho \dot{u} [-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i], \\
\dot{y} &= \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) y + \gamma \rho \dot{u} [-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i], \\
\dot{z} &= \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) z + \gamma \rho \dot{u} [\cos u \sin i].
\end{aligned} \tag{1.2.24}$$

Заметим, что в случае квазиэллиптического движения, в силу уравнений Кеплера (1.2.20), координаты, скорости и другие величины невозмущенного движения могут быть разложены, как и в кеплеровском движении, в различные ряды.

Это обстоятельство дает возможность использовать хорошо разработанную теорию рядов эллиптического движения классической задачи двух тел постоянной массы [7, 110, 148]. Например, квадрат радиус-вектора может быть выражен следующим образом [107]

$$\begin{aligned}
r^2 = \gamma^2 \rho^2 = \gamma^2 a^2 \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 &= \gamma^2 a^2 \left[1 + \frac{3}{2} e^2 + \left(-2 e + \frac{e^3}{4} \right) \times \right. \\
&\times \cos M - \frac{e^2}{2} \cos 2 M - \frac{e^3}{4} \cos 3 M + \dots \left. \right].
\end{aligned} \tag{1.2.25}$$

Отметим, что невозмущенное движение в уравнениях (1.2.1) при $R = 0$ может быть описано и в другой форме. Обозначим

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) = a(t). \tag{1.2.26}$$

Тогда уравнения невозмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -f m(t) \frac{x}{r^3} - a(t) \dot{x} + \left(\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + a \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) x, \\
\ddot{y} &= -f m(t) \frac{y}{r^3} - a(t) \dot{y} + \left(\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + a \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) y, \\
\ddot{z} &= -f m(t) \frac{z}{r^3} - a(t) \dot{z} + \left(\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + a \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) z,
\end{aligned} \tag{1.2.27}$$

где

$$m = m(t), \quad a = a(t) \quad (1.2.28)$$

заданные функции времени, $\gamma = \gamma(t)$ зависит от этих функций и определяется формулой

$$\gamma = \frac{m(t_0)}{m(t)} \exp \left[-2 \int_{t_0}^t a(t) dt \right]. \quad (1.2.29)$$

Указанная форма уравнений невозмущенного движения (1.2.27) при заданном $m(t), a(t)$ дает возможность сразу определить функцию $\gamma = \gamma(t)$.

1.3. Уравнения возмущенного движения

в аналогах элементов Якоби, Делоне и Пуанкаре

Теперь, применяя метод Лагранжа вариации произвольных постоянных к аналогам элементов Якоби (1.2.12) невозмущенного движения (1.2.9), напомним канонические уравнения возмущенного движения (1.2.1) в виде

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.3.1)$$

где

$$\tilde{R} = \frac{1}{\psi} R(t, \alpha_i, \beta_i). \quad (1.3.2)$$

Как уже было отмечено, выражение возмущающей функции через элементы, в силу уравнений Кеплера (1.2.20), формально-математически такое же, как и в кеплеровском движении.

Уравнения возмущенного движения в виде (1.3.1) обладают теми же недостатками, что и уравнения возмущенного движения в элементах Якоби классической теории возмущений в небесной механике тел постоянной массы [7]. Поэтому целесообразно сделать переход к аналогам элементов Делоне по формулам

$$-2\alpha_1 = \frac{\mu_0^2}{L^2}, \quad \alpha_2 = G, \quad \alpha_3 = H, \quad (1.3.3)$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_0^2}{L^3}l - \phi(t), \quad \beta_2 = g, \quad \beta_3 = h,$$

причем $\mu_0 = fm_0$, где

$$L, \quad G, \quad H, \quad l, \quad g, \quad h \quad (1.3.4)$$

аналоги систем элементов Делоне. Уравнения возмущенного движения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\partial R^*}{\partial l}, & \dot{G} &= \frac{\partial R^*}{\partial g}, & \dot{H} &= \frac{\partial R^*}{\partial h}, \\ \dot{l} &= -\frac{\partial R^*}{\partial L}, & \dot{g} &= -\frac{\partial R^*}{\partial G}, & \dot{h} &= -\frac{\partial R^*}{\partial H}, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

причем

$$R^* = \left(\frac{m}{m_0\gamma^3} \right)^{1/2} \frac{\mu_0^2}{2L^2} + \left(\frac{m_0}{m\gamma} \right)^{1/2} R(t, L, G, H, l, g, h). \quad (1.3.6)$$

Взаимосвязь систем элементов (1.3.4) и (1.2.15) дается соотношениями

$$L = \sqrt{\mu_0}\sqrt{a}, \quad G = \sqrt{\mu_0}\sqrt{p}, \quad H = \sqrt{\mu_0}\sqrt{p} \cos i, \quad (1.3.7)$$

$$l = n[\phi(t) - \phi(\tau)], \quad g = \omega, \quad h = \Omega.$$

Следует заметить, что введенные нами аналоги элементов Делоне (1.3.7) совершенно отличаются от «Time - Dependent Delaunay Transformations» введенные А. Deprit [109, п.3] и развитым далее в работе L. Floria [142]. Оскулирующие элементы типа Делоне введенных в работе [109], как показано А. Deprit [109, п.4], являются оскулирующими кеплеровскими элементами в смысле Армелинни - Джинса для задачи Гюльдена - Мещерского.

Ранее Т.Б. Омаровым [104, 38] и J.D. Hajidemetriou [105, 39] было показано, что оскулирующие элементы в смысле Армелинни - Джинса для задачи Гюльдена - Мещерского совпадают с оскулирующими элементами аperiодического движения по коническому сечению (1.1.10) при наличии возмущающей силы

$$F_x = -\frac{\dot{m}}{2m} \dot{x}, \quad F_y = -\frac{\dot{m}}{2m} \dot{y}, \quad F_z = -\frac{\dot{m}}{2m} \dot{z}.$$

Как было отмечено ранее, невозмущенное аperiодическое движение по коническому сечению (1.1.10) является частным случаем целого класса невозмущенных движений – аperiодического движение по квазиконическому сечению (1.1.5) при $\gamma = \text{const}$, и в этом частном случае каноническая теория возмущения нами не рассмотрена.

Исходя из уравнений возмущенного движения (1.3.5), записанных в аналогах систем канонических элементов Делоне (1.3.4), можно ввести различные системы канонических элементов.

Рассмотрим аналоги первой системы канонических элементов Пуанкаре

$$\Lambda, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \lambda, \quad \omega_1, \quad \omega_2. \quad (1.3.8)$$

Они вводятся соотношениями

$$\Lambda = L, \quad \rho_1 = L - G, \quad \rho_2 = G - H, \quad (1.3.9)$$

$$\lambda = l + g + h, \quad \omega_1 = -g - h, \quad \omega_2 = -h.$$

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= \frac{\partial R^*}{\partial \lambda}, & \dot{\rho}_1 &= \frac{\partial R^*}{\partial \omega_1}, & \dot{\rho}_2 &= \frac{\partial R^*}{\partial \omega_2}, \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial R^*}{\partial \Lambda}, & \dot{\omega}_1 &= -\frac{\partial R^*}{\partial \rho_1}, & \dot{\omega}_2 &= -\frac{\partial R^*}{\partial \rho_2}, \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

где

$$R^* = \left(\frac{m}{m_0 \gamma^3} \right)^{1/2} \frac{\mu_0^2}{2\Lambda^2} + \left(\frac{m_0}{m\gamma} \right)^{1/2} R(t, \Lambda, \rho_1, \rho_2, \lambda, \omega_1, \omega_2). \quad (1.3.11)$$

Взаимосвязь между системами элементов (1.3.9.) и (1.2.15) определяется формулами

$$\begin{aligned}\Lambda &= \sqrt{\mu_0} \sqrt{a}, & \lambda &= n[\phi(t) - \phi(\tau)] + \omega + \Omega, \\ \rho_1 &= \sqrt{\mu_0} \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}), & \omega_1 &= -\omega - \Omega, \\ \rho_2 &= \sqrt{\mu_0} \sqrt{a(1 - e^2)}(1 - \cos i), & \omega_2 &= -\Omega.\end{aligned}\tag{1.3.12}$$

Аналоги второй системы канонических элементов Пуанкаре

$$\Lambda, \quad \lambda, \quad \xi, \quad \eta, \quad p, \quad q \tag{1.3.13}$$

определяются формулами

$$\begin{aligned}\Lambda &= L, & \lambda &= l + g + h, \\ \xi &= \sqrt{2(L - G)} \cos(g + h), & \eta &= -\sqrt{2(L - G)} \sin(g + h), \\ p &= \sqrt{2(G - H)} \cos h, & q &= -\sqrt{2(G - H)} \sin h.\end{aligned}\tag{1.3.14}$$

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda} &= \frac{\partial R^*}{\partial \lambda}, & \dot{\xi} &= \frac{\partial R^*}{\partial \eta}, & \dot{p} &= \frac{\partial R^*}{\partial q}, \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial R^*}{\partial \Lambda}, & \dot{\eta} &= -\frac{\partial R^*}{\partial \xi}, & \dot{q} &= -\frac{\partial R^*}{\partial p},\end{aligned}\tag{1.3.15}$$

где

$$R^* = \left(\frac{m}{m_0 \gamma^3} \right)^{1/2} \frac{\mu_0^2}{2\Lambda^2} + \left(\frac{m_0}{m\gamma} \right)^{1/2} R(t, \Lambda, \xi, p, \lambda, \eta, q). \tag{1.3.16}$$

Из соотношения (1.3.7), (1.3.9) получим формулы взаимосвязи между системами элементов (1.3.13) и (1.2.15)

$$\begin{aligned}
\Lambda &= L = \sqrt{\mu_0} \sqrt{a}, \\
\lambda &= n[\phi(t) - \phi(\tau)] + \pi = l + \Omega + \omega, \\
\xi &= \sqrt{2\sqrt{\mu_0} \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2})} \cos \pi, \\
\eta &= -\sqrt{2\sqrt{\mu_0} \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2})} \sin \pi, \\
p &= \sqrt{2\sqrt{\mu_0} \sqrt{a}(1 - e^2)(1 - \cos i)} \cos \Omega, \\
q &= -\sqrt{2\sqrt{\mu_0} \sqrt{a}(1 - e^2)(1 - \cos i)} \sin \Omega,
\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

где $\pi = \Omega + \omega$.

Отметим, что канонические системы элементов (1.3.4) и (1.3.8) обладают свойствами переменных «действие-угол».

1.4. Уравнения возмущенного движения в форме уравнений Лагранжа

В случае (1.2.1), когда возмущающая сила допускает силовую функцию, представляют интерес уравнения возмущенного движения в форме Лагранжа. Хотя эти уравнения не являются каноническими, они дают возможность наглядно определять возмущения в системе элементов (1.2.15). Из уравнений возмущенного движения в аналогах элементов Якоби (1.3.1) с учетом формул взаимосвязи (1.2.14), (1.2.21) получим уравнения возмущенного движения в форме уравнений Лагранжа [70]

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial M},$$

$$\dot{e} = \frac{1 - e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega}, \quad (1.4.1)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{ctgi}{na^2\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Omega},$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i},$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e} - \frac{ctg i}{na^2\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i},$$

$$\dot{M} = \left(\frac{m}{m_0\gamma^3} \right)^{1/2} n - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e}$$

где

$$\tilde{R} = \left(\frac{m_0}{m\gamma} \right)^{1/2} R(t, a, e, \omega, i, \Omega, M). \quad (1.4.2)$$

В некоторых случаях предпочтительна следующая система элементов:

$$a, e, i, \Omega, \pi, \varepsilon, \quad (1.4.3)$$

где аналоги долготы перицентра и долготы эпохи определяются формулами

$$\pi = \beta_2 + \beta_3, \quad (1.4.4)$$

$$\varepsilon = \beta_2 + \beta_3 + \frac{(-2\alpha_1)^{3/2}}{\mu_0} [\beta_1 + \phi(t_0)]. \quad (1.4.5)$$

Тогда, вместо системы (1.4.1) имеем

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \varepsilon}, \quad (1.4.6)$$

$$\dot{e} = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \varepsilon},$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \pi} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \varepsilon} \right), \\ \dot{\Omega} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i}, \\ \dot{\pi} &= \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e}, \\ \dot{\varepsilon} &= -\frac{2}{na} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{R} = \left(\frac{m_0}{m\gamma} \right)^{1/2} R(t, a, e, i, \Omega, \pi, \varepsilon). \quad (1.4.7)$$

Если система уравнений (1.4.1) или (1.4.6.) имеет особенности, то можно ввести аналоги переменных Лагранжа [7] или другие элементы, не имеющие особенностей [28]. Таким образом, получены уравнения возмущенного движения в форме уравнения Лагранжа, которые нами будут применены уже в настоящей главе.

1.5. Канонические уравнения движения точки вокруг гравитирующего сферического тела переменной массы, окруженного гравитирующей и сопротивляющейся средой нестационарной плотности

Пусть центральное сферическое гравитирующее тело переменной массы $m = m(t)$ окружено гравитирующей средой (газовой или пылевой атмосферой), имеющей сферическую структуру, с плотностью, зависящей от времени и оказывающей на движущуюся точку (спутник) сопротивление с силой, пропорциональной плотности среды и скорости движущейся точки. Уравнения движения имеют

вид [112]

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -fm(t)\frac{x}{r^3} - k \cdot \chi \dot{x} - \frac{4}{3}\pi \chi x, \\ \ddot{y} &= -fm(t)\frac{y}{r^3} - k \cdot \chi \dot{y} - \frac{4}{3}\pi \chi y, \\ \ddot{z} &= -fm(t)\frac{z}{r^3} - k \cdot \chi \dot{z} - \frac{4}{3}\pi \chi z,\end{aligned}\tag{1.5.1}$$

где $\chi = \chi(t)$ —плотность окружающей среды, k —постоянный коэффициент пропорциональности, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\pi \approx 3, 14159$.

Рассмотрим уравнения (1.5.1) в оскулирующих аналогах элементов Делоне (1.3.4). Сравнивая уравнения (1.5.1) и (1.2.1) находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) &= -k\chi(t), \\ \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right] \left(\frac{1}{2}r^2 \right) + R &= -\frac{4}{3}\pi\chi(t) \left(\frac{1}{2}r^2 \right).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $\gamma = \gamma(t)$ в рассматриваемой задаче (1.5.1) определяется соотношением

$$\gamma = \gamma(t) = \frac{m_0}{m} \exp \left[-2k \int_{t_0}^t \chi(t) dt \right].\tag{1.5.2}$$

Тогда возмущающая функция имеет вид

$$R = -\frac{1}{2}B(t)r^2,\tag{1.5.3}$$

где

$$\begin{aligned}B = B(t) &= \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + k\chi(t)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{4}{3}\pi \chi(t) = \\ &= -\frac{\ddot{m}}{m} + 2\frac{\dot{m}^2}{m^2} + 3k \chi \frac{\dot{m}}{m} - 2k \dot{\chi} + \frac{4}{3}\pi \chi + 2k^2 \chi^2.\end{aligned}\tag{1.5.4}$$

Используя формулу (1.2.25) получим разложения возмущающей функции (1.5.3) в системе элементов (1.2.15)

$$R = -\frac{1}{2}B(t)\gamma^2(t)a^2[R_1 + R_2], \quad (1.5.5)$$

$$R_1 = R_{\text{векковой}} = 1 + \frac{3}{2}e^2,$$

$$R_2 = R_{\text{периодический}} = \left(-2e + \frac{e^3}{4}\right) \cos M - \frac{e^2}{2} \cos 2M + \dots$$

где согласно формулам (1.3.7), (1.2.21)

$$a = \frac{L^2}{\mu_0}, \quad e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2}, \quad M = l.$$

Уравнения возмущенного движения в аналогах канонических элементов Делоне имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\partial R^*}{\partial l}, & \dot{G} &= 0, & \dot{H} &= 0, \\ \dot{l} &= -\frac{\partial R^*}{\partial L}, & \dot{g} &= -\frac{\partial R^*}{\partial G}, & \dot{h} &= 0, \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

где

$$R^* = \left(\frac{m}{m_0\gamma^3}\right)^{1/2} \frac{\mu_0^2}{2L^2} + \left(\frac{m_0}{m\gamma}\right)^{1/2} \left(-\frac{B(t)}{2}\right) \gamma^2 \frac{L^4}{\mu_0^2} [R_1 + R_2]. \quad (1.5.7)$$

Из системы канонических уравнений (1.5.6) следует, что в рассматриваемой задаче (1.5.1), в случае квазиэллиптического движения, проблема сводится к интегрированию неавтономной канонической системы с одной степенью свободы

$$\dot{L} = \frac{\partial R^*}{\partial l}, \quad \dot{l} = -\frac{\partial R^*}{\partial L}. \quad (1.5.8)$$

Если в формуле (1.5.7), ограничиться вековой частью возмущающей функции (1.5.5), то уравнения вековых возмущений легко интегри-

руются. Решения даются формулами

$$L = L_0, \quad G = G_0, \quad H = H_0, \quad (1.5.9)$$

$$l = \frac{\mu_0^2}{L_0^3} \cdot A_1(t) + \frac{L_0}{2\mu_0^2} (10L_0^2 - 3G_0^2) \cdot A_2(t) + l_0,$$

$$g = -\frac{3L_0^2}{2\mu_0^2} G_0 A_2(t) + g_0, \quad h = h_0,$$

где

$$A_1 = A_1(t) = \int_{t_0}^t \left(\frac{m}{m_0} \right)^2 \exp \left[3k \int_{t_0}^t \chi(t) dt \right] dt, \quad (1.5.10)$$

$$A_2 = A_2(t) = \int_{t_0}^t \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 B(t) \cdot \exp \left[-3k \int_{t_0}^t \chi(t) dt \right] dt.$$

Итак, получены полные вековые возмущения первого порядка рассматриваемой задаче.

1.6. Задачи Лапина двух тел с переменными массами

Рассмотрим задачу Лапина [113, 114] о движении двух свободных тел с переменными массами, взаимогравитирующих по закону Ньютона. Тела рассмотрим как материальные точки и предположим, что абсолютные скорости отделяющихся (присоединяющихся) частиц равны нулю. Уравнения движения в абсолютной системе координат имеют вид

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -f \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} - \dot{m}_1 \dot{\vec{r}}_1, \quad \vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (1.6.1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -f \frac{m_2 m_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - \dot{m}_2 \dot{\vec{r}}_2, \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

где

$$m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t) \quad (1.6.2)$$

— массы тел, \vec{r}_1 , \vec{r}_2 — радиус-векторы тел в рассматриваемой системе координат, f — гравитационная постоянная. Уравнения (1.6.1) допускают три интеграла количества движения

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{a}_1 = \text{const.} \quad (1.6.3)$$

Обозначим

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (1.6.4)$$

Тогда уравнение движения второго тела относительно первого (первое тело — «центральное») имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} = -f \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r} - \frac{\dot{m}_2}{m_2} \dot{\vec{r}}_2 + \frac{\dot{m}_1}{m_1} \dot{\vec{r}}_1. \quad (1.6.5)$$

Из формул (1.6.3), (1.6.4) следуют

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{a}_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}, \quad \dot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{a}_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}. \quad (1.6.6)$$

Используя соотношения (1.6.6) уравнению относительного движения (1.6.5) придадим известный вид

$$\ddot{\vec{r}} = -f \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r} - \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} m_2 + \frac{\dot{m}_2}{m_2} m_1 \right) \frac{\dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2} + \vec{F}, \quad (1.6.7)$$

где

$$\vec{F} = \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} - \frac{\dot{m}_2}{m_2} \right) \frac{\vec{a}_1}{m_1 + m_2}. \quad (1.6.8)$$

Решения уравнения (1.6.7) известны в немногих частных случаях закона изменения масс (1.6.2) [115]. Особый интерес представляет случай, когда

$$\left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} - \frac{\dot{m}_2}{m_2} \right) \frac{\vec{a}_1}{m_1 + m_2} \neq 0. \quad (1.6.9)$$

При условии (1.6.9), в общем случае, движения пространственная и качественная картина представляется очень богатой.

Исследуем задачу Лапина (1.6.7)-(1.6.9) при произвольных законах изменения масс (1.6.2). Укажем новые строгие частные решения [80] и приближенные аналитические общие решения [72].

Не теряя общности можно предположить, что в уравнениях (1.6.7) направление оси OZ совпадает с направлением постоянного вектора \vec{a}_1 в интеграле (1.6.3). Тогда уравнения движения (1.6.7) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (1.6.10)$$

где

$$U = f \frac{m_1 m_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad R = \varphi(t)z, \quad (1.6.11)$$

$$\varphi(t) = \frac{m^2}{m_1^2 m_2^2} (\dot{m}_1 m_2 - m_1 \dot{m}_2) a_1, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.6.12)$$

Соответственно запишем один известный интеграл площадей относительного движения для уравнений (1.6.10)

$$m(\dot{y}x - y\dot{x}) = c = \text{const}. \quad (1.6.13)$$

Строгие частные решения. В уравнениях (1.6.10) переходим к квазисферическим координатам ρ , δ , λ , которые введем формулами

$$x = \gamma_1 \rho \cos \delta \cos \lambda, \quad y = \gamma_1 \rho \cos \delta \sin \lambda, \quad z = \gamma_1 \rho \sin \delta, \quad (1.6.14)$$

где $\gamma_1 = \gamma_1(t)$ достаточно произвольная функция времени, конкретный вид которой определим далее. Используя известное выражение кинетической энергии

$$K = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

с учетом (1.6.14) вычислим импульсы по обычным правилам

$$P_\rho = \frac{\partial K}{\partial \dot{\rho}} = m\gamma_1^2 \dot{\rho} + m\gamma_1 \dot{\gamma}_1 \rho, \quad P_\delta = \frac{\partial K}{\partial \dot{\delta}} = m\gamma_1^2 \rho^2 \dot{\delta},$$

$$P_\lambda = \frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}} = m\gamma_1^2 \rho^2 \cos^2 \delta \dot{\lambda}.$$

Тогда канонические уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial P_\rho}, & \dot{P}_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho}, \\ \dot{\delta} &= \frac{\partial H}{\partial P_\delta}, & \dot{P}_\delta &= -\frac{\partial H}{\partial \delta}, \\ \dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial P_\lambda}, & \dot{P}_\lambda &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda},\end{aligned}\tag{1.6.15}$$

где гамильтониан дается выражением

$$H = \frac{1}{2m\gamma_1^2} \left\{ (P_\rho - m\gamma_1\dot{\gamma}_1\rho)^2 + \frac{P_\delta^2}{\rho^2} + \frac{P_\lambda^2}{\rho^2 \cos^2 \delta} \right\} - \frac{1}{2}m\dot{\gamma}_1^2\rho^2 - (U + R).\tag{1.6.16}$$

Обобщенная координата λ -циклическая, поэтому

$$\dot{\lambda} = \frac{P_\lambda}{m\gamma_1^2\rho^2 \cos^2 \delta}, \quad P_\lambda = P_{\lambda 0} = c = \text{const},\tag{1.6.17}$$

так что проблема сводится к решению первых двух систем уравнений в (1.6.15), которые в развернутой форме имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{1}{m\gamma_1^2}(P_\rho - m\gamma_1\dot{\gamma}_1\rho), \\ \dot{P}_\rho &= \frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1}P_\rho + \frac{1}{m\gamma_1^2\rho^3} \left(P_\delta^2 + \frac{c^2}{\cos^2 \delta} \right) + \frac{\partial(U + R)}{\partial \rho},\end{aligned}\tag{1.6.18}$$

$$\dot{\delta} = \frac{P_\delta}{m\gamma_1^2\rho^2}, \quad \dot{P}_\delta = -\frac{c^2 \sin \delta}{m\gamma_1^2\rho^2 \cos^3 \delta} + \frac{\partial R}{\partial \delta},\tag{1.6.19}$$

где

$$U = f \frac{m_1 m_2}{\gamma_1 \rho}, \quad R = \varphi(t) \gamma_1 \rho \sin \delta.$$

Уравнения (1.6.18) допускают частное решение

$$\rho = \rho_0 = \text{const} \neq 0, \quad P_\rho = m\gamma_1\dot{\gamma}_1\rho_0$$

при условии

$$\frac{d}{dt}(m\gamma_1\dot{\gamma}_1\rho_0) = m\dot{\gamma}_1^2\rho_0 + \frac{1}{m\gamma_1^2\rho_0^3} \left[P_\delta^2 + \frac{c^2}{\cos^2 \delta} \right]_{\rho=\rho_0} + \left[\frac{\partial(U + R)}{\partial \rho} \right]_{\rho=\rho_0}.$$

Из последнего условия определим $n(t)$ -угловую скорость орбитального движения вокруг оси OZ

$$n^2(t) = \frac{1}{\cos^2 \delta} \left[\frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1} + \frac{\dot{m}\dot{\gamma}_1}{m\gamma_1} + f \frac{m_1 m_2}{m\gamma_1^3 \rho_0^3} - \right. \\ \left. - \frac{m(\dot{m}_1 m_2 - m_1 \dot{m}_2) a_1}{\gamma_1 m_1^2 m_2^2 \rho_0} \sin \delta - \frac{P_\delta^2}{m^2 \gamma_1^4 \rho_0^4} \right], \quad (1.6.20)$$

где введено обозначение

$$\frac{c}{m\gamma_1^2 \rho_0^2 \cos^2 \delta} = \dot{\lambda} = n(t). \quad (1.6.21)$$

В выражении (1.6.20) правая часть предполагается положительной. Далее из системы уравнений (1.6.19) получим

$$\frac{dP_\delta}{d\delta} = -\frac{c^2 \sin \delta}{P_\delta \cos^3 \delta} + \frac{m\gamma_1^2 \rho_0^2}{P_\delta} \left(\frac{\partial R}{\partial \delta} \right)_{\rho=\rho_0}.$$

Откуда при условии

$$m^3 \gamma_1^3 \rho_0^3 \frac{(\dot{m}_1 m_2 - m_1 \dot{m}_2)}{m_1^2 m_2^2} = k = \text{const} \quad (1.6.22)$$

следует

$$P_\delta^2 = -\frac{c^2}{\cos^2 \delta} + 2k \sin \delta + k_1,$$

где k_1 – постоянная интегрирования. С учетом полученного выражения для P_δ из первого уравнения системы (1.6.19) получим

$$\frac{du}{\pm \sqrt{k_1 - c^2 + 2ku - k_1 u^2 - 2ku^3}} = \frac{dt}{m\gamma_1^2 \rho_0^2}, \quad (1.6.23)$$

где

$$u = \sin \delta = \frac{z}{r}. \quad (1.6.24)$$

Таким образом, найденные частные решения для рассматриваемого

мого случая определяются следующими формулами

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 = \text{const} \neq 0, & P_\rho &= m\gamma_1\dot{\gamma}_1\rho_0, \\ \sin \delta &= u, & P_\delta^2 &= -\frac{c^2}{1-u^2} + 2ku + k_1, \quad (1.6.25) \\ \lambda &= \int_{t_0}^t n(t)dt + \lambda_0, & P_\lambda &= c = \text{const}, \end{aligned}$$

где $u = u(t)$ определяется из уравнения (1.6.23), а $n = n(t)$ – из соотношения (1.6.20) в котором $\gamma_1 = \gamma_1(t)$ находится из формулы

$$\gamma_1^3 = \frac{km_1^2m_2^2}{a_1\rho_0^3m^3(\dot{m}_1m_2 - m_1\dot{m}_2)}, \quad (1.6.26)$$

что следует из условия (1.6.22). Отметим еще простейшее решение уравнений (1.6.19), которое не входило в решения (1.6.25):

$$\delta = \delta_0 = \text{const} \neq 0, \quad P_\delta = 0. \quad (1.6.27)$$

В случае (1.6.27) пространственные движения рассматриваемой задачи происходят по конической спирали раскручивающейся (закручивающейся) вокруг оси OZ .

Особенности найденных частных решений состоят в том, что они имеют место при произвольных законах изменения масс (1.6.2), лишь необходимо сохранение положительности правой части формул (1.6.20), (1.6.26).

Уравнения вековых возмущений в форме Лагранжа и их приближенное решение. Перепишем уравнения (1.6.10) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -f\frac{m_1+m_2}{r^3}x - \frac{\dot{m}}{m}\dot{x}, & \ddot{y} &= -f\frac{m_1+m_2}{r^3}y - \frac{\dot{m}}{m}\dot{y}, \\ \ddot{z} &= -f\frac{m_1+m_2}{r^3}z - \frac{\dot{m}}{m}\dot{z} + \frac{\varphi(t)}{m}, \end{aligned} \quad (1.6.28)$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Рассмотрим уравнения (1.6.28) в оскулирующих элементах (1.2.15), (1.2.21). Сравнивая (1.6.28) и (1.2.1)

находим

$$R = -\frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{m} \dot{\gamma}}{m \gamma} \right) r^2 - \frac{\varphi(t)}{m} z, \quad (1.6.29)$$

$$\gamma = \frac{m_1 + m_2}{m_{10} + m_{20}} \cdot \frac{m_{10}^2 m_{20}^2}{m_1^2 m_2^2}, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.6.30)$$

Ограничимся вековой частью возмущающей функции (1.6.29).
Учитывая, что

$$r^2 = \gamma^2 \rho^2 = \gamma^2 a^2 \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \approx \gamma^2 a^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right),$$

$$z = \gamma \rho \sin \delta = \gamma a \left(\frac{\rho}{a} \sin \delta \right) \approx \gamma a \sin i \sin \omega \left(-\frac{3}{2} e \right)$$

перепишем возмущающую функцию (1.6.29) в виде

$$R = -\frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{m} \dot{\gamma}}{m \gamma} \right) \gamma^2 a^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) +$$

$$+ \frac{\varphi(t)}{m} \gamma a \left[\sin i \sin \omega \left(-\frac{3}{2} e \right) \right]. \quad (1.6.31)$$

Тогда уравнение вековых возмущений в форме уравнений Лагранжа (1.4.1) имеет вид

$$\dot{a} = 0,$$

$$\dot{e} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{ctgi}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega},$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i},$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e} - \frac{\text{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i},$$

$$\dot{M} = \left[\frac{m_1 + m_2}{(m_{10} + m_{20}) \cdot \gamma^3} \right]^{1/2} \cdot n - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e},$$

где

$$\tilde{R} = -A \left[a^2 \left(1 + \frac{3}{2}e^2 \right) \right] - B [a \cdot e \cdot \sin i \sin \omega], \quad (1.6.33)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{m} \dot{\gamma}}{m \gamma} \right) \left(\frac{m_{10} + m_{20}}{m_1 + m_2} \right)^{1/2} \cdot \gamma^{3/2}, \quad (1.6.34)$$

$$B = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varphi(t)}{m} \left[\frac{m_{10} + m_{20}}{(m_1 + m_2) \cdot \gamma} \right]^{1/2}.$$

Из соотношений (1.6.32)-(1.6.34) получим

$$\dot{a} = 0,$$

$$\dot{e} = B \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \cdot \sin i \cos \omega,$$

$$\frac{di}{dt} = -B \frac{e \text{ctg} i}{na\sqrt{1-e^2}} \cdot \sin i \cos \omega,$$

$$\dot{\Omega} = -B \frac{e \text{cosec} i}{na\sqrt{1-e^2}} \cdot \sin \omega \cos i,$$

$$\dot{\omega} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} (3A \cdot ae + B \cdot \sin i \sin \omega) + B \frac{e \text{ctg} i}{na\sqrt{1-e^2}} \sin \omega \sin i,$$

$$\begin{aligned} \dot{M} = & \left[\frac{m_1 + m_2}{(m_{10} + m_{20}) \gamma^3} \right]^{1/2} \cdot n + \frac{2}{na} \left[2A \cdot a \left(1 + \frac{3}{2}e^2 \right) + \right. \\ & \left. + B \cdot e \sin i \sin \omega \right] + \frac{1-e^2}{nae} (3A \cdot ae + B \cdot \sin i \sin \omega). \end{aligned} \quad (1.6.35)$$

Интеграл площадей (1.6.13) для системы (1.6.35) имеет вид

$$(1 - e^2) \cos^2 i = c_1 = \text{const}, \quad (1.6.36)$$

что также следует из второго и третьего уравнения последней системы. По методу Пикара, в первом приближении, определим движение плоскости орбиты

$$\delta i = -\frac{e \operatorname{ctg} i \sin i \cos \omega}{na\sqrt{1 - e^2}} \int_{t_0}^t B(t) dt, \quad (1.6.37)$$

$$\delta \Omega = -\frac{e \operatorname{cosec} i \sin \omega \cos i}{na\sqrt{1 - e^2}} \int_{t_0}^t B(t) dt,$$

Соотношения (1.6.37), (1.6.34) показывают эффект переменности масс двух тел изменяющимися в различных темпах в задаче Лапана.

Канонические уравнения вековых возмущений в аналогах элементов Делоне. Учитывая, что

$$a = \frac{L^2}{\mu_0}, \quad \mu_0 = f(m_{10} + m_{20}),$$

$$1 - e^2 = \frac{G^2}{L^2}, \quad \cos i = \frac{H}{G}, \quad \omega = g,$$

запишем возмущающую функцию (1.6.33) в аналогах элементов Делоне

$$\tilde{R} = -A \cdot \left[\frac{L^4}{\mu_0^2} \left(\frac{5}{2} - \frac{3G^2}{2L^2} \right) \right] - B \cdot \frac{L^2}{\mu_0} \left(1 - \frac{G^2}{L^2} \right)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{H^2}{G^2} \right)^{1/2} \cdot \sin g. \quad (1.6.38)$$

Из соотношений (1.3.5), (1.6.38) получим

$$\dot{L} = 0, \quad \dot{G} = \frac{\partial R^*}{\partial g}, \quad \dot{H} = 0, \quad (1.6.39)$$

$$\dot{i} = -\frac{\partial R^*}{\partial L}, \quad \dot{g} = -\frac{\partial R^*}{\partial G}, \quad \dot{h} = -\frac{\partial R^*}{\partial H},$$

где

$$R^* = \left[\frac{m_1 + m_2}{(m_{10} + m_{20})\gamma^3} \right]^{1/2} \cdot \frac{\mu_0^2}{2L^2} + \tilde{R}. \quad (1.6.40)$$

Из неавтономной канонической системы дифференциальных уравнений (1.6.39) следует, что задача сводится к системе только с одной степенью свободы

$$\dot{G} = \frac{\partial R^*}{\partial g}, \quad \dot{g} = -\frac{\partial R^*}{\partial G}. \quad (1.6.41)$$

Из системы (1.6.39) также следуют интегралы

$$L = \sqrt{\mu_0 a} = L_0 = \text{const}, \quad (1.6.42)$$

$$H = \sqrt{\mu_0 a(1 - e^2)} \cos i = H_0 = \text{const},$$

причем последнее выражение есть интеграл площадей (1.6.13) для системы (1.6.39), совпадающий с формулой (1.6.36).

Канонические уравнения вековых возмущений в аналогах второй системы элементов Пуанкаре. Из формул (1.3.17) получим

$$a = \frac{\Lambda^2}{\mu_0}, \quad \mu_0 = f(m_{10} + m_{20}),$$

$$e^2 = \frac{1}{\Lambda}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{4\Lambda^2}(\xi^2 + \eta^2)^2 = R_1, \quad (1.6.43)$$

$$1 - \cos i = \frac{p^2 + q^2}{2\Lambda - (\xi^2 + \eta^2)} = R_2,$$

$$\sin \omega = \frac{q\xi - p\eta}{\sqrt{(q^2 + p^2) \cdot (\xi^2 + \eta^2)}} = R_3.$$

С учетом формул (1.6.33), (1.6.43) выражение (1.3.16) имеет вид

$$R^* = \left[\frac{m_1 + m_2}{m_{10} + m_{20}} \gamma^3 \right]^{1/2} \frac{\mu_0^2}{2\Lambda^2} + \tilde{R}(t, \xi, \eta, p, q, \Lambda). \quad (1.6.44)$$

Соответствующие уравнения возмущенного движения описываются формулами

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= 0, & \dot{\xi} &= \frac{\partial R^*}{\partial \eta}, & \dot{p} &= \frac{\partial R^*}{\partial q}, \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial R^*}{\partial \Lambda}, & \dot{\eta} &= -\frac{\partial R^*}{\partial \xi}, & \dot{q} &= -\frac{\partial R^*}{\partial p}, \end{aligned} \quad (1.6.45)$$

при этом интеграл площадей (1.6.13) [или (1.6.36) или (1.6.42)] для системы (1.6.45) имеет вид

$$\xi^2 + \eta^2 + p^2 + q^2 = c_2 = \text{const}. \quad (1.6.46)$$

Интеграл площадей в виде (1.6.46) удобен для качественных исследований. Из системы (1.6.45) следует, что достаточно рассмотреть систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \eta}, & \dot{p} &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial q}, \\ \dot{\eta} &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \xi}, & \dot{q} &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial p}, \end{aligned} \quad (1.6.47)$$

где

$$\tilde{R} = -A \cdot \frac{\Lambda^4}{\mu_0^2} \left(1 + \frac{3}{2} R_1 \right) - B \cdot \frac{\Lambda^2}{\mu_0} \cdot \sqrt{R_1} \cdot (2R_2 - R_2^2)^{1/2} \cdot R_3, \quad (1.6.48)$$

причем

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1(\Lambda, \xi^2 + \eta^2), \\ R_2 &= R_2(\Lambda, p^2 + q^2, \xi^2 + \eta^2), \\ R_3 &= R_3(q\xi - p\eta, q^2 + p^2, \xi^2 + \eta^2). \end{aligned} \quad (1.6.49)$$

Любопытно, что с учетом структуры возмущающей функции (1.6.48)-(1.6.49) из уравнений (1.6.47) можно непосредственно получить интеграл (1.6.46) без применения пространственно-временных преобразований.

В заключении настоящего пункта отметим, что полученные канонические уравнения возмущенного движения (1.6.47) удобны для изучения почти плоских и почти квазикруговых ($e \ll 1$) движений.

1.7. Движение точки переменной массы в поле притяжения нестационарного тела с осесимметричным потенциалом

Рассмотрим движение точки переменной массы $m = m(t)$ в гравитационном поле нестационарного тела с осесимметричным потенциалом вида

$$W = U(r, t) + R(r, z, t) \quad (1.7.1)$$

в прямоугольной декартовой системе координат $OXYZ$, причем ось OZ направлена вдоль оси симметрии тела, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ – модуль радиус-вектора рассматриваемой точки, t – время. Предположим, что начало координат совпадает с барицентром осесимметричного тела и оси координат направлены вдоль осей инерции, и это положение сохраняется. Пусть абсолютная скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц точки переменной массы $m(t)$ равна нулю. Тогда уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (1.7.2)$$

В общем случае, также как и в соответствующей стационарной задаче [149], известен один интеграл

$$m(\dot{y}x - y\dot{x}) = c = \text{const}. \quad (1.7.3)$$

Переходим к квазисферическим координатам ρ , δ , λ , которые введем посредством формул

$$x = \gamma\rho \cos \delta \cos \lambda, \quad y = \gamma\rho \cos \delta \sin \lambda, \quad z = \gamma\rho \sin \delta, \quad (1.7.4)$$

где $\gamma = \gamma(t)$ достаточно произвольная функция времени, конкретный вид который определим далее. Вводя кинетическую энергию рассматриваемой точки формулой

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

с учетом (1.7.4) вычисляя импульсы по обычным правилам

$$\begin{aligned} P_\rho &= \frac{\partial K}{\partial \dot{\rho}} = m\gamma^2 \dot{\rho} + m\gamma \dot{\gamma} \rho, & P_\delta &= \frac{\partial K}{\partial \dot{\delta}} = m\gamma^2 \rho^2 \dot{\delta}, \\ P_\lambda &= \frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}} = m\gamma^2 \rho^2 \cos^2 \delta \dot{\lambda}, \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

напишем уравнения движения в канонической форме

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial P_\rho}, \quad \dot{P}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho}, \quad (1.7.6)$$

$$\dot{\delta} = \frac{\partial H}{\partial P_\delta}, \quad \dot{P}_\delta = -\frac{\partial H}{\partial \delta}, \quad (1.7.7)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial P_\lambda}, \quad \dot{P}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad (1.7.8)$$

где гамильтониан дается выражением

$$H = \frac{1}{2m\gamma^2} \left\{ (P_\rho - m\gamma \dot{\gamma} \rho)^2 + \frac{P_\delta^2}{\rho^2} + \frac{P_\lambda^2}{\rho^2 \cos^2 \delta} \right\} - \frac{1}{2} m \dot{\gamma}^2 \rho^2 - W. \quad (1.7.9)$$

Обобщенная координата λ – циклическая, поэтому из уравнения (1.7.8) следует

$$\dot{\lambda} = \frac{P_\lambda}{m\gamma^2 \rho^2 \cos^2 \delta}, \quad P_\lambda = P_{\lambda 0} = c = \text{const}. \quad (1.7.10)$$

Последнее выражение в формуле (1.7.10) соответствует интегралу (1.7.3). Проблема сводится к поиску решений неавтономной канонической системы дифференциальных уравнений (1.7.6), (1.7.7), которые в развернутой форме имеют вид

$$\dot{\rho} = \frac{1}{m\gamma^2} (P_\rho - m\gamma \dot{\gamma} \rho), \quad \dot{P}_\rho = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} P_\rho + \frac{1}{m\gamma^2 \rho^3} \left(P_\delta^2 + \frac{c^2}{\cos^2 \delta} \right) + \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad (1.7.11)$$

$$\dot{\delta} = \frac{1}{m\gamma^2 \rho^2} P_\delta, \quad \dot{P}_\delta = -\frac{c^2 \sin \delta}{m\gamma^2 \rho^2 \cos^3 \delta} + \frac{\partial W}{\partial \delta}, \quad (1.7.12)$$

где

$$W = U(\rho, \gamma, t) + R(\rho, \delta, \gamma, t). \quad (1.7.13)$$

Требуется найти частные решения системы дифференциальных уравнений (1.7.11) – (1.7.13).

Частные пространственные решения. Уравнения (1.7.11) допускают частное решение [86]

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \quad P_\rho = m\gamma\dot{\gamma}\rho_0 \quad (1.7.14)$$

при условии

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{\gamma}\rho_0) = m\dot{\gamma}^2\rho_0 + \frac{1}{n\gamma^2\rho_0^3} \left(P_\delta^2 + \frac{c^2}{\cos^2\delta} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0}. \quad (1.7.15)$$

Из условий (1.7.15) определим $n(t)$ – угловую скорость орбитального движения вокруг оси OZ

$$n^2(t) = \frac{1}{\cos^2\delta} \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{m}\dot{\gamma}}{m\gamma} - \frac{P_\delta^2}{m^2\gamma^2\rho_0^4} - \frac{1}{m\gamma^2\rho_0} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \right] \quad (1.7.16)$$

где обозначено

$$\frac{c}{m\gamma^2\rho_0^2 \cos^2\delta} = \dot{\lambda} = n(t). \quad (1.7.17)$$

Далее из уравнений (1.7.12) получим

$$P_\delta \frac{dP_\delta}{d\delta} = -c^2 \frac{\sin\delta}{\cos^3\delta} + m\gamma^2\rho_0^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \delta} \right)_{\rho=\rho_0}. \quad (1.7.18)$$

Силовую функцию

$$R = R(\rho_0, \delta, \gamma, t) \quad (1.7.19)$$

определим таким образом, чтобы при соответствующем выборе функции $\gamma = \gamma(t)$, время t не входило явным образом во второе слагаемое в правой части уравнения (1.7.18). Тогда решение уравнений (1.7.18) легко устанавливается.

Рассмотрим известное разложение потенциала осесимметричного тела по полиномам Лежандра [107]. Тогда

$$U = f \frac{M}{r}, \quad (1.7.20)$$

$$R = -\frac{fM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{l}{r} \right)^n P_n(\sin\delta).$$

В нашем случае тело нестационарное, поэтому в формулах (1.7.20) $M = M(t)$, $J_n = J_n(t)$, $l = l(t)$ (см. [116], стр. 23, замечание 3, а также [150]).

Сначала рассмотрим случай

$$R \approx R_2 = -\frac{fM}{r} J_2 \left(\frac{l}{r} \right)^2 P_2(\sin \delta). \quad (1.7.21)$$

Уравнения (1.7.18) имеет вид

$$P_\delta \frac{dP_\delta}{d\delta} = -c^2 \frac{\sin \delta}{\cos^3 \delta} + m\gamma^2 \rho_0^2 \left[-\frac{fM}{\gamma\rho_0} J_2 \left(\frac{l}{\gamma\rho_0} \right)^2 \right] \frac{dP_2(\sin \delta)}{d\delta}. \quad (1.7.22)$$

Пусть

$$\frac{m(t)}{m(t_0)} = m^*(t), \quad \frac{M(t)}{M(t_0)} = M^*(t), \quad \frac{J_2(t)}{J_2(t_0)} = J_2^*(t), \quad \frac{l(t)}{l(t_0)} = l^*(t). \quad (1.7.23)$$

Тогда при условии

$$\frac{m^*(t)M^*(t)J_2^*(t)l^*(t)}{\gamma(t)} = \text{const} = 1 \quad (1.7.24)$$

уравнение (1.7.22) становится автономным и получим

$$\frac{1}{2} P_\delta^2 = -\frac{1}{2} \frac{c^2}{\cos^2 \delta} + k_1 \sin^2 \delta + c_1, \quad (1.7.25)$$

где c_1 – постоянная интегрирования,

$$k_1 = -\frac{3f m(t_0)M(t_0)J_2(t_0)l^2(t_0)}{2\rho_0}.$$

Из первого уравнения системы (1.7.12) и (1.7.25) получим

$$\frac{du}{\pm \sqrt{-2k_1 u^4 + (2k_1 - 2c_1)u^2 + 2c_1 - c^2}} = \frac{dt}{m\gamma^2 \rho_0^2}, \quad (1.7.26)$$

где введено обозначение

$$u = \sin \delta = \frac{z}{r}.$$

Таким образом, найденные в случае (1.7.21) пространственные частные решения определяются формулами

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 = \text{const}, & P_\rho &= m\gamma\dot{\gamma}\rho_0, \\ \sin \delta &= u, & P_\delta^2 &= \frac{2(2k_1u^2 + c_1)(1 - u^2) - c^2}{1 - u^2}, \\ \lambda &= \int_{t_0}^t n(t) dt + \lambda_0, & P_\lambda &= c = \text{const}, \end{aligned} \quad (1.7.27)$$

где $u = u(t)$ определяется из уравнений (1.7.26), а $n(t)$ определяется из соотношения (1.7.16) в котором $\gamma = \gamma(t)$ дается формулой

$$\gamma = m^*(t)M^*(t)J_2^*(t)l^{*2}(t), \quad (1.7.28)$$

что следует из условия (1.7.24).

Теперь рассмотрим случай, когда

$$R \approx R_5 = -\frac{fM}{r} \sum_{n=2}^5 J_n \left(\frac{l}{r} \right)^n P_n(\sin \delta). \quad (1.7.29)$$

В этом случае уравнение (1.7.18) (или система (1.7.12)) допускает частное решение

$$\delta = \delta_0 = \text{const}, \quad P_\delta = 0, \quad (1.7.30)$$

при условии, что $\gamma = \gamma(t)$ определяется из соотношения

$$\frac{J_5^*}{\gamma^4} + \frac{J_4^*}{\gamma^3} + \frac{J_3^*}{\gamma^2} + \frac{J_2^*}{\gamma} + \frac{c^2 \sin \delta_0}{f m M \rho_0 \cos^3 \delta_0} = 0, \quad (1.7.31)$$

где

$$J_n^* = J_n \left(\frac{l}{\rho_0} \right)^n \frac{dP_n(\sin \delta_0)}{d\delta_0} = J_n^*(t). \quad (1.7.32)$$

В случае (1.7.29) решения даются формулами

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 = \text{const}, & P_\rho &= m\gamma\dot{\gamma}\rho_0, \\ \delta &= \delta_0 = \text{const}, & P_\delta &= 0, \\ \lambda &= \int_{t_0}^t n(t) dt + \lambda_0, & P_\lambda &= c = \text{const}, \end{aligned} \quad (1.7.33)$$

где $n = n(t)$ дается выражением (1.7.16), в котором $\gamma = \gamma(t)$ определяется как действительный корень уравнения (1.7.31).

