**Сандық мәндері бірдене берілмеген геометриялық есептерді шешудің өзгерістемелері туралы.**

**Сыдыков Ж.С.**

**Дауытова Ж.Қ.**

**Абдибекова К.Ж.**

 Әл Фараби атындағы ҚазҰУ-дың жоғары оқу орындарына дейінгі түсуге үміткерлерді дайындық факультетінде көп жылдан бері математика пәнін оқытуда қолданалып жүрген кейбір әдістімелік жолдарына тоқтамақшымыз. Солардың бірі, геометриялық есептерінде жиі кездесетін қатынастарындағы байланыстарды, мүмкіншілігінше формула арқылы өрнектеп алынса, типтес күрделі есептерді шешеудің алгоритмдерінің пайдасы өте зор болады.BC

Жиі кездесіп жүрген есептердің бірін қарастырайық.

1-есеп. $ABC үшбұрышынында A˔єBC,$ $B\_{1}˔єBC,$ $AB\_{1}:B\_{1}C=m:n, BA\_{1}:A\_{1}C=p:q, AA\_{1}∩BB\_{1}=0. AO:OA\_{1} және BO:OB\_{1}$

Қатынастары неге тең?

Жауабы: $\frac{AO}{OA\_{1}}=\frac{m}{n}∙\left(\frac{q}{p}+1\right).$

 $\frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{p}{q}\left(\frac{n}{m}+1\right).$

 Осы типтес есептерге алынған теңдіктерді дайын формулалар ретінде қараған дұрыс.

Дәлелі (1-сурет). Берілгені $∆ABC$

 

$AB\_{1}:B\_{1}C=m:n; BA\_{1}:A\_{1}C=p:q. AO:OA\_{1}$ қандай?

 Сәтті сүйеніш элемент алуға тырысамыз. Мысалы $A\_{1}D||BB\_{1}$ болсын делік. Сонда бірнеше өзара ұқсас үшбұрыштар пайда болады екен.

Біріншіден ∆ $AOB\_{1}∾∆AA\_{1}D. $Фалес теоремасы бойынша: $\frac{AO}{OA\_{1}}=\frac{AB\_{1}}{B\_{1}D}.$

∆ $СA\_{1}D∾∆CBB\_{1}.$ Осы үшбұрыштарда $\frac{∆CD}{DB\_{1}}=\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}=\frac{q}{p}. \left(2\right).$ Бөлшектің негізгі қасиетіне сүйеніп $\frac{AO}{OA\_{1}}=\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}∙\frac{B\_{1}C}{B\_{1}D}. $ Соңғы өрнекті әрі қарай түрлендірейік: $\frac{AO}{OA\_{1}}=\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}∙\frac{A\_{1}D+DC}{B\_{1}D}=\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}∙\left(1+\frac{DC}{B\_{1}D}\right)=\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}\left(\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}+1\right).$

Осы теңдіктен $\frac{AO}{OA\_{1}}=\frac{m}{n}∙(1+\frac{q}{p})$

Есте сақтауға кеңес. Үшбұрыштың А төбесінен сағат тілінің бағытымен жылжып іздеген формуланы алғанымыз көрініп тұр. Екінші формуланы алғанымыз көрініп тұр. Екінші формуланы үшбұрыштың В төбесінен сағат тілінің жүрісіне қарама қарсы жылжып алдық:

$$\frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{BA\_{1}}{A\_{1}C}∙\left(\frac{CB\_{1}}{B\_{1}C}+1\right)<=>\frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{p}{q}\left(\frac{n}{m}+1\right).$$

 Соңғы формуланың дәлелін келтірейік.

