МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КОМИТЕТ НАУКИ
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ, ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КН МОН РК И ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КН МОН РК

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ИНФОРМАТИКА, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»,

посвященная 80-летию академика НАН РК Блиева Назарбая Кадыровича

Алматы 15–16 октября 2015 года

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы – 2015

академик РАН Тайманов И. А. (Россия)
профессор Тлеубергенов М. И. (Казахстан)
профессор Тунгатаров А.Б. (Казахстан)
академик НАН РК Харин С.Н. (Казахстан)

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ
Председатель:
член-корр. НАН РК Калимолдаев М.Н.

Сопредседатели:
член-корр. НАН РК Байжанов Б.С.,
профессор Бектемесов М.А.,
профессор Кыдырбекулы А.Б.

Члены организационного комитета:

Профессор Мухамбетжанов С.Т., профессор Сихов М.Б., доцент Мустафин С.А., доцент Имангалиев Е., доктор PhD Мамырбаев О.Ж. член-корр. МАИН Сахариев Б.Б., доцент Абдуахитова Г.Е., Ахметов Е.Р., Ахметжанов М.А., Кабылханов А., Мажитов Ш.С., Анищенко Л.Н., Калиева Г.С.

Ученые секретари конференции:
Жунусова Ж.Х., к.ф.-м.н., Юничева Н.Р., к.т.н., к.ф-м.н, Сахауева М.А.

Секции Международной научной конференции:
Теория функций и функциональный анализ;
Теория дифференциальных уравнений и их приложения;
Математическое моделирование и уравнения математической физики;
Алгебра, математическая логика и геометрия;
Информатика и вычислительная математика.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

А.Тунгатаров Краткий очерк о научной и общественной деятельности академика Академии наук Республики Казахстан Н.К.Блиева 10

1 Теория функций и функциональный анализ 16

Ж.Ж. Байтуякова, М.Т. Ильясова Об ограниченности периодического преобразования Гильберта в пространстве типа Морри 16

Д.Б. Базарханов Наилучшие нелинейные приближения функций многих переменных 20

К.А. Бекмаганбетов, Е. Толеугазы Оценки наилучших приближений в анизотропных пространствах Лоренца 20

Н.А. Бокаев, Е.С. Смаилов, А.Т. Сыздыкова Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова по мультипликативным базисам ... 22

А.Б. Муканов О свойствах и приложениях обобщенных сетевых пространств 25

Е.Д. Нурсултанов, М.И. Дьяченко, Д.Г. Джумабаева О сходимости кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами 27

Р. Ойнаров Ограниченность и компактность одного класса интегральных операторов свертки типа дробного интегрирования 28

Е.С. Смаилов Теоремы вложения разных метрик в пространствах Лоренца в терминах наилучших приближений по многочленам Хаара 30

Н. Темиргалиев, М.Б. Сихов, М.А. Жайнибекова, Г.Т. Джумахаева, С.С. Кудайбергенов, Е.Е. Нурмолдин, Ш.К. Абикенова, М.Е. Берикханова, А.А. Шоманова, Г.Е. Таугынбаева, Н.Ж. Наурызбаев, А.Ж. Жубанышева Методы непрерывной и дискретной математики в задачах теоретической математики и научных вычислений 32

Л.П. Фалалеев О бигармонических операторах с полустепенными лакунами 37

Д.К. Чигамбаева Об интегральном операторе типа потенциала в пространствах типа Морри 37

A. Kopezhanova Integral properties of the Fourier transform for functions in generalized Lorentz spaces 39

2 Теория дифференциальных уравнений и их приложения 41

Г.А. Абдикаликова Разрешимость нелокальной краевой задачи в широком смысле для системы уравнений в частных производных ... 41

И. Абитбеков Однородная задача сопряжения 43

Н. Аканбай, С.М. Нарбаева Среднее магнитное поле в многомасштабном турбулизованном потоке 44

К.Б. Бапаев, С.С. Сламжанова О существовании решений некоторых уравнений в частных разностях 48

А.С. Бердышев,Н.С. Ахтаева, Ж.А. Серикбаев Краевые задачи и их спектральные свойства для смешанного параболо- гиперболического уравнения с интегральными условиями сопряжения 50

Н.К.Блиев, К.Е.Шерниязов Вполне непрерывность некоторых комбинаций операторов сингулярного интегрирования с ядром Коши, сдвига и комплексного сопряжения 53

Н.А. Есиркегенов Об одной задаче для волнового уравнения с данными на всей границе 55

К.С. Жилисбаева, А.Ж. Исмаилова, А.Д. Саспаева, Д.Т. Тулекенова Построение управляющих моменто, демпфирующих колебания намагнического спутника 57

Л.К. Жапсарбаева Об однозначной разрешимости одной сингулярной эллиптической системы второго порядка в пространстве Лебега 59

Ж.К. Джобулаева Решение задачи для системы параболических уравнений с малыми параметрами в условиях сопряжения 60

Д.С. Джумабаев, А.Т. Асанова Метод параметризации в исследовании и решении двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра 61

С.С. Жуматов Неустойчивость программного многообразия неявных дифференциальных систем 63

Ж.Х. Жунусова, К.А. Досмагулова Построение поверхности соответствующей солитонному решению 66

Ж.М. Кадирбаева, К.Р. Момынжанова О разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка 69

Т.Ш. Кальменов Критерий граничности линейных интегральных операторов 71

К.К. Кенжебаев, А.Б. Бержанов Многопериодическое по части переменных решение одной счетной системы гиперболического типа 73

К.К. Кенжебаев, Ж.А. Сартабанов Об интегрировании уравнений Якобы и канонической системы D-уравнений 76

М.А. Садыбеков, Б.Х. Турметов Новый класс корректных краевых задач теории аналитических функций 77

Ж. Сулейменов О построении устойчивого периодического решения нелинейной системы дифференциальных уравнений 80

Ж.Н. Тасмамбетов Построение нормально-регулярных решений специальной системы типа Вильчинского 81

М.И. Тлеубергенов, Д.Т. Ажымбаев К вопросу построения стохастичских дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию 83

Ж.А. Токибетов, Г.К. Рзаева Представление решений обобщенной системы Коши-Римана с непрерывными коэффициентами. 86

Ж.А. Токибетов, Г.А. Абдуахитова, С.М. Нарбаева Об одной задаче для гиперболической системы первого порядка 90

А. Тунгатаров, А. Болат Краевая задача с заданным ростом на бесконечности для систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка в угловой области 92

А. Тунгатаров, С. Абдыманапов Краевая задача типа Робина для одного класса эллиптических систем n-го порядка в угловой области плоскости 93

З.Д. Усманов Интегральные операторы сингулярных обобщенных систем Коши-Риман 96

М.Д. Шинибаев, А.А. Беков, Б.Н. Рахимжанов, О. Кашикбаев, Б.З. Абдукадиров, Б.Д. Оразов Построение промежуточной орбиты ИСЗ в поле тяготения Хилла 101

G.A. Abdikalikova Multiperiodic solution of boundary value problem for parabolic type equation with variable coefficients 104

A.T. Assanova, A.E.Imanchiev On the solvability of a multi-point boundary value problem with integral condition for a differential equation third order 107

G.I. Bizhanova Investigation of the nonregular initial and boundary value problems for the parabolic equations in the weighted Hölder spaces 109

O.M. Penkin On some incompatible inequalities on stratified sets 110

B.T. Torebek On a nonlocal problem for the Laplace equation with fractional boundary conditions 111

M.A. Shaimardanova On the solution of non-regular problem for the parabolic equation 113

3 Математическое моделирование и уравнения математической физики 114

Ж. Абдикеримова Сингулярлы ауытқыған жоғарғы ретті теңдеулер үшін бастапқы секірісті шеттік есептер 114

А.Ш. Акыш О принципе максимума для уравнений Навье–Стокса 115

Л.А. Алексеева Обобщенные решения краевых задач теории упругости при сверхзвуковых транспортных нагрузках 118

А. Ашыралиев, А.М. Сарсенби Об устойчивости уравнения гиперболического типа с инволюцией 120

К.Р. Есмаханова, Г.Т. Бекова, М.Т. Ильясова, Ж.Р. Мырзакулова Преобразование Дарбу в виде представления детерминанта для (1+1)-мерного неоднородного нелинейного уравнения Шредингера 125

Г.К. Закирьянова Импульсные источники в анизотропной среде 127

А. Мырзакул, Г. Турсумбаева Об одной интегрируемой спиновой системе с потенциалом 130

Г. Нугманова, А. Мырзакул, Р. Аканова Преобразование Дарбу для обобщенной модели Гейзенберга 132

М.И. Рамазанов, Н.Т. Орумбаева, А.К. Жанболова О краевой задаче для уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой 134

А.М. Сыздыкова, У.А. Уалиханова, Г.Н. Шайхова Екі компонентті жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер теңдеуінің солитондық шешімдері 137

Б.Х. Турметов, С.Э. Мамурова Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Лапласа 139

Е.М. Хайруллин Об одном подходе к решению граничной задачи для параболического интегро-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом 141

M. Akhymbek Renovation of the fixing and loading factors of the beam by the spectral data of free flexural vibrations 144

A.V. Alexeyeva, G.A. Amirkhanova (2+1)-dimensional nonlinear A6-model of economic processes and phenomena 145

A.B. Duisenbaeva, L.K. Zhumanova Iterative principal components analysis 147

A. Sakabekov, Y. Auzhani Mixed value problem for one-dimensional nonlinear Boltzmann's moment system equations with Maxwell-Auzhan boundary conditions 149

4 Алгебра, математическая логика и геометрия 153

Н.К. Аренбаев К преобразованию квадратичных форм. 153

Б.Ш. Кулпешов, А.Б. Алтаева Свойства слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 2 155

Д.М. Курманбаев Разрушающие решения модифицированного уравнения Веселова-Новикова и поверхность Эннепера третьего порядка 159

Т.Д. Туканаев Восстановления регулярной поверхности по заданной сумме главных радиусов кривизны 162

B.S. Baizhanov, T.V. Batura, F.A. Murzin, M.V. Nemchenko, A.A. Perfiliev Algorithms of definition of degree of similarity of sentences in a natural language 165

B.S. Baizhanov, T.V. Batura, N.S. Kopylova, F.A. Murzin, M.V. Nemchenko, A.V. Proskuryakov On some formal methods of analysis of online social networks 166

S.S.Baizhanov, T.Zh. Saulebayeva Model completeness of the expansion of almost o - minimal theories 168

V.V. Verbovskiy On non-empty interior of infinite definable subsets of ordered o-stable fields 169

T.S. Zambarnaya Non-homogenous countable models and finite diagrams 170

O.A.Umbetbayev Some questions of inessential expansion of theory and the number of countable models 171

5 Информатика и вычислительная математика 172

А.Е. Абдуакитова Методика обучения билингвов в ВУЗ-ах при изучении информатики 172

А.А. Адамов, А.Д. Адамова Автоматизация процесса оценки стоимости недвижимости 173

Р.Г. Бияшев, Н.А. Капалова, С.Е. Нысанбаева, Д. Дюсенбаев Программная реализация модели асимметричной системы шифрования на базе НПСС 175

А.Б. Есеналиева, Н.Г. Макаренко, И.Т. Пак Применение топологического анализа для распознавания текстур 178

Е.А. Касымов Об еще одном выводе неизвестных в квадратурной формуле Ньютона-Котеса 179

С.И. Колесникова Метод управления в нелинейных плохо формализуемых системах с аналитически заданной целью управления 182

Ж. Мусина, С. Мустафин **Моделирование и прогнозирование процессов твердения** 185

Г.А.Самигулина, З.И.Самигулина **Иммунносетевое моделирование свойств новых лекарственных препаратов - сульфаниламидов на основе онтологического подхода** 187

Н. Тасболатулы, Р.Р. Мусабаев **Исследования биометрических датчиков в речевых технологиях** 189

К. Таттибеков **Численный эксперимент для одного (1+1)-мерного обобщенного уравнения Ландау-Лифщица** 191

О.И. Ширяева, Т.Г. Денисова **Разработка алгоритма получения оптимального количества сульфаниламидов на основе теории искусственных иммунных систем** 194

Н.Р. Юничева, З.Г. Хисамиев **О разрешимости системы интервальных алгебраических уравнений для задачи управления объектом с неточными данными** 197

Ye.N. Amirgaliyev, O.Zh. Mamyrbayev,T.A. Muratkhanova **The control algorithm of data exchange in wireless sensor system** 198

A. Anishenko, G. Kalieva **About some singularities of application of scientometric indicators** 199

A.G. Zagiyeva **Software-Defined Networks integration into current system** 202

А.Тунгатаров
Казахский национальный университет имени аль-Фараби (Казахстан, Алматы)

Краткий очерк о научной и общественной деятельности академика Академии наук Республики Казахстан Н.К.Блиева

Назарбай Кадырович Блиев - известный ученый - математик, специалист в области теории дифференциальных уравнений математической физики и функционального анализа, внесший крупный вклад в теорию обобщенных аналитических функций, краевых задач для уравнений математической физики и в теорию сингулярных интегральных уравнений в функциональных пространствах, родился 15 сентября 1935 года в поселке Жаркамыс Байганинского района Актюбинской области в семье служащего. В 1952 году окончил Жаркамысскую среднюю школу.

В 1952 году Н.К.Блиев поступил на математическое отделение физико-математического факультета КазГУ им. С.М.Кирова. В университетские годы с интересом слушал лекции профессора К.П.Персидского и доцентов Х.И.Ибрашева, М.Я.Ятаева, Ш.М.Еникеева. Под руководством К.П.Персидского писал дипломную работу по теории устойчивости. В 1957 году окончил с отличием КазГУ им. С.М.Кирова и получил предложение поехать в Москву для поступления в аспирантуру Математического института им. В.А.Стеклова (МИАН) СССР, но выбрал направление на работу в Гурьевский Пединститут, чтобы успеть выполнить сыновный долг перед воспитавшей его дорогой бабушкой Баян, которая в то время была уже в преклонном возрасте. В те годы в Гурьевском Пединституте не хватало педагогических кадров, Н.К.Блиев с полной нагрузкой и интересом работал преподавателем, а затем и старшим преподавателем до 1960 года, читал лекции, вел практические занятия почти по всем разделам математики.

В 1960 году он поступил в аспирантуру МИАН СССР. Первым его научным руководителем и наставником был доктор физико-математических наук Владимир Сергеевич Виноградов - ученик академика АН СССР Ильи Несторовича Векуа.

Первоначальные научные результаты Н.К.Блиева относятся к вырождающимся в точке эллиптическим системам дифференциальных уравнений на плоскости. Он начал заниматься вопросом: при каких условиях на коэффициенты, вырождающиеся эллиптические системы на плоскости имеют аналитические решения в окрестности особой точки. Такими проблемами занимались известные математики И.Н.Векуа, В.Шмидт, А.И.Янушаускас, Л.Г.Михайлов, З.Д.Усманов и др.

Назарбай Кадырович занимался изучением поведения решения эллиптических систем дифференциальных уравнений в окрестностях особых точек коэффициентов. Были получены необходимые и достаточные условия существования аналитических решений вырождающихся эллиптических систем первого порядка в окрестности точек вырождения. Рассматриваемые особенности (или вырождения) были такими, что трудно было ожидать существование даже ограниченных решений. Поэтому, чтобы доказать аналитичность решения пришлось проявить незаурядную изобретательность и настойчивость. Эти результаты положили начало другим исследованиям о возможности существования непрерывных решений, связанных с вопросами теории поверхностей в геометрии. Указанные результаты Н.К.Блиева высоко оценил И.Н.Векуа, отметив их в 1969 году на Международной конференции в Токио.

В 1965 году Н.К.Блиев успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему "О существовании аналитических решений у вырождающихся эллиптических систем в окрестности точки вырождения".

В дальнейшем проблемами такого типа, а именно эллиптическими системами на плоскости с сингулярными коэффициентами начали заниматься ученики Н.К.Блиева А.Б.Тунгатаров, С.А.Абдыманапов, Г.Абдуахитова и др. Под руководством Назарбая Кадыровича нами построены теория непрерывных решений эллиптических систем на плоскости с сингулярными точками, имеющая важные приложения в дифференциальной геометрии. Эти результаты вошли в мою докторскую диссертацию, успешно защищенную в 1994 году. По указанному направлению под моим руководством защищены 8 кандидатских диссертации, 4 Ph-докторских диссертации и десятки магистерских диссертации.

С 1966 года начинается тесная творческая связь Назарбая Кадыровича Блиева с академиком Ильей Несторовичом Векуа. Он начал заниматься предложенной И.Н.Векуа проблемой - продолжением теории обобщенных аналитических функции И.Н.Векуа на предельные случаи, т.е. на класс коэффициентов эллиптических систем, суммируемых в степени не более чем два.

Хорошо известно из университетского курса, что теория аналитических функций одного комплексного переменного представляет собой теорию системы Коши-Римана, которая является частным случаем другой эллиптической системы с переменными коэффициентами, названной И.Н.Векуа обобщенной системой Коши-Римана. Попытка построения теории обобщенной системы Коши-Римана была предпринята еще Бельтрами. В начале 30-х годов прошлого столетия шведский математик Т.Карлеман и румынский математик Т.Теодореску показали, что некоторые свойства решений обобщенной системы Коши-Римана переносятся на решения отдельных эллиптических систем. Только в начале 50-х годов благодаря работам И.Н.Векуа была создана единая теория общих эллиптических систем первого порядка на плоскости, имеющая богатые приложения в различных разделах анализа, геометрии и механике. Она, называемая теорией обобщенных аналитических функций (ОАФ), была построена в пространствах Соболева $W_p^l, l \geq 0$ - целое, $p > 2$, и охватывает обобщенные решения уравнения Карлемана - Векуа с коэффициентами, принадлежащими на всей плоскости комплексного переменного z классу $L_(p, 2), p > 2$, совпадающему в ограниченных областях $G \subset E$ с пространством $L_p, p > 2$.

В декабре 1969 года после очередного доклада Н.К.Блиева на семинаре, И.Н.Векуа предложил ему заниматься проблемой о возможности (или невозможности) приемлемого продолжения теории ОАФ на крайние предельные случаи, а именно, на класс коэффициентов эллиптических систем, суммируемых в степени не более чем два. Такое неожиданное предложения И.Н.Векуа было в высокой степени ответственным, одновременно и престижным. В те годы Н.К.Блиев работал в лаборатории профессора Т.И.Аманова, являющегося и директором института, ученика академика, АН СССР С.М.Никольского. Такие связи навели его на мысль: обратиться к шкале пространств Никольского-Бесова, где можно найти и более точные описания свойств функций. Указанные пространства в те годы еще не были приспособлены для изучения уравнений с переменными коэффициентами. Н.К.Блиеву впервые удалось доказать необходимые для этого утверждения о мультипликаторах и получить соотношения между параметрами пространств, в которые может быть продолжена теория Векуа. Приведу отрывок из отзыва И.Н.Векуа на эти результаты в письме, адресованном на имя директора Института Т.И.Аманова: "Тбилиси, 23.06.1971 г. ... Сегодня мы слушали на семинаре доклад тов. Н.К.Блиева, который нам очень понравился. Считаю, что он нашел новый класс эллиптических систем, который допускает непрерывные решения. Полученные результаты безусловно следует опубликовать и, кроме того, целесообразно продолжить дальнейшие исследования в этом направлении...". Полное решение указанной проблемы Векуа Блиевым Н.К. удалось сформулировать в шкале B - пространств (Бесова), оно содержит расширение теории Векуа, известной в пространствах Соболева. Следует отметить, удачность расширения класса ОАФ на семейство обобщенных решений общих эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости с коэффициентами из B - пространств с показателем суммируемости $p > 1$, не вложенных в $L_p, p > 2$. Эти семейства содержат даже такие функции, которые не суммируемы в обычном смысле, но сохраняют ряд основных топологических свойств аналитических функций комплексной переменной. Результаты Н.К.Блиева имеют неординарные последствия в различных областях математики. Например, уточнены давно устоявшиеся результаты фундаментального характера, такие, как условия существования классических решений дифференциальных уравнений в частных производных, общих краевых задач типа Римана - Гильберта, задач сопряжения, квазиконформных отображений, являющихся непрерывно дифференцируемыми гомеоморфизмами Бельтрами. Установлена нётеровость сингулярных интегральных уравнений в классах функций, непрерывных (необязательно по Гельдеру) в терминах B - пространств и др. Таким образом, усилены возможности и расширен круг приложений ОАФ.

Применение теории дробных пространств с непрерывными изменениями показателей гладкости к изучению задач дифференциальных уравнений явилось новым направлением в теории дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Изучение дифференциальных уравнений и краевых задач для них в дробных пространствах без предположения достаточной гладкости коэффициентов начато в работах Н.К.Блиева. В этих работах аналитический аппарат теории обобщенных функций продолжен на дробные пространства О.В.Бесова, полностью исследована обобщенная задача Римана-Гильберта для уравнения Карлемана-Векуа в дробных пространствах, вложенных в класс суммируемых со степенью два функций. При этом граничные данные задачи могут задаваться из таких классов Бесова, которые вложены в класс непрерывных функций, но не вложены в класс функций, непрерывных в смысле Гёльдера. Доказано, что уравнение Бельтрами с коэффициентами из класса Бесова, вложенного в класс непрерывных функций, имеет непрерывно дифференцируемый (локальный и глобальный) гомеоморфизм. Следует отметить, что до работ Н.К.Блиева дифференцируемость квазиконформных отображений обеспечивались только непрерывностью в смысле Гёлдера коэффициентов уравнения Бельтрами.

Назарбаевым Кадыровичем Блиевым доказаны существование классических решений уравнений Карлемана-Векуа при любых непрерывных коэффициентах из класса Бесова, основная теорема представления для обобщенных аналитических функций через аналитические функций, когда коэффициенты соответствующей эллиптической системы принадлежат дробным пространствам О.В.Бесова, ограниченность основного интегрального оператора типа потенциала и основного сингулярного интегрального оператора теории обобщенных аналитических функций, а так же получены необходимое и достаточное условия ограниченности этих операторов в терминах индексов класса Бесова.

Им впервые получены условия принадлежности классу непрерывных функций в замкнутой области интегрального оператора типа Коши, когда плотность не принадлежит классу Гёльдеровых функций.

Результаты, относящиеся к дифференциальным уравнениям и краевым задачам в ограниченных областях, вошли в докторскую диссертацию Н.К.Блиева "Эллиптические системы дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости в дробных пространствах и краевые задачи", успешно защищенную в МИ АН СССР в 1980 году. Внешняя организация - Институт математики СО АН СССР, официальные оппоненты - член-корр. АН СССР А.Б.Бицадзе, академик АН Украинской ССР И.И.Данилюк, доктор физико-математических наук, профессор МГУ, академик АН Узбекистана Ш.А.Алимов.

Более подробные функциональные свойства ОАФ изложены в монографии Блиева Н.К. "Обобщенные аналитические функций в дробных пространствах", изданной в Алмате издательством "Наука" в 1985 году. Данная монография получила широкое одобрение и предложение специалистов из дальнего зарубежья перевода на английский язык. Результаты для неограниченных областей содержатся в монографии, изданной в престижной международной серии "? Питмановские монографии и исследования по теоретической и прикладной математике" на английском языке в 1997 г.

Различные аспекты теории обобщенных аналитических функций и ее многочисленные приложения разрабатываются и учениками Н.К.Блиева. А.А.Аскаров, Ж.Идрисов, Г.К.Капишев изучали различные краевые задачи для обобщенных аналитических функций в дробных пространствах Бесова.

Задиной и Ауезбаевой были исследованы задачи Римана-Гильберта для общих линейных и нелинейных эллиптических систем на плоскости в дробных пространствах. Обобщенная задача Римана-Гильберта в многосвязных областях и задача с косой производной для уравнения Карлемана-Векуа в дробных пространствах рассмотрены в работах Абитбекова И.А. и Аскарова А.А.. Адирискалиевой Ж.Н. исследована задача сопряжения для уравнения Карлемана-Векуа в неограниченной области.

Краевые задачи для эллиптических систем четвертого порядка и некоторые двумерные сингулярные интегральные уравнения в дробных пространствах приведены в работах С.А.Абдыманапова и Х.У.Задиной. Под руководством Н.К.Блиева в работах В.М.Дадиомова, Г.К.Капишева и других изучаются различные граничные задачи для эллиптических уравнений на плоскости, не удовлетворяющие условию нормальности.

Ими получены условия нётеревости, задач сопряжения, граничные условия которых содержат производные искомых обобщенных аналитических функций в случае, когда в точках границы нарушается условие нормальности. Следует отметить, что такие случаи ранее исследованы только для аналитических функций.

В настоящее время результаты Н.К.Блиева и его учеников получили признание специалистов и в дальнем зарубежье.

Н.К.Блиеву и его ученикам принадлежат также важные результаты о разрешимости в солитонах ряда нелинейных уравнений математической физики, как уравнение Шредингера, Кортевега-де Фриза и др. По этим результатам под руководством Н.К.Блиева защищена одна докторская диссертация и три кандидатские диссертации.