Особенности найденных решений (1.7.27), (1.7.33) состоят в том, что они имеют место при произвольных функциях (1.7.23), (1.7.32), лишь бы выполнялось условие положительности правой части формулы (1.7.16) и условие существования действительных корней уравнения (1.7.31).

1.8. Движение пробной точки в поле притяжения нестационарного трехосного эллипсоида

Известная задача о движении пробной точки в поле притяжения стационарного трехосного эллипсоида — одна из интересных задач небесной механики. В монографии [27] детально исследованы резонансные движения материальной точки постоянной массы в поле притяжения стационарного вращающегося трехосного эллипсоида. Получены различные классы резонансных решений. Аналогичная задача для нестационарного вращающегося трехосного эллипсоида рассмотрена в работе [53] и методом автономизации установлены точки либрации, когда масса, размеры, формы меняются медленно и они взаимосвязаны. Причем масса меняется со временем по объединенному закону Мещерского.

Рассмотрим движение пробной точки в поле притяжения нестационарного трехосного эллипсоида однородного или с эллипсоидальными слоями, с плотностью, одинакова и зависящей от времени, методом теории возмущений. Пусть нестационарность эллипсоида характеризуется переменной массой

$$m = m_0 \nu(t) \tag{1.8.1}$$

и характерным переменным линейным размером

$$R = R_0 \chi(t), \tag{1.8.2}$$

где $m_0 = m(t_0)$, $R_0 = R(t_0)$, t_0 — начальное значение времени t , $\nu(t)$ и $\chi(t)$ достаточно произвольные функции времени.

Начало прямоугольной системы координат $Oxyz$ поместим в барицентр нестационарного эллипсоида, а оси координат направим вдоль главных центральных осей инерции эллипсоида. При этом ориентация осей инерции тела – нестационарного эллипсоида – остается неизменной. Тогда уравнение движения пробной частицы в гравитационном поле тела имеет вид [64]

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (1.8.3)$$

где U – потенциал тела. В разложении потенциала по полиномам Лежандра ограничимся гармониками второго порядка. В сферической системе координат r , σ , λ , которые обозначают соответственно модуль радиус-вектора, широту и долготу пробной точки, введенные обычным образом

$$x = r \cos \delta \cos \lambda, \quad y = r \cos \delta \sin \lambda, \quad z = r \sin \delta, \quad (1.8.4)$$

выражение потенциала имеет вид

$$U = \frac{f m}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \delta) + \right. \\ \left. + 3 C_{22} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - \sin^2 \delta) \cos 2\lambda \right\} \quad (1.8.5)$$

Заметим, что в силу выбранной системы координат

$$C_{21} = S_{21} = S_{22} = 0.$$

Относительно параметров, характеризующих тело – нестационарный эллипсоид – примем следующие допущения. Будем считать, что изменения параметров происходят гомотетичным образом так, что в каждый последующий момент времени форма и структура тела остаются подобными соответствующему состоянию в предыдущий момент времени. Математически это выражается в постоянстве коэффициентов I_2 и C_{22}

$$I_2 = \frac{2C - (A + B)}{2mR^2} = \text{const}, \quad C_{22} = \frac{B - A}{4mR^2} = \text{const}, \quad (1.8.6)$$

где

$$A = A(t), \quad B = B(t), \quad C = C(t) \quad (1.8.7)$$

моменты инерции второго порядка нестационарного эллипсоида, или учитывая формулы (1.8.1), (1.8.2)

$$\frac{A(t)}{A(t_0)} = \frac{B(t)}{B(t_0)} = \frac{C(t)}{C(t_0)} = \nu(t) \chi^2(t). \quad (1.8.8)$$

Уравнения движения (1.8.3) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -f m \frac{x}{r^3} + m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m} \right) x + \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -f m \frac{y}{r^3} + m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m} \right) y + \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -f m \frac{z}{r^3} + m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m} \right) z + \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

где

$$V = V_1 + V_2 + V_{22}, \quad (1.8.10)$$

$$V_1 = -\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m} \right) (x^2 + y^2 + z^2), \quad (1.8.11)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{f m}{r} \cdot \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \delta), \quad (1.8.12)$$

$$V_{22} = 3C_{22} \frac{f m}{r} \cdot \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - \sin^2 \delta) \cos 2\lambda. \quad (1.8.13)$$

При $V = 0$ уравнения (1.8.9) описывают невозмущенное апериодическое движение по квазиконическому сечению, которое может быть характеризовано соответствующими элементами

$$a, \quad e, \quad \omega, \quad i, \quad \Omega, \quad M. \quad (1.8.14)$$

Поэтому, в случае $V \neq 0$, уравнения (1.8.9) могут быть рассмотрены как уравнения возмущенного движения в переменных (1.8.14).

Можно использовать уравнения возмущенного движения в форме уравнений Лагранжа (1.4.1)

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial V}{\partial M}, \\
 \dot{e} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial V}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \Omega}, \\
 \dot{\Omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \operatorname{cosec} i \cdot \frac{\partial V}{\partial i}, \\
 \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial V}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial V}{\partial i}, \\
 \dot{M} &= \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \cdot n - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial V}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial V}{\partial e},
 \end{aligned} \tag{1.8.15}$$

где

$$V = V(t, a, e, \omega, i, \Omega, M), \tag{1.8.16}$$

и рассмотрим случай возмущенного движения по квазиэллипсу

$$e(t) < 1. \tag{1.8.17}$$

Выражение возмущающей функции через элементы. Используя известные формулы сферической астрономии [107]

$$\begin{aligned}
 \sin \delta &= \sin i \sin(\omega + v), \\
 \cos \delta \cos \lambda &= \cos(\omega + v) \cos \Omega - \sin(\omega + v) \sin \Omega \cos i, \\
 \cos \delta \sin \lambda &= \cos(\omega + v) \cos \Omega + \sin(\omega + v) \sin \Omega \cos i,
 \end{aligned} \tag{1.8.18}$$

где $v = \theta - \omega$ – истинная аномалия, определяемая формулой невозмущенного движения

$$r = \left(\frac{m_0}{m}\right) \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad p = a(1 - e^2), \tag{1.8.19}$$

преобразуем выражения (1.8.12), (1.8.13). Обозначим

$$\begin{aligned}
 r &= \gamma \cdot \rho, \\
 \gamma &= \gamma(t) = \frac{m_0}{m}, \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}.
 \end{aligned} \tag{1.8.20}$$

Тогда можно написать [64]

$$V_2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{f m R^2}{\gamma^3 a^3} \left\{ \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 + \frac{3}{2} \sin^2 i \cos 2\omega \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \cos 2v - \frac{3}{2} \sin^2 i \sin 2\omega \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \sin 2v \right\}, \quad (1.8.21)$$

$$V_{22} = 3C_{22} \frac{f m R^2}{\gamma^3 a^3} \left\{ \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2\omega \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 + \left[\left(\frac{1}{4} \cos^2 i + \frac{1}{2} \cos i\right) \times \cos(2\Omega + 2\omega) + \left(\frac{1}{4} \cos^2 i - \frac{1}{2} \cos i\right) \cos(2\Omega - 2\omega) \right] \times \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \cos 2v + \left[\left(-\frac{1}{4} \cos^2 i - \frac{1}{2} \cos i\right) \sin(2\Omega + 2\omega) + \left(-\frac{1}{4} \cos^2 i + \frac{1}{2} \cos i\right) \sin(2\Omega - 2\omega) \right] \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \sin 2v \right\}. \quad (1.8.22)$$

Соотношение (1.8.11) напомним в виде

$$V_1 = -\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m}\right) a^2 \gamma^2 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2. \quad (1.8.23)$$

В формулах (1.8.21)–(1.8.23) выражения

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^3, \quad \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \cos 2v, \quad \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \sin 2v, \quad \left(\frac{\rho}{a}\right)^2$$

записываются через элементы e и M в виде бесконечных рядов [107].

Ограничимся полной вековой частью в разложении возмущающей функции

$$\tilde{V}_1 = -\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m}\right) a^2 \gamma^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right), \quad (1.8.24)$$

$$\tilde{V}_2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{f m R^2}{\gamma^3 a^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) (1 - e^2)^{-3/2}, \quad (1.8.25)$$

$$\tilde{V}_{22} = 3C_{22} \frac{f m R^2}{\gamma^3 a^3} \left(\frac{1}{2} \cos 2\Omega \sin^2 i\right) (1 - e^2)^{-3/2}. \quad (1.8.26)$$

Из соотношений (1.8.24)–(1.8.26) и (1.8.10) следует

$$V_{\text{век}} = -\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m} \right) a^2 \gamma^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{f m R^2}{\gamma^3 a^3} \times \\ \times (1 - e^2)^{-3/2} \left[I_2 + \left(-\frac{3}{2} I_2 + 3C_{22} \cos 2\Omega \right) \sin^2 i \right]. \quad (1.8.27)$$

Таким образом, полная вековая часть возмущающей функции имеет вид

$$V_{\text{век}} = V_{\text{век}}(t, a, e, \Omega, i). \quad (1.8.28)$$

Подставляя выражение (1.8.27) в уравнения возмущенного движения Лагранжа (1.8.15) имеем

$$a = a_0, \quad e = e_0, \quad (1.8.29)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\text{cosec } i}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial V_{\text{век}}}{\partial \Omega}, \quad \dot{\Omega} = \frac{\text{cosec } i}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial V_{\text{век}}}{\partial i}, \quad (1.8.30)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n a^2 e} \cdot \frac{\partial V_{\text{век}}}{\partial e} - \frac{\text{ctg } i}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial V_{\text{век}}}{\partial i}, \quad (1.8.31)$$

$$\dot{M} = \left(\frac{m}{m_0} \right)^2 \cdot n - \frac{2}{n a} \cdot \frac{\partial V_{\text{век}}}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{n a^2 e} \cdot \frac{\partial V_{\text{век}}}{\partial e}. \quad (1.8.32)$$

Из системы уравнений (1.8.30) получим

$$\left(-\frac{3}{2} I_2 + 3C_{22} \cos 2\Omega \right) \sin^2 i = h_1 = \text{const}, \quad (1.8.33)$$

или

$$(1 + \alpha \cos 2\Omega) \sin^2 i = h = \text{const}, \quad (1.8.34)$$

где

$$\alpha = \frac{B_0 - A_0}{A_0 + B_0 - 2C_0}, \quad (1.8.35)$$

$$h = (1 + \alpha \cos 2\Omega_0) \sin^2 i_0. \quad (1.8.36)$$

Интеграл (1.8.33) по виду совпадает с аналогичным интегралом стационарной задачи [117]. При помощи интегралов (1.8.33) и (1.8.29)

система уравнений интегрируется до конца. Из второго уравнения системы (1.8.30), учитывая (1.8.33), имеем

$$\dot{\Omega} = \frac{3I_2 f m R^2}{2n a^2 (1 - e^2)^2 \gamma^3 a^3} \sqrt{1 + \alpha \cos 2\Omega} \cdot \sqrt{1 - h + \alpha \cos 2\Omega}. \quad (1.8.37)$$

Откуда обозначив

$$\cos 2\Omega = u, \quad (1.8.38)$$

$$\alpha^* = \frac{1}{\alpha} = -\frac{I_2}{2C_{22}} = \frac{A_0 + B_0 - 2C_0}{B_0 - A_0}, \quad (1.8.39)$$

$$\beta^* = \alpha^* (1 - h^2) = \alpha^* \cos^2 i_0 - \sin^2 i_0 \cos 2\Omega_0, \quad (1.8.40)$$

получим

$$\dot{i} = \frac{6C_{22} f m_0 R_0^2}{n a^3 p^2} \cdot \nu^4 \chi^2 \cdot \sqrt{1 - u^2} \sqrt{\alpha^* + u} \sqrt{\beta^* + u}. \quad (1.8.41)$$

Решение уравнения (1.8.40) сводится к эллиптической квадратуре, которая в зависимости от параметров α^* и β^* вычисляется по разному. После решения уравнения (1.8.40), $i = i(t)$ находится из интеграла (1.8.33), затем $\omega = \omega(t)$ и $M = M(t)$ определяются из уравнений (1.8.31), (1.8.32).

Глава 2

Задача трех тел с переменными массами

2.1. Задача трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами.

Исключение узла.

Рассмотрим систему трех свободных тел T_0 , T_1 и T_2 , взаимогравитирующих по закону Ньютона, с переменными массами

$$m_0 = \frac{m_{00}}{\varphi(t)}, \quad m_1 = \frac{m_{10}}{\varphi(t)}, \quad m_2 = \frac{m_{20}}{\varphi(t)}, \quad (2.1.1)$$

изменяющимися в одинаковых темпах в абсолютной системе координат, где $m_{i0} = m_i(t_0)$ – начальные значения масс, $\varphi = \varphi(t)$ – достаточно произвольная положительная функция времени, по меньшей мере дважды дифференцируемая. Тела будем рассматривать, как материальные точки и предположим, что изменение масс происходит изотропно. Тогда уравнения движения в абсолютной системе координат имеют вид

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i^* = \text{grad}_{\vec{R}_i^*} U, \quad i = 0, 1, 2, \quad (2.1.2)$$

где

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{R_{01}^*} + \frac{m_0 m_2}{R_{02}^*} + \frac{m_1 m_2}{R_{12}^*} \right),$$

$$R_{ij}^* = \sqrt{(X_j^* - X_i^*)^2 + (Y_j^* - Y_i^*)^2 + (Z_j^* - Z_i^*)^2},$$

$\vec{R}_i^* = \vec{R}_i^*(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*)$ – радиус-векторы тел в рассматриваемой системе координат, f – гравитационная постоянная. В этом случае, известны следующие интегралы [38]

$$\varphi(t) \sum_{i=0}^2 m_i \dot{\vec{R}}_i^* = \vec{a}^*, \quad \varphi(t) \sum_{i=0}^2 m_i \vec{R}_i^* = \vec{a}^* t + \vec{b}^*, \quad (2.1.3)$$

$$\varphi(t) \sum_{i=0}^2 \left(\vec{R}_i^* \times m_i \dot{\vec{R}}_i^* \right) = \vec{c}^* \quad (2.1.4)$$

Движение барицентра системы определяется соотношениями

$$\vec{R}_\delta = \frac{1}{m_0 + m_1 + m_2} \sum_{i=0}^2 m_i \vec{R}_i^* = \frac{\vec{a}^* t + \vec{b}^*}{m_{00} + m_{10} + m_{20}}. \quad (2.1.5)$$

Отметим, что, если в рассматриваемой задаче трех тел с изменяющимися массами (2.1.1) предположить, что абсолютные скорости отделяющихся (присоединяющихся) частиц равны нулю, то получим

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i^* = \text{grad}_{\vec{R}_i^*} U - \dot{m}_i \dot{\vec{R}}_i^*.$$

Последние уравнения преобразованием независимой переменной

$$d\tau = \varphi(t) dt$$

приводится к виду (2.1.2) [115]. Поэтому в дальнейшем достаточно исследовать задачу, описываемую уравнениями (2.1.2).

Переходим к барицентрической системе координат посредством формул

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i(X_i, Y_i, Z_i) = \vec{R}_i^* - \vec{R}_\delta. \quad (2.1.6)$$

Тогда уравнения движения и интегралы имеют вид

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = \text{grad}_{\vec{R}_i} U, \quad (2.1.7)$$

$$\sum_{i=0}^2 m_i \dot{\vec{R}}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^2 m_i \vec{R}_i = 0, \quad (2.1.8)$$

$$\varphi(t) \sum_{i=0}^2 \left(\vec{R}_i \times m_i \dot{\vec{R}}_i \right) = \vec{c}_0, \quad (2.1.9)$$

где

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{R_{01}} + \frac{m_0 m_2}{R_{02}} + \frac{m_1 m_2}{R_{12}} \right),$$

$$R_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2},$$

Так как массы тел изменяются в одинаковом темпе согласно (2.1.1), то уравнению движения (2.1.7) можно придать вид

$$m_{i0}\ddot{\vec{R}}_i = \frac{1}{\varphi(t)} \text{grad}_{\vec{R}_i} \tilde{U}, \quad (2.1.10)$$

где

$$\tilde{U} = f \left(\frac{m_{00}m_{10}}{R_{01}} + \frac{m_{00}m_{20}}{R_{02}} + \frac{m_{10}m_{20}}{R_{12}} \right). \quad (2.1.11)$$

Перейдем к системе координат Якоби. Движения точки T_1 с координатами x_1, y_1, z_1 будем относить к прямоугольной системе координат с началом в точке T_0 , а движения точки T_2 с координатами x_2, y_2, z_2 – прямоугольной системе координат, имеющей начало в центре масс точек T_0 и T_1 . Оси координат параллельны соответствующим осям барицентрической системы координат.

За основную плоскость принимается неизменная плоскость Лапласа, перпендикулярная вектору момента количества движения тройной системы (2.1.9). Главное преимущество, которое достигается при выборе неизменной плоскости в качестве основной, состоит в том, что из дифференциальных уравнений исключается узел [118, 151], благодаря чему понижается порядок системы.

Преобразование системы координат выполняется по формулам

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(x_1, y_1, z_1) = \vec{R}_1 - \vec{R}_0, \quad (2.1.12)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2(x_2, y_2, z_2) = \vec{R}_2 - \frac{m_{10}}{m_{00} + m_{10}} \vec{R}_1 - \frac{m_{00}}{m_{00} + m_{10}} \vec{R}_0,$$

где \vec{r}_i – радиус-векторы тел в якобиевской системе координат. Уравнения движения имеют двенадцатый порядок и следующий вид [74]

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{\varphi(t)} \text{grad}_{\vec{r}_1} \tilde{U}, \quad \mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{\varphi(t)} \text{grad}_{\vec{r}_2} \tilde{U}, \quad (2.1.13)$$

причем

$$\mu_1 = \frac{m_{10} m_{00}}{m_{00} + m_{10}} = \text{const}, \quad \mu_2 = \frac{m_{20}(m_{10} + m_{00})}{m_{00} + m_{10} + m_{20}} = \text{const}, \quad (2.1.14)$$

$$\tilde{U} = f \left(\frac{m_{00}m_{10}}{r_{01}} + \frac{m_{00}m_{20}}{r_{02}} + \frac{m_{10}m_{20}}{r_{12}} \right), \quad (2.1.15)$$

$$r_{01}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2,$$

$$r_{02}^2 = (x_2 + \nu_1 x_1)^2 + (y_2 + \nu_1 y_1)^2 + (z_2 + \nu_1 z_1)^2,$$

$$r_{12}^2 = (x_2 - \nu_0 x_1)^2 + (y_2 - \nu_0 y_1)^2 + (z_2 - \nu_0 z_1)^2,$$

$$\nu_1 = \frac{m_{10}}{m_{00} + m_{10}} = \text{const}, \quad \nu_0 = \frac{m_{00}}{m_{00} + m_{10}} = \text{const},$$

Из формул (2.1.12), (2.1.8) получим обратные преобразования

$$\begin{aligned} \vec{R}_0 &= -\frac{m_{10}}{m_{00} + m_{10}} \vec{r}_1 - \frac{m_{20}}{m_{00} + m_{10} + m_{20}} \vec{r}_2, \\ \vec{R}_1 &= \frac{m_{10}}{m_{00} + m_{10}} \vec{r}_1 - \frac{m_{20}}{m_{00} + m_{10} + m_{20}} \vec{r}_2, \\ \vec{R}_2 &= \frac{m_{00} + m_{10}}{m_{00} + m_{10} + m_{20}} \vec{r}_2. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Канонические уравнения задачи в аналогах элементов Делоне.

Переходя к новым обозначениям

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = y_1, \quad q_3 = z_1, \quad q_4 = x_2, \quad q_5 = y_2, \quad q_6 = z_2$$

и вводя обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

где кинетическая энергия системы (2.1.13) задается формулой

$$K = \frac{\mu_1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{\mu_2}{2} (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2)$$

запишем уравнения движения в гамильтоновой форме

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (2.1.17)$$

где

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\mu_1} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2\mu_2} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \\ &\quad - \frac{f}{\varphi(t)} \left(\frac{m_{00}m_{10}}{r_{01}} + \frac{m_{00}m_{20}}{r_{02}} + \frac{m_{10}m_{20}}{r_{12}} \right). \end{aligned}$$

Последнюю формулу перепишем в виде

$$H = H_1^* + H_2^* + H_b, \quad (2.1.18)$$

$$H_1^* = \frac{1}{2\mu_1} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{f}{\varphi(t)} \left[\frac{m_{00}m_{10}}{r_{01}} \right] - \frac{\mu_1}{2} \cdot \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} r_{01}^2,$$

$$H_2^* = \frac{1}{2\mu_2} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{f}{\varphi(t)} \left[\frac{m_{20}(m_{00} + m_{10})}{r_2} \right] - \frac{\mu_2}{2} \cdot \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} r_2^2,$$

$$H_b = \frac{f}{\varphi(t)} \left[\frac{m_{20}(m_{00} + m_{10})}{r_2} - \frac{m_{00}m_{20}}{r_{02}} - \frac{m_{10}m_{20}}{r_{12}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} [\mu_1 r_{01}^2 + \mu_2 r_2^2], \quad (2.1.19)$$

$$r_{01}^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = r_1^2, \quad r_2^2 = q_4^2 + q_5^2 + q_6^2.$$

При $H_b = 0$ уравнения (2.1.17) расщепляются на две системы, каждая из которых описывает аperiodическое движение по квазиконическому сечению [71], предложенное нами в качестве промежуточной орбиты для решения проблем динамики гравитирующих систем с переменными массами

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_1^*}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_1^*}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1.20)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_2^*}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_2^*}{\partial q_i}, \quad i = 4, 5, 6. \quad (2.1.21)$$

Последние уравнения перепишем в виде

$$\mu_1 \ddot{q}_i = -\frac{\partial H_1^*}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1.22)$$

$$\mu_2 \ddot{q}_i = -\frac{\partial H_2^*}{\partial q_i}, \quad i = 4, 5, 6. \quad (2.1.23)$$

Из уравнений (2.1.22) получим интегралы площадей для промежуточной орбиты тела T_1

$$\mu_1 (\overline{q_2 \dot{q}_3} - \overline{q_3 \dot{q}_2}) = c_1 \sin i_1 \sin \Omega_1, \quad (2.1.24)$$

$$\mu_1 (\overline{q_3 \dot{q}_1} - \overline{q_1 \dot{q}_3}) = -c_1 \sin i_1 \cos \Omega_1, \quad \mu_1 (\overline{q_1 \dot{q}_2} - \overline{q_2 \dot{q}_1}) = c_1 \cos i_1,$$

где

$$c_1 = \beta_1 \sqrt{a_1 (1 - e_1^2)}, \quad \beta_1 = \sqrt{f} \frac{m_{10} m_{00}}{\sqrt{m_{00} + m_{10}}}. \quad (2.1.25)$$

Оскулирующее аperiodическое движение по квазиконическому движению описываются формулами

$$r_1 = \varphi(t) \cdot \rho_1, \quad \rho_1 = a_1 (1 - e_1 \cos E_1), \quad E_1 - e_1 \sin E_1 = M_1,$$

$$M_1 = \frac{\beta_1}{\mu_1 a_1^{3/2}} [\phi(t) - \phi(\tau_1)] = \frac{\beta_1}{\mu_1 a_1^{3/2}} \int_{\tau_1}^t \frac{dt}{\varphi^2(t)}.$$

Аналогично из уравнений (2.1.23) получим для тела T_2

$$\begin{aligned} \mu_2 (q_5 \dot{q}_6 - q_6 \dot{q}_5) &= c_2 \sin i_2 \sin \Omega_2, & \mu_2 (q_4 \dot{q}_5 - q_5 \dot{q}_4) &= c_2 \cos i_2, \\ \mu_2 (q_6 \dot{q}_4 - q_4 \dot{q}_6) &= -c_2 \sin i_2 \cos \Omega_2, \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

где

$$c_2 = \beta_2 \sqrt{a_2 (1 - e_2^2)}, \quad \beta_2 = \sqrt{f} \frac{m_{20} (m_{00} + m_{10})}{\sqrt{m_{00} + m_{10} + m_{20}}}, \quad (2.1.27)$$

и соответственно

$$r_2 = \varphi(t) \cdot \rho_2, \quad \rho_2 = a_2 (1 - e_2 \cos E_2), \quad E_2 - e_2 \sin E_2 = M_2,$$

$$M_2 = \frac{\beta_2}{\mu_2 a_2^{3/2}} [\phi(t) - \phi(\tau_2)] = \frac{\beta_2}{\mu_2 a_2^{3/2}} \int_{\tau_2}^t \frac{dt}{\varphi^2(t)}.$$

Но, с другой стороны, рассматриваемая задача (2.1.17) имеет интегралы площадей

$$\begin{aligned} \mu_1 (q_2 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_2) + \mu_2 (q_5 \dot{q}_6 - q_6 \dot{q}_5) &= 0, \\ \mu_1 (q_3 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_3) + \mu_2 (q_6 \dot{q}_4 - q_4 \dot{q}_6) &= 0, \\ \mu_1 (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1) + \mu_2 (q_4 \dot{q}_5 - q_5 \dot{q}_4) &= c. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Из формул (2.1.24)–(2.1.28) получим

$$\begin{aligned}\beta_1\sqrt{a_1(1-e_1^2)}\sin i_1\sin\Omega_1+\beta_2\sqrt{a_2(1-e_2^2)}\sin i_2\sin\Omega_2&=0, \\ \beta_1\sqrt{a_1(1-e_1^2)}\sin i_1\cos\Omega_1+\beta_2\sqrt{a_2(1-e_2^2)}\sin i_2\cos\Omega_2&=0, \\ \beta_1\sqrt{a_1(1-e_1^2)}\cos i_1+\beta_2\sqrt{a_2(1-e_2^2)}\cos i_2&=c.\end{aligned}\quad (2.1.29)$$

Из первых двух равенств следует

$$\Omega_1 = \Omega_2 + 180^\circ. \quad (2.1.30)$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами (2.1.1)–(2.1.2) при любом законе изменения масс восходящий узел орбиты тела T_1 на неизменной плоскости Лапласа совпадает с нисходящим узлом орбиты тела T_2 .

Аналогичное свойство в классической задаче трех тел (точек) постоянной массы впервые было установлено К. Якоби [118, 141].

В аналогах канонических элементов Делоне записанных для промежуточных движений (2.1.20) и (2.1.21)

$$\begin{aligned}L_i &= \beta_i\sqrt{a_i}, & G_i &= L_i\sqrt{1-e_i^2}, & H_i &= G_i\cos i_i, \\ l_i &= n_i[\phi(t) - \phi(\tau_i)], & g_i &= \omega_i, & h_i &= \Omega_i,\end{aligned}\quad (2.1.31)$$

где

$$n_i = \frac{\beta_i^4}{\mu_i L_i^3},$$

интегралы (2.1.29) примут вид

$$\begin{aligned}\sqrt{G_1^2 - H_1^2}\sin h_1 + \sqrt{G_2^2 - H_2^2}\sin h_2 &= 0, \\ \sqrt{G_1^2 - H_1^2}\cos h_1 + \sqrt{G_2^2 - H_2^2}\cos h_2 &= 0, \\ H_1 + H_2 &= c.\end{aligned}$$

Последние выражения могут быть записаны в более компактном виде

$$h_1 = h_2 + 180^\circ, \quad (2.1.32)$$

$$G_1^2 - H_1^2 = G_2^2 - H_2^2, \quad H_1 + H_2 = c. \quad (2.1.33)$$

С учетом уравнений промежуточного движения (2.1.20), (2.1.21), уравнения движения тела T_1 и T_2 (2.1.17) в оскулирующих переменных (2.1.31) могут быть записаны в виде

$$\dot{L}_i = \frac{\partial R^*}{\partial l_i}, \quad \dot{G}_i = \frac{\partial R^*}{\partial q_i}, \quad \dot{H}_i = \frac{\partial R^*}{\partial h_i}, \quad (2.1.34)$$

$$\dot{l}_i = -\frac{\partial R^*}{\partial L_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial R^*}{\partial G_i}, \quad \dot{h}_i = -\frac{\partial R^*}{\partial H_i}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$R^* = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\varphi^2(t)} \left(\frac{\beta_i^4}{\mu_i L_i^2} \right) + R, \quad (2.1.35)$$

причем

$$R = -H_B. \quad (2.1.36)$$

Понижение порядка системы дифференциальных уравнений путем исключения узла. Учитывая что

$$r_1^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \quad r_2^2 = q_4^2 + q_5^2 + q_6^2,$$

$$r_1 r_2 \cos s = q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6,$$

где s – угол между радиус-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 запишем

$$r_{01}^2 = r_1^2,$$

$$r_{02}^2 = r_2^2 + 2\nu_1 r_2 r_1 \cos s + \nu_1^2 r_1^2 = r_2^2 \left[1 + 2\nu_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \cos s + \nu_1^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right],$$

$$r_{12}^2 = r_2^2 - 2\nu_0 r_2 r_1 \cos s + \nu_0^2 r_1^2 = r_2^2 \left[1 - 2\nu_0 \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \cos s + \nu_0^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right].$$

Известное разложение при помощи полиномов Лежандра дает

$$\frac{1}{r_{02}} = \frac{1}{r_2} - \nu_1 \frac{r_1}{r_2^2} P_1(\cos s) + \nu_1^2 \frac{r_1^2}{r_2^3} P_2(\cos s) - \nu_1^3 \frac{r_1^3}{r_2^4} P_3(\cos s) + \dots$$

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r_2} + \nu_0 \frac{r_1}{r_2^2} P_1(\cos s) + \nu_0^2 \frac{r_1^2}{r_2^3} P_2(\cos s) + \nu_0^3 \frac{r_1^3}{r_2^4} P_3(\cos s) + \dots$$

Поэтому формула (2.1.36) с учетом $r_i = \varphi(t)\rho_i$ имеет вид

$$R = \frac{f}{\varphi^2(t)} \cdot F + \frac{1}{2} \varphi \ddot{\varphi} F_\rho, \quad (2.1.37)$$

$$F = \left[\frac{m_{00}m_{10}m_{20}}{m_{00} + m_{10}} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_2^3} P_2(\cos s) + \frac{m_{00}m_{10}m_{20}(m_{00} - m_{10})}{(m_{00} + m_{10})^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\rho_1^3}{\rho_2^4} P_3(\cos s) + \dots \right],$$

$$F_\rho = - (\mu_1 \rho_1^2 + \mu_2 \rho_2^2).$$

Используя интегралы (2.1.32), (2.1.3) понизим порядок системы (2.1.34)–(2.1.36), (2.1.37) аналогично тому, как это было выполнено в классической задаче с постоянными массами [118]. Возмущающая функция F в силу выбранного промежуточного движения может быть представлена в виде

$$F = \sum A_{\sin}^{\cos} (il_1 + jg_1 + kh_1 + i'l_2 + j'g_2 + k'h_2),$$

где коэффициенты A зависят только от $L_1, G_1, H_1, L_2, G_2, H_2$. Из интеграла

$$H_1 + H_2 = c$$

следует, что элементы h_1 и h_2 входят в возмущающую функцию F только в сочетании $h_1 - h_2$. Так как за основную плоскость принята неизменная плоскость Лапласа, то согласно (2.1.32)

$$h_1 - h_2 = 180^\circ.$$

Так что F не будет зависеть от h_1 и h_2 . Далее обозначив

$$G_1 = \Gamma_1, \quad G_2 = \Gamma_2, \quad (2.1.38)$$

из интегралов (2.1.33) получим

$$H_1 = \frac{c}{2} + \frac{1}{2c} (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2), \quad H_2 = \frac{c}{2} - \frac{1}{2c} (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2). \quad (2.1.39)$$

Используя последние формулы исключим переменные H_1, H_2 , тогда F является функцией только переменных

$$L_1, \Gamma_1, l_1, g_1, L_2, \Gamma_2, l_2, g_2,$$

а функция F_ρ имеет вид

$$F_\rho = F_\rho(L_1, L_2, \Gamma_1, \Gamma_2, l_1, l_2),$$

и, следовательно, уравнения движения рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \frac{\partial R^*}{\partial l_1}, & \dot{\Gamma}_1 &= \frac{\partial R^*}{\partial g_1}, \\ \dot{l}_1 &= -\frac{\partial R^*}{\partial L_1}, & \dot{g}_1 &= -\frac{\partial R^*}{\partial \Gamma_1}, \\ \dot{L}_2 &= \frac{\partial R^*}{\partial l_2}, & \dot{\Gamma}_2 &= \frac{\partial R^*}{\partial g_2}, \\ \dot{l}_2 &= -\frac{\partial R^*}{\partial L_2}, & \dot{g}_2 &= -\frac{\partial R^*}{\partial \Gamma_2}, \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

где

$$R^* = \frac{1}{\varphi^2(t)} \sum_{i=1}^2 \frac{\beta_i^4}{\mu_i L_i^2} + \frac{f}{\varphi^2(t)} F + \frac{1}{2} \varphi \ddot{\varphi} F_\rho. \quad (2.1.41)$$

Система канонических неавтономных дифференциальных уравнений (2.1.40)– (2.1.41) имеет четыре степени свободы и является базовой для различных приложений. В частности, нами найдены интегрируемые случаи дифференциальных уравнений определяющие вековые возмущения [74, 75].

Дифференциальные уравнения для отыскания вековых возмущений. Обозначим вековую часть возмущающей функции через \tilde{R}^* , тогда, за исключением резонансных значений L_1 и L_2 , согласно методу Гаусса вычисления вековых возмущений, имеем

$$\tilde{R}^* = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R^* dl_1 dl_2 = \tilde{R}. \quad (2.1.42)$$

Из соотношений (2.1.34), (2.1.35), (2.1.37) и (2.1.42) следуют дифференциальные уравнения, определяющие вековые возмущения в

рассматриваемой задаче

$$\begin{aligned}
 \dot{L}_1 &= 0, & \dot{G}_1 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial g_1}, & \dot{H}_1 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial h_1}, \\
 \dot{l}_1 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial L_1}, & \dot{g}_1 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial G_1}, & \dot{h}_1 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial H_1}, \\
 \\
 \dot{L}_2 &= 0, & \dot{G}_2 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial g_2}, & \dot{H}_2 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial h_2}, \\
 \dot{l}_2 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial L_2}, & \dot{g}_2 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial G_2}, & \dot{h}_2 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial H_2}.
 \end{aligned} \tag{2.1.43}$$

Так как интегралы площадей (2.1.32)–(2.1.33) не зависят от l_1 и l_2 , то они сохраняют свою силу и для дифференциальных уравнений (2.1.43). Поэтому, понижая порядок системы (2.1.43), путем исключения узла, получим неавтономные канонические уравнения с двумя степенями свободы [75]

$$\begin{aligned}
 \dot{\Gamma}_1 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial g_1}, & \dot{g}_1 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Gamma_1}, \\
 \dot{\Gamma}_2 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial g_2}, & \dot{g}_2 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Gamma_2},
 \end{aligned} \tag{2.1.44}$$

где уже учтены соотношения (2.1.38)–(2.1.39).

После того, как уравнения (2.1.44) будут проинтегрированы, из (2.1.38) и (2.1.39) получим G_1 , G_2 , H_1 , H_2 . Затем, посредством квадратур находим h_1 , h_2 из уравнений

$$\dot{h}_2 = -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial H_2}, \quad h_1 = h_2 + 180^\circ,$$

где \tilde{R} перед дифференцированием следует рассматривать как функцию переменных G_1 , G_2 , H_1 , H_2 , g_1 , g_2 , h_1 , h_2 . Вековые значения переменных l_1 и l_2 получим путем квадратур из уравнений (2.1.43).

В случае, когда движение трех тел происходит в одной плоскости, дифференциальные уравнения вековых возмущений (2.1.43) опять упрощаются. В этом случае G и H совпадают и можно положить

$$G_1 = H_1 = \Pi_1.$$

Существует только один интеграл площадей

$$\Pi_1 + \Pi_2 = c.$$

Отсюда следует, что \tilde{R} зависит только от разности $(g_1 - g_2)$. Введем две новые переменные

$$K^* = \Pi_1, \quad k^* = g_1 - g_2, \quad (2.1.45)$$

следовательно

$$\Pi_2 = c - K^*. \quad (2.1.46)$$

Тогда при помощи (2.1.45), (2.1.46) можно представить \tilde{R} как функции переменных K^* , k^* и получим канонические неавтономные дифференциальные уравнения только с одной степенью свободы

$$\dot{K}^* = \frac{\partial \tilde{R}}{\partial k^*}, \quad \dot{k}^* = -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial K^*}. \quad (2.1.47)$$

После того, как будут проинтегрированы уравнения (2.1.47) долгота перигелия получается из уравнений

$$\dot{g}_1 = -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Pi_1}.$$

Отметим, что в случае

$$\varphi^3 \ddot{\varphi} = \text{const} \quad (2.1.48)$$

уравнения (2.1.34)–(2.1.35), (2.1.37) становятся автономными и допускают интеграл

$$R^* = R_0^* = \text{const}. \quad (2.1.49)$$

И соответственно в случае (2.1.48) для уравнений вековых возмущений имеем интеграл

$$\tilde{R} = \tilde{R}_0 = \text{const}. \quad (2.1.50)$$

Таким образом, в случае (2.1.48), уравнения движения (2.1.47) определяющие вековые возмущения в плоской задаче, благодаря наличию интеграла (2.1.50), сводится к квадратурам.

2.2. Задача трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами в приближении Хилла

В аналогах канонических элементов Делоне (2.1.31) уравнения движения задачи трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами

$$m_0 = \frac{m_{00}}{\varphi(t)}, \quad m_1 = \frac{m_{10}}{\varphi(t)}, \quad m_2 = \frac{m_{20}}{\varphi(t)} \quad (2.2.1)$$

согласно п. 2.1. имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \frac{\partial R^*}{\partial l_1}, & \dot{G}_1 &= \frac{\partial R^*}{\partial g_1}, & \dot{H}_1 &= \frac{\partial R^*}{\partial h_1}, \\ \dot{l}_1 &= -\frac{\partial R^*}{\partial L_1}, & \dot{g}_1 &= -\frac{\partial R^*}{\partial G_1}, & \dot{h}_1 &= -\frac{\partial R^*}{\partial H_1}, \\ \dot{L}_2 &= \frac{\partial R^*}{\partial l_2}, & \dot{G}_2 &= \frac{\partial R^*}{\partial g_2}, & \dot{H}_2 &= \frac{\partial R^*}{\partial h_2}, \\ \dot{l}_2 &= -\frac{\partial R^*}{\partial L_2}, & \dot{g}_2 &= -\frac{\partial R^*}{\partial G_2}, & \dot{h}_2 &= -\frac{\partial R^*}{\partial H_2}, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

где

$$R^* = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\varphi^2(t)} \left(\frac{1}{2} \frac{\beta_i^4}{\mu_i L_i^2} \right) + \frac{f}{\varphi^2(t)} F + \frac{1}{2} \varphi \dot{\varphi} F_\rho, \quad (2.2.3)$$

$$F = \left[\frac{m_{00} m_{10} m_{20}}{m_{00} + m_{10}} \frac{\rho_1^2}{\rho_2^3} P_2(\cos s) + \frac{m_{00} m_{10} m_{20} (m_{00} - m_{10})}{(m_{00} + m_{10})^2} \frac{\rho_1^3}{\rho_2^4} P_3(\cos s) + \dots \right], \quad (2.2.4)$$

$$F = -\mu_1 \rho_1^2 - \mu_2 \rho_2^2. \quad (2.2.5)$$

Предельный вариант этой задачи, когда

$$r_1 \ll r_2 \quad (2.2.6)$$

по аналогии с соответствующей стационарной задачей [119] будем называть *случаем Хилла* (в отличие от второй промежуточной орбиты Хилла [111]). Учитывая, что $r_i = \varphi(t) \rho_i$ перепишем соотношение (2.2.6) в виде

$$\rho_1 \ll \rho_2. \quad (2.2.7)$$

Если ограничимся первым слагаемым в формуле (2.2.4), с учетом выражения (2.2.7), то получим приближенное выражение гамильтониана (2.2.3) рассматриваемой задачи (2.2.2) в приближении Хилла

$$R^* = \frac{1}{\varphi^2(t)} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\beta_i^4}{\mu_i L_i^2} \right) + \frac{f}{\varphi^2(t)} \cdot \frac{m_{00} m_{10} m_{20} \rho_1^2}{m_{00} + m_{10} \rho_2^3} P_2(\cos s) + \frac{1}{2} \varphi \ddot{\varphi} F_\rho. \quad (2.2.8)$$

Исследуем вековые возмущения в задаче трех тел с массами изменяющимися в одинаковом темпе, в случае Хилла (2.2.6), описываемые уравнениями (2.2.2), (2.2.8). Двукратное осреднение по угловым переменным l_1, l_2 , за исключением резонансных значений L_1 и L_2 , в формуле (2.2.8) дает

$$\tilde{R}^* = \frac{1}{\varphi^2(t)} \tilde{F} + \frac{1}{2} \varphi \ddot{\varphi} \tilde{F}_\rho = \tilde{R}, \quad (2.2.9)$$

где

$$\tilde{F} = \frac{f m_{00} m_{10} m_{20}}{m_{00} + m_{10}} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1^2}{\rho_2^3} P_2(\cos s) dl_1 dl_2, \quad (2.2.10)$$

$$\tilde{F}_\rho = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_\rho dl_1 dl_2. \quad (2.2.11)$$

В силу формул, определяющих промежуточные движения (2.1.22), (2.1.23) из соотношений (2.2.10), (2.2.11) следует [81, 119]

$$\begin{aligned} \tilde{F} = f \frac{m_{00} m_{10} m_{20}}{m_{00} + m_{10}} \cdot \frac{a_1^2}{8a_2^3(1 - e_2^2)^{3/2}} \{ 3(1 - e_1^2) [1 + \cos^2 I] + \\ + 15e_1^2 [\cos^2 \omega_1 + \cos^2 I \cdot \sin^2 \omega_1] - 6e_1^2 - 4 \}, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$\tilde{F}_\rho = -\mu_1 a_1^2 \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) - \mu_2 a_2 \left(1 + \frac{3}{2} e_2^2 \right), \quad (2.2.13)$$

причем

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{L_1^2}{\beta_1^2}, \quad e_1^2 = 1 - \frac{G_1^2}{L_1^2}, \quad \omega_1 = g_1, \\ a_2 = \frac{L_2^2}{\beta_2^2}, \quad e_2^2 = 1 - \frac{G_2^2}{L_2^2}, \quad \omega_2 = g_2, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$\cos I = \cos(i_1 + i_2). \quad (2.2.15)$$

Уравнения определяющие вековые возмущения, в силу цикличности переменной $\omega_2 = g_2$, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= 0, & \dot{G}_1 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial g_1}, & \dot{H}_1 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial h_1}, \\ \dot{i}_1 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial L_1}, & \dot{g}_1 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial G_1}, & \dot{h}_1 &= -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial H_1}. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 &= 0, & \dot{G}_2 &= 0, & \dot{H}_2 &= \frac{\partial \tilde{R}}{\partial h_2}, \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

$$\dot{i}_2 = -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial L_2}, \quad \dot{g}_2 = -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial G_2}, \quad \dot{h}_2 = -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial H_2}.$$

Понижая порядок уравнений (2.2.16)–(2.2.17) с использованием интегралов площадей (2.1.32)–(2.1.33), получим неавтономную каноническую систему с одной степенью свободы

$$\dot{G}_1 = \frac{\partial \tilde{R}}{\partial g_1}, \quad \dot{g}_1 = -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Gamma_1}, \quad (2.2.18)$$

где уже учтены соотношения

$$\Gamma_1 = G_1, \quad \Gamma_2 = G_2, \quad h_1 + h_2 = 180^\circ, \quad (2.2.19)$$

$$H_1 = \frac{c}{2} + \frac{1}{2c} (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2), \quad H_2 = \frac{c}{2} - \frac{1}{2c} (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2),$$

$$\cos I = \cos(i_1 + i_2) = \frac{c^2 - \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2}{2\Gamma_1 \Gamma_2}. \quad (2.2.20)$$

В уравнениях (2.2.18) явный вид гамильтониана следующий

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{f m_{00} m_{10} m_{20}}{\varphi^2(t)(m_{00} + m_{10})} \cdot \frac{a_1^2 L_2^3}{8a_2^3 \Gamma_2^3} \left\{ 3 \frac{\Gamma_1^2}{L_1^2} \left[1 + \frac{(c^2 - \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)^2}{4\Gamma_1^2 \Gamma_2^2} \right] + \right. \\ &+ 15 \left(1 - \frac{\Gamma_1^2}{L_1^2} \right) \left[\cos^2 g_1 + \frac{(c^2 - \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)^2}{4\Gamma_1^2 \Gamma_2^2} \sin^2 g_1 \right] - 6 \left(1 - \frac{\Gamma_1^2}{L_1^2} \right) - 4 \left. \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \varphi \ddot{\varphi} \left\{ \mu_1 a_1^2 \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\Gamma_1^2}{L_1^2} \right) \right] + \mu_2 a_2^2 \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\Gamma_2^2}{L_2^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

причем

$$c = \text{const}, \quad \Gamma_2 = \text{const}, \quad L_1 = \text{const}, \quad L_2 = \text{const}$$

являются параметрами.

Вводя новую независимую переменную

$$d\tau = \frac{dt}{\varphi^2(t)}, \quad (2.2.22)$$

и обозначив следуя [119]

$$\alpha = \frac{c}{L_1}, \quad \beta = \frac{\Gamma_2}{L_1}, \quad (2.2.23)$$

перепишем систему (2.2.18), (2.2.21) в виде

$$\frac{d\Gamma_1}{d\tau} = \frac{\partial \tilde{R}}{\partial g_1}, \quad \frac{dg_1}{d\tau} = -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Gamma_1}, \quad (2.2.24)$$

где

$$\tilde{R} = k(W + \frac{5}{2}) + \frac{k_1}{2} (k_2 e_1^2 + \tilde{F}_{\rho 0}), \quad (2.2.25)$$

$$\tilde{F}_{\rho 0} = -\frac{\beta_1 a_1^2}{\sqrt{f(m_{00} + m_{10})}} - \frac{\beta_2 a_2^2 (2 + 3e_2^2)}{2\sqrt{f(m_{00} + m_{10} + m_{20})}}, \quad (2.2.26)$$

$$k = \frac{3f m_{00} m_{10} m_{20}}{8(m_{00} + m_{10})(1 - e_2^2)^{3/2}} \cdot \frac{a_1^2}{a_2^2}, \quad k_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{m_{00} m_{10}}{m_{00} + m_{10}} \cdot a_1^2, \quad (2.2.27)$$

$$k_1 = \varphi^3 \ddot{\varphi} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} - \frac{2}{\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2, \quad (2.2.28)$$

$$W = -2\varepsilon + \frac{(\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon)^2}{4\beta^2} + 5(1 - \varepsilon) \sin^2 \omega \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon)^2}{4\beta^2 \varepsilon} - 1 \right], \quad (2.2.29)$$

причем в последнем соотношении приняты обозначения

$$\varepsilon = \frac{\Gamma_1^2}{L_1^2} = 1 - e_1^2, \quad \omega = g_1. \quad (2.2.30)$$

В переменных (2.2.30) система (2.2.24) имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{L_1} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{L_1} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \varepsilon}, \quad (2.2.31)$$

где

$$\widetilde{W} = kW + \frac{1}{2}k_1k_2(1 - \varepsilon) = kW^* + \frac{1}{2}k_1k_2. \quad (2.2.32)$$

Учитывая последнее выражение, перепишем уравнения (2.2.31) следующим образом

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{L_1} \frac{\partial W^*}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{L_1} \frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon}, \quad (2.2.33)$$

где

$$W^* = -2\kappa\varepsilon + \frac{(\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon)^2}{4\beta^2} + 5(1 - \varepsilon)\sin^2\omega \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon)^2}{4\beta^2\varepsilon} - 1 \right]. \quad (2.2.34)$$

Формула (2.2.34), в отличие от соответствующего стационарного случая [119, 152], зависит, кроме безразмерных параметров α и β , еще и от безразмерной величины

$$\kappa = 1 + \frac{k_2}{4k}k_1(\tau(t)), \quad (2.2.35)$$

учитывающий переменность масс тел (2.2.1).

