

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ ДАВЛЕНИЯ.

Аннотация. В данной работе исследуются численные методы решения уравнений Навье-Стокса в двухсвязных областях. Рассматриваются два метода решения задачи. Первый метод основан на построении разностной задачи в переменных функции тока и вихрь скорости с использованием условия однозначности давления. Численное решение эллиптического уравнения для функций тока находится как сумма решений двух простых задач эллиптического типа. Одна задача является с однородными граничными условиями, а другая с однородным уравнением. Альтернативный подход к решению поставленной задачи является метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентом. Этот метод не требует удовлетворения условия однозначности давления и является простым в реализации.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, функция тока, вихрь скорости, многосвязная область, условие однозначности давления, метод фиктивных областей, граничные условия.

В настоящей работе рассматриваются методы численного решения уравнений Навье – Стокса в многосвязной области. Одна из трудностей численного решения уравнений Навье – Стокса в переменных функции тока и вихря скорости в случае многосвязной области порождается неопределенностью значений функции тока на внутренних границах. Численное решение уравнения Навье – Стокса в многосвязной области рассматривались авторами работ [1-2], в которых предлагается явный метод численного решения уравнений Навье – Стокса в двухсвязной области. Данная задача с использованием условия однозначности давления решена в работе Сироченко В.П.[3]. В работе [4] сделан вывод, что явная схема приводит к неустойчивому счету. В предлагаемой работе построена устойчивая явная разностная схема для численного решения уравнений Навье-Стокса в многосвязной области с использованием условия однозначности давления и метод фиктивных областей для решения этой задачи.

Для моделирования конвективных течений рассмотрим уравнения Навье-Стокса в приближении Бусинеска [3].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta v - \text{Gr} \theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta \theta, \quad (x, y) \in D, t \in (0, T] \quad (4)$$

с начальными и граничными условиями

$$u = u_0(x, y), v = v_0(x, y), \theta = \theta_0(x, y), (x, y) \in \bar{D}, t = 0 \quad (5)$$

$$u = a_x(x, y, t), v = a_y(x, y, t), \theta = \xi(x, y, t), (x, y) \in \partial D, t \in [0, T] \quad (6)$$

где u, v – компоненты скорости, p – давление, θ – температура, Re – число Рейнольдса, Gr – число Грасгофа, Pr – число Прандтля, $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$ – граница области D .

Задачу (1)-(6) удобно решать исключением давления из уравнений движения и введением новых переменных - функция тока и завихренность. Существенную роль играют интегральные условия однозначности давления. В работе Ладыженской О.А. для однозначной разрешимости разностной схемы для уравнения Навье-Стокса к системе уравнений добавляется условие однозначности давления следующего вида [5].

$$\iint_{\bar{D}} p(x, y) dx dy = 0 \quad (7)$$

Необходимость постановки условия вида (7) связано с тем, что разностный аналог уравнения (3) не является линейно-независимым. В работе Сироченко В.П. [3] предлагается другой вариант условия однозначности давления которая записывается в виде

$$\oint_{\gamma_3} \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy = 0 \quad (8)$$

где $\Pi = p + (u^2 + v^2)/2$ – полный напор.

Введем функцию тока ψ и вихрь скорости ω , которые связаны с компонентами скорости u, v следующими соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

Задача (1)-(6) в переменных ψ, ω записывается следующем образом [3]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega + Gr \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\Delta \psi = \omega. \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Re Pr} \Delta \theta, (x, y) \in D, t \in (0, T], \quad (12)$$

$$\omega = \alpha(x, y), \theta = \phi(x, y), (x, y) \in \bar{D}, t = 0, \quad (13)$$

$$\psi = \xi_1(x, y, t), \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}} = \eta_1(x, y, t), (x, y) \in \gamma_1, t \in (0, T], \quad (14)$$

$$\psi = \xi_2(x, y, t) + \lambda(t), \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}} = \eta_2(x, y, t), (x, y) \in \gamma_2, t \in (0, T], \quad (15)$$

$$\theta = \beta_l(x, y, t), (x, y) \in \gamma_l, l = 1, 2, t \in (0, T], \quad (16)$$