Назарбай Кадырович Блиев более двадцати лет является научным руководителем научных проектов министерства образования и науки Республики Казахстан. Последние годы занимается исследованием условия разрешимости краевых задач для аналитических функции и естественным образом связанных с ними сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и со сдвигом Карлемана в дробных пространствах Бесова, допускающих предельные теоремы вложения в пространство непрерывных функций. Известно, что сингулярный интеграл с произвольной непрерывной плотностью не имеет непрерывных граничных значений. Н.К.Блиев доказал, что сингулярный интеграл Коши по Ляпуновскому контуру с произвольной плотностью, принадлежащей пространствам Бесова, вложенных в класс непрерывных функций, допускает непрерывные на контуре граничные значения, выводил формулу Сохоцского-Племеля и многие другие положения классического анализа. Он сейчас занимается над доказательством теорем Нётера о разрешимости сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и решением краевых задач в дробных пространствах, которые будут полезны в соответствующих исследованиях по математике, теоретической и прикладной механике.

Начиная с 1963 года вся научная деятельность Н.К.Блиева связана с Институтом математики и механики Национальной Академии наук Республики Казахстан, в котором он последовательно проходит все ступени профессионального роста от младшего научного сотрудника до директора института: с октября 1963 года - МНС, с 1966 года - СНС, с 1978 года - зав. лабораторией функционального анализа и теории функций, в 1988 году избран на альтернативной основе директором Института, с 2000 года - почетный директор, ГНС Института математики. Получив эстафету директора Института из рук академика У.М.Султангазина, Н.К.Блиев внес свой вклад в научно-организационную деятельность института. Несмотря на экономические трудности тех перестроечных лет, сумел организовать спокойную творческую атмосферу, активно поддерживая способных молодых математиков, и способствуя участию ученых института в различных международных научных форумах. Это дало свои плоды. Институт стал одним из ведущих институтов Отделения физико-математических наук, усилилась тенденция международной деятельности, и укрепились международные контакты.

Н.К.Блиев много времени уделяет преподавательской работе, с 1964 года не прерывал педагогическую деятельность по совместительству в родном КазГУ, ныне КазНУ имени Аль-Фараби, заведовал кафедрой функционального анализа и теории вероятностей. В последние годы является профессором кафедры теоритической и прикладной математики КазНУ им. аль-Фараби.

Н.К.Блиев активно занимается научно-организаторской и общественной деятельностью, является членом редколлегии журналов "Известия, серия физико-математическая" НАН РК, "Математический журнал МОН РК", " Вестник" КазНУ им. Аль-Фараби, диссертационного Совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Института Математики МОН РК.

С 1999-го по 2002 год работал академиком - секретарем отделения физико-математических наук, был членом президиума ВАК (ГАК), председателем секции физико-математических наук Терминологического комитета при Кабинете Министров Республики, членом Комитета по государственным премиям РК, Президиума Академия наук, заместителем ответственного редактора журнала "Известия, серия физико-математическая" НАН РК, членом редколлегии журналов "Математический журнал МОН РК", "Вестник МОН РК", Энциклопедии РК, Фонда развития науки, диссертационных советов Института математики АН Узбекистана, Актюбинского университета им. К.Жубанова. Организовал и участвовал в организации ряда Международных научных форумов в городах Алматы, Актобе и Семипалатинске.

Н.К.Блиев опубликовал более 200 научных трудов, среди его прямых учеников 25 кандидатов наук и 3 доктора наук, которые имеют свою школу и учеников. Он воспитывал десятки Ph-докторов и магистрантов. Научные заслуги Н.К.Блиев получили широкое признание. В 1985 году получил звание профессора, 1989 году он был избран членом - корреспондентом АН Казахстана, в 1996 году - академиком Российской академии естественных наук, с 2004 года Н.К.Блиев - академик НАН РК.

В 1998 году Н.К.Блиеву присвоено звание " Заслуженный деятель науки и техники РК", в 1999 году удостоен международной премии Хорезми первой степени.

Научные и общественные заслуги Н.К.Блиева отмечены Почетными грамотами Верховного Совета Казахской ССР, ЦК КП Казахстана, Совета Министров Каз.ССР, Казсовпрофа, ЦК ЛКСМ Казахстана, медалями "Ветеран Труда" и "Десять лет Независимости РК", нагрудным знаком "Почетный работник образования РК".

Н.К.Блиев выступил с докладами на многих Международных форумах, в том числе на Международном конгрессе математиков в 1983 г. в Варшаве, во втором Европейском конгрессе математиков в 1996 г. в Будапеште, на конференции Европейского математического общества в 2004 г. в Польше и др. В составе различных делегаций и в разные годы был во многих городах как Дели, Бомбей, Хайдарабад, Мадрас, Пекин, Сеул, Стамбул, Анкара, Конья и др.

Н.К.Блиев - образцовый отец и супруг. Жена Раушан Кашкеновна - доктор биологических наук, ГНС. Дочь Дана - математик, успешно окончила магистратуру в США, работает в иностранной фирме по нефти. Сыновья Ернар и Даурен - кандидаты наук, успешно работают в структурах бизнеса.

1 Теория функций и функциональный анализ

УДК 517.52

Ж.Ж. Байтуякова[1]**, М.Т. Ильясова**[1]
[1]Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Казахстан,Астана
baituyakova.zhzh@yandex.ru

Об ограниченности периодического преобразования Гильберта в пространстве типа Морри

Непериодическое и периодическое преобразования Гильберта являются классическими объектами в гармоническом анализе.

Определение. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $0 \leq \lambda \leq 1/p$. Будем говорить,что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит (непериодическому) пространству Морри $M_p^\lambda(\mathbb{R})$, если $f \in L_p(B(x,r))$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $r > 0$, следующее выражение конечно:

$$\|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))}.$$

Определение. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $0 \leq \lambda \leq 1/p$. Будем говорить,что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,$2\pi$-периодическая, принадлежит пространству Морри $M_p^\lambda(\mathbb{T})$, если $f \in L_p(B(x,r))$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $r > 0$, следующее выражение конечно:

$$\|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{T})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{0<r\leq\pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))}.$$

Если в определении M_p^λ вместо $r^{-\lambda}$ рассмотрим измеримую весовую функцию ω, тогда оно становится пространством типа Морри $M_{p,\omega}$.

Определение. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и ω измеримая, весовая и положительная функция на $(0,\infty)$. Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-периодическая принадлежит пространству $M_{p,\omega}(\mathbb{T})$, если если $f \in L_p(B(x,r))$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $r > 0$, следующее выражение конечно:

$$\|f\|_{M_{p,\omega}(\mathbb{T})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{0<r\leq\pi} \omega(r) \|f\|_{L_p(B(x,r))}.$$

Для данной функции $f \in M_{p,\omega}(\mathbb{T})$, положим

$$f^{\square}(x) := \chi_{[-2\pi,2\pi]}(x) f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\chi_{[-2\pi,2\pi]}$ обозначает характеристическую функцию на интервале $[-2\pi, 2\pi]$. Это функция $f^{\square}$ принадлежит (непериодическому пространству) пространству $M_{p,\omega}$. Далее нам пригодится следующее свойство.

Лемма 1. Пусть$1 < p < \infty$ и ω измеримая весовая функция на $(0,\infty)$. Тогда выполняется следующая оценка

$$\|f|M_{p,\omega}(\mathbb{T})| \ \leq \|f^{\square}|M_{p,\omega}(\mathbb{R})\| \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f|M_{p,\omega}(\mathbb{T})\|$$

для всех $f \in M_{p,\omega}(\mathbb{T})$. Доказывается как случае $M_p^\lambda([1])$.

Определение. Периодическое преобразование Гильберта периодической функции $f \in L_1(\mathbb{T})$ определяется в смысле главного значения Коши

$$(Hf)(x) := \widetilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\text{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \cot\frac{u}{2} du = \frac{1}{2\pi} \lim_{\delta\downarrow 0} \int_{\delta<|u|<\pi} f(x-u)\cot\frac{u}{2} du$$

в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ в которой этот предел существует.

Утверждение 1. Пусть $1 < p < \infty$.

1.Преобразование Гильберта T принадлежит $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}))$, т.е., оно отображает $L_p(\mathbb{R})$ ограничено в себя. (Рисс М., 1927 [[4], Утв.8.19])

2. Периодическое преобразование Гильберта T принадлежит $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{T}))$, т.е., оно отображает $L_p(\mathbb{T})$ ограничено в себя.([[4], Утв.9.1.3]).

3. Для $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ имеем [[4],Утв.9.1.8]

$$c_k(Hf) = (-i \quad sign \quad k)c_k(f), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

.

Здесь $c_k(f)$-коэффициенты Фурье функции f,

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

.

Замечание 1. Ограниченность (непериодического) преобразования Гильберта в пространстве Морри известна значительно давно (Peetre[2],1966).

Замечание 2. В случае $\Phi(r) : r^{\lambda}, r > 0$ просто напишем L_p^{λ} вместо L_p^{Φ}. Тогда означает

$$\|Tf^{\square}|L_(B(x,r))\| \le C_0\|f|M_{p,\omega}(\mathbb{T}).$$

Теорема 1.Пусть $1 < p < \infty$ и ω измеримая, весовая и положительная функция на $(0,\infty)$. Тогда периодического преобразования Гильберта H отображает $M_{p,\omega}$ непрерывно в себя.

Доказательство. Пусть$f \in M_{p,\omega}$. Поскольку $M_{p,\omega} \hookrightarrow L_p$ утверждение 1 (2) предполагает $Hf \in L_p$. Мы хотим доказать

$$\|Hf|L_p(B(x,r))\| \le C \qquad \forall x \in [-\pi,\pi] \quad \text{и} \quad \forall r, \quad 0 < r \le \pi$$

Напомним, была определена выше, см.(1).

По определению

$$Hf(x) = \frac{1}{2\pi}\text{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)cot\left(\frac{x-u}{2}\right)du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\text{P.V.} \int_{u:|x-u|\le\pi} f^{\square}(u)cot\left(\frac{x-u}{2}\right)du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\delta\downarrow 0} \int_{\{u:\delta<|x-u|\le\pi\}} f^{\square}(u)cot\left(\frac{x-u}{2}\right)du.$$

Введем ядро

$$K(x,u) := \frac{1}{2}cot\frac{x-u}{2} - \frac{1}{x-u}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{\{u:0<|x-u|\le\pi\}} f^{\square}(u)\frac{1}{2}cot\left(\frac{x-u}{2}\right)du = \frac{1}{\pi}\int_{u:0<|x-u|\le\pi} f^{\square}(u)K(x,u)du +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\{u:0<|x-u|\le\pi}\}\frac{f^{\square}(u)}{x-u}du = I_1(x) + I_2(x).$$

Ядро K позволяет равномерно оценить

$$|K(x.u)| \leq \frac{\pi}{6}.$$

Это будет использовано для оценки части I_1. Применив неравенство Гельдера, получим следующее

$$\left(\int_{B(z,r)} |I_1(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{\pi}{6}\left(\int_{B(z,r)} \left|\int_{\{u:0<|x-u|\leq\pi\}} f^{\square}(u)du\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{6}(2\pi)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{B(z,r)}\left(\int_{u:|x-u|\leq\pi} |f^{\square}(u)|^p du\right)dx\right)^{1/p} \leq \frac{\pi}{6}(2\pi)^{\frac{1}{p'}}|B(z,r)|^{\frac{1}{p}}\|f|L_p(\mathbb{T}) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\pi}{6}(2\pi)^{\frac{1}{p'}}(2\pi)^{1/p}\sup_{0<r\leq\pi}\omega(r)\omega^{-1}(r)\right)\|f|L_p(\mathbb{T})\| \leq C_1\|f|M_{p,\omega}\|, \tag{2}$$

где $C_1 = \frac{\pi}{6}\sup_{0<r\leq\pi}\omega^{-1}(r)$.

Теперь оценим I_2.

$$\left(\int_{B(z,x)} |I_2(x)|^q dx\right)^{1/p} = \frac{1}{\pi}\left(\int_{B(z,x)}\left|\int_{x-\pi}^{x+\pi}\frac{f^{\square}(u)}{x-u}du+\right.\right.$$

$$+\int_{x+\pi}^{\infty}\frac{f^{\square}(u)}{x-u}du + \int_{\infty}^{x-\pi}\frac{f^{\square}(u)}{x-u}du^p dx^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\left(\int_{B(z,x)} |Tf^{\square}(x)|^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\int_{B(z,x)}\left|\int_{x+\pi}^{\infty}\frac{f^{\square}(u)}{x-u}du + \int_{\infty}^{x-\pi}\frac{f^{\square}(u)}{x-u}du\right|^p dx\right)^{1/p} =: I_{2,1}+I_{2,2} \tag{3}$$

Следствие 1 в комбинации с Леммой 1 даст

$$\left(\int_{B(z,x)} |Tf^{\square}(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq C_0\|f|M_{p,\omega}(\mathbb{T})\| \tag{4}$$

Более того,

$$\left(\int_{B(z,x)}\left|\int_{x+\pi}^{\infty}\frac{f^{\square}(u)}{x-u}du + \int_{-\infty}^{x-\pi}\frac{f^{\square}(u)}{x-u}du\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq (2r)^{1/p}\frac{1}{\pi}\|f^{\square}|L_1(\mathbb{R})| \leq 2^{1/p}\pi^{1/p}\frac{1}{\pi}(2\pi)^{1-1/p}\left(\sup_{0<r\leq\pi}\omega(r)\omega^{-1}(\omega)\right)\|f|L_1(\mathbb{T}) \leq$$

$$\leq C_2\|f|M_{p,\omega}(\mathbb{T})\|, \tag{5}$$

где $C_2 = 2\sup_{0<r<\pi}\omega(r)$. Вставляя (4) и (5) в (3) и учитывая (2), мы получим

$$\|Hf|L_p(B(x,r))\| \leq (C_1+C_2+C_3)\|f|M_{p,\omega}(\mathbb{T})\|$$

Это доказывает утверждение. Важным для нас является следующий векторнозначный случай ограниченности (непериодического) преобразования Гильберта в пространстве Морри, который был получен ([2]).

Утверждение 2(Sawana,Tanaka,2005). Пусть $1 < p, q < \infty$ и $0 \leq \lambda < 1/p$. Тогда существует константа c, зависящая p, q, и λ такое, что для всех последовательностей $(f_j)_j \subset M_p^\lambda(\mathbb{R})$ выполняется

$$\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |Tf_j|^q \right)^{1/p} |M_p^\lambda(\mathbb{R})\| \leq c\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^q \right)^{1/p} |M_p^\lambda(\mathbb{R})\|.$$

Теорема 2. Пусть $1 < p, q < \infty$ и ω измеримая, весовая и положительная функция на $(0, \infty)$. Тогда существует константа c зависящая от p, q, ω такая, что для всех последовательностей $(f_j) \subset M_{p,\omega}$ мы имеем

$$\|(\sum_{j=0}^{\infty} |Hf_j|^q)^{1/q} |M_{p,\omega}(\mathbb{T})\| \leq c\|(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^q)^{1/q} |M_{p,\omega}(\mathbb{T})\|.$$

Доказывается как в случае M_p^λ(см.[1]).

References

[1] Sautbekova M, W.Sickel, Strong summability of Fourier series and Morrey spaces//Analysis Math.,-2014-No.40.-31-62C.

[2] Peetre J., On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant// Ann.Math. Pura Appl.,-1966-No.72.-295-304.

[3] Sawana Y., Tanaka H., Morrey spaces for non-doubling measures // Acta Math.Sinica, Engl.-2005-Vol.21.-1535-1544.

[4] Butzer P.L., Nessel R., Fourier analysis and approximation, // Birhäuser, Basel,-1971.

UDC 517.5

Д.Б. Базарханов
Институт математики и математического моделирования
(Казахстан, Алматы)
e-mail: dauren-math@yandex.ru

Наилучшие нелинейные приближения функций многих переменных

В сообщении будут представлены недавние результаты об оценках наилучших $N-$членных приближений в пространстве $L_r(\mathbb{T}^k)$ периодических функций многих переменных из пространств типа Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля смешанной гладкости по следующим словарям :

i) кратная тригонометрическая система $\{e^{2\pi i\xi x} \ : \ \xi \in \mathbb{Z}^k\}$;

ii) специальная система всплесков $\mathcal{W}^m$ (которая естественным образом появляется и в других аппроксимативных задачах для указанных функциональных пространств);

iii) $\Pi_r^{(m)} \equiv \{g(x) = \prod_{\nu=1}^n g_\nu(x^\nu) \ : \ g_\nu \in L_r(\mathbb{T}^{m_\nu})\}$ (в этом случае мы приходим к так-называемым наилучшим мультилинейным приближениям).

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_k) = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{T}^k$, $x^\nu \in \mathbb{T}^{m_\nu}, \ \nu = 1, \ldots, n$; $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n \ : \ m_1 + \ldots + m_n = k$, $\mathbb{T}^k-$ $k-$мерный тор.

УДК 517.51

К.А. Бекмаганбетов, Е. Толеугазы
МГУ имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал (Казахстан, Астана)
e-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.ru

Оценки наилучших приближений в анизотропных пространствах Лоренца[1]

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ – измеримая функция, заданная на $[0,1]^n$. Через $f^*(\mathbf{t}) = f^{*_1,\ldots,*_n}(t_1, \ldots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением к первой невозрастающей перестановки, последовательно по переменным $x_1, \ldots, x_n$, при фиксированных остальных переменных.

Пусть мультииндексы $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ удовлетворяют условиям, если $0 < p_j < \infty$, то $0 < q_j \le \infty$, если же $p_j = \infty$, то и $q_j = \infty$ для $j = 1, \ldots, n$, и $\star = \{j_1, \ldots, j_n\}$ – некоторая фиксированная перестановка множества $\{1, \ldots, n\}$. Анизотропным пространством Лоренца $L_{\mathbf{pq}^\star} = L_{\mathbf{pq}^\star}([0,1)^n)$ (см. Е.Д. Нурсултанов [1], в случае $\star = \{1, \ldots, n\}$ – А.П. Блозинский [2]) называется множество функций, для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}} = \left(\int_0^1 \ldots \left(\int_0^1 \left|t_1^{1/p_1} \ldots t_n^{1/p_n} f^{*_1,\ldots,*_n}(t_1, \ldots, t_n)\right|^{q_{j_1}} \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}}\right)^{q_{j_2}/q_{j_1}} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \frac{dt_{j_n}}{t_{j_n}}\right)^{1/q_{j_n}} < \infty.$$

Здесь выражение $\left(\int_0^1 (G(s))^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q}$ при $q = \infty$ понимается как $\sup_{s>0} G(s)$.

[1] Работа выполнена в рамках проекта ГФ4-0816, финансируемого Комитетом науки МОН РК.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > \mathbf{0}$ и $f(\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$ – кратный тригонометрический ряд. Тогда ряд

$$f^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \bar{\mathbf{k}}^{\alpha} c_{\mathbf{k}} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$$

назовем производной порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ исходного ряда.

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, где $\gamma_j > 0$ для всех $j = 1, \dots, n$ и $\bar{k} = \max(1, |k|)$. Множество

$$\Gamma(N, \gamma) = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) : k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n, \prod_{j=1}^{n} \bar{k}_j^{\gamma_j} \le N \right\}$$

называется гиперболическим крестом порядка N, соответствующим γ.

Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \le \infty$, $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$ и $f(\mathbf{x}) \in L_{\mathbf{pq}^\star}$. Для $n \in \mathbb{N}$ и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$, величина

$$E_{N,\gamma}(f)_{L_{\mathbf{pq}^\star}} = \inf_{T_{\Gamma(N,\gamma)}} \left\| f - T_{\Gamma(N,\gamma)} \right\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}}$$

называется наилучшим приближением функции $f(\mathbf{x})$ по тригонометрическим полиномам со спектром из гиперболического креста $\Gamma(N, \gamma)$ в метрике анизотропного пространства Лоренца $L_{\mathbf{pq}^\star}$.

Theorem 1. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \le \infty$, $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$, $\zeta = \max\{(\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i})/\gamma_{j_i} : i = 1, \dots, n\}$, $B = \{i : (\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i})/\gamma_{j_i} = \zeta, i = 1, \dots, n\}$, $i_0 = \min\{i : i \in B\}$, *функция* $f(\mathbf{x})$ *из* $L_{\mathbf{pq}^\star}$, *и*

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i\in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} E_{2^l,\gamma}(f)_{L_{\mathbf{pq}^\star}} < \infty.$$

Тогда функция $f(\mathbf{x})$ *имеет непрерывную производную* $f^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ *и справедлива оценка*

$$E_{2^N,\gamma}(f^{(\alpha)})_{L_\infty} \le C \sum_{l=N}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i\in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} E_{2^l,\gamma}(f)_{L_{\mathbf{pq}^\star}}.$$

Theorem 2. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n), \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \le \infty$, $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$, $\zeta = \max\{(\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i} - 1/r_{j_i})/\gamma_{j_i} : i = 1, \dots, n\}$, $B = \{i : (\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i} - 1/r_{j_i})/\gamma_{j_i} = \zeta, i = 1, \dots, n\}$, $i_0 = \min\{i : i \in B\}$, $1/\theta_j = (1/d_j - 1/q_j)_+$, $j = 1, \dots, n$, *функция* $f(\mathbf{x})$ *из* $L_{\mathbf{pq}^\star}$, *и*

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i\in B} 1/\theta_{j_i} - 1/\theta_{j_{i_0}}} E_{2^l,\gamma}(f)_{L_{\mathbf{pq}^\star}} < \infty.$$

Тогда функция $f(\mathbf{x})$ *имеет производную* $f^{(\alpha)}(\mathbf{x})$, *принадлежащую* $L_{\mathbf{rd}^\star}$ *и справедлива оценка*

$$E_{2^N,\gamma}(f^{(\alpha)})_{L_{\mathbf{rd}^\star}} \le C \sum_{l=N}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i\in B} 1/\theta_{j_i} - 1/\theta_{j_{i_0}}} E_{2^l,\gamma}(f)_{L_{\mathbf{pq}^\star}}.$$

Remark 1. a) Теоремы 1 и 2 не могут быть улучшены в том смысле, что для последовательности $\varepsilon_l \downarrow 0$ такой, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i\in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} \varepsilon_{2^l} = \infty \quad \text{или} \quad \sum_{l=1}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i\in B} 1/\theta_{j_i} - 1/\theta_{j_{i_0}}} \varepsilon_{2^l} = \infty,$$

найдется функция $f(\mathbf{x})$ из $L_{\mathbf{pq^\star}}$, для которой

$$E_{2^l,\gamma}(f)_{L_{\mathbf{pq^\star}}} \sim \varepsilon_{2^l}$$

и $f^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ не принадлежит L_∞ или $L_{\mathbf{rd^\star}}$ соответственно;

б) Теоремы 1 и 2 обобщают Теоремы 1.3.1 и 1.3.2 из [3].

Литература

1. *Нурсултанов Е.Д.* О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p-пространств // Известия РАН. Серия математическая. – 2000. – Т. 64, № 1. – С. 95 - 122.
2. *Blozinsky A.P.* Multivariate rearrangements and banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 1. – P. 149 – 167.
3. *Темляков В.Н.* Приближение функции с ограниченной смешанной производной // Труды МИ АН СССР. – 1986. – Т. 178. – С. 1 – 112.

УДК 517.518

Н.А. Бокаев, Е.С. Смаилов, А.Т. Сыздыкова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилёва, Казахстан, Астана
Институт прикладной математики МОН Республики Казахстан, Казахстан, Караганда. Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, Казахстан, Павлодар. ()

e-mail: bokayev2011@yandex.ru,esmailov@mail.ru, aizhan-syzdykova@yandex.ru

Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова по мультипликативным базисам

Широко известны классические пространства Никольского-Бесова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ ([1], [2]), сыгравшие существенную роль в развитии теории функциональных пространств,гармонического анализа и дифференциальных уравнений в частных производных. В данной работе вводится обобщенное пространство Никольского- Бесова $B^\varphi_{p,\theta}(G)$ по мультипликативным базисам. Приводятся необходимые и достаточные условия для вложения рассматриваемых пространств $B^\varphi_{p,\theta}(G)$ в $B^\psi_{q,\lambda}(G)$ и $B^\varphi_{p,\theta}(G)$ в $L^q(G)$ при различных соотношениях соответствующих параметров p, q, θ, λ и функций φ, ψ.

Пусть $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ последовательность натуральных чисел $p_k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. По определению положим

$$m_0 = 1,\ m_n = p_1 p_2 \cdots p_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ мультипликативная система функций определенная на G=[0,1] с образующей последовательностью $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ (см.[3] или [4]). Система $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ состоит из кусочно постоянных комплекснозначных функций и является полной ортонормированной системой в $L^1(0,1)$ [3]. Если все $p_k = 2$, тогда $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ совпадает с системой Уолша в нумерации Пэли.