2-суретте $B\_{1}E||A\_{1}A$ болсын делік. Сонда $B\_{1}E$ кесіндісін тіректі элемент ретінде пайдаланып қызыққа батамыз! ∆ $BOA\_{1}∾∆B\_{1}EB$ ұқсас үшбұрыштар. Сондықтан $\frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{BA\_{1}}{A\_{1}E}.$



$∆ A\_{1}CA∾∆ECB\_{1},$ендеше$\frac{CE}{EA\_{1}}=\frac{CB\_{1}}{B\_{1}A}=\frac{n}{m}$.

$$\frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{BA\_{1}}{A\_{1}C}∙\frac{A\_{1}C}{A\_{1}C}=\frac{BA\_{1}}{A\_{1}C}∙\left(\frac{A\_{1}E+EC}{A\_{1}E}\right)=\frac{BA\_{1}}{A\_{1}C}∙\left(1+\frac{CE}{EA\_{1}}\right).$$

Бұл жерде бөлшектің негізгі қасиетіне сүйеніп бөлшектің алымы мен бөліміне $А\_{1}С-ға$ көбейтіп, бөлдік.

$\frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{p}{q}∙\left(1+\frac{n}{m}\right). $Екінші формула дәлелденді. Енді О нүктесі арқылы $СС\_{1}$түзуін жүргізейік. Сонда $AA\_{1}∩BB\_{1}∩CC\_{1}=0$ болып тұр. Көне заманда математиктер: үшбұрыштың төбесінен өткен 3 түзу қандай шартты қанағаттандыруы қажет деген мәселемен айналысыпты.(3-сурет).

$$\frac{CO}{OC\_{1}}=\frac{CB\_{1}}{B\_{1}A}∙\left(\frac{AC\_{1}}{C\_{1}B}+1\right)=\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}∙\left(\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}+1\right), $$

$$\frac{CB\_{1}}{B\_{1}A}∙\frac{AB}{CB}=\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}∙\frac{BA}{C\_{1}A}$$



Осы теңдіктен алынған

$$\frac{AC\_{1}}{C\_{1}B}∙\frac{BA\_{1}}{A\_{1}C}∙\frac{CB\_{1}}{B\_{1}A}=1$$

формуланы Чева теоремосы дейді.

 Жоғарыдағы әңгімемізге сәйкес тағыда бір сұраққа математиктер жауап іздеген екен. Үшбұрышты қиған түзудің бойында 3 нүкте жатуы үшін қандай шарт орындалуы қажет ?

 Үшбұрыштың қабырғасына параллель емес l түзуі BC,CA,AB қабырғаларын $A\_{1},B\_{1},C\_{1}$ нүктелерінде қиып өтсін делік (4-сурет).

 Үшбұрфштың 3 төбесінен осы түзуге 3 перпендикуляр түзулер жүргізілсін. Оларды $AN=h\_{1}, BM=h\_{2}, CD=h\_{3}$ арқылы белгілейік.



Сонда төмендегі қатынастар орындалады:

$$\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}=\frac{h\_{1}}{h\_{3}}, \frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}=\frac{h\_{2}}{h\_{1}},\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}=\frac{h\_{3}}{h\_{1}}.$$

Осы қатынастарды мүшелеп көбейтсек

$\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C} ∙\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}∙\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}=1$(AA)

Бұл теңдікті бізге мұраға қалдырған жаңа дәуірде т.ғ өмір сүрген Менелей деген ғалым екен. Сондықтан (АА) формуласын сол кісінің атымен атауға келіскен. Алдағы мақсатымыз, алынған формулалардың көмегімен, әр түрлі деңгейдегі қиындықта берілген есептердің шығару жолдарын көрсету.

1-ші мысал. АВС үшбұрышында қабырғалары АВ=12 см, AC=12 cм,$АА\_{1}$бисектрисінде қиылысқан. $AO∶OA\_{1} және CO:OC\_{1}$ қатынастарының мәндері қандай?