$\alpha, \phi, \xi_i, \eta_i, \beta_i, i = 1, 2$ – заданные функции. Условие (8) запишем в следующем виде

$$\oint \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dx + \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial x} - Gr \theta \right) dy \right] = 0 \quad (17)$$

Решение разностного аналога задачи (10)-(17) будем искать в виде

$$\omega^{n+1}(x, y) = \omega_0^{n+1}(x, y) + \lambda^{(n+1)} \omega_1^{n+1}(x, y), \quad (18)$$

$$\psi^{n+1}(x, y) = \psi_0^{n+1}(x, y) + \lambda^{(n+1)} \psi_1^{n+1}(x, y).$$

где n – номер итераций.

I-ая вспомогательная задача

$$\frac{\omega_0^{n+1} - \omega^n}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega_0^{n+1} + Gr \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x} \quad (19)$$

$$\Delta \psi_0^{n+1} = -\omega_0^{n+1}, (x, y) \in D.$$

$$\psi_0^{n+1} \Big|_{\gamma_1} = 0, \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \Big|_{\gamma_1} = 0, \psi_0^{n+1} \Big|_{\gamma_2} = 0, \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \Big|_{\gamma_2} = 0, \quad (20)$$

II-ая вспомогательная задача

$$\frac{\omega_1^{n+1} - \omega^n}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega_1^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega_1^{n+1}}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega_1^{n+1} \quad (21)$$

$$\Delta \psi_1^{n+1} = -\omega_1^{n+1}, (x, y) \in D.$$

$$\psi_1^{n+1} \Big|_{\gamma_1} = 0, \frac{\partial \psi_1^{n+1}}{\partial n} \Big|_{\gamma_1} = 0, \psi_1^{n+1} \Big|_{\gamma_2} = 1, \frac{\partial \psi_1^{n+1}}{\partial n} \Big|_{\gamma_2} = 0, \quad (22)$$

Построим равномерную сетку в области D

$$D_h = \{(x_i, y_i), x_i = (i-1)h_1, y_j = (j-1)h_2, i = 0, 1, \dots, n_1, j = 0, 1, \dots, n_2, h_1 = l_1 / (n_1 - 1), h_2 = l_2 / (n_2 - 1)\}$$

Предположим что внутренняя подобласть D_0 является прямоугольником

$$D_{0h} = \{(x, y), x_{k1} \leq x \leq x_{k2}, y_{m1} \leq y \leq y_{m2}\} x_i = (i-1)h_1, y_j = (j-1)h_2, i = 0, 1, \dots, n_2 \text{ узлы}$$

равномерной сетки построенной в области D . Рассмотрим область D_1 охватывающий область D_0 , т.е. $D_0 \subset D_1$. $D_1 = \{(x, y), x_{k3} \leq x \leq x_{k4}, y_{m3} \leq y \leq y_{m4}\}$.

Рассмотрим разностный аналог условия (17) и подставляя разложение вида (18) получим следующее уравнение для определения $\lambda^{(n+1)}$.

$$M\lambda^{(n+1)} = N \quad (23)$$

где

$$M = \sum_{j=m3}^{m4} \left[\psi_{1,x,k3,j}^{n+1} / \tau + 0.5\omega_{1,k3+1,j}^{n+1} \psi_{\dot{y},k3,j}^n + 0.5\omega_{1,k3,j}^{n+1} \psi_{\dot{y},k3+1,j}^n - \frac{1}{\text{Re}} \omega_{1,x,k3,j}^{n+1} - \beta g \theta_{k3+1/2,j}^{n+1} \right] h_2 +$$