Через U будем обозначать класс всех непрерывных функций φ возрастающих на G, для которых $\varphi(0) = 0$. Будем говорить, что φ удовлетворяет условию S_1 (и писать $\varphi \in S_1$), если $\varphi \in U$ и существует такое число $\alpha : 0 < \alpha < 1$, что функция $\varphi(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает.

Через

$$E_n(f)_p = \inf_{\{a_k\}} \left\| f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k \right\|_p, \ n = 1, 2, \ldots .$$

будем обозначать наилучшее приближение функции $f \in L^p(G)$, $1 \le p \le \infty$, полиномами по мультипликативной системе порядка $\le n-1$.

Определение 1. Пусть $1 \le p, \theta \le \infty$ и $\varphi \in S_1$. Будем говорить, что функция $f : G \longrightarrow R$ принадлежит обобщенному пространству Никольского-Бесова $B^{\varphi}_{p,\theta}(G)$ по мультипликативным базисам, если $f \in L^p(G)$ и величина

$$\|f\|_{B^{\varphi}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi^{-1}(1/m_{k+1}) E_{m_k}(f)_p \right]^{\theta} \right\}^{1/\theta}, \ 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\varphi}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \sup_{k \in Z_+} \left\{ \varphi^{-1}(1/m_{k+1}) E_{m_k}(f)_p \right\}, \ \theta = \infty,$$

конечна.

При $\varphi(x) = x^r$, $r > 0$ приведенное пространство совпадает с пространством $B^r_{p,\theta}(G)$ по мультипликативным базисам, рассмотренным в [5]. Для классических пространств Бесова подобные обобщенные классы ранее были рассмотрены в работе [6], в которой получены более содержательные теоремы вложения относительно слабого параметра θ.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $1 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le \lambda \le \infty$, $\varphi, \psi \in S_1$.

I. Тогда, при условии $\lambda < \theta \le \infty$, чтобы имело место вложение

$$B^{\varphi}_{p,\theta}(G) \subset B^{\psi}_{q,\lambda}(G)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_1 = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi(1/m_k) \psi^{-1}(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right]^{\tau} \right\}^{\frac{1}{\tau}} < \infty,$$

где $\tau = \frac{\theta\lambda}{\theta-\lambda}$ если $\theta < \infty$, и $\tau = \lambda$ если $\theta = \infty$.

II. Чтобы при условии $\theta \le \lambda \le \infty$ имело место вложение

$$B^{\varphi}_{p,\theta}(G) \subset B^{\psi}_{q,\lambda}(G)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_2 = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \varphi(1/m_k) \psi^{-1}(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right\} < \infty.$$

Теорема 2. Пусть $1 \le p < q < +\infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

I. Тогда, при условии $p < q < \theta \le \infty$, чтобы имело место вложение

$$B^{\varphi}_{p,\theta}(G) \subset L^q(G)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_{p,q,\theta} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right]^{\tau} \right\}^{\frac{1}{\tau}} < \infty,$$

где $\tau = \frac{\theta q}{\theta - q}$ если $q < \theta < +\infty$, и $\tau = q$ если $\theta = +\infty$.

II. Чтобы при условии $1 \leq \theta \leq q$ имело место вложение

$$B^{\varphi}_{p,\theta}(G) \subset L^q(G)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_{p,q} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \varphi(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \right\} < \infty.$$

Теорема 3. Пусть $1 \leq p < +\infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$.

I. Тогда, при условии $1 < \theta \leq \infty$, чтобы имело место вложение

$$B^{\varphi}_{p,\theta}(G) \subset L^{\infty}(G)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_{p,\theta} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p}} \right]^{\theta'} \right\}^{\frac{1}{\theta'}} < \infty.$$

II. Чтобы при условии $\theta = 1$ имело место вложение

$$B^{\varphi}_{p,1}(G) \subset L^{\infty}(G)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_{p,1} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \varphi(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty.$$

Литература

[1].Бесов О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и приложения // Труды МИАН. 1961, Т. 60, С. 42–81.

[2].Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1977, 480 с.

[3] Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: Изд. ЭЛМ, 1981, 180 с.

[4]Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. // - М.:Наука, 1987,344с.

[5] Смаилов Е.С., Сулейменова З.Р. Теоремы вложения для пространств Бесова по мультипликативным базисам Прайса //Труды МИАН.2003,Т.243,С.313-319.

[6] Гольдман М.Л. О вложении обобщенных гельдеровых классов // Мат. заметки. 1972. Т. 12, №3. С. 325-336.

УДК 517.51

А.Б. Муканов
Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова
(Казахстан, Астана)
e-mail: mukanov.askhat@gmail.com

О свойствах и приложениях обобщенных сетевых пространств

Теория сетевых пространств имеет много приложений в гармоническом анализе и теории приближений. Благодаря интерполяционным теоремам сетевых пространств были получены новые результаты во многих классических вопросах анализа.

Пусть μ — мера Лебега на $\mathbb{R}$, M — фиксированное семейство множеств конечной меры из $\mathbb{R}$, называемое сетью. Усреднением функции $f(x)$ по сети M, называется функция, определенная равенством

$$\bar{f}(t, M) = \sup_{\substack{e\in M \\ |e|>t}} \frac{1}{|e|} \left| \int_e f(x) d\mu \right|,$$

где точная верхняя берется по всем множествам $e \in M$, мера которых $|e| \overset{def}{=} \mu(e) > t, t \in (0, \infty)$. В случае $\sup\{|e| : e \in M\} = \alpha < \infty$ и $t > \alpha$ положим $\bar{f}(t, M) = 0$.

Определение 1. *Сетевым пространством $N_{p,q}(M)$, $0 < p, q \leq \infty$ называется множество функций f, для которых при $q < \infty$*

$$\|f\|_{N_{p,q}(M)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} \bar{f}(t, M) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

и при $q = \infty$

$$\|f\|_{N_{p,\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \bar{f}(t, M) < \infty.$$

Сетевые пространства были введены Е.Д. Нурсултановым в [1]. Свойства и приложения сетевых пространств в гармоническом анализе были рассмотрены в [1-4]. В этой работе мы рассматриваем пространства, близкие к сетевым, изучаем их свойства и приложения.

Определение 2. *Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $0 < p, q \leq +\infty$. Будем говорить, что μ-измеримая функция $f \in N_{p,q;\alpha}$, если конечен функционал*

$$\|f\|_{N_{p,q;\alpha}} := \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} (t^{\frac{1}{p}} \widetilde{f}(t, \alpha))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{при } \ 0 < p < \infty \ \text{ и } 0 < q < \infty, \\ \sup_t t^{\frac{1}{p}} \widetilde{f}(t, \alpha) & \text{при } \ 0 < p \leq \infty, \ q = \infty, \end{cases}$$

где

$$\widetilde{f}(t, \alpha) = \sup_{y \geq t} \frac{1}{y^\alpha} \left| \int_0^y \frac{f(s)}{(y - s)^{1-\alpha}} ds \right|.$$

Отметим, что если $\alpha = 1$, тогда эти пространства совпадают с сетевыми пространствами $N_{p,q}(M)$, где $M = \{[t, \infty] : [t, \infty] \subseteq [0, \infty]\}$. Подобные дискретные пространства были рассмотрены в [5].

Лемма 1. *Если $q_1 \leq q_2$ тогда $N_{p,q_1;\alpha} \hookrightarrow N_{p,q_2;\alpha}$.*

Лемма 2. *Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $0 < p, q \leq +\infty$. Тогда*

$$\|f\|_{N_{p,q;\alpha}} \sim \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{\frac{k}{p}} \widetilde{f}(2^k, \alpha) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{при } q < \infty$$

и
$$\|f\|_{N_{p,\infty;\alpha}} \sim \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{k}{p}} \widetilde{f}(2^k,\alpha).$$

Интерполяция обобщенных сетевых пространств

Здесь мы исследуем интерполяционные свойства пространств $N_{p,q;\alpha}$. Пусть (A_0, A_1) — совместимая пара квазинормированных пространств и

$$K(t,a) = K(t,a;A_0,A_1) = \inf_{a=a_0+a_1}(\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}), \quad a \in A_0 + A_1$$

К-функционал Петре ([6]).
Пространство $(A_0, A_1)_{\theta,q}$, $0<\theta<1$, состоит из всех элементов $a \in A_0+A_1$, для которых конечен функционал

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,a))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty; \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}K(t,a), & q=\infty. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0,1]$, $0<p_0<p_1<\infty$, $0<q_0,q_1,q\le\infty$, $0<\theta<1$. *Тогда*

$$(N_{p_0,q_0;\alpha}, N_{p_1,q_1;\alpha})_{\theta,q} \hookrightarrow N_{p,q;\alpha}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Обобщенные сетевые пространства и преобразование Фурье

Пусть f — μ-измеримая функция на $\mathbb{R}$, тогда через f^* мы будем обозначать невозрастающую перестановку функции f,

$$f^*(t) = \inf\{\sigma : \mu\{x\in\mathbb{R} : |f(x)|>\sigma\} \le t\}.$$

Определение 3. *Пусть* $0<p\le\infty$ *и* $0<q\le\infty$. *Тогда пространством Лоренца* $L_{p,q}(\mathbb{R})$ *называется множество* μ*-измеримых функций* f, *для которых конечен функционал*

$$\|f\|_{L_{p,q}} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{при } 0<p<\infty \text{ и } 0<q<\infty, \\ \sup\limits_{t\ge 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{при } 0<p\le\infty \text{ и } q=\infty. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha\in(0,1]$, $p\in\left(1,\frac{1}{1-\alpha}\right]$, $0<q\le\infty$. *Пусть также* f — *измеримая функция на* $[0,\infty)$ *с косинус-преобразованием* $\widehat{f}(t) = \int\limits_0^\infty f(x)\cos xt\ dx$. *Тогда верно следующее неравенство*

$$\|\widehat{f}\|_{N_{p',q;\alpha}} \le C\|f\|_{L_{p,q}}, \tag{2}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
Замечание 1. *Оценки нормы преобразования Фурье, подобные неравенству (2) были получены в [1, теорема 2], [5, теорема 4].*

Литература

1. *Нурсултанов Е.Д.* Сетевые пространства и неравенства типа Харди-Литтлвуда // Мат. сборник. - 1998. - Т. 189. - №3. - С. 83-102.

2. *Нурсултанов Е.Д.* Сетевые пространства и преобразование Фурье // Докл. РАН. - 1998. - Т. 361. - №5. - С. 597-599.

3. *Nursultanov E.D.* Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy-Littlewood type inequalities // East J. Approx. - 1998. - V. 4. - №2. - P. 243-275.

4. *Nursultanov E., Tikhonov S.* Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. - 2011. - V. 21. - №4. - P. 950-981.

5. *Dyachenko M., Kankenova A., Nursultanov E.* On Summability of Fourier Coefficients of Functions From Lebesgue Space // J. Math. Anal. Appl. - 2014. - V. 419. - №2. - P. 959-971.

6. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. - Москва: Мир, 1980. - 264 с.

УДК 517.51

Е.Д. Нурсултанов, М.И. Дьяченко, Д.Г. Джумабаева

О сходимости кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами

Рассмотрим тригонометрический ряд вида

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}...\sum_{m_n=1}^{\infty} a_{m_1,m_2,...m_n} e^{i(m_1x_1+m_2x_2+...+m_nx_n)}. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, ...m_n)$, $\mathbf{xm} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, $\{a_{\mathbf{m}}\}_{m=1}^{\infty} = \{a_{m_1,...m_n}\}_{m_1=1,...m_n=1}^{\infty,...\ \ ,\infty}$ – n - кратная последовательность действительных неотрицательных чисел.

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) : \quad \varepsilon_i = 0;$ или $\varepsilon_i = 1, \quad i = 1, 2, ..., n\}$. Для вектора $\varepsilon \in E$ и последовательности чисел $\{a_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m}=1}^{\infty}$ определим разность:

$$\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}} = \triangle^{\varepsilon_1}(\triangle^{\varepsilon_2}...(\triangle^{\varepsilon_n} a_{m_1,m_2,...,m_n})...),$$

где

$$\triangle^{\varepsilon_i} b_m = \begin{cases} b_m, & \text{для } \varepsilon_i = 0, \\ b_{\mathbf{m}} - b_{m_1,...,m_i+1,...,m_n}, & \text{для } \varepsilon_i = 1. \end{cases}$$

$|\varepsilon| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, $E^k = \{\varepsilon \in E : |\varepsilon| = k\}$.

Пусть теперь последовательность $\{a_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m=1}}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$a_{\mathbf{m}} \to 0 \text{ при } m_1 + m_2 + ... + m_n \to \infty \tag{2}$$

и для некоторого вектора $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$, где $1 < p_i < \infty$ и $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'} = 1$, $i = 1, 2, ..., n$

$$\sup_{\substack{1 < m_i < \infty \\ 1 \le i \le n}} m_1^{\frac{1}{p_1'}} m_2^{\frac{1}{p_2'}} ... m_n^{\frac{1}{p_n'}} a_{\mathbf{m}} < \infty. \tag{3}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть вектор* $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$, *где* $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2, ..., n$ *и коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условиям (2)-(3) и для некоторого* $0 < k \le n$

$$\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}} \ge 0 \tag{4}$$

для всех $\varepsilon \in E$ *таких, что* $|\varepsilon| = k$.

Тогда при $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n} < k$ *ряд (1) сходится по Прингсхейму всюду на* $(0, 2\pi)^n$.

Заметим, что при $k = 1$ справедливость теоремы доказана в работе [1].

Следующий результат демонстрирует неулучшаемость в некотором смысле данной теоремы, а именно, доказана

Теорема 2. *Существует ряд вида (1)-(4), расходящийся по кубам в точке* $(\pi, \pi, ..., \pi)$ *при* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n} = k$.

Литература

1. Djachenco M.I. *Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficient*// Anal.math., 1990, V. 16, № 3, 173-190.

2. Djumabayeva D.G., Nursultanov E.D. *On the convergence of double Fourier series of functions in* $L_{\mathbf{p}}[0,1)^2$*, where* $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$// Anal. Math., 2002, V. 28, № 2 , p. 89-101.

3.Нурсултанов Е.Д. *О коэффициентах кратных рядов Фурье из* L_p *пространств*// Изв. РАН, 2000, Т. 64, № 1 p. 95-122

УДК 517.51

Р. Ойнаров

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилёва

(Казахстан, Астана)

e-mail: o_ryskul@mail.ru

Ограниченность и компактность одного класса интегральных операторов свертки типа дробного интегрирования

Пусть $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и $L_p := L_p(I)$ - пространство всех измеримых на $I := (0, \infty)$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ - неотрицательные локально суммируемые на I весовые функции.

В работе рассматривается $L_p \to L_q$ ограниченности и компактности интегральных операторов свертки в виде

$$\mathcal{K}^+ f(x) = v(x) \int_0^x K(x-s)u(s)f(s)ds, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$\mathcal{K}^- f(x) = V(x) \int_x^\infty K(s-x)U(s)f(s)ds, \quad x > 0, \tag{2}$$

Здесь и далее функция $K(\cdot)$ - неотрицательная и невозрастающая на I.

В случае $K(x) = x^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$ операторы (1) и (2) соответственно переходят к операторам Римана-Лиувилля и Вейля с весовыми функциями U и V:

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = V(x) \int_0^x \frac{U(s)f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \tag{3}$$

$$\mathcal{W}_\alpha f(x) = V(x) \int_x^\infty \frac{U(s)f(s)ds}{(s-x)^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \tag{4}$$

Вопросы ограниченности и компактности операторов (1.3) и (1.4) из L_p в L_q исследованы многими авторами. Краткий обзор этих исследований дан в [1].

В 1997 году М.Лоренте [2], в предположении $\lim\limits_{x\to\infty} K(x) = 0$ и $K(x) \le CK(2x)$ при всех $x \in I$ для некоторой постоянной $C > 0$, установил критерий ограниченности оператора (1.1) из L_p в L_q при $1 < p \le q < \infty$. Из которого следует критерий $L_p \to L_q$ ограниченности оператора Римана-Лиувилля (1.3) при $1 < p \le q < \infty$. Однако в силу неявности условий $L_p \to L_q$ ограниченность оператора (1.1) в [2] делает их трудно проверяемыми. Поэтому в последующих работах поставлена цель получить явные критерии $L_p \to L_q$ ограниченности оператора (1.3).

В случае $0 < q < \infty$, $1 < p < \infty$, $\alpha > \frac{1}{p}$ и $U(\cdot) \equiv 1$ явные критерии $L_p \to L_q$ ограниченности операторов (1.3) и (1.4) получены независимо в работах А.Месхи [3] и Д.Прохорова [4]. Обобщение этих результатов на случай, когда функция $U(\cdot)$ не возрастает, дано в работе Фарсани [5]. В работах Д.В.Прохорова и В.Д.Степанова [1] при $1 < p \le q < \infty$ даны критерии $L_p \to L_q$ ограниченности и компактности оператора (1.3) в случаях:

а) $1 - \frac{q'}{p'} < \alpha \le 1$, функция U не убывает;

б) $1 - \frac{p}{q} < \alpha \le 1$, функция V не возрастает.

Обобщение этих критериев о $L_p \to L_q$ ограниченности оператора (1.3) на случай свертки (1.1) даны в работе Н.А.Раутиан [6].

Целью настоящей работы является обобщение результатов работ [3-5] соответствующих случаю $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ на операторов (1.1) и (1.2). Причём полученные результаты являются новыми для операторов (1.3) и (1.4).

Литература

1. *Д.В.Прохоров, В.Д.Степанов.* Весовые оценки операторов Римана-Лиувилля и приложения // Труды МИ РАН им. В.А.Стеклова. 2003. Т.243, С. 289-312.

2. *M.Lorente.* A characterization of two weight norm inequalities for one-sided operators of fractional type // Cared. J. Math. 1997. V.49, No 5. p. 1010-1033.

3. *A.Meshi.* Solution of some weight problems for the Riemenn-Liouville and Weql operators // Georgian Math. J. 1998. V. 5, No 6. P. 565-574.

4. *D.V.Prokhorov.* On the boundedness and compactness of a class of integral operators // J.London Math. Soc. 2000. V. 64, No 2. P. 617-628.

5. *С.М.Фарсани.* Об ограниченности и компактности дробных операторов Римана-Лиувилля // Сиб. Мат. Ж. 2013. Т. 54, № 2. С. 468-479.

6. *Н.А.Раутиан.* Об ограниченности интегральных операторов дробного типа // Мет. Сб. 2009. Т. 200, № 12. С. 81-105.

Е.С. Смаилов
Институт прикладной математики КН МОН РК
г. Караганда
esmailov@mail.ru

Теоремы вложения разных метрик в пространствах Лоренца в терминах наилучших приближений по многочленам Хаара

Неравенство между наилучшими приближениями, в разных метриках, по тригонометрическим полиномам впервые получено А.А. Конюшковым, затем самое точное по порядку неравенство получено П.Л. Ульяновым, и его работы в этом направлении вызвали огромный интерес математиков. Данная тематика в дальнейшем получила бурное развитие в работах Тимана М.Ф., Потапова М.К., Голубова Б.И., Стороженко Э.А., Андриенко В.А., Коляды В.И., Темиргалиева Н., Смаилова Е.С., Акишева Г.А., Валашека Я. и многих других.

Пусть $H = \{h_m(t)\}_{m=1}^{+\infty}$, $t \in [0,1]$ – ортонормальная система Хаара [1].

Пусть $f \in L_1[0,1]$, тогда, полагая $a_k = a_k(f) = \int\limits_0^1 f(t)h_k(t)dt$, $k \in \mathbb{N}$, определим ряд Фурье-Хаара функции f:

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k h_k(t),$$

$a_k = a_k(f)$ назовем коэффициентом Фурье-Хаара функции f, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Пусть $1 \le p \le +\infty$, $1 \le \theta < +\infty$ и $f(t)$ – измеримая в смысле Лебега на $[0,1]$ функция, которая принадлежит пространству Лоренца $L_{p\theta}[0,1]$ [2]. Через $\|f\|_{p\theta}$ обозначим ее норму в $L_{p\theta}[0,1]$.

$\mathbb{N}$ означает множество натуральных чисел, а $\mathbb{Z}^+$ – множество целых неотрицательных чисел.

Линейный агрегат системы Хаара, который в дальнейшем будем называть «многочленом Хаара» порядка n

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k h_k(t),$$

$t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $f \in L_{r\theta}[0,1]$, $1 \le r < +\infty$, $1 \le \theta < +\infty$. Величину

$$E_n(f)_{r\theta} = \inf \{ \|f - \Phi_l\|_{r\theta} : \ \{\Phi_l(x)\}, \ \ l \le n \}$$

назовем наилучшим приближением функции f, в метрике пространства Лоренца $L_{r\theta}[0,1]$, посредством многочленов Хаара порядка не выше n.

Определение 1. Пусть $f \in L_{r\theta}[0,1]$, $1 \le r < +\infty$, $1 \le \theta < +\infty$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$ заданная положительная последовательность чисел, которая строго монотонно стремится к нулю. Если имеет место неравенство $E_n(f)_{r\theta} \le \lambda_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то будем говорить, что $f \in E_{r\theta}(\lambda)$.

Справедлива теорема

Теорема 1. Пусть $1 < r < q < +\infty$, $1 \le \theta \le +\infty$, $1 \le \tau < +\infty$. Тогда для выполнения вложения

$$E_{r\theta}(\lambda) \subset L_{q\tau}[0,1]$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\tau\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)-1} \lambda_k^{\tau} < +\infty.$$

Такие же результаты получены и относительно слабых параметров пространств Лоренца.

Литература

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. – М., Наука, 1987.

2. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 331 с.

УДК 517, 519.6

Н. Темиргалиев, М.Б. Сихов, М.А. Жайнибекова, Г.Т. Джумахаева, С.С. Кудайбергенов, Е.Е. Нурмолдин, Ш.К. Абикенова, М.Е. Берикханова, А.А. Шоманова, Г.Е. Таугынбаева, Н.Ж. Наурызбаев, А.Ж. Жубанышева

Институт теоретической математики и научных вычислений ЕНУ им. Л.Н.Гумилева (Казахстан, Астана)

e-mail: ntmath10@mail.ru

Методы непрерывной и дискретной математики в задачах теоретической математики и научных вычислений

Доклад посвящен краткому обзору результатов, полученных в Институте теоретической математики и научных вычислений ЕНУ им. Л.Н.Гумилева и новым постановкам задач по темам:

1. Вопросы вложений классов "типа Морри", переменной гладкости и теории приближений [1-6].
2. Порядковые оценки поперечников по Гельфанду и новые методы доказательств двусторонних оценок поперечников по Колмогорову [7].
3. Предпоперечники Колмогорова [8-9].
4. Численный анализ бесконечно гладких функций [10].
5. "Метод Смоляка" на основе тензорного произведения функционалов на классах функций с доминирующей смешанной производной и разностью [11-16].
6. Метод квази Монте-Карло на сетках Коробова как «сверхсжатие» информации [17-22].
7. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте приближенного дифференцирования функций по информации полученной от всех возможных функционалов и других задач численного анализа [23-33].
8. Генерирование случайных чисел посредством равномерно распределенных многомерных последовательностей и быстрое преобразование Фурье на основе алгебраической теории чисел [17-19,33].
9. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа [34-36].

Литература

1. *Темиргалиев Н., Жайнибекова М.А., Джумахаева Г.Т.* Критерии вложения классов типа Морри // Изв. вузов. Матем. -2015. № 5, -С. 80-85.

2. *Джумакаева Г.Т.* Критерий вложения класса Соболева-Морри $W^l_{p,\Phi}$ в пространство C // Матем. заметки. -1985. -Т. 37, № 3. -С. 399-406. *Dzhumakaeva G.T.* A criterion for embedding of the Sobolev-Morrey class $W^l_{p,\Phi}$ in the space C //Mathematical Notes. -1985. -Vol. 73, № 3. - С. 224-228.

3. *Сулейменов К.М., Темиргалиев Н.* О вложении классов $H^{\omega}_{\alpha,p}$ в пространства Лоренца //Analysis Mathematica. -2006. -Т. 32. - С. 283-317.

4. *Темиргалиев Н.* О вложении классов H^{ω}_{p} в пространства Лоренца //Сиб. матем. Журнал. -1983. -Т. XXIV. №2, С. 160-172. *Temirgaliev N.* Embeddings of the classes H^{ω}_{p} in Lorentz spaces // Sibirskii matematicheskii zhurnal. -1983. -Vol.24. № 2, PP. 287-298.

5. *Сихов М.Б.* Неравенства типа Бернштейна, Джексона–Никольского и оценки норм производных ядер Дирихле // Матем. заметки. -2006. -Т. 80. № 1, -С. 95-104. *Sikhov M.B. Inequalities of Bernstein and Jackson-Nikol'skii type and estimates of the norms of derivatives of Dirichlet kernels* // Mathematical Notes. - 2006. Vol. 80. № 1, PP. 91-100.