Таким образом, в случае Хилла (2.2.6), рассматриваемая задача сводится к неавтономной канонической системе дифференциальных уравнений (2.2.33) только с одной степенью свободы.

Законы изменения масс Мещерского. В частности, когда

$$k_1 = k_{10} = \text{const} \quad (2.2.36)$$

система (2.2.33) становится автономной и сводится к квадратурам. В этом случае в плоскости ε, ω фазовые кривые определяются интегралом

$$\begin{aligned} -2\kappa_0\varepsilon + \frac{(\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon)^2}{4\beta^2} + 5(1 - \varepsilon)\sin^2\omega \times \\ \times \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon)^2}{4\beta^2\varepsilon} - 1 \right] = W_0^* = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

где

$$\kappa_0 = 1 + \frac{k_2}{4k}k_{10} = \text{const}. \quad (2.2.38)$$

Топология множества интегральных кривых в этой плоскости в общем случае зависит от значения трех безразмерных параметров α , β и \varkappa_0 , определяемых формулами (2.2.23), (2.2.38).

Как и в соответствующей стационарной задаче [23], так и в нашем случае естественные ограничения

$$-1 \leq \cos I = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon}{2\beta\sqrt{\varepsilon}} \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (2.2.39)$$

выделяют множество Q допустимых значений параметров α , β :

$$Q = \{(\alpha, \beta) \in R^2, \|\alpha - \beta\| \leq 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}. \quad (2.2.40)$$

Допустимые значения параметра \varkappa_0 определяются из соотношения (2.2.38), где значение k_{10} вытекает из законов изменения масс тел (2.2.1), определяемых условием (2.2.36). Из формул (2.2.28), (2.2.36) следуют законы изменения масс Мещерского.

Пусть $k_{10} = 0$, тогда получим первый закон Мещерского

$$\varphi = \varphi(t) = \frac{At + B}{At_0 + B}, \quad m_1 = \frac{m_{10}}{\varphi(t)}, \quad m_2 = \frac{m_{20}}{\varphi(t)}, \quad (2.2.41)$$

$$\varkappa_0 = 1. \quad (2.2.42)$$

При $k_{10} \neq 0$ из условия (2.2.36), в частности, следует второй закон Мещерского

$$\varphi = \varphi(t) = \frac{\sqrt{2Bt + C}}{\sqrt{2Bt_0 + C}}, \quad m_1 = \frac{m_{10}}{\varphi(t)}, \quad m_2 = \frac{m_{20}}{\varphi(t)}, \quad (2.2.43)$$

$$k_{10} = -\frac{B^2}{(2Bt_0 + C)^2} = -\left(\frac{\dot{m}_{i0}}{m_{i0}}\right)^2 = \text{const} < 0, \quad (2.2.44)$$

$$\varkappa_0 = 1 + \left(\frac{\dot{m}_{i0}}{m_{i0}}\right)^2 \frac{a_2^3(1 - e_2^2)^{3/2}}{f m_{20}} = \text{const} > 1.$$

В общем случае, когда $k_{10} \neq 0$, из условия (2.2.36) получим объединенный закон Мещерского

$$\varphi = \varphi(t) = \frac{\sqrt{At^2 + 2Bt + C}}{\sqrt{At_0^2 + 2Bt_0 + C}}, \quad m_1 = \frac{m_{10}}{\varphi(t)}, \quad m_2 = \frac{m_{20}}{\varphi(t)}, \quad (2.2.45)$$

$$k_{10} = -\frac{\Delta}{(At_0^2 + 2Bt_0 + C)^2} = \text{const}, \quad \Delta = B^2 - AC \neq 0, \quad (2.2.46)$$

$$\varkappa_0 = 1 + \frac{\Delta}{(At_0^2 + 2Bt_0 + C)^2} \cdot \frac{a_2^3(1 - e_2^2)^{3/2}}{f m_{20}} = \text{const}.$$

В формулах (2.2.41), (2.2.43), (2.2.45), (2.2.46) A , B и C постоянные величины, t_0 – начальный момент времени.

Напишем уравнение (2.2.33) в случае (2.2.36) в развернутом виде

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{10k\sqrt{\varepsilon}}{L_1}(1 - \varepsilon) \cdot \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon)^2}{4\beta^2\varepsilon} - 1 \right] \sin 2\omega,$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{2k\sqrt{\varepsilon}}{L_1} \left\{ 2\varkappa_0 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon}{2\beta^2} + 5 \sin^2 \omega \cdot \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon)^2}{4\beta^2\varepsilon} - 1 + (1 - \varepsilon) \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon}{2\beta^2\varepsilon} \left(1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon}{2\varepsilon} \right) \right] \right\}.$$

(2.2.47)

В общем случае, на фазовой плоскости ε , ω , имеем следующие пять неподвижных точек

$$1. \quad A : \{ \omega = 0, \varepsilon = \alpha^2 + (4\varkappa_0 - 1)\beta^2 \}, \quad (2.2.48)$$

$$2. \quad A' : \left\{ \omega = \frac{\pi}{2}, \varepsilon = \varepsilon_{A'} \right\}, \quad (2.2.49)$$

$$3. \quad B : \left\{ \omega = \frac{\pi}{2}, \varepsilon = \varepsilon_B \right\}. \quad (2.2.50)$$

В равновесных решениях (2.2.49)–(2.2.50) величины $\varepsilon_{A'}$ и ε_B определяются как корни кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - \left[\left(\frac{3}{2} - \varkappa_0 \right) \beta^2 + \alpha^2 + \frac{5}{8} \right] \varepsilon^2 + \frac{5}{8} (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0, \quad (2.2.51)$$

где коэффициент в квадратной скобке перед ε^2 предполагается по-

ЛОЖИТЕЛЬНЫМ.

$$4. E_1 : \quad \{ \omega = \omega_1, \varepsilon = \varepsilon_1 = (\alpha + \beta)^2 \},$$

$$\omega_1 = \arcsin \left\{ \frac{(\alpha + \beta)^2 [(2\kappa_0 - 1)\beta - \alpha]}{5\alpha [1 - (\alpha - \beta)^2]} \right\}^{1/2}, \quad \alpha + \beta < 1.$$

(2.2.52)

$$5. E_2 : \quad \{ \omega = \omega_2, \varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\max} = 1 \},$$

$$\omega_2 = \arcsin \left\{ \frac{2 [\alpha^2 + (4\kappa_0 - 1)\beta^2 - 1]}{5 [4\beta^2 - (\alpha^2 - \beta^2 - 1)^2]} \right\}^{1/2}, \quad \alpha + \beta > 1.$$

(2.2.53)

Как следует из соотношений (2.2.37), (2.2.42), (2.2.48)–(2.2.52), если массы тел изменяются со временем по первому закону Мещерского (2.2.41), то качественная картина на фазовой плоскости ε, ω формально-математически совпадает с соответствующей ситуацией задачи с постоянными массами [119] и зависит только от двух параметров α, β , хотя физическая картина в исходном пространстве отличается.

В случаях, когда массы тел меняются со временем в одинаковом темпе по второму закону Мещерского (2.2.43) и по объединенному закону Мещерского (2.2.45), интегральные кривые (2.2.37) существенно зависят, кроме параметров α, β , и от параметра κ_0 , определяемого по формулам (2.2.44), (2.2.46).

Это обстоятельство порождает качественное отличие картины в фазовой плоскости переменных ε, ω по сравнению с соответствующей задачей с постоянными массами. В частности, координаты особых точек (2.2.48)–(2.2.50), (2.2.52), (2.2.53) существенно зависят от трех параметров α, β , и κ_0 .

2.3. Задача трех тел с массами, изменяющимися изотропно в различных темпах

Рассмотрим систему свободных трех тел T_0, T_1 и T_2 взаимогра-

витирующих по закону Ньютона, с переменными массами

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t) \quad (2.3.1)$$

изменяющимися в различных темпах, т.е.

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} \neq \frac{\dot{m}_j}{m_j}, \quad i \neq j \quad (2.3.2)$$

в абсолютной декартовой прямоугольной системе координат. Тела рассмотрим как материальные точки и предположим, что их массы изменяются со временем изотропно. Тогда не возникают дополнительные силы — реактивные силы, что имеет место, также, при равенстве нулю относительных скоростей отделяющихся (присоединяющихся) частиц. Уравнения движения в рассматриваемой системе координат имеют вид

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i^* = \text{grad}_{\vec{R}_i^*} U, \quad i = 0, 1, 2, \quad (2.3.3)$$

где

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{R_{01}^*} + \frac{m_0 m_2}{R_{02}^*} + \frac{m_1 m_2}{R_{12}^*} \right),$$

$$R_{ij}^* = \sqrt{(X_j^* - X_i^*)^2 + (Y_j^* - Y_i^*)^2 + (Z_j^* - Z_i^*)^2},$$

$\vec{R}_i^* = \vec{R}_i^*(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*)$ — радиус-векторы тел, f — гравитационная постоянная. Рассматриваемая система уравнений (2.3.3) при условии (2.3.1)–(2.3.2) в отличие от других схем задачи трех тел с переменными массами не имеет ни одного известного интеграла.

Учитывая, что силовая функция зависит только от взаимных расстояний тел, следуя работе [120], переходим к относительной системе координат с началом в точке T_0 с массой $m_0 = m_0(t)$. Обозначим

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i(X_i, Y_i, Z_i) = \vec{R}_i^* - \vec{R}_0^*, \quad i = 1, 2. \quad (2.3.4)$$

Уравнения относительного движения имеют классический вид

$$\ddot{\vec{R}}_i + f(m_0 + m_i) \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} = \text{grad}_{\vec{R}_i} W_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.3.5)$$

$$W_i = f \sum_{j=1}^2 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j}{R_j^3} \right),$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} = R_{ij}^*,$$

$$\Delta_{i0} = R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}.$$

Если мы знаем решения системы дифференциальных уравнений (2.3.5), то \vec{R}_0^* определяется квадратурой из уравнений приведенных в работе [120]

$$\ddot{\vec{R}}_0^* = \text{grad}_{\vec{R}_0^*} \left[f \left(\frac{m_1}{R_{01}^*} + \frac{m_2}{R_{02}^*} \right) \right].$$

После этого \vec{R}_1^* , \vec{R}_1^* легко определяются из соотношений (2.3.4). Однако, в общем случае, при условии (2.3.2) не известен ни один интеграл уравнений (2.3.5).

Исходя из уравнений относительного движения (2.3.5) получим уравнения движения в координатах Якоби $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$. Очевидно

$$\vec{R}_1 = \vec{r}_1,$$

Из геометрии точечных масс [121] следует

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_2 - \nu_1 \vec{R}_1,$$

причем в рассматриваемом случае (2.3.2)

$$\nu_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \neq \text{const.} \quad (2.3.6)$$

Таким образом, формулы преобразования от относительной системы координат с началом в точке T_0 , к системе координат Якоби имеют вид

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1, \quad \vec{r}_2 = \vec{R}_2 - \nu_1 \vec{R}_1. \quad (2.3.7)$$

Эти формулы сохраняют свою силу, в частности, и для классической задачи трех тел (точек) с постоянными массами, где они получены другим путем [122].

Из соотношений (2.3.5) и (2.3.7) следуют [83, 84]

$$\begin{aligned}\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \text{grad}_{\vec{r}_1} U, \\ \mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \text{grad}_{\vec{r}_2} U - \mu_2 \left(2i_1 \dot{\vec{r}}_1 + \ddot{i}_1 \vec{r}_1 \right),\end{aligned}\tag{2.3.8}$$

где

$$\mu_1 = m_1 \frac{m_0}{m_0 + m_1} \neq \text{const}, \quad \mu_2 = m_2 \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} \neq \text{const}\tag{2.3.9}$$

приведенные массы,

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} \right),\tag{2.3.10}$$

$$\Delta_{01}^2 = r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,\tag{2.3.11}$$

$$\Delta_{02}^2 = (x_2 + \nu_1 x_1)^2 + (y_2 + \nu_1 y_1)^2 + (z_2 + \nu_1 z_1)^2,\tag{2.3.12}$$

$$\Delta_{12}^2 = (x_2 - \nu_0 x_1)^2 + (y_2 - \nu_0 y_1)^2 + (z_2 - \nu_0 z_1)^2,$$

причем в рассматриваемом случае (2.3.2)

$$\nu_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \neq \text{const}.\tag{2.3.13}$$

Теперь, исходя из уравнений движения в координатах Якоби (2.3.8) можно вывести уравнения движения рассматриваемой задачи (2.3.1)–(2.3.3) в барицентрической системе координат $G_\delta X_\delta Y_\delta Z_\delta$. Из геометрии точечных масс [121] следуют формулы преобразования

$$\vec{r}_{\delta 0} = -\frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \vec{r}_2,\tag{2.3.14}$$

$$\vec{r}_{\delta 1} = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \vec{r}_2,\tag{2.3.15}$$

$$\vec{r}_{\delta 2} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} \vec{r}_2.\tag{2.3.16}$$

Из соотношений (2.3.14)–(2.3.16) вытекает

$$m_0 \vec{r}_{\delta 0} + m_1 \vec{r}_{\delta 1} + m_2 \vec{r}_{\delta 2} = 0,\tag{2.3.17}$$

что естественно для радиус-векторов тел в барицентрической системе координат. Из формул (2.3.14)–(2.3.15) получим обратное преобразование

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{\delta 1} - \vec{r}_{\delta 0}. \quad (2.3.18)$$

Из формулы (2.3.16) следует

$$\vec{r}_2 = \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_0 + m_1} \vec{r}_{\delta 2}. \quad (2.3.19)$$

Последнему выражению с учетом (2.3.17) придадим вид

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{\delta 2} - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_{\delta 1} - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{r}_{\delta 0}. \quad (2.3.20)$$

В частности, если предположить массы тел постоянными, то формулы (2.3.14)–(2.3.16), (2.3.18) и (2.3.20) совпадают с известными соотношениями классической задачи трех тел (точек) с постоянными массами, полученными другим путем [122].

Соотношения (2.3.14)–(2.3.16) перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} m_0 \vec{r}_{\delta 0} &= -\mu_1 \vec{r}_1 - \nu_0 \cdot \mu_2 \vec{r}_2, \\ m_1 \vec{r}_{\delta 1} &= \mu_1 \vec{r}_1 - \nu_1 \cdot \mu_2 \vec{r}_2, \\ m_2 \vec{r}_{\delta 2} &= \mu_2 \vec{r}_2. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Из формул (2.3.8) и (2.3.21) получим

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_0 \vec{r}_{\delta 0}) = -\text{grad}_{\vec{r}_1} U - \nu_0 \cdot \text{grad}_{\vec{r}_2} U + \left(-\vec{A}_1 - \nu_0 \vec{A}_2 + \nu_0 \mu_2 \vec{B} \right) + \vec{K}_0, \quad (2.3.22)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 \vec{r}_{\delta 1}) = \text{grad}_{\vec{r}_1} U - \nu_1 \cdot \text{grad}_{\vec{r}_2} U + \left(\vec{A}_1 - \nu_1 \vec{A}_2 + \nu_1 \mu_2 \vec{B} \right) + \vec{K}_1, \quad (2.3.23)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_2 \vec{r}_{\delta 2}) = \text{grad}_{\vec{r}_2} U + \left(\vec{A}_2 - \mu_2 \vec{B} \right), \quad (2.3.24)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= 2\dot{\mu}_1 \left(\dot{\vec{r}}_{\delta 1} - \dot{\vec{r}}_{\delta 0} \right) + \ddot{\mu}_1 \left(\vec{r}_{\delta 1} - \vec{r}_{\delta 0} \right), \\ \vec{A}_2 &= 2\dot{\mu}_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_2}{m_2} \vec{r}_{\delta 2} \right) + \ddot{\mu}_2 \left(\frac{\mu_2}{m_2} \vec{r}_{\delta 2} \right), \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

$$\vec{B} = 2\dot{\nu}_1 \left(\dot{\vec{r}}_{\delta 1} - \dot{\vec{r}}_{\delta 0} \right) + \ddot{\nu}_1 (\vec{r}_{\delta 1} - \vec{r}_{\delta 0}), \quad (2.3.26)$$

$$\vec{K}_0 = -2\dot{\nu}_0 \frac{d}{dt} (m_2 \vec{r}_{\delta 2}) - \ddot{\nu}_0 (m_2 \vec{r}_{\delta 2}), \quad (2.3.27)$$

$$\vec{K}_1 = -2\dot{\nu}_1 \frac{d}{dt} (m_2 \vec{r}_{\delta 2}) - \ddot{\nu}_1 (m_2 \vec{r}_{\delta 2}).$$

В уравнениях (2.3.22)–(2.3.24) с учетом

$$\nu_0 + \nu_1 = 1$$

убедимся, что сумма их правых частей равна нулю. Поэтому в барицентрической системе координат

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_0 \vec{r}_{\delta 0} + m_1 \vec{r}_{\delta 1} + m_2 \vec{r}_{\delta 2}) = 0,$$

откуда, снова, учитывая свойства барицентрической системы координат, получим инварианты центра масс

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m_0 \vec{r}_{\delta 0} + m_1 \vec{r}_{\delta 1} + m_2 \vec{r}_{\delta 2}) &= 0, \\ m_0 \vec{r}_{\delta 0} + m_1 \vec{r}_{\delta 1} + m_2 \vec{r}_{\delta 2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Уравнениям движения (2.3.22)–(2.3.24) можно придать вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (m_0 \vec{r}_{\delta 0}) &= \text{grad}_{\vec{r}_{\delta 0}} U + \vec{D}_0, \\ \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_{\delta 1}) &= \text{grad}_{\vec{r}_{\delta 1}} U + \vec{D}_1, \\ \frac{d^2}{dt^2} (m_2 \vec{r}_{\delta 2}) &= \text{grad}_{\vec{r}_{\delta 2}} U + \vec{D}_2, \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{D}_0 &= -\vec{A}_1 - \nu_0 \vec{A}_2 + \nu_0 \mu_2 \vec{B} + \vec{K}_0, \\ \vec{D}_1 &= \vec{A}_1 - \nu_1 \vec{A}_2 + \nu_1 \mu_2 \vec{B} + \vec{K}_1, \\ \vec{D}_2 &= \vec{A}_2 - \mu_2 \vec{B}, \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

а силовая функция U определяется соотношением (2.3.10).

Уравнения движения задачи трех тел с массами, изменяющимися изотропно в различных темпах, (2.3.29) в барицентрической системе координат и инвариантные соотношения (2.3.28) в той же системе координат могут быть эффективно использованы при изучении эволюции нестационарных тройных систем.

Канонические уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Якоби, Делоне и Пуанкаре. Уравнения в координатах Якоби удобны для построения канонической теории возмущений для рассматриваемой задачи. Перепишем уравнения (2.3.8) в виде

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \text{grad}_{\vec{r}_1} \left(f \frac{m_1 m_0}{r_1} \right) + b_1 \vec{r}_1 + \text{grad}_{\vec{r}_1} R_1, \quad (2.3.31)$$

$$\mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \text{grad}_{\vec{r}_2} \left(f \frac{m_2(m_1 + m_0)}{r_2} \right) + b_2 \vec{r}_2 + \text{grad}_{\vec{r}_2} R_2, \quad (2.3.32)$$

где

$$b_1 = \mu_1 \frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1}, \quad \gamma_1 = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0)}{m_0(t) + m_1(t)}, \quad (2.3.33)$$

$$b_2 = \mu_2 \frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2}, \quad \gamma_2 = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_0(t) + m_1(t) + m_2(t)}, \quad (2.3.34)$$

$$R_1 = -\frac{1}{2} b_1 r_1^2 + W, \quad R_2 = -\frac{1}{2} b_2 r_2^2 + W - V, \quad (2.3.35)$$

$$W = f \left(\frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} - \frac{m_2(m_0 + m_1)}{r_2} \right), \quad (2.3.36)$$

$$V = \mu_2 [(2\dot{v}_1 \dot{x}_1 + \ddot{v}_1 x_1) x_2 + (2\dot{v}_1 \dot{y}_1 + \ddot{v}_1 y_1) y_2 + (2\dot{v}_1 \dot{z}_1 + \ddot{v}_1 z_1) z_2]. \quad (2.3.37)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} \mu_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2), & K_2 &= \frac{1}{2} \mu_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2), \\ U_1 &= f \frac{m_1 m_0}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{1}{2} b_1 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + R_1, \\ U_2 &= f \frac{m_2(m_0 + m_1)}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} + \frac{1}{2} b_2 (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + R_2, \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

и переходим к новым переменным

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_1 \rho_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, & y_1 &= \gamma_1 \rho_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, & z_1 &= \gamma_1 \rho_1 \sin \varphi_1, \\ x_2 &= \gamma_2 \rho_2 \cos \varphi_2 \cos \theta_2, & y_2 &= \gamma_2 \rho_2 \cos \varphi_2 \sin \theta_2, & z_2 &= \gamma_2 \rho_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

Тогда уравнения движения в переменных

$$\begin{aligned} \rho_1, \quad P_{\rho_1} &= \frac{\partial K_1}{\partial \dot{\rho}_1} = \mu_1 \gamma_1^2 \dot{\rho}_1 + \mu_1 \gamma_1 \dot{\gamma}_1 \rho_1, \\ \varphi_1, \quad P_{\varphi_1} &= \frac{\partial K_1}{\partial \dot{\varphi}_1} = \mu_1 \gamma_1^2 \rho_1^2 \dot{\varphi}_1, & \theta_1, \quad P_{\theta_1} &= \frac{\partial K_1}{\partial \dot{\theta}_1} = \mu_1 \gamma_1^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1 \dot{\theta}_1, \\ \rho_2, \quad P_{\rho_2} &= \frac{\partial K_2}{\partial \dot{\rho}_2} = \mu_2 \gamma_2^2 \dot{\rho}_2 + \mu_2 \gamma_2 \dot{\gamma}_2 \rho_2, \\ \varphi_2, \quad P_{\varphi_2} &= \frac{\partial K_2}{\partial \dot{\varphi}_2} = \mu_2 \gamma_2^2 \rho_2^2 \dot{\varphi}_2, & \theta_2, \quad P_{\theta_2} &= \frac{\partial K_2}{\partial \dot{\theta}_2} = \mu_2 \gamma_2^2 \rho_2^2 \cos^2 \varphi_2 \dot{\theta}_2, \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

можно написать в следующей форме

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial P_{\rho_1}}, & \dot{P}_{\rho_1} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \rho_1} + \frac{\dot{\mu}_1}{\mu_1} P_{\rho_1}, \\ \dot{\varphi}_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial P_{\varphi_1}}, & \dot{P}_{\varphi_1} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\dot{\mu}_1}{\mu_1} P_{\varphi_1}, \\ \dot{\theta}_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial P_{\theta_1}}, & \dot{P}_{\theta_1} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \theta_1} + \frac{\dot{\mu}_1}{\mu_1} P_{\theta_1}, \\ \dot{\rho}_2 &= \frac{\partial H_2}{\partial P_{\rho_2}}, & \dot{P}_{\rho_2} &= -\frac{\partial H_2}{\partial \rho_2} + \frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2} P_{\rho_2}, \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{\partial H_2}{\partial P_{\varphi_2}}, & \dot{P}_{\varphi_2} &= -\frac{\partial H_2}{\partial \varphi_2} + \frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2} P_{\varphi_2}, \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\partial H_2}{\partial P_{\theta_2}}, & \dot{P}_{\theta_2} &= -\frac{\partial H_2}{\partial \theta_2} + \frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2} P_{\theta_2}. \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

Соответственно

$$H_1 = \frac{1}{2\mu_1 \gamma_1^2} \left[(P_{\rho_1} - \mu_1 \gamma_1 \dot{\gamma}_1 \rho_1)^2 + \frac{P_{\varphi_1}^2}{\rho_1^2} + \frac{P_{\theta_1}^2}{\rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} \right] - U_1^*,$$

$$U_1^* = f \frac{m_1 m_0}{\gamma_1 \rho_1} + \frac{1}{2} (b_1 \gamma_1^2 + \mu_1 \dot{\gamma}_1^2) \rho_1^2 + R_1,$$

$$H_2 = \frac{1}{2\mu_2\gamma_2^2} \left[(P_{\rho_2} - \mu_2\gamma_2\dot{\gamma}_2\rho_2)^2 + \frac{P_{\varphi_2}^2}{\rho_2^2} + \frac{P_{\theta_2}^2}{\rho_2^2 \cos^2 \varphi_2} \right] - U_2^*,$$

$$U_2^* = f \frac{m_2(m_0 + m_1)}{\gamma_2\rho_2} + \frac{1}{2} (b_2\gamma_2^2 + \mu_2\dot{\gamma}_2^2) \rho_2^2 + R_2.$$

Вводя новые импульсы

$$\begin{aligned} P_{\rho_1} &= \psi_1 \tilde{P}_{\rho_1}, & P_{\varphi_1} &= \psi_1 \tilde{P}_{\varphi_1}, & P_{\theta_1} &= \psi_1 \tilde{P}_{\theta_1}, \\ \psi_1 &= \frac{\mu_1}{\mu_{10}} = \frac{\mu_1(t)}{\mu_1(t_0)}, \\ P_{\rho_2} &= \psi_2 \tilde{P}_{\rho_2}, & P_{\varphi_2} &= \psi_2 \tilde{P}_{\varphi_2}, & P_{\theta_2} &= \psi_2 \tilde{P}_{\theta_2}, \\ \psi_2 &= \frac{\mu_2}{\mu_{20}} = \frac{\mu_2(t)}{\mu_2(t_0)}, \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

напишем уравнения движения в канонической форме

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \tilde{P}_{\rho_1}}, & \dot{\varphi}_1 &= \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \tilde{P}_{\varphi_1}}, & \dot{\theta}_1 &= \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \tilde{P}_{\theta_1}}, \\ \dot{\tilde{P}}_{\rho_1} &= -\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \rho_1}, & \dot{\tilde{P}}_{\varphi_1} &= -\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \varphi_1}, & \dot{\tilde{P}}_{\theta_1} &= -\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \theta_1}, \end{aligned} \tag{2.3.43}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_2 &= \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \tilde{P}_{\rho_2}}, & \dot{\varphi}_2 &= \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \tilde{P}_{\varphi_2}}, & \dot{\theta}_2 &= \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \tilde{P}_{\theta_2}}, \\ \dot{\tilde{P}}_{\rho_2} &= -\frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \rho_2}, & \dot{\tilde{P}}_{\varphi_2} &= -\frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \varphi_2}, & \dot{\tilde{P}}_{\theta_2} &= -\frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \theta_2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= \tilde{H}_{10} + \tilde{H}_{11}, \\ \tilde{H}_2 &= \tilde{H}_{20} + \tilde{H}_{21}, \end{aligned} \tag{2.3.44}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{10} &= \frac{\psi_1}{2\mu_1\gamma_1^2} \left[\left(\tilde{P}_{\rho_1} - \frac{\mu_1\gamma_1\dot{\gamma}_1}{\psi_1} \rho_1 \right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\varphi_1}^2}{\rho_1^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_1}^2}{\rho_1^2 \cos^2 \varphi_1} \right] - \\ &- f \frac{m_1 m_0}{\psi_1 \gamma_1 \rho_1} - \frac{1}{2\psi_1} (b_1\gamma_1^2 + \mu_1\dot{\gamma}_1^2) \rho_1^2, \end{aligned} \tag{2.3.45}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{20} &= \frac{\psi_2}{2\mu_2\gamma_2^2} \left[\left(\tilde{P}_{\rho_2} - \frac{\mu_2\gamma_2\dot{\gamma}_2}{\psi_2}\rho_2 \right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\varphi_2}^2}{\rho_2^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_2}^2}{\rho_2^2 \cos^2 \varphi_2} \right] - \\
&- f \frac{m_2(m_0 + m_1)}{\psi_2\gamma_2\rho_2} - \frac{1}{2\psi_2} \left(b_2\gamma_2^2 + \mu_2\dot{\gamma}_2^2 \right) \rho_2^2, \\
\tilde{H}_{11} &= -\frac{1}{\psi_1} R_1, \quad \tilde{H}_{21} = -\frac{1}{\psi_2} R_2. \tag{2.3.46}
\end{aligned}$$

При $R_1 = R_2 = 0$ уравнения (2.3.43)–(2.3.45) интегрируется методом Гамильтона-Якоби [70], причем постоянные интегрирования

$$\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}, \tag{2.3.47}$$

$$\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}, \beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{32},$$

есть аналоги соответствующих элементов Якоби в классической задаче двух тел (точек) постоянной массы. Каждая система уравнений (2.3.43)–(2.3.45) определяет аperiодическое движение по квазиконическому сечению

$$\rho_1 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos v_1}, \quad v_1 = u_1 - \omega_1, \quad p_1 = a_1(1 - e_1^2), \tag{2.3.48}$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos v_2}, \quad v_2 = u_2 - \omega_2, \quad p_2 = a_2(1 - e_2^2),$$

$$\dot{\rho}_1 = \frac{1}{\mu_{10}\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\beta_1}{\sqrt{p_1}} e_1 \sin v_1, \quad \dot{u}_1 = \frac{1}{\mu_{10}\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\beta_1\sqrt{p_1}}{\rho_1^2}, \tag{2.3.49}$$

$$\dot{\rho}_2 = \frac{1}{\mu_{20}\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\beta_2}{\sqrt{p_2}} e_2 \sin v_2, \quad \dot{u}_2 = \frac{1}{\mu_{20}\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\beta_2\sqrt{p_2}}{\rho_2^2},$$

$$\beta_1^2 = f \cdot \mu_{10}m_1(t_0) m_0(t_0), \quad \mu_{10} = \mu_1(t_0), \tag{2.3.50}$$

$$\beta_2^2 = f \cdot \mu_{20}m_2(t_0) [m_0(t_0) + m_1(t_0)], \quad \mu_{20} = \mu_2(t_0),$$

$$\operatorname{tg} \frac{v_1}{2} = \frac{\sqrt{1+e_1}}{\sqrt{1-e_1}} \operatorname{tg} \frac{E_1}{2}, \quad e_1 < 1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{v_2}{2} = \frac{\sqrt{1+e_2}}{\sqrt{1-e_2}} \operatorname{tg} \frac{E_2}{2}, \quad e_2 < 1,$$

$$E_1 - e_1 \sin E_1 = M_1, \quad E_2 - e_2 \sin E_2 = M_2, \quad (2.3.51)$$

$$M_1 = n_1 [\phi_1(t) - \phi_1(\tau_1)], \quad n_1 = \frac{\beta_1}{\mu_{10} a_1^{3/2}}, \quad (2.3.52)$$

$$M_2 = n_2 [\phi_2(t) - \phi_2(\tau_2)], \quad n_2 = \frac{\beta_2}{\mu_{20} a_2^{3/2}},$$

где $\phi_1(t), \phi_2(t)$ первообразные функции соответственно $\gamma_1^{-2}(t)$ и $\gamma_2^{-2}(t)$,

$$a_1, \quad e_1, \quad \omega_1, \quad \Omega_1, \quad i_1, \quad \phi_1(\tau_1), \quad (2.3.53)$$

$$a_2, \quad e_2, \quad \omega_2, \quad \Omega_2, \quad i_2, \quad \phi_2(\tau_2)$$

элементы орбиты — аналоги соответствующих кеплеровских элементов, причем

$$\begin{aligned} -2\alpha_{11} &= \frac{\beta_1^2}{\mu_{10} a_1}, & \alpha_{21} &= \beta_1 \sqrt{p_1}, & \alpha_{31} &= \beta_1 \sqrt{p_1} \cos i_1, \\ \beta_{11} &= -\phi_1(\tau_1), & \beta_{21} &= \omega_1, & \beta_{31} &= \Omega_1, \\ -2\alpha_{12} &= \frac{\beta_2^2}{\mu_{20} a_2}, & \alpha_{22} &= \beta_2 \sqrt{p_2}, & \alpha_{32} &= \beta_2 \sqrt{p_2} \cos i_2, \\ \beta_{12} &= -\phi_2(\tau_2), & \beta_{22} &= \omega_2, & \beta_{32} &= \Omega_2. \end{aligned} \quad (2.3.54)$$

Уравнения (2.3.43)–(2.3.46) в системе переменных (2.3.47) как уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{\alpha}_{k1} = \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial \beta_{k1}}, \quad \dot{\beta}_{k1} = -\frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial \alpha_{k1}}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.3.55)$$

$$\dot{\alpha}_{k2} = \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial \beta_{k2}}, \quad \dot{\beta}_{k2} = -\frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial \alpha_{k2}}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \frac{1}{\psi_1} R_1(t, \alpha_{k1}, \beta_{k1}, \alpha_{k2}, \beta_{k2}) \\ \tilde{R}_2 &= \frac{1}{\psi_2} R_2(t, \alpha_{k1}, \beta_{k1}, \alpha_{k2}, \beta_{k2}). \end{aligned} \quad (2.3.56)$$

Введем аналоги элементов Делоне

$$\begin{aligned} L_1, \quad G_1, \quad H_1, \quad l_1, \quad g_1, \quad h_1, \\ L_2, \quad G_2, \quad H_2, \quad l_2, \quad g_2, \quad h_2 \end{aligned} \quad (2.3.57)$$

посредством формул

$$\begin{aligned} -2\alpha_{11} &= \frac{\beta_1^4}{\mu_{10}L_1^2}, & \alpha_{21} &= G_1, & \alpha_{31} &= H_1, \\ \beta_{11} &= \frac{l_1}{n_1} - \phi_1(t), & \beta_{21} &= g_1, & \beta_{31} &= h_1, \\ -2\alpha_{12} &= \frac{\beta_2^4}{\mu_{20}L_2^2}, & \alpha_{22} &= G_2, & \alpha_{32} &= H_2, \\ \beta_{12} &= \frac{l_2}{n_2} - \phi_2(t), & \beta_{22} &= g_2, & \beta_{32} &= h_2. \end{aligned} \quad (2.3.58)$$

Уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Делоне (2.3.57) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \frac{\partial R_1^*}{\partial l_1}, & \dot{G}_1 &= \frac{\partial R_1^*}{\partial g_1}, & \dot{H}_1 &= \frac{\partial R_1^*}{\partial h_1}, \\ \dot{l}_1 &= -\frac{\partial R_1^*}{\partial L_1}, & \dot{g}_1 &= -\frac{\partial R_1^*}{\partial G_1}, & \dot{h}_1 &= -\frac{\partial R_1^*}{\partial H_1}, \\ \dot{L}_2 &= \frac{\partial R_2^*}{\partial l_2}, & \dot{G}_2 &= \frac{\partial R_2^*}{\partial g_2}, & \dot{H}_2 &= \frac{\partial R_2^*}{\partial h_2}, \\ \dot{l}_2 &= -\frac{\partial R_2^*}{\partial L_2}, & \dot{g}_2 &= -\frac{\partial R_2^*}{\partial G_2}, & \dot{h}_2 &= -\frac{\partial R_2^*}{\partial H_2}, \end{aligned} \quad (2.3.59)$$

где

$$R_1^* = \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\beta_1^4}{2\mu_{10}L_1^2} + \tilde{R}_1, \quad R_2^* = \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\beta_2^4}{2\mu_{20}L_2^2} + \tilde{R}_2. \quad (2.3.60)$$

Переход к аналогам первой системы элементов Пуанкаре осуществляется формулами

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= L_1, & \rho_{11} &= L_1 - G_1, & \rho_{21} &= G_1 - H_1, \\ \lambda_1 &= l_1 + g_1 + h_1, & \omega_{11} &= -g_1 - h_1, & \omega_{21} &= -h_1, \end{aligned} \quad (2.3.61)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= L_2, & \rho_{12} &= L_2 - G_2, & \rho_{22} &= G_2 - H_2, \\ \lambda_2 &= l_2 + g_2 + h_2, & \omega_{12} &= -g_2 - h_2, & \omega_{22} &= -h_2, \end{aligned}$$

и соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_1 &= \frac{\partial R_1^*}{\partial \lambda_1}, & \dot{\rho}_{11} &= \frac{\partial R_1^*}{\partial \omega_{11}}, & \dot{\rho}_{21} &= \frac{\partial R_1^*}{\partial \omega_{21}}, \\ \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial R_1^*}{\partial \Lambda_1}, & \dot{\omega}_{11} &= -\frac{\partial R_1^*}{\partial \rho_{11}}, & \dot{\omega}_{21} &= -\frac{\partial R_1^*}{\partial \rho_{21}}, \end{aligned} \quad (2.3.62)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_2 &= \frac{\partial R_2^*}{\partial \lambda_2}, & \dot{\rho}_{12} &= \frac{\partial R_2^*}{\partial \omega_{12}}, & \dot{\rho}_{22} &= \frac{\partial R_2^*}{\partial \omega_{22}}, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial R_2^*}{\partial \Lambda_2}, & \dot{\omega}_{12} &= -\frac{\partial R_2^*}{\partial \rho_{12}}, & \dot{\omega}_{22} &= -\frac{\partial R_2^*}{\partial \rho_{22}}. \end{aligned}$$

Аналоги второй системы элементов Пуанкаре определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \Lambda_1, & \xi_1 &= \sqrt{2\rho_{11}} \cos \omega_{11}, & p_1 &= \sqrt{2\rho_{21}} \cos \omega_{21}, \\ \lambda_1 &= \lambda_1, & \eta_1 &= \sqrt{2\rho_{11}} \sin \omega_{11}, & q_1 &= \sqrt{2\rho_{21}} \sin \omega_{21}, \\ \Lambda_2 &= \Lambda_2, & \xi_2 &= \sqrt{2\rho_{12}} \cos \omega_{12}, & p_2 &= \sqrt{2\rho_{22}} \cos \omega_{22}, \\ \lambda_2 &= \lambda_2, & \eta_2 &= \sqrt{2\rho_{12}} \sin \omega_{12}, & q_2 &= \sqrt{2\rho_{22}} \sin \omega_{22}, \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

а уравнения возмущенного движения даются выражениями

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_1 &= \frac{\partial R_1^*}{\partial \lambda_1}, & \dot{\xi}_1 &= \frac{\partial R_1^*}{\partial \eta_1}, & \dot{p}_1 &= \frac{\partial R_1^*}{\partial q_1}, \\ \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial R_1^*}{\partial \Lambda_1}, & \dot{\eta}_1 &= -\frac{\partial R_1^*}{\partial \xi_1}, & \dot{q}_1 &= -\frac{\partial R_1^*}{\partial p_1}, \\ \dot{\Lambda}_2 &= \frac{\partial R_2^*}{\partial \lambda_2}, & \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial R_2^*}{\partial \eta_2}, & \dot{p}_2 &= \frac{\partial R_2^*}{\partial q_2}, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial R_2^*}{\partial \Lambda_2}, & \dot{\eta}_2 &= -\frac{\partial R_2^*}{\partial \xi_2}, & \dot{q}_2 &= -\frac{\partial R_2^*}{\partial p_2}. \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

В уравнениях возмущенного движения (2.3.55), (2.3.59), (2.3.62) и (2.3.64) выражение возмущающей функции (2.3.56) через оскулирующие элементы удобно провести в зависимости от конкретной физической постановки задачи [152–154].

Далее рассмотрим один частный случай применения инвариантов центра масс (2.3.28) для установления частных решений задачи [88, 95]. В рассматриваемом частном случае потребуем выполнения условий

$$m_0 \dot{\vec{r}}_{\delta 0} + m_1 \dot{\vec{r}}_{\delta 1} + m_2 \dot{\vec{r}}_{\delta 2} = 0, \quad (2.3.65)$$

т.е. скорость движения барицентра имеет классический вид, тогда

$$\dot{m}_0 \vec{r}_{\delta 0} + \dot{m}_1 \vec{r}_{\delta 1} + \dot{m}_2 \vec{r}_{\delta 2} = 0. \quad (2.3.66)$$

Последнее выражение с учетом

$$m_0 \vec{r}_{\delta 0} + m_1 \vec{r}_{\delta 1} + m_2 \vec{r}_{\delta 2} = 0 \quad (2.3.67)$$

дает возможность установления некоторых специфических частных решений рассматриваемой задачи.

Используя последние соотношения можно искать частные решения задачи, приведя уравнения (2.3.29) к виду уравнений обобщенной нестационарной задачи двух тел с переменными массами. Однако при этом условия интегрируемости, налагаемые на нестационарные коэффициенты, получаются громоздкими и сложными, что вызывает затруднения. Поэтому то же самое выполним в исходных относительных координатах. Соотношения (2.3.28) в координатах Якоби превращаются в тождества. Формулы (2.3.65) и (2.3.66), отдельно взятые, не являются тождествами в координатах Якоби, они отличаются лишь знаком. Инвариант (2.3.66), с учетом преобразования (2.3.14)-(2.3.16), в координатах Якоби имеет вид

$$\frac{m_0 \dot{m}_1 - \dot{m}_0 m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1 + \frac{\dot{m}_2(m_0 + m_1) - m_2(\dot{m}_0 + \dot{m}_1)}{m_0 + m_1 + m_2} \vec{r}_2 = 0. \quad (2.3.68)$$

В исходных относительных координатах, преобразуя по формулам (2.3.7), из (2.3.68) получим

$$\vec{R}_2 = \varphi \vec{R}_1, \quad (2.3.69)$$

$$\varphi = \nu_1 - \frac{\sigma_2}{\dot{m}_2 \sigma_1 - m_2 \dot{\sigma}_1} \cdot \frac{\dot{m}_1 m_0 - m_1 \dot{m}_0}{\sigma_1}, \quad (2.3.70)$$

где $\sigma_1 = m_0 + m_1$, $\sigma_2 = m_0 + m_1 + m_2$.

Из соотношения (2.3.5), (2.3.69), (2.3.70) следует

$$\ddot{X}_1 = -f M_1(t) \frac{X_1}{R_1^3}, \quad (2.3.71)$$

$$\ddot{X}_2 + 2 \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \dot{X}_2 + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} X_2 = -f M_2(t) \frac{X_2}{R_2^3}, \quad (2.3.72)$$

аналогично для аппликат и ординат, где

$$M_1(t) = m_0 + m_1 - m_2 \left[\frac{1}{(\varphi - 1)^2} - \frac{1}{\varphi^2} \right], \quad (2.3.73)$$

$$M_2(t) = \frac{m_0 + m_2}{\varphi^3} - m_1 \left[\frac{1}{\varphi(\varphi - 1)^2} - \frac{1}{\varphi} \right] \quad (2.3.74)$$

Так как уравнения (2.3.71), (2.3.72) должны быть одинаковыми, получаем

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0, \quad (2.3.75)$$

$$M_1(t) = \gamma(t), \quad M_2(t) = \gamma(t). \quad (2.3.76)$$

Тогда из (2.3.71), (2.3.72) имеем задачу Гюльдена-Мещерского

$$\ddot{X}_1 = -f \gamma(t) \frac{X_1}{R_1^3} \quad (2.3.77)$$

(аналогично для ординат и аппликат), где $\gamma(t)$ определяются условием интегрируемости. Из соотношений (2.3.75), (2.3.76) получим

$$\nu_1 - \frac{\sigma_2}{\dot{m}_2 \sigma_1 - m_2 \dot{\sigma}_1} \cdot \frac{\dot{m}_1 m_0 - m_1 \dot{m}_0}{\sigma_1} = \alpha = \text{const}, \quad (2.3.78)$$

$$m_0 + m_1 - m_2 \left[\frac{1}{(\alpha - 1)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] = \gamma(t), \quad (2.3.79)$$

$$m_0 + m_2 - m_1 \left[\frac{1}{(\alpha - 1)^2} - 1 \right] \alpha^2 = \alpha^3 \gamma(t), \quad (2.3.80)$$

примем $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. Обозначим

$$N_1 = \frac{1}{(\alpha - 1)^2} - \frac{1}{\alpha^2}, \quad N_2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} - \alpha^2. \quad (2.3.81)$$

Тогда из формул (2.3.79), (2.3.80) следует

$$m_2 = C_2 m_1 + E_2 \gamma, \quad m_0 = C_0 m_1 + E_0 \gamma, \quad (2.3.82)$$

$$C_2 = \frac{N_2 + 1}{N_1 + 1}, \quad E_2 = \frac{\alpha^3 - 1}{N_1 + 1}, \quad C_0 = \frac{N_2 N_1 - 1}{N_1 + 1}, \quad E_0 = \frac{N_1 \alpha^3 + 1}{N_1 + 1}. \quad (2.3.83)$$

Условие (2.3.78) перепишем в виде

$$\psi_0 \dot{m}_0 + \psi_1 \dot{m}_1 + \psi_2 \dot{m}_2 = 0, \quad (2.3.84)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sigma_2 m_1 \sigma_1 - (m_1 - \alpha \sigma_1) m_2, & \psi_1 &= -\sigma_2 m_0 \sigma_1 - (m_1 - \alpha \sigma_1) m_2, \\ \psi_2 &= \sigma_2 (m_1 - \alpha \sigma_1). \end{aligned} \quad (2.3.85)$$

Подставляя величины (2.3.82) в уравнение (2.3.84), получим

$$(\psi_0 C_0 + \psi_1 + \psi_2 C_2) \dot{m}_1 + (\psi_0 E_0 + \psi_2 E_2) \dot{\gamma} = 0.$$

Откуда

$$\frac{d m_1}{d \gamma} = F(m_1, \gamma) = -\frac{\psi_0 E_0 + \psi_2 E_2}{\psi_0 C_0 + \psi_1 + \psi_2 C_2}. \quad (2.3.86)$$

Однако, в общем случае, установить решение в аналитическом виде нелинейного дифференциального уравнения первого порядка (2.3.86) не удастся. Соотношения (2.3.82), (2.3.86) определяют законы изменения масс в виде

$$m_i = m_i(\gamma(t)), \quad i = 0, 1, 2,$$

где $\gamma(t)$ определяется условием интегрируемости задачи Гюльдена-Мещерского (2.3.77).