$$\sum_{i=k3}^{k4} \left[\psi_{1,\bar{y},i,m4}^{n+1} / \tau + 0.5\omega_{1,i,m4-1}^{n+1} \psi_{\dot{x},i,m4}^n + 0.5\omega_{1,i,m4}^{n+1} \psi_{\dot{x},i,m4-1}^n + \frac{1}{\text{Re}} \omega_{1,\bar{y},i,m4}^{n+1} \right] h_1 -$$

$$\sum_{j=m3}^{m4} \left[\psi_{1,x,k4,j}^{n+1} / \tau + 0.5\omega_{1,k4+1,j}^{n+1} \psi_{\dot{y},k4,j}^n + 0.5\omega_{1,k4,j}^{n+1} \psi_{\dot{y},k4+1,j}^n - \frac{1}{\text{Re}} \omega_{1,x,k4,j}^{n+1} - \beta g \theta_{k4+1/2,j}^{n+1} \right] h_2 - \quad (24)$$

$$\sum_{j=k3}^{k4} \left[\psi_{1,\bar{y},i,m3}^{n+1} / \tau + 0.5\omega_{1,i,m3-1}^{n+1} \psi_{\dot{x},i,m3}^n + 0.5\omega_{1,i,m3}^{n+1} \psi_{\dot{x},i,m3-1}^n + \frac{1}{\text{Re}} \omega_{1,\bar{y},i,m3}^{n+1} \right] h_1,$$

$$N = \sum_{j=m3}^{m4} \left[-\psi_{0,x,k3,j}^{n+1} / \tau - \psi_{x,k3,j}^n / \tau + 0.5\omega_{0,k3+1,j}^{n+1} \psi_{\dot{y},k3,j}^n + \right. \\ \left. + 0.5\omega_{0,k3,j}^{n+1} \psi_{\dot{x},k3+1,j}^n - \frac{1}{\text{Re}} \omega_{0,x,k3,j}^{n+1} - \beta g \theta_{k3+1/2,j}^{n+1} \right] h_2 +$$

$$\sum_{i=k3}^{k4} \left[\psi_{0,\bar{y},i,m4}^{n+1} / \tau - \psi_{\bar{y},i,m4}^n / \tau + 0.5\omega_{0,i,m4-1}^{n+1} \psi_{\dot{x},i,m4}^n + 0.5\omega_{0,i,m4}^{n+1} \psi_{\bar{x},i,m4-1}^n + \frac{1}{\text{Re}} \omega_{0,\bar{y},i,m4}^{n+1} \right] h_1 +$$

$$\sum_{j=m3}^{m4} \left[-\psi_{0,x,k4,j}^{n+1} / \tau - \psi_{x,k4,j}^n / \tau + 0.5\omega_{0,k4+1,j}^{n+1} \psi_{\dot{y},k4,j}^n + \right. \quad (25)$$

$$\left. + 0.5\omega_{0,k4,j}^{n+1} \psi_{\dot{x},k4+1,j}^n - \frac{1}{\text{Re}} \omega_{0,x,k4,j}^{n+1} - \beta g \theta_{k4+1/2,j}^{n+1} \right] h_2 +$$

$$\sum_{i=k3}^{k4} \left[\psi_{0,\bar{y},i,m3}^{n+1} / \tau - \psi_{\bar{y},i,m3}^n / \tau + 0.5\omega_{0,i,m3-1}^{n+1} \psi_{\dot{x},i,m3}^n + 0.5\omega_{0,i,m3}^{n+1} \psi_{\bar{x},i,m3-1}^n + \frac{1}{\text{Re}} \omega_{0,\bar{y},i,m3}^{n+1} \right] h_1$$