6. *Сихов М. Б.* Неравенства типа Бернштейна, Джексона–Никольского и их приложения // Изв. вузов. Матем. -2002. № 8, С. 57-64. *Sikhov M.B.* Inequalities of Bernstein and Jackson-Nikol?skii types and their applications // Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). -2002. Vol. 46. № 8, PP. 54-61.

7. *Ажгалиев Ш., Темиргалиев Н.* Об информативной мощности линейных функционалов // Матем. заметки. -2003. -Т.3. №.6, -С. 803-812. *Azhgaliev Sh., Temirgaliev N.* Informativeness of Linear Functionals //Mathematical Notes. -2003. -Vol. 73. № 6, PP. 759-768.

8. *Сихов М.Б.* О прямых и обратных теоремах теории приближений с заданной мажорантой // Analysis Mathematica. -2004. -V. 30. № 2, -P. 137-146. *Sikhov M.B.* On direct and converse theorems of the theory of approximations with a given majorant// Analysis Mathematica. -2004. - Vol. 30. № 2, -P. 137-146.

9. *Сихов М.Б.* О некоторых задачах многомерной теории приближений разных метрик Докторская диссертация. Специальность 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ по перечню ВАКа России. Казанский федеральный университет. 2010.

10. *Нурмолдин Е. Е.* Восстановление функций, интегралов и решений уравнения теплопроводности из U2-классов Ульянова// Сиб. журн. вычисл. матем. -2005. -Т. 8. № 4, -С. 337-351. *Nurmoldin E.E.* Restoration of functions, integrals, and solutions to the heat conductivity equation from the Ul'yanov U2-classes (Russian) // Sib. Zh. Vychisl. Mat. - 2005. -Vol. 8, № 4, -PP. 337-351.

11. *Темиргалиев Н.* Тензорные произведения функционалов и их применения // Докл.РАН. -2010. -Т. 430. № 4, -С. 460-465. *Temirgaliev N.* Tensor Products of Functionals and Their Application // Docklandy Mathematics. -2010. -Vol. 81. № 1, -PP. 78-82.

12. *Nauryzbayev N., Temirgaliyev N.* An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration // Found Comput Math. 2012. -Vol. 12. PP. 139-172.

13. *Темиргалиев Н.* Классы $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ и квадратурные формулы //Докл. РАН. -2003. Т. 393. № 5, -С. 605-608. *Temirgaliev N.* Classes $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ and quadrature formulas //Dockland mathematics. -2003. -Vol.68. № 3, -PP. 414-415.

14. *Темиргалиев Н., Кудайбергенов С. С., Шоманова А. А.* Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования //Изв. РАН. Сер.матем. -2009. -Т. 73. №2, -С. 183-224. *Temirgaliev N., Kudaibergenov S. S., Shomanova A. A.* An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration //Izvestiya: Mathematics. -2009. -Vol. 73. № 2, -PP. 393-434.

15. *Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А.* Применения квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления // ИзвВУЗов. Математика. -2010. №3, -С.52-71. *Temirgaliev N., Kudaibergenov S. S., Shomanova A. A.* Applications of Smolyak quadrature formulas to the numerical integration of Fourier coefficients and in function recovery problems //Russian Mathematics (Iz VUZ). -2010. Vol. 54. № 3, PP. 45-62.

16. *Темиргалиев Н., Наурызбаев Н.Ж., Шоманова А.А.* Аппроксимативные возможности вычислительных агрегатов "Типа Смоляка" с ядрами Дирихле, Фейера и Валле-Пуссена в шкале классов Ульянова // Известия вузов. Математика. -2015. №7, -С. 75-81.

17. *Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н.* Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики. -2014. -Т. 54. № 7, С. 1059-1077. *Bailov E.A., Sikhov M.B., Temirgaliev N.* General Algorithm for the Numerical Integration of Functions of Several Variables // published in Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. -2014. Vol. 54, № 7, PP. 1059-1077.

18. *Баилов Е. А., Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н.* Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН. -2007. Т. 416. №2, С. 169-173. *Bailov E. A., Zhubanysheva A. Zh., Temirgaliev N.* General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables //Dockland Mathematics. -2007. Vol. 76. №2, -PP. 681-685.

19. *Жубанышева А. Ж., Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж.Н.* Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул //Журнал вычислительной математики и математической физики. -2009. -Т.49. №1, С. 14-25. *Zhubanysheva A. Zh., Temirgaliev N., Temirgalieva Zh. N.* Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas //Computational mathematics and mathematical physics. -2009. -Vol. 49. № 1, -PP. 12-22.

20. *Воронин С.М., Темиргалиев Н.* О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел //Матем. заметки. -1989. -Т. 46. №2, С. 34-41. *Voronin S.M., Temirgaliev N.* Quadrature formulas associated with divisors of the field of Gaussian numbers//Mat. zametki. -1989. -Vol. 46. №2, -PP. 597-602.

21. *Темиргалиев Н.* Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем. сб. -1990. -Т. 281. №4, -С. 490-505. Temirgaliev N. Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables //Matem. sbornik. -1990. -PP. 527-542.

22. *Сихов М., Темиргалиев Н.* Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова // Матем. замет. -2010. Т. 87. № 6, -С. 948-950. *Sikhov M.B., Temirgaliev N.* On an algorithm for construction uniformly distribution Korobov grids// Mathematical notes. -2010. Vol. 87. № 6, -PP. 916-917.

23. *Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж.* Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах

Соболева// Журнал вычислительной математики и математической физики. -2015. -Т. 55. № 9, -С. 1474–1485. *Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh.* Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2015. -Vol. 55, № 9, -PP. 1432–1443.

24. *Темиргалиев Н., Шерниязов К. Е., Берикханова М. Е.* Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона по коэффициентам Фурье // Современные проблемы математики / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2013. Вып. 17: Математика и информатика, 2. К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы/ -С.179–207. *Temirgaliev N., Sherniyazov K. E., Berikhanova M. E.* Exact Orders of Computational Cross-Sections in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein-Gordon Equation from Fourier Coefficients // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues). -2013. -Vol. 282. suppl. 1, -PP. 165-191.

25. *Темиргалиев Н., Абикенова Ш. К., Жубанышева А. Ж., Тауғынбаева Г. Е.* Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв.ВУЗов. Математика. -2013. № 8, С. 86-93. *Temirgaliev N., Abikenova Sh. K., Zhubanysheva A. Zh., Taugynbaeva G. E.* Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter // Russian Mathematics (Iz. VUZ). -2013. -Vol. 57. № 8, PP. 75-80.

26. *Кудайбергенов С. С., Сабитова С. Г.* О дискретизации решений уравнения Пуассона на классе Коробова // Журнал вычислительной математики и математической физики. -2013. -Т. 53. № 7, - С. 1082–1093. *Kudaibergenov S. S., Sabitova S.G.* Discretization of solutions to Poisson's equation in the Korobov class //Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2013. Vol. 53. № 7, -PP. 896-907.

27. *Абикенова Ш. К., Утесов А., Темиргалиев Н.Т.* О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева // Матем. заметки. -2012. Т. 91. № 3, -С. 459-463. *Abikenova Sh. K., Utesov A., Temirgaliev N.* On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Classes // Mathematical Notes. -2012. -Vol. 91. № 3, -PP. 121-125.

28. *Абикенова Ш.К., Темиргалиев Н.* О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения // Дифф. уравн. -2010. Т. 46. № 8, С. 1201-1204. *Abikenova Sh. K., Temirgaliev N.* On the sharp order of informativeness of all possible linear functionals in the discretiztion of solutions of the wave equations // Differential Equation. -2010. -Vol. 46. № 8, -PP. 1211-1214.

29. *Ибатулин И.Ж., Темиргалиев Н.* Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона

в метрике $L^{2,\infty}$ //Дифференциальные уравнения, т. 44, № 4, 2008, стр. 491-506. *IbatulinI., Temirgaliev N.* On the informative power of all possible linear functionals for the discretithation of the solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of L2,∞ //Differential equation, vol.44, No.4, 2008, pp. 510-526.

30. *Ажгалиев Ш.У., Темиргалиев Н.* Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω //Матем. сб., т. 198, №11. 2007, стр. 3-20. *Azhgaliev Sh. U., Temirgaliev N.* Informativeness of all the Linear Functionals in the recovery of functions in the classes H_p^ω //Mathematical sb., 2007, pp.1535-1551.

31. *Ажгалиев Ш. У.* О дискретизации решений уравнения теплопроводности// Матем. заметки. -2007. -Vol. 82. № 2, -PP. 177-182. *Azhgaliev Sh.* On the discretization of solutions of the heat equation // Mathematical Notes. -2007. Vol. 82. № 2, PP. 153-158.

32. *БаиловЕ.А., Темиргалиев Н.* О дискретизации решений уравнения Пуассона //Журнал вычислительной математики и математической физики. -2006. -Т. 46. №9, С. 1594-1604. *Bailov E.A., Temirgaliev N.* Discretization of the solutions to Poisson's equation //Computational mathematics and mathematical physics. -2006. -Vol. 46. № 9, PP. 1515-1525.

33. *Ковалева И. М.* Восстановление и интегрирование функций из анизотропного класса Коробова// Сиб. журн. вычисл. матем. -2002. -Vol. 5. № 3, PP. 255-266. *Kovaleva I. M.* Recovery and integration of functions from the Korobovs anisotropic class// Sib. Zh. Vychisl. Mat. -2002. Vol. 5. № 3, PP. 255-266.

34. *Темиргалиев Н.* О построении вероятностных мер на функциональных классах //Труды Матем. инст. им. В.А.Стеклова РАН. - 1997. -Т. 218. -С. 397-402. *Temirgaliev N.* On the Construction of Probability Measures on Functional Classes //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. -1997. -Vol. 218. -PP. 396-401.

35. *Temirgaliev N.* On an application of infinitely divisible distributions to qudrature problems //Analysis Mathematica. -1988. -Vol. 14. №3, -PP. 253-258.

36. *Воронин С.М., Темиргалиев Н.* Об одном приложении меры Банаха к квадратурным формулам //Матем. заметки. -1986. -Т. 39. №1, С. 52-59. *Voronin S. M., Temirgaliev N.* Application of Banach measure to quadrature formulas //Mat.zametki. -1986. -Vol. 39. № 1, -PP. 30-34.

УДК 517.51

Л.П. Фалалеев
Институт математики и математического моделирования
(Казахстан, Алматы)
e-mail: v_gulmira@mail.ru

О бигармонических операторах с полустепенными лакунами

Исследованы аппроксимативные свойства бигармонических операторов, построенных по суммам Фурье с лакунами полустепенного типа в равномерной и интегральной метриках [1-3].

Литаратура

1. *Фалалеев Л.П., Василина Г.К.* О бигармонических операторах, разреженных по лакунам // Труды VIII Междунар. симпозиума "Ряды Фурье и их приложения". Ростов-на-Дону: издательство СКНЦ ВШ ЮФУ, 2015. - С. 28-34.

2. *Фалалеев Л.П.* Общие константы Лебега линейных средних подпоследовательностей сумм Фурье // Матем. заметки - 2004. - Т. 75, вып. 3. - С. 435-443.

3. *Bliev N.K. and Falaleev L.P.* Rate of convergence of linear mean subsequences of Fourier sums // Topics in polynomials of one and several variables and their applications. - World Scientific Publ., 1993. - Pp. 65-79.

УДК 517.51

Д.К. Чигамбаева
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева
(Казахстан, Астана)
e-mail: d.darbaeva@yandex.kz

Об интегральном операторе типа потенциала в пространствах типа Морри

В данной работе вводится новый класс пространств типа Морри $M^{\alpha}_{p,q}$, охватывающий классические пространства Морри. Мы доказываем ограниченность интегрального оператора типа потенциала из пространств типа Морри в пространства типа Морри.

Пусть $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$ и $0 < p < \infty$. Говорят, что функция f принадлежит пространству Морри, если $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и конечна следующая норма

$$\|f\|_{M_p^\lambda} \equiv \|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B_r(x))} < \infty.$$

Здесь $B_r(x)$ – шар с центром в точке x и радиусом $r > 0$. Заметим, если $\lambda = 0$, то $M_p^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, если $\lambda = \frac{n}{p}$ и $0 < p < \infty$, то $M_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$, а если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то $M_p^\lambda = \Theta$, где Θ – множество всех эквивалентных нулю функций на $\mathbb{R}^n$. См. [1].

Классические пространства Морри и их обобщения возникли в связи с некоторыми вопросами теории дифференциальных уравнений и теории вариации. В дальнейшем пространства Морри нашли широкое применение в теории уравнений Нейвера-Стокса и Шродингера. Имеется множество книг и обзоров статей, посвященных пространствам Морри и их приложениям, например, [2-3].

Пусть $0 < p < \infty,\ 0 < q \le \infty,\ 0 \le \alpha \le \frac{n}{p}$. Определим обобщенные пространства типа Морри $M^{\alpha}_{p,q}$ как множество всех измеримых по Лебегу функций $f \in L^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна следующая норма при $q < \infty$

$$\|f\|_{M^{\alpha}_{p,q}} = \left(\int\limits_0^{\infty} \left(t^{-\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

и при $q = \infty$ норма

$$\|f\|_{M^{\alpha}_{p,\infty}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} t^{-\alpha} \|f\|_{L_p(B_t(x))}.$$

Заметим, что введенные таким образом пространства являются обобщением классических пространств Морри при $q = \infty$, т.е. $M^{\alpha}_{p,\infty} = M^{\lambda}_p$. Свойства данных пространств широко изложены в работе

В последние два десятилетия был проявлен большой интерес к изучению обобщенных пространств типа Морри и классических операторов теории функций, действующих в этих пространствах. См. обзорные статьи [2]-[4]. Верно следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $1 < p \le q < \infty,\ 0 < \tau \le \infty,\ 0 < \nu \le \lambda < \frac{n}{q}$ *и* $\gamma = \frac{n}{p} - \frac{n}{q} + \lambda - \nu > 0$,

$$I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \frac{dy}{|y|^{n-\gamma}}.$$

Если $f \in M^{\nu}_{p,\tau}$ *тогда интегральный оператор типа потенциала* $I_\gamma f \in M^{\lambda}_{q,\tau}$, *и справедливо неравенство*

$$\|I_\gamma f\|_{M^{\lambda}_{q,\tau}} \le c \|f\|_{M^{\nu}_{p,\tau}}.$$

Литература

1. *C.B. Morrey* On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc., - 1938. No 43. -pp. 126–166.

2. *V.I. Burenkov* Recent progress in studing the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I // Eurasian Mathematical Journal. - 2012. - V.3, No 3. - pp. 11–32.

3. *В.И. Буренков, Д.К. Чигамбаева, Е.Д. Нурсултанов* Описание интерполяционных пространств для пары локальных пространств типа Морри и их обощений // Труды Математического Института им. Стеклова. - 2014. - Т. 284. - С. 97–128.

4. *V.S. Guliyev* Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators // Eurasian Mathematical Journal. - 2012. - V.3, No 3. - pp. 33–61.

UDC 517.5

A. Kopezhanova
L.N.Gumilyov Eurasian National University
(Kazakhstan, Astana)
e-mail: kopezhanova@mail.ru

Integral properties of the Fourier transform for functions in generalized Lorentz spaces

Let
$$\widehat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx,\ x\in\mathbb{R},$$
be the Fourier transform of a function $f\in L_1(\mathbb{R})$.

Let f be a measurable function on $\mathbb{R}$ and μ is Lebesgue measure. The distribution function $m(\sigma,f)$ and the nonincreasing rearrangement f^* of a function f are defined as follows:
$$m(\sigma,f):=\mu\left\{x\in\mathbb{R}:|f(x)|>\sigma\right\},$$
$$f^*(t):=\inf\left\{\sigma:m(\sigma,f)\le t\right\}.$$

Let ω be a nonnegative function on $[0,+\infty)$. The generalized Lorentz space $\Lambda_q(\omega)$ consists of all functions f on $\mathbb{R}$ such that $\|f\|_{\Lambda_q(\omega)}<\infty$, where
$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega,\mathbb{R})}:=\begin{cases}\left(\int_0^\infty (f^*(t)\omega(t))^q\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{for}\quad 0<q<\infty,\\ \sup\limits_{t>0} f^*(t)\omega(t) & \text{for}\quad q=\infty,\end{cases}$$
where f^* is the nonincreasing rearrangement of the function f. These spaces $\Lambda_q(\omega)$ coincide to the classical spaces L_{pq} in the case $\omega(t)=t^{\frac{1}{p}}$, $1<p<\infty$ (see [1]).

In this work both upper and lower estimates of the norm of Fourier transform are studied in generalized Lorentz spaces.

Let $\mathfrak{M}$ be the class of all Lebesgue measurable functions on $(0,+\infty)$ and $\mathfrak{M}^+:=\{g\in\mathfrak{M}:\ g\ge 0\}$ a $\mathfrak{M}^{\downarrow}$ denotes the cone of all nonincreasing function from $\mathfrak{M}^+$. Suppose that $u,\upsilon,\omega\in\mathfrak{M}^+$.

Let
$$G^1_{pq}(\omega,u,\upsilon;\,\mathfrak{M}^{\downarrow}):=\sup_{g\in\mathfrak{M}^{\downarrow}}\frac{\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^t g(s)u(s)ds\right)^q\omega(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^\infty|g(t)|^p\upsilon(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}},$$
$$G^2_{pq}(\omega,u,\upsilon;\,\mathfrak{M}^{\downarrow}):=\sup_{g\in\mathfrak{M}^{\downarrow}}\frac{\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_t^\infty g(s)u(s)ds\right)^q\omega(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^\infty|g(t)|^p\upsilon(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}},$$
In [2], [3], [4] the characterizations of these functional in terms of weight functions were proved.

Theorem 1. *Let $0<p<\infty$, $0<q<\infty$. Let ν,μ be the weight functions such that*
$$G^1_{pq}\left(\frac{\nu^q(\frac{1}{t})}{t},1,\frac{\mu^p(t)}{t};\,\mathfrak{M}^{\downarrow}\right)<\infty,\quad G^2_{pq}\left(\frac{\left(t\nu(\frac{1}{t})\right)^q}{t},\frac{1}{t},\frac{\mu^p(t)}{t};\,\mathfrak{M}^{\downarrow}\right)<\infty.$$

Then for all $f \in \Lambda_p(\mu, \mathbb{R})$ the following inequality holds

$$\|\overline{\widehat{f}}\|_{\Lambda_q(\nu,\mathbb{R})} \leq c_1 \|f\|_{\Lambda_p(\mu,\mathbb{R})}, \tag{1}$$

where $\overline{\widehat{f}}(t) = \sup\limits_{y \geq t} \frac{1}{2y} \left| \int\limits_{-y}^{y} \widehat{f}(s) ds \right|$, $t, y > 0$.

The inequality in (1) and futher is understood in the sense that if the right-hand side of the inequality is finite, then the left-hand side is also finite and the corresponding inequality holds.

Our next main results:

Theorem 2. *Let $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$. Let ν, μ be the weight functions such that*

$$G^1_{pq}\left(\frac{\nu^q\left(\frac{1}{t}\right)}{t}, 1, \frac{\mu^p(t)}{t}; \mathfrak{M}^{\downarrow}\right) < \infty, \quad G^2_{pq}\left(\frac{\left(t^{\frac{1}{2}}\nu\left(\frac{1}{t}\right)\right)^q}{t}, \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}, \frac{\mu^p(t)}{t}; \mathfrak{M}^{\downarrow}\right) < \infty.$$

Then for all $f \in \Lambda_p(\mu, \mathbb{R})$ the following inequality holds

$$\|\widehat{f}\|_{\Lambda_q(\nu,\mathbb{R})} \leq c_3 \|f\|_{\Lambda_p(\mu,\mathbb{R})}.$$

Corollary 1. *Let $0 < p < \infty$. Let ν, μ be the weight functions such that*

$$G^1_{p}\left(\frac{\nu^p\left(\frac{1}{t}\right)}{t}, 1, \frac{\mu^p(t)}{t}; \mathfrak{M}^{\downarrow}\right) < \infty, \quad G^2_{p}\left(\frac{\left(t^{\frac{1}{2}}\nu\left(\frac{1}{t}\right)\right)^p}{t}, \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}, \frac{\mu^p(t)}{t}; \mathfrak{M}^{\downarrow}\right) < \infty.$$

Then for all $f \in \Lambda_p(\mu, \mathbb{R})$ the following two-sided estimates hold

$$c_4 \|\overline{f}\|_{\Lambda_p(\mu,\mathbb{R})} \leq \|\widehat{f}\|_{\Lambda_p(\nu,\mathbb{R})} \leq c_5 \|f\|_{\Lambda_p(\mu,\mathbb{R})}.$$

References

1. *J. Bergh and J. Löfström.* Interpolation spaces. An Introduction. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, Berlin-New York, No. 223, 1976.

2. *L. S. Arendarenko, R. Oinarov, L.-E. Persson.* Some new Hardy-type integral inequalities on cones of monotone functions. Advances in harmonic analysis and operator theory, 77–89, Oper. Theory Adv. Appl., 229, Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

3. *A. Gogatishvili, V. D. Stepanov.* Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk. 68 (2013), no. 4 (412), 3–68; translation in Russian Math. Surveys. 68 (2013), no. 4, 597–664.

4. *A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson.* The Hardy inequality. About its history and some related results. Vydavatelsky Servis, Plzen, 2007. 162 pp.

2 Теория дифференциальных уравнений и их приложения

УДК 517.95

Г.А. Абдикаликова
Актюбинский региональный государственный университет им.К.Жубанова
(Казахстан, Актобе)
e-mail: a_a_galiya@mail.ru

Разрешимость нелокальной краевой задачи в широком смысле для системы уравнений в частных производных

На $\overline{\Omega} = \{(x,t) : t \leq x \leq t+\omega, 0 \leq t \leq T\}$, $T > 0$, $\omega > 0$ исследуется нелокальная краевая задача с интегральным условием для системы уравнений в частных производных

$$D\Big[\frac{\partial}{\partial x}u\Big] = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + S(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \tag{1}$$

$$B(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)\Big|_{x\in[0,\omega]} + C(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,T)\Big|_{x\in[T,T+\omega]} +$$

$$+\int\limits_0^T K(x,s)\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)ds = d(x), \tag{2}$$

$$u(t,t) = \Psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$Du(t,t) = \Psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

где $D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$; $(n \times n)$-матрицы $A(x,t)$, $S(x,t)$, $K(x,t)$ и n-вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны по x и t на $\overline{\Omega}$; $(n \times n)$-матрицы $B(x)$, $C(x)$ и n-вектор-функция $d(x)$ непрерывны на $[0,\omega]$; функция $\Psi_1(t)$ непрерывно дифференцируемая и $\Psi_2(t)$ непрерывная функция на $[0,T]$.

Обозначим через $C(\overline{\Omega}, R^n)$ пространство непрерывных по x и t функций $u : \overline{\Omega} \to R^n$ с нормой $\|u\| = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \|u(x,t)\|$; $\|A\| = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \|A(x,t)\| = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}(x,t)|$.

В теории краевых задач для уравнений в частных производных значительный интерес представляют задачи с нелокальными условиями, содержащие как характеристические, так и нехарактеристические точки рассматриваемого уравнения. Среди работ, посвященных краевым задачам с нелокальными ограничениями для широкого класса дифференциальных уравнений и систем уравнений в частных производных, отметим работы [1] - [2], где можно найти подробный обзор и библиографию по этим задачам. Краевые задачи для систем гиперболических уравнений со смешанной производной исследованы и решены методом введения функциональных параметров [3]. В работе [4] получены условия разрешимости краевой задачи для систем гиперболических уравнений с интегральными условиями.

В сообщении устанавливаются коэффициентные достаточные условия корректной разрешимости в широком смысле нелокальной краевой задачи (1)-(4).

С введением новых неизвестных функции $v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ и $w(x,t) = Du$ [5], нелокальная задача (1)-(4) приводится к эквивалентной задаче, состоящей из краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа первого порядка с нелокальным интегральным условием и функциональных соотношений

$$Dv = A(x,t)v + S(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

$$B(x)v(x,0)\Big|_{x\in[0,\omega]} + C(x)v(x,T)\Big|_{x\in[T,T+\omega]} + \int\limits_0^T K(x,s)v(x,s)ds = d(x), \tag{6}$$

$$u(x,t) = \Psi_1(t) + \int\limits_t^x v(\eta,t)d\eta, \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$w(x,t) = \Psi_2(t) + \int\limits_t^x Dv(\eta,t)d\eta, \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Тройка непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $(v(x,t), u(x,t), w(x,t))$ называется решением нелокальной краевой задачи для уравнения (5) при условиях (6)-(8) в широком смысле по Фридрихсу, если функция $v(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$ непрерывно дифференцируема по переменной t вдоль характеристики и удовлетворяет семейству обыкновенных дифференциальных уравнений, условию (6), где функция $v(x,t)$ с функциями $u(x,t)$ и $w(x,t)$ связана соотношениями (7)-(8).