2.4. Задача трех тел с массами, изменяющимися анизотропно в различных темпах

Рассмотрим систему свободных трех тел T_0 , T_1 и T_2 , взаимогравитирующих по закону Ньютона, с переменными массами

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t), \quad (2.4.1)$$

изменяющимися в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} \neq \frac{\dot{m}_j}{m_j}, \quad i \neq j, \quad (2.4.2)$$

в абсолютной декартовой прямоугольной системе координат. Тела рассмотрим как материальные точки и предположим, что абсолютные скорости отделяющихся (присоединяющихся) частиц равны нулю. В этом случае возникают дополнительные реактивные силы, т.е. массы тел изменяются анизотропно. Уравнения движения в абсолютной системе координат имеют вид

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i^* = \text{grad}_{\vec{R}_i^*} U - \dot{m}_i \dot{\vec{R}}_i^*, \quad i = 0, 1, 2, \quad (2.4.3)$$

где

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{R_{01}^*} + \frac{m_0 m_2}{R_{02}^*} + \frac{m_1 m_2}{R_{12}^*} \right),$$

$$R_{ij}^* = \sqrt{(X_j^* - X_i^*)^2 + (Y_j^* - Y_i^*)^2 + (Z_j^* - Z_i^*)^2},$$

$\vec{R}_i^* = \vec{R}_i^*(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*)$ – радиус-векторы тел, f – гравитационная постоянная.

В абсолютной системе координат известны [120] следующие интегралы

$$\sum_{i=0}^2 (m_i \dot{\vec{R}}_i^*) = \vec{a}^*, \quad \sum_{i=0}^2 (\vec{R}_i^* \times m_i \dot{\vec{R}}_i^*) = \vec{c}^*. \quad (2.4.4)$$

Переходим к относительной системе координат с началом в точке P_0 с массой $m_0 = m_0(t)$. Обозначим

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i(X_i, Y_i, Z_i) = \vec{R}_i^* - \vec{R}_0^*, \quad i = 1, 2.$$

Уравнения относительного движения имеют вид

$$\ddot{\vec{R}}_i + f(m_0 + m_i) \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} = \text{grad}_{\vec{R}_i} W_i + \vec{D}_i, \quad (2.4.5)$$

$$W_i = f \sum_{j=1}^2 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j}{R_j^3} \right), \quad (2.4.6)$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2},$$

$$\Delta_{i0} = R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}.$$

$$\vec{D}_i = -\frac{\dot{m}_i}{m_i} \vec{R}_i + \left(\frac{\dot{m}_0}{m_0} - \frac{\dot{m}_i}{m_i} \right) \vec{R}_0^*, \quad (2.4.7)$$

$$\dot{\vec{R}}_0^* = \frac{\vec{a}^*}{\sigma_2} - \frac{m_1}{\sigma_2} \dot{\vec{R}}_1 - \frac{m_2}{\sigma_2} \dot{\vec{R}}_2, \quad \sigma_2 = m_0 + m_1 + m_2. \quad (2.4.8)$$

Переходя к координатам Якоби по формулам

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1, \quad \vec{r}_2 = \vec{R}_2 - \nu_1 \vec{r}_1, \quad \nu_1 = \frac{m_1}{\sigma_1}, \quad \sigma_1 = m_0 + m_1, \quad (2.4.9)$$

получим

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \text{grad}_{\vec{r}_1} U + \mu_1 \vec{D}_1, \quad (2.4.10)$$

$$\mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \text{grad}_{\vec{r}_2} U - \mu_2 \left(2\vec{r}_1 \dot{\vec{r}}_1 + \ddot{\nu}_1 \vec{r}_1 \right) + \mu_2 \left(\vec{D}_2 - \nu_1 \vec{D}_1 \right),$$

и соответственно

$$\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{\sigma_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_2 \sigma_1}{\sigma_2}, \quad (2.4.11)$$

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} \right), \quad (2.4.12)$$

$$\Delta_{01} = r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

$$\Delta_{02} = \sqrt{(x_2 + \nu_1 x_1)^2 + (y_2 + \nu_1 y_1)^2 + (z_2 + \nu_1 z_1)^2},$$

$$\Delta_{12} = \sqrt{(x_2 - \nu_0 x_1)^2 + (y_2 - \nu_0 y_1)^2 + (z_2 - \nu_0 z_1)^2},$$

$$\nu_0 = \frac{m_0}{\sigma_1}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

Используя соотношения (2.4.7), (2.4.8), (2.4.9) перепишем уравнения (2.4.10) в виде

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \text{grad}_{\vec{r}_1} U + A_1 \dot{\vec{r}}_1 + B_1 \vec{r}_1 + \vec{F}_1, \quad (2.4.13)$$

$$\mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \text{grad}_{\vec{r}_2} U + A_2 \dot{\vec{r}}_2 + \vec{F}_2,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\mu_1 \frac{\dot{m}_1}{m_1} - \nu_1 \sigma_2 c_1, & B_1 &= -m_2 \dot{\nu}_1 c_1, \\ \vec{F}_1 &= -m_2 c_1 \dot{\vec{r}}_2 + c_1 \vec{a}^*, & c_1 &= \frac{\mu_1}{\sigma_2} \left(\frac{\dot{m}_0}{m_0} - \frac{\dot{m}_1}{m_1} \right), \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= -\mu_2 \frac{\dot{m}_2}{m_2} - m_2 c_1, & \vec{F}_2 &= K_2 \dot{\vec{r}}_1 + N_2 \vec{r}_1 + c_2 \vec{a}^*, \\ K_2 &= \mu_2 \nu_1 \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} - \frac{\dot{m}_2}{m_2} \right) - c_2 \sigma_2 \nu_1, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

$$N_2 = -\dot{\nu}_1 \left(\mu_2 \frac{\dot{m}_2}{m_2} + m_2 c_2 \right) - \mu_2 \ddot{\nu}_1,$$

$$c_2 = \frac{\mu_2}{\sigma_2} \left[\left(\frac{\dot{m}_0}{m_0} - \frac{\dot{m}_2}{m_2} \right) - \nu_1 \left(\frac{\dot{m}_0}{m_0} - \frac{\dot{m}_1}{m_1} \right) \right].$$

Исходя из уравнений (2.4.13) нетрудно получить уравнения движения в барицентрической системе координат. Формулы преобразования, вытекающие из геометрии точечных масс, запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} m_0 \vec{r}_{\delta 0} &= -\mu_1 \vec{r}_1 - \nu_0 \mu_2 \vec{r}_2, \\ m_1 \vec{r}_{\delta 1} &= \mu_1 \vec{r}_1 - \nu_1 \mu_2 \vec{r}_2, \\ m_2 \vec{r}_{\delta 2} &= \mu_2 \vec{r}_2, \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

где $\vec{r}_{\delta i}$ – радиус-векторы тел в барицентрической системе координат. Перепишем уравнения (2.4.13) следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\mu_1 \vec{r}_1) &= \text{grad}_{\vec{r}_1} U + (A_1 + 2\dot{\mu}_1) \dot{\vec{r}}_1 + (B_1 + \ddot{\mu}_1) \vec{r}_1 + \vec{F}_1, \\ \frac{d^2}{dt^2} (\mu_2 \vec{r}_2) &= \text{grad}_{\vec{r}_2} U + (A_2 + 2\dot{\mu}_2) \dot{\vec{r}}_2 + \ddot{\mu}_2 \vec{r}_2 + \vec{F}_2. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Из соотношений (2.4.16), (2.4.17) следуют уравнения движения в

барицентрической системе координат

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2}(\mu_0 \vec{r}_{\delta 0}) &= \text{grad}_{\vec{r}_{\delta 0}} U + A_{\delta 0} \dot{\vec{r}}_{\delta 0} + B_{\delta 0} \vec{r}_{\delta 0} + \vec{F}_{\delta 0}, \\
 \frac{d^2}{dt^2}(\mu_1 \vec{r}_{\delta 1}) &= \text{grad}_{\vec{r}_{\delta 1}} U + A_{\delta 1} \dot{\vec{r}}_{\delta 1} + B_{\delta 1} \vec{r}_{\delta 1} + \vec{F}_{\delta 1}, \\
 \frac{d^2}{dt^2}(\mu_2 \vec{r}_{\delta 2}) &= \text{grad}_{\vec{r}_{\delta 2}} U + A_{\delta 2} \dot{\vec{r}}_{\delta 2} + B_{\delta 2} \vec{r}_{\delta 2} + \vec{F}_{\delta 2},
 \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{\delta 0} &= A_2 + 2\dot{\mu}_1 + \nu_0 K_2, & B_{\delta 0} &= B_1 + 2\dot{\mu}_1 + \nu_0 N_2, \\
 \vec{F}_{\delta 0} &= -A_{\delta 0} \dot{\vec{r}}_{\delta 1} - B_{\delta 0} \vec{r}_{\delta 1} - \left[\nu_0 (A_2 + 2\dot{\mu}_2) \frac{m_2}{\mu_2} - m_2 c_1 \frac{m_2}{\mu_2} + \right. \\
 &\quad \left. + 2\dot{\nu}_0 m_2 \right] \dot{\vec{r}}_{\delta 2} - \left[\nu_0 (A_2 + 2\dot{\mu}_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{m_2}{\mu_2} \right) + \nu_0 \ddot{\mu}_2 \left(\frac{m_2}{\mu_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\nu}_0 m_2 + 2\dot{\nu}_0 \dot{m}_2 - m_2 c_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{m_2}{\mu_2} \right) \right] \vec{r}_{\delta 2} - [c_1 + \nu_0 c_2] \vec{a}^*;
 \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

$$\begin{aligned}
 A_{\delta 1} &= A_2 + 2\dot{\mu}_1 - \nu_1 K_2, & B_{\delta 1} &= B_1 + 2\dot{\mu}_1 - \nu_1 N_2, \\
 \vec{F}_{\delta 1} &= -A_{\delta 1} \dot{\vec{r}}_{\delta 0} - B_{\delta 1} \vec{r}_{\delta 0} - \left[\nu_1 (A_2 + 2\dot{\mu}_2) \frac{m_2}{\mu_2} + m_2 c_1 \frac{m_2}{\mu_2} + \right. \\
 &\quad \left. + 2\dot{\nu}_1 m_2 \right] \dot{\vec{r}}_{\delta 2} - \left[\nu_1 (A_2 + 2\dot{\mu}_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{m_2}{\mu_2} \right) + \nu_1 \ddot{\mu}_2 \frac{m_2}{\mu_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\nu}_1 m_2 + 2\dot{\nu}_1 m_2 m_2 c_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{m_2}{\mu_2} \right) \right] \vec{r}_{\delta 2} + [c_1 - \nu_1 c_2] \vec{a}^*;
 \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

$$A_{\delta 2} = (A_2 + 2\dot{\mu}_2) \frac{m_2}{\mu_2}, \quad B_{\delta 2} = (A_2 + 2\dot{\mu}_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{m_2}{\mu_2} \right) + \ddot{\mu}_2 \frac{m_2}{\mu_2},$$

$$\vec{F}_{\delta 2} = -K_2 \dot{\vec{r}}_{\delta 0} - N_2 \vec{r}_{\delta 0} - K_2 \dot{\vec{r}}_{\delta 1} - N_2 \vec{r}_{\delta 1} + c_2 \vec{a}^*; \tag{2.4.21}$$

Естественно, для системы уравнений (2.4.18) в барицентрической системе координат имеют место инварианты

$$\begin{aligned} m_0\dot{\vec{r}}_{\delta 0} + m_1\dot{\vec{r}}_{\delta 1} + m_2\dot{\vec{r}}_{\delta 2} + \dot{m}_0\vec{r}_{\delta 0} + \dot{m}_1\vec{r}_{\delta 1} + \dot{m}_2\vec{r}_{\delta 2} &= 0, \\ m_0\vec{r}_{\delta 0} + m_1\vec{r}_{\delta 1} + m_2\vec{r}_{\delta 2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Исходя из уравнений (2.4.13) также можно построить каноническую теорию возмущений для рассматриваемой задачи. Перепишем систему уравнений (2.4.13) в виде

$$\begin{aligned} \mu_1\ddot{\vec{r}}_1 &= -f\frac{m_1m_0}{r_1^3}\vec{r}_1 + A_1\dot{\vec{r}}_1 + \mu_1\left[\frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1} + A_1\frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1}\right]\vec{r}_1 + \text{grad}_{\vec{r}_1}R_1, \\ \mu_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -f\frac{m_2(m_1+m_0)}{r_2^3}\vec{r}_2 + A_2\dot{\vec{r}}_2 + \mu_2\left[\frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2} + A_2\frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1}\right]\vec{r}_2 + \text{grad}_{\vec{r}_1}R_2, \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

где обозначены

$$R_1 = V + V_1 + V_2, \quad (2.4.24)$$

$$V_1 = \frac{1}{2}\left[B_1 - \mu_1\left(\frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1} + A_1\frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1}\right)\right]r_1^2, \quad V_2 = \vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1,$$

$$\gamma_1 = \gamma_1(t) = \frac{\sigma_1(t_0)}{\sigma_1(t)} \cdot \exp\left[2\int_{t_0}^t \frac{A_1}{\mu_1} dt\right], \quad (2.4.25)$$

$$R_2 = V + W_1 + W_2, \quad (2.4.26)$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\left[-\mu_2\left(\frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2} + A_2\frac{\dot{\gamma}_2}{\gamma_2}\right)\right]r_2^2, \quad W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2,$$

$$\gamma_2 = \gamma_2(t) = \frac{\sigma_2(t_0)}{\sigma_2(t)} \cdot \exp\left[2\int_{t_0}^t \frac{A_2}{\mu_2} dt\right], \quad (2.4.27)$$

$$V = f\left(\frac{m_0m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1m_2}{\Delta_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{r_2}\right). \quad (2.4.28)$$

Переходим к квазисферическим координатам $\rho_i, \varphi_i, \theta_i$ ($i = 1, 2$), которые введем посредством формул

$$x_i = \gamma_i \rho_i \cos \varphi_i \cos \theta_i, \quad y_i = \gamma_i \rho_i \cos \varphi_i \sin \theta_i, \quad z_i = \gamma_i \rho_i \sin \varphi_i, \quad (2.4.29)$$

где $\gamma_i = \gamma_i(t)$ задано согласно формулам (2.4.25), (2.4.27). Кинетическая энергия системы (2.4.23) с приведенными массами $\mu_i = \mu_i(t)$ определяется известным соотношением

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \mu_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Далее, учитывая (2.4.29), вычислим соответствующие импульсы по обычным правилам

$$P_{\rho_i} = \mu_i \gamma_i^2 \dot{\rho}_i + \mu_i \gamma_i \dot{\gamma}_i \rho_i, \quad P_{\varphi_i} = \mu_i \gamma_i^2 \rho_i^2 \dot{\varphi}_i, \quad P_{\theta_i} = \mu_i \gamma_i^2 \rho_i^2 \cos^2 \varphi_i \dot{\theta}_i. \quad (2.4.30)$$

Тогда уравнения движения (2.4.23) записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial P_{\rho_i}}, & \dot{P}_{\rho_i} &= -\frac{\partial H_i}{\partial \rho_i} + \left(\frac{A_i}{\mu_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} \right) P_{\rho_i}, \\ \dot{\varphi}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial P_{\varphi_i}}, & \dot{P}_{\varphi_i} &= -\frac{\partial H_i}{\partial \varphi_i} + \left(\frac{A_i}{\mu_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} \right) P_{\varphi_i}, \\ \dot{\theta}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial P_{\theta_i}}, & \dot{P}_{\theta_i} &= -\frac{\partial H_i}{\partial \theta_i} + \left(\frac{A_i}{\mu_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} \right) P_{\theta_i}, \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

где

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{1}{2\mu_i \gamma_i} \left[(P_{\rho_i} - \mu_i \gamma_i \dot{\gamma}_i \rho_i)^2 + \frac{P_{\varphi_i}^2}{\rho_i^2} + \frac{P_{\theta_i}^2}{\rho_i^2 \cos^2 \varphi_i} \right] - \frac{1}{2} \mu_i \dot{\gamma}_i^2 \rho_i^2 - U_i, \\ U_i &= f \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\gamma_i \rho_i} + \frac{1}{2} \left(\mu_i \frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i} + A_i \frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} \right) \gamma_i^2 \rho_i^2 + R_i. \end{aligned}$$

Затем, вводя новые импульсы

$$P_{\rho_i} = \psi_i \tilde{P}_{\rho_i}, \quad P_{\varphi_i} = \psi_i \tilde{P}_{\varphi_i}, \quad P_{\theta_i} = \psi_i \tilde{P}_{\theta_i}, \quad (2.4.32)$$

$$\psi_i = \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)} \cdot \exp \left[\int_{t_0}^t \frac{A_i}{\mu_i} dt \right], \quad (2.4.33)$$

придадим уравнениям (2.4.31) канонический вид

$$\dot{\rho}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\rho_i}}, \quad \dot{\varphi}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\varphi_i}}, \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\theta_i}}, \quad (2.4.34)$$

$$\dot{\tilde{P}}_{\rho_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \rho_i}, \quad \dot{\tilde{P}}_{\varphi_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \varphi_i}, \quad \dot{\tilde{P}}_{\theta_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \theta_i},$$

где функция Гамильтона определяется выражением

$$\tilde{H}_i = H_{i0} + H_{i1}, \quad (2.4.35)$$

$$H_{i0} = \frac{\psi_i}{2\mu_i\gamma_i^2} \left[\left(\tilde{P}_{\rho_i} - \frac{\mu_i\gamma_i\dot{\gamma}_i}{\psi_i}\rho_i \right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\varphi_i}^2}{\rho_i^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_i}^2}{\rho_i^2 \cos^2 \varphi_i} \right] - \quad (2.4.36)$$

$$- \frac{1}{2\psi_i} \left[\mu_i\dot{\gamma}_i^2 + \left(\mu_i\frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i} + A_i\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} \right) \gamma_i^2 \right] \rho_i^2 - \frac{1}{\psi_i} \left(f \frac{m_i\sigma_{i-1}}{\gamma_i\rho_i} \right),$$

$$H_{i1} = -\frac{1}{\psi_i} R_i. \quad (2.4.37)$$

При $H_{i1} = 0$ ($R_i = 0$) получим уравнения невозмущенного аperiодического движения по квазиконическому сечению для каждой точки с приведенной массой $\mu_i = \mu_i(t)$, которые интегрируются методом Гамильтона-Якоби. В результате решения даются соотношениями [70]

$$\mu_{i0} \int_{\rho_{i1}}^{\rho_i} \frac{d\rho_i}{\sqrt{2\alpha_{i1}\mu_{i0} + 2\frac{fm_{i0}^*}{\rho_i} - \frac{\alpha_{i2}^2}{\rho_i^2}}} = \phi_i(t) + \beta_{i1}, \quad (2.4.38)$$

$$\alpha_{i2} \int_0^{\varphi_i} \frac{d\varphi_i}{\sqrt{\alpha_{i2}^2 - \frac{\alpha_{i3}^2}{\cos^2 \varphi_i}}} - \alpha_{i2} \int_{\rho_{i1}}^{\rho_i} \frac{d\rho_i}{\rho_i^2 \sqrt{2\alpha_{i1}\mu_{i0} + 2\frac{fm_{i0}^*}{\rho_i} - \frac{\alpha_{i2}^2}{\rho_i^2}}} = \beta_{i2},$$

$$\theta_i - \alpha_{i3} \int_0^{\varphi_i} \frac{d\varphi_i}{\cos^2 \varphi_i \sqrt{\alpha_{i2}^2 - \frac{\alpha_{i3}^2}{\cos^2 \varphi_i}}} = \beta_{i3},$$

$$\sqrt{2\alpha_{i1}\mu_{i0} + 2\frac{fm_{i0}^*}{\rho_i} - \frac{\alpha_{i2}^2}{\rho_i^2}} = \frac{\mu_i\gamma_i^2}{\psi_i}\dot{\rho}_i, \quad (2.4.39)$$

$$\sqrt{\alpha_{i2}^2 - \frac{\alpha_{i3}^2}{\cos^2\varphi_i}} = \frac{\mu_i\gamma_i^2}{\psi_i}\rho_i^2\dot{\varphi}_i, \quad \alpha_{i3} = \frac{\mu_i\gamma_i^2}{\psi_i}\rho_i^2\cos^2\varphi_i\dot{\theta}_i,$$

где

$$\alpha_{i1}, \quad \alpha_{i2}, \quad \alpha_{i3}, \quad \beta_{i1}, \quad \beta_{i2}, \quad \beta_{i3}, \quad (2.4.40)$$

аналоги канонических элементов Якоби, причем $\phi_i(t)$ есть первообразная функции

$$\frac{\sigma_i^2(t_0)}{\sigma_i^2(t)} \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{A_i}{\mu_i} dt\right),$$

$$\mu_{i0} = \mu_i(t_0), \quad m_{i0}^* = m_i(t_0) \cdot \sigma_{i-1}(t_0), \quad (2.4.41)$$

$$\phi_i(\tau_i) = -\beta_{i1}. \quad (2.4.42)$$

Из соотношений (2.4.38), (2.4.39), (2.4.29) можно получить выражения координат и скорости промежуточного движения в прямоугольных системах координат Якоби

$$\begin{aligned} x_i &= \gamma_i\rho_i(\cos u_i \cos \Omega_i - \sin u_i \sin \Omega_i \cos i_i), \\ y_i &= \gamma_i\rho_i(\cos u_i \sin \Omega_i + \sin u_i \cos \Omega_i \cos i_i), \\ z_i &= \gamma_i\rho_i(\sin u_i \sin i_i), \quad r_i = \gamma_i\rho_i, \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i}\right)x_i + \gamma_i\rho_i\dot{u}_i(-\sin u_i \cos \Omega_i - \cos u_i \sin \Omega_i \cos i_i), \\ \dot{y}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i}\right)y_i + \gamma_i\rho_i\dot{u}_i(-\sin u_i \sin \Omega_i + \cos u_i \cos \Omega_i \cos i_i), \\ \dot{z}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i}\right)z_i + \gamma_i\rho_i\dot{u}_i(\cos u_i \sin i_i), \quad u_i = v_i + \omega_i, \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

$$\rho_i = \frac{p_i}{1 + e_i \cos v_i}, \quad p_i = a_i(1 - e_i^2), \quad (2.4.45)$$

$$\dot{\rho}_i = \frac{\psi_i}{\mu_i\gamma_i^2} \cdot \frac{\beta_i}{\sqrt{p_i}} e_i \sin v_i, \quad \dot{u}_i = \frac{\psi_i}{\mu_i\gamma_i^2} \cdot \frac{\beta_i\sqrt{p_i}}{\rho_i^2}, \quad (2.4.46)$$

$$\beta_i = \sqrt{f} \cdot \frac{m_i(t_0) \cdot \sigma_{i-1}(t_0)}{\sqrt{\sigma_i(t_0)}}, \quad (2.4.47)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v_i}{2} = \frac{\sqrt{1+e_i}}{\sqrt{1-e_i}} \operatorname{tg} \frac{E_i}{2}, \quad e_i < 1, \quad E_i - e_i \sin E_i = M_i, \quad (2.4.48)$$

$$M_i = n_i [\phi_i(t) - \phi_i(\tau_i)], \quad n_i = \frac{\beta_i}{\mu_{i0} a_i^{3/2}}, \quad (2.4.49)$$

где

$$a_i, \quad e_i, \quad \omega_i, \quad \Omega_i, \quad i_i, \quad \phi_i(\tau_i) \quad (2.4.50)$$

элементы апериодического движения по квазиконическому сечению, причем

$$\begin{aligned} -2\alpha_{i1} &= \frac{\beta_i^2}{\mu_{i0} a_i}, & \alpha_{i2} &= \beta_i \sqrt{a_i(1-e_i^2)}, & \alpha_{i3} &= \beta_i \sqrt{a_i(1-e_i^2)} \cos i_i, \\ \beta_{i1} &= -\phi_i(\tau_i), & \beta_{i2} &= \omega_i, & \beta_{i3} &= \Omega_i. \end{aligned} \quad (2.4.51)$$

Теперь варьируя аналоги систем канонических элементов Якоби (2.4.40) получим уравнения (2.4.34) в оскулирующих элементах

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{i1} &= \frac{\partial \tilde{H}_{i1}}{\partial \beta_{i1}}, & \dot{\alpha}_{i2} &= \frac{\partial \tilde{H}_{i1}}{\partial \beta_{i2}}, & \dot{\alpha}_{i3} &= \frac{\partial \tilde{H}_{i1}}{\partial \beta_{i3}}, \\ \dot{\beta}_{i1} &= -\frac{\partial \tilde{H}_{i1}}{\partial \alpha_{i1}}, & \dot{\beta}_{i2} &= -\frac{\partial \tilde{H}_{i1}}{\partial \alpha_{i2}}, & \dot{\beta}_{i3} &= -\frac{\partial \tilde{H}_{i1}}{\partial \alpha_{i3}}, \end{aligned} \quad (2.4.52)$$

где H_{i1} определяется согласно (2.4.37), (2.4.33), (2.4.24)–(2.4.28). Переходим к аналогам систем канонических элементов Делоне

$$L_i, \quad G_i, \quad H_i, \quad l_i, \quad g_i, \quad h_i \quad (2.4.53)$$

по формулам

$$\begin{aligned} L_i &= \beta_i \sqrt{a_i}, & G_i &= \beta_i \sqrt{p_i}, & H_i &= \beta_i \sqrt{p_i} \cos i_i, \\ l_i &= n_i [\phi_i(t) - \phi_i(\tau_i)], & g_i &= \omega_i, & h_i &= \Omega_i. \end{aligned} \quad (2.4.54)$$

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial l_i}, & \dot{G}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial g_i}, & \dot{H}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial h_i}, \\ \dot{l}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial L_i}, & \dot{g}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial G_i}, & \dot{h}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial H_i}, \end{aligned} \quad (2.4.55)$$

где

$$R_i^* = \left(\frac{\sigma_i(t)}{\sigma_i(t_0)} \right)^2 \cdot \exp \left[-2 \int_{t_0}^t \frac{A_i}{\mu_i} dt \right] \frac{\beta_i^4}{2\mu_{i0}L_i^2} + \frac{R_i}{\psi_i}. \quad (2.4.56)$$

Уравнения возмущенного движения (2.4.55) являются основными уравнениями для канонической теории возмущений в рассматриваемой задаче. Отсюда легко можно переходить к различным системам канонических переменных, в частности, к аналогам канонических элементов Пуанкаре.

Глава 3

Ограниченная задача трех тел с переменными массами

3.1. Осредненная ограниченная задача трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами

Сначала рассмотрим ограниченную задачу трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами, когда массы изменяются изотропно, т.е. относительная скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц равна нулю. Второй случай, когда массы тел изменяются в одинаковом темпе анизотропно, легко сводится к первому случаю преобразованием независимой переменной, поэтому в математическом аспекте достаточно изучить первый случай.

Обозначим массы активно гравитирующих тел T_0 и T_1 соответственно

$$m_0 = m_0(t) = m_{00}\nu(t), \quad m_1 = m_1(t) = m_{10}\nu(t), \quad (3.1.1)$$

где $\nu = \nu(t)$ достаточно произвольная функция времени t , причем $\nu(t_0) = 1$, так что $m_{00} = m_0(t_0)$, $m_{10} = m_1(t_0)$, t_0 – начальный момент времени.

В прямоугольной декартовой абсолютной системе координат $OXYZ$, начало которой совпадает с центром тела T_0 с массой $m_0(t)$, координаты тела T_1 обозначим через x_1, y_1, z_1 . Пассивно гравитирующее тело T (с «нулевой» массой) с координатами x, y, z находится в поле притяжения активно гравитирующих тел T_0 и T_1 , но не влияет на них. Не нарушая общности, можно считать $m_0(t) \geq m_1(t)$.

Тогда уравнения относительного движения имеют известный вид

$$\ddot{x}_1 + f \frac{m_0 + m_1}{r_1^3} x_1 = 0, \quad \ddot{y}_1 + f \frac{m_0 + m_1}{r_1^3} y_1 = 0, \quad (3.1.2)$$

$$\ddot{z}_1 + f \frac{m_0 + m_1}{r_1^3} z_1 = 0,$$

$$\ddot{x} + f \frac{m_0}{r^3} x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} + f \frac{m_0}{r^3} y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \ddot{z} + f \frac{m_0}{r^3} z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (3.1.3)$$

где f – гравитационная постоянная,

$$V = f m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3} \right), \quad (3.1.4)$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3.1.5)$$

$$\Delta = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}.$$

Формулы (3.1.1)-(3.1.2) описывают классическую задачу двух тел с переменными массами – задачу Гюльдена–Мещерского. Если считать известными решения задачи Гюльдена–Мещерского как функции времени, то уравнения (3.1.3) представляют ограниченную задачу трех тел с переменными массами в рассматриваемой постановке. Решения задачи Гюльдена–Мещерского (3.1.2) известны в немногих частных случаях закона изменения массы (3.1.1) [123, 124].

Рассмотрим случай, когда массы активно гравитирующих тел (3.1.1) изменяются со временем изотропно по объединенному закону Мещерского

$$\nu = \nu(t) = \left(\frac{At_0^2 + 2Bt_0 + C}{At^2 + 2Bt + C} \right)^{1/2}, \quad (3.1.6)$$

где A , B , C – постоянные величины, относительное движение тел T_0 и T_1 происходит по круговой спирали. Решения имеют простой вид [125]

$$r_1 = \frac{a_1}{\nu(t)}, \quad r_1^2 \dot{\theta}_1 = \sqrt{f(m_{00} + m_{10})} \cdot a_1. \quad (3.1.7)$$

Уравнения движения ограниченной задачи трех тел с переменными массами (3.1.3) в оскулирующих элементах аperiодического движения по квазиконическому сечению

$$a, \quad e, \quad i, \quad \Omega, \quad \omega, \quad M$$

в форме уравнений Лагранжа имеют вид [66]

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial W}{\partial M}, \\ \dot{e} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial W}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial W}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctgi}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{coseci}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \Omega}, \\ \dot{\Omega} &= \frac{\operatorname{coseci}}{na^2e^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial i}, \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial W}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctgi}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial W}{\partial i}, \\ \dot{M} &= n[\nu(t)]^2 - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial W}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial W}{\partial e}, \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

где

$$W = V + \tilde{R}_1, \tag{3.1.9}$$

$$\tilde{R}_1 = -\frac{1}{2}\nu \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{\nu} \right) r^2. \tag{3.1.10}$$

Возмущающие функции (3.1.4), (3.1.10) в случае $e(t) < 1$ представимы в виде

$$V = \nu^2(t)R, \tag{3.1.11}$$

$$R = fm_1(t_0) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{k_1, k_2, k_3}(a, e, i) \cos(k_1M + k_2\tilde{\Omega} + k_3\omega), \tag{3.1.12}$$

$$\tilde{R}_1 = -\frac{1}{\nu} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{\nu} \right) \cdot R_1, \quad (3.1.13)$$

$$R_1 = \frac{a^2}{2} \left[1 + \frac{3}{2}e^2 + \left(-2e + \frac{e^3}{4}\right) \cos M + \dots \right],$$

где $\tilde{\Omega} = \Omega - M_1$, M_1 – аналог средней аномалии возмущающего тела T_1 . Вводя новую независимую переменную

$$d\tau = \nu^2(t)dt, \quad \frac{d}{d\tau} = (\dot{}) \quad (3.1.14)$$

из уравнений (3.1.8) получим

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial M} + k \frac{\partial R_1}{\partial M} \right),$$

$$\dot{e} = \frac{1 - e^2}{na^2e} \left(\frac{\partial R}{\partial M} + k \frac{\partial R_1}{\partial M} \right) - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega},$$

$$\frac{di}{d\tau} = \frac{\operatorname{ctgi}}{na^2\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{coseci}}{na^2\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad (3.1.15)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\operatorname{coseci}}{na^2\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2e} \left(\frac{\partial R}{\partial M} + k \frac{\partial R_1}{\partial M} \right) - \frac{\operatorname{ctgi}}{na^2\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\dot{M} = n - \frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial M} + k \frac{\partial R_1}{\partial M} \right) - \frac{1 - e^2}{na^2e} \left(\frac{\partial R}{\partial M} + k \frac{\partial R_1}{\partial M} \right),$$

где

$$k = \frac{B^2 - AC}{(At_0^2 + 2Bt_0 + C)^2} = \operatorname{const}.$$

Система уравнений (3.1.15) удобна для изучения движения методами осреднения аналогично тому, как это выполнено в случае постоянной массы [126]. Можно получить интегрируемые случаи осредняя по схеме Гаусса в пространственной задаче и осредняя по схемам Фату, Моисеева, Делоне–Хилла в плоской задаче.

Например, рассмотрим схему Гаусса в пространственной задаче при отсутствии резонанса

$$\tilde{R} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + kR_1) dM dM_1. \quad (3.1.16)$$

Осредненная система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0, \\ \dot{e} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{d\tau} &= \frac{\text{ctgi}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega}, \\ \dot{\Omega} &= \frac{\text{coseci}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i}, \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e} - \frac{\text{ctgi}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i}, \\ \dot{M} &= n - \frac{2}{n\tilde{a}} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e}, \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

благодаря первым интегралам

$$a = \tilde{a}_0 = \text{const} \quad (3.1.18)$$

$$(1-e^2) \cos^2 i = \tilde{c}_1 = \text{const} \quad (3.1.19)$$

$$\tilde{R}(a, i, e, \omega) = \tilde{c}_2 = \text{const} \quad (3.1.20)$$

сводится к квадратуре и, как в случае постоянных масс [127] может быть качественно исследована.

В приближении Хилла, когда $r \ll r_1$, принимая

$$V = f \frac{m_1(t)}{r_1} \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 P_2(\cos S) \quad (3.1.21)$$

получим

$$\begin{aligned} \tilde{R} = R^* = \frac{f m_{10} a^2}{8a_1^3} [6e^2 - 1 - 15e^2 \sin^2 \omega + \\ + 3 \cos^2 i (5e^2 \sin^2 \omega + 1 - e^2)] - k \cdot \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right). \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

В рассматриваемом приближении (3.1.21) с учетом выражении (3.1.22) система (3.1.17) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0, \\ \dot{e} &= \frac{15f m_{10}}{8a_1^3} \frac{\sqrt{1-e^2}}{n} \cdot e \sin^2 i \sin 2\omega, \\ \frac{di}{d\tau} &= -\frac{15f m_{10}}{16a_1^3} \frac{e^2}{n\sqrt{1-e^2}} \sin 2i \sin 2\omega, \\ \dot{\omega} &= \frac{15f m_{10}}{4a_1^3} \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{2}{5} (1-e^2) + \sin^2 \omega [\cos^2 i - (1-e^2)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{5} \left(-\frac{a_1^3}{f m_{10}} \right) k (1-e^2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3f m_{10}}{4a_1^3} \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \cos i (5e^2 \sin^2 \omega + 1 - e^2),$$

$$\begin{aligned} \dot{M} = n - \frac{2}{n} \left\{ \frac{f m_{10}}{4a_1^3} [6e^2 - 1 - 15e^2 \sin^2 \omega + 3 \cos^2 i (5e^2 \sin^2 \omega + 1 - e^2)] - \right. \\ \left. - k \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \right\} - \frac{1-e^2}{n} \left\{ \frac{f m_{10}}{4a_1^3} [6 - 15 \sin^2 \omega + 3 \cos^2 i (5 \sin^2 \omega - 1)] - \frac{3}{2} k \right\}, \end{aligned}$$

где $n = \sqrt{f m_{00}} / a^{3/2}$. Соответственно

$$a = a_0 = \text{const}, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1 = \text{const}, \quad (3.1.24)$$

$$R^*(e, \omega, i) = \tilde{c}_2^* = \text{const}. \quad (3.1.25)$$

Используя соотношения (3.1.24) интеграл (3.1.25) можно привести к виду

$$e^2 \left(\frac{2}{5} N - \sin^2 \omega \sin^2 i \right) = c_2 = \text{const}, \quad (3.1.26)$$

причем

$$N = 1 - \frac{a_1^3}{f m_{00}} \cdot k. \quad (3.1.27)$$

Интеграл (3.1.26) отличается от соответствующего выражения в стационарном случае [127, 128] наличием параметра N , определяемого формулой (3.1.27), который учитывает закон изменения масс. В частности, когда массы изменяются по первому закону Мещерского $N = 1$ ($k = 0$). Поэтому качественная картина в фазовой плоскости (e, ω) совпадает с соответствующей ситуацией стационарной задачи. В общем случае, когда $N \neq 1$ ($k \neq 0$), выражение (3.1.27) вносит изменения в качественную картину в фазовой плоскости (e, ω) , хотя решение и в этом случае сводится к эллиптическим квадратурам.

С учетом интегралов (3.1.24), (3.1.26) из второго уравнения системы (3.1.23), обозначив $e^2 = z$, $N_1 = 5N/2$, получим

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{15 f m_{10}}{4 a_1^3 n} \sqrt{N_1 z - c_2} \cdot \sqrt{(N_1 - 1) z^2 + (1 - c_1 - c_2 - N_1) z + c_2}. \quad (3.1.28)$$

После нахождения $e^2 = z = z(\tau)$ остальные оскулирующие элементы находим из соотношений (3.1.24), (3.1.26) и (3.1.23).

Аналогично сводится к квадратурам, если массы активно гравитирующих тел изменяются изотропно по первому закону Мещерского (соответственно – анизотропно по второму закону Мещерского)

$$\dot{\nu} \sim \nu^2 \quad (\dot{\nu} \sim \nu^3 - \text{анизотропно}), \quad (3.1.29)$$

внешний и внутренний варианты ограниченной квазиэллиптической задачи трех тел с массами, изменяющимися одинаковым темпе, в приближении Хилла.

В случае (3.1.29) также интегрируется внутренний вариант плоской квазиэллиптической задачи трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами в приближении Е.П. Аксенова [129].

В остальных случаях осреднения в рассматриваемой ограниченной задаче трех тел-точек изменяющимися в одинаковом темпе массами, в рассмотренных законах изменения масс, можно получить некоторое количество интегралов, наличие которых недостаточно для полного интегрирования. Однако, эти интегралы могут быть полезными для качественного изучения и установления частных решений в исследуемых конкретных нестационарных тройных системах.

В резонансных случаях предварительно вводится аномалия Делоне [27, 28] затем осредняется. Современное состояние теории резонансных гравитирующих систем приведены в сборнике работ [160]. Также представляет интерес изучение движения пробной частицы в нецентральных нестационарных полях [143] методами осреднения.

3.2. Ограниченная задача трех тел с изотропно изменяющимися в различных темпах массами

Рассмотрим уравнения движения ограниченной задачи трех тел с изотропно изменяющимися в различных темпах массами, исходя из уравнения соответствующей неограниченной задачи (2.3.5). Полагая в них $m_2 = 0$, получим

$$\ddot{\vec{R}}_1 + f (m_0 + m_1) \frac{\vec{R}_1}{R_1^3} = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 + f m_0 \frac{\vec{R}_2}{R_1^3} = \text{grad}_{\vec{R}_2} \left[f m_1 \left(\frac{1}{\Delta_{21}} - \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{R_2^3} \right) \right]. \quad (3.2.2)$$

Обозначив $R_1 = R$, $R_2 = r$ уравнения (3.2.1), (3.2.2) перепишем в виде

$$\ddot{\vec{R}} = -f \frac{m_0 + m_1}{R^3} \vec{R}, \quad (3.2.3)$$

$$\ddot{\vec{r}} + f m_0 \frac{\vec{r}}{r^3} = \text{grad}_{\vec{r}} W, \quad (3.2.4)$$

где

$$W = f m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xX + yY + zZ}{R^3} \right), \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \Delta = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2},$$
(3.2.5)

причем

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1}. \quad (3.2.6)$$

Пусть решение задачи Гюльдена–Мещерского (3.2.3), когда суммарная масса тел изменяется со временем по объединенному закону Мещерского

$$m_0 + m_1 = (m_{00} + m_{10}) \left[\frac{At_0^2 + 2Bt_0 + C}{At^2 + 2Bt + C} \right]^{1/2}, \quad (3.2.7)$$

определяется квазикруговым движением

$$R = a_1/\nu_c, \quad R^2\dot{\theta} = \sqrt{f(m_{00} + m_{10})a_1}, \quad (3.2.8)$$

где обозначено

$$\nu_c = \frac{m_0 + m_1}{m_{00} + m_{10}} = \left[\frac{At_0^2 + 2Bt_0 + C}{At^2 + 2Bt + C} \right]^{1/2}. \quad (3.2.9)$$

Также обозначим

$$\nu_{\text{и}} = \frac{m_0}{m_{00}}, \quad \nu_{\text{в}} = \frac{m_1}{m_{10}}. \quad (3.2.10)$$

Ограничимся приближением Хилла

$$r \ll R, \quad (3.2.11)$$

и рассмотрим уравнения движения в оскулирующих элементах аperiодического движения по квазиконическому сечению [91]. Принимаем

$$W = f \frac{m_1}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^2 P_2(\cos S) - \frac{m_0}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m_0} \right) r^2. \quad (3.2.12)$$

Тогда дважды осредненная функция (3.2.12) по схеме Гаусса имеет вид

$$W^* = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W dM_1 dM = \nu_c^3 \frac{\nu_B}{\nu_{\Pi}^2} (\widetilde{W} - kW_1), \quad (3.2.13)$$

где

$$k = \left[\frac{\nu_{\Pi}}{\nu_B \cdot \nu_c^3} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{\nu_{\Pi}} \right) \right] = \text{const}, \quad (3.2.14)$$

$$\widetilde{W} = \frac{f m_{10} a^2}{8a_1^2} [6e^2 - 1 - 15e^2 \sin^2 \omega + 3 \cos^2 i (5e^2 \sin^2 \omega + 1 - e^2)], \quad (3.2.15)$$

$$W_1 = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right), \quad (3.2.16)$$

причем ν_{Π} определяется из уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{\nu_{\Pi}} \right) = k^* \nu_c^3 \left(\sigma \frac{\nu_c}{\nu_{\Pi}} - 1 \right), \quad (3.2.17)$$

где $k^* = \frac{m_{00}}{m_{10}} k$, $\sigma = \frac{m_{00} + m_{10}}{m_{00}}$. После этого соответственно ν_B определяется из соотношений (3.2.9)-(3.2.10).

В уравнениях Лагранжа, если введем новую независимую переменную по формуле

$$d\tau = \nu_c^3 \frac{\nu_B}{\nu_{\Pi}^2} dt, \quad (3.2.18)$$

то получим интегрируемую систему

$$\dot{a} = 0,$$

$$\dot{e} = \frac{15f m_{10}}{8a_1^3} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{n} \cdot e \sin^2 i \sin 2\omega,$$

$$\frac{di}{d\tau} = -\frac{15f m_{10}}{16a_1^3} \cdot \frac{e^2}{n\sqrt{1-e^2}} \sin 2i \sin 2\omega,$$

$$\dot{\omega} = \frac{15f m_{10}}{4a_1^3} \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{2}{5}(1-e^2) + \right. \quad (3.2.19)$$

$$\left. + \sin^2 \omega [\cos^2 i - (1-e^2)] - k \frac{2}{5} \left(\frac{a_1^3}{f m_{10}} \right) (1-e^2) \right\},$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3f m_{10}}{4a_1^3} \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \cos i (5e^2 \sin^2 \omega + 1 - e^2),$$

$$\begin{aligned} \dot{M} = & n \frac{\nu_{\text{н}}^4}{\nu_{\text{в}} \cdot \nu_{\text{с}}^3} - \frac{2}{n} \left\{ \frac{f m_{10}}{4a_1^3} [6e^2 - 1 - 15e^2 \sin^2 \omega + 3 \cos^2 i (5e^2 \sin^2 \omega + 1 - e^2)] - \right. \\ & \left. - k \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \right\} - \frac{1-e^2}{n} \left\{ \frac{f m_{10}}{4a_1^3} [6 - 15 \sin^2 \omega + 3 \cos^2 i (5 \sin^2 \omega - 1)] - \frac{3}{2} k \right\}. \end{aligned}$$

Система уравнений (3.2.19) аналогична с формулами (3.1.23), поэтому геометрические картины на фазовой плоскости (ω, e) тождественны.

Однако, из-за отличия формул (3.2.18) и (3.1.14)-(3.1.16) динамические картины в исходном пространстве-времени отличаются.

Таким образом, если массы изменяются согласно формулам

$$m_0 = m_{00} \nu_{\text{н}}(t),$$

$$m_1 = m_{10} \left[\left(\frac{m_{00} + m_{10}}{m_{10}} \right) \left(\frac{At_0^2 + 2Bt_0 + C}{At^2 + 2Bt + C} \right)^{1/2} - \frac{m_{00}}{m_{10}} \nu_{\text{н}}(t) \right] \quad (3.2.20)$$

в различном темпе (3.2.6), где $\nu_{\text{н}} = \nu_{\text{н}}(t)$ определяется из уравнения (3.2.17), рассматриваемая задача интегрируема и решение сводится к эллиптическим квадратурам (3.1.28). Можно ожидать, что приближение Хилла (3.2.11), как исходное допущение, налагает определенные ограничения на темп изменения массы (3.2.6).

Заметим, что уравнения (3.2.17) преобразованием

$$\frac{1}{\nu_{\text{н}}} = \varphi(t) \cdot Y, \quad dX = \frac{dt}{\varphi^2(t)}$$

сводятся к интегрируемому уравнению

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = -\tilde{k} \nu^3 \varphi^3, \quad \tilde{k} = \frac{k^*}{\sigma^3}, \quad \nu = \sigma \nu_c,$$

где $\varphi = \varphi(t)$ есть произвольное решение известного уравнения Ливилля [130]

$$\ddot{\varphi} - \tilde{k} \cdot \left(\frac{At_0^2 + 2Bt_0 + C}{At^2 + 2Bt + C} \right)^2 \varphi = 0.$$

Аналогично могут быть рассмотрены и другие схемы осреднения в указанных законах изменения массы.

3.3. Постановка ограниченной задачи трех тел с анизотропно изменяющимися в различных темпах массами

Рассмотрим ограниченную задачу трех тел, когда массы активно гравитирующих тел T_0 и T_1

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad (3.3.1)$$

изменяются анизотропно в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1}, \quad (3.3.2)$$

а m_2 – масса пассивно гравитирующего тела, постоянна. Уравнения движения рассматриваемой задачи получим исходя из соответствующих уравнений неограниченной задачи трех тел-точек с анизотропно изменяющимися в различных темпах массами (2.4.5)-(2.4.8). Полагая в них формально $m_2 = 0$, $\dot{m}_2 = 0$ получим

$$\ddot{\vec{R}}_1 + f(m_0 + m_1) \frac{\vec{R}_1}{R_1^3} = \vec{D}_1, \quad (3.3.3)$$

$$\vec{D}_1 = -\frac{\dot{m}_1}{m_1} \dot{\vec{R}}_1 + \left(\frac{\dot{m}_0}{m_0} - \frac{\dot{m}_1}{m_1} \right) \left(\frac{\vec{a}^*}{m_0 + m_1} - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \dot{\vec{R}} \right),$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 + f m_0 \frac{\vec{R}_2}{R_2^3} = \text{grad}_{\vec{R}_2} \left[f m_1 \left(\frac{1}{\Delta_{21}} - \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{R_1^3} \right) \right] + \vec{D}_2, \quad (3.3.4)$$

$$\vec{D}_2 = \frac{\dot{m}_0}{m_0} \left(\frac{\vec{a}^*}{m_0 + m_1} - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \dot{\vec{R}}_1 \right),$$

причем

$$\vec{a}^* = m_0 \dot{\vec{R}}_0^* + m_1 \dot{\vec{R}}_1^* = \overrightarrow{\text{const}}, \quad (3.3.5)$$

где \vec{R}_0^* , \vec{R}_1^* – радиус-векторы тел T_0 и T_1 в абсолютной системе координат. Обозначив $\vec{R}_1 = \vec{R}$, $\vec{R}_2 = \vec{r}$, перепишем уравнения (3.3.3)-

(3.3.4) в виде

$$\ddot{\vec{R}} + f(m_0 + m_1) \frac{\vec{R}}{R^3} = - \left(\frac{\dot{m}_0}{m_0} m_1 + m_0 \frac{\dot{m}_1}{m_1} \right) \frac{\dot{\vec{R}}}{m_0 + m_1} + \left(\frac{\dot{m}_0}{m_0} - \frac{\dot{m}_1}{m_1} \right) \frac{\vec{a}^*}{m_0 + m_1}, \quad (3.3.6)$$

$$\ddot{\vec{r}} + f m_0 \frac{\vec{r}}{r^3} = \text{grad}_{\vec{r}} W + \frac{\dot{m}_0}{m_0} \left(\frac{\vec{a}^*}{m_0 + m_1} - \frac{\dot{m}_1}{m_0 + m_1} \dot{\vec{R}} \right), \quad (3.3.7)$$

где

$$W = f m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xX + yY + zZ}{R^3} \right), \quad (3.3.8)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3.3.9)$$

$$\Delta = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2}.$$

Уравнение (3.3.7) описывает движение пассивно гравитирующей точки в поле притяжения двух активно гравитирующих тел T_0 и T_1 в рассматриваемой постановке.