Рассмотрим метод фиктивных областей [6] для решения задачи (10)-(17)

$$\frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega^\varepsilon + Gr \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x} - \text{div}(k(x, y) \nabla \psi), \quad (26)$$

$$\Delta \psi^\varepsilon = \omega^\varepsilon \quad (27)$$

$$\frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta \theta^\varepsilon \quad (28)$$

$$\psi^\varepsilon \Big|_{\gamma_1} = 0, \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \vec{n}} \Big|_{\gamma_1} = 0, \quad (29)$$

$$\theta^\varepsilon = \beta_l(x, y, t), (x, y) \in \gamma_l, l = 1, 2, t \in (0, T] \quad (30)$$

где

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D_0 \\ 0, & (x, y) \in D / D_0 \end{cases} \quad (31)$$

Численные расчеты. Выше изложенными двумя методами численно решена тестовая задача (1)-(6) для уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости в переменных функция тока, вихрь скорости в приближении Бусинеска.

В качестве численных результатов представлены распределения температуры и функции тока. Результаты получены при различных размерах полости, температурных режимов на границе, и значений определяющих течение безразмерных параметров – числа Грасгофа Gr и Прантля Pr . Результаты численных расчетов представлены с помощью современного графического редактора Tescplot.

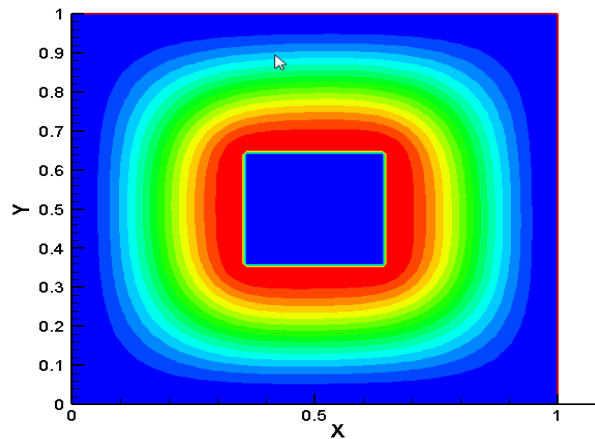


Рисунок 1- Изолинии функций тока. Размер полости 1.0*1.0 на внутренних границах $\theta = 0.5$, $Pr = 5.39$, $Gr = 100$.

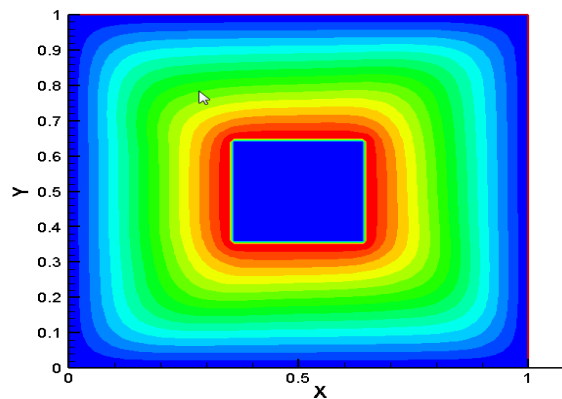


Рисунок 2-Изотермы. Размер полости 1.0*1.0 на внутренних границах $\theta = 1$, $Pr = 5.39$, $Gr = 100$.