Нелокальная задача (5)-(8) системы гиперболических уравнений первого порядка сводится к линейной задаче семейства обыкновенных дифференциальных уравнений на $\overline{H} = \{(\xi,\tau): \ 0 \le \xi \le \omega, \ 0 \le \tau \le T\}$, $T > 0$, $\omega > 0$

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \tau} = \widetilde{A}(\xi,\tau)\widetilde{v} + \widetilde{S}(\xi,\tau)\widetilde{u}(\xi,\tau) + \widetilde{f}(\xi,\tau), \tag{9}$$

$$\widetilde{B}(\xi)\widetilde{v}(\xi,0) + \widetilde{C}(\xi)\widetilde{v}(\xi,T) + \int\limits_0^T \widetilde{K}(\xi,\tau)\widetilde{v}(\xi,\tau)d\tau = \widetilde{d}(\xi), \quad \xi \in [0,\omega], \tag{10}$$

$$\widetilde{u}(\xi,\tau) = \Psi_1(\tau) + \int\limits_\tau^{\xi+\tau} \widetilde{v}(\zeta,\tau)d\zeta, \quad \tau \in [0,T], \tag{11}$$

$$\widetilde{w}(\xi,\tau) = \Psi_2(\tau) + \int\limits_\tau^{\xi+\tau} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \tau}(\zeta,\tau)d\zeta, \quad \tau \in [0,T], \tag{12}$$

где $\widetilde{v}(\xi,\tau) = v(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{u}(\xi,\tau) = u(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{w}(\xi,\tau) = w(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{A}(\xi,\tau) = A(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{S}(\xi,\tau) = S(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{f}(\xi,\tau) = f(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{K}(\xi,\tau) = K(\xi+\tau,\tau)$.

При фиксированных $\widetilde{u}(\xi,\tau)$ и $\widetilde{w}(\xi,\tau)$ нелокальная задача (9)-(12) исследуется методом параметризации [6]. В настоящем сообщений получены коэффициентные достаточные условия существования единственного решения краевой задачи (9)-(12), которые являются условиями разрешимости эквивалентной краевой задачи с нелокальными условиями (1)-(4). Установлено, что однозначная разрешимость рассматриваемой нелокальной краевой задачи эквивалентна ее корректной разрешимости.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Некоторые факты из теории краевых задач со смещением. - Нальчик: КБНЦ РАН, 2005. - 63 с.

2. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. - Ташкент: ФАН, 1986. - 220 с.

3. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений //Дифференциальные уравнения. - 2005. - Т. 41, № 3. - С. 337–346.

4. *Асанова А.Т.* О краевой задаче для систем гиперболических уравнений с нелокальным интегральным условием //Математический журнал, Алматы. - 2006. - Т. 6, № 4(22). - С. 17-25.

5. *Абдикаликова Г.А.* Корректная разрешимость нелокальной краевой задачи для одного класса уравнений //Наука и Мир. Междунар. научный журнал. - 2014. - Т. 1, № 4(8). - С. 10-14.

6. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения //Журн. вычисл.матем. и матем. физ. - 1989. - Т. 29, № 1. - С. 50–66.

И. Абитбеков
Таразский инновационный гуманитарный унивенситет
(Казахстан, Тараз)

Однородная задача сопряжения

Пусть Г замкнутый контур из класса C_ν , $\frac{2}{p} - 1 < \nu \leq 1$, при заданном $1 < p < 2$. Рассмотрим следующего однородного задачу сопряжения:

Найти кусочно – голоморфную функцию (z) с граничный линией Г, Имеющей конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$^+(t) = G(t)\,^-(t) \quad$ Г , (1)

где $G(t)$ – заданная на Г функция точки t, принадлежащая пространству $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$ и не равная нулю нигде на Г, под $^+(t)$ и $^-(t)$ Подразумевается граничные значения, соответственно, слева и справа.

Заметим , что $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$ вложено в пространство С(Г) непрерывных на Г функций [1]. В классической постановке задачи (1) требуется от $G(t)$ непрерывность по Гельдеру [2], мы требуем только непрерывность в терминах пространств Бесова, т.е. эти функций обладают некоторой гладкостью в норме $L_p(\Gamma)$, $1 < p < 2$.

Мы пользуемся методологией работы [2], такая возможность следует из результатов [3]. Получены явный вид решения задачи (1) через интегральный типа Коши по Г, плотности которых зависят от $G(t)$.

С точки зрения приложений особый интерес представляют решения задачи (1), исчезающие на бесконечности Величина

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[lnG\,(t)]_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi}[argG\,(t)]_{\Gamma}$$

называется индексом функций $G\,(t)$.

Если $\varkappa \leq 0$, то задача (1) не имеет решений, исчезающих на бесконечности (Кроме тривиального $(t) = 0)$; если $\varkappa > 0$, То она имеет $\varkappa$ линейно независимых решений, исчезающих на бесконечности.

Наши результаты позволяют, следуя [z], изучить и соответствующего (1) Однородную задачу сопряжения.

Литература

1. Бесов О.В. Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. : Наука, 1975. 480с.

2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : физмат, 1962, 599с.

3. Блиев Н.К. Сингулярные интегральные операторы с ядром Коши в дробных пространствах. Сиб. мат. журнал, т.47, №1, с. 5-14.

УДК 517.95

Н. Аканбай, С.М. Нарбаева

Казахский национальный университет им.ал-Фараби

(Казахстан, Алматы)

e-mail: noureke@mail.ru, saltaerkesh@mail.ru

Среднее магнитное поле в многомасштабном турбулизованном потоке

Задача об эволюции магнитного поля в случайном турбулизованном потоке проводящей жидкости (или плазмы) является одной из самых важных во многих физических приложениях [1]-[2].

С математической точки зрения речь идет о решении задачи Коши для параболической системы

$$\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial(t)} = v_m \triangle \overrightarrow{H} + rot\left[\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{H}\right], \overrightarrow{H}(0,x) = \overrightarrow{H}_0(x)(t \geq 0, x \in R^3). \qquad (1)$$

Здесь $\overrightarrow{V}(t,x)$ – заданное случайное векторное поле скоростей несжимаемой жидкости $(div\overrightarrow{V} = 0)$, v_m– магнитная вязкость, характеризующая свойства электропроводности среды. Начальное магнитное поле $\overrightarrow{H}_0(x)$ предполагается также бездивергентным.

Поскольку мы изучаем случайный поток жидкости, поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ предполагается зависящим дополнительно от элементарного события $\omega \in \Omega$, которое индексирует реализации поля скоростей. В основном вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ действует естественным образом некоторая группа преобразований, по отношению к которой поле $\overrightarrow{V}\,(t,x)$ предполагается однородным и эргодическим по нужным переменным.

Коснемся теперь основных результатов физических теорий о поведении магнитного поля в случайном турбулизованном потоке.

Одним из самых первых и знаменитых работ в этой области была теория среднего поля Штейнбека-Краузе-Рэдлера (ШКР) [3]. Предполагая, что $< V_i(t,x)V_j(t',y) \geq 2\frac{l}{v}\delta(t-t')f_{ij}(x,y), l, \nu$ – характерные масштаб и амплитуда поля скорости (это свойство в физической литературе называется дельта-коррелированностью по времени) и однородным по пространственной координате, они доказали, что среднее магнитное поле $< \overrightarrow{H}(t,x) >$ удовлетворяет уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial < H_i >}{\partial t} = \beta_{jl}\frac{\partial^2 < H_{i>}}{\partial x_j \partial x_l} + \alpha_{ij,l}\frac{\partial < H_l >}{\partial x_j}. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, а угловые скобки $< >$ означает усреднение по основной вероятностной мере $\mathbb{P}$, т.е. усреднение по ансамблю реализации поля $\overrightarrow{V}(t,x)$. Постоянный тензор β_{jl} называется тензором турбулентной диффузии, а псевдотензор $\alpha_{ij,l}$–спиральностью. Особенно просто уравнение ШКР выглядит в изотропном случае, когда поле$\overrightarrow{V}(t,x)$не только однородно относительно сдвигов, но и инвариантно относительно группы вращений в R^3. В этом случае тензор β_{jl} сводится к скаляру $\beta = v_m + \frac{1}{3} < \overrightarrow{V}^2 >$, а псевдотензор $\alpha_{ij,l}$ к псевдоскаляру $\alpha = -\frac{1}{3} < \overrightarrow{V} rot \overrightarrow{V} >$, и уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial < \overrightarrow{H} >}{\partial t} = \beta \triangle \ < \overrightarrow{H} > + \alpha \ rot < \overrightarrow{H} > . \tag{2*}$$

Из уравнения (2*) легко выводится, что при α?0и надлежащих начальных условиях среднее поле растет экспоненциально. Считается, что теория ШКР с некоторыми оговорками хорошо описывает средние поля Солнца и звезд.

Вывод уравнения ШКР в работе [3] весьма громоздок и не вполне удовлетворителен с математической точки зрения. В серии работ Я. Б. Зельдовича, С. А. Молчанова и их учеников (см. библиографию [4]) был развит гораздо более простой и строгий в математическом смысле метод (метод случайных траектории) исследования магнитного поля. Существо этого метода (лагранжева подхода) состоит в следующем. Исходное уравнение (1), используя бездивергентность $\overrightarrow{V}$ и $\overrightarrow{H}$, можно переписать в виде

$$\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} = v_m \triangle \overrightarrow{H} - \left(\overrightarrow{V}\triangle\right)\overrightarrow{H} + \left(\overrightarrow{H}\triangle\right)\overrightarrow{V}, \quad \overrightarrow{H}(0,x) = \overrightarrow{H}_0(x). \tag{3}$$

Старшая часть стоящего в правой части (3) оператора действует по отдельности на каждую компоненту поля $\overrightarrow{H}(t,x)$, и по ней можно построить лагранжевую траекторию (диффузионный процесс) $\overrightarrow{\xi}_s$, $0 \leq s \leq t$, удовлетворяющую стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\overrightarrow{\xi}_s = \sqrt{2v_m}d\overrightarrow{W}_s - \overrightarrow{V}\left(t-s, \overrightarrow{\xi}_s\right)ds, \quad \overrightarrow{\xi}_0 = \overrightarrow{x}, \tag{4}$$

где $\overrightarrow{W}_s$ – стандартный винеровский процесс. Отдельные компоненты поля $\overrightarrow{H}$ зацепляются с помощью матричного потенциала $C(t,x)$ с элементами $C_{ij}(t,x) = \partial V_i/\partial x_j$.

Можно показать [12], что для искомого решения $\overrightarrow{H}(t,x)$справедлив матричный вариант формулы Каца-Фейнмана

$$\overrightarrow{H}(t,x) = M_x\left[\prod_{s=0}^{t}\left(E + C\left(t-s, \overrightarrow{\xi}_s\right)ds\right)\overrightarrow{H}_0(\overrightarrow{\xi}_t)\right] \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем знак условного математического ожидания M_x означает усреднение по множеству лагранжевых траекторий, точнее говоря, по винеровской мере, связанной с процессом $\overrightarrow{W}_s$. Особо отметим, что в (5) усреднение по $\overrightarrow{V}$ не производится, формула (5) справедлива для индивидуального поля скоростей. Предполагая, что поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ обладает свойством обновления, легко получить замкнутые моментные уравнения для любых моментов поля $\overrightarrow{H}(t,x)$. Эти уравнения связаны с интегральными операторами, но в предположении, что время обновления $\tau > 0$, т.е. поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ становится дельта-коррелированным по времени, они переходят в дифференциальные уравнения параболического типа. В частности, для первого момента магнитного поля мы снова приходим к уравнениям ШКР.

Основной недостаток гипотез о дельта-коррелированности поля $\overrightarrow{V}(t,x)$ или его обновления состоит в их физической нереалистичности. Современная теория турбулентности, берущая свое начало из знаменитых работ А. Н. Колмогорова [5], [6], представляет турбулентное течение как совокупность вихрей различного размера, живущих в различное время, т.е. такой поток имеет иерархию масштабов.

Для того, чтобы отразить это обстоятельство в теории, мы вводим в настоящей работе так называемую многомасштабную модель, в которой поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ представляется в виде суммы $\overrightarrow{V}(t,x) = \sum_{j=0}^{N} \overrightarrow{V}_j(t,x)$ полей скоростей, имеющих различные времена обновления и различные пространственные корреляционные масштабы. Если эти времена обновления по прежнему малы, то развивая метод случайных траекторий, можно вывести уравнения для любых моментов магнитного поля.

Основная цель настоящей работы – перенесение результатов теории ШКР на случай многомасштабных течений. Перейдем теперь к основным результатам нашей работы.

Поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ называется *течением с обновлением*, если его можно представить в виде $\overrightarrow{V}(t,x) = \overrightarrow{V}^{(k)}_{(x)}$при $t \in [k\tau, (k+1)\tau), k = 0,1,2,\ldots,\ \tau > 0$, где $\overrightarrow{V}^{(k)}_{(x)}$ – независимые одинаково распределенные поля. Величина τ называется временем обновления. Поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ назовем *многомасштабным течением*, если его можно представить в виде суммы статистически независимых полей скоростей $\overrightarrow{V}_j(t,x)$, $j = 0,1,2,\ldots,N$, имеющих различные времена обновления τ_j и различные корреляционные масштабы $\ell_j = k_j^{-1}$, причем величины τ_j, $k_j = \xi_j^{-1}, \mathcal{V}_j = \sqrt{< \overrightarrow{V}^2_j >}$ подчиняются соотношениям:

$[\tau_0 > \tau_1 > \cdots > \tau_N,\quad k_0 < k_1 < \cdots < k_N,\quad \nu_0 > \nu_1 > \cdots > \nu_N, k_j\tau_j\nu_j < 1$
$(j = 0,1,2,\ldots,N)$.

В данной работе выведено уравнение для среднего магнитного поля в многомасштабном течении, причем усреднение уравнения индукции проводилось последовательно, начиная от самых малых масштабов. При этом на первом шаге для усреднения $\overrightarrow{H}(t,x)$ по $\overrightarrow{V}_N$ была использована формулы (5) и показано, что частично усредненное поле $< \overrightarrow{H} >_{\overrightarrow{V}_N}$ является решением некоторого уравнения типа ШКР, но со случайными коэффициентами диффузии, спиральности и матричным потенциалом. Таким образом перед вторым усреднением $< \overrightarrow{H} >_{\overrightarrow{V}_N}$ по $\overrightarrow{V}_{N-1}$ (это поле обозначим через $< \overrightarrow{H} >_{N-1,N}$) возникает новая задача о получении для $< \overrightarrow{H} >_{\overrightarrow{V}_N}$ формулы-представления, аналогичной формуле (5) для $\overrightarrow{H}(t,x)$. С этой целью доказана одна общая теорема, относящаяся к представлению решений общих параболических систем, включающим в качестве частного случая систему уравнений для $< \overrightarrow{H} >_{\overrightarrow{V}_N}$. Далее доказана теорема усреднения для полученной системы параболических уравнений, откуда в качестве следствия, получен основной результат.

Теорема. Пусть $\overrightarrow{H}(t,x)$ – решение уравнения индукции (3), и пусть в (3) поле $\overrightarrow{V}(t,x)$является многомасштабным. Тогда среднее магнитное поле $\overrightarrow{B} =< \overrightarrow{H} >_{0,1,\ldots,N}$, полученное в результате последовательного (начиная от самых малых масштабов) осреднения уравнения магнитного поля, является решением системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\beta^{(0)}\nabla, \nabla\right)\overrightarrow{B} + \left(A^{(0)}\nabla\overrightarrow{B}\right), \overrightarrow{B}(0,x) =< \overrightarrow{H}_0(x) > .$$

Коэффициенты турбулентной диффузии и средней спиральности определяются следующими соотношениями:

$$\beta_{jl}^{(0)} = 2v_m\delta_{jl} + b_{jl}^{(0)} + \sum_{p=1}^{N} < b_{jl}^{(p)} >_{0,1,\ldots,p-1},$$

$$\alpha_{ij,\ell}^{(0)} = a_{ij,\ell}^{(0)} + \sum_{p=1}^{N} < a_{ij,\ell}^{(p)} >_{0,1,\ldots,p-1} + \overline{a}_{jp,p}^{(0)}\delta_{i\ell} + \sum_{p=1}^{N} < \overline{a}_{jp,p}^{(q)}\delta_{i\ell} >_{0,\ldots,q-1},$$

причем для

$$p = 0,1,2,\ldots,N\colon\ b_{j\ell}^{(p)} = \tfrac{1}{\tau_p}\int\limits_0^{\tau_p}\int\limits_0^{\tau_p} M_x < V_{pj}\left(x\int_{s1}^{\rightharpoonup\,(p)}\right)V_{p\ell}(x\int_{s2}^{\rightharpoonup(p)} > ds_1ds_2,$$

$$a_{ij,\ell}^{(p)} = -\frac{1}{\tau_p}\int\limits_0^{\tau_p}\int\limits_0^{\tau_p} M_x < \frac{\partial V_{pi}\left(\overrightharpoon{x}_{s1}^{(p)}\right)}{\partial x_\ell}V_{pj}(\overrightharpoon{x}_{s_2}^{(p)}) > ds_1ds_2,$$

$$\overline{a}_{ij,\ell}^{(p)} = \frac{1}{\tau_p}\int\limits_0^{\tau_p}\int\limits_0^{s} M_x < \frac{\partial V_{pi}\left(\overrightharpoon{x}_{s1}^{(p)}\right)}{\partial x_\ell}V_{pj}(\overrightharpoon{x}_{s_2}^{(p)}) > ds_1ds_2,$$

$$\overrightharpoon{x}_s^{(p)} = \overrightarrow{x} + \sigma^{(p+1)}\overrightarrow{W}_s - \overrightarrow{U}_{p-1}s, \quad \overrightarrow{u}_p = \sum_{j=0}^{p-1}\overrightarrow{V}_j, \quad \overrightarrow{U}_{-1} = 0,$$

$$\sigma^{(p)}\left(\sigma^{(p)}\right)^* = \beta^{(p)} =< \beta^{(p+1)} >_{\overrightarrow{V}_p} + \mathrm{B}^{(p)},\ \ \beta^{(N+1)} = 2v_mE, \quad \mathrm{B}^{(p)} = \left\|b_{j\ell}^{(p)}\right\|_{j,\ell=1}^{3}$$

(В формулах (I8) под $V_{pj}(x)$ подразумевается $V_{pj}(0,x)$).

Далее в работе получены приближенные формулы для вычисления коэффициентов осредненного уравнения в случае изотропной турбулентности, введена и выяснена роль так называемого*магнитодиссипационного масштаба*.

Литература

1. *ZeldovickYa. B., RuzmaikinA.A., Sokoloff D.D* Magnetic field in astrophysics. - Grodonand Breach, 1984, 478 стр.

2. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. - М.: Мир, 1980, 339 стр.

3. *Steenbeck M., Krause F., Radler K.* Berechung der inittberen Lorentz-Feldstarke(V) ??B ? fur ein elektrisoh leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Krafte beeinflubter bewegung. - Z.Naturforsch, 1966, Bd.21a, стр. 369-376.

4. *Молчанов С. А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Уравнение динамо в случайном короткокоррелированном поле скорости. -Магнитная гидродинамика, 1983, №4, стр. 67-72.

5. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. - Дан СССР, 1941, т. 30, №4, стр. 299-303.

6. *Колмогоров А.Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности. - Дан СССР, т. 32, №6, стр. 19-21, 1941.

УДК 517.956

К.Б. Бапаев, С.С. Сламжанова
Институт математики и математического моделирования
(Казахстан, Алматы),
ЖГУ им. И. Жансугурова (Казахстан, Талдыкорган)
e-mail: Beksultan.82@mail.ru

О существовании решений некоторых уравнений в частных разностях

Преобразование исходной разностно-динамической системы (РДС), ее нормализация [1] и построение функции Ляпунова для РДС связаны с решением различных видов функциональных уравнений типа Шредера [1-3].

Эти уравнения аналогичны линейным дифференциальным уравнениям в частных производных, составленных в силу систем обыкновенных уравнений, впервые изучены А.М. Ляпуновым [4].

При изучении этих уравнений А.М. Ляпуновым введено понятие производного определителя, аналог которого естественным образом появляется при изучении уравнений в частных разностях.

Пусть дана система линейных разностных уравнений

$$x_{n+1} = Ax_n, \;\; x_n \in R^q \tag{1}$$

Поставим задачу: определить форму $V_n^{(l)}$, l-го порядка, которая вдоль решения РДС (1) удовлетворяет следующему уравнению в частных разностях

$$V^{(l)}\left(x_{n+1}\right) = \chi V^{(l)}\left(x_n\right), \;\; (\chi = const), \tag{2}$$

т.е. функциональному уравнению Шредера

$$V^{(l)}\left(Ax_n\right) = \chi V^{(l)}\left(x_n\right).$$

Для решения применяем метод неопределенных коэффициентов. Допустим сначала, что $l = 1$, т.е. положим

$$V_n^{(1)} = Qx_n, \tag{3}$$

где Q – вектор-строка. Подставляя (3) в (2) и приравнивая коэффициенты при x_n, получим систему алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять, коэффициенты формы

$$AQ = \chi Q.$$

Таким образом для того, чтобы уравнение (2) могло быть удовлетворено линейной форме, необходимо и достаточно, чтобы χ была корнем характеристического уравнения

$$D(\chi) = |A - \chi E| = 0, \tag{4}$$

где E – единичная матрица.
Каждому корню этого уравнения отвечает своя форма.

Допустим теперь, что $l > 1$.Введем

$$V^{(l)}(x_n) = \sum_{|p|=l} \alpha_p x_n^p \tag{5}$$

Тогда подставляя форму $V_n^{(l)}$ в (2), получим для определения α_p систему линейных однородных уравнений вида

$$\alpha_l = \chi\alpha, \tag{6}$$

где $\alpha - k = \frac{q(q+1)...(q+l-1)}{l!}$-мерная вектор строка. $A_l = (A_{ij})^k$ матрица k-го порядка при этом элементы A_{ij} являются формами l-го порядка от элементов $0_{\gamma\eta}$ матрицы А.

Таким образом для того, чтобы уравнения (2) можно было удовлетворить форме l-го порядка необходимо и достаточно, чтобы величина χ была корнем характеристического уравнения

$$|A_l - \chi E| = 0. \tag{7}$$

Следуя терминологии, использованной в [4] введем:

Определение 1. Матрицу A_l будем называть производной матрицей l-го порядка матрицы A. Определитель $|A_l|$ будем называть производным определителем l-го порядка определителя $|A_l|$. Между корнями характеристического уравнения определителя $|A|$ и $|A_l|$доказаны следующие:

Теорема 1. (О характеристических корнях производного определителя). Все корни уравнения (7) определяются формулой

$$\chi = \prod_{j=1}^{q} \lambda_j^{l_j} \quad (\forall l_j \in Z_+) \left(\sum_{j=1}^{q} l_j = l \right),$$

где λ_j – корни (4).

Теорема 2. Если уравнение (4) имеет m-пар комплексно-сопряженных корней по модулю равных единице вида: $e^{\pm i\varphi_s}$ $\left(s = \overline{1,m}\right)$, причем φ_s линейно независимы в множестве целых чисел и неизмеримы с 2π. То при l-четном, уравнение (2) имеет решение в виде формы l-го порядка.

Пусть теперь $U^{(l)}(x_n)$-го задачная форма l-го порядка. Рассмотрим уравнение

$$V^{(l)}(x_{n+1}) = \chi V^{(l)}(x_n) + U(x_n). \tag{8}$$

Теорема 3. При выполнения условия теоремы 2 уравнение (8) при $\chi = 1$ имеет решение в виде формы l-го порядка какова бы ни была заданная форма l-го порядка $U^{(l)}$.

Литература

1. *Бапаев К.Б.* Нормализация систем линейных разностных уравнений. - Алматы-Новосибирск, Препринт № 1, 1995. - 61 с.

2. *Бапаев К.Б.* Устойчивость решения нелинейных разностных уравнений в одном критическом случае. - Алматы-Новосибирск, Препринт № 2, 1995. - 47 с.

3. *Бапаев К.Б., Сламжанова С.С.* О некоторых задачах дискретных динамических систем // Актуальные проблемы современной науки. - Москва, 2014. - № 5 (78). - С. 97-103.

4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. - Л.-М., 1950. - 450 с.

УДК 517.95

А.С. Бердышев, **Н.С. Ахтаева**, **Ж.А. Серикбаев**
Казахский национальный педагогический университет имени Абая,(Казахстан, Алматы)
Казахский национальный университет имени аль-Фараби,Институт математики и механики,(Казахстан, Алматы)
e-mail: berdyshev@mail.ru,

Краевые задачи и их спектральные свойства для смешанного параболо-гиперболического уравнения с интегральными условиями сопряжения

Работа посвящена исследованию вопросов разрешимости и спектральных свойств краевых задач с интегральными условиями склеивания для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка.

