Международная научная конференция

«Теория функций, информатика, дифференциальные уравнения и их приложения»

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы-2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КОМИТЕТ НАУКИ
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ, ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КН МОН РК И ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КН МОН РК

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ИНФОРМАТИКА, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»,

посвященная 80-летию академика НАН РК Блиева Назарбая Кадыровича
Алматы 15–16 октября 2015 года

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы – 2015

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_\Gamma = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_\Gamma$$

называется индексом функций $G(t)$.

Если $\varkappa \le 0$, то задача (1) не имеет решений, исчезающих на бесконечности (Кроме тривиального $(t) = 0$); если $\varkappa > 0$, То она имеет $\varkappa$ линейно независимых решений, исчезающих на бесконечности.

Наши результаты позволяют, следуя [z], изучить и соответствующего (1) Однородную задачу сопряжения.

Литература

1. Бесов О.В. Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. : Наука, 1975. 480с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : физмат, 1962, 599с.
3. Блиев Н.К. Сингулярные интегральные операторы с ядром Коши в дробных пространствах. Сиб. мат. журнал, т.47, №1, с. 5-14.

УДК 517.95

Н. Аканбай, С.М. Нарбаева
Казахский национальный университет им.ал-Фараби
(Казахстан, Алматы)
e-mail: noureke@mail.ru, saltaerkesh@mail.ru

Среднее магнитное поле в многомасштабном турбулизованном потоке

Задача об эволюции магнитного поля в случайном турбулизованном потоке проводящей жидкости (или плазмы) является одной из самых важных во многих физических приложениях [1]-[2].

С математической точки зрения речь идет о решении задачи Коши для параболической системы

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial(t)} = v_m \triangle \vec{H} + rot\left[\vec{V} \times \vec{H}\right], \vec{H}(0,x) = \vec{H}_0(x)(t \ge 0, x \in R^3). \tag{1}$$

Здесь $\vec{V}(t,x)$ – заданное случайное векторное поле скоростей несжимаемой жидкости $(div \vec{V} = 0)$, v_m– магнитная вязкость, характеризующая свойства электропроводности среды. Начальное магнитное поле $\vec{H}_0(x)$ предполагается также бездивергентным.

Поскольку мы изучаем случайный поток жидкости, поле $\vec{V}(t,x)$ предполагается зависящим дополнительно от элементарного события $\omega \in \Omega$, которое индексирует реализации поля скоростей. В основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ действует естественным образом некоторая группа преобразований, по отношению к которой поле $\vec{V}(t,x)$ предполагается однородным и эргодическим по нужным переменным.

Коснемся теперь основных результатов физических теорий о поведении магнитного поля в случайном турбулизованном потоке.

Одним из самых первых и знаменитых работ в этой области была теория среднего поля Штейнбека-Краузе-Рэдлера (ШКР) [3]. Предполагая, что $< V_i(t,x)V_j(t',y) \ge 2\frac{l}{v}\delta(t-t')f_{ij}(x,y), l, \nu$ – характерные масштаб и амплитуда поля скорости (это свойство в физической литературе называется дельта-коррелированностью по времени) и однородным по пространственной координате, они доказали, что среднее магнитное поле $< \vec{H}(t,x) >$ удовлетворяет уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial < H_i >}{\partial t} = \beta_{jl}\frac{\partial^2 < H_i >}{\partial x_j \partial x_l} + \alpha_{ij,l}\frac{\partial < H_l >}{\partial x_j}. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, а угловые скобки $< >$ означает усреднение по основной вероятностной мере $\mathbb{P}$, т.е. усреднение по ансамблю реализации поля $\vec{V}(t,x)$. Постоянный тензор β_{jl} называется тензором турбулентной диффузии, а псевдотензор $\alpha_{ij,l}$–спиральностью. Особенно просто уравнение ШКР выглядит в изотропном случае, когда поле $\vec{V}(t,x)$не только однородно относительно сдвигов, но и инвариантно относительно группы вращений в R^3. В этом случае тензор β_{jl} сводится к скаляру $\beta = v_m + \frac{1}{3} < \vec{V}^2 >$, а псевдотензор $\alpha_{ij,l}$ к псевдоскаляру $\alpha = -\frac{1}{3} < \vec{V} rot \vec{V} >$, и уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial < \vec{H} >}{\partial t} = \beta\triangle < \vec{H} > + \alpha\ rot < \vec{H} >. \tag{2*}$$

Из уравнения (2*) легко выводится, что при α?0и надлежащих начальных условиях среднее поле растет экспоненциально. Считается, что теория ШКР с некоторыми оговорками хорошо описывает средние поля Солнца и звезд.