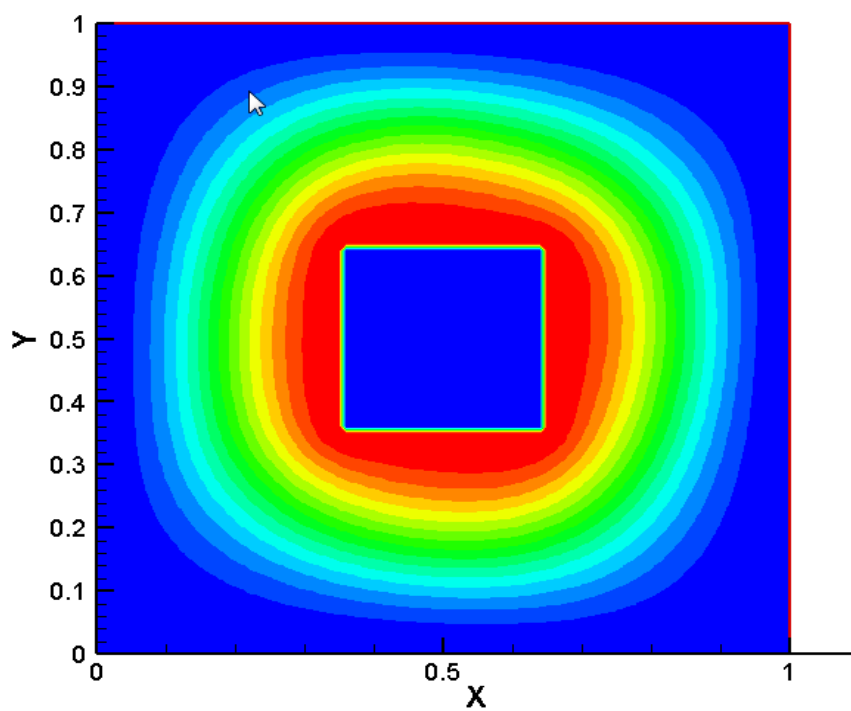


Рисунок 3- Изолинии функций тока. Размер полости 1.0*1.0 на внутренних границах $\theta = 0.5$, $Pr = 5.39$, $Gr = 100$.

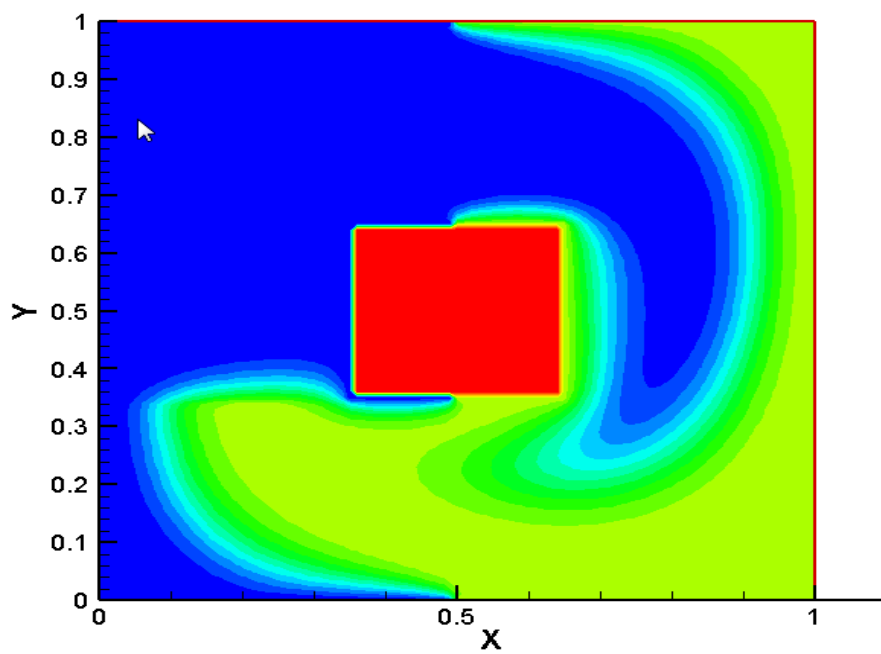


Рисунок 4 - Изотермы. Размер полости 1.0*1.0 температура правых частей границ $\theta = 0.5$, левых частей $\theta = -0.5$, $Pr = 5.39$, $Gr = 100$.