Относительное движение активно гравитирующих тел T_0 и T_1 описывается задачей Лапина двух тел (точек) с переменными массами (3.3.6). Не теряя общность можно предполагать, что в уравнениях (3.3.6) направление оси OZ совпадает с направлением постоянного вектора \vec{a}^* в интеграле (3.3.5). Тогда уравнение движения (3.3.6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(m\dot{X}) = \frac{\partial U_1}{\partial X}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{Y}) = \frac{\partial U_1}{\partial Y}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{Z}) = \frac{\partial}{\partial Z}(U_1 + V_1), \quad (3.3.10)$$

где

$$U_1 = f \frac{m_0 m_1}{R}, \quad V_1 = \varphi_1(t) Z, \quad (3.3.11)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{m^2}{m_0^2 m_1^2} (\dot{m}_0 m_1 - m_0 \dot{m}_1), \quad m = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}. \quad (3.3.12)$$

Один известный интеграл площадей запишем в виде

$$m \left(\dot{Y}X - Y\dot{X} \right) = c = \text{const.} \quad (3.3.13)$$

В п. 1.6 были найдены строгие пространственные частные решения задачи Лапина (3.3.10). Выберем простейшие из них. Пусть квазисферические координаты ρ_1 , δ_1 , λ_1 определяются соотношениями

$$X = \gamma_1 \rho_1 \cos \delta_1 \cos \lambda_1, \quad Y = \gamma_1 \rho_1 \cos \delta_1 \sin \lambda_1, \quad Z = \gamma_1 \rho_1 \sin \delta_1. \quad (3.3.14)$$

Тогда простейшее частное решение имеет вид

$$\rho_1 = \rho_{10} = \text{const}, \quad \delta_1 = \delta_{10} = \text{const}, \quad (3.3.15)$$

$$\lambda_1 = \int_{t_0}^t n(t) dt + \lambda_{10}, \quad \lambda_{10} = \text{const},$$

$$n^2(t) = \frac{1}{\cos^2 \delta_{10}} \left[\frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1} + \frac{\dot{m}}{m} \cdot \frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1} + f \frac{m_0 m_1}{m \gamma_1^3 \rho_{10}^3} - \frac{m(\dot{m}_0 m_1 - m_0 \dot{m}_1)}{\gamma_1 m_0^2 m_1^2 \rho_0} a^* \sin \delta_{10} \right], \quad (3.3.16)$$

где

$$\gamma_1^3 = \frac{c^2}{a^* \rho_{10}^3} \cdot \frac{\sin \delta_{10}}{\cos^4 \delta_{10}} \cdot \frac{m_0^2 m_1^2}{m^3 (\dot{m}_0 m_1 - m_0 \dot{m}_1)}. \quad (3.3.17)$$

Формулы (3.3.7)-(3.3.9), (3.3.12)-(3.3.17) полностью определяют ограниченную задачу трех тел с анизотропно изменяющимися в различных темпах массами в рассматриваемой постановке.

Особенности такой постановки ограниченной задачи трех тел (точек) с переменными массами состоит в том, что здесь активно гравитирующие два тела (точки) с переменными массами совершают пространственные движения.

Глава 4

Задача многих гравитирующих тел с массами, изменяющимися в различных темпах

4.1. Постановка задачи и основные уравнения движения

Рассмотрим систему свободных $n+1$ тел $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ ($n > 3$) взаимогравитирующих по закону Ньютона, с переменными массами

$$m_0 = m_0(t), m_1 = m_1(t), m_2 = m_2(t), \dots, m_n = m_n(t) \quad (4.1.1)$$

изменяющимися в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} \neq \frac{\dot{m}_j}{m_j}, \quad i \neq j \quad (4.1.2)$$

в абсолютной прямоугольной системе координат. Тела рассмотрим как материальные точки, тогда уравнения в рассматриваемой системе координат согласно [120] имеют вид

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i^* = \text{grad}_{\vec{R}_i^*} U + \dot{m}_i \vec{v}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (4.1.3)$$

где

$$\vec{v}_i = \vec{u}_i - \dot{\vec{R}}_i^* \quad (4.1.4)$$

— относительная скорость, \vec{u}_i — абсолютная скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц, $\vec{R}_i^* = \vec{R}_i^*(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*)$ — радиус-векторы тел в абсолютной системе координат,

$$U = f \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{m_i m_j}{R_{ij}^*}, \quad i \neq j, \quad (4.1.5)$$

f – гравитационная постоянная. Рассмотрим случай, когда относительная скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц равна нулю

$$\vec{v}_i = \vec{u}_i - \dot{\vec{R}}_i^* = 0. \quad (4.1.6)$$

В этом случае уравнения относительного движения в системе координат с началом в точке T_0 с массой $m_0 = m_0(t)$ имеют вид

$$\ddot{\vec{R}}_i + f(m_0 + m_i) \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} = \text{grad}_{\vec{R}_i} W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.7)$$

где

$$W_i = f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j}{R_j^3} \right), \quad (4.1.8)$$

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i(X_i, Y_i, Z_i) = \vec{R}_i^* - \vec{R}_0^*, \quad (4.1.9)$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} = R_{ij}^*, \quad (4.1.10)$$

$$\Delta_{i0} = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2} = R_i. \quad (4.1.11)$$

В системе неавтономных дифференциальных уравнений (4.1.7), в отличие от других схем проблемы многих тел, в общем случае, неизвестен ни один интеграл [120]. В связи с этим исследуем динамическую эволюцию рассматриваемой системы методами канонической теории возмущений [7, 70]. Уравнения относительных движений в виде (4.1.7) неудобны для исследований, так как каждое тело имеет свою силовую функцию (4.1.8), поэтому целесообразен переход в систему координат Якоби. В классической проблеме многих тел с постоянными массами этот переход осуществляется с использованием интегралов центра масс [7]. В нашей задаче с переменными массами (4.1.1), (4.1.2) интегралы центра масс неизвестны.

Однако, и в нашей задаче возможно перейти к координатам Якоби [82]. Обозначим

$$\nu_j = \frac{m_j}{\sigma_j}, \quad \sigma_j = m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_j. \quad (4.1.12)$$

Тогда, исходя из определения барицентра системы материальных точек и его свойств [121], геометрическим путем получим формулы перехода к координатам Якоби

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i - \sum_{j=0}^{i-1} \nu_j \vec{r}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.13)$$

где $\vec{r}_i = \vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ – радиус-векторы тел в координатах Якоби, причем $\vec{r}_0 = 0$. Из соотношений (4.1.7), (4.1.13) получим

$$\mu_i \ddot{\vec{r}}_i = \text{grad}_{\vec{r}_i} U - \mu_i \sum_{j=0}^{i-1} (2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.14)$$

где

$$\mu_i = \mu_i(t) = m_i \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i} = \nu_i \sigma_{i-1} \quad (4.1.15)$$

приведенные массы, которые являются произвольными функциями времени, силовая функция U задается формулой (4.1.5), в которой взаимные расстояния тел (4.1.10)–(4.1.11) согласно (4.1.13) преобразуются к виду

$$\vec{\Delta}_{Nk} = \vec{R}_k - \vec{R}_N = \vec{r}_k - \vec{r}_N + \sum_{j=N}^{k-1} \nu_j \vec{r}_j, \quad k > N. \quad (4.1.16)$$

Вводя в рассмотрение силовую функцию

$$V_i = \mu_i \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} [(2\dot{\nu}_j \dot{x}_j + \ddot{\nu}_j x_j) x_i + (2\dot{\nu}_j \dot{y}_j + \ddot{\nu}_j y_j) y_i + (2\dot{\nu}_j \dot{z}_j + \ddot{\nu}_j z_j) z_i] \right\}, \quad (4.1.17)$$

причем $V_0 = 0$, так как $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$, перепишем уравнения (4.1.14) в виде

$$\mu_i \ddot{\vec{r}}_i = \text{grad}_{\vec{r}_i} U - \text{grad}_{\vec{r}_i} V_i. \quad (4.1.18)$$

Последние уравнения движения удобны для построения канонической теории возмущений в рассматриваемой проблеме.

**4.2. Уравнения движения задачи многих тел с изотропно
изменяющимися в различных темпах массами в бари-
центрической системе координат и инварианты центра масс**

Исходя из уравнений движения в координатах Якоби (4.1.14), (4.1.15) получим уравнения движения в барицентрической системе координат. Через $\vec{r}_{\delta i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) обозначим радиус-векторы тел T_i в барицентрической системе координат. Тогда из геометрии точечных масс [121] получим формулы преобразования

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\delta 0} &= - \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\sigma_i} \vec{r}_i, \\ \vec{r}_{\delta 1} &= - \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{\sigma_i} \vec{r}_i + \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \vec{r}_1, \\ \vec{r}_{\delta 2} &= - \sum_{i=3}^n \frac{m_i}{\sigma_i} \vec{r}_i + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \vec{r}_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

$$\vec{r}_{\delta n-1} = - \sum_{i=n}^n \frac{m_i}{\sigma_i} \vec{r}_i + \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}} \vec{r}_{n-1},$$

$$\vec{r}_{\delta n} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} \vec{r}_n,$$

где \vec{r}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) радиус-векторы тел в системе координат Якоби. Из соотношений (4.2.1) следует

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{r}_{\delta i} = 0, \tag{4.2.2}$$

что естественно для радиус-векторов тел в барицентрической системе координат.

Формулы для обратных преобразований имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{r}_n &= \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} \vec{r}_{\delta n}, \\ \vec{r}_{n-1} &= \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} \left[\vec{r}_{\delta n-1} + \frac{m_n}{\sigma_n} \vec{r}_n \right], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

$$\vec{r}_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \left[\vec{r}_{\delta 3} + \sum_{i=4}^n \frac{m_i}{\sigma_i} \vec{r}_i \right],$$

$$\vec{r}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left[\vec{r}_{\delta 2} + \sum_{i=3}^n \frac{m_i}{\sigma_i} \vec{r}_i \right],$$

$$\vec{r}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \left[\vec{r}_{\delta 1} + \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{\sigma_i} \vec{r}_i \right].$$

Из формул (4.2.3), учитывая (4.2.2), имеем

$$\vec{r}_n = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} m_j (\vec{r}_{\delta n} - \vec{r}_{\delta j}) \quad (4.2.4)$$

Учитывая (4.1.12), (4.1.15) перепишем (4.2.1) в виде

$$\begin{aligned} m_0 \vec{r}_{\delta 0} &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}} \right) \cdot (\mu_i \vec{r}_i), \\ m_k \vec{r}_{\delta k} &= - \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}} \right) \cdot (\mu_i \vec{r}_i) + \mu_k \vec{r}_k, \\ &k = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$$m_n \vec{r}_{\delta n} = \mu_n \vec{r}_n.$$

Откуда получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (m_0 \vec{r}_{\delta 0}) &= - \sum_{i=1}^n \frac{m_0}{\sigma_{i-1}} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\mu_i \vec{r}_i) - \sum_{i=1}^n \left[2 \frac{d}{dt} (\mu_i \vec{r}_i) \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_i \vec{r}_i) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}} \right) \right], \\ \frac{d^2}{dt^2} (m_k \vec{r}_{\delta k}) &= \frac{d^2}{dt^2} (\mu_k \vec{r}_k) - \sum_{i=k+1}^n \frac{m_k}{\sigma_{i-1}} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\mu_i \vec{r}_i) - \\ &- \sum_{i=k+1}^n \left[2 \frac{d}{dt} (\mu_i \vec{r}_i) \frac{d}{dt} \left(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}} \right) + (\mu_i \vec{r}_i) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}} \right) \right], \\ \frac{d^2}{dt^2} (m_n \vec{r}_{\delta n}) &= \frac{d^2}{dt^2} (\mu_n \vec{r}_n). \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Уравнения (4.1.14) перепишем в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mu_i \vec{r}_i) = \text{grad}_{\vec{r}_i} U - \mu_i \sum_{j=0}^{i-1} \left(2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j \right) + 2\dot{\mu}_i \dot{\vec{r}}_i + \ddot{\mu}_i \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2.7)$$

Из соотношений (4.2.6), (4.2.7) с учетом

$$\frac{m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_j}{\sigma_j} = 1 = \text{const}$$

получим

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=0}^n m_i \vec{r}_{\delta i} \right) = 0. \quad (4.2.8)$$

Следовательно, можно написать инварианты центра масс в барицентрической системе координат [92]

$$\sum_{i=0}^n \left(\dot{m}_i \vec{r}_{\delta i} + m_i \dot{\vec{r}}_{\delta i} \right) = 0, \quad (4.2.9)$$

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{r}_{\delta i} = 0. \quad (4.2.10)$$

Уравнения движения в барицентрической системе координат также следуют из соотношений (4.2.6), (4.2.7)

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_0 \vec{r}_{\delta 0}) = \text{grad}_{\vec{r}_{\delta 0}} U + \vec{F}_{\delta 0}, \quad (4.2.11)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\delta 0} = m_0 \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\sigma_{i-1}} \left[\sum_{j=0}^{i-1} \left(2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j \right) \right] - \\ - \sum_{i=1}^n \left[\frac{m_0}{\sigma_{i-1}} \left(2\dot{\mu}_i \dot{\vec{r}}_i + \ddot{\mu}_i \vec{r}_i \right) + 2 \frac{d}{dt}(\mu_i \vec{r}_i) \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}} \right) + (\mu_i \vec{r}_i) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}} \right) \right], \\ \frac{d^2}{dt^2}(m_k \vec{r}_{\delta k}) = \text{grad}_{\vec{r}_{\delta k}} U + 2\dot{\mu}_k \dot{\vec{r}}_k + \ddot{\mu}_k \vec{r}_k - \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$- \mu_k \sum_{j=0}^{k-1} \left(2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j \right) + \vec{F}_{\delta k}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\delta k} &= m_k \sum_{i=k+1}^n \frac{\mu_i}{\sigma_{i-1}} \left[\sum_{j=0}^{i-1} \left(2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j \right) \right] - \sum_{i=k+1}^n \left[\frac{m_k}{\sigma_{i-1}} \left(2\dot{\mu}_i \dot{\vec{r}}_i + \ddot{\mu}_i \vec{r}_i \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{d}{dt} (\mu_i \vec{r}_i) \frac{d}{dt} \left(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}} \right) + (\mu_i \vec{r}_i) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}} \right) \right], \\
\frac{d^2}{dt^2} (m_n \vec{r}_{\delta n}) &= \text{grad}_{\vec{r}_{\delta n}} U + 2\dot{\mu}_n \dot{\vec{r}}_n + \ddot{\mu}_n \vec{r}_n - \mu_n \sum_{j=0}^{n-1} \left(2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j \right),
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

где правые части уравнений выражаются через барицентрические координаты согласно выражению (4.2.4). Полученные уравнения движения в барицентрической системе координат могут быть использованы для установления гомографических решений («центральных конфигурации») в рассматриваемой задаче и ограниченной задаче многих тел, аналогично тому, как это было выполнено в соответствующих стационарных задачах [158].

В частности, если в барицентрической системе координат примем классическое выражение

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{r}}_{\delta i} = 0, \tag{4.2.14}$$

тогда инварианты центра масс (4.2.9) можно написать в виде

$$\sum_{i=0}^n \dot{m}_i \vec{r}_{\delta i} = 0. \tag{4.2.15}$$

Полученные инвариантные соотношения (4.2.9), (4.2.10) и их частные случаи (4.2.14), (4.2.15) могут быть эффективно использованы в исследовании нестационарных гравитирующих систем [155, 156].

В исследовании динамики многих гравитирующих тел-точек в барицентрической системе координат важное значение имеет уравнение Лагранжа-Якоби [7], которое позволяет изучить проблему качественно [131]. В задаче многих гравитирующих тел с изотропно изменяющимися в различных темпах массами в барицентрической

системе координат также представляет интерес получение аналога уравнения Лагранжа-Якоби.

Однако в этом случае, вывод аналога уравнения Лагранжа-Якоби затруднителен из-за условий (4.1.2). В связи с этим здесь рассмотрим частный случай, когда

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} \approx \frac{\dot{m}_j}{m_j} \approx \frac{\dot{m}}{m}, \quad i \neq j, \quad (4.2.16)$$

и изучим эффекты потери масс системы. В этом случае аналог уравнения Лагранжа-Якоби, а также уравнение, описывающее изменение полной механической энергии были получены Т.Б. Омаровым [38]

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{I}{m} \right) = 2T + W, \quad (4.2.17)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} (T + 2W), \quad (4.2.18)$$

где

$$I = \sum_{i=0}^n m_i r_{\delta i}^2 \quad (4.2.19)$$

барицентрический момент инерции, $H = T + W$ – полная механическая энергия, T – кинетическая энергия, $W = -U$ – потенциальная энергия системы.

Из уравнений (4.2.17) и (4.2.18) можно получить [132]

$$\frac{1}{2m^3} \cdot \frac{dm}{dt} \cdot \frac{d^2 J}{dt^2} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{H}{m^3} \right), \quad (4.2.20)$$

где обозначено

$$J = \frac{I}{m}. \quad (4.2.21)$$

Пусть массы тел изменяются со временем согласно закону Эддингтона-Джинса

$$\frac{dm}{dt} = \alpha m^k, \quad (4.2.22)$$

где α, k – постоянные величины.

На основе уравнения (4.2.20) можно получить аналитическую оценку времени перехода системы $n + 1$ – тел убывающей массы из начального состояния с отрицательной энергией

$$H_0 = H(t_0) < 0 \quad (4.2.23)$$

в распадающееся состояние с положительной энергией

$$H = H(t) > 0 \quad (4.2.24)$$

вследствие потери масс системы [89, 96].

Величину $J = J(t)$ в формуле (4.2.21) разложим в ряд Тейлора и ограничимся квадратичным приближением

$$J(t) \approx J(t_0) + (t - t_0) \left. \frac{dJ}{dt} \right|_{t=t_0} + \frac{(t - t_0)^2}{2} \left. \frac{d^2J}{dt^2} \right|_{t=t_0}. \quad (4.2.25)$$

Соответственно уравнение (4.2.20) дает

$$\frac{H}{m^3} = \frac{H_0}{m_0^3} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m_0^2} \right) \cdot \left(\frac{d^2J}{dt^2} \right)_{t=t_0}. \quad (4.2.26)$$

где $m_0 = m(t_0)$. В этом случае из (4.2.17) следует

$$2(2T + W) = m \left(\frac{d^2J}{dt^2} \right)_{t=t_0}. \quad (4.2.27)$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{d^2J}{dt^2} \right)_{t=t_0} = \frac{2(2T_0 + W_0)}{m_0},$$

где $T_0 = T(t_0)$, $W_0 = W(t_0)$, перепишем уравнение (4.2.26) в виде

$$\frac{H}{m^3} = \frac{H_0}{m_0^3} + \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m_0^2} \right) \frac{2T_0 + W_0}{2m_0}. \quad (4.2.28)$$

На основе формулы (4.2.28) можно оценить время распада системы. Пусть $t = t^*$ время при котором система переходит в распадающееся состояние за счет потери масс индивидуальных членов. Тогда

$$H(t^*) = 0. \quad (4.2.29)$$

Из формул (4.2.28), (4.2.29) получим

$$\left[\frac{m(t_0)}{m(t^*)} \right] = 1 - \frac{2H_0}{2T_0 + W_0}. \quad (4.2.30)$$

Закон изменения масс (4.2.22) дает

$$\left[\frac{m(t_0)}{m(t^*)} \right] = m_0^2 [\alpha(1-k)\Delta t^* + m_0^{1-k}]^{2/(k-1)}, \quad k \neq 1, \quad (4.2.31)$$

где время распада системы обозначено как

$$\Delta t^* = t^* - t_0.$$

Из формул (4.2.30), (4.2.31) следует

$$\Delta t^* = \frac{1}{\alpha(1-k)} \left\{ \frac{1}{m_0^2} \left(1 - \frac{2H_0}{2T_0 + W_0} \right)^{(k-1)/2} - m_0^{1-k} \right\}, \quad k \neq 1. \quad (4.2.32)$$

Аналогично в случае $k = 1$ получим

$$\Delta t^* = -\frac{1}{2\alpha} \ln \left(1 - \frac{2H_0}{2T_0 + W_0} \right). \quad (4.2.33)$$

Следует отметить, что формулы (4.2.32), (4.2.33) были получены при выполнении условий (4.2.25).

4.3. Уравнения движения в канонических оскулирующих элементах

Уравнения движения (4.1.18), записанные в координатах Якоби, перепишем в виде

$$\mu_i \ddot{\vec{r}}_i = \text{grad}_{\vec{r}_i} \left(f \frac{m_i \sigma_{i-1}}{r_i} \right) + b_i \vec{r}_i + \text{grad}_{\vec{r}_i} B_i, \quad (4.3.1)$$

где

$$B_i = U - V_i - f \frac{m_i \sigma_{i-1}}{r_i} - \frac{1}{2} b_i r_i^2. \quad (4.3.2)$$

В уравнениях (4.3.1) переходим к квазисферическим координатам ρ_i , φ_i , θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$x_i = \gamma_i \rho_i \cos \varphi_i \cos \theta_i, \quad y_i = \gamma_i \rho_i \cos \varphi_i \sin \theta_i, \quad z_i = \gamma_i \rho_i \sin \varphi_i, \quad (4.3.3)$$

где

$$\gamma_i = \gamma_i(t) = \frac{m_i(t_0)}{m_i(t)} \cdot \frac{\sigma_{i-1}(t_0)}{\sigma_{i-1}(t)} \cdot \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)} = \frac{\sigma_i(t_0)}{\sigma_i(t)}, \quad (4.3.4)$$

причем согласно (4.1.12)

$$\sigma_i(t) = \sigma_i = m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_i.$$

Кинетическая энергия системы (4.3.1) с приведенными массами $\mu_i = \mu_i(t)$ определяется известным соотношением

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mu_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Далее, учитывая (4.3.3) вычислим соответствующие импульсы по обычным правилам

$$P_{\rho_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\rho}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \dot{\rho}_i + \mu_i \gamma_i \dot{\gamma}_i \rho_i, \quad P_{\varphi_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \rho_i^2 \dot{\varphi}_i, \quad (4.3.5)$$

$$P_{\theta_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \rho_i^2 \cos^2 \varphi_i \dot{\theta}_i.$$

Тогда уравнения движения в переменных

$$\begin{aligned} \rho_i, \quad P_{\rho_i} &= \frac{\partial K_i}{\partial \dot{\rho}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \dot{\rho}_i + \mu_i \gamma_i \dot{\gamma}_i \rho_i, \\ \varphi_i, \quad P_{\varphi_i} &= \frac{\partial K_i}{\partial \dot{\varphi}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \rho_i^2 \dot{\varphi}_i, \\ \theta_i, \quad P_{\theta_i} &= \frac{\partial K_i}{\partial \dot{\theta}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \rho_i^2 \cos^2 \varphi_i \dot{\theta}_i, \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

можно написать в следующей форме

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial P_{\rho_i}}, & \dot{P}_{\rho_i} &= -\frac{\partial H_i}{\partial \rho_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\rho_i}, \\ \dot{\varphi}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial P_{\varphi_i}}, & \dot{P}_{\varphi_i} &= -\frac{\partial H_i}{\partial \varphi_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\varphi_i}, \\ \dot{\theta}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial P_{\theta_i}}, & \dot{P}_{\theta_i} &= -\frac{\partial H_i}{\partial \theta_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\theta_i}, \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

соответственно

$$H_i = \frac{1}{2\mu_i\gamma_i^2} \left[(P_{\rho_i} - \mu_i\gamma_i\dot{\gamma}_i\rho_i)^2 + \frac{P_{\varphi_i}^2}{\rho_i^2} + \frac{P_{\theta_i}^2}{\rho_i^2 \cos^2 \varphi_i} \right] - U_i^*,$$

$$U_i^* = f \frac{m_i\sigma_{i-1}}{\gamma_i\rho_i} + \frac{1}{2} (b_i\gamma_i^2 + \mu_i\dot{\gamma}_i^2) \rho_i^2 + B_i.$$

Вводя новые импульсы

$$P_{\rho_i} = \psi_i \tilde{P}_{\rho_i}, \quad P_{\varphi_i} = \psi_i \tilde{P}_{\varphi_i}, \quad P_{\theta_i} = \psi_i \tilde{P}_{\theta_i},$$

$$\psi_i = \frac{\mu_i}{\mu_{i0}} = \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)},$$
(4.3.8)

напишем уравнения движения в канонической форме

$$\dot{\rho}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\rho_i}}, \quad \dot{\varphi}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\varphi_i}}, \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\theta_i}},$$

$$\dot{\tilde{P}}_{\rho_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \rho_i}, \quad \dot{\tilde{P}}_{\varphi_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \varphi_i}, \quad \dot{\tilde{P}}_{\theta_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \theta_i},$$
(4.3.9)

где

$$\tilde{H}_i = \tilde{H}_{i0} + \tilde{H}_{i1},$$
(4.3.10)

$$\tilde{H}_{i0} = \frac{\psi_i}{2\mu_i\gamma_i^2} \left[\left(\tilde{P}_{\rho_i} - \frac{\mu_i\gamma_i\dot{\gamma}_i}{\psi_i} \rho_i \right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\varphi_i}^2}{\rho_i^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_i}^2}{\rho_i^2 \cos^2 \varphi_i} \right] -$$
(4.3.11)

$$-f \frac{m_i\sigma_{i-1}}{\psi_i\gamma_i\rho_i} - \frac{1}{\psi_i} (b_i\gamma_i^2 + \mu_i\dot{\gamma}_i^2) \rho_i^2,$$

$$H_{i1} = -\frac{1}{\psi_i} B_i.$$
(4.3.12)

При $B_i = 0$ уравнения (4.3.9)–(4.3.11) интегрируются методом Гамильтона-Якоби [70], причем постоянные интегрирования

$$\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}, \beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i},$$
(4.3.13)

есть аналоги соответствующих элементов Якоби в классической задаче двух тел (точек) постоянной массы. Каждая система уравнений

(4.3.9)–(4.3.11) определяет аperiodическое движение по квазиконическому сечению

$$\rho_i = \frac{p_i}{1 + e_i \cos v_i}, \quad v_i = u_i - \omega_i, \quad p_i = a_i(1 - e_i^2), \quad (4.3.14)$$

$$\dot{\rho}_i = \frac{1}{\mu_{i0}\gamma_i^2(t)} \cdot \frac{\beta_i}{\sqrt{p_i}} e_i \sin v_i, \quad \dot{u}_i = \frac{1}{\mu_{i0}\gamma_i^2(t)} \cdot \frac{\beta_i \sqrt{p_i}}{\rho_i^2}, \quad (4.3.15)$$

$$\beta_i^2 = f \cdot \mu_i(t_0) m_i(t_0) \sigma_{i-1}(t_0), \quad (4.3.16)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v_i}{2} = \frac{\sqrt{1 + e_i}}{\sqrt{1 - e_i}} \operatorname{tg} \frac{E_i}{2}, \quad e_i < 1,$$

$$E_i - e_i \sin E_i = M_i, \quad (4.3.17)$$

$$M_i = n_i [\phi_i(t) - \phi_i(\tau_i)], \quad n_i = \frac{\beta_i}{\mu_{i0} a_i^{3/2}}, \quad (4.3.18)$$

где $\phi_i(t)$ первообразная функции $\gamma_i^{-2}(t)$. В прямоугольных системах координат Якоби выражения координат и скорости промежуточных движений даются формулами

$$\begin{aligned} x_i &= \gamma_i \rho_i (\cos u_i \cos \Omega_i - \sin u_i \sin \Omega_i \cos i_i), \\ y_i &= \gamma_i \rho_i (\cos u_i \sin \Omega_i + \sin u_i \cos \Omega_i \cos i_i), \\ z_i &= \gamma_i \rho_i (\sin u_i \sin i_i), \quad r_i = \gamma_i \rho_i, \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) x_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i (-\sin u_i \cos \Omega_i - \cos u_i \sin \Omega_i \cos i_i), \\ \dot{y}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) y_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i (-\sin u_i \sin \Omega_i + \cos u_i \cos \Omega_i \cos i_i), \\ \dot{z}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) z_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i (\cos u_i \sin i_i), \quad u_i = v_i + \omega_i. \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Величины

$$a_i, \quad e_i, \quad \omega_i, \quad \Omega_i, \quad i_i, \quad \phi_i(\tau_i) \quad (4.3.21)$$

элементы орбиты — аналоги соответствующих кеплеровских элементов, причем

$$\begin{aligned} -2\alpha_{1i} &= \frac{\beta_i^2}{\mu_{i0}a_i}, & \alpha_{2i} &= \beta_i\sqrt{p_i}, & \alpha_{3i} &= \beta_i\sqrt{p_i}\cos i_i, \\ \beta_{1i} &= -\phi_i(\tau_i), & \beta_{2i} &= \omega_i, & \beta_{3i} &= \Omega_i. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Уравнения (4.3.9)–(4.3.12) в системе переменных (4.3.13), как уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{\alpha}_{ki} = \frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial \beta_{ki}}, \quad \dot{\beta}_{ki} = -\frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial \alpha_{ki}}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.3.23)$$

где

$$\tilde{R}_i = \frac{1}{\psi_i} R_i(t, \alpha_{ki}, \beta_{ki}). \quad (4.3.24)$$

Введем аналоги элементов Делоне

$$L_i, \quad G_i, \quad H_i, \quad l_i, \quad g_i, \quad h_i \quad (4.3.25)$$

посредством формул

$$\begin{aligned} -2\alpha_{1i} &= \frac{\beta_i^4}{\mu_{i0}L_i^2}, & \alpha_{2i} &= G_i, & \alpha_{3i} &= H_i, \\ \beta_{1i} &= \frac{l_i}{n_i} - \phi_i(t), & \beta_{2i} &= g_i, & \beta_{3i} &= h_i. \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Делоне (4.3.25) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial l_i}, & \dot{G}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial g_i}, & \dot{H}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial h_i}, \\ \dot{l}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial L_i}, & \dot{g}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial G_i}, & \dot{h}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial H_i}, \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

где

$$R_i^* = \frac{1}{\gamma_i^2(t)} \cdot \frac{\beta_i^4}{2\mu_{i0}L_i^2} + \tilde{R}_i. \quad (4.3.28)$$

Переход к аналогам первой системы элементов Пуанкаре осуществляется формулами

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= L_i, & \rho_{1i} &= L_i - G_i, & \rho_{2i} &= G_i - H_i, \\ \lambda_i &= l_i + g_i + h_i, & \omega_{1i} &= -g_i - h_i, & \omega_{2i} &= -h_i, \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

и соответственно уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i}, & \dot{\rho}_{1i} &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \omega_{1i}}, & \dot{\rho}_{2i} &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \omega_{2i}}, \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\omega}_{1i} &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \rho_{1i}}, & \dot{\omega}_{2i} &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \rho_{2i}}. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Аналоги второй системы элементов Пуанкаре определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= \Lambda_i, & \xi_i &= \sqrt{2\rho_{1i}} \cos \omega_{1i}, & p_i &= \sqrt{2\rho_{2i}} \cos \omega_{2i}, \\ \lambda_i &= \lambda_i, & \eta_i &= \sqrt{2\rho_{1i}} \sin \omega_{1i}, & q_i &= \sqrt{2\rho_{2i}} \sin \omega_{2i}, \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

и соответственно уравнения возмущенного движения даются выражениями

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i}, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i}, \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i}, & \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i}. \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

В уравнениях возмущенного движения (4.3.23), (4.3.27), (4.3.30) и (4.3.32) выражение возмущающей функции (4.3.24) через оскулирующие элементы удобно ввести в зависимости от конкретной физической постановки задачи.

Глава 5

Задача о поступательно-вращательном движении многих нестационарных тел переменных размеров и массы

5.1. Постановка задачи и первые интегралы

Рассмотрим систему свободных небесных тел с переменными массами и размерами $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Обозначим через $m_i = m_i(t_0)\nu_i$ — массу, $l_i = l_i(t_0)\chi_i$ — характерный линейный размер, а через A_{ik} , B_{ik} , C_{ik} — главные центральные моменты инерции k -го порядка тела T_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), где t_0 — начальный момент времени t , $\nu_i = \nu_i(t)$, $\chi_i = \chi_i(t)$ — некоторые функции времени. Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned}A_{ik} &= A_{ik}(t) = \nu_i \chi_i^k A_{ik}(t_0), \\B_{ik} &= B_{ik}(t) = \nu_i \chi_i^k B_{ik}(t_0), \\C_{ik} &= C_{ik}(t) = \nu_i \chi_i^k C_{ik}(t_0).\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Они означают, что изменение каждого тела происходит гомотетичным образом (форма остается постоянной), элементарный слой меняет размеры и массу, оставаясь подобным исходному, причем структура распределения массы по отношению к слою не меняется (лучистое расширение или сжатие). Известно, что подобно изменяемое тело по своим свойствам ближе всего стоит к твердому телу [133, 140, 144]. Допустим, что отделяющиеся (присоединяющиеся) частицы не создают дополнительный вращательный момент [68].

Пусть $O\xi\eta\zeta$ – некоторая абсолютная (инерциальная) система координат. Обозначим через $\xi_i\eta_i\zeta_i$ – абсолютные координаты центра инерции O_i тела T_i и через $\varphi_i, \psi_i, \theta_i$ – обычные эйлеровы углы, определяющие ориентацию главных центральных осей инерции тела T_i относительно системы $O\xi\eta\zeta$.

Для каждого тела T_i введем собственную систему координат, связанную с ним. Начало этой собственной системы поместим в точке O_i , а оси $\xi'_i\eta'_i\zeta'_i$ направим по главным осям инерции тела T_i и это положение остается неизменным.

Пусть A_{i2}, B_{i2}, C_{i2} – главные центральные моменты инерции второго порядка тела T_i , p_i, q_i, r_i – составляющие угловой скорости вращения тела T_i в системе координат $\xi'_i\eta'_i\zeta'_i$, определяемые кинематическими уравнения Эйлера [7, 134]

$$\begin{aligned} p_i &= \dot{\psi}_i \sin \varphi_i \sin \theta_i + \dot{\theta}_i \cos \varphi_i, \\ q_i &= \dot{\psi}_i \cos \varphi_i \sin \theta_i - \dot{\theta}_i \sin \varphi_i, \\ r_i &= \dot{\psi}_i \cos \theta_i + \dot{\varphi}_i. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Пусть

$$K_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) + \frac{1}{2} (A_{i2} p_i^2 + B_{i2} q_i^2 + C_{i2} r_i^2) \quad (5.1.3)$$

кинетическая энергия тела T_i и $K = \sum_{i=0}^n K_i$ – кинетическая энергия системы. Силовую функцию системы запишем в виде

$$U = \sum_{i,j}^n U_{ij}, \quad i \neq j \quad (5.1.4)$$

$$\begin{aligned} U_{ij} &= f \sum_{s=0}^{\infty} \frac{U_{ij}^{(s)}}{R_{ij}^{2s+1}} = f \frac{m_i m_j}{R_{ij}} + \\ &+ f m_j \frac{A_{i2} + B_{i2} + C_{i2} - 3I_i^{(i,j)}}{2R_{ij}^3} + f m_i \frac{A_{j2} + B_{j2} + C_{j2} - 3I_j^{(i,j)}}{2R_{ij}^3} + \dots, \end{aligned}$$

$$I_i^{(i,j)} = A_{i2}\alpha_{ij}^2 + B_{i2}\beta_{ij}^2 + C_{i2}\gamma_{ij}^2, \quad I_j^{(i,j)} = A_{i2}\alpha_{ji}^2 + B_{i2}\beta_{ji}^2 + C_{i2}\gamma_{ji}^2,$$

где $I_i^{(i,j)}$, $I_j^{(i,j)}$ моменты инерции тел T_i и T_j относительно прямой, проходящей через центры масс O_i , O_j этих тел, α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} — косинусы углов, образуемых прямой O_iO_j с центральными осями инерции тела T_i . α_{ji} , β_{ji} , γ_{ji} — косинусы аналогичных углов для тела T_j . Тогда уравнения движения могут быть записаны в виде [68]

$$\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \dot{m}_i(u_{i\xi} - \dot{\xi}_i), \\ m_i\ddot{\eta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \dot{m}_i(u_{i\eta} - \dot{\eta}_i), \\ m_i\ddot{\zeta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} + \dot{m}_i(u_{i\zeta} - \dot{\zeta}_i), \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_i p_i) - (B_i - C_i)q_i r_i &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos \theta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right] \frac{\sin \varphi_i}{\sin \theta_i} + \cos \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \theta_i}, \\ \frac{d}{dt}(B_i q_i) - (C_i - A_i)r_i p_i &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos \theta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right] \frac{\cos \varphi_i}{\sin \theta_i} - \sin \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \theta_i}, \\ \frac{d}{dt}(C_i r_i) - (A_i - B_i)p_i q_i &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

где $\vec{u}_i (u_{i\xi}, u_{i\eta}, u_{i\zeta})$ — абсолютная скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц тела T_i , $A_i = A_{i2}(t)$, $B_i = B_{i2}(t)$, $C_i = C_{i2}(t)$.

Уравнения (5.1.2), (5.1.5), (5.1.6) образуют систему совместных уравнений $12(n+1)$ — го порядка, полное интегрирование которой определяет вращательное и поступательное движение каждого из тел рассматриваемой системы.

Ввиду сложности исследуемой задачи займемся поисками приближенных решений методами теории возмущений, а также строгих частных решений. Но сначала установим некоторые первые интегралы при достаточно общих предположениях в абсолютной системе координат.

Первые интегралы. Аналог интеграла энергии при достаточно общих предположениях установить не удастся. В некоторых случаях рассматриваемая задача допускает интегралы центра масс и моментов. Пусть

$$u_{i\xi} - \dot{\xi}_i = 0, \quad u_{i\eta} - \dot{\eta}_i = 0 \quad u_{i\zeta} - \dot{\zeta}_i = 0 \quad (5.1.7)$$

$$\nu_i = \nu(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (5.1.8)$$

Тогда имеем шесть интегралов центра масс

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\xi}_i &= a_\xi \nu, & \sum_{i=0}^n m_i \xi_i &= (a_\xi t + b_\xi) \nu, \\ \sum_{i=0}^n m_i \dot{\eta}_i &= a_\eta \nu, & \sum_{i=0}^n m_i \eta_i &= (a_\eta t + b_\eta) \nu, \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\zeta}_i = a_\zeta \nu, \quad \sum_{i=0}^n m_i \zeta_i = (a_\zeta t + b_\zeta) \nu.$$

При условии

$$u_{i\xi} = 0, \quad u_{i\eta} = 0, \quad u_{i\zeta} = 0, \quad (5.1.10)$$

получим три интеграла моментов

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left[m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) + A_i p_i a_{31}^{(i)} + B_i q_i a_{32}^{(i)} + C_i r_i a_{33}^{(i)} \right] &= c_3, \\ \sum_{i=0}^n \left[m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) + A_i p_i a_{21}^{(i)} + B_i q_i a_{22}^{(i)} + C_i r_i a_{23}^{(i)} \right] &= c_2, \\ \sum_{i=0}^n \left[m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) + A_i p_i a_{11}^{(i)} + B_i q_i a_{12}^{(i)} + C_i r_i a_{13}^{(i)} \right] &= c_1, \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

где направляющие косинусы $a_{ks}^{(i)}$ связаны с эйлеровыми углами тела T_i известными формулами

$$\begin{aligned} a_{11}^{(i)} &= \cos \psi_i \cos \varphi_i - \sin \psi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i, \\ a_{21}^{(i)} &= \sin \psi_i \cos \varphi_i + \cos \psi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i, \\ a_{31}^{(i)} &= \sin \varphi_i \sin \theta_i, \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

$$a_{12}^{(i)} = -\cos \psi_i \sin \varphi_i - \sin \psi_i \cos \varphi_i \cos \theta_i,$$

$$a_{22}^{(i)} = -\sin \psi_i \sin \varphi_i + \cos \psi_i \cos \varphi_i \cos \theta_i,$$

$$a_{32}^{(i)} = \cos \varphi_i \sin \theta_i,$$

$$a_{13}^{(i)} = \sin \psi_i \sin \theta_i,$$

$$a_{23}^{(i)} = -\cos \psi_i \sin \theta_i,$$

$$a_{33}^{(i)} = \cos \theta_i,$$

а также три интеграла, определяющие скорость центра масс системы

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\xi}_i = a_\xi, \quad \sum_{i=0}^n m_i \dot{\eta}_i = a_\eta, \quad \sum_{i=0}^n m_i \dot{\zeta}_i = a_\zeta. \quad (5.1.13)$$

В этом случае, если вдобавок к условиям (5.1.10) положить

$$\nu_i = \nu(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.1.14)$$

имеем еще три интеграла, определяющие положение центра масс

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \sum_{i=0}^n m_i \xi_i &= a_\xi \int \frac{dt}{\nu(t)} + b_\xi, \\ \frac{1}{\nu} \sum_{i=0}^n m_i \eta_i &= a_\eta \int \frac{dt}{\nu(t)} + b_\eta, \\ \frac{1}{\nu} \sum_{i=0}^n m_i \zeta_i &= a_\zeta \int \frac{dt}{\nu(t)} + b_\zeta. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

Если предположим

$$\nu_i = \text{const}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.1.16)$$

тогда имеют место все девять интегралов центра масс и моментов.

Исследование задачи о поступательно-вращательном движении многих нестационарных тел с переменными массами и размерами представляется перспективным наряду с соответствующей стационарной задачей [157].

5.2. Уравнения движения в относительной системе координат. Оскулирующие элементы

Пусть тело T_0 – «центральное», и система координат такая, что начало координат O_0 – в барицентре тела T_0 и оси параллельны абсолютным осям. Обозначим

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

и предположим

$$\dot{m}_i(u_{\xi_i} - \dot{\xi}_i) = 0, \quad \dot{m}_i(u_{\eta_i} - \dot{\eta}_i) = 0, \quad \dot{m}_i(u_{\zeta_i} - \dot{\zeta}_i) = 0, \quad (5.2.1)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \\ \ddot{y}_i &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial y_i} + \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, \\ \ddot{z}_i &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial z_i} + \frac{\partial R_i}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

где

$$R_i = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{m_i} U_{ij} + \frac{1}{m_0} \left[x_i \frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j} + y_i \frac{\partial U_{j0}}{\partial y_j} + z_i \frac{\partial U_{j0}}{\partial z_j} \right] \right\}, \quad i \neq j, \quad (5.2.3)$$

а уравнения (5.1.6) остаются без изменения, но эйлеровы углы относятся теперь к новой системе координат

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_i p_i) - (B_i - C_i) q_i r_i &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos \theta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right] \frac{\sin \varphi_i}{\sin \theta_i} + \cos \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \theta_i}, \\ \frac{d}{dt}(B_i q_i) - (C_i - A_i) r_i p_i &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos \theta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right] \frac{\cos \varphi_i}{\sin \theta_i} - \sin \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \theta_i}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(C_i r_i) - (A_i - B_i) p_i q_i = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.4)$$

$$\frac{d}{dt}(A_0 p_0) - (B_0 - C_0) q_0 r_0 = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_0} - \cos \theta_0 \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} \right] \frac{\sin \varphi_0}{\sin \theta_0} + \cos \varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \theta_0},$$

$$\frac{d}{dt}(B_0 q_0) - (C_0 - A_0) r_0 p_0 = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_0} - \cos \theta_0 \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} \right] \frac{\cos \varphi_0}{\sin \theta_0} - \sin \varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \theta_0},$$

$$\frac{d}{dt}(C_0 r_0) - (A_0 - B_0) p_0 q_0 = \frac{\partial U}{\partial \varphi_0}. \quad (5.2.5)$$

Полученные уравнения относительного движения удобны для использования методов теории возмущений.