 Шешуі (5-сурет). $∆ABC;A\_{1}\in BC; C\_{1}\in AB, AA\_{1}∩CC\_{1}=0, AC=8см, AB=12см; AO:OA\_{1}? CO:OC\_{1}?$

$AA\_{1} $бисектриса болғандықтан:

$\frac{BА\_{1}}{A\_{1}C}=\frac{AB}{AC}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2};$$\frac{BА\_{1}}{A\_{1}C}=\frac{3}{2}$

Медианың қасиеті бойынша $\frac{AС\_{1}}{С\_{1}B}=\frac{1}{1}$

Ендеше $\frac{AO}{OA\_{1}}=\frac{AC\_{1}}{C\_{1}B}∙(\frac{BA\_{1}}{A\_{1}C}+C)$=$\frac{1}{1}∙\left(\frac{3}{2}+1\right);$ $\frac{AO}{OA\_{1}}=\frac{5}{2}$

Ал $\frac{CO}{OC\_{1}}=\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}∙\left(\frac{BC\_{1}}{C\_{1}B}+1\right)=\frac{2}{3}∙\left(\frac{1}{1}+1\right);$ $\frac{CO}{OC\_{1}}=\frac{4}{3}$

Енді $BO∩AC=B\_{1}$ болса: Онда

$\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}∙\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}∙\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}=1, \frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}∙\frac{2}{3}∙\frac{1}{1}=1;$ $\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}=\frac{3}{2}$

$\frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}∙\left(\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}+1\right)=\frac{1}{1}∙\left(\frac{3}{2}+1\right);$ $\frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{5}{2}$

 2-мысал. ABC үшбұрышында $A\_{1}\in CB, B\_{1}\in AC, AA\_{1}∩BB\_{1}=0, A\_{1}B\_{1}∩CO=O\_{1}, C\_{1}\in AB, AO:AO\_{1}=2:3;BO:OB\_{1}=4:1, BA\_{1}O\_{1}C\_{1}$ төртбұрышының ауданы $S\_{°}$ болғанда барлық кесінділер мен пайда болған үшбұрыштардың ауданы қандай?

P.S. тегінде есептің шартында бір ғана элементтің, мысалы $A\_{1}O\_{1}:O\_{1}B\_{1}$қатынасының мәнін сұрауы мүмкін. Сол сияқты, мысалы $A\_{1}O\_{1}О$ үшбұрышының ауданын сурауы мүмкін.

 Біздер сіздермен біріге отырып, біріншіден барлық қатынастардың мәндерін, екіншіден үшбұрыштардың мәндері $S\_{°}$-дің сандық мәні берілгендегі жауабын көрсетпекшіміз. Бірінші топтағы есептерді шешу жолдары. Алдымен есептің мазмұнына сәйкес 6-суретке жүгінейік. Бұрынғы алынған теңдіктерге сүйенеміз.

 $\frac{AO}{OA\_{1}}=\frac{2}{3}; \frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{4}{1}$. Осы теңдікті ескеріп жүйе құрып оны шешеміз.

**

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{AO}{AO\_{1}}=\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}∙\left(\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}+1\right),\\\frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{BA\_{1}}{A\_{1}C}∙\left(\frac{CB\_{1}}{B\_{1}A}+1\right),\end{array}\right.$$

Әріптердің көптігі оқушының назарына бөгет жасауы мүмкін. Сондықтан жаңадан белгісіздер еңгізген тиімді болады:

$\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}=x;\frac{B\_{1}C}{AB\_{1}}=\frac{1}{x};\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}=y;\frac{A\_{1}B}{A\_{1}C}=\frac{1}{y}$ болсын делік.

Сонда $\left\{\begin{array}{c}x\left(y+1\right)=\frac{2}{3}\\\frac{1}{y}∙\left(\frac{1}{X}+1\right)=\frac{4}{1}\end{array}\right.$

Екі белгісізді бар сызықтық теңдеулер жүйесін құрдық. $\frac{1}{y}\left(\frac{1}{x}+1\right)=4; \frac{1}{x}=4y-1;$ $x=\frac{1}{4y-1}$

$x∙\left(y+1\right)=\frac{2}{3};\frac{y+1}{4y-1}=\frac{2}{3};3y+3=8y-2;y=1$ болды. Немесе $\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}=y=1;$

 $AA\_{1}-$үшбұрыштың бір медиасы екен.