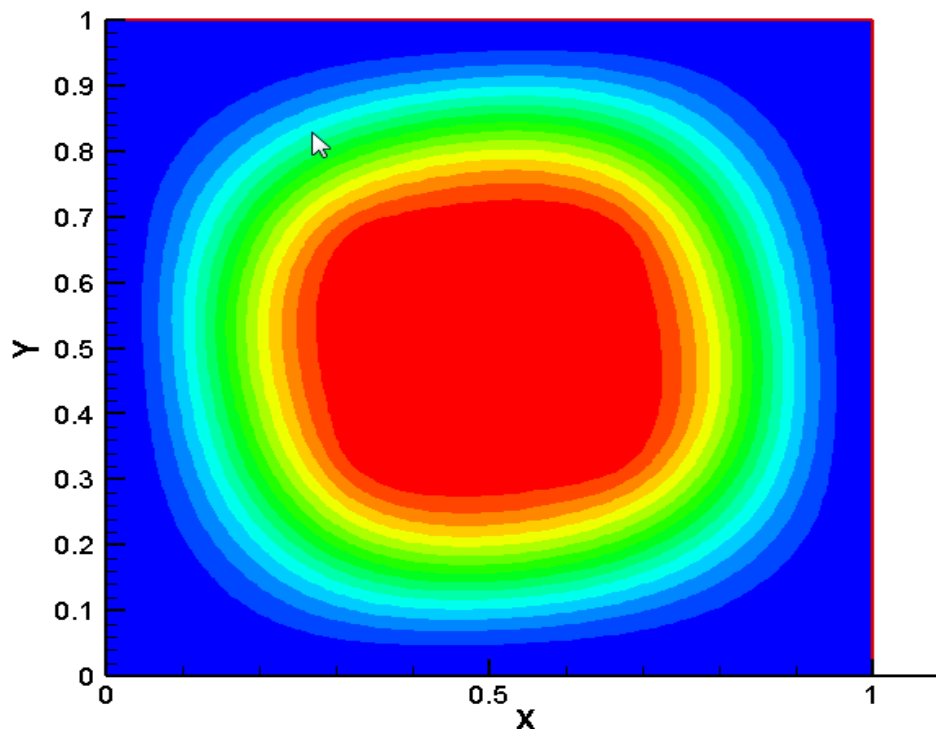


Рисунок 5- Изолинии функций тока. Размер полости 1.0*1.0 на внутренних границах $\theta = 0.5$, $Pr = 5.39$, $Gr = 100$.