Уравнения движения в оскулирующих элементах. Перепишем уравнения (5.2.2) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -f \frac{m_0 + m_i}{r_{i0}^3} x_i + b_i x_i + \frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \\ \ddot{y}_i &= -f \frac{m_0 + m_i}{r_{i0}^3} y_i + b_i y_i + \frac{\partial V_i}{\partial y_i}, \\ \ddot{z}_i &= -f \frac{m_0 + m_i}{r_{i0}^3} z_i + b_i z_i + \frac{\partial V_i}{\partial z_i}, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

где

$$r_{i0} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \quad b_i = (m_0 + m_i) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m_0 + m_i} \right), \quad (5.2.7)$$

$$V_i = \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} U_{i0} + R_i - f \frac{m_0 + m_i}{r_{i0}} - \frac{1}{2} b_i r_i^2.$$

В уравнениях (5.2.6) перейдем к новым переменным

$$x_i = \gamma_i \rho_i \cos \delta_i \cos \lambda_i, \quad y_i = \gamma_i \rho_i \cos \delta_i \sin \lambda_i, \quad z_i = \gamma_i \rho_i \sin \delta_i, \quad (5.2.8)$$

$$\gamma_i = \frac{m_0(t_0) + m_i(t_0)}{m_0(t) + m_i(t)}. \quad (5.2.9)$$

Затем, принимая за обобщенные координаты и соответствующие им импульсы, величины

$$\rho_i, \delta_i, \lambda_i, \quad P_{\rho_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\rho}_i}, \quad P_{\delta_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\delta}_i}, \quad P_{\lambda_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}_i}, \quad (5.2.10)$$

$$\varphi_i, \psi_i, \theta_i, \quad P_{\varphi_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_i}, \quad P_{\psi_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}_i}, \quad P_{\theta_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_i}, \quad (5.2.11)$$

согласно общим правилам запишем уравнения поступательно-вращательного движения в канонической форме (в формулах (5.2.10) $i = 1, 2, 3, \dots, n$, а в выражениях (5.2.11) $i = 0, 1, 2, \dots, n$)

$$\dot{\rho}_i = \frac{\partial H}{\partial P_{\rho_i}}, \quad \dot{\delta}_i = \frac{\partial H}{\partial P_{\delta_i}}, \quad \dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial P_{\lambda_i}}, \quad (5.2.12)$$

$$\dot{P}_{\rho_i} = -\frac{\partial H}{\partial \rho_i}, \quad \dot{P}_{\delta_i} = -\frac{\partial H}{\partial \delta_i}, \quad \dot{P}_{\lambda_i} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i},$$

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial P_{\varphi_i}}, \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial P_{\theta_i}}, \quad \dot{\psi}_i = \frac{\partial H}{\partial P_{\psi_i}}, \quad (5.2.13)$$

$$\dot{P}_{\varphi_i} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i}, \quad \dot{P}_{\theta_i} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad \dot{P}_{\psi_i} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i},$$

где гамильтониан системы представим в виде

$$H = \sum \left\{ \frac{1}{2\gamma_i^2} \left[(P_{\rho_i} - \gamma_i \dot{\gamma}_i \rho_i)^2 + \frac{P_{\delta_i}^2}{\rho_i^2} + \frac{P_{\lambda_i}^2}{\rho_i^2 \cos^2 \delta_i} \right] - \right. \\ \left. - \left[f \frac{m_0 + m_i}{\gamma_i \rho_i} + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_i^2 \rho_i^2 + \frac{1}{2} \gamma_i \ddot{\gamma}_i \rho_i^2 \right] + \right. \quad (5.2.14)$$

$$\left. + \frac{1}{2A_i} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta_i} (P_{\psi_i} - P_{\varphi_i} \cos \theta_i)^2 + P_{\theta_i}^2 \right] + \frac{P_{\varphi_i}^2}{2C_i} \right\} + H_b,$$

$$-H_b = \sum \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{B_i} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \times \right. \\ \left. \times \left[(P_{\psi_i} - P_{\varphi_i} \cos \theta_i) \cos \varphi_i - P_{\theta_i} \sin \varphi_i \sin \theta_i \right]^2 + V_i \right\}. \quad (5.2.15)$$

При $H_b = 0$ упрощенная система интегрируется методом Гамильтона-Якоби (поскольку вращательное движение есть нестационарный аналог задачи Эйлера о вращательном движении по инерции [94], а поступательное движение – движение по квазиконическому сечению [70], которые интегрируемы). Опуская выкладки, приведем общий интеграл системы

$$\int_{\rho_{0i}}^{\rho_i} \frac{d\rho_i}{\sqrt{2\alpha_{1i} + 2f \frac{M_{0i}}{\rho_i^2} - \frac{\alpha_{2i}^2}{\rho_i^2}}} = \int_{t_0}^t \frac{dt}{\gamma_i^2} + \beta_{1i},$$

$$\alpha_{2i} \int_0^{\delta_i} \frac{d\delta_i}{\sqrt{\alpha_{2i}^2 - \alpha_{3i}^2 / \cos^2 \delta_i}} - \alpha_{2i} \int_{\rho_{0i}}^{\rho_i} \frac{d\rho_i}{\rho_i^2 \sqrt{2\alpha_{1i} + 2f \frac{M_{0i}}{\rho_i} - \frac{\alpha_{2i}^2}{\rho_i^2}}} = \beta_{2i},$$

$$\lambda_i - \alpha_{3i} \int_0^{\delta_i} \frac{d\delta_i}{\cos^2 \delta_i \sqrt{\alpha_{2i}^2 - \alpha_{3i}^2 / \cos^2 \delta_i}} = \beta_{3i}, \quad (5.2.16)$$

$$P_{\rho_i} = \gamma_i \dot{\rho}_i + \sqrt{2\alpha_{1i} + 2f \frac{M_{0i}}{\rho_i^2} - \frac{\alpha_{2i}^2}{\rho_i^2}}, \quad M_{0i} = m_{00} + m_{i0},$$

$$P_{\delta_i} = \sqrt{\alpha_{2i}^2 - \alpha_{3i}^2 / \cos^2 \delta_i}, \quad P_{\lambda_i} = \alpha_{3i},$$

$$A_{0i} \int_{\theta_{i0}}^{\theta_i} \frac{d\theta_i}{\sqrt{\Omega_i(\theta_i)}} = \int_{t_0}^t \frac{dt}{\nu_i \chi_i^2} + \beta'_{1i},$$

$$\psi_i - \int_{\theta_{i0}}^{\theta_i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\Omega_i(\theta_i)}} \left(\frac{\alpha'_{3i} - \alpha'_{2i} \cos \theta_i}{\sin^2 \theta_i} \right) \right\} d\theta_i = \beta'_{3i}, \quad (5.2.17)$$

$$\varphi_i + \int_{\theta_{0i}}^{\theta_i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\Omega_i(\theta_i)}} \left[-\frac{A_{0i}}{C_{0i}} \alpha'_{2i} + \frac{(\alpha'_{3i} - \alpha'_{2i} \cos \theta_i) \cos \theta_i}{\sin^2 \theta_i} \right] \right\} d\theta_i = \beta'_{2i},$$

$$P_{\psi_i} = \alpha'_{3i}, \quad P_{\varphi_i} = \alpha'_{2i}, \quad P_{\theta_i} = \sqrt{\Omega_i(\theta_i)},$$

$$\Omega_i(\theta_i) = 2A_{0i}\alpha'_{1i} + \frac{A_{0i}}{C_{0i}}\alpha'_{2i} - \frac{(\alpha'_{3i} - \alpha'_{2i}\cos\theta_i)^2}{\sin^2\theta_i},$$

где

$$\alpha_{ki}, \beta_{ki}, \quad k = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (5.2.18)$$

$$\alpha'_{ki}, \beta'_{ki}, \quad k = 1, 2, 3; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \quad (5.2.19)$$

аналоги элементов Якоби.

Теперь принимая упрощенное движение за невозмущенное, можно написать уравнения поступательно-вращательного движения рассматриваемой задачи в оскулирующих элементах (5.2.18)-(5.2.19)

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{ki} &= \frac{\partial(-H_b)}{\partial\beta_{ki}}, & \dot{\beta}_{ki} &= -\frac{\partial(-H_b)}{\partial\alpha_{ki}}, \\ \dot{\alpha}'_{ki} &= \frac{\partial(-H'_b)}{\partial\beta'_{ki}}, & \dot{\beta}'_{ki} &= -\frac{\partial(-H'_b)}{\partial\alpha'_{ki}}. \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

где

$$\begin{aligned} -H_b &= V_i, & -H'_b &= \sum \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{B_i} \right) \frac{1}{\sin^2\theta_i} \times \right. \\ & & & \left. \times \left[(P_{\psi i} - P_{\varphi i} \cos\theta_i) \cos\varphi_i - P_{\theta i} \sin\varphi_i \sin\theta_i \right]^2 + V_i \right\}. \end{aligned}$$

Далее введем аналоги элементов Делоне-Андруайе

$$L_i, G_i, H_i, l_i, g_i, h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.21)$$

$$L'_i, G'_i, H'_i, l'_i, g'_i, h'_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5.2.22)$$

посредством формул

$$\begin{aligned} -\alpha_{1i} &= \mu_{0i}^2/2L_i^2, & \alpha_{2i} &= G_i, & \alpha_{3i} &= H_i, \\ \beta_{1i} &= \frac{L_i^3}{\mu_{0i}^2}l_i - F_i(t), & \beta_{2i} &= g_i, & \beta_{3i} &= h_i, \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

$$G'_i = \left(2\alpha'_{1i}A_{i0} + \frac{C_{i0} - A_{i0}}{C_{i0}}\alpha'_{2i} \right)^{1/2},$$

$$H'_i = \alpha'_{3i}, \quad L'_i = \alpha'_{2i},$$

$$g'_i = \frac{1}{A_{i0}} \left(2\alpha'_{1i} A_{i0} + \frac{C_{i0} - A_{i0}}{C_{i0}} \alpha'_{2i} \right)^{1/2} \left[\Phi_i(t) + \beta'_{1i} \right], \quad (5.2.24)$$

$$h'_i = \beta'_{3i}, \quad l'_i = \frac{A_{i0} - C_{i0}}{A_{i0} C_{i0}} \alpha_{2i} \left[\Phi_i(t) + \beta'_{1i} \right] + \beta'_{2i},$$

где $\mu_{0i} = f M_{0i}$, $F_i(t)$ и $\Phi_i(t)$ — первообразные функции $\gamma_i^{-2}(t)$ и $\nu_i^{-1}(t)\chi_i^{-2}(t)$ соответственно.

Уравнения движения в оскулирующих элементах (5.2.21)-(5.2.22) имеют вид

$$\dot{L}_i = \frac{\partial F}{\partial l_i}, \quad \dot{G}_i = \frac{\partial F}{\partial g_i}, \quad \dot{H}_i = \frac{\partial F}{\partial h_i}, \quad (5.2.25)$$

$$\dot{l}_i = -\frac{\partial F}{\partial L_i}, \quad \dot{g}_i = -\frac{\partial F}{\partial G_i}, \quad \dot{h}_i = -\frac{\partial F}{\partial H_i},$$

$$\dot{L}'_i = \frac{\partial F'}{\partial l'_i}, \quad \dot{G}'_i = \frac{\partial F'}{\partial g'_i}, \quad \dot{H}'_i = \frac{\partial F'}{\partial h'_i}, \quad (5.2.26)$$

$$\dot{l}'_i = -\frac{\partial F'}{\partial L'_i}, \quad \dot{g}'_i = -\frac{\partial F'}{\partial G'_i}, \quad \dot{h}'_i = -\frac{\partial F'}{\partial H'_i},$$

где

$$F = \frac{1}{2} \sum \left\{ \frac{\mu_{0i}^2}{\gamma_i^2 L_i^2} - \frac{1}{\nu_i \chi_i^2} \left[\frac{G_i'^2}{A_{i0}} + \frac{A_{i0} - C_{i0}}{A_{i0} C_{i0}} L_i'^2 \right] \right\} - H_b, \quad (5.2.27)$$

$$F' = \frac{1}{2} \sum \left\{ \frac{\mu_{0i}^2}{\gamma_i^2 L_i'^2} - \frac{1}{\nu_i \chi_i^2} \left[\frac{G_i'^2}{A_{i0}} + \frac{A_{i0} - C_{i0}}{A_{i0} C_{i0}} L_i'^2 \right] \right\} - H'_b.$$

Отметим, что выражение возмущающей функции через оскулирующие элементы формально-математически такое же как и в соответствующей стационарной задаче [19].

В случае, когда тела трехосные, в качестве невозмущенного вращательного движения предпочтительно решение нестационарного

аналога задачи Эйлера о вращательном движении по инерции с трехосным эллипсоидом инерции.

Поступательное движение, так же как и прежде, будем характеризовать аналогами переменных Делоне (5.2.21). Для описания вращательного движения нестационарного трехосного тела вокруг собственного центра масс вместо аналогов элементов Андуайе (5.2.22) введем аналоги элементов Пуассона (или как часто их называют элементы «действия-угол» [19]). Рассмотрим уравнения (5.2.25)–(5.2.26) записанные в переменных (5.2.21)–(5.2.22), и в отличие от (5.2.27), представим характеристическую функцию F в следующем виде

$$F = F_0 + F_1, \quad (5.2.28)$$

где

$$F_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{0i}^2}{\gamma_i^2 L_i^2} + \sum_{j=0}^n F_{0j} \quad (5.2.29)$$

— гамильтониан нового невозмущенного движения нестационарных трехосных тел T_0, T_1, \dots, T_n , а

$$\begin{aligned} F_{0j} &= - \left(\frac{\sin^2 l'_j}{A_j} + \frac{\cos^2 l'_j}{B_j} \right) \frac{G_j'^2 - L_j'^2}{2} - \frac{L_j'^2}{2C_j} = \\ &= - \frac{1}{\nu_j \chi_j^2} \left[\left(\frac{\sin^2 l'_j}{A_{0j}} + \frac{\cos^2 l'_j}{B_{0j}} \right) \frac{G_j'^2 - L_j'^2}{2} + \frac{L_j'^2}{2C_{0j}} \right] \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

— гамильтониан задачи Эйлера о свободном вращательном движении трехосного нестационарного тела T_j вокруг собственного центра масс, удовлетворяющий условию (5.2.1) и записанный в аналогах переменных Андуайе (5.2.22), F_1 — возмущающая функция, определяемая формулой

$$F_1 = -V_i. \quad (5.2.31)$$

Уравнения невозмущенного вращательного движения с гамильтонианом (5.2.30) при условии (5.2.1) легко интегрируются, соответ-

ствующее уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} + \frac{1}{\nu_j \chi_j^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l'_j}{A_{0j}} + \frac{\cos^2 l'_j}{B_{0j}} \right) \left[\left(\frac{\partial S_j}{\partial g'_j} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_j}{\partial l'_j} \right)^2 \right] + \frac{1}{2C_{0j}} \left(\frac{\partial S_j}{\partial l'_j} \right)^2 \right\} = 0. \quad (5.2.32)$$

Положим

$$S_j = -\alpha_{1j} \Phi_j(t) + S_{1j}(l'_j, g'_j), \quad (5.2.33)$$

где $\Phi_j(t)$, как уже было отмечено, является первообразной функции $(\nu_j \chi_j^2)^{-1}$. Из соотношений (5.2.32)–(5.2.33) следует

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l'_j}{A_{0j}} + \frac{\cos^2 l'_j}{B_{0j}} \right) \left[\left(\frac{\partial S_{1j}}{\partial g'_j} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_{1j}}{\partial l'_j} \right)^2 \right] + \frac{1}{2C_{0j}} \left(\frac{\partial S_{1j}}{\partial l'_j} \right)^2 = \alpha_{1j}. \quad (5.2.34)$$

Решение уравнений (5.2.34) хорошо известно [135]

$$S_{1j} = \int \sqrt{\frac{N_j^2 - \varepsilon_j \alpha_{2j}^2 \cos 2l'_j}{1 - \varepsilon_j \cos 2l'_j}} dl'_j + \alpha_{2j} g'_j, \quad (5.2.35)$$

где введены обозначения

$$N_j^2 = \left[2\alpha_{1j} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_{0j}} + \frac{1}{B_{0j}} \right) \alpha_{2j}^2 \right] D_j, \quad (5.2.36)$$

$$\frac{1}{D_j} = \frac{1}{C_{0j}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_{0j}} + \frac{1}{B_{0j}} \right),$$

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B_{0j}} - \frac{1}{A_{0j}} \right) \cdot D_j. \quad (5.2.37)$$

На основе интегрируемой задачи с гамильтонианом (5.2.30) вводятся аналоги элементов Пуассона

$$L''_j, \quad G''_j, \quad H''_j, \quad l''_j, \quad g''_j, \quad h''_j, \quad (5.2.38)$$

которыми описывается вращательное движение тела T_j вокруг собственного центра масс.

Формулы взаимосвязи систем оскулирующих элементов (5.2.38) и (5.2.22) имеют вид [135]

$$\begin{aligned} L'_j &= L''_j + \sum_{m=1}^{\infty} L_j^{(m)} \cos 2ml''_j, & G'_j &= G''_j, & H'_j &= H''_j, \\ l'_j &= l''_j + \sum_{m=1}^{\infty} l_j^{(m)} \sin 2ml''_j, & g'_j &= g''_j + \sum_{m=1}^{\infty} g_j^{(m)} \sin 2ml''_j, & h'_j &= h''_j, \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

где коэффициенты $L_j^{(m)}$, $l_j^{(m)}$, $g_j^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots, \infty$) в свою очередь представляются некоторыми разложениями, представляющими явную зависимость от элементов L''_j , G''_j и параметра ε_j , согласно (5.2.37), характеризующего динамическое строение соответствующего нестационарного тела T_j .

Уравнения вращательного движения в переменных (5.2.38) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}''_j &= \frac{\partial F}{\partial l''_j}, & \dot{G}''_j &= \frac{\partial F}{\partial g''_j}, & \dot{H}''_j &= \frac{\partial F}{\partial h''_j}, \\ \dot{l}''_j &= -\frac{\partial F}{\partial L''_j}, & \dot{g}''_j &= -\frac{\partial F}{\partial G''_j}, & \dot{h}''_j &= -\frac{\partial F}{\partial H''_j}. \end{aligned} \quad (5.2.40)$$

Уравнения поступательного движения центра масс тел сохраняют свой вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_i &= \frac{\partial F}{\partial l_i}, & \dot{G}_i &= \frac{\partial F}{\partial g_i}, & \dot{H}_i &= \frac{\partial F}{\partial h_i}, \\ \dot{l}_i &= -\frac{\partial F}{\partial L_i}, & \dot{g}_i &= -\frac{\partial F}{\partial G_i}, & \dot{h}_i &= -\frac{\partial F}{\partial H_i}. \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

В системе уравнений (5.2.40)-(5.2.41) характеристическая функция F определяется согласно выражению (5.2.28).

В невозмущенном вращательном движении

$$\begin{aligned} L''_j &= L''_{0j}, & G''_j &= G''_{0j}, & H''_j &= H''_{0j}, \\ l''_j &= n_j^{(1)} \Phi_j(t) + l''_{0j}, & g''_j &= n_j^{(2)} \Phi_j(t) + g''_{0j}, & h''_j &= h''_{0j}. \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

Выражения для величин $n_j^{(1)}$, $n_j^{(2)}$ и коэффициентов $L_j^{(m)}$, $l_j^{(m)}$, $g_j^{(m)}$ такие же как и в соответствующей стационарной задаче и они приведены в работе [135].

Отметим, что при $A_j(t) = B_j(t)$ аналоги элементов Пуассона (5.2.38) переходят в систему переменных (5.2.22), являющихся аналогами элементов Андуайе.

5.3. Уравнение возмущенного движения в форме уравнений Лагранжа

Поступательное движение центра масс O_i тела T_i опишем в оскулирующих элементах аperiодического движения по квазиконическому сечению

$$a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, M_i, \quad (5.3.1)$$

где индекс $i = 1, 2, \dots, n$, как возмущенное движение в форме уравнений Лагранжа, согласно (1.4.1).

Выведем уравнения возмущенного вращательного движения в оскулирующих элементах в форме уравнений Лагранжа.

Введем невращающуюся систему координат $O_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ с началом в центре масс O_i тела T_i (орбитальная перигейная система координат). Система вместе с телом T_i движется поступательно по орбите. Будем считать, что ось $O_i\eta_i$ коллинеарна нормали \vec{n} к плоскости орбиты; ось $O_i\zeta_i$ коллинеарна направлению \vec{r}_{in} радиус-вектора орбиты в ее перигее (направления от которого считаются истинной аномалией ϑ_i квазиэллиптической орбиты); ось $O_i\xi_i$ коллинеарна направлению \vec{V}_n вектора скорости в перигее орбиты.

Вращательное движение каждого нестационарного тела T_i вокруг собственного барицентра O_i охарактеризуем аналогами переменных Белецкого–Чернуосько [14]

$$L_i^*, \rho_i^*, \sigma_i^*, \theta_i, \varphi_i, \psi_i, \quad (5.3.2)$$

где $L_i^* = \|\vec{L}_i^*\|$ – модуль вектора кинетического момента \vec{L}_i^* тела T_i относительно собственного центра масс O_i в системе координат

$O_i\xi_i\eta_i\zeta_i$. За невозмущенное вращательное движение примем свободное вращательное движение тела T_i постоянной формы переменных размеров и массы по инерции при условии (5.1.1) — аналога движения Эйлера–Пуансо твердого тела [68]. Покажем, что при этих допущениях форма уравнений Белецкого–Черноусько сохраняется [94].

В невозмущенном вращательном движении каждого тела T_i вектор кинетического момента \vec{L}_i^* постоянен по величине и направлению. Положение вектора \vec{L}_i^* в системе координат $O_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ будем определять двумя углами ρ_i^* и σ_i^* .

Построим еще одну систему координат $O_iL_{i1}^*L_{i2}^*L_i^*$, связанную с вектором \vec{L}_i^* . Ось $O_iL_i^*$ направим вдоль вектора \vec{L}_i^* . В плоскости $O_i\eta_iL_i^*$ проведем ось $O_iL_{i1}^*$, перпендикулярную к вектору \vec{L}_i^* и составляющую тупой угол с осью $O_i\eta_i$. Далее построим ось $O_iL_{i2}^*$, которая дополняет оси $O_iL_{i1}^*$ и $O_iL_i^*$ до правой системы координат.

Через $O_i\xi'_i\eta'_i\zeta'_i$ обозначим барицентрическую систему координат, оси которой направлены вдоль осей инерции тела и жестко связанную с телом.

Взаимное положение систем координат $O_i\xi'_i\eta'_i\zeta'_i$ (которая жестко связана с телом и направлена вдоль осей инерции) и $O_iL_{i1}^*L_{i2}^*L_i^*$ определяем углами Эйлера $\theta_i, \varphi_i, \psi_i$. В невозмущенном движении эти углы, меняясь со временем, описывают аналог движения Эйлера–Пуансо нестационарного тела T_i при условии (5.1.1). Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов (5.3.2) будут описывать возмущенное вращательное движение тела T_i .

Взаимное расположение трех введенных систем координат зададим двумя матрицами направляющих косинусов

$$\begin{array}{ccc}
 L_{i1}^* & L_{i2}^* & L_i^* \\
 \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\
 \xi'_i & \eta'_i & \zeta'_i
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{ccc}
 l_{1i} & l_{2i} & l_{3i} \\
 n_{1i} & n_{2i} & n_{3i} \\
 k_{1i} & k_{2i} & k_{3i}
 \end{array} \right) &
 \begin{array}{ccc}
 L_{i1}^* & L_{i2}^* & L_i^* \\
 \left(\begin{array}{ccc}
 \alpha_{11}^{(i)} & \alpha_{12}^{(i)} & \alpha_{13}^{(i)} \\
 \alpha_{21}^{(i)} & \alpha_{22}^{(i)} & \alpha_{23}^{(i)} \\
 \alpha_{31}^{(i)} & \alpha_{32}^{(i)} & \alpha_{33}^{(i)}
 \end{array} \right) &
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (5.3.3)$$

Элементы первой матрицы (5.3.3) имеют вид

$$\begin{aligned}
 l_{1i} &= \cos \rho_i^* \sin \sigma_i^*, & l_{2i} &= \cos \sigma_i^*, & l_{3i} &= \sin \rho_i^* \sin \sigma_i^* \\
 n_{1i} &= -\sin \rho_i^*, & n_{2i} &= 0, & n_{3i} &= \cos \rho_i^* \\
 k_{1i} &= \cos \rho_i^* \cos \sigma_i^*, & k_{2i} &= -\sin \sigma_i^*, & k_{3i} &= \sin \rho_i^* \cos \sigma_i^*.
 \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Выражения для элементов второй матрицы известны:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}^{(i)} &= \cos \psi_i \cos \varphi_i - \sin \psi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \\
 \alpha_{12}^{(i)} &= -\cos \psi_i \sin \varphi_i - \sin \psi_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \\
 \alpha_{13}^{(i)} &= \sin \theta_i \sin \psi_i \\
 \alpha_{21}^{(i)} &= \sin \psi_i \cos \varphi_i + \cos \psi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \\
 \alpha_{22}^{(i)} &= -\sin \psi_i \sin \varphi_i + \cos \psi_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \\
 \alpha_{23}^{(i)} &= -\sin \theta_i \cos \psi_i \\
 \alpha_{31}^{(i)} &= \sin \theta_i \sin \varphi_i \\
 \alpha_{32}^{(i)} &= \sin \theta_i \cos \varphi_i \\
 \alpha_{33}^{(i)} &= \cos \theta_i
 \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Для вывода возмущенного вращательного движения в оскулирующих элементах (5.3.2) воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента

$$\frac{d\vec{L}_i^*}{dt} = \vec{M}_i, \tag{5.3.6}$$

где \vec{M}_i – момент возмущающих сил. Проекции вектора \vec{L}_i^* на оси $\xi_i \eta_i \zeta_i$ равны

$$L_{i\xi_i}^* = L_i^* \sin \rho_i^* \sin \sigma_i^*, \quad L_{i\eta_i}^* = L_i^* \cos \rho_i^*, \quad L_{i\zeta_i}^* = L_i^* \sin \rho_i^* \cos \sigma_i^*, \tag{5.3.7}$$

Уравнение (5.3.6) в проекциях на оси $\xi_i \eta_i \zeta_i$ имеет вид

$$\frac{dL_{i\xi_i}^*}{dt} = M_{i\xi_i}, \quad \frac{dL_{i\eta_i}^*}{dt} = M_{i\eta_i}, \quad \frac{dL_{i\zeta_i}^*}{dt} = M_{i\zeta_i}. \tag{5.3.8}$$

Подставляя выражения (5.3.7) в уравнения (5.3.8) получим

$$\begin{aligned} \dot{L}_i^* \sin \rho_i^* \sin \sigma_i^* + L_i^* \dot{\rho}_i^* \cos \rho_i^* \sin \sigma_i^* + L_i^* \dot{\sigma}_i^* \sin \rho_i^* \cos \sigma_i^* &= M_{i\xi_i}, \\ \dot{L}_i^* \cos \rho_i^* - L_i^* \dot{\rho}_i^* \sin \rho_i^* &= M_{i\eta_i}, \\ \dot{L}_i^* \sin \rho_i^* \cos \sigma_i^* + L_i^* \dot{\rho}_i^* \cos \rho_i^* \cos \sigma_i^* - L_i^* \dot{\sigma}_i^* \sin \rho_i^* \sin \sigma_i^* &= M_{i\zeta_i}. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \dot{L}_i^* &= M_{i\xi_i} \sin \rho_i^* \sin \sigma_i^* + M_{i\eta_i} \cos \rho_i^* + M_{i\zeta_i} \sin \rho_i^* \cos \sigma_i^* = M_i, \\ L_i^* \dot{\rho}_i^* &= M_{i\xi_i} \sin \sigma_i^* \cos \rho_i^* - M_{i\eta_i} \sin \rho_i^* + M_{i\zeta_i} \cos \sigma_i^* \cos \rho_i^* = M_{i1}, \\ \dot{\sigma}_i^* L_i^* \sin \rho_i^* &= M_{i\xi_i} \cos \sigma_i^* - M_{i\zeta_i} \sin \sigma_i^* = M_{i2}, \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

где M_i , M_{i1} , M_{i2} проекции момента M_i соответственно на оси L_i^* , L_{i1}^* , L_{i2}^* в системе координат $O_i L_{i1}^* L_{i2}^* L_i^*$.

Далее учитывая, что p_i , q_i , r_i есть проекции абсолютной угловой скорости тела T_i на главные центральные оси инерции в системе координат $O_i \xi_i' \eta_i' \zeta_i'$, напишем

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{A_i p_i}{A_i} = \frac{L_{i\xi_i'}^*}{A_i} = \frac{L_i^* \alpha_{31}^{(i)}}{A_i}, \quad A_i = A_i(t), \\ q_i &= \frac{B_i q_i}{B_i} = \frac{L_{i\eta_i'}^*}{B_i} = \frac{L_i^* \alpha_{32}^{(i)}}{B_i}, \quad B_i = B_i(t), \\ r_i &= \frac{C_i r_i}{C_i} = \frac{L_{i\zeta_i'}^*}{C_i} = \frac{L_i^* \alpha_{33}^{(i)}}{C_i}, \quad C_i = C_i(t), \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

где $\alpha_{31}^{(i)}$, $\alpha_{32}^{(i)}$, $\alpha_{33}^{(i)}$ задаются согласно формулам (5.3.5).

С другой стороны, величины p_i , q_i , r_i как проекции абсолютной скорости на оси ξ_i' , η_i' , ζ_i' согласно введенных трех систем координат, взаимное расположение которых определяется матрицами

направляющих косинусов (5.3.3), запишем в виде

$$\begin{aligned}
 p_i &= \dot{\theta}_i \cos \varphi_i + \dot{\psi}_i \alpha_{31}^{(i)} + \rho_i^* \alpha_{21}^{(i)} + \dot{\sigma}_i^* \left[\alpha_{11}^{(i)} (-\sin \rho_i^*) + \alpha_{31}^{(i)} \cos \rho_i^* \right], \\
 q_i &= -\dot{\theta}_i \sin \varphi_i + \dot{\psi}_i \alpha_{32}^{(i)} + \rho_i^* \alpha_{22}^{(i)} + \dot{\sigma}_i^* \left[\alpha_{12}^{(i)} (-\sin \rho_i^*) + \alpha_{32}^{(i)} \cos \rho_i^* \right], \\
 r_i &= \dot{\varphi}_i + \dot{\psi}_i \alpha_{33}^{(i)} + \rho_i^* \alpha_{23}^{(i)} + \dot{\sigma}_i^* \left[\alpha_{13}^{(i)} (-\sin \rho_i^*) + \alpha_{33}^{(i)} \cos \rho_i^* \right].
 \end{aligned}
 \tag{5.3.12}$$

Приравнивая правые части уравнений (5.3.11) и (5.3.12), разрешая полученные соотношения относительно $\dot{\theta}_i$, $\dot{\psi}_i$, $\dot{\varphi}_i$, упрощая и учитывая уравнения (5.3.10), получим

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_i &= L_i^* \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{B_i} \right) \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \frac{1}{L_i^*} (M_{i2} \cos \psi_i - M_{i1} \sin \psi_i), \\
 \dot{\psi}_i &= L_i^* \left(\frac{\sin^2 \varphi_i}{A_i} + \frac{\cos^2 \varphi_i}{B_i} \right) - \frac{M_{i1}}{L_i^*} \cos \psi_i \operatorname{ctg} \theta_i - \\
 &\quad - \frac{M_{i2}}{L_i^*} (\operatorname{ctg} \rho_i + \sin \psi_i \operatorname{ctg} \theta_i),
 \end{aligned}
 \tag{5.3.13}$$

$$\dot{\varphi}_i = L_i^* \left(\frac{1}{C_i} - \frac{\sin^2 \varphi_i}{A_i} - \frac{\cos^2 \varphi_i}{B_i} \right) \cos \theta_i + \frac{M_{i1} \cos \psi_i + M_{i2} \sin \psi_i}{L_i^* \sin \theta_i}.$$

Системы уравнений (5.3.10) и (5.3.13) описывают возмущенное движение относительно шести переменных (5.3.2). Они являются аналогами уравнений Белецкого-Черноусько для рассматриваемой нестационарной задачи при условии (5.1.1).

Невозмущенное вращательное движение — аналог уравнения Уиттекера. Пусть в уравнениях (5.3.10), (5.3.13) возмущающий момент равен нулю. Тогда имеем

$$L_i^* = L_{i0}^* = \text{const}, \quad \rho_i^* = \rho_{i0}^* = \text{const}, \quad \sigma_i^* = \sigma_{i0}^* = \text{const}, \tag{5.3.14}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_i &= L_i^* \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{B_i} \right) \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i, \\ \dot{\psi}_i &= L_i^* \left(\frac{\sin^2 \varphi_i}{A_i} + \frac{\cos^2 \varphi_i}{B_i} \right), \\ \dot{\varphi}_i &= L_i^* \left(\frac{1}{C_i} - \frac{\sin^2 \varphi_i}{A_i} - \frac{\cos^2 \varphi_i}{B_i} \right) \cos \theta_i.\end{aligned}\tag{5.3.15}$$

Система уравнений (5.3.15), которые являются аналогами уравнений Уиттекера [14, 137] в рассматриваемой задаче, при условии (5.1.1), легко интегрируется и полученное решение описывает свободное движение нестационарного тела T_i по инерции.

Здесь отметим, что система уравнений (5.3.15) также интегрируется, кроме случая (5.1.1), при условии

$$A_i(t) = B_i(t) \neq C_i(t).\tag{5.3.16}$$

При условии (5.3.16) из (5.3.15) следует

$$\theta_i = \theta_{i0} = \text{const},\tag{5.3.17}$$

$$\dot{\psi}_i = L_{i0}^*/A_i(t),\tag{5.3.18}$$

$$\dot{\varphi}_i = L_{i0}^* \cos \theta_{i0} \frac{A_i(t) - C_i(t)}{A_i(t) \cdot C_i(t)}.\tag{5.3.19}$$

где $A_i(t)$ и $C_i(t)$ предполагаются заданными известными функциями времени.

Уравнения (5.3.10), (5.3.13) носят общий характер. В частном, но важном случае, когда моменты действующих сил обладают силовой функцией, эти уравнения могут быть преобразованы к более удобному виду.

Выразим компоненты $M_{i\xi_i}$, $M_{i\eta_i}$, $M_{i\zeta_i}$ вектора момента действующих сил через силовую функцию и её соответствующие производные. Введем матрицу направляющих косинусов

$$\begin{array}{ccc}
& \xi'_i & \eta'_i & \zeta'_i \\
\xi_i & \left(\alpha_1^{(i)} & \alpha_2^{(i)} & \alpha_3^{(i)} \right) \\
\eta_i & \left(\beta_1^{(i)} & \beta_2^{(i)} & \beta_3^{(i)} \right) \\
\zeta_i & \left(\gamma_1^{(i)} & \gamma_2^{(i)} & \gamma_3^{(i)} \right)
\end{array} \quad (5.3.20)$$

Элементы матрицы (5.3.20) можно получить из соотношений (5.3.3), (5.3.4) и (5.3.5). Например,

$$\begin{aligned}
\alpha_3^{(i)} &= l_{1i}\alpha_{13}^{(i)} + l_{2i}\alpha_{23}^{(i)} + l_{3i}\alpha_{33}^{(i)} = \sin \theta_i \sin \psi_i \cos \rho_i^* \sin \sigma_i^* - \\
&- \sin \theta_i \cos \psi_i \cos \sigma_i^* + \cos \theta_i \sin \rho_i^* \sin \sigma_i^*,
\end{aligned}$$

$$\beta_3^{(i)} = n_{1i}\alpha_{13}^{(i)} + n_{2i}\alpha_{23}^{(i)} + n_{3i}\alpha_{33}^{(i)} = -\sin \theta_i \sin \psi_i \sin \rho_i^* + \cos \theta_i \cos \rho_i^*.$$

Момент внешних сил дается формулой

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \times \text{grad}_{\vec{e}_k} U,$$

где \vec{e}_k ($k = 1, 2, 3$) — единичные векторы по направлениям соответствующих осей $\xi'_i \eta'_i z'_i$, U — силовая функция, или

$$\begin{aligned}
M_{\xi_i} &= \sum_{k=1}^3 \left[\beta_k^{(i)} \frac{\partial U}{\partial \gamma_k^{(i)}} - \gamma_k^{(i)} \frac{\partial U}{\partial \beta_k^{(i)}} \right], \\
M_{\eta_i} &= \sum_{k=1}^3 \left[\gamma_k^{(i)} \frac{\partial U}{\partial \alpha_k^{(i)}} - \alpha_k^{(i)} \frac{\partial U}{\partial \gamma_k^{(i)}} \right], \\
M_{\zeta_i} &= \sum_{k=1}^3 \left[\alpha_k^{(i)} \frac{\partial U}{\partial \beta_k^{(i)}} - \beta_k^{(i)} \frac{\partial U}{\partial \alpha_k^{(i)}} \right].
\end{aligned} \quad (5.3.21)$$

Используя соотношения (5.3.20), (5.3.21), преобразуя правые части уравнений (5.3.10) и (5.3.13) аналогично тому, как это выполнено в соответствующей стационарной задаче [14], получим

$$\dot{L}_i^* = \frac{\partial U}{\partial \psi_i}, \quad (5.3.22)$$

$$L_i^* \dot{\rho}_i^* \sin \rho_i^* = -\frac{\partial U}{\partial \sigma_i^*} + \cos \rho_i^* \frac{\partial U}{\partial \psi_i},$$

$$L_i^* \dot{\sigma}^* \sin \rho_i^* = \frac{\partial U}{\partial \rho_i^*},$$

$$L_i^* \dot{\theta}_i \sin \theta_i = L_i^{*2} \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{B_i} \right) \sin^2 \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i - \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} + \cos \theta_i \frac{\partial U}{\partial \psi_i},$$

$$L_i^* \dot{\varphi}_i \sin \theta_i = L_i^{*2} \left(\frac{1}{C_i} - \frac{\sin^2 \varphi_i}{A_i} - \frac{\cos^2 \varphi_i}{B_i} \right) \sin \theta_i \cos \theta_i + \frac{\partial U}{\partial \theta_i},$$

$$\dot{\psi}_i = L_i^* \left(\frac{\sin^2 \varphi_i}{A_i} + \frac{\cos^2 \varphi_i}{B_i} \right) - \frac{1}{L_i^*} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho_i^*} \operatorname{ctg} \rho_i^* + \frac{\partial U}{\partial \theta_i} \operatorname{ctg} \theta_i \right).$$

В случае осесимметричных тел в силу условий (5.3.16) система уравнений (5.3.22) упростится и примет вид

$$\dot{L}_i^* = \frac{\partial U}{\partial \psi_i},$$

$$L_i^* \dot{\rho}_i^* \sin \rho_i^* = -\frac{\partial U}{\partial \sigma_i^*} + \cos \rho_i^* \frac{\partial U}{\partial \psi_i},$$

$$L_i^* \dot{\sigma}^* \sin \rho_i^* = \frac{\partial U}{\partial \rho_i^*},$$

$$L_i^* \dot{\theta}_i \sin \theta_i = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} + \cos \theta_i \frac{\partial U}{\partial \psi_i},$$

$$L_i^* \dot{\varphi}_i \sin \theta_i = L_i^{*2} \left(\frac{1}{C_i} - \frac{1}{A_i} \right) \sin \theta_i \cos \theta_i + \frac{\partial U}{\partial \theta_i},$$

$$\dot{\psi}_i = \frac{L_i^*}{A_i} - \frac{1}{L_i^*} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho_i^*} \operatorname{ctg} \rho_i^* + \frac{\partial U}{\partial \theta_i} \operatorname{ctg} \theta_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(5.3.23)

Глава 6

Поступательно-вращательное движение двух нестационарных тел переменных размеров и массы

6.1. Строгие плоские частные решения в случае нестационарных двух тел: шар - трехосное тело

Рассмотрим частный случай поступательно вращательного движения двух нестационарных тел T_1 и T_2 .

Пусть тело T_1 с массой $m_1 = m_1(t)$ есть шар со сферическим распределением с переменной плотностью со сферическим распределением плотности, зависящей от времени, переменного радиуса $l_1 = l_1(t)$. Предположим, что тело T_2 с массой $m_2 = m_2(t)$ обладает произвольным динамическим строением и формой с характерным линейным размером $l_2 = l_2(t)$. Соотношения (5.1.1) для тела T_2 имеет вид

$$\frac{A_{2k}(t)}{A_{2k}(t_0)} = \frac{B_{2k}(t)}{B_{2k}(t_0)} = \frac{C_{2k}(t)}{C_{2k}(t_0)} = \nu_2 \chi_2^k, \quad (6.1.1)$$

где

$$\nu_2 = \nu_2(t) = \frac{m_2(t)}{m_2(t_0)}, \quad \chi_2 = \chi_2(t) = \frac{l_2(t)}{l_2(t_0)}. \quad (6.1.2)$$

Допустим, что массы тел изменяются в одинаковом темпе

$$\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)} = \frac{\dot{m}_2(t)}{m_2(t)} = \frac{\dot{\nu}(t)}{\nu(t)}, \quad (6.1.3)$$

абсолютная скорость отделяющейся (присоединяющейся) частиц равна нулю и она не создает дополнительного вращательного момента [76].

Тогда поступательно-вращательное движение тела T_2 относительно T_1 , в соответствующем образом выбранной системе координат, описывается следующими уравнениями

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_2) = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}_2) = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}_2) = \frac{\partial U}{\partial z_2} \quad (6.1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ap) - (B - C)qr &= \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi} - \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] + \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt}(Bq) - (C - A)rp &= \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi} - \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] - \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

$$\frac{d}{dt}(Cr) - (A - B)pq = \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

где

$$U = f m_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{R_2^{n+1}} = f m_1 \left[\frac{m_2}{R_2} + \frac{U_2}{R_2^3} + \dots \right], \quad (6.1.7)$$

$$R_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \quad m = m(t) = \frac{m_1(t_0)m_2(t_0)}{m_1(t_0) + m_2(t_0)} \nu(t), \quad (6.1.8)$$

$$A = A_{22}(t), \quad B = B_{22}(t), \quad C = C_{22}(t). \quad (6.1.9)$$

Интегралы площадей (5.1.11) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} m(y_2\dot{z}_2 - z_2\dot{y}_2) + Apa_{11} + Bqa_{12} + Cra_{13} &= c_1, \\ m(z_2\dot{x}_2 - x_2\dot{z}_2) + Apa_{21} + Bqa_{22} + Cra_{23} &= c_2, \\ m(x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2) + Apa_{31} + Bqa_{32} + Cra_{33} &= c_3. \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Канонические уравнения движения в квазицилиндрических координатах. Частные решения. Поступательное движение центра масс тела T_2 будем описывать квазицилиндрическими координатами ρ , v , z , которые введем посредством формул

$$x_2 = \gamma\rho \cos v, \quad y_2 = \gamma\rho \sin v, \quad z_2 = \gamma z, \quad (6.1.11)$$

где $\gamma = \gamma(t)$ – достаточно произвольная, по меньшей мере дважды дифференцируемая, функция времени, конкретный вид которой определим далее. Вращательное движение тела T_2 , как и раньше, будем характеризовать углами Эйлера.

Кинетическая энергия поступательно-вращательного движения тела T_2 имеет вид

$$K = \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (6.1.12)$$

Примем квазицилиндрические координаты и эйлеровы углы за обобщенные координаты и определим сопряженные с ними канонические импульсы по общепринятым правилам

$$P_\rho = m\gamma^2 \dot{\rho} + m\gamma\dot{\gamma}\rho, \quad P_z = m\gamma^2 \dot{z} + m\gamma\dot{\gamma}z, \quad P_v = m\gamma^2 \rho^2 \dot{v}, \quad (6.1.13)$$

$$P_\psi = Ap \sin \theta \sin \varphi + Bq \sin \theta \cos \varphi + Cr \cos \theta, \quad (6.1.14)$$

$$P_\theta = Ap \cos \varphi - Bq \sin \varphi, \quad P_\varphi = Cr.$$

Тогда гамильтониан задачи запишется следующим образом

$$H = \frac{1}{2m\gamma^2} \left[(P_\rho - m\gamma\dot{\gamma}\rho)^2 + (P_z - m\gamma\dot{\gamma}z)^2 + \frac{P_v^2}{\rho^2} \right] + \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - \left[\frac{1}{2} m\dot{\gamma}^2 (\rho^2 + z^2) + U \right], \quad (6.1.15)$$

где

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{A \sin \theta} [(P_\psi - P_\varphi \cos \theta) \sin \varphi + P_\theta \sin \theta \cos \varphi], \\
 q &= \frac{1}{B \sin \theta} [(P_\psi - P_\varphi \cos \theta) \cos \varphi - P_\theta \sin \theta \sin \varphi], \\
 r &= \frac{1}{C} P_\varphi,
 \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

$$U = f m_1 \left[\frac{m_2}{\gamma R} + \frac{U_2}{\gamma^3 R^3} + \dots \right], \tag{6.1.17}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} [(B + C - 2A)q_1^2 + (C + A - 2B)q_2^2 + (A + B - 2C)q_3^2], \tag{6.1.18}$$

$$q_1 = \frac{\rho}{R} [\cos \varphi \cos(\psi - \nu) - \cos \theta \sin \varphi \sin(\psi - \nu)] + \frac{z}{R} \sin \theta \sin \varphi,$$

$$q_2 = \frac{\rho}{R} [-\sin \varphi \cos(\psi - \nu) - \cos \theta \cos \varphi \sin(\psi - \nu)] + \frac{z}{R} \sin \theta \cos \varphi,$$

$$q_3 = \frac{\rho}{R} [\sin \theta \sin(\psi - \nu)] + \frac{z}{R} \cos \theta, \quad R = (\rho^2 + z^2)^{1/2}. \tag{6.1.19}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{6.1.20}$$

где

$$q_i = (\rho, \nu, z, \psi, \varphi, \theta), \quad p_i = (P_\rho, P_\nu, P_z, P_\psi, P_\varphi, P_\theta).$$

Последний интеграл из формул (6.1.10) преобразуется к виду

$$P_\nu + P_\psi = c_3. \tag{6.1.21}$$

Это означает, что гамильтониан H зависит от переменных ψ и ν только через их разность $(\psi - \nu)$. Опираясь на интеграл (6.1.21), следуя работе [138], понижаем порядок уравнения (6.1.20) на две

единицы. Выполнив каноническое преобразование

$$k = \psi - v, \quad P_k = P_\psi, \quad (6.1.22)$$

$$u = v, \quad P_u = P_\psi + P_v,$$

получим следующие уравнения

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}_i}, \quad (6.1.23)$$

где

$$\tilde{q}_i = (\rho, z, u, \theta, \varphi, k), \quad \tilde{p}_i = (P_\rho, P_z, P_u, P_\theta, P_\varphi, P_k),$$

$$H = \frac{1}{2m\gamma^2} \left[(P_\rho - m\gamma\dot{\rho})^2 + (P_z - m\gamma\dot{z})^2 + \frac{(P_u - P_k)^2}{\rho^2} \right] + \\ + \frac{1}{2} (A\rho^2 + Bq^2 + Cr^2) - \left[\frac{1}{2} m\dot{\gamma}^2 (\rho^2 + z^2) + U \right]. \quad (6.1.24)$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{R}_2 = \gamma\vec{R}$, в соответствии с формулами (6.1.19), (6.1.22), определяются следующими выражениями

$$q_1 = \frac{\rho}{R} [\cos \varphi \cos k - \cos \theta \sin \varphi \sin k] + \frac{z}{R} \sin \theta \sin \varphi, \\ q_2 = \frac{\rho}{R} [-\sin \varphi \cos k - \cos \theta \cos \varphi \sin k] + \frac{z}{R} \sin \theta \cos \varphi, \quad (6.1.25) \\ q_3 = \frac{\rho}{R} [\sin \theta \sin k] + \frac{z}{R} \cos \theta.$$

Так как переменная u - циклическая, то $P_u = c_3$, $c_3 = const$, а сама переменная находится после интегрирования первых десяти уравнений системы (6.1.23) квадратурой

$$u = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial H}{\partial P_u} \right) dt + u_0. \quad (6.1.26)$$

Ищем строгие частные решения первых десяти уравнений системы (6.1.23), ограничиваясь приближенным выражением силовой функций (6.1.17)

$$U = f m_1 \left[\frac{m_2}{\gamma R} + \frac{U_2}{\gamma^3 R^3} \right], \quad (6.1.27)$$

где U_2 определяется формулами (6.1.18), (6.1.25). Условия, определяющие искомые частные решения, имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial P_\rho} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\varphi} = \frac{\partial H}{\partial P_k} = 0, \quad (6.1.28)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial H}{\partial k} = 0, \quad (6.1.29)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}(m\gamma\dot{\rho}). \quad (6.1.30)$$

Решения первых пяти уравнений (6.1.28) при постоянных $\rho, r, \theta, \varphi, k$ легко находятся

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 = \text{const}, & P_\rho - m\gamma\dot{\rho} &= 0, \\ z &= z_0 = \text{const}, & P_z - m\gamma\dot{z} &= 0, \\ \varphi &= \varphi_0 = \text{const}, & P_\varphi &= n C \cos \theta, \end{aligned} \quad (6.1.31)$$

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \quad P_\theta = n(A - B) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$k = k_0 = \text{const}, \quad \dot{k} = \dot{\psi} - \dot{\nu} = 0,$$

$$P_k = n [(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta],$$

где

$$n = \frac{n_0}{\nu \cdot \gamma^2}, \quad n_0 = \frac{c_3 - P_k}{m_0 \rho_0^2}, \quad (6.1.32)$$

причем, $n = \dot{\nu} = \dot{\psi} = \dot{\nu} -$ угловая скорость орбитального движения и из формулы (6.1.32) определяется постоянная площадей c_3 .

Ограничимся рассмотрением таких решений уравнений (6.1.29), (6.1.30), которым соответствуют движения центра масс тела T_2 на плоскости

$$z = z_0 = 0. \quad (6.1.33)$$

С учетом соотношения (6.1.33), (6.1.31) находим, что уравнения (6.1.29) допускают шесть частных решений, в которых углы θ , φ k принимают значения согласно следующей таблице 6.1.