Пусть $\Omega \subset R^2$– конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, BB_0 прямых $x = 0, y = 1, x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ монотонной гладкой кривой $AC: \ y = -\gamma(x)$, $0 < x < l$, $0.5 < l < 1$, $\gamma(0) = 0$, $l + \gamma(l) = 1$ и отрезком $BC: \ x - y = 1$, $l \leq x < 1$ характеристики уравнения

$$Lu = f(x, y), \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Задача А. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,\ y)|_{AA_0 \bigcup A_0B_0} = 0, \tag{3}$$

$$(u_x - u_y)|_{AC} = 0 \tag{4}$$

и условиям склеивания на линиях изменения типа

$$u_x(x, +0) = u_x(x, -0),$$

$$u_y(x, +0) = \alpha\, u_y(x,\ -0) + \beta \int_0^x u_y(t,\ -0) Q(x,t)\, dt, 0 < x < 1 \tag{5}$$

где $Q(x,t)$- заданная функция и $Q(x,t) \in C^1([0,1]\times[0,1])$, $\alpha,\ \beta \in R$, причем $\alpha^2+\beta^2>0$.

Различные свойства, в том числе вольтерровость краевых задач для смешанного параболо- гиперболического уравнения изучены в работах [1-3]. В [3] также приведена библиография близких к теме.

Параболическую часть смешанной области Ω обозначим через Ω_0, а гиперболическую - Ω_1.

Под регулярным решением задачи B в области Ω понимаем функцию

$$u(x,y) = C(\bar\Omega) \cap C^{1,1}(\bar\Omega_0 \cup \bar\Omega_1) \cap C^{1,2}(\Omega_0) \cap C^{2,2}(\Omega_1),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в областях Ω_0и Ω_1 и краевым условиям (3)-(4) и условиям склеивания (5).

Относительно кривой AC предположим, что $\gamma(x)$ -дважды непрерывно дифференцируема, и функция $x-\gamma(x)$ и $x+\gamma(x)$ монотонно возрастают, $0<\gamma'(0)<1,\quad \gamma(x)>0,\ x>0$.

Теорема 1. Пусть $\gamma(x) \in C^1[0,l]$и $Q(x,t) \in C^1([0,1]\times[0,1])$. Тогда для любой функции $f(x,y) \in C^1(\bar\Omega)$существует единственное регулярное решение задачи A.

Имеет место следующие две леммы.

Лемма 1. Регулярное решение задачи A представимо в виде

$$u(x,y) = \iint_\Omega K(x,y,x_1,y_1)\, f(x_1,y_1)\, dx_1dy_1 \tag{6}$$

где $K(x,y,x_1,y_1) \in L_2(\Omega\times\Omega)$ и $K(x,y,x_1,y_1) = K_{\alpha\beta}(x,y,x_1,y_1)$ если $\alpha \neq 0$, $K(x,y,x_1,y_1) = K_{0\beta}(x,y,x_1,y_1)$ если $\alpha=0$.

Здесь $K_{\alpha\beta}(x,y,x_1,y_1)$ выписывается в явном виде через резольвенты интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Лемма 2. Для регулярного решения задачи A справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \le c\,\|f\|_0\,, \tag{7}$$

где c - независящая от $u(x,y)$ константа, а через $\|\|_l$ обозначена норма в пространстве Соболева $W_2^l(\Omega)$ и $W_2^0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$.

Через W обозначим множество регулярных решений задачи A.

Функцию $u(x,y) \in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи A, если существует последовательность $\{u_n\}$ функции $u_n \in W$ такая, что u_n и Lu_n сходиться в $L_2(\Omega)$ соответственно к u и f.

Через $\mathbb{L}$ - обозначим замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного на W выражением (2).

Согласно определению сильного решения, u - сильное решение задачи A, тогда и только тогда, когда $u \in D(\mathbb{L})$. Здесь $u \in D(\mathbb{L})$ – область определения оператора $\mathbb{L}$. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Для любой функции $Q(x,t) \in C^1([0,1]\times[0,1])$и $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x,y)$ задачи A. Это решение принадлежит классу $W_2^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega_1) \cap C(\bar\Omega)$, удовлетворяет неравенству (7) и представимо в виде (6).

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. Интегральный оператор в правой части (6), т.е.

$$\mathbb{L}^{-1}f(x,y) = \iint_\Omega K(x,y;\,x_1,y_1) f(x_1,y_1) dx_1dy_1,$$

является вольтерровым в $_2(\Omega)$.

Следствие 1. Задача А является вольтерровой задачей.

Следствие 2.Для любого комплексного числа λ уравнение

$$\mathbb{L}u - \lambda u = f(x, y)$$

однозначно разрешимо при всех $f \in L_2(\Omega)$.

Во второй части работы доказана сильная разрешимость и существование собственных значении одного варианта аналога задачи Трикоми со специальными условиям склейвания для параболо- гиперболического уравнения второго порядка. Рассмотрим уравнение (1).

Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B, $A = (0,0)$, $A_0 = (0,1)$, $B_0 = (1,1)$, $B\,(1,0)$, а при $y < 0$ - характеристиками $AC: \ x + y = 0$ и $BC: \ x - y = 1$ уравнения.

Рассмотрим следующий аналог задачи Трикоми для параболо – гиперболического уравнения.

Задача B. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u\left|_{AA_0 \bigcup A_0B_0} = 0\right. \qquad (8)$$

$$u_x + u_y\left|_{BC} = 0\right. \qquad (9)$$

и условием склеивания на линиях изменения типа

$$u_x(x, +0) = u_x(x, -0),$$

$$u_y(x, +0) = \alpha\, u_y(x,\, -0) - \beta \int_0^x u_y(t,\, -0)\, dt, \;\; 0 < x < 1 \qquad (10)$$

где $\alpha, \;\beta \in R$, причем $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Обозначим через $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$, а через W - множество функций из класса $C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{1,2}\left(\bar{\Omega}_0\right) \cap C^{2,2}\left(\bar{\Omega}_1\right)$, удовлетворяющих уравнению и условиям (8)-(9), также условием склеивания (10).

Функцию $u \in L_2\,(\Omega)$ называют сильным решением задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\}$, $u_n \in W$, такая, что
$\|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u_n - u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \to 0$, $\|Lu_n - f\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь и далее через $\|\cdot\|_l$ обозначена норма в пространстве С.Л. Соболева $W_2^l\,(\Omega)$, где $W_2^0\,(\Omega) = L_2\,(\Omega)$.

Теорема 4. Для любой функции $f \in L_2\,(\Omega)$ существует единственное сильное решение u задачи В. Это решение принадлежит классу $W^1\,(\Omega) \cap W^{1,2}\,(\Omega_0) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, удовлетворяет неравенству (7) и представляется в виде

$$u\,(x, y) = \iint_\Omega \mathrm{K}\,(x, y; x_1, y_1)\, f\,(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1, \qquad (11)$$

где $K \in L_2\,(\Omega \times \Omega)$

Отметим, что в ходе доказательства всех вышеприведенных теорем, где участвует представление типа (11), ядра выписываются в явном виде через резольвенты некоторых интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. Основным результатом является доказательство существования собственных значений поставленной задачи.

Теорема 5. Пусть $\alpha > 0, \;\beta > 0$. Существует $\lambda \in C$ такое, что уравнение

$$Lu = \lambda u$$

имеет нетривиальное решение $u \in W$.

При доказательстве этой теоремы используются пердставления (11), теорема В.Б. Лидского о совпадении матричного и спектрального следов ядерного оператора, и формула Гаала вычисления следа ядерного оператора, представимого в виде произведения двух опeратроов Гильберта- Шмидта.

Данная статья выполнена при финансовой поддержке научно- исследовательского проекта № 111 ГФ 2015 МОН РК

Литература

1. *Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T, Akhtaeva N.S.* On the Volterra property of a boundary problem with integral gluing condition for mixed parabolic- hyperbolic equation //Boundary value problems. -2013. DOI: 10.1186/1687-2770-2013-94.

2. *Бердышев А.С.* О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе-Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения //Сибирский математический журнал. -2005г. Т.46, N3. - С. 500-510.

3. *Бердышев А.С.* Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо- гиперболического и смешанно- составного типов Алматы, 2015. -224 с.

Н.К.Блиев, К.Е.Шерниязов
ИМММ МОН РК, КазНУ им. аль-Фараби
(Казахстан, г. Алматы)
e-mail: ksh10@mail.ru

Вполне непрерывность некоторых комбинаций операторов сингулярного интегрирования с ядром Коши, сдвига и комплексного сопряжения

Пусть $\Gamma \in C_\nu^m$ ($m \geq 0$-целое, $0 < \nu \leq 1$)- простая закмнутая кривая в комплексной плоскости E. Пусть $\alpha\,(t)\ :\ \Gamma\ \rightarrow\ \Gamma$ есть прямой или обратный гомеоморфизм контура Γ на себя такой, чтопроизводная $\alpha'\,(t)$ принадлежит пространству Гельдера $H_\mu(\Gamma)(0 < \mu \leq 1)$ и $\alpha'(t) \neq 0$ при любом $t \in \Gamma$. Известно, что операторы

$(S_\Gamma\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}$ (сингулярный интегральный оператор),

$(W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$ (оператор сдвига),
и
$(C\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}$ (оператор комплексного сопряжения (антилинейный)) играют важные роли в теории краевых задач со сдвигом для аналитических функций и в теории сингулярных интегральных уравнений [1,2, 5]. Исследуем свойства некоторых комбинаций этих операторов в пространствах Бесова $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$, определяемых следующим образом (см.[3]): пусть $t(s) = x(s) + iy(s), 0 \leq s \leq l$,–уравнение контура Γ длины l,

причем будем считать, что функции $x(s), y(s)$ продолжены на всю числовую ось как периодические функций с периодом l. Пусть $1 \le p \le \infty, \quad 1 \le \theta \le \infty, \quad r > 0$ и k целое такое, что $k > r$. Пространство Бесова $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ состоит из всех функций $\varphi(t) = \varphi(t(s)) \equiv \psi(s) \in L_p([0, l])$, l- периодических по переменной s и таких, что

$$\|\varphi\|^{(k)}_{B^r_{p\theta}(\Gamma)} \equiv \|\psi\|^{(k)}_{B^r_{p\theta}([0,l])} = \|\psi\|_{L_p([0,l])} + \left(\int_{-h_0}^{h_0} |u|^{-1-r\theta} \left\|\Delta^k_u\psi\right\|^\theta_{L_p([0,l])} du\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \qquad (1)$$

где $h_0 > 0$ и

$$\Delta^k_u\psi(s) = \Delta_u\left(\Delta^{k-1}_u\psi\right)(s) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C^l_k\psi(s + lu) -$$

разность порядка k с шагом u.

Отметим, что нормы $\|\varphi\|^{(k)}_{B^r_{p\theta}(\Gamma)}$ при различных натуральных $k(k > r)$ эквивалентны между собой. Свойства интеграла типа Коши, ограниченность сингулярного оператора S_Γ в пространствах Гельдера $H_\mu()$ и в $L_p(\Gamma)$ доказаны в работах И.И. Привалова, Н.И. Мусхелишвили и их учеников, а в пространствах Бесова $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$, доказаны в работах Н.К. Блиева и его учеников (подробнее об этом см., напр., [2] и [6]).

Свойства оператора сдвига W и его некоторых комбинаций с операторами S_Γ и в пространствах $L_p(\Gamma)$ и $H_\mu(\Gamma)$ изучены в работах [4],[5].

Нами получены следующие результаты.

Т е о р е м а 1. Пусть $0 < \nu \le 1$, $\Gamma \in C^1_\nu$- простой замкнутый контур и пусть $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $0 < r < min\{\mu, \nu\}$. Тогда оператор $A_1 = \gamma W_\alpha S W^{-1}_\alpha - S$ вполне непрерывен в пространстве $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$, где $\gamma = +1$ или -1 соответственно тому, что $\alpha(t)$ есть прямой или обратный сдвиг.

Т е о р е м а 2. Пусть $0 < \nu \le 1$, $\Gamma \in C^1_\nu$– простой замкнутый контур. Тогда при любых $p > 1$, $\theta \ge 1, 0 < r < \nu$ оператор $A_2 = S_\Gamma + S_\Gamma$ вполне непрерывен в пространстве $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$.

Эти теоремы, а также ранее полученные нами результаты (см. [6]) позволяют исследовать условия разрешимости в пространствах Бесова сингулярного интегрального уравнения

$$(K\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi(\alpha(t)) + \frac{c((t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} + + \frac{d(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha(\tau))}{\tau - t} d\tau +$$

$$+ \int_\Gamma K(\tau, t)\varphi(\tau)\, d\tau = g(t)$$

со сдвигом Карлемана $\alpha(t)$.

Литература

1. *Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функций.-М.: Наука, 1959.- 510 с.*

2. *Блиев Н.К. Обобщенные аналитические функций в дробных пространствах. Алма-Ата:Изд-во Наука, 1985.- 160 с.*

3. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.М.: Наука, 1975.-480 с.*

4. *Кравченко В.Г. К теории Нетера функциональных уравнений с некарлемановским сдвигом//ДАН СССР.-201.-№6.-1971.-С. 1275-1278.*

5. *Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.-М.: Наука, 1977.*

6. *Блиев Н.К., Шерниязов К.Е. Ограниченность сингулярных интегральных операторов со сдвигом в пространствах Бесова //Материалы VII Международной научной конференции* ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, АНАЛИЗА И АЛГЕБРЫ. *Актюбинский Региональный Государственный Университет им.Жуба-нова, Казахстан, г. Актобе, 8-9 октября 2015 г.*

УДК 517.95

Н.А. Есиркегенов

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Институт математики и математического моделирования (Казахстан, Алматы)
e-mail: nurgisa@hotmail.com

Об одной задаче для волнового уравнения с данными на всей границе

Пусть $\Omega \subset R^2$ - прямоугольная область, ограниченная прямыми: $AB : 0 \leq x \leq \ell$, $t = 0$, $BC : x = \ell$, $0 \leq t \leq T$, $CD : 0 \leq x \leq \ell, t = T$ и $AD : x = 0$, $0 \leq t \leq T$.

В области Ω рассмотрим неоднородное волновое уравнение:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t). \tag{1}$$

Хорошо известно, что задача Дирихле для волнового уравнения (1) в прямоугольной области не является корректной [1]. Конкретно, в случае нашей области Ω, легко видеть, что однородное уравнение (1) с условиями Дирихле

$$u|_{AB\cup BC\cup AD} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{CD} = 0, \tag{3}$$

имеет счетное число ненулевых решений вида $u_{mn}(x, t) = sin\frac{m\pi x}{\ell}sin\frac{n\pi t}{T}, m, n = 1, 2, ...$

Впервые неединственность решения задачи Дирихле для волнового уравнения была отмечена в работах Ж. Адамара [2], А. Губера [3]. В своей работе Д. Боржин и Р. Даффин [4] рассмотрели задачу Дирихле для однородного уравнения (1) в прямоугольнике $\{0 \leq t \leq T,\ 0 \leq x \leq X\}$. Используя преобразование Лапласа, они показали, что если число T/X - иррациональное, то имеет место единственность решения задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций с суммируемыми по Лебегу вторыми производными. А в работе [5], когда T/X - является алгебраическим числом степени $n > 2$, получено условие существования и единственности решения задачи Дирихле.

Отметим также, что в последнее время усилился интерес к исследованию классических начально-краевых задач для волнового уравнения в прямоугольных областях в связи с задачами по исследованию оптимизации граничного управления процессами колебаний струны (см., например, [6]-[8]).

Пусть $E=(T,T), F=(\ell-T,T)$.

Задача 1. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и условиям на границе CD:*

$$u|_{CE}=0, \tag{4}$$

$$u_t|_{DE}=0. \tag{5}$$

Как обычно, функцию $u\in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением* Задачи 1, если существует последовательность функций $u_n\in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям задачи, такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ к u и f соответственно.

Теорема 1. *Пусть $\ell/T=n\in N(n\geq 2)$. а) Тогда классическое решение задачи (1), (2), (22) и (23) существует, единственно, принадлежит классу $u\in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$ и устойчиво по норме пространства $C^1(\overline{\Omega})$ для функции $f\in C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей необходимому условию согласования:*

$$\int_0^T f(t,t)dt=0; \tag{6}$$

$$f(\ell,0)=0; \tag{7}$$

$$f(\ell,T)=0. \tag{8}$$

б) Для любой функции $f\in L_2(\Omega)$ задача (1), (2), (22) и (23) имеет единственное сильное решение. Это решение принадлежит классу $u\in W_2^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет оценке:

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{9}$$

Литература

1. *Hadamard J.* Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique. //Bull. Univ. Princeton. **13**, (1902), 49–52

2. *Hadamard J.* Equations aux derivees partielles. Les conditions definies en general. Le cas hyperbolique. //Enseignement Math. **35**, (1936), 5–42

3. *Huber A.* Die erste Randwertaufgabe fur geschlossene Bereiche bei der Gleichung $u_{xy}=f(x,y)$. //Monatshefte fur Mathematik und Physik. **39**, No 1 (1932), 79–100

4. *Bourgin D.G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation. //Bull.Amer.Math.Soc. **45**, No 12 (1939), 851–858

5. *Сабитов К.Б.* Уравнение математической физики. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

6. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничного управления смещением или упругой силой на одном конце струны за произвольное достаточно большое время //Автомат. и телемех. **69**, No 3 (2008), 7-16.

7. *Моисеев Е.И., Холомеева А.А.* Оптимальное граничное управление смещением колебаниями струны с нелокальным условием четности второго рода //Дифференц. уравнения. **47**, No 1 (2011), 126-133.

8. *Моисеев Е.И., Холомеева А.А.* Разрешимость смешанной задачи для волнового уравнения с динамическим граничным условием //Дифференц. уравнения. **48**, No 10 (2012), 1392-1397.

УДК 531.1+629.195

К.С. Жилисбаева, А.Ж. Исмаилова, А.Д. Саспаева, Д.Т. Тулекенова
КазНУ имени аль-Фараби,
АО "Национальный центр космических исследований и технологий",
НАО "Алматинский университет энергетики и связи",
Институт механики и машиноведения имени академика У.А. Джолдасбекова,
г. Алматы, Казахстан
e-mail: zhilisbaeva@mail.ru, asem.saspaeva@mail.ru, dana_tul@mail.ru

Построение управляющих моменто, демпфирующих колебания намагнического спутника

Интерес к задаче управления вращательным движением намагниченных спутников поддерживается в основном практическими потребностями развивающейся техники космических полетов и систем магнитной стабилизации.

Из-за неравномерного вращения вектора местной напряженности геомагнитного поля в инерциальном пространстве и изменения его модуля при движении центра масс спутника по орбите принципиально невозможно обеспечить точную ориентацию продольной оси спутника вдоль этого вектора. Возникает вопрос уменьшения амплитуды вынужденных колебаний спутника относительно вектора местной напряженности геомагнитного поля выбором параметров системы ориентации. Наличие вынужденных колебаний приводит к опасности возникновения резонансов между собственными частотами спутника и частотами вынуждающего момента.

В данной работе рассматривается задача создания управляющих моментов вращательным движением динамически симметричного спутника Земли, имеющего постоянный магнитный момент, направленный по оси его динамической симметрии. Намагниченный спутник движется по плоской круговой полярной орбите в геомагнитном поле, моделируемом диполем, ось которого антипараллельна оси вращения Земли.

Для описания движения спутника введем в теле спутника полусвязанную систему координат, относительно которой положение спутника будет определяться углом φ. Вращательное движение спутника в такой постановке задачи описываются уравнениями [1]:

$$\begin{cases} A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + Cr\dot{\psi}\sin\theta = M_x \\ A\ddot{\psi}\sin\theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - Cr\dot{\theta} = M_y \\ r = r_0 \end{cases} \tag{1}$$

где A, C - главные моменты инерции (A - экваториальный, C - аксиальный), M_x, M_y - проекции магнитного момента на экваториальные оси введенной полусвязанной системы координат.

Построим программное управление, демпфирующее колебания спутника. В качестве программного движения выберем следующее:

$$\begin{cases} \theta_p = k_1 \\ \psi_p = k_2 t \end{cases} \tag{2}$$

то есть необходимо, чтобы спутник совершал вращения вокруг в оси с постоянной угловой скоростью $\dot{\psi}_p = k_2$, сохраняя постоянную величину угла отклонения оси $\theta_p = k_1$. Для реализации этого заданного движения (2) добавим к правым частям полученных ранее уравнений движения спутника (1) управляющие моменты M_1и M_2 и учитывая полярность спутника $i = \frac{\pi}{2}, \nu = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + Cr\dot{\psi}\sin\theta = \\ = -\frac{I\mu_e}{R^3}(1.5\sin 2u \sin\psi\cos\theta + (1 - 3\sin^2 u)\cos\psi\cos\theta) + M_1 \\ A\ddot{\psi}\sin\theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - Cr\dot{\theta} = \\ = \frac{I\mu_e}{R^3}(-1.5\sin 2u\cos\psi + (1 - 3\sin^2 u)\sin\psi) + M_2 \end{cases} \tag{3}$$

Для нахождения этих моментов, являющихся программным управлением, подставим в уравнения движения значения $\theta_p = k_1$ и $\psi_p = k_2 t$, соответствующие заданному движению. Тогда получим выражения для определения управляющих моментов:

$$\begin{cases} M_1 = -Ak_2^2 \sin k_1 \cos k_1 + Crk_2 \sin k_1 + \\ + \frac{I\mu_e}{R^3}(1.5\sin 2u \sin k_2 t \cos k_1 + (1 - 3sin^2 u)\cos k_2 t \cos k_1) \\ M_2 = -\frac{I\mu_e}{R^3}(-1.5\sin 2u \cos k_2 t + (1 - 3\sin^2 u)\sin k_2 t) \end{cases} \tag{4}$$

Исходное программное движение, являясь одним из решений полученной системы, будет возможным для физической реализации только в случае, если оно будет асимптотически устойчивым по Ляпунову. При неустойчивости этого движения возможность неограниченного роста отклонений величин от их заданных значений фактически означает, что система совершает неконтролируемые движения, то есть на самом деле программные движения не реализуются полученными управляющими моментами M_1 и M_2.

Литература

1. *Хентов А.А.* Пассивная стабилизация искусственных спутников по магнитному полю Земли. // Космические исследования. - 1967. - Том. 5, № 4. - 540-553 с.

2. *Жилисбаева К.С.* О колебаниях намагниченного спутника в окрестности стационарного движения // Сб. Методы экспериментальной физики. - 2010. - 49-52 с.

3. *Zhilisbayeva K.S., Ismailova A.* Passive Magnetic Stabilization of the Rotational Motion of the Satellite in its Inclined Orbit. // Applied Mathematical Sciences. - 2015. - Vol. 9, no. 16. - 791-802 p.

4. *Zhilisbayeva K.S., Ismailova A., Tulekenova D.* On Influence of the Gravitational Moment on the Magnetic Stabilization of the CubeSat in the Geomagnetic Field // Abstracts The European CubeSat Symposium. Brussels, Belgium. - 2013. - 54 p.

5. *Саспаева А.Д* Построение уравнения движения искусственного спутника Земли в гравитационных полях Земли и Луны // Международная конференция "Актуальные проблемы математики и математического моделирования". Алматы, Казахстан. - 2015. - 352-353 с.

УДК 517.946

Л.К. Жапсарбаева
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
(Казахстан, г.Алматы)
e-mail: leylazhapsarbaeva@rambler.ru

Об однозначной разрешимости одной сингулярной эллиптической системы второго порядка в пространстве Лебега

На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta_1\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + (\lambda + a(x,y))u = f(x,y), \\ \beta_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + a(x,y))v = g(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $a(x,y) \geq 1$ - непрерывная функция, а $\alpha, \beta_1, \beta_2, \lambda$ - постоянные такие, что $\lambda \geq 0$,

$$\beta_1\beta_2 > 0, -2 < \alpha < -\frac{\beta_1\beta_2}{2}. \tag{2}$$

В работах К.Н.Оспанова [1,2] исследованы так называемые сильно связанные системы двух и трех уравнений в частных производных первого порядка. Данная работа посвящена исследованию сингулярной эллиптической системы второго порядка с неограниченным младшим членом в пространстве Лебега. Система второго порядка, более общего вида, чем (1) исследована в [3]. Теория таких систем принципиально отличается от теории одного эллиптического уравнения [4]. Система (1) изучается в негильбертовом пространстве $L_p(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), 1 < p < \infty$. В случае выполнения условий (2) система (1) является эллиптической. В работе модификацией метода Титчмарша-Отелбаева [5] установлены существование, единственность и принадлежность к классу С.Л. Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)(1 < p < \infty)$ решения сингулярной эллиптической системы с неограниченным младшим коэффициентом для всех $(f,g) \in L_p(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), 1 < p < \infty$.

Литература

1. *Оспанов К.Н.* Коэрцитивная разрешимость и свойства спектра систем типа Бельтрами и Дирака //Автореферат дисс... д-ра физ.-мат. наук. -Алматы, 2000. -32 с.