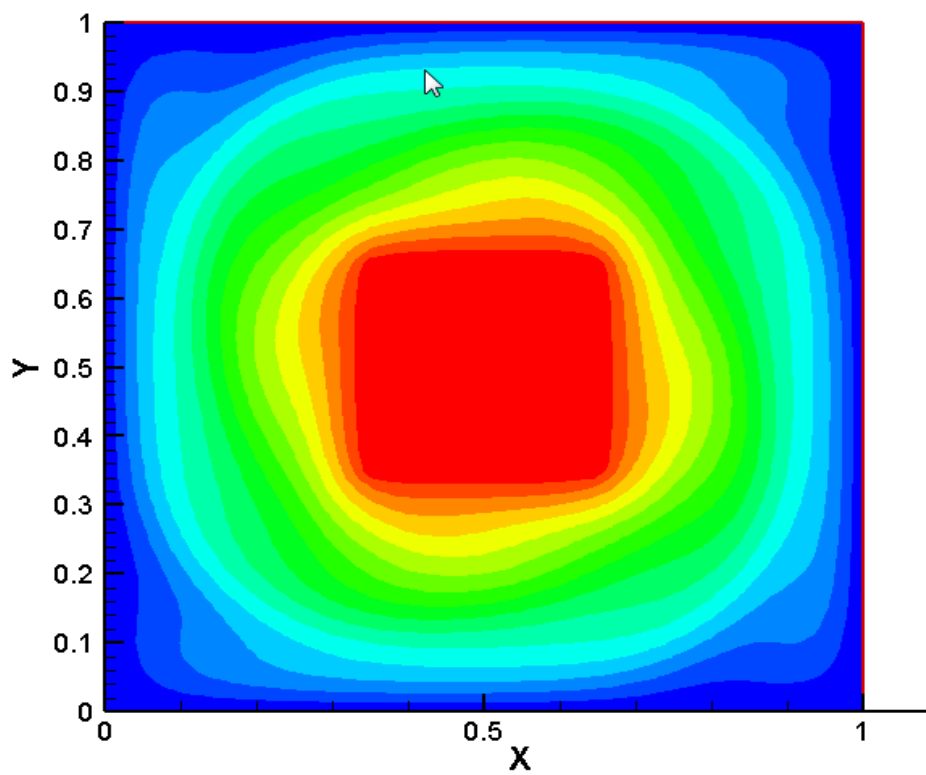


Рисунок 6-Изотермы. Размер полости 1.0*1.0 на внутренних границах $\theta = 1$, $Pr = 5.39$, $Gr = 100$.

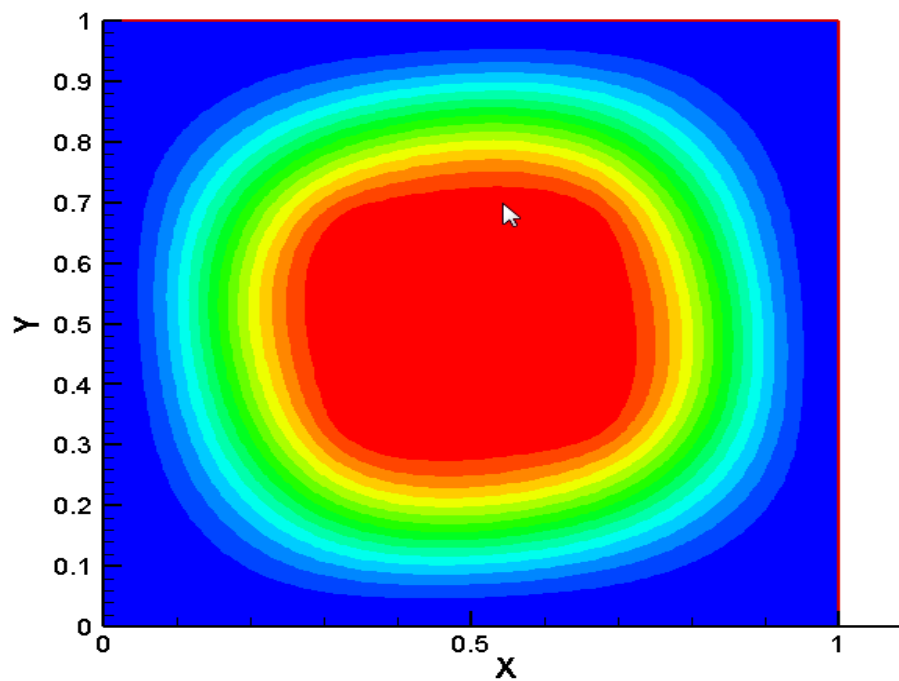


Рисунок 7- Изолинии функций тока. Размер полости 1.0*1.0 на внутренних границах $\theta = 0.5$, $Pr = 5.39$, $Gr = 100$.