Таблица 6.1 - Плоские, частные решения: шар – трехосное тело

	I	II	III	IV	V	VI
θ_0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
φ_0	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$
k_0	0	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$

Из того, что импульсы P_θ , P_φ , P_k – постоянные величины следует

$$\nu\gamma^2 = \nu_2\chi_2^2 \quad (6.1.34)$$

или, учитывая соотношения (6.1.2), (6.1.3) можно написать

$$\gamma = \gamma(t) = \chi_2(t) = \frac{l_2(t)}{l_2(t_0)}. \quad (6.1.35)$$

Из условий (6.1.30) следует орбитальная угловая скорость в общем случае

$$n^2 = \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\nu}\dot{\gamma}}{\nu\gamma} + \frac{\nu}{\gamma^3} \left\{ \frac{f(m_{10} + m_{20})}{2m_{20}\rho_0^5} [2m_{20}\rho_0^2 + 3((B_0 + C_0 - 2A_0)a_{11}^2 + (C_0 + A_0 - 2B_0)a_{12}^2 + (A_0 + B_0 - 2C_0)a_{13}^2)] \right\}, \quad (6.1.36)$$

где

$$a_{11} = \cos \varphi_0 \cos k_0 - \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \sin k_0,$$

$$a_{12} = -\sin \varphi_0 \cos k_0 - \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \sin k_0, \quad (6.1.37)$$

$$a_{13} = \sin \theta_0 \sin k_0,$$

причем в соотношении (6.1.36) правая часть предполагается положительной.

Разберем пример такого решения в случае III, согласно таблице 6.1

$$z_0 = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad \theta_0 = \pi/2, \quad \varphi_0 = 0, \quad k_0 = 0. \quad (6.1.38)$$

Соответствующие канонические импульсы согласно (6.1.31)

$$P_z = 0, \quad P_\rho = m\gamma\dot{\gamma}\rho_0, \quad P_\theta = 0, \quad P_\varphi = 0, \quad P_k = n_0 B_0. \quad (6.1.39)$$

Из формул (6.1.36)–(6.1.38) следует выражение для орбитальной угловой скорости

$$n^2 = \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\nu}\dot{\gamma}}{\nu\gamma} + \frac{\nu}{\gamma^3} \left\{ \frac{f(m_{10} + m_{20})}{2m_{20}\rho_0^5} [2m_{20}\rho_0^2 + 3(B_0 + C_0 - 2A_0)] \right\}, \quad (6.1.40)$$

которое в рассматриваемом случае совпадает с выражением для угловой скорости вращения тела T_2 .

Найденные решения обобщают регулярные движения типа «спица», «стрела», «поплавок», существующие в соответствующей стационарной задаче [138] на рассмотренный нестационарный случай и превращаются в них, когда массы и размеры тел T_1 и T_2 становятся постоянными.

6.2. Строгие пространственные частные решения в случае нестационарных двух тел: шар – трехосное тело

Теперь рассмотрим задачу, изученную в п. 6.1. в случае, когда массы тел изменяются в различных темпах [78]

$$\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)} \neq \frac{\dot{m}_2(t)}{m_2(t)}. \quad (6.2.1)$$

Тогда уравнения относительного движения в соответствующем образом выбранной системе координат имеют вид

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_2) = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}_2) = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}_2) = \frac{\partial U}{\partial z_2} + \frac{\partial R}{\partial z_2}, \quad (6.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ap) - (B - C)qr &= \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi} - \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] + \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt}(Bq) - (C - A)rp &= \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi} - \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] - \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt}(Cr) - (A - B)pq &= \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

где

$$U = f m_1 \left[\frac{m_2}{R_2} + \frac{U_2}{R_2^3} + \dots \right], \quad (6.2.5)$$

$$R = a \frac{m^2}{m_1^2 m_2^2} (\dot{m}_2 m_1 - m_2 \dot{m}_1) z_2, \quad (6.2.6)$$

$$a = |\vec{a}|, \quad m_1 \dot{\vec{\rho}}_1 + m_2 \dot{\vec{\rho}}_2 = \vec{a} = \overrightarrow{\text{const}}, \quad (6.2.7)$$

$$m = \frac{m_1(t) \cdot m_2(t)}{m_1(t) + m_2(t)} = m(t), \quad \frac{m(t)}{m(t_0)} = \nu = \nu(t), \quad (6.2.8)$$

причем $\dot{\vec{\rho}}_1$, $\dot{\vec{\rho}}_2$ – векторы скорости барицентров тел в абсолютной системе координат, $A = A_{22}(t)$, $B = B_{22}(t)$, $C = C_{22}(t)$.

В общем случае рассматриваемая задача допускает один интеграл площадей

$$m(x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) + A p a_{31} + B q a_{32} + C r a_{33} = c_3. \quad (6.2.9)$$

Канонические уравнения движения в квазисферических координатах. Вращательное движение тела T_2 будем характеризовать углами Эйлера. Поступательное движение центра масс тела T_2 будем

описывать квазисферическими координатами ρ , λ , δ , которые введем формулами

$$x_2 = \gamma\rho \cos \delta \cos \lambda, \quad y_2 = \gamma\rho \cos \delta \sin \lambda, \quad z_2 = \gamma\rho \sin \delta, \quad (6.2.10)$$

где $\gamma = \gamma(t)$ – достаточно произвольная функция времени, конкретный вид которой определим позже. Кинетическая энергия поступательно-вращательного движения тела P_2 определяется выражением

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (6.2.11)$$

Примем квазисферические координаты и эйлеровы углы за обобщенные координаты и определим сопряженные с ними канонические импульсы по общепринятым правилам

$$\begin{aligned} P_\rho &= m\gamma\dot{\gamma}\rho + m\gamma^2 \cdot \dot{\rho}, & P_\delta &= m\gamma^2\rho^2 \cdot \dot{\delta}, & P_\lambda &= m\gamma^2\rho^2 \cos^2 \delta \cdot \dot{\lambda} \\ P_\psi &= Ap \sin \theta \sin \varphi + Bq \sin \theta \cos \varphi + Cr \cos \theta, \\ P_\theta &= Ap \cos \varphi - Bq \sin \varphi, & P_\varphi &= Cr. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Тогда гамильтониан задачи запишется следующим образом

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m\gamma^2} \left[(P_\rho - m\gamma\dot{\gamma}\rho)^2 + \frac{P_\delta^2}{\rho^2} + \frac{P_\lambda^2}{\rho^2 \cos^2 \delta} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - \left[\frac{1}{2}m\dot{\gamma}^2\rho^2 + U + R \right], \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{A \sin \theta} [(P_\psi - P_\varphi \cos \theta) \sin \varphi + P_\theta \sin \theta \cos \varphi], \\ q &= \frac{1}{B \sin \theta} [(P_\psi - P_\varphi \cos \theta) \cos \varphi - P_\theta \sin \theta \sin \varphi], \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

$$r = P_\varphi/C,$$

$$U = f m_1 \left[\frac{m_2}{\gamma\rho} + \frac{U_2}{\gamma^3\rho^3} + \dots \right], \quad (6.2.15)$$

$$R = a \frac{m^2}{m_1^2 m_2^2} (\dot{m}_2 m_1 - m_2 \dot{m}_1) \gamma \rho \sin \delta, \quad (6.2.16)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} [(B + C - 2A)q_1^2 + (C + A - 2B)q_2^2 + (A + B - 2C)q_3^2], \quad (6.2.17)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos \delta [\cos \varphi \cos(\psi - \lambda) - \cos \theta \sin \varphi \sin(\psi - \lambda)] + \sin \delta \sin \theta \sin \varphi, \\ q_2 &= \cos \delta [-\sin \varphi \cos(\psi - \lambda) - \cos \theta \cos \varphi \sin(\psi - \lambda)] + \sin \delta \sin \theta \cos \varphi, \\ q_3 &= \cos \delta [\sin \theta \sin(\psi - \lambda)] + \sin \delta \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (6.2.19)$$

где

$$q_i = (\rho, \lambda, \delta, \psi, \varphi, \theta), \quad p_i = (P_\rho, P_\lambda, P_\delta, P_\psi, P_\varphi, P_\theta).$$

Интеграл (6.2.9) преобразуется к виду

$$P_\lambda + P_\psi = c_3, \quad (6.2.20)$$

что означает зависимость гамильтониана H от переменных ψ и λ только через их разность $(\psi - \lambda)$. Опираясь на интеграл (6.2.20), следуя работе [138], понизим порядок уравнения (6.2.19) на две единицы. Выполняя канонические преобразования

$$\begin{aligned} k &= \psi - \lambda, & P_k &= P_\psi, \\ u &= \lambda, & P_u &= P_\psi + P_\lambda, \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

получим следующие уравнения

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}_i}, \quad (6.2.22)$$

где

$$\tilde{q}_i = (\rho, \delta, u, \theta, \varphi, k), \quad \tilde{p}_i = (P_\rho, P_\delta, P_u, P_\varphi, P_k),$$

$$\begin{aligned}
H = \frac{1}{2m\gamma^2} \left[(P_\rho - m\gamma\dot{\rho})^2 + \frac{P_\delta^2}{\rho^2} + \frac{(P_u - P_k)^2}{\rho^2 \cos^2 \delta} \right] + \\
+ (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - \left[\frac{1}{2}m\dot{\gamma}^2\rho^2 + U + R \right].
\end{aligned} \tag{6.2.23}$$

В этих выражениях в соответствии с (6.2.18), (6.2.21) направляющие косинусы вектора $\vec{R}_2 = \gamma\vec{\rho}$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
q_1 &= \cos \delta [\cos \varphi \cos k - \cos \theta \sin \varphi \sin k] + \sin \delta \sin \theta \sin \varphi, \\
q_2 &= \cos \delta [-\sin \varphi \cos k - \cos \theta \cos \varphi \sin k] + \sin \delta \sin \theta \cos \varphi, \\
q_3 &= \cos \delta [\sin \theta \sin k] + \sin \delta \cos \theta.
\end{aligned} \tag{6.2.24}$$

Так как переменная u - циклическая, то $P_u = c_3$, а сама переменная находится после интегрирования первых десяти уравнений системы (6.2.22) квадратурой

$$u = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial H}{\partial P_u} \right) dt + u_0. \tag{6.2.25}$$

Частные решения. Из первых десяти уравнений системы (6.2.22) получим следующие уравнения определяющие пространственные регулярные движения

$$\frac{\partial H}{\partial P_\rho} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\varphi} = \frac{\partial H}{\partial P_k} = 0, \tag{6.2.26}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial H}{\partial k} = 0, \tag{6.2.27}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}(m\gamma\dot{\rho}), \tag{6.2.28}$$

$$\dot{\delta} = \frac{\partial H}{\partial P_\delta}, \quad \dot{P}_\delta = -\frac{\partial H}{\partial \delta}. \tag{6.2.29}$$

Ограничимся следующим приближенным выражением силовой функции (6.2.15)

$$U = f m_1 \left[\frac{m_2}{\gamma \rho} + \frac{U_2}{\gamma^3 \rho^3} \right], \quad (6.2.30)$$

где U_2 определяется формулой (6.2.17).

Решение первых четырех уравнений (6.2.26) при постоянных $\rho, z, \theta_1, \varphi_1, k_1, \theta_2, \varphi_2, k_2$ легко находится

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \quad P_\rho - m\gamma\dot{\gamma}\rho = 0,$$

$$\varphi = \varphi_0 = \text{const}, \quad P_\varphi = nC \cos \theta,$$

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \quad P_\theta = n(A - B) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad (6.2.31)$$

$$k = k_0 = \text{const}, \quad P_k = n \left[(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi + C \cos^2 \theta \right],$$

где

$$n = \frac{n_0}{\nu \cdot \gamma^2}, \quad n_0 = \frac{c_3 - P_k}{m_0 \rho_0^2 \cos^2 \delta}, \quad (6.2.32)$$

причем $n = \dot{i} = \dot{\psi} = \dot{\lambda}$ – угловая скорость орбитального движения вокруг оси OZ_2 . Из формулы (6.2.32) определяется постоянная площадей c_3 .

Ограничимся рассмотрением стационарных решений системы уравнений (6.2.29)

$$\delta = \delta_0 = \text{const}, \quad P_\delta = 0, \quad (6.2.33)$$

и, соответственно, имеем условие

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \delta} \right)_0 = 0. \quad (6.2.34)$$

С учетом соотношений (6.2.31), (6.2.33) находим, что уравнение (6.2.27) допускает шесть частных решений, в которых углы θ, φ, k принимают следующие постоянные значения согласно таблице 6.2.

Таблица 6.2 – Пространственные, частные решения: шар – трехосное тело

	I	II	III	IV	V	VI
θ_0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
φ_0	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$
k_0	0	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$

Так как импульсы P_θ, P_φ, P_k – постоянные величины,

$$\nu_2 \chi_2^2 = \nu \gamma^2, \quad (6.2.35)$$

откуда следует

$$\chi_2^2 = \frac{\nu}{\nu_2} \gamma^2. \quad (6.2.36)$$

Из условий (6.2.28) следует выражение для орбитальной угловой скорости вокруг оси OZ_2 в общем случае

$$\cos^2 \delta_0 \cdot n^2 = \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\nu} \dot{\gamma}}{\nu \gamma} + \frac{f m_1}{m \gamma^2} \left(\frac{m_2}{\gamma \rho_0^3} + \frac{3U_{20}}{\gamma^3 \rho_0^5} \right) - \frac{D \sin \delta_0}{m \gamma^2 \rho_0}, \quad (6.2.37)$$

где

$$D = a \frac{m^2}{m_1^2 m_2^2} (\dot{m}_2 m_1 - \dot{m}_1 m_2) \cdot \gamma, \quad (6.2.38)$$

причем в соотношении (6.2.37) правая часть предполагается положительной.

Из условия (6.2.34) получим соотношение, определяющее $\gamma = \gamma(t)$ в общем случае

$$\frac{n_0^2}{\nu \gamma^2} \cdot \rho_0^2 \cos \delta_0 \sin \delta_0 + \frac{f m_1 \nu}{2 \gamma \rho_0^3} Q \sin \delta_0 \cos \delta_0 - D \rho_0 \cos \delta_0 = 0, \quad (6.2.39)$$

где $Q = Q_{j_0}$ определяется в соответствии с таблицей 6.2 следующими выражениями

$$\begin{aligned} Q_I &= 3(C_0 - A_0), & Q_{II} &= 2C_0 - A_0 - B_0, \\ Q_{III} &= 3(B_0 - A_0), & Q_{IV} &= 2A_0 - B_0 - C_0, \\ Q_V &= 3(B_0 - C_0), & Q_{VI} &= -2(C_0 + B_0 - 2A_0). \end{aligned} \quad (6.2.40)$$

Теперь рассмотрим другой частный случай — шар — осесимметричное тело — при полном выражении силовой функции [68]. Пусть центральное тело T_1 есть шар однородный или обладающий сферическим распределением плотности, а T_2 — осесимметричное тело и относительная скорость отделяющихся частиц равна нулю. В этом случае методом автономизации [130] можно найти строгие частные решения типа «спица», «стрела» и «поплавок», согласно терминологии Г.Н. Дубошина [3]. При этом центр масс тела T_2 движется вокруг центра масс тела T_1 в неизменной плоскости, полярные координаты которого ρ_2 и v_2 даются следующими выражениями. Решение типа «спица»

$$\rho_2 = \alpha\gamma, \quad a = \text{const},$$

$$v_2^2 = \frac{1}{\gamma^4} \left\{ \frac{f M_{02}}{\alpha^3} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\pm 1)^k A_k \left[\frac{l_2(t_0)}{\alpha} \right]^k - C_1 \right\}. \quad (6.2.41)$$

В решениях типа «стрела» и «поплавок» для тела T_2 предполагается симметрия относительно экватора

$$\rho_2 = a\gamma, \quad a = \text{const},$$

$$v_2^2 = \frac{1}{\gamma^4} \left\{ \frac{f M_{02}}{a^3} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) A_{2k} X_{2k}(0) \left[\frac{l_2(t_0)}{a} \right]^k - C_1 \right\}. \quad (6.2.42)$$

Причем

$$\gamma = \begin{cases} \beta + \alpha t, & C_1 = 0, \\ \sqrt{\beta - \alpha t}, & C_1 = \alpha^2 > 0, \\ \sqrt{1 + (\beta + \alpha t)^2}, & C_1 = -\alpha^2, \end{cases}$$

$$m_1 + m_2 = M_{02}/\gamma, \quad M_{02} = m_1(t_0) + m_2(t_0),$$

$$l_2 = l_2(t_0)\gamma, \quad l_1 = l_1(t),$$

где α, β — постоянные величины. Остальные обозначения в формулах (6.2.41), (6.2.42) общепринятые (см. напр. [7]).

6.3. Строгие плоские частные решения в случае нестационарных двух тел: трехосное тело – трехосное тело

Теперь рассмотрим поступательно-вращательное движение двух нестационарных взаимогравитирующих трехосных тел произвольного динамического строения, размеры и масса которых меняются со временем, а форма остаются постоянной [77].

Массы тел изменяются в одинаковом темпе. Предположим, также, что размеры тел изменяются в одинаковом темпе

$$\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)} = \frac{\dot{m}_2(t)}{m_2(t)} = \frac{\dot{\nu}(t)}{\nu(t)}, \quad \frac{\dot{l}_1(t)}{l_1(t)} = \frac{\dot{l}_2(t)}{l_2(t)} = \frac{\dot{\chi}(t)}{\chi(t)},$$

или

$$\frac{m_1(t)}{m_1(t_0)} = \frac{m_2(t)}{m_2(t_0)} = \nu = \nu(t), \quad (6.3.1)$$

$$\frac{l_1(t)}{l_1(t_0)} = \frac{l_2(t)}{l_2(t_0)} = \chi = \chi(t). \quad (6.3.2)$$

Тогда условия (6.1.1) имеют вид

$$\frac{A_i(t)}{A_i(t_0)} = \frac{B_i(t)}{B_i(t_0)} = \frac{C_i(t)}{C_i(t_0)} = \nu \chi^2, \quad i = 1, 2, \quad (6.3.3)$$

где t_0 — начальный момент времени.

Допустим, что абсолютная скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц равна нулю и они не создают дополнительный вращательный момент.

Тогда поступательное движение центра масс тела T_2 относительно центра масс тела T_1 и их вращательные движения вокруг собственных центров масс при соответствующим образом выбранных системах координат описываются следующими уравнениями

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_2) = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}_2) = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}_2) = \frac{\partial U}{\partial z_2}, \quad (6.3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_i p_i) - (B_i - C_i) q_i r_i &= \frac{\sin \varphi_i}{\sin \theta_i} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos \theta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right] + \cos \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \theta_i}, \\ \frac{d}{dt}(B_i q_i) - (C_i - A_i) r_i p_i &= \frac{\cos \varphi_i}{\sin \theta_i} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos \theta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right] - \sin \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \theta_i}, \\ \frac{d}{dt}(C_i r_i) - (A_i - B_i) p_i q_i &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

$$\begin{aligned} p_i &= \dot{\psi}_i \sin \varphi_i \sin \theta_i + \dot{\theta}_i \cos \varphi_i, \\ q_i &= \dot{\psi}_i \cos \varphi_i \sin \theta_i - \dot{\theta}_i \sin \varphi_i, \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

$$r_i = \dot{\psi}_i \cos \theta_i + \dot{\varphi}_i, \quad i = 1, 2,$$

где

$$U = f \frac{m_1 m_2}{R_2} + f m_1 \frac{U_{22}}{R_2^3} + f m_2 \frac{U_{12}}{R_2^3} + \dots, \quad (6.3.7)$$

$$m = m(t) = \frac{m_1(t_0) m_2(t_0)}{m_1(t_0) + m_2(t_0)} \nu(t). \quad (6.3.8)$$

В общем случае рассматриваемая задача допускает три интеграла площадей

$$\begin{aligned} m(y_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{y}_2) + \sum_{i=1}^2 \left(A_i p_i a_{11}^{(i)} + B_i q_i a_{12}^{(i)} + C_i r_i a_{13}^{(i)} \right) &= c_1, \\ m(z_2 \dot{x}_2 - x_2 \dot{z}_2) + \sum_{i=1}^2 \left(A_i p_i a_{21}^{(i)} + B_i q_i a_{22}^{(i)} + C_i r_i a_{23}^{(i)} \right) &= c_2, \\ m(x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) + \sum_{i=1}^2 \left(A_i p_i a_{31}^{(i)} + B_i q_i a_{32}^{(i)} + C_i r_i a_{33}^{(i)} \right) &= c_3. \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Канонические уравнения движения в квазицилиндрических координатах. Частные решения. Вращательное движение тела T_1 и T_2 , также, как и прежде, будем характеризовать углами Эйлера. Поступательное движение центра масс тела T_2 относительно T_1

будем описывать квазицилиндрическими координатами ρ , v , z , которые введем посредством формул

$$x_2 = \gamma\rho \cos v, \quad y_2 = \gamma\rho \sin v, \quad z_2 = \gamma z, \quad (6.3.10)$$

где $\gamma = \gamma(t)$ – достаточно произвольная функция времени, конкретный вид которой определим позже.

Кинетическая энергия поступательно-вращательного движения тела T_2 определяется выражением

$$K = \frac{m}{2}(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2). \quad (6.3.11)$$

Примем квазицилиндрические координаты и эйлеровы углы за обобщенные координаты и определим сопряженные с ними канонические импульсы по общепринятым правилам

$$\begin{aligned} P_\rho &= m\gamma\dot{\rho} + m\gamma^2 \cdot \dot{\rho}, & P_z &= m\gamma\dot{z} + m\gamma^2 \dot{z}, \\ P_v &= m\gamma^2 \rho^2 \dot{v}, \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

$$P_{\psi_i} = A_i p_i \sin \theta_i \sin \varphi_i + B_i q_i \sin \theta_i \cos \varphi_i + C_i r_i \cos \theta_i,$$

$$P_{\theta_i} = A_i p_i \cos \varphi_i - B_i q_i \sin \varphi_i, \quad (6.3.13)$$

$$P_{\varphi_i} = C_i r_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда гамильтониан задачи имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m\gamma^2} \left[(P_\rho - m\gamma\dot{\rho})^2 + (P_z - m\gamma\dot{z})^2 + \frac{P_v}{\rho^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2) - \left[\frac{1}{2} m\gamma^2 (\rho^2 + z^2) + U \right], \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

где

$$p_i = \frac{1}{A_i \sin \theta_i} [(P_{\psi_i} - P_{\varphi_i} \cos \varphi_i) \sin \varphi_i + P_{\theta_i} \sin \theta_i \cos \varphi_i],$$

$$q_i = \frac{1}{B_i \sin \theta_i} [(P_{\psi_i} - P_{\varphi_i} \cos \varphi_i) \cos \varphi_i + P_{\theta_i} \sin \theta_i \sin \varphi_i], \quad (6.3.15)$$

$$r_i = \frac{P_{\varphi_i}}{C_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$U = f \frac{m_1 m_2}{\gamma R} + f m_1 \frac{U_{22}}{\gamma^3 R^3} + f m_2 \frac{U_{12}}{\gamma^3 R^3} + \dots, \quad (6.3.16)$$

$$U_{i2} = \frac{1}{2} [(B_i + C_i - 2A_i)q_{i1}^2 + (C_i + A_i - 2B_i)q_{i2}^2 + (A_i + B_i - 2C_i)q_{i3}^2], \quad i = 1, 2, \quad (6.3.17)$$

$$q_{i1} = \frac{\rho}{R} [\cos \varphi_i \cos(\psi_i - v) - \cos \theta_i \sin \varphi_i \sin(\psi_i - v)] + \frac{z}{R} \sin \theta_i \sin \varphi_i,$$

$$q_{i2} = \frac{\rho}{R} [-\sin \varphi_i \cos(\psi_i - v) - \cos \theta_i \cos \varphi_i \sin(\psi_i - v)] + \frac{z}{R} \sin \theta_i \cos \varphi_i,$$

$$q_{i3} = \frac{\rho}{R} [\sin \theta_i \sin(\psi_i - v)] + \frac{z}{R} \cos \theta_i, \quad R = (\rho^2 + z^2)^{1/2}. \quad (6.3.18)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (6.3.19)$$

где

$$q_i = (\rho, v, z, \psi_1, \varphi_1, \theta_1, \psi_2, \varphi_2, \theta_2),$$

$$p_i = (P_\rho, P_v, P_z, P_{\psi_1}, P_{\varphi_1}, P_{\theta_1}, P_{\psi_2}, P_{\varphi_2}, P_{\theta_2}).$$

Последний интеграл из формулы (6.3.9) преобразуется к виду

$$P_v + P_{\psi_1} + P_{\psi_2} = c_3, \quad (6.3.20)$$

что означает зависимость гамильтониана H от переменных ψ_1, ψ_2, v только через их разность $(\psi_1 - v), (\psi_2 - v)$. Опираясь на интеграл (6.3.20), следуя работе [139], понизим порядок уравнений (6.3.19) на две единицы. Выполняя канонические преобразования

$$k_1 = \psi_1 - v, \quad k_2 = \psi_2 - v, \quad u = v, \quad (6.3.21)$$

$$P_{k_1} = P_{\psi_1}, \quad P_{k_2} = P_{\psi_2}, \quad P_u = P_{\psi_1} + P_{\psi_2} + P_v,$$

получим следующие уравнения

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}_i}, \quad (6.3.22)$$

$$H = \frac{1}{2m\gamma^2} \left[(P_\rho - m\gamma\dot{\gamma}\rho)^2 + (P_z - m\gamma\dot{\gamma}z)^2 + \frac{(P_u - P_{\psi_1} - P_{\psi_2})^2}{\rho^2} \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2) - \left[\frac{1}{2} m\gamma^2 (\rho^2 + z^2) + U \right], \quad (6.3.23)$$

где

$$\tilde{q}_i = (\rho, z, u, \theta_1, \varphi_1, k_1, \theta_2, \varphi_2, k_2), \\ \tilde{p}_i = (P_\rho, P_z, P_u, P_{\theta_1}, P_{\varphi_1}, P_{k_1}, P_{\theta_2}, P_{\varphi_2}, P_{k_2}).$$

В этих выражениях в соответствии с (6.3.18), (6.3.21) направляющие косинусы вектора $\vec{R}_2 = \gamma\vec{R}$ определяются формулами

$$q_{i1} = \frac{\rho}{R} [\cos \varphi_i \cos k_i - \cos \theta_i \sin \varphi_i \sin k_i] + \frac{z}{R} \sin \theta_i \sin \varphi_i, \\ q_{i2} = \frac{\rho}{R} [-\sin \varphi_i \cos k_i - \cos \theta_i \cos \varphi_i \sin k_i] + \frac{z}{R} \sin \theta_i \cos \varphi_i, \\ q_{i3} = \frac{\rho}{R} [\sin \theta_i \sin k_i] + \frac{z}{R} \cos \theta_i, \quad i = 1, 2. \quad (6.3.24)$$

Так как переменная u – циклическая, то $P_u = c_3$, а сама переменная находится после интегрирования первых шестнадцати уравнений системы (6.3.22) квадратурой

$$u = \int \frac{\partial H}{\partial P_u} dt + \text{const.} \quad (6.3.25)$$

Ищем строгие частные решения системы дифференциальных уравнений (6.3.22) аналогично тому, как это было выполнено в соответствующей стационарной задаче [139]. Ограничимся следующим приближенным выражением силовой функции

$$U = f \frac{m_1 m_2}{\gamma R} + f m_1 \frac{U_{22}}{\gamma^3 R^3} + f m_2 \frac{U_{12}}{\gamma^3 R^3}, \quad (6.3.26)$$

где U_{22} , U_{12} определяются согласно (6.3.17), (6.3.24). Условия, определяющие искомые частные решения, имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial P_\rho} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{\partial H}{\partial P_{\theta_i}} = \frac{\partial H}{\partial P_{\varphi_i}} = \frac{\partial H}{\partial P_{k_i}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (6.3.27)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial \theta_i} = \frac{\partial H}{\partial P_{\varphi_i}} = \frac{\partial H}{\partial k_0} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (6.3.28)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}(m\gamma\dot{\rho}). \quad (6.3.29)$$

Решения первых восьми уравнений (6.3.27) при постоянных $\rho, z, \theta_1, \varphi_1, k_1, \theta_2, \varphi_2, k_2$ легко находятся

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 = \text{const}, & P_\rho - m\gamma\dot{\rho} &= 0, \\ z &= z_0 = \text{const}, & P_z - m\gamma\dot{z} &= 0, \\ \varphi_i &= \varphi_{i0} = \text{const}, & P_{\varphi_i} &= nC_i \cos \theta_i, \\ \theta_i &= \theta_{i0} = \text{const}, & P_{\theta_i} &= n(A_i - B_i) \sin \theta_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i, \\ k_i &= k_{i0} = \text{const}, & \dot{k}_{i0} = \dot{\psi}_i - \dot{\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

$$P_{k_i} = n [(A_i \sin^2 \varphi_i + B_i \cos^2 \varphi_i) \sin^2 \theta_i + C_i \cos^2 \theta_i], \quad i = 1, 2.$$

где

$$n = \frac{n_0}{\nu \cdot \gamma^2}, \quad n_0 = \frac{c_3 - P_{k_1} - P_{k_2}}{m_0 \rho_0^2}, \quad (6.3.31)$$

причем $n = \dot{\nu} = \dot{\psi}$ – угловая скорость орбитального движения, и из формулы (6.3.31) определяется постоянная площадей c_3 . Ограничимся рассмотрением таких решений уравнений (6.3.28), (6.3.29), которым соответствуют движения центра масс тела T_2 на плоскости

$$z = z_0 = \text{const} = 0, \quad (6.3.32)$$

и, соответственно, имеем $P_z = 0$.

С учетом соотношений (6.3.32), (6.3.30) из условий (6.3.28), (6.3.29) следуют восемь уравнений. Два уравнения содержат все переменные, три уравнения — только переменные θ_1, φ_1, k_1 , а остальные три уравнения только переменные θ_2, φ_2, k_2 .

Каждая группа уравнений угловых переменных тела T_i допускает шесть частных решений типа «стрела», «спица» и «поплавок» независимо от решений других групп согласно следующей таблице 6.3.

Таблица 6.3 - Плоские, частные решения: трехосное тело – трехосное тело

	I	II	III	IV	V	VI	$i = 1, 2.$
θ_{i0}	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	
φ_{i0}	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$	
k_{i0}	0	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	

Итак, в совокупности будем иметь тридцать шесть частных решений.

Так как импульсы $P_{\theta_i}, P_{\varphi_i}, P_{k_i}$ – постоянные величины,

$$\gamma^2 = \chi^2. \quad (6.3.33)$$

Следовательно,

$$\gamma = \gamma(t) = \chi(t), \quad (6.3.34)$$

где $\chi(t)$ определяется согласно (6.3.2).

Из условий (6.3.29) определяется орбитальная угловая скорость в общем случае

$$n^2 = \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\nu}\dot{\gamma}}{\nu\gamma} + \frac{\nu}{\gamma^3} \left\{ \frac{fm_{10}m_{20}}{m_0\rho_0^3} + \frac{3fm_{10}}{2m_0\rho_0^5}N_2 + \frac{3fm_{20}}{2m_0\rho_0^5}N_1 \right\}, \quad (6.3.35)$$

где

$$N_i = (B_{i0} + C_{i0} - 2A_{i0}) \left(a_{11}^{(i)} \right)^2 + (C_{i0} + A_{i0} - 2B_{i0}) \left(a_{12}^{(i)} \right)^2 + (A_{i0} + B_{i0} - 2C_{i0}) \left(a_{13}^{(i)} \right)^2, \quad (6.3.36)$$

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(i)} &= \cos \varphi_{i0} \cos k_{i0} - \cos \theta_{i0} \sin \varphi_{i0} \sin k_{i0}, \\
a_{12}^{(i)} &= -\sin \varphi_{i0} \cos k_{i0} - \cos \theta_{i0} \cos \varphi_{i0} \sin k_{i0}, \\
a_{13}^{(i)} &= \sin \theta_{i0} \sin k_{i0}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{6.3.37}$$

В соотношении (6.3.35) правая часть предполагается положительной.

Существует тридцать шесть различных значений n согласно (6.3.35), которые зависят от особенностей вращательных движений тел T_1 и T_2 .

Разберем пример такого решения в случае I для тела T_1 , и в случае II для тела T_2 , согласно таблице 6.3

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0, & \rho &= \rho_0, \\
\theta_{10} &= 0, & \varphi_{10} &= 0, & k_{10} &= 0, \\
\theta_{20} &= 0, & \varphi_{20} &= \pi/2, & k_{20} &= 0.
\end{aligned} \tag{6.3.38}$$

Соответствующие канонические импульсы согласно (6.3.30) имеют вид

$$\begin{aligned}
P_z &= 0, & P_\rho &= m\gamma\dot{\gamma}\rho_0, \\
P_{\theta_1} &= 0, & P_{\varphi_1} &= n_0 C_{10}, & P_{k_1} &= n_0 C_{10}, \\
P_{\theta_2} &= 0, & P_{\varphi_2} &= n_0 C_{20}, & P_{k_2} &= n_0 C_{20}.
\end{aligned} \tag{6.3.39}$$

Из (6.3.35)–(6.3.37) следует выражения для орбитальной угловой скорости

$$\begin{aligned}
n_{I,II}^2 &= \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\nu}\dot{\gamma}}{\nu\gamma} + \frac{\nu}{\gamma^3} \left\{ \frac{f m_{10} m_{20}}{m_0 \rho_0^3} + \frac{3f m_{10}}{2m_0 \rho_0^5} \times \right. \\
&\quad \left. \times (C_{20} + A_{20} - 2B_{20}) + \frac{3f m_{20}}{2m_0 \rho_0^5} (B_{10} + C_{10} - 2A_{10}) \right\}.
\end{aligned} \tag{6.3.40}$$

6.4. Уравнения движения задачи о поступательно-вращательном движении двух нестационарных тел — шар и тело — в оскулирующих элементах

Пусть тело T_1 — «центральное» с массой $m_1 = m_1(t)$ есть шар со сферическим распределением плотности, зависящей от времени, переменным радиусом $l_1 = l_1(t)$. Предположим, что тело T_2 — «спутник», с массой $m_2 = m_2(t)$ обладает произвольным динамическим строением и формой с характерным линейным размером $l_2 = l_2(t)$. Пусть имеет место соотношение (6.1.1), которое перепишем в виде

$$\frac{A(t)}{A(t_0)} = \frac{B(t)}{B(t_0)} = \frac{C(t)}{C(t_0)} = \nu_2 \chi_2^2, \quad (6.4.1)$$

где

$$\nu_2 = \nu_2(t) = \frac{m_2(t)}{m_2(t_0)}, \quad \chi_2 = \chi_2(t) = \frac{l_2(t)}{l_2(t_0)}. \quad (6.4.2)$$

Допустим, что массы тел изменяются изотропно в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}. \quad (6.4.3)$$

Тогда относительное движение центра масс «спутника» вокруг центра шара — «центрального» тела описывается уравнениями (5.2.2), которые запишем в виде

$$m\ddot{x}_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad m\ddot{y}_2 = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \quad m\ddot{z}_2 = \frac{\partial U}{\partial z_2}, \quad (6.4.4)$$

где x_2, y_2, z_2 — координаты центра масс тела T_2 в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ с началом O_1 в центре шара и осями, параллельными осям абсолютной системы координат, и приведенная масса $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$.

Вращательное движение тела T_2 вокруг собственного центра масс в поле притяжения «центрального» тела T_1 — нестационарного шара опишем аналогами переменных Белецкого-Черноусько (5.3.2)

$$L^*, \rho^*, \sigma^*, \theta, \varphi, \psi. \quad (6.4.5)$$

Введем невращающуюся систему координат $O_2\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс O_2 тела T_2 , с осями, параллельными осям системы $O_1x_1y_1z_1$, – «перигейную» орбитальную систему координат [14].

Вращающуюся систему координат, оси которой направлены вдоль осей инерции тела T_2 и жестко связанную с ним, обозначим $O_2\xi'\eta'\zeta'$.

Рассмотрим еще одну систему координат $O_2L_1^*L_2^*L^*$, которая связана с вектором кинетического момента \vec{L}^* вращательного движения тела T_2 вокруг собственного центра масс. Так же как и в п.5.3 ось O_2L^* направим вдоль вектора \vec{L}^* . В плоскости $O_2\eta L^*$ проведем ось $O_2L_1^*$, перпендикулярную вектору \vec{L}^* и составляющую тупой угол с осью $O_2\eta$. Далее, построим ось $O_2L_2^*$, которая дополнит оси $O_2L_1^*$ и O_2L^* до правой системы координат.

Положение вектора кинетического момента \vec{L}^* вращательного движения тела T_2 (который в невозмущенном движении постоянен по величине и по направлению) в системе координат $O_2\xi\eta\zeta$ определяется двумя углами ρ^* и σ^* .

Взаимное расположение систем координат $O_2\xi'\eta'\zeta'$ и $O_2L_1^*L_2^*L^*$ определяется углами Эйлера θ , φ , ψ . В невозмущенном движении эти углы описывают аналог движения Эйлера–Пуансо нестационарного тела T_2 при условии (6.4.1).

Взаимное расположение трех введенных систем координат определяется двумя матрицами направляющих косинусов

$$\begin{array}{ccc} L_1^* & L_2^* & L^* \\ \xi & \eta & \zeta \end{array} \begin{array}{ccc} \xi' & \eta' & \zeta' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \xi & \left(\begin{array}{ccc} l_1 & l_2 & l_3 \end{array} \right) & L_1^* \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{array} \right) \\ \eta & \left(\begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & n_3 \end{array} \right) & L_2^* \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{array} \right) \\ \zeta & \left(\begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & k_3 \end{array} \right) & L^* \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \right) \end{array}, \quad (6.4.6)$$

элементы которых задаются выражениями аналогичными формулам (5.3.4), (5.3.5).

Взаимное расположение систем координат $O_2\xi\eta\zeta$ и $O_2\xi'\eta'\zeta'$ обозначим следующей матрицей направляющих косинусов

$$\begin{array}{ccc}
\xi' & \eta' & \zeta' \\
\xi & \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} & \\
\eta & & \\
\zeta & &
\end{array} \quad (6.4.7)$$

В формуле силовой функции U ограничимся следующим выражением

$$\begin{aligned}
U &= f \frac{m_1 m_2}{r_2} + f m_1 \frac{A + B + C - 3I_2^{(1,2)}}{2r_2^3} = \\
&= f \frac{m_1 m_2}{r_2} + \frac{f m_1}{2r_2^3} (B + C - 2A) + \\
&+ \frac{3f m_1}{2r_2^3} [(A - B)\gamma_2^2 + (A - C)\gamma_3^2], \quad (6.4.8)
\end{aligned}$$

где $r_2 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \sin \rho^* \sin \theta \cos \varphi \cos S + \frac{1}{2} \sin \varphi (1 - \cos \rho^*) \cos(\psi + S) - \\
&- \frac{1}{2} \sin \varphi (1 + \cos \rho^*) \cos(\psi - S) + \frac{1}{2} \cos \varphi \cos \theta (1 - \cos \rho^*) \times \\
&\times \sin(\psi + S) - \frac{1}{2} \cos \varphi \cos \theta (1 + \cos \rho^*) \sin(\psi - S), \\
\gamma_3 &= \sin \rho^* \cos \theta \cos S - \frac{1}{2} \sin \theta (1 - \cos \rho^*) \cos(\psi + S) + \\
&+ \frac{1}{2} \sin \theta (1 + \cos \rho^*) \sin(\psi - S), \quad S = v - \sigma^*,
\end{aligned}$$

С учетом выражения (6.4.8) уравнения поступательного движения центра масс тела T_2 (6.4.4) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_2 &= -f (m_1 + m_2) \frac{x_2}{r_2^3} + (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m_1 + m_2} \right) x_2 + \frac{\partial R}{\partial x_2}, \\
\ddot{y}_2 &= -f (m_1 + m_2) \frac{y_2}{r_2^3} + (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m_1 + m_2} \right) y_2 + \frac{\partial R}{\partial y_2}, \\
\ddot{z}_2 &= -f (m_1 + m_2) \frac{z_2}{r_2^3} + (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m_1 + m_2} \right) z_2 + \frac{\partial R}{\partial z_2}, \quad (6.4.9)
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$R = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m_1 + m_2} \right) r_2^2 + \frac{U_2}{m}, \quad (6.4.10)$$

$$U_2 = \frac{f m_1}{2r_2^3} (B + C - 2A) + \frac{3f m_1}{2r_2^3} [(A - B)\gamma_2^2 + (A - C)\gamma_3^2]. \quad (6.4.11)$$

При $R = 0$ система уравнений (6.4.9) определяет невозмущенное апериодическое движение по квазиконическому сечению, которое характеризуется системой элементов (глава 1, п.2)

$$a, \quad e, \quad \omega, \quad \Omega, \quad i, \quad M. \quad (6.4.12)$$

Рассматриваемую задачу опишем в системах переменных (6.4.5) и (6.4.12) используя уравнения возмущенного движения (5.3.22) и (1.4.1), которые перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial M}, \\ \dot{e} &= \frac{1 - e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \dot{\Omega} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \dot{M} &= \left(\frac{m_1 + m_2}{(m_{10} + m_{20})\gamma^3} \right)^{1/2} \cdot n - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

где $m_{10} = m_1(t_0)$, $m_{20} = m_2(t_0)$, t_0 – начальный момент времени,

$$\gamma = \gamma(t) = \frac{m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_1(t) + m_2(t)}, \quad (6.4.14)$$

возмущающая функция определяемая соотношением (6.4.10). Уравнения возмущенного вращательного движения напомним следующим образом

$$\dot{L}^* = \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad (6.4.15)$$

$$\dot{\rho}^* = \frac{1}{L^* \sin \rho^*} \left(-\frac{\partial W}{\partial \sigma^*} + \cos \rho^* \frac{\partial W}{\partial \psi} \right),$$

$$\dot{\sigma}^* = \frac{1}{L^* \sin \rho^*} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho^*} \right),$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{L^* \sin \theta} \left[-\frac{\partial W}{\partial \varphi} + \cos \theta \frac{\partial W}{\partial \psi} \right] + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) L^* \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{L^* \sin \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) L^* \cos \theta,$$

$$\dot{\psi} = L^* \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{1}{L^*} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho^*} \operatorname{ctg} \rho^* + \frac{\partial W}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right),$$

где

$$W = \frac{3f m_1}{2r_2^3} [(A - B)\gamma_2^2 + (A - C)\gamma_3^2]. \quad (6.4.16)$$

Выражение возмущающей функции через оскулирующие элементы. Используя формулы невозмущенного аperiodического движения по квазиконическому сечению возмущающую функцию (6.4.10) напомним в виде

$$R = R_1 + (R_2 + W) \frac{1}{m}, \quad (6.4.17)$$

$$R_1 = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m_1 + m_2} \right) \cdot a^2 \gamma^2 \left(\frac{\rho}{a} \right)^2, \quad (6.4.18)$$

$$R_2 = \frac{f m_1}{2\gamma^3 a^3} (B + C - 2A) \left(\frac{a}{\rho} \right)^3, \quad (6.4.19)$$

$$W = \frac{3f m_1}{2\gamma^3 a^3} \left(\frac{a}{\rho} \right)^3 [(A - B)\gamma_2^2 + (A - C)\gamma_3^2], \quad (6.4.20)$$

где

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad e < 1. \quad (6.4.21)$$

Текущий радиус-вектор квазиэллиптической орбиты

$$\vec{r}_2 = \gamma \vec{\rho} = \gamma \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \vec{e}_r \quad (6.4.22)$$

на орбитальной плоскости образует угол v (истинная аномалия) с осью $O_2\eta$ невращающейся «перигейной» системы координат. Так что компоненты единичного вектора \vec{e}_r по осям $\xi\eta\zeta$ даются следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} & \xi & \eta & \zeta & \\ \vec{e}_r & \sin v & 0 & \cos v. & \end{array} \quad (6.4.23)$$

Выражения величин $(\rho/a)^2$, $(a/\rho)^3$, γ_2^2 и γ_3^2 через элементы (6.4.12) и (6.4.5) в силу выбранных промежуточных движений формально-математически такие же как и в соответствующих стационарных задачах (см. напр. [7] и [14]), где они хорошо изучены.

Поэтому, используя известные формулы соответствующих стационарных задач можем написать выражения возмущающей функции (6.4.17) через элементы (6.4.12) и (6.4.5). Напишем следующие известные соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \left(-2e + \frac{e^3}{4}\right) \cos M - \frac{e^2}{2} \cos 2M - \\ - \frac{e^3}{4} \cos 3M + \dots, \end{aligned} \quad (6.4.24)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \dots + \\ + \left(3e + \frac{27}{8}e^3 + \frac{141}{32}e^5 + \dots\right) \cos M + \\ + \left(\frac{9}{2}e^2 + \frac{7}{2}e^4 + \frac{141}{32}e^6 + \dots\right) \cos 2M + \\ + \left(\frac{53}{8}e^3 + \frac{393}{128}e^5 + \dots\right) \cos 3M + \dots, \end{aligned} \quad (6.4.25)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 = & \sin \rho^* \sin \theta \cos \varphi \cos S + \frac{1}{2} \sin \varphi (1 - \cos \rho^*) \cos(\psi + S) - \\
- & \frac{1}{2} \sin \varphi (1 + \cos \rho^*) \cos(\psi - S) + \frac{1}{2} \cos \varphi \cos \theta (1 - \cos \rho^*) \sin(\psi + S) - \\
- & \frac{1}{2} \cos \varphi \cos \theta (1 + \cos \rho^*) \sin(\psi - S), \quad (6.4.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3 = & \sin \rho^* \cos \theta \cos S - \frac{1}{2} \sin \theta (1 - \cos \rho^*) \cos(\psi + S) + \\
+ & \frac{1}{2} \sin \theta (1 + \cos \rho^*) \sin(\psi - S), \quad (6.4.27)
\end{aligned}$$

где

$$S = v - \sigma^*. \quad (6.4.28)$$

При вычислении вековых возмущений полезно учесть соотношения

$$\frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{dM}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (6.4.29)$$

Взаимосвязь между величинами v (истинная аномалия) и M (средняя аномалия) можно учесть по разному в зависимости от конкретных вычислений возмущений.

6.5. Вековые возмущения в задаче

о поступательно-вращательном движении двух

нестационарных тел: шар — осесимметричное тело

Пусть в задаче, рассматриваемой в предыдущем пункте,

$$A(t) = B(t) \neq C(t), \quad (6.5.1)$$

т.е. тело T_2 — осесимметричное. Тогда уравнения движения в оскулирующих элементах (6.4.13), (6.4.10) и (6.4.15), (6.4.16) существенно упрощаются, поэтому вековые возмущения легко вычисляются.

Предположим, что между поступательным и вращательным движениями отсутствует резонанс. Тогда полная вековая часть возмущающей функции (6.4.17) по методу Гаусса определяется формулой

$$\tilde{R} \approx \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\psi dM = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{R} dM, \quad (6.5.2)$$

где обозначено

$$\tilde{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\psi. \quad (6.5.3)$$

В случае (6.5.1) возмущающую функцию (6.4.17) запишем в виде

$$R = R_1 + (R_2 + W) \frac{1}{m}, \quad (6.5.4)$$

$$R_1 = -\frac{a^2 \gamma^2}{2} (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m_1 + m_2} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \right\}, \quad (6.5.5)$$

$$R_2 = \frac{f m_1}{2\gamma^3 a^3} (C - A) \cdot \left\{ \left(\frac{a}{\rho} \right)^3 \right\}, \quad (6.5.6)$$

$$W = \frac{3f m_1}{2\gamma^3 a^3} (A - C) \cdot \left\{ \left(\frac{a}{\rho} \right)^3 \gamma_3^2 \right\}. \quad (6.5.7)$$

Выпишем выражение γ_3^2 согласно (6.4.27)

$$\begin{aligned} \gamma_3^2 &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \rho^* (3 \cos^2 \theta - 1) + \\ &+ \frac{1}{4} \sin^2 \rho^* (3 \cos^2 \theta - 1) \cos 2(v - \sigma^*) + \\ &+ \sin \rho^* \cos \rho^* \sin \theta \cos \theta \sin \psi + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \sin^2 \rho^* \cos 2\psi + \\ &+ \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \sin \rho^* (1 + \cos \rho^*) \sin[\psi - 2(v - \sigma^*)] - \\ &- \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \sin \rho^* (1 - \cos \rho^*) \sin[\psi + 2(v - \sigma^*)] - \\ &- \frac{1}{8} \sin^2 \theta (1 + \cos \rho^*)^2 \cos[2(\psi - v + \sigma^*)] - \\ &- \frac{1}{8} \sin^2 \theta (1 - \cos \rho^*)^2 \cos[2(\psi + v - \sigma^*)]. \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Отсюда сразу видно, что в случае (6.5.1) возмущающая функция не зависит от угла φ .