Вывод уравнения ШКР в работе [3] весьма громоздок и не вполне удовлетворителен с математической точки зрения. В серии работ Я. Б. Зельдовича, С. А. Молчанова и их учеников (см. библиографию [4]) был развит гораздо более простой и строгий в математическом смысле метод (метод случайных траектории) исследования магнитного поля. Существо этого метода (лагранжева подхода) состоит в следующем. Исходное уравнение (1), используя бездивергентность $\vec{V}$ и $\vec{H}$, можно переписать в виде

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = v_m \triangle \vec{H} - \left(\vec{V}\triangle\right)\vec{H} + \left(\vec{H}\triangle\right)\vec{V}, \quad \vec{H}(0,x) = \vec{H}_0(x). \tag{3}$$

Старшая часть стоящего в правой части (3) оператора действует по отдельности на каждую компоненту поля $\vec{H}(t,x)$, и по ней можно построить лагранжевую траекторию (диффузионный процесс) $\vec{\xi}_s$, $0 \le s \le t$, удовлетворяющую стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\vec{\xi}_s = \sqrt{2v_m}d\vec{W}_s - \vec{V}\left(t-s, \vec{\xi}_s\right)ds, \quad \vec{\xi}_0 = \vec{x}, \tag{4}$$

где $\vec{W}_s$ – стандартный винеровский процесс. Отдельные компоненты поля $\vec{H}$ зацепляются с помощью матричного потенциала $C(t,x)$ с элементами $C_{ij}(t,x) = \partial V_i/\partial x_j$.

Можно показать [12], что для искомого решения $\vec{H}(t,x)$справедлив матричный вариант формулы Каца-Фейнмана

$$\vec{H}(t,x) = M_x\left[\prod_{s=0}^{t}\left(E + C\left(t-s, \vec{\xi}_s\right)ds\right)\vec{H}_0(\vec{\xi}_t)\right] \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем знак условного математического ожидания M_x означ
усреднение по множеству лагранжевых траекторий, точнее говоря, по винеровск
мере, связанной с процессом $\overrightarrow{W}_s$. Особо отметим, что в (5) усреднение по
не производится, формула (5) справедлива для индивидуального поля скорост
Предполагая, что поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ обладает свойством обновления, легко получ
замкнутые моментные уравнения для любых моментов поля $\overrightarrow{H}(t,x)$. Эти уравнен
связаны с интегральными операторами, но в предположении, что время обновлен
$\tau > 0$, т.е. поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ становится дельта-коррелированным по времени, о
переходят в дифференциальные уравнения параболического типа. В частности, д
первого момента магнитного поля мы снова приходим к уравнениям ШКР.

Основной недостаток гипотез о дельта-коррелированности поля $\overrightarrow{V}(t,x)$ и
его обновления состоит в их физической нереалистичности. Современная теор
турбулентности, берущая свое начало из знаменитых работ А. Н. Колмогорова [5
[6], представляет турбулентное течение как совокупность вихрей различного размер
живущих в различное время, т.е. такой поток имеет иерархию масштабов.

Для того, чтобы отразить это обстоятельство в теории, мы вводим
настоящей работе так называемую многомасштабную модель, в которой по
$\overrightarrow{V}(l,x)$ представляется в виде суммы $\overrightarrow{V}(l,x) = \sum_{j=0}^{N} \overrightarrow{V}_j(l,x)$ полей
скоростей, имеющих различные времена обновления и различные пространственны
корреляционные масштабы. Если эти времена обновления по прежнему малы, то
развивая метод случайных траекторий, можно вывести уравнения для любых моментов
магнитного поля.

Основная цель настоящей работы – перенесение результатов теории ШКР на случай
многомасштабных течений. Перейдем теперь к основным результатам нашей работы.

Поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ называется *течением с обновлением*, если его можно представить в
виде $\overrightarrow{V}(l,x) = \overrightarrow{V}^{(k)}_{(x)}$ при $l \in [k\tau,(k+1)\tau)$, $k = 0,1,2,\ldots$, $\tau > 0$, где $\overrightarrow{V}^{(k)}_{(x)}$ – независимые
одинаково распределенные поля. Величина τ называется временем обновления.

Поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ назовем *многомасштабным течением*, если его можно представить в
виде суммы статистически независимых полей скоростей $\overrightarrow{V}_j(t,x)$, $j = 0,1,2,\ldots,N$,
имеющих различные времена обновления τ_j и различные корреляционные масштабы
$\ell_j = k_j^{-1}$, причем величины τ_j, $k_j = \xi_j^{-1}$. $\mathcal{V}_j = \sqrt{<\overrightarrow{V}_j^2>}$ подчиняются соотношениям:
$[\tau_0 > \tau_1 > \ldots > \tau_N,\ \ k_0 < k_1 < \cdots < k_N,\ \ \nu_0 > \nu_1 > \ldots > \nu_N, k_j\tau_j\nu_j < 1$
$(j = 0,1,2,\ldots,N)$.