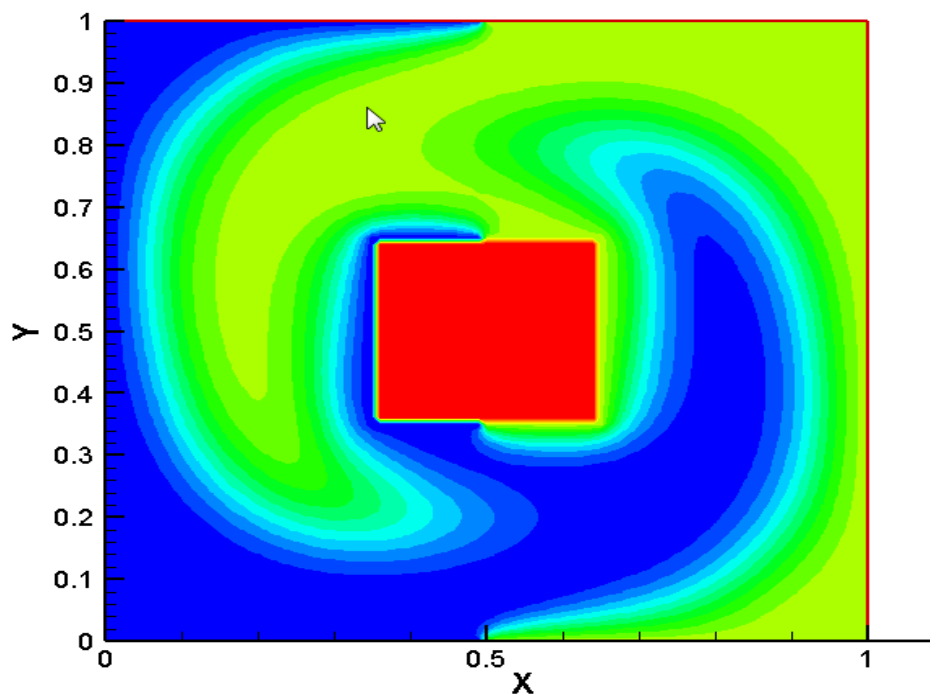


Рисунок 8 - Изотермы. Размер полости 1.0*1.0 температура правых частей границ $\theta = 0.5$, левых частей $\theta = -0.5$, $Pr = 5.39$, $Gr = 100$.

В расчетах использовалась равномерная сетка размерами 101x101, 501x501. Проведения вычислительного эксперимента на мелкой сетке на персональном компьютере Pentium 4 практически невозможно, из-за требуемой большой объем оперативной памяти, поэтому численный эксперимент был проведен на суперкомпьютере URSA на базе 128 четырехядерных процессоров Intel® Xeon® серии E5335 2.00GHz при КазНУ им. аль-Фараби.

Первый метод основан на построении разностной задачи в переменных функция тока и вихрь скорости с использованием условия однозначности давления. Это условие позволяет определить коэффициент, который используется в формуле (18). Решения для функции тока и вихря скорости находится как сумма двух простых задач. Разработанный алгоритм равномерно сходится при определенном количестве итерации, и с помощью разработанного численного алгоритма получаются более точные результаты. Численные результаты данного метода представлены на рисунках 1-4.

Второй подхода к решению поставленной задачи методом фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам. Решение задачи находится с точностью ε . Данный метод является простым в реализации и не требует удовлетворения условия однозначности давления. На рисунках 5-8 представлены результаты поставленной задачи методом фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам.

Список литературы

1. Фром Дж. Неустановившееся течение несжимаемой вязкой жидкости. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Изд-во МГУ, 1967. С. 343-381.
2. Суд Элрод. Численное решение уравнений Навье-Стокса в двусвязных областях для течения несжимаемой жидкости // Ракетная техника и космонавтика. 1974. Т. 12. №5. С. 76-82.
3. Сироченко В. П. Численное моделирование конвективных течений вязкой жидкости в многосвязных областях // Труды Международной конференции RDAMM-2001, 2001. Т. 6. Ч. 2, Спец.выпуск. С. 554-562.
4. Adlam J.H. Computation of two-dimensional time-dependent natural convection in a cavity where there are internal bodies. // Computers and Fluids. 1986. Vol. 14. N2. P. 141-157.
5. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. // Издательство. Наука. 2-е издание. 1970.
6. Смагулов Ш.С., Темирбеков Н.М., Камаубаев К. Моделирование методом фиктивных областей условия для давления в задачах течения вязкой жидкости // Сиб. журн.вычисл. мат. 2000. Т. 3, №1. С. 57-62