Поэтому первое и четвертое уравнения системы (6.4.15) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}^* &= \frac{\partial W}{\partial \psi}, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{L^* \sin \theta} \left[\cos \theta \frac{\partial W}{\partial \psi} \right]. \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Откуда следует интеграл

$$L^* \cos \theta = L_0^* \cos \theta_0 = \text{const.} \quad (6.5.10)$$

Вычисления вековой части возмущающей функции сводится к вычислению соответствующих интегралов от величин, заключенных в фигурные скобки в формулах (6.5.5) – (6.5.7). С учетом известного соотношения (6.4.29) они легко вычисляются.

Соответственно получим

$$\tilde{R} = \tilde{R}_1 + \left(\tilde{R}_2 + \tilde{W} \right) \frac{1}{m}, \quad (6.5.11)$$

$$\tilde{R}_1 = R_1, \quad \tilde{R}_2 = R_2, \quad (6.5.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= \frac{m_1(t)[A - C]}{[m_1(t_0) + m_2(t_0)] \cdot \gamma^3} \cdot \frac{3n^2}{8(1 - e^2)^3} (1 + e \cos v)^3 \left\{ 2 \sin^2 \theta + \right. \\ &\left. + (3 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \rho^* [1 + 2 \cos 2(v - \sigma^*)] \right\}, \end{aligned} \quad (6.5.13)$$

где обозначено

$$n^2 = f \frac{m_1(t_0) + m_2(t_0)}{a^3}. \quad (6.5.14)$$

Из формулы (6.5.13) и из первого уравнения системы (6.4.15) следует

$$L^* = L_0^* = \text{const.} \quad (6.5.15)$$

С учетом последнего уравнения из интеграла (6.5.10) получим

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \quad (6.5.16)$$

что также следует из четвертого уравнения системы (6.4.15) и из формулы (6.5.13).

Таким образом, систему (6.4.15) можно написать в виде [97]

$$\begin{aligned}
 \dot{L}^* &= 0, \\
 \dot{\rho}^* &= -\frac{1}{L^* \sin \rho^*} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \sigma^*}, \\
 \dot{\sigma}^* &= \frac{1}{L^* \sin \rho^*} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \rho^*}, \\
 \dot{\theta} &= 0, \\
 \dot{\varphi} &= \frac{1}{L^* \sin \theta} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L^* \cos \theta, \\
 \dot{\psi} &= \frac{L^*}{A} - \frac{1}{L^*} \left(\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \rho^*} \operatorname{ctg} \rho^* + \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right),
 \end{aligned} \tag{6.5.17}$$

решение которой сведется к решению системы из двух уравнений

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}^* &= -\frac{1}{L^* \sin \rho^*} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \sigma^*}, \\
 \dot{\sigma}^* &= \frac{1}{L^* \sin \rho^*} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \rho^*},
 \end{aligned} \tag{6.5.18}$$

где

$$\begin{aligned}
 \widetilde{W} &= \frac{m_1(t)(A - C)}{[m_1(t_0) + m_2(t_0)] \cdot \gamma^3} \frac{3n^2}{8(1 - e^2)^3} (1 + e \cos v)^3 \{ 2 \sin^2 \theta_0 + \\
 &+ (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \sin^2 \rho^* [1 + 2 \cos 2(v - \sigma^*)] \}.
 \end{aligned} \tag{6.5.19}$$

Далее из формул (6.5.2) и (6.5.11) получим

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}_1 + \left(\widetilde{R}_2 + \widetilde{W} \right) \frac{1}{m}, \tag{6.5.20}$$

$$\widetilde{R}_1 = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m_1 + m_2} \right) a^2 \gamma^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right), \tag{6.5.21}$$

$$\widetilde{R}_2 = \frac{f m_1}{2\gamma^3 a^3} \frac{(C - A)}{(1 - e^2)^{3/2}}, \tag{6.5.22}$$

$$\tilde{W} = \frac{3f m_1(A - C)}{8\gamma^3 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} [2 \sin^2 \theta_0 + (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \sin^2 \rho^*]. \quad (6.5.23)$$

Подставляя выражение (6.5.20) в систему уравнений (6.4.13) имеем

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0, \\ \dot{e} &= 0, \\ \frac{di}{dt} &= 0, \\ \dot{\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (6.5.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n a^2 e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e}, \\ \dot{M} &= \left(\frac{m_1 + m_2}{(m_{10} + m_{20}) \gamma^3} \right)^{1/2} \cdot n - \frac{2}{n a} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{n a^2 e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e}. \end{aligned}$$

Соответственно формулы (6.5.20) и (6.4.15) дают

$$\begin{aligned} \dot{L}^* &= 0, \\ \dot{\rho}^* &= 0, \\ \dot{\sigma}^* &= \frac{1}{L^* \sin \rho^*} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \rho^*}, \\ \dot{\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (6.5.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{1}{L^* \sin \theta_0} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \theta_0} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L^* \cos \theta_0, \\ \dot{\psi} &= \frac{L^*}{A} - \frac{1}{L^*} \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \rho^*} \operatorname{ctg} \rho^* + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \theta_0} \operatorname{ctg} \theta_0 \right). \end{aligned}$$

Системы уравнений (6.5.24) и (6.5.25) полностью определяют вековые возмущения в рассматриваемой задаче. Таким образом, имеем

$$a_{\text{век}} = a_0 = \text{const}, \quad e_{\text{век}} = e_0 = \text{const}. \quad (6.5.26)$$

$$i_{\text{век}} = i_0 = \text{const}, \quad \Omega_{\text{век}} = \Omega_0 = \text{const},$$

$$L_{\text{век}}^* = L_0^* = \text{const}, \quad \rho_{\text{век}}^* = \rho_0^* = \text{const}, \quad \theta_{\text{век}} = \theta_0 = \text{const}, \quad (6.5.27)$$

$$\tilde{R}_{\text{век}} = \tilde{R}_{\text{век}}(t, a_0, e_0, \theta_0, \rho_0^*) = \tilde{R}(t), \quad (6.5.28)$$

$$\tilde{W}_{\text{век}} = \tilde{W}_{\text{век}}(t, a_0, e_0, \theta_0, \rho_0^*) = \tilde{W}(t). \quad (6.5.29)$$

Из системы уравнений (6.5.24) и (6.5.25) с учетом соотношений (6.5.26)-(6.5.29) также следуют

$$\dot{\omega}_{\text{век}} = -\frac{3\sqrt{1-e_0^2}}{2n_0}\gamma\ddot{\gamma} + \frac{3f}{8n_0(1-e_0^2)a_0^5} \times \quad (6.5.30)$$

$$\times \left\{ 4 + 3 \left[2 \sin^2 \theta_0 + (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \sin^2 \rho_0^* \right] \right\} \frac{(C-A)m_1}{\gamma^3 m},$$

$$\dot{M}_{\text{век}} = \frac{n_0}{\gamma^2} + \frac{7-3e_0^2}{2n_0}\gamma\ddot{\gamma} + \frac{f}{2n_0a_0^5(1-e_0^2)^{3/2}} \times \quad (6.5.31)$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{11}{4} \left[2 \sin^2 \theta_0 + (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \sin^2 \rho_0^* \right] \right\} \frac{(C-A)m_1}{\gamma^3 m},$$

$$\dot{\sigma}_{\text{век}}^* = \frac{3f(3 \cos^2 \theta_0 - 1) \cos \rho_0^*}{4a_0^3(1-e_0^2)^{3/2}L_0^*} \cdot \frac{(C-A)m_1}{\gamma^3}, \quad (6.5.32)$$

$$\dot{\varphi}_{\text{век}} = \left[\frac{3f(2-3 \sin^2 \rho_0^*) \cos \theta_0}{4a_0^3(1-e_0^2)^{3/2}L_0^*} \cdot \frac{m_1}{\gamma^3} + \frac{L_0^* \cos \theta_0}{C \cdot A} \right] (A-C), \quad (6.5.33)$$

$$\dot{\psi}_{\text{век}} = \frac{L_0^*}{A} + \frac{3f}{4a_0^3(1-e_0^2)^{3/2}L_0^*} \times \quad (6.5.34)$$

$$\times \left[\cos^2 \theta_0 + \cos^2 \rho_0^* - 6 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \rho_0^* \right] \frac{(A-C)m_1}{\gamma^3},$$

где

$$n_0 = \frac{\sqrt{f [m_1(t_0) + m_2(t_0)]}}{a_0^{3/2}}. \quad (6.5.35)$$

Полученные решения (6.5.26)-(6.5.27), (6.5.30)-(6.5.34) уравнений вековых возмущений показывают, что поступательное движение центра масс осесимметричного тела (6.5.30)-(6.5.31) и его вращательное движение вокруг центра масс (6.5.33)-(6.5.34) взаимосвязаны.

Формула (6.5.30) показывает, что в рассматриваемой задаче, в общем случае

$$\dot{\omega}_{\text{век}} \neq 0. \quad (6.5.36)$$

Поэтому в этом случае (6.5.36) нужно использовать уравнения возмущенного вращательного движения относительно эволюционирующей орбиты. Они выводятся так же как и в соответствующей стационарной задаче [14]. Пусть орбита эволюционирует так, что

$$i = i_0 = \text{const}, \quad (6.5.37)$$

$$\dot{\Omega} \neq 0, \quad \dot{\omega} \neq 0. \quad (6.5.38)$$

Обозначим

$$k_{\Omega} = \dot{\Omega} = \dot{\Omega}(t), \quad (6.5.39)$$

$$k_{\omega} = \dot{\omega} = \dot{\omega}(t), \quad (6.5.40)$$

$$\Sigma = \sigma^* + \omega, \quad (6.5.41)$$

где (6.5.41) есть угол между направлением узлов и проекцией вектора кинетического момента \vec{L} на плоскости орбиты.

Тогда

$$S = \theta - \sigma^* = \theta + \omega - \Sigma,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma^*} = \frac{\partial W}{\partial \Sigma}, \quad (6.5.42)$$

$$\frac{d\sigma^*}{dt} = \frac{d\Sigma}{dt} - k_{\omega}.$$

Далее рассуждая аналогично тому как это было выполнено в соответствующей стационарной задаче [14], получим

$$\dot{L}^* = \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad (6.5.43)$$

$$\dot{\rho}^* = -\frac{1}{L^* \sin \rho^*} \frac{\partial W}{\partial \Sigma} + \frac{\text{ctg } \rho^*}{L^*} \frac{\partial W}{\partial \psi} - k_\Omega \sin i \cos \Sigma, \quad (6.5.44)$$

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{L^* \sin \rho^*} \frac{\partial W}{\partial \rho^*} + k_\Omega (\sin i \text{ctg } \rho^* \sin \Sigma - \cos i), \quad (6.5.45)$$

$$\dot{\theta} = L^* \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{1}{L^* \sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial W}{\partial \psi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right), \quad (6.5.46)$$

$$\dot{\varphi} = L^* \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{1}{L^* \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad (6.5.47)$$

$$\dot{\psi} = L^* \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{1}{L^*} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho^*} \text{ctg } \rho^* + \frac{\partial W}{\partial \theta} \text{ctg } \theta \right) - k_\Omega \frac{\sin i}{\sin \rho^*} \sin \Sigma. \quad (6.5.48)$$

В случае эволюционирующей орбиты согласно (6.5.37), (6.5.38) полученные уравнения (6.5.43)-(6.5.48) носят общий характер. В рассматриваемой задаче согласно (6.5.26) и (6.5.30)

$$k_\Omega = \dot{\Omega} = 0, \quad k_\omega = \dot{\omega} \neq 0. \quad (6.5.49)$$

При этом система уравнений (6.5.43)-(6.5.48) упрощается

$$\dot{L}^* = \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad (6.5.50)$$

$$\dot{\rho}^* = -\frac{1}{L^* \sin \rho^*} \frac{\partial W}{\partial \Sigma} + \frac{\text{ctg } \rho^*}{L^*} \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad (6.5.51)$$

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{L^* \sin \rho^*} \frac{\partial W}{\partial \rho^*}, \quad (6.5.52)$$

$$\dot{\theta} = L^* \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{1}{L^* \sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial W}{\partial \psi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right), \quad (6.5.53)$$

$$\dot{\varphi} = L^* \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{1}{L^* \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad (6.5.54)$$

$$\dot{\psi} = L^* \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{1}{L^*} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho^*} \operatorname{ctg} \rho^* + \frac{\partial W}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right). \quad (6.5.55)$$

Сравнивая последние уравнения (6.5.50)-(6.5.55) с системой (6.4.15), учитывая (6.5.42) находим, что правая часть у них одинаковая, только введена новая переменная Σ . Соответственно в конечном итоге, учитывая осесимметричность тела, вместо формулы (6.5.32) имеем

$$\dot{\Sigma}_{\text{век}} = \frac{3f(3 \cos^2 \theta_0 - 1) \cos \rho_0^*}{4a_0^3(1 - e_0^2)^{3/2} L_0^*} \cdot \frac{(C - A)m_1}{\gamma^3}. \quad (6.5.56)$$

Из выражения (6.5.41) следует

$$\dot{\sigma}_{\text{век}}^* = \dot{\Sigma}_{\text{век}} - \dot{\omega}_{\text{век}}. \quad (6.5.57)$$

Следовательно окончательно получим

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\text{век}}^* = & \frac{3\sqrt{1 - e_0^2}}{2n_0} \gamma \dot{\gamma} - \frac{3f}{4a_0^3} \left\{ \frac{(3 \cos^2 \theta_0 - 1) \cos \rho_0^*}{(1 - e_0^2)^{3/2} L_0^*} - \right. \\ & \left. - \frac{4 + 3[2 \sin^2 \theta_0 + (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \sin^2 \rho_0^*]}{2n_0 a_0^2 (1 - e_0^2) m} \right\} \frac{(C - A)m_1}{\gamma^3}. \end{aligned} \quad (6.5.58)$$

Таким образом в рассматриваемой задаче вековые возмущения определяются формулами (6.5.26)-(6.5.27), (6.5.30)-(6.5.31), (6.5.33)-(6.5.34) и (6.5.58).

Этот случай интересен тем, что можно рассмотреть два типа нестационарности осесимметричного тела. В первом случае изменение размера, осесимметричного тела переменной массы и постоянной формы, гомотетичное

$$\frac{A(t)}{A(t_0)} = \frac{C(t)}{C(t_0)} = \frac{m_2(t)}{m_2(t_0)} \cdot \left[\frac{l_2(t)}{l_2(t_0)} \right]^2. \quad (6.5.59)$$

Во втором случае нестационарность осесимметричного тела характеризуется переменностью размера, переменностью масс и переменностью сжатия. Причем, в этом случае, вообще говоря,

$$A(t) \neq C(t), \quad (6.5.60)$$

где $A(t)$ и $C(t)$ – произвольные функции времени. Во втором случае, когда эллипсоид инерции переходит через сферу, в частности, как видно из формулы (6.5.33), угловая скорость собственного вращения $\dot{\varphi}_{\text{век}}$ равна нулю и в последующий момент меняет знак. При этом нестационарное осесимметричное тело начинает вращаться в обратную сторону.

Заключение

Стремительное развитие космической техники и наблюдательной астрономии открывают новые горизонты в немолодой науке – в небесной механике. В связи с этим, как отмечает известный французский математик и механик Кристиан Маршал [159], в настоящее время «... *Небесная Механика обрела вторую молодость* ...». Перед ним ставятся сложные, захватывающие проблемы.

Проблема поступательно-вращательного движения нестационарных гравитирующих систем – одна из них. В монографии аналитически исследован ряд задач проблемы поступательно-вращательного движения свободных небесных тел с переменной массой, формой и размерами. Сформулирована постановка новых нестационарных задач небесной механики, предложены методы их исследования, найдены их строгие частные аналитические решения и общие приближенные аналитические решения.

Полученные результаты создают основу для дальнейшего развития теории поступательно-вращательное движение свободных гравитирующих тел с переменными массами, формой и размерами при достаточно общих предположениях о законах изменения масс, формы и размеров небесных тел.

Результаты настоящей монографии ставят актуальные перспективные задачи исследования в проблеме небесной механики свободных гравитирующих тел с переменной массой, формой и размерами. Приведем некоторые из них:

- исследование устойчивости найденных частных решений;
- исследование условий существования новых частных решений, в том числе резонансных частных решений;
- исследование поступательно-вращательного движения трех тел с переменными массами, размерами и формой;

- исследование поступательно-вращательного движения искусственного небесного тела с переменной геометрией масс и с переменным составом в нестационарном поле сил естественных небесных тел.

Литература

- [1] *Дубошин Г.Н.* О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения взаимно притягивающихся тел // Астрон. ж. – 1958. - Т. 35, №2. - С. 265-276.
- [2] *Дубошин Г.Н.* Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел // Астрон. ж. — 1959. - Т. 36, №1. - С. 153-163. - С. 87-207.
- [3] *Дубошин Г.Н.* О некоторых частных решениях задачи о поступательно-вращательном движении двух тел // Сообщ. гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1960. - №106. - С. 13-18.
- [4] *Дубошин Г.Н.* О Лагранжевых и Эйлеровых решениях обобщенной задачи трех тел // *Celest.Mech.* – 1970. - Vol. 2, №4. - P. 9-27.
- [5] *Дубошин Г.Н.* Об обобщенной ограниченной задаче трех твердых тел // Тр. гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1980. - Т. 49. - С. 3-31.
- [6] *Дубошин Г.Н.* Частный случай ограниченной задачи трех тел // Сообщ. гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1980. - №210. - С. 11-33.
- [7] *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. - 799 с.
- [8] *Кондурарь В.Т.* Проблема движения двух эллипсоидов под воздействием взаимного притяжения. Проблема двух сфероидов с

совпадающими плоскостями экваториальных сечений. // Астрон. ж. – 1936. - Т. 13, №6. - С. 563-588.

- [9] *Кондурарь В.Т.* Ч. 2. Проблема движения двух сфероидов со взаимно-перпендикулярными осями вращения // Тр. гос. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1939. – Т. 9, №2. – С. 307-369.
- [10] *Кондурарь В.Т.* Ч. 3. Об устойчивости круговых движений в задаче о двух эллипсоидов с общей плоскостью симметрии // Тр. гос. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1952. - Т. 21. - С. 115-134.
- [11] *Кондурарь В.Т.* Ч. 4. О периодических решениях близким к круговым в задаче движения двух сфероидов с общей плоскостью симметрии // Тр. гос. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1952. - Т. 21. - С. 135-158.
- [12] *Кондурарь В.Т.* Ч. 5. Периодические решения близкие к круговым в задаче о движении двух сфероидов со взаимно перпендикулярными осями вращения // Тр. гос. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1954. - Т. 24. - С. 155-198.
- [13] *Кондурарь В.Т.* Проблема поступательно-вращательного движения тел под действием взаимного тяготения: Дисс. ... док. физ.-мат. наук: 01.03.01. – М.: Гос. ин-т им. П.К. Штернберга., 1968. - 173 с.
- [14] *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1975. - 308 с.
- [15] *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. - 416 с.
- [16] *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // Искусств. спут. Земли. – 1958. - Вып. 1. - С. 25-43.

- [17] *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники, сер. Исследование космического пространства. – М.: ВИНТИ, 1978. – Т.11. – 224 с.
- [18] *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс по действием гравитационных моментов // Прикл. матем. и мех., 1963. – Т.27. – №3. – С. 474-483.
- [19] *Баркин Ю.В., Демин В.Г.* Поступательно-вращательное движение небесных тел // Итоги науки и техники АН СССР. Астрономия. – М.: 1982. - Т.20. – С. 115-134.
- [20] *Баркин Ю.В.* Динамические системы несферичных небесных тел и теория вращения Луны: Автреф. дис. ... док. физ.-мат. наук: 01.03.01. – М.: гос. астрон. ин-т им. П.К. Штернберга, 1989. - 44 с.
- [21] *Видякин В.В.* Поступательно-вращательное движение абсолютно твердых тел. Архангельск: Поморск. пед. ун-т., 1995. – 155 с.
- [22] *Видякин В.В.* О некоторых подходах к решению проблемы поступательно-вращательного движения твердых тел // Тр. каф. прикл. матем. АГТУ. – Архангельск: 2001. - вып. 1. - С. 5-22.
- [23] *Видякин В.В.* О проблеме поступательно-вращательного движения абсолютно твердых тел // Тр. каф. прикл. матем. АГТУ. – Архангельск: 2004. - вып. 3. - С. 49-59.
- [24] *Видякин В.В.* Поступательно-вращательное движение абсолютно твердых небесных тел. Дисс. ... докт. физ.-матем. наук: 01.03.01. – Архангельск: Поморск. гос. пед. ун-т им. М.В. Ломоносова, 1993.
- [25] *Журавлев С.Г., Петруцкий А.А.* Задача о поступательно-вращательном движении трех твердых тел: простейшая клас-

сификация и современное состояние проблемы. М.: 1989. – 64 с. – Деп. в ВИНТИ 27.04.89. №3479 - В 89.

- [26] *Журавлев С.Г., Петруцкий А.А.* Современное состояние проблемы поступательно-вращательного движения трех твердых тел // Астрон. ж. – 1990. - Т. 67, №3. - С. 602-611.
- [27] *Журавлев С.Г.* Метод исследования острорезонансных задач небесной механики и космодинамики. Т. 1. Орбитальное движение. – Архангельск: СОЛТИ, 2000. – 307 с.
- [28] *Журавлев С.Г.* Метод исследования острорезонансных задач небесной механики и космодинамики. Т. 2. Поступательно-вращательное движение. – Архангельск: СОЛТИ, 2002. – 368 с.
- [29] *Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А.* Общая теория вращения Земли. – М.: Наука, 1984. – 255 с.
- [30] *Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А., Баймухаметов А.А., Коржымбаев Т.Т.* Движение и устойчивость слоистой Земли. – Алма-Ата: Наука, 1986. – 238 с.
- [31] *Алдияров К.Т.* Согласованные интегрируемые режимы поступательно-вращательного движения двух тел и их приложения. Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. – Алма-Ата: КазГУ, 1989. – 18 с.
- [32] *Ержанов Ж.С., Наурызбаев М.А.* Моменты и полюс инерции Земли при ее оледенении // Изв. АН КазССР, Сер. физ.-матем. – 1984. - №3. - С. 28-31.
- [33] *Ержанов Ж.С., Наурызбаев М.А.* Об эйлеровом вращении Земли переменного состава // Изв. АН КазССР, Сер. физ.-матем. – 1983. - №3. - С. 25-30.

- [34] *Калыбаев А.А.* Эволюция поступательно-вращательного движения твердой и упругой Земли. Автореф. дисс. . . . докт. физ.-мат. наук: 01.03.01 – М.: МГУ ГАИШ, 1988. – 39 с.
- [35] *Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А.* Методы анализа возвращаемости движения системы твердых тел. – Алма-Ата: Наука, 1985. – 132 с.
- [36] *Баймухаметов А.А.* Механики вязкоупругой расслоенной Земли. Автореф. дисс. . . . докт. физ.-мат. наук: 01.02.07. – Алматы: ИММаш. НАН РК, 2003. – 53 с.
- [37] *Баймухаметов А.А.* Механика геопульсаций. – Алматы: Ғылым, 2003. – 244 с.
- [38] *Омаров Т.Б.* Динамика гравитирующих систем Метагалактики. – Алма-Ата: Наука, 1975. – 144 с.
- [39] *Hadjimetriou J.D.* Secular variation of mass and the evolution of binary systems. // *Advances in Astronomy and Astrophysics*. N-Y,L., Acad. Press., 1967. – Vol. 5, – P. 131-188.
- [40] *Omarov T.B. (Editor)* Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002, – 260 p.
- [41] Pulsation, Rotation and mass loss in early type stars. / L.A. Balona, H.F. Henrichs and J.M. Le Contel (edit.) / *Proceed. of the №162 Symp. of the I.A.U.* – Dordrecht: Kluver, 1994. – 394 p.
- [42] *Вильковичский Э.Я.* Активность галактических ядер // *Вестник Каз. нац. педагог. унив. им. Абая, сер. физ.-матем.* – 2004. – №3(11). – С. 36-44.
- [43] *Терещенко В.М.* Экзопланеты: параметры и проблемы // *Вестник Каз. нац. педагог. унив. им. Абая, сер. физ.-матем.* – 2004. – №3(11). – С. 86-98.
- [44] *Беков А.А.* Нестационарные задачи небесной механики. Дисс. докт. физ.-мат. наук: 01.03.01 – М.: МГУ ГАИШ, 1995. – 345 с.

- [45] *Малков Е.А.* Точные модели в исследованиях бесстолкновительной эволюции гравитирующих систем. Дисс. ... док. физ.-мат. наук: 01.03.02 — Алматы, 2004. — 214 с.
- [46] *Bekov A.A., Omarov T.B.* The Theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems. // *Astronomical and Astrophysical Transactions.* — 2003. - Vol.22. - P. 145-153.
- [47] *Кокс Дж.П.* Теория звездных пульсаций. — М.: Мир, 1983. — 326 с.
- [48] *Масевич А.Г., Тутуков А.В.* Эволюция звезд: теория и наблюдения. — М.: Наука, 1988. — 280 с.
- [49] *Бэттен А.* Двойные и кратные звезды. — М.: Мир, 1976. — 324 с.
- [50] *Пустыльщик И.Б.* Тесные двойные системы: эффекты взаимодействия. // *Итоги науки и техники.* — Сер. Астрономия. — М.: ВИНТИ, 1989. — Т.36. — С. 108.
- [51] *Кожанов Т.С.* Гравитационная динамика иерархических систем. — Алматы: Қазақ университеті, 2003. — 290 с.
- [52] *Поляхова Е.Н.* Небесно-механические аспекты задач двух и трех тел с переменными массами // *Ученые записки ЛГУ, Сер. матем. наук.* — 1989. — Т.42, №424, вып. 64. — С. 104-143.
- [53] *Беков А.А.* О поверхности Хилла в окрестности вращающегося нестационарного трехосного эллипсоида // *Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем.* — Алма-Ата: 1990. — №4. — С. 49-52.
- [54] *Белецкий В.В., Гиверц М.Е.* О движении пульсирующей системы в гравитационном поле // *Космич. исслед.* — 1968. — Т.6, №2. — С. 304.
- [55] *Донов А.Е.* Теория полета гравитолета // *Космич. исслед.* — 1971. — Т.9, №3. — С. 392-396.

- [56] *Куницын А.Л., Ташимов Л.Т.* Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. — Алма-Ата: Ғылым, 1990. — 196 с.
- [57] *Минглибаев М.Дж.* Движение материальной точки вокруг гравитирующего тела постоянной формы, переменных размеров и массы // Молодежь и научно-техн. прогресс: Тез. конф. молодых ученых АН КазССР. — Алма-Ата: Наука, 1986. — С. 96.
- [58] *Минглибаев М.Дж.* Об одном случае ограниченной прямолинейной задачи трех тел переменной массы // Труды АФИ АН КазССР. — Алма-Ата: Наука, 1986. — Т.45. — С. 29-31.
- [59] *Минглибаев М.Дж.* Движение материальной точки вокруг гравитирующего тела постоянной формы, переменных размеров и массы I. // Труды АФИ АН КазССР. — Алма-Ата: Наука, 1987. — Т.47. — С. 42-47.
- [60] *Минглибаев М.Дж.* Движение материальной точки вокруг гравитирующего тела постоянной формы, переменных размеров и массы II. // Труды АФИ АН КазССР. — Алма-Ата: Наука, 1988. — Т.49. — С. 65-70.
- [61] *Минглибаев М.Дж., Майлыбаев А.Т.* Об эволюции орбиты пробной точки в поле тяготения протяженного тела постоянной формы, переменных размеров и массы // Астрон. циркуляр. — М.: Наука, 1989. — №1537. — С. 7-8.
- [62] *Минглибаев М.Дж., Майлыбаев А.Т.* О совместном влиянии факторов переменности массы и переменности размера несферической звездной системы на орбиту внешней звезды // Тез. докл. всесоюзн. совещания «Проблемы физики и динамики звездных систем». — Ташкент: 1989. — С. 37-38.

- [63] *Минглибаев М.Дж.* Пространственные движения в задаче Лапина // Тез. докл. IX респ. межвуз. конф. по матем. и мех. – Алма-Ата: Наука, 1989. - ч. III. - С. 21.
- [64] *Минглибаев М.Дж., Майлыбаев А.Т.* Об эволюции орбиты пробной точки в поле тяготения протяженного тела переменных размеров и массы // Вестник АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1990. - №7. - С. 71-74.
- [65] *Минглибаев М.Дж., Майлыбаев А.Т.* Об одной форме представления движения материальной точки в поле тяготения несферического тела переменных размеров и массы внутри сопротивляющейся и гравитирующей среды // Известия АН КазССР, Сер. физ.-мат. – Алма-Ата: Наука, 1990. - №4. - С. 52-60.
- [66] *Минглибаев М.Дж.* К осредненной ограниченной задаче трех тел с переменными массами // В кн.: «Вопросы небесной механики и звездной динамики». – Алма-Ата: Наука, 1990. - С. 36-40.
- [67] *Меңлібаев М.Ж.* Массалары өзгермелі қос жұлдыздың қозғалысы жөніндегі Лалин есебіне. // «Қазақ тілі — ғылым тілі». Ғылыми-практикалық конференция. Баяндамалар тезистері. – Алматы: Ғылым, 1990. - С. 138-139.
- [68] *Минглибаев М.Дж.* Задача о поступательно-вращательном движении n взаимогравитирующих тел постоянной формы, переменных размеров и массы. // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Ғылым, 1992. - Т.50. - С. 78-89.
- [69] *Минглибаев М.Дж., Майлыбаев А.Т.* К ограниченной задаче двух тел переменных размеров и массы внутри сопротивляющейся и гравитирующей среды. – Проблемы динамики звездных систем // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Ғылым, 1992. - Т.50. - С. 90-97.

- [70] *Минглибаев М.Дж.* К канонической теории возмущений в небесной механике тел переменной массы. // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Ғылым, 1992. - Т.50. - С. 71-78.
- [71] *Минглибаев М.Дж., Турдалиев Б.Ж.* Пространственные движения в задаче двух тел переменными массами. // Вестник КазГУ, серия математ. – Алматы: 1994. - С. 46-52.
- [72] *Минглибаев М.Дж., Турдалиев Б.Ж.* Пространственные движения в задаче Лапина. // Астрон. ж. – М.: Наука, 1994. - Т.71, №2. - С. 334-336.
- [73] *Минглибаев М.Дж.* К осредненной ограниченной квазиэллиптической задаче трех тел переменной массы. // Известия МОН РК, НАН РК, серия физ.-матем. – Алматы: Ғылым, 2002. - №4. - С. 50-54.
- [74] *Минглибаев М.Дж.* К аналитическим свойствам задачи трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами. – Докл. НАН РК. – Алматы: Ғылым, 2002. - №6. - С. 19-28.
- [75] *Минглибаев М.Дж.* Канонические уравнения вековых возмущений задачи трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами // Докл. НАН РК. – Алматы: Ғылым, 2003. - №4. - С. 26-31.
- [76] *Минглибаев М.Дж.* Частные случаи поступательно-вращательного движения двух тел переменных размеров и массы // Известия МОН РК, НАН РК, сер. физ.-матем. – Алматы: Ғылым, 2003. - №4. - С. 11-18.
- [77] *Минглибаев М.Дж.* Об одном частном случае поступательно-вращательного движения двух тел переменных размеров и массы // Вестник КазНТУ. – Алматы: 2004. - №2. - С. 78-85.
- [78] *Минглибаев М.Дж.* Пространственные поступательно-вращательные движения двух тел переменных размеров и массы // Докл. НАН РК. – Алматы: 2003. - №6. - С. 53-59.

- [79] *Минглибаев М.Дж.* Поступательно-вращательное движение двух тел с переменными массами подобно изменяемых размеров // Сб. тез. 3-й Междунар. научн. конф. «Современные достижения физики и фундаментальное физическое образование». – Алматы: 2003 г. - С. 101.
- [80] *Минглибаев М.Дж.* Пространственные частные решения задачи Лапина двух тел переменной массы // Вестник КазНУ им аль-Фараби, серия матем., мех., инф. – 2004. - №1. - С. 15-19.
- [81] *Минглибаев М.Дж., Абаев М.Т.* Задача трех тел с изменяющимися в одинаковом темпе массами в приближении Хилла // Материалы междунар. научн. конф. «Первые Ержановские чтения». – ПГУ им. С.Торайгырова, Павлодар: 2004. - Т. 2. - С. 135-139.
- [82] *Минглибаев М.Дж.* Задача многих гравитирующих тел с переменными массами // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби, сер. матем., мех., инф. – 2005. - №4. - С. 71-78.
- [83] *Минглибаев М.Дж.* Задача трех тел с изменяющимися в различных темпах массами // Тез. докл. 10-й Межвуз. конф. по матем.е и мех. – Алматы: 2004. - С. 179.
- [84] *Минглибаев М.Дж.* Задача трех тел с изменяющимися массами // Материалы 10-й Межвуз. конф. и по матем. и мех. – Алматы: Қазақ университеті, 2005. – С. 45-50.
- [85] *Минглибаев М.Дж., Абаев М.Т.* Стационарные решения осредненной задачи трех тел с в одинаковом темпе изменяющимися массами в случае Хилла // Вестник КазНТУ. – Алматы: 2005. - №4(48). - С. 139-143.
- [86] *Минглибаев М.Дж.* К движению точки в гравитационном поле нестационарного осесимметричного тела // Известия МОН РК, сер. физ.- матем. – Алматы: Ғылым, 2004. - №4. - С. 15-20.

- [87] *Минглибаев М.Дж.* К задаче о поступательно-вращательном движении n тел постоянной формы, переменных размеров и массы // Тез. докл. 8-съезда Астрон. Общества и Междунар. симп. «Астрономия -2005: Современное состояние и перспективы развития». – М.: 2005. - С. 9.
- [88] *Минглибаев М.Дж.* К задаче трех тел-точек изотропно изменяющимися массами // Тез. докл. 8-съезда Астрон. Общества и Междунар. симп. «Астрономия -2005: Современное состояние и перспективы развития». – М.: 2005. - С. 9.
- [89] *Минглибаев М.Дж., Омаров Т.Б.* К динамике Якоби гравитирующих систем переменной массы // Тез. докл. «Первые Фесенковские чтения. Современная астрофизика: традиции и перспективы». – Алматы: 2005. - С. 15-16.
- [90] *Минглибаев М.Дж.* О поступательно-вращательном движении N -взаимогравитирующих тел постоянной формы, переменных размеров и массы // Матер. Междунар. научн. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». – Алматы: 2005. - Т. II. - С. 29-33.
- [91] *Минглибаев М.Дж., Абаев М.Т.* Ограниченная осредненная задача трех тел в различных темпах изменяющимися массами // Матер. Междунар. научн. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». – Алматы: 2005. - Т. II. - С. 33-36.
- [92] *Минглибаев М.Дж.* Инварианты центра масс задачи многих гравитирующих тел с переменными массами // Матем. ж. Инт матем. МОиН РК. – Алматы: 2005. - Т. 5, №2(16). - С. 52-56.
- [93] *Минглибаев М.Дж.* К задаче трех тел с изотропно в различных темпах изменяющимися массами // Известия МОиН РК, сер. физ.-матем. – Алматы: Ғылым, 2005. - №4. – С. 16-20.

- [94] *Минглибаев М.Дж.* Уравнения возмущенного вращательного движения нестационарного тела относительно центра масс // Тез. докл. междунар. конф. «Проблемы совр. матем. и мех.», посвящ. 60-летию Сектора матем. и мех. и 40-летию Ин-та матем. – Алматы: 2005. – С. 179-180.
- [95] *Минглибаев М.Дж.* Инварианты центра масс задачи трех тел с массами, изменяющимися в различных темпах // Материалы III- Междунар. научно-метод. конф. «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке». – КазНПУ им. Абая, Алматы: 2005. – Т.1. – С. 127-131.
- [96] *Minglibayev M.D., Omarov T.B.* Jacobi dynamics of variable-mass gravitational systems // *Astronomical and Astrophysical Transactions.* – 2005. – Vol.24, №4. – P. 279-283.
- [97] *Минглибаев М.Дж.* Поступательно-вращательное движение двух нестационарных тел: шар – осесимметричное тело // Тез. докл. Междунар. научн. конф. «Проблемы теоретической и прикладной механики», посвящ. 75-летию акад. НАН РК У.А. Джолдасбекова. – Алматы: 2006. – С. 170.
- [98] *Минглибаев М.Дж., Омаров Т.Б.* К нестационарным модельным задачам небесной механики. // Труды АФН АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1984. – Т.43. – С. 3-11.
- [99] *Майлыбаев А.Т.* О периодическом движении по квазиэллипсу и его приложении к динамике бинарных систем переменной массы // Тез. докл. IX Республ. Межвуз. науч. конф. по матем. и мех. – Алма-Ата: 1989. – Ч. 3. – С. 18.
- [100] *Omarov T.B., Omarova G.T.* The Inverse Problem of Dynamics for System with Non-Stationary Lagrangian // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* – 1998. – V.69. – P. 347-355.

- [101] *Майлыбаев А.Т.* Ограниченная задача двух тел переменной массы и размеров: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. – Алма-Ата: КазГУ, 1990. – 20 с.
- [102] *Беков А.А.* О промежуточном движении и системах оскулирующих элементов в задаче Гильдена-Мещерского. / В кн. Проблемы физики звезд и внегалактической астрономии. – Алматы: АФИФ НАН РК Ғылым, 1993. - С. 115-134.
- [103] *Минглибаев М.Дж.* Модельные задачи гравитирующих систем переменной массы: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. – Алма-Ата: КазГУ, 1989. - 16 с.
- [104] *Омаров Т.Б.* О движении двух тел с корпускулярным излучением // Астрон. ж. – 1963. - Т.40, вып.5. - С. 921-928.
- [105] *Hadjimetriou J.D.* Two-body problem with variable mass: a new approach. – Icarus, 1963. - V.2. – P. 440-453.
- [106] *Демченко Б.И., Омаров Т.Б.* К задаче двух тел переменной массы при наличии сопротивляющейся среды // Труды АФИ АН КазССР. – 1977. - Т.29. - С. 16-21.
- [107] *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. / Под ред. Г.Н. Дубошина — М.: Наука, 1976. - 864 с.
- [108] *Беков А.А., Омаров Т.Б.* Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби и некоторые нестационарные задачи небесной механики // Астрон. ж. – 1978. – Т. 55, вып.3. - С. 635-644.
- [109] *Deprit A.* The secular acceleration in Gylden's Problem. // Celest. Mech. and Dyn. Astron. - 1983. - V.31. - P. 1-22.
- [110] *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. – М.: Наука, 1968. - 800 с.

- [111] *Шыныбаев М.Д.* Динамика поступательного движения пассивно гравитирующих тел постоянной и переменной масс в нецентральной поле тяготения: Автореф. дисс. . . . доктора физ.-мат. наук: 01.02.01. – Бишкек: 2002. – 28 с.
- [112] *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1978. – 455 с.
- [113] *Лапин А.С.* Задача двух тел с переменными массами // Учен. запис. ЛГУ, сер. матем. наук. - Ленинград: 1944. – Вып.13. - С. 3-55.
- [114] *Разбитная Е.П.* Задача двух тел с переменными массами: классификация различных случаев // Астрон. ж. – 1985. - Т.62, вып.6. - С. 1175-1181.
- [115] *Гельфгат Б.Е.* Обобщение задачи двух тел переменной массы и ее строгие решения // Тр. третьих чтений К.Э. Циолковского. Секция «Механика космического полета». – Калуга: 1968. - С. 86-101.
- [116] *Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1977. – 360 с.
- [117] *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Методы теории движения искусственных небесных тел. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
- [118] *Шарлье К.* Небесная механика – М.: Наука, 1966. – 628 с.
- [119] *Lidov M.L., Ziglin S.L.* Non-restricted double-averaged three body problem in Hill's case. *Celest. Mech.* – 1976. – V.13, №4. – P. 471-489.
- [120] *Лукьянов Л.Г.* Об уравнениях движения задачи многих тел с переменными массами // Астрон. ж. – 1983. – Т.60, вып.1. - С. 181-194.
- [121] *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 912 с.

- [122] *Голубев В.В., Гребеников Е.А.* Проблема трех тел в небесной механике. – М.: изд. МГУ, 1985. – 240 с.
- [123] *Berkovic L.M.* Gylden-Mescerskii problem // *Celest. Mech.* - 1981. - V.24, №4. - P. 407-429.
- [124] *Беков А.А.* Интегрируемые случаи и траектории движения в задаче Гюльдена-Мещерского // *Астрон. ж.* – 1989. - Т.66, вып.1. - С. 135-151.
- [125] *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1949. – 276 с.
- [126] *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Новые качественные методы небесной механики. – М.: Наука, 1971. - 444 с.
- [127] *Вашковьяк М.А.* Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел 1. Качественное исследование // *Космич. исслед.* – 1981. – Т.19, №1. - С. 5-18.
- [128] *Зиглин С.Л.* О вековой эволюции орбиты планеты в системе двойной звезды // *Письма в Астрон. журн.* – 1975. - Т.1, №9. - С. 45-47.
- [129] *Аксенов Е.П.* Осредненная ограниченная задача трех тел // *Астрон. ж.* – 1979. - Т.56, вып.2. - С. 419-426.
- [130] *Беркович Л.М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – Ижевск: НИЦ РХД, 2002. – 464 с.
- [131] *Хильми Г.Ф.* Проблема n тел в небесной механике и космогонии. – М.: АН СССР, 1951. - 130 с.
- [132] *Минглибаев М.Дж.* К динамике гравитирующих систем переменного состава и массы // *Труды АФИ АН КазССР.* – Алматы: Наука, 1983. - Т.40. - С. 72-79.

- [133] *Яковлев В.М.* Механика подобно изменяемого тела переменной массы: Автореф. ... к.ф.-м.н.: – М.: Ин-т мех. АН СССР, 1964. – 8 с.
- [134] *Маржеев А.П.* Теоретическая механика. – Ижевск: НИЦ РХД, 2001. – 592 с.
- [135] *Kinoshita H.* First-order perturbations of the two finite body problem // *Publ. Astron. Soc. – Japan*, 1972. - V.24, №4. - P. 423-457.
- [136] *Omarova G.T., Omarov T.B.* Reconstruction of non-stationary potential of gravitating systems on given evolving orbits // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* – 2003. - V.85. - P. 25-35.
- [137] *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика – М.-Л.: Гостехиздат, 1937. – 500 с.
- [138] *Абуэльнага М.З., Баркин Ю.В.* Регулярные движения твердого тела в поле притяжения шара // *Астрон. ж.* - 1979. - Т.56, вып.4. - С. 881-887.
- [139] *Абуэльнага М.З.* Регулярные поступательно-вращательные движения двух произвольных твердых тел и их устойчивость // *Астрон. ж.* – 1989. - Т.66, вып.3. - С. 604-611.
- [140] *Тылеубердиев Б.* Исследование вращательного движения тела с переменной геометрией масс. Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. – Алма-Ата: КазГУ, 1990. - 13 с.
- [141] *Якоби К.* Лекции по динамике. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 272 с.
- [142] *Floria L.* Perturbed Gylden systems and time-dependent Delaunay-like transformations // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* – 1997. - V.68. – P. 75-85.
- [143] *Омаркулов К.С.* Движение тел в нестационарных нецентральных полях. – Кокшетау: 2001. - 146 с.

- [144] *Нурбаев У.* Некоторые вопросы динамики и устойчивости движения подобно изменяемого тела. Автореф. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. – М.: УДН им. П.Лумумбы, 1970. – 9 с.
- [145] *Лукьянов Л.Г.* Об уравнениях движения задачи двух тел с переменными массами // Вестник МГУ, Сер.3, физ., астрон. – 1983. – Т.24, №1. – С. 62-66.
- [146] *Поляхова Е.Н.* Небесномеханические аспекты задачи двух тел с переменными массами: современное состояние проблемы. // Астрон. ж. – 1994. – Т.71, вып. 2. – С. 321.
- [147] *Otarov T.B.* On Non-Stationary Problems of Celestial Mechanics // Proc. of the 81-st Symp. of the I.A.U. «Dynamics of the Solar System». Tokyo, Japan, 23-26 May, 1978. – Dordrecht: D. Reidel Publ. Co. – P. 49-52.
- [148] *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 416 с.
- [149] *Agekian T.A., Orlov B.B.* Theory of Motion in the Field of Rotationally Symmetrical Potential. // Proc. of the Internat. Conf. «Stellar Dynamics: From Classic to Modern». – S.-Petersburg, August 21-27, 2000. – S.-Pet. State Univer., Saint Petersburg: 2001. – P. 183-190.
- [150] *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. – М.: Наука, 1968.
- [151] *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике. – М.: Наука, 1965. – 572 с.
- [152] *Орлов А.А., Соловая Н.А.* Влияния углов наклона на динамическую устойчивость тройных звездных систем. / В кн. Почти-периодические орбиты в небесной механике. – М.: 1990. – Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова, – С. 93-101.

- [153] *Емельянов Н.В.* Динамика Солнечной системы // Тр. каф. прикл. матем. Арханг. гос. техн. ун-т – Архангельск: 2002. - Вып.2. - С. 18-46.
- [154] *Уральская В.С.* Динамика спутников планет // Астрон. вестник. – 2003. - Т.37, №5. - С. 371-399.
- [155] *Айвен Р. Кинг.* Введение в классическую звездную динамику. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. - 288 с.
- [156] *Саслау У.* Гравитационная физика звездных и галактических систем. – М.: Мир, 1989. - 544 с.
- [157] *Журавлев С.Г., Чазов В.В., Аниковский В.В.* Небесная механика и астрометрия на пороге третьего тысячелетия // Тр. каф. прикл. матем. Арханг. гос. техн. ун-т – Архангельск: 2001. - Вып.1. - С. 86-100.
- [158] *Ихсанов Е.В.* Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики. – М.: изд. РУДН, 2004. – 132 с.
- [159] *Маршал К.* Задача трех тел. – Москва – Ижевск: Инст. комп. иссл., 2004. – 640 с.
- [160] Резонансы в небесной механике. Сб. работ, серия «Современная небесная механика». – Москва – Ижевск: Инст. комп. иссл., 2006. – 316 с.



MoreBooks!
publishing



yes i want morebooks!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн – в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов! окружающей среде благодаря технологии Печати-на-Заказ.

Покупайте Ваши книги на
www.more-books.ru

Buy your books fast and straightforward online - at one of world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.get-morebooks.com



VDM Verlagsservicegesellschaft mbH

Heinrich-Böcking-Str. 6-8
D - 66121 Saarbrücken

Telefon: +49 681 3720 174
Telefax: +49 681 3720 1749

info@vdm-vsg.de
www.vdm-vsg.de