2. *Оспанов К.Н.* Об одной системе типа Бельтрами //Тез. докл. весенн. МШ "Современные методы в теории краевых задач". -Воронеж. -1997. -С. 107.

3. *Оспанов К.Н.* Коэрцитивная разрешимость обобщенной системы Коши-Римана в пространстве L_p //Украинский математический журнал. -1996. № 11. -С. 1564-1569.

4. *Бицадзе Л.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. -Москва:Наука, 1981. -448 с.

5. *Отелбаев М.* К методу Титчмарша оценки резольвенты //Докл. АН СССР. -1973. -Т.211, № 4.-С. 787–790.

УДК 517.95

Ж.К. Джобулаева
Институт математики и математического моделирования МОН РК
(Казахстан, Алматы)
e-mail: zhanat-78@mail.ru

Решение задачи для системы параболических уравнений с малыми параметрами в условиях сопряжения

В работе изучается задача, которая возникает при решении нелинейной задачи для системы параболических уравнений с двумя малыми параметрами при старших членах в условиях на свободной границе. Задача описывает процесс фазовых переходов (плавление, кристаллизацию) вещества, в котором содержится примесь с неизвестной концентрацией. Эта задача позволяет получить разрешимость нелинейной задачи со свободной границей для системы параболических уравнений, а также задач, в которых свободная граница задана неявно.

Доказаны существование, единственность и равномерные по малым параметрам оценки решения. Установлен порядок относительно малых параметров производной функции свободной границы в условиях сопряжения, что существенно для обоснования предельного перехода в решении возмущенной задачи при стремлении малых параметров к нулю.

Эти исследования являются продолжением работы [1]. Полученные результаты будут использованы для доказательства существования, единственности и оценок решения линеаризованной и нелинейной задач для системы параболических уравнений с двумя малыми параметрами в граничных условиях.

Литература

1. *Джобулаева Ж.К.* Модельная задача со свободной границей с двумя малыми параметрами для системы параболических уравнений // Математический журнал. 2009. Т. 9. №3 (33), С. 34–44.

UDC 517.968.72

Д.С. Джумабаев, А.Т. Асанова
Институт математики и математического моделирования МОН РК (Казахстан, Алматы)
e-mail: dzhumabaev@list.ru, anarasanova@list.ru

Метод параметризации в исследовании и решении двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра

Рассматривается линейная двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^n, \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $(n \times n)$ - матрицы $A(t)$, $K(t,s)$ непрерывны на $[0,T]$, $[0,T] \times [0,T]$ соответственно, n- вектор-функция $f(t)$ непрерывна на $[0,T]$, B, C - постоянные $(n \times n)$ - матрицы.

Решением задачи (1)–(2) называется непрерывно дифференцируемая функция $x(t)$, удовлетворяющая системе интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра (1) и двухточечному условию (2).

Вопросы разрешимости и построения приближенных методов нахождения решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений рассмотрены многими авторами, обзор и библиографию можно посмотреть в [1-17].

Отметим, что одна из фундаментальных особенностей интегро-дифференциальных уравнений по сравнению с дифференциальными уравнениями проявляется в проблеме разрешимости задачи Коши. Если в случае дифференциальных уравнений, вообще говоря, в любой точке области гладкости коэффициентов задача Коши однозначно разрешима, то для интегро-дифференциальных уравнений это далеко не так [1, 2]. Точки, в которых нарушается единственность решения задачи Коши, следуя Я.В.Быкову [2], называются особенными. Особенные точки отражают специфику интегро-дифференциальных уравнений.

В работах [18-22] двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма была исследована методом параметризации [23], который был разработан для решения линейных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [18] критерии корректной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма были установлены в терминах аппроксимирующих краевых задач для системы нагруженных дифференциальных уравнений, а в работах [20-22] - в терминах некоторой матрицы, составляемой по фундаментальной матрице дифференциальной части системы (1), матрицам граничных условий (2) и резольвенте вспомогательного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, а также в терминах данных задачи без использования фундаментальной матрицы и резольвенты, соответственно. Построены алгоритмы нахождения ее решения.

Как известно, интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра можно рассматривать как интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма, путем введения специального ядра интегрального слагаемого. Тем не менее, вопросы существования и единственности решения краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра вызывает большой интерес, что требует отдельного рассмотрения.

В настоящем сообщении исследуются вопросы разрешимости краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра (1)–(2). Предлагаются алгоритмы нахождения решения и устанавливаются условия однозначной разрешимости в терминах исходных данных.

Литература

1. *Bratu M.* Sur les equations mixtes lineaires // Comptes Rendus. - Paris. 1909. - 148 p.

2. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро- дифференциальных уравнений. - Фрунзе: Киргиз.гос. ун-т. 1957. - 327 с.

3. *Некрасов А.И.* Об одном классе линейных интегро–дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ. - 1934. - вып. 190. - С. 1-25.

4. *Васильев В.В.* К вопросу об интегрировании систем линейных интегро-дифференциальных уравнений //Уч.зап. Иркутского гос. пед. ин-та. -1946. в. 9.

5. *Быков Я.В.* Об одном классе линейных интегро- дифференциальных уравнений // ДАН СССР. - 1952. - Т. 86. № 2. - С. 85-99.

6. *Быков Я.В.* К теории линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Труды физ.-мат. фак. Кирг.ун-та. в.2.- Фрунзе. - 1953. - С. 67-83.

7. *Александрийский Б.И.* К теории некоторых линейных интегро-дифференциальных систем //ДАН СССР. - 1953. - Т. 91. № 2. - С. 184-194.

8. *Васильев В.В.* Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // ДАН СССР. - 1955. - Т. 100. № 5. - С. 78-85.

9. *Виграненко Т.И.* Об одной граничной задаче для линейных интегро–дифференциальных уравнений // Зап. Ленинградского горн. ин-та. - 1956. - Т. 33. - вып. 3. - С. 177-187.

10. *Ландо Ю.К.* Краевая задача для линейных интегро-дифференци- альных уравнений типа Вольтерра // Учен зап. Минского пед. ин-та. - 1956. - в. 6. - С. 257-269.

11. *Ландо Ю.К.* Функция Грина краевой задачи для интегро-диффе- ренциальных уравнений типа Вольтерра // Учен зап. Минского пед. ин-та. - 1958. - в. 9. - С. 65-70.

12. *Кривошеин Л.Е.* Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро–дифференциальных уравнений. Фрунзе: АН Кирг. ССР. - 1962. - 184 с.

13. *Иманалиев М.И.* Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: АН Кирг. ССР. - 1972. - 356 с.

14. *Иманалиев М.И.* Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: АН Кирг. ССР. - 1974. - 352 с.

15. *Касымов К.А.* Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. - Алматы: Санат. - 1997. - 195 с.

16. *Дауылбаев М.К.* Сингулярно-возмущенные интегро-дифференциальные уравнения. - Алматы: Казак университетi. - 1999. - 170 с.

17. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающихся функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. - Бишкек: Илим. - 2002. -216с.

18. *Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А.* Признаки корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. - 2010. - Т. 46. - № 4. - С. 550-564.

19. *Джумабаев Д.С.* Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения // Ж.вычисл. матем. и матем. физ. - 2010. - Т. 50. - № 7. - С. 1209-1221.

20. *Джумабаев Д.С.* Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Ж.вычисл. матем. и матем. физ. - 2013. - Т. 53. - № 6. - С. 75-98.

21. *Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А.* О признаках однозначой разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений //Дифференциальные уравнения. - 2013. - Т. 49. № 9. - С. 1125-1140.

22. *Джумабаев Д.С* Необходимые и достаточные условия разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма //Украинский математический журнал. - 2014. - Т. 65. - № 8. -С. 1074-1091.

23. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж.вычисл. матем. и матем. физ. - 1989. - Т. 29. - № 1. - С. 50-66.

УДК 517.925:62.50

С.С. Жуматов
Институт математики и математического моделирования
(Казахстан, Алматы), e-mail: sailau.math@mail.ru

Неустойчивость программного многообразия неявных дифференциальных систем

Рассматривается система дифференциальных уравнений неразрешенные относительно старшей производной. В общем случае такие системы имеют вид

$$f(t, x, \dot{x}) = 0, \quad f \in R^s, \quad x \in R^n \ (s \le n), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{1}$$

Неявный характер этой системы порождает ряд трудностей, связанных с существованием и единственности, устойчивостью и ограниченностью решений. В работе [1] такие системы названы неявными дифференциальными системами, введены понятия устойчивости и ограниченности решений относительно заданных нелинейных функций.

Важно отметить, что частным случаем системы (1) является система, которая имеет следующий вид:

$$H(t,x(t))\dot{x} = f(t,x), \quad H \in R^{s\times n}. \tag{2}$$

Модели вида (3) известны под названиями сингулярных систем, обобщенных систем пространственного состояния или дифференциально-алгебраических систем.

В работе [2, 3] получены достаточные условия устойчивости и притягиваемости, асимптотической устойчивости программного многообразия неявных дифференциальных систем.

Предположим, что векторная функция $f(t,x,\dot{x})$ обеспечивает существование решений системы (1). Под решением системы (1) будем понимать непрерывную функцию времени t, существующую на временном интервале $T \subseteq I$, которая всюду $T\backslash S$ удовлетворяет уравнению (1), где S- не более чем счётное множество.

Программное многообразие $\Omega(t)$ задается следующим образом

$$\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0, \quad \omega \in R^s \quad (s \leq n). \tag{3}$$

Обозначим через Φ множество, образованное при $t \in [t_0, \beta)$ значениями $x(t,t_0,x_0)$ всех решений $x(t)$, существующих на $[t_0,\beta)$, $t_0 \in \bar{T}$,, где $\bar{T}$ –связное множество всевозможных начальных моментов, а через Ψ - многозначную функцию, которая обладает свойством $\Phi(t_0,t) \subset \Psi(t_0,t)$, $t_0 \leq t$. Пусть $x_u(t)$ - известное решение системы (1), $\omega(t,\ x_u(t)) = 0$.

Введём некоторые векторные функции q, p, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(t,\varepsilon) = \{x \in R^n : |q(t,\omega) - q(t,0)| \leq \varepsilon\}, \quad q(t,\omega) \in R^q, \\ \bar{P}(t,\varepsilon) = \{x \in R^n : |p(t,\omega) - p(t,0)| \leq \varepsilon\}, \quad p(t,\omega) \in R^p. \end{aligned} \tag{4}$$

Ставится задача. Получить условия неустойчивости программного многообразия неявной системы (1) относительно функций q,p.

Для решения поставленной задачи введем следующие множества и определения:

$$B_\varepsilon = Q(t,\varepsilon) \bigcap \Phi(t_0,t);$$

$$B_\delta(\varepsilon) = B_\delta \bigcap B_\varepsilon;$$

$$\bar{A}_\varepsilon = \bar{L}(t,\varepsilon) \bigcap \bar{\Psi}(t_0,t.)$$

Множество $S(t)$ ограничено на I, если существует такое ограниченное множество S_b, что $\forall\ t \in I$ имеем $S(t) \subset S_b$.

Определение 1. Программное многообразие $\Omega(t)$ неявной дифференциальной системы (1) называется неустойчивым относительно заданных функций q,p, если для заданных $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in T,\ T \subseteq I$ существует $\delta(t_0,\varepsilon) \geq 0$ такое, что $\forall\ x_0 \in B_\delta(\varepsilon)$ и $t_0 \leq t$ имеет место соотношение $\omega(t,t_0,x_0) \notin \bar{A}_\varepsilon$. Здесь $\bar{A}_\varepsilon(t_0) = \bar{P}(t,\varepsilon) \bigcap \bar{\Psi}(t_0,t)$.

Определение 2. Многозначная функция $S(t) \in S_p(R^n), t \in I$ называется незатухающей, если для непрерывной функции $k(t) \in R$, удовлетворяющей соотношениям $k(t_0) \in intS(t_0)$ и $k(t_2) \in S(t_2)$ при произвольных $t_0, t_2 \in I, t_0 < t_2$ существует $t_1 \in (t_0, t_2)$ такое, что $k(t) \in S(t), \forall t \in [t_0, t_1[$ и $k(t_1) \in \partial S(t_1)$.

Введём также следующие обозначения:

$$a(t, \omega) = p(t, \omega) - p(t, 0);$$

$$D(t_0, t, \Phi) = P(t, \gamma) \bigcap \Phi(t_0, t), \gamma > 0;$$

$$D^+ f(t_0) = \lim_{t \to t_0^+} \sup \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

и $\forall v > 0$, удовлетворяющей $\bar{B}_v \subset$ B, где B $\subset R^n$- открытая область, положим, что

$$V_v = \{x \in R^n : V(t, q(t, \omega)) \leq \theta(v)\}.$$

Здесь D^+ - правая верхняя производная Дини.

Теорема 1. Пусть заданы функции q, p, удовлетворяющие условию (4), и существуют непрерывная функция V, которая является локально липшицевой по x, и решение $x_u(t) \in D(t_0, t, \Phi)$ такие, что:

1) $\Phi(t_0, \delta) \neq \emptyset, \quad \forall \delta > 0, \quad \forall t_0 \in T;$
2) $V(t, q(t, 0)) \equiv 0, \quad \theta(\|a(t, \omega)\|) \leq V(t, q(t, \omega));$
3) $P(\cdot, \varepsilon)$ *было не затухающим* $\forall \varepsilon \in (0, \gamma);$
4) $D^+ V(t, q(t, \omega)) \geq 0;$

Тогда программное многообразие неявной дифференциальной системы (1) неустойчиво относительно функций q, p.

В частном случае системы (3), когда она является системой автоматического управления с разрывной нелинейностью, справедлива следующая теорема[4-7]:

Теорема 2. Пусть функция Еругина является линейной относительно вектор-функции ω, существует $\delta > 0$ и выполняется частотное неравенство

$$\pi(\varpi) \geq \delta \parallel (A + i\varpi E)^{-1} \parallel^2, \tag{5}$$

а матрица $-A - HB\mu P^T$ имеет $k \geq 1$ собственных значений в правой полуплоскости и дополненный график функции Φ лежит в секторе $S[\mu_1, \mu_2]$. Тогда программное многообразие $\Omega(t)$ неустойчиво в целом относительно вектор-функции ω.

Литература

1. *Bajik V. N.* Non-linear function and stability of motions implicit systems // Int. J. Cont. - 1990. - V. 52, No 5. - P. 1167-1187.

2. *Жуматов С.С.* Устойчивость и притягиваемость программного многообразия неявных дифференциальных систем //Труды Третьей Международной конференции" Математическое моделирование и дифференциальные уравнения " 17-22 сентября 2012 , Брест. 2012.- С.143-151.

3. *Жуматов С.С.* Асимптотическая устойчивость неявных дифференциальных систем в окрестности программного многообразия // Украинский математический журнал. Киев. - 2014. - № 4. - С. 558-565.

4. *Жуматов С.С.* Неустойчивость нелинейных систем управления в окрестности программного многообразия в критическом случае // Материалы Международной научно-проактической конференции "Теория функций, функциональный анализ и их приложения" посв. 60-летию члена- корр. АН КазССР Т.И.Аманова (Семей, 3-5 октября 2013). Семей. 2013. - Т.1.- С.259-263.

5. *Жуматов С.С., Крементуло В.В., Майгарин Б.Ж.* Второй метод Ляпунова в задачах устойчмвости и управления движением. - Алматы: Гылым, 1999. - 228 с.

6. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. - 1952. - Т. 10, в. 6. - С. 659-670.

7. *Якубович В.А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью// Сибирский мат. журнал, 1973. - Т. XIV, № 5. - С. 1100-1129.

УДК 517.927

Ж.Х. Жунусова, К.А. Досмагулова
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
(Казахстан, Алматы)
e-mail: zhzhkh@mail.ru

Построение поверхности соответствующей солитонному решению

В данной работе рассматриваем простейшие аспекты солитонной иммерсии в смысле Фокаса-Гельфанда [1]. В (1+1)-мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0,$$

где $[U, V] = UV - VU$, матрица U задана, а матрица V выражается в терминах элементов матрицы U. Также нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных являются условием совместности системы линейных уравнений

$$\phi_x = U\phi, \phi_t = V\phi.$$

В этом случае существует поверхность с иммерсионной функцией $P(x, t)$ определяемая следующими формулами $\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi$[1]. Поверхность определенная посредством $P(x, t)$ идентифицируется с поверхностью в трехмерном пространстве определенной координатами
$x_j = P_j(x, t), \quad j = 1, 2, 3.$ Репер на поверхности дается тройкой

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi, \quad N = \phi^{-1}J\phi,$$

где $J=\frac{[X,Y]}{|[X,Y]|}$, $\quad |X|=\sqrt{<X,X>}$. Здесь по определению

$$<X,Y>=-\frac{1}{2}tr(XY),$$

где X,Y являются некоторыми матрицами. Первая и вторая фундаментальные формы в смысле Фокаса-Гельфанда даются как

$$I=<X,X>dx^2+2<X,Y>dxdt+<Y,Y>dt^2, \tag{1}$$

$$II=<\frac{\partial X}{\partial x}+[X,U],J>dx^2+2<\frac{\partial X}{\partial t}+[X,V],J>dxdt+<\frac{\partial Y}{\partial t}+[Y,V],J>dt^2. \tag{2}$$

Функция иммерсии P может быть определена как

$$P=\gamma_0\phi^{-1}\phi_\lambda+\phi^{-1}M_1\phi=\sum_{j=1}^{3}P_jf_j,$$

где M_1 является матричной функцией, определенной по λ,x,t. Здесь $f_j=-\frac{i}{2}\sigma_j$ является базисом соответствующей алгебры, σ_j являются матрицами Паули и $[f_i,f_j]=f_k$. В этом случае, X,Y можно записать как

$$X=\gamma_0U_\lambda+M_{1x}+[M_1,U], Y=\gamma_0V_\lambda+M_{1t}+[M_1,V].$$

Пусть матрицы X,Y,J имеют вид

$$X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

В этом случае элементы матрицы J выражаются через элементы матрицы X и Y в соответствии со следующими формулами

$$c_{11}=\frac{a_{12}b_{21}-b_{12}a_{21}}{|[X,Y]|},\quad c_{21}=\frac{a_{21}(b_{11}-b_{22})+b_{21}(a_{22}-a_{11})}{|[X,Y]|},$$

$$c_{12}=\frac{b_{12}(a_{11}-a_{22})+a_{12}(b_{22}-b_{11})}{|[X,Y]|},\quad c_{22}=\frac{a_{21}b_{12}-b_{21}a_{12}}{|[X,Y]|}. \tag{4}$$

Тогда первая фундаментальная форма (1) двухмерной поверхности будет $I=Edx^2+2Fdxdt+Gdt^2$, где

$$E=-\frac{1}{2}(a_{11}^2+2a_{12}a_{21}+a_{22}^2),\quad F=-\frac{1}{2}(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}), \tag{5}$$

$$G=-\frac{1}{2}(b_{11}^2+2b_{12}b_{21}+b_{22}^2). \tag{6}$$

В качестве примера солитонного уравнения приводящего к такой иммерсии рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$i\psi_t+\psi_{xx}+2\beta|\psi|^2\psi=0,$$

где $\beta=+1$, ψ является комплексной функцией. В этом случае, матрицы U,V имеют вид [2]-[4]

$$U=\frac{\lambda\sigma_3}{2i}+U_0,\ U_0=i\begin{pmatrix} 0 & \bar{q}\\ q & 0\end{pmatrix},$$

$$V=\frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3+i|q|^2\sigma_3-i\lambda\begin{pmatrix}0&\bar{q}\\q&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\bar{q}_x\\-q_x&0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Рассмотрим частный случай иммерсии при $\gamma_0=1, \quad M_1=0$. В данном случае имеем

$$X=U_\lambda=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ Y=V_\lambda=-i\begin{pmatrix}-\lambda&\bar{q}\\q&\lambda\end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix}0&-\frac{\bar{q}}{\sqrt{q\bar{q}}}\\\frac{q}{\sqrt{q\bar{q}}}&0\end{pmatrix}, \tag{8}$$

и $P=\phi^{-1}\phi_\lambda$. Чтобы вычислить явные выражения для функций иммерсии P рассмотрим односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности, которое имеет вид

$$\psi(x,t)=\rho\frac{1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}, \tag{9}$$

где $v=-\omega cos\frac{\theta}{2}$, $x_0=\frac{1}{\nu_1}lni\gamma_1;\ \ \omega,\theta,\gamma_1,\nu_1$ являются некоторыми параметрами модели.

Теорема. Односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности соответствует поверхность в смысле Фокаса-Гельфанда со следующими коэффициентами первой фундаментальной формы

$$E=\frac{\nu_1^2exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}[\frac{4\rho^2x^2}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^4}(2-e^{i\theta}-e^{-i\theta})+$$

$$+\frac{4(e^{i\theta}-1)^2[1+\nu_1x(1-e^{i\theta}exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\})]^2}{(1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}],$$

$$F=\frac{2\rho^2\nu_1^2vxexp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2)}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^4(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^3}+$$

$$+\frac{4\nu_1^3vxexp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{i\theta}-1)^2(e^{i\theta}-exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}-1)}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^2(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4(1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}\times$$

$$\times(1+\nu_1x-\nu_1xe^{i\theta}exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}),$$

$$G=\frac{v^2\nu_1^2exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^4(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}[\rho^2(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^2(1+$$

$$+2exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^2+\rho^2(e^{i\theta}-e^{-i\theta}-2)^2+$$

$$+\frac{4\nu_1^2x^2(e^{i\theta}-1)^2(e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}-1)^2}{(1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}],$$

где $\lambda_1=const$.

Таким образом, в данной работе найдена первая фундаментальная форма с соответствующими коэффициентами для интегрируемой поверхности соответствующей односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности. Определена Гауссовая и средняя кривизна данной поверхности.

Литература

1. *Ceyhan O., Fokas A.S., Gurses M.* Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations //J. Math. Phys., -2000. v.41, No 4, -pp. 2551–2270.

2. *Zhunussova Zh.* Nonlinear PDE as Immersions" //Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics, -2015. ISBN 978-3-319-12576-3, -pp. 289–297.

3. *Zhunussova Zh.Kh.* Reconstruction of a soliton solution for a class of nonlinear equation //Abstracts of the sixth International Conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation," Antalya, Turkey, -2012. May 19–26, -p. 283.

4. *Zhunussova Zh.Kh.* About exact solution of the nonlinear equation. //Известия НАН РК, серия физико-математическая, -2010. No 3, -стр. 11–13.

УДК 517.75

Ж.М. Кадирбаева [1], К.Р. Момынжанова [2]
[1] Институт математики и математического моделирования МОН РК
[2] Казахский государственный женский педагогический университет
(Казахстан, Алматы)
e-mail: apelman86pm@mail.ru

О разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка

На $[0,T]$ рассматривается линейная двухточечная краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2z}{dt^2} = A_0(t)\frac{dz}{dt} + A_1(t)z + \sum_{i=1}^{m+1} M_i(t)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\theta_{i-1}} + \sum_{i=1}^{m+1} L_i(t)z(\theta_{i-1}) + f(t), \tag{1}$$

$$B_1 z(0) + C_1 z(T) = d_1, \tag{2}$$

$$B_2 \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} + C_2 \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=T} = d_2, \tag{3}$$

где функции $A_0(t)$, $A_1(t)$, $M_j(t)$, $Lj(t)$, $j = \overline{1, m+1}$, и n-вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, B_i, Ci, d_i, $i = 1,2$ – некоторые заданные числа, $0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{m-1} < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

Непрерывная функция $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, имеющая на $[0,T]$ непрерывные производные до второго порядка по t, называется решением краевой задачи (1) – (3), если она удовлетворяет нагруженному дифференциальному уравнению второго порядка (1) и краевым условиям (2), (3).

Дифференциальные уравнения второго порядка являются основой большинства математических моделей, описывающих физические, химические, экономические и социально-биологические явления. Поэтому весьма актуальной и важной задачей является развитие аналитического аппарата теории уравнений второго порядка [1, 2]. Вместе с тем во многих разделах прикладной математики встречаются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с нагружениями [3]. В последние годы продолжается интенсивное исследование нагруженных уравнений, связанное, в частности, с различными приложениями задач, ассоциированных с этими уравнениями. К последним относятся, например, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги, моделирования процессов переноса частиц, некоторые задачи оптимального управления [4-6].

Наличие нагруженных слагаемых в уравнении (1) влияет на разрешимость задачи (1) – (3) и не позволяет напрямую использовать известные методы теории краевых задач.

Двухточечные краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений второго порядка приобрели особую актуальность в связи с изучением устойчивости вибраций крыльев самолета, нагруженного массами, при расчете собственных колебаний антенн, нагруженных сосредоточенными емкостями и самоиндукциями.

Поэтому в настоящем сообщении исследуются вопросы существования единственности и непрерывной зависимости от исходных данных решения двухточечной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка (1) – (3).