В данной работе выведено уравнение для среднего магнитного поля в
многомасштабном течении, причем усреднение уравнения индукции проводилось
последовательно, начиная от самых малых масштабов. При этом на первом шаге для
усреднения $\overrightarrow{H}(t,x)$ по $\overrightarrow{V}_N$ была использована формулы (5) и показано, что частично
усредненное поле $<\overrightarrow{H}>_{\overrightarrow{V}_N}$ является решением некоторого уравнения типа ШКР, но
со случайными коэффициентами диффузии, спиральности и матричным потенциалом.
Таким образом перед вторым усреднением $<\overrightarrow{H}>_{\overrightarrow{V}_N}$ по $\overrightarrow{V}_{N-1}$ (это поле обозначим
через $<\overrightarrow{H}>_{N-1,N}$) возникает новая задача о получении для $<\overrightarrow{H}>_{\overrightarrow{V}_N}$ формулы-
представления, аналогичной формуле (5) для $\overrightarrow{H}(t,x)$. С этой целью доказана одна
общая теорема, относящаяся к представлению решений общих параболических систем,
включающим в качестве частного случая систему уравнений для $<\overrightarrow{H}>_{\overrightarrow{V}_N}$. Далее
доказана теорема усреднения для полученной системы параболических уравнений,
откуда в качестве следствия, получен основной результат.

Теорема. Пусть $\overrightarrow{H}(t,x)$ – решение уравнения индукции (3), и пусть в (3) поле $\overrightarrow{V}(t,x)$является многомасштабным. Тогда среднее магнитное поле $\overrightarrow{B} =<\overrightarrow{H}>_{0,1,\ldots,N}$, полученное в результате последовательного (начиная от самых малых масштабов) осреднения уравнения магнитного поля, является решением системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\beta^{(0)}\nabla,\nabla\right)\overrightarrow{B} + \left(A^{(0)}\nabla\overrightarrow{B}\right), \overrightarrow{B}(0,x) =<\overrightarrow{H}_0(x)>.$$

Коэффициенты турбулентной диффузии и средней спиральности определяются следующими соотношениями:

$$\beta^{(0)}_{jl} = 2v_m\delta_{jl} + b^{(0)}_{jl} + \sum_{p=1}^{N} < b^{(p)}_{jl} >_{0,1,\ldots,p-1},$$

$$\alpha^{(0)}_{ij,\ell} = a^{(0)}_{ij,\ell} + \sum_{p=1}^{N} < a^{(p)}_{ij,\ell} >_{0,1,\ldots,p-1} + \overline{a}^{(0)}_{jp,p}\delta_{i\ell} + \sum_{p=1}^{N} < \overline{a}^{(q)}_{jp,p}\delta_{i\ell} >_{0,\ldots,q-1},$$

причем для

$$p = 0,1,2,\ldots,N:\ b^{(p)}_{j\ell} = \frac{1}{\tau_p}\int_0^{\tau_p}\int_0^{\tau_p} M_x < V_{pj}\left(x\int_{s1}^{\cdot(p)}\right) V_{p\ell}(x\int_{s_2}^{\cdot(p)} > ds_1ds_2,$$

$$a^{(p)}_{ij,\ell} = -\frac{1}{\tau_p}\int_0^{\tau_p}\int_0^{\tau_p} M_x < \frac{\partial V_{pi}\left(\overrightarrow{x}^{(p)}_{s1}\right)}{\partial x_\ell} V_{pj}(\overrightarrow{x}^{(p)}_{s_2}) > ds_1ds_2,$$

$$\overline{a}^{(p)}_{ij,\ell} = \frac{1}{\tau_p}\int_0^{\tau_p}\int_0^{s} M_x < \frac{\partial V_{pi}\left(\overrightarrow{x}^{(p)}_{s1}\right)}{\partial x_\ell} V_{pj}(x^{\cdot(p)}_{s_2}) > ds_1ds_2,$$

$$\overrightarrow{x}^{(p)}_s = \overrightarrow{x} + \sigma^{(p+1)}\overrightarrow{W}_s - \overrightarrow{U}_{p-1}s, \quad \overrightarrow{u}_p = \sum_{j=0}^{p-1}\overrightarrow{V}_j, \quad \overrightarrow{U}_{-1} = 0,$$

$$\sigma^{(p)}\left(\sigma^{(p)}\right)^* = \beta^{(p)} =< \beta^{(p+1)} >_{\overrightarrow{V}_p} + \mathrm{B}^{(p)}, \ \ \beta^{(N+1)} = 2v_mE, \quad \mathrm{B}^{(p)} = \left\|b^{(p)}_{j\ell}\right\|^3_{j,\ell=1}$$

(В формулах (I8) под $V_{pj}(x)$ подразумевается $V_{pj}(0,x)$).

Далее в работе получены приближенные формулы для вычисления коэффициентов осредненного уравнения в случае изотропной турбулентности, введена и выяснена роль так называемого *магнитодиссипационного масштаба*.

Литература

1. *ZeldovickYa. B., RuzmaikinA.A., Sokoloff D.D* Magnetic field in astrophysics. - Grodonand Breach, 1984, 478 стр.
2. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. - М.: Мир, 1980, 339 стр.