Бірінші есептің шешуі $\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}=\frac{1}{1}$

$$x=\frac{1}{4y-1} теңдігінен x=\frac{1}{3};\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}=\frac{1}{3}$$

Екінші есептің жауабы $ \frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}=\frac{1}{3}$

 $CO∩AB=C\_{1}болсын. Чева теоремасы бойынша:$

$\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}∙\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}∙\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}$=1, $\frac{1}{3}∙\frac{1}{1}∙\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}=1$

 Үшінші есептің жауабы: $\frac{C\_{1}B}{AC\_{1}}=\frac{3}{1}$

Төртінші есеп:$\frac{CO}{AC\_{1}}-?$

$$\frac{CO}{OC\_{1}}=\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}∙\left(\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}+1\right)=\frac{1}{1}∙\left(3+1\right);Сонда \frac{CO}{OC\_{1}}=\frac{4}{1}$$

Біз есептің шартына сәйкес үшбұрыштың үш қабырғасы мен ішіндегі үш кесінделердің бөліктерін анықтадық:$\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}=\frac{1}{3}; \frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}=\frac{1}{1};\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}=\frac{3}{1};\frac{AO}{OA\_{1}}=\frac{2}{3};\frac{BO}{OB\_{1}}=\frac{4}{1};\frac{CO}{OC\_{1}}=\frac{4}{1}.$

 $A\_{1}B\_{1} және CC\_{1}кесінділері O\_{1}$ нүктесінде қиылысқан болсын (8-сурет). Сонда $\frac{CO\_{1}}{O\_{1}O}$ қатынасы қандай екен ? $ACA\_{1}$ үшбұрышында $\frac{A\_{1}O\_{1}}{O\_{1}B\_{1}}=\frac{A\_{1}O}{OA}∙\left(\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}+1\right)=\frac{3}{2}∙\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{1}; $ $\frac{A\_{1}O\_{1}}{O\_{1}B\_{1}}=\frac{2}{1}$

Келешекте осы қатынастың бізге пайдасы тиімді. Әзірше іздеп отырғанымыз $\frac{CO\_{1}}{O\_{1}O}=\frac{CB\_{1}}{B\_{1}A}∙\left(\frac{AO}{OA\_{1}}+1\right)=\frac{3}{1}∙\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5}{1}; \frac{CO\_{1}}{O\_{1}O}=\frac{5}{1}.$

 5-ші және 6-шә есептер жауабы:

$$\frac{A\_{1}O\_{1}}{O\_{1}B\_{1}}=\frac{5}{1};\frac{CO\_{1}}{O\_{1}O}=\frac{5}{1}.$$

Тағыда бірер түрлендірулер қарастырайық.

 $CC\_{1}кесіндісін$ тіректі элемент ретінде пайдаланайық:

Cонда $CO=\frac{4}{5}CC\_{1}; OC\_{1}=\frac{1}{5} CC\_{1}$. Енді $\frac{CO\_{1}}{O\_{1}O}=\frac{5}{1} $қатынасынан $CO\_{1}=\frac{5}{6}CO, ал CO=\frac{4}{5} CC\_{1}$ болып тұр. Сонымен $\frac{CO\_{1}}{O\_{1}O}=\frac{5}{6}∙\frac{4}{5}СС\_{1}=\frac{2}{3}СС\_{1};$

$CO\_{1}=\frac{2}{3}СС\_{1}$мына қызықты қарақыздар:$ O\_{1}O=CO-CO\_{1}=\frac{4}{5}CC\_{1}-\frac{2}{3}CC\_{1}=\frac{2}{15}CC\_{1};$

 $O\_{1}O=\frac{2}{15}CC\_{1}$ Біздер төмендегі есепке жауап дайындап қойдық: Осы шешім отырған есебімізде $O\_{1 }және O$ нүктелері $СС\_{1 }$кесіндісін қандай қатынаста бөледі. Жауабы: $CO\_{1}:O\_{1}O:OC\_{1}=\frac{2}{3}CC\_{1}:\frac{2}{15}CC\_{1}:\frac{1}{5}CC\_{1}=10:2:3. $

$CO\_{1}:O\_{1}O:OC\_{1}=10:2:3 $Тамаша а,2!