В этих целях используется метод параметризации [7]. Построены алгоритмы нахождения решения двухточечной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка (1) – (3). Получены достаточные условия существования единственного решения нагруженного дифференциального уравнения второго порядка (1) в терминах коэффициентов $A_0(t)$, $A_1(t)$, $M_j(t)$, $Lj(t)$, $j = \overline{1, m+1}$, B_i, Ci, d_i, $i = 1, 2$ и найдена ее оценка через правую часть нагруженного дифференциального уравнения (1).

Литература

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. -М.: Наука, 1981. - 918 с.

2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: Мир, 1970. - 720 с.

3. *Нахушев А.М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. - 1976. - Т. 12, №1. - С. 103-108.

4. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги грунтовых вод // Дифференц. уравнения. - 1982. - Т. 18, №1. - С. 72-81.

5. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. -М: Высшая школа, 1995. 205 с.

6. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. -Алматы: Гылым, 2010. 334 с.

7. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50-66.

УДК 517.95

Т.Ш. Кальменов
Институт математики и математического моделирования
(Казахстан, Алматы)
e-mail: kalmenov.t@mail.ru

Критерий граничности линейных интегральных операторов

Нахождение общих корректных краевых задач для дифференциальных уравнений является актуальной задачей. Эту проблему для общих симметрических операторов начал решать один из выдающихся математиков Джон фон Нейман. В 1930-е годы он построил теорию самосопряженных расширений симметрических операторов.

В 1950-е годы, пользуясь идеями Джон фон Неймана, один из сильнейших математиков СССР М.И. Вишик, для общих эллиптических уравнений построил описание всех корректных краевых задач методом корректных расширений минимальных эллиптических операторов [1].

В конце 1970-х годов независимо от М.И. Вишика, описание всех корректных расширений общих минимальных операторов впервые в Казахстане проводил М. Отелбаев. Т.Ш. Кальменов сообщил ему, что аналогичная работа имеется у М.И. Вишика, а у А.В. Бицадзе [2]-[3] имеются также новые постановки корректных задач для уравнения эллиптического типа, которые не являются краевыми задачами.

Тогда М. Отелбаев [4] ввел отдельно понятия "корректное расширение минимального оператора" и "корректное сужение максимального оператора". Созданная таким образом теория корректных сужений и расширений М. Отелбаева существенно отличается от результатов М.И. Вишика. При этом корректные сужения и расширения операторов М. Отелбаевым описаны и в гильбертовых и в банаховых пространствах, а также для некоторых нелинейных операторов.

Рассмотрим Ньютонов (объемный) потенциал

$$u(x) = \varepsilon_n * f = \int_\Omega \varepsilon_n(x-y) f(y) dy, \tag{4.1}$$

где $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_n(x-y)$ - фундаментальное решение:

$$\varepsilon_2(x-y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x-y|; \;\; \varepsilon_n(x-y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n}|x-y|^{2-n}, n \geq 3.$$

Известно, что

$$-\triangle u = f, \;\; n \geq 2. \tag{1}$$

Согласно теории М. Отелбаева, самосопряженный дифференциальный оператор всегда имеет граничное условие. В первые нами в [5] найдено граничное условие Ньютонового потенциала. Оно имеет вид

$$\frac{1}{2}u(x) = -\int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y, x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

В дальнейшем эта идея была распространена для широкого класса потенциалов. Например, для объёмного теплового потенциала

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^t d\tau \int_\Omega \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\pi(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} f(\xi,\tau) d\xi$$

в области $D = \Omega \times [0, T]$ нами найдено граничное условие

$$\frac{1}{2}u(x,t) = -\int_0^t \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y, t-\tau) \frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y} d\tau dS_y +$$

$$+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y, t-\tau)}{\partial n_y} u(y,\tau) d\tau dS_y, x \in \partial\Omega.$$

Позже [6] этот результат был распространен для случая нецилиндрической области D.

Эти и другие результаты оказали неоценимую помощь в исследовании спектральных свойств объемных потенциалов. Для потенциала Ньютона вперые удалось вычислить собственные значения и собственные функции в единичном круге и трехмерном шаре. Для объемного теплового потенциала впервые удалось вычислить точную асимптотику s-чисел. Существенное значение полученные краевые условия (2) оказали на развитие спектральной геометрии: показано, что минимальное первое собственное значение объемного потенциала (1) (среди всех областей одинакового объема) имеет потенциал, рассматриваемый в шаре.

Полученные результаты и их применение приводят к постановке задачи общего вида - **задачи о нахождении краевых условий абстрактного интегрального оператора**.

Пусть задан интегральный оператор

$$u(x) = L_k^{-1} f = \int_\Omega K(x,\xi) f(\xi) d\xi, \tag{3}$$

где $K(x,\xi) \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Ставится задачей определение условий, при которых интегральный оператор (3) дает решение некой регулярной краевой задачи для дифференциального уравнения?

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(x,D)u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha u = f(x). \tag{4}$$

а также формально сопряжённое к (4) дифференциальное выражение

$$L^+(x,D)v = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha v) = g. \tag{5}$$

Ответ на поставленный вопрос в общем виде дает следующая теорема.

`Теорема 1.` *Пусть ядро $K(x,\xi)$ интегрального оператора L_k^{-1} удовлетворяет условию*

$$\sup_{\xi \in \Omega} \int_\Omega |K(x,\xi)|^2 dx + \sup_{x \in \Omega} \int_\Omega |K(x,\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Тогда интегральный оператор $u = L_k^{-1} f$ определяет регулярное расширение L_k тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$L(x,D)K(x,\xi) = \delta(x-\xi), \;\; L^+(\xi,D)K(x,\xi) = \delta(x-\xi).$$

при этом

$$D(L_k) = \{u : u = L_k^{-1} f, \; f \in L_2(\Omega)\}, \;\; L_k u = (L_0^+)^* u.$$

Основные результаты настоящего доклада получены совместно с М. Отелбаевым.

Литература

1. *Вишик М.И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Матем. сб. - 1954. - Т. 35(77), № 3. - С. 1307-1311.

2. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1982. - 336 с.

3. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981. - 448 с.

4. *Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н.* К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. - 1983. - № 6. - С. 1307-1311.

5. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады академии наук России. - 2009. - Т. 428, №4. - С. 16-19.

6. *Kalmenov T.Sh., Tokmagambetov N.E.* On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain // Siberian Mathematical Journal. - 2013. - Vol. 54, № 6. - P. 1024-1029.

УДК 517.946

К.К. Кенжебаев, А.Б. Бержанов

Актюбинский региональный государственный университет имени К.Жубанова, Казахстан, Актобе

e-mail: amantay48@mail.ru

Многопериодическое по части переменных решение одной счетной системы гиперболического типа

В работе изучается вопрос о существовании и единственности многопериодического по части переменных решения счетной системы гиперболического типа по Фридрихсу [3] вида

$$
\begin{aligned}
D_1x \equiv (\frac{\partial}{\partial t} + a_1(t,\varphi,\psi,x,y,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi} + b_1(t,\varphi,\psi,x,y,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \psi})x = \\
= P_1(t,\varphi,\psi)x + \mu Q_1(t,\varphi,\psi,x,y,\mu), \qquad (1)\\
D_2y \equiv (\frac{\partial}{\partial t} + a_2(t,\varphi,\psi,x,y,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi} + b_2(t,\varphi,\psi,x,y,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \psi})y = \\
= P_2(t,\varphi,\psi)y + \mu Q_2(t,\varphi,\psi,x,y,\mu),
\end{aligned}
$$

где x, y, Q_1, Q_2 – счетномерные вектор-столбцы; φ, a_i, ψ, b_i – счетномерные векторы; $P_i, (t,\varphi,\psi)$ – бесконечные матрицы; $a_i\frac{\partial}{\partial\varphi}, b_i\frac{\partial}{\partial\psi}$ – формальные скалярные произведения соответственно счетномерных векторов $\frac{\partial}{\partial\varphi} = (\frac{\partial}{\partial\varphi_1}, \frac{\partial}{\partial\varphi_2}...), \frac{\partial}{\partial\psi} = (\frac{\partial}{\partial\psi_1}, \frac{\partial}{\partial\psi_2}...); \varepsilon > 0, \mu > 0$ – малые параметры. Пусть $t\in R$; $\varphi, \psi\in R^\infty = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, ...) : |\xi_k| < \infty, k = 1, 2, ...\}$ при этом $\|\xi\| = \sup\{|\xi_k|\}; x, y\in R_\Delta$, где R_Δ – множество последовательностей ограниченных с числом $\Delta, \varepsilon\in E_{\varepsilon_0} = [0, \varepsilon_0], \mu\in M_{\mu_0}, \Delta, \varepsilon_0, \mu_0$ – некоторые положительные постоянные.

Вектор-функцию $f(t,\varphi,\psi)\in R_\Delta$ определенную и непрерывную в области $\Omega = R\times R^\infty\times R^\infty$, назовем многопериодической по части переменны, если она (θ,ω) – периодична по t,φ равномерно относительно $\psi\in R^\infty$, т.е. имеет место равенство

$$f(t+\theta,\varphi+\widehat{q\omega},\psi)-f(t,\varphi,\psi)=0$$

для любых $(t,\varphi,\psi)\in\Omega$, где $\omega = (\omega_1,\omega_2,...),\widehat{q\omega} = (q_1\omega_1,q_2\omega_2,...),q = (q_1,q_2,...)$ – целочисленной вектор.

Пусть счетномерная вектор-функция $f(t,\varphi,\omega)$ в области Ω удовлетворяет следующим условиям из [1]:

а) непрерывна по t,φ,ω;

б) ограничена по норме, т.е.$\|f(t,\varphi,\omega)\| = \sup_k\{|f_k(t,\varphi,\omega)|\}\leq\alpha$, где $\alpha>0-const$;

в)удовлетворяет усиленному условию Липшица по φ и ψ : $\|f(t,\varphi_1,...,\varphi_m,\varphi'_{m+1},...;\psi_1,...,\psi_m,\psi'_{m+1},...) - f(t,\varphi_1,...,\varphi_m,\varphi''_{m+1},...;\psi_1,...,\psi_m,\psi''_{m+1},...)\|\leq l_m(\Delta_m\varphi+\Delta_m\psi), m=0,1,2,...$, где $\Delta_m\varphi = \sup[|\varphi'_{m+1}-\varphi''_{m+1}|,|\varphi'_{m+2}-\varphi''_{m+2}|,...]; \Delta_m\psi = \sup[|\psi'_{m+1}-\psi''_{m+1}|,|\psi'_{m+2}-\psi''_{m+2}|,...]; \{l_m\}$ – положительная числовая последовательность, монотонно сходящаяся к нулю, т.е. $l_m\searrow 0$ при $m\to\infty$.

г) имеет ограниченные и непрерывные частные производные первого порядка по координатам векторов φ и ψ;

д) имеют место неравенства

$$\|\frac{\partial}{\partial\varphi}f(t,\varphi',\psi')-\frac{\partial}{\partial\varphi}f(t,\varphi'',\psi'')\| = \Sigma_{k=1}^{\infty}\|\frac{\partial}{\partial\varphi_k}f(t,\varphi',\psi')-\frac{\partial}{\partial\varphi_k}f(t,\varphi'',\psi'')\|\leq$$

$$\leq C^\circ(\|\varphi'-\varphi''\|+\psi'-\psi''\|),$$

$$\|\frac{\partial}{\partial\psi}f(t,\varphi',\psi')-\frac{\partial}{\partial\psi}f(t,\varphi'',\psi'')\| = \Sigma_{k=1}^{\infty}\|\frac{\partial}{\partial\psi_k}f(t,\varphi',\psi')-\frac{\partial}{\partial\psi_k}f(t,\varphi'',\psi'')\|\leq$$

$$\leq C^\circ(\|\varphi'-\varphi''\|+\psi'-\psi''\|),$$

где $C^\circ - const$.

Условия вида д) встречаются в работе [2]. Совокупность условий а) - д)назовем условиями (π), а вектор-функции. Удовлетворяющие этим условиям, π – функциями и кратко обозначим так $f(t,\varphi,\psi)\in\pi(\alpha,l_m,C^\circ)$.

Предположим, что в системе (1)

$$a_i(t,\varphi,\psi,x,y,\varepsilon) = a_i^0(t)+\varepsilon a_i^{(1)}(t,\varphi,\psi,x,y,\varepsilon),$$

$$b_i(t,\varphi,\psi,x,y,\varepsilon) = b_i^0(t)+\varepsilon b_i^{(1)}(t,\varphi,\psi,x,y,\varepsilon),$$

и будем считать что выполнены следующие условия (N_∞) :

1) вектор-функции $a_i^0(t), b_i^0(t)$ непрерывны, ограничены и θ – периодичны в R;

2) вектор-функции $a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, Q_i$ непрерывны, и ограничены соответственно в областях $\Omega\times R_\Delta\times R_\Delta\times E_{\varepsilon_0}, \Omega\times R_\Delta\times R_\Delta\times M_{\mu_0}$, многопериодичны по t,φ с вектор-периодом (θ,ω) равномерно относительно ψ,x,y,ε,μ;

3) матрицы $P_i(t,\varphi,\psi,)$ непрерывны и ограничены по норме в области $\Omega,(\theta,\omega)$ – периодична по t,φ равномерно относительно $\psi\in R^{\infty}$, удовлетворяют усиленному условию Липшица по φ,ψ :

$$\|P_i(t,W_m\varphi+V_m\varphi^{'},W_m\psi+V_m\psi^{'}-P_i(t,W_m\varphi+V_m\varphi^{''},W_m\psi+V_m\psi^{''}\|\leq$$

$$\leq P_m^{(i)}(\Delta_m\varphi+\Delta_m\psi),m=0,1,2,...,i=1,2,$$

где $P_m^{(i)}>0,P_m^{(i)}\searrow 0$ при $m\to\infty$, имеют ограниченные и непрерывные частные производные по координатам векторов φ,ψ матричные ряды

$$\Sigma_{k-1}^{\infty}\frac{\partial P_i}{\partial\varphi_k},\Sigma_{k-1}^{\infty}\frac{\partial P_i}{\partial\psi_k}$$

сходятся обсалютно и равномерно в Ω, кроме того они удовлетворяют неравенствам

$$\|\frac{\partial}{\partial\varphi}P_i(t,\varphi^{'},\psi^{'})-\|\frac{\partial}{\partial\varphi}P_i(t,\varphi^{''},\psi^{''})\leq$$

$$\leq P_{2i}(\|\varphi^{'}-\varphi^{''}\|+\|\psi^{'}-\psi^{''}\|),$$

$$\|\frac{\partial}{\partial\psi}P_i(t,\varphi^{'},\psi^{'})-\|\frac{\partial}{\partial\psi}P_i(t,\varphi^{''},\psi^{''})\leq$$

$$\leq P_{3i}(\|\varphi^{'}-\varphi\|+\|\psi^{'}-\psi\|),$$

где $P_{2i},P_{3i}>0-const$ При $\varepsilon=0$ из системы (1) получаем систему

$$\begin{aligned}D_1^0x^0&=P_1(t,\varphi,\psi,)x^0+\mu Q_1(t,\varphi,\psi,x^0,y^0,\varepsilon)\\D_1^0y^0&=P_2(t,\varphi,\psi,)y^0+\mu Q_2(t,\varphi,\psi,x^0,y^0,\varepsilon),\end{aligned}\tag{2}$$

которую назовем условно-вырожденной.

Обозначим через $B_{\infty}(\Delta,\delta_m,\overline{c})$ класс счетномерных многопериодических по части переменных π – функции, $f(t,\varphi,\psi,)$ удовлетворяющих $\pi_{\infty}(\Delta,\delta_m,\overline{c})$ – условиям, норма которых определяется соотношением

$$\|f\|_B=\sup_{\Omega}\|f\|+\sup_{\Omega}\|\frac{\partial f}{\partial\varphi}\|+\sup_{\Omega}\|\frac{\partial f}{\partial\psi}\|.$$

Пусть $G_f=diag\{X_f,V_f\}$ – матрица типа Грина для линеаризованной системы

$$\begin{aligned}D_1^fx&=P_1(t,\varphi,\psi)x,\\D_1^fy&=P_2(t,\varphi,\psi)y,\end{aligned}\tag{3}$$

где $f\in B_{\infty}(\Delta,\delta_m,\overline{c})$, удовлетворяющая условию некритичности [1]:

$$\begin{aligned}&\|X_f(t_0,t,\varphi,\psi,)\|\leq B\exp\{-\gamma|t-t_0|\},\\&\|Y_f(t_0,t,\varphi,\psi,)\|\leq B\exp\{-\gamma|t-t_0|\},\\&X_f(t-0,t,\varphi,\psi,)-X_f(t+0,t,\varphi,\psi,)=E,\\&Y_f(t-0,t,\varphi,\psi,)-Y_f(t+0,t,\varphi,\psi,)=E,\end{aligned}\tag{4}$$

с постоянными $B \geq 1, \gamma > 0$. Аналогично [1,4] доказана теорема.

Теорема. Если система (3) некритическая относительно класса $B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$, то при условиях N_∞ существует числа $\overline{\varepsilon}, \overline{\mu}$ такие, что при всех значениях $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}, 0 < \mu < \overline{\mu}$ система (1) допускает единственное многопериодическое по части переменных решение из класса $B_\infty(\Delta, \delta_m, \overline{c})$, обращающаяся при $\varepsilon = 0$ в многопериодическое по части переменных решение условно-вырожденной системы (2) а при $\mu = 0$ в тривиальное решение $x \equiv 0$.

Работа выполнена по Гранту МОН РК (номер госрегистрации 0113РК00686)

Литература

1. *Умбетжанов Д.У.* Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. - Алма-Ата: наука, 1979.-211 с.

2. *Персидский К.П.* Избранные труды. - Алма-Ата: наука, 1970.-Т.2.

3. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. - М.: Наука, 1978.-988 с.

4. *Бержанов А.Б., Курмангалиев Е.К.* Многопериодическое по части переменных решение одной счетной системы квазилинейных уравнений в частных производных //Украинский математический журнал - 2009 - Т.61.№2.С.280-288.

К.К. Кенжебаев, Ж.А. Сартабанов

Актюбинский региональный государственный университет им.К.Жубанова,

ул. А. Молдагуловой, 34, Актобе, 030000, Казахстан,

e-mail: sartabanov42@mail.ru

Об интегрировании уравнений Якобы и канонической системы D-уравнений

Рассматриваются уравнение Якобы вида

$$Dz + H(\tau, t, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 \tag{1}$$

и каноническая система уравнений

$$Dx = \frac{\partial H}{\partial p}, Dp = -\frac{\partial H}{\partial x}, Dy = \frac{\partial H}{\partial q}, Dq = -\frac{\partial H}{\partial y} \tag{2}$$

с дифференциальным оператором

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t}$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, H = H(\tau, t, x, y, p, q)$ - функция Гамильтона.

Установливаеться связь между вопросами интегрирования D-уравнения Якобы (1) и канонической системы D-уравнений Гамильтона (2).

В случае известных интегралов системы (2) для интегрирования уравнения (1) используеться метод характеристик Коши.

В случае наличия полного интеграла уравнения (1) доказывается обобщенная теорема Якобы о нахождении интегралов системы (2).

Если функция Гамильтона не зависит от временных переменных τ, t, то для интегрирования канонической системы (2) можно использовать метод отделения переменных.

В докладе эти утверждения обоснованы для многомерного времени в $2n$ - мерном пространстве.

Литература

1. тер-Хаар Д. Основы гамильтоновой механики. М.: Наука, 1974, - 224 с.

2. Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. Актобе: ПринтА, 2007. - 168 с.

3. Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. Уральск: РИЦ ЗКГУ, 2013,- 167 с.

УДК 517.95

М.А. Садыбеков, Б.Х. Турметов

Институт математики и математического моделирования

(Казахстан, Алматы)

e-mail: makhmud-s@mail.ru

Новый класс корректных краевых задач теории аналитических функций

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что задачи Дирихле и Неймана являются основными задачами теории гармонических функций. В одномерном случае, а также при рассмотрении уравнения в многомерном параллелепипеде также одной из основных задач является периодическая краевая задача. Однако при рассмотрении уравнения в круге или многомерном шаре аналогов периодических краевых задач построено не было.

В настоящем докладе рассматривается новый класс краевых задач для уравнения Пуассона в шаре. Эти задачи являются аналогами классических периодических краевых задач. Доказана корректность рассматриваемых задач. Единственность решения задач обосновывается применением принципа экстремума. Существование решения доказано методом функции Грина. Обосновывается, что обе задачи являются самосопряженными. Показана методика построения всех собственных функций задачи.

На основе полученных результатов о корректности сформулированных задач предлагается новая задача теории аналитических функций. В задаче задаются одновременно условия и на действительную и на мнимую части аналитической функции. В отличие от классических задач, решение предложенной задачи находится единственным образом, а не с точностью до произвольной мнимой постоянной.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : r = |x| < 1\}$ - единичный шар, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ - единичная сфера. Обозначим $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 \geq 0\}$, $\partial\Omega_- = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 \leq 0\}$, $I = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 = 0\}$. Каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ сопоставим *"противоположную"* ей точку $x^* = (-x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) \in \Omega$, где $\alpha_j, j = 2, ..., n$ принимают одно из значений ± 1. Очевидно, что если $x \in \partial\Omega_+$, то $x^* \in \partial\Omega_-$. Рассмотрим следующие два типа задач ($k = 1, 2$).

Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую в Ω уравнению Пуассона

$$-\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega \tag{1}$$

а на его границе - краевым условиям

$$u(x) - (-1)^k u(x^*) = \tau(x),\ x \in \partial\Omega_+, \tag{2_k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) + (-1)^k \frac{\partial}{\partial r} u(x^*) = \mu(x),\ x \in \partial\Omega_+, \tag{3_k}$$

где $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $\mu(x) \in C^{\varepsilon}(\partial\Omega_+)$ и $f(x) \in C^{\varepsilon}(\overline{\Omega})$, $0 < \varepsilon < 1$.

При $k = 1$ задачу будем называть *антипериодической краевой задачей*, а при $k = 2$ - *периодической*.

Очевидно, что необходимым условием существования решения из класса $C^1(\bar{\Omega})$ является выполнение естественных условий согласования:

$$\tau(0, x_2, ..., x_n) + (-1)^k \tau(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) = 0,\ (0, x_2, ..., x_n) \in I, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_j}(0, x_2, ..., x_n) + (-1)^k \frac{\partial \tau}{\partial x_j}(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) = 0,\ j = \overline{1, n},\ (0, x_2, ..., x_n) \in I, \tag{5}$$

и

$$\mu(0, x_2, ..., x_n) - (-1)^k \mu(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) = 0,\ (0, x_2, ..., x_n) \in I \tag{6}$$

Всюду в дальнейшем будем считать эти условия выполненными.

Обозначим через $G_D(x, y)$ и $G_N(x, y)$ - функции Грина задач Дирихле и Неймана для уравнения (1) в области Ω.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C^{\varepsilon}(\bar{\Omega})$, $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $\mu(x) \in C^{\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $0 < \varepsilon < 1$, и выполнены условия согласования (4)-(6). Тогда решение задачи* (1), (2_1), (3_1) *существует, единственно и представляется в виде:*

$$u(x) = \int_{\Omega} G_1(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial G_1}{\partial n_y}(x, y) \tau(y) ds_y + \int_{\partial\Omega_+} G_1(x, y) \mu(y) ds_y, \tag{7}$$

где $G_1(x, y)$ - функция Грина антипериодической задачи (1), (2_1), (3_1):

$$G_1(x, y) = \frac{1}{2} \left[G_D(x, y) + G_D(x, y^*) + G_N(x, y) - G_N(x, y^*) \right].$$

При этом очевидно что, несмотря на то, что функция Грина задачи Неймана определяется с точностью до постоянного слагаемого, функция Грина антипериодической задачи определяется однозначно.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in C^{\varepsilon}(\bar{\Omega})$, $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $\mu(x) \in C^{\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $0 < \varepsilon < 1$, *и выполнены условия согласования (4)-(6). Тогда для разрешимости задачи* (1), (2_2), (3_2) *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_{\Omega} f(y)ds_y = \int_{\partial\Omega_+} \mu(y)ds_y.$$

Если решение существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x) = \int_{\Omega} G_2(x,y)f(y)ds_y - \int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial G_2}{\partial n_y}(x,y)\tau(y)ds_y + \int_{\partial\Omega_+} G_2(x,y)\mu(y)ds_y + C, \qquad (8)$$

где $G_2(x,y)$*- функция Грина периодической задачи, которая определяется равенством*

$$G_2(x,y) = \frac{1}{2}\left[G_D(x,y) - G_D(x,y^*) + G_N(x,y) + G_N(x,y^*)\right] + C.$$

В докладе обосновывается, что обе задачи являются самосопряженными. Показана методика построения всех собственных функций задачи.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

На основе полученных результатов о корректности сформулированных задач предлагается новая задача теории аналитических функций:

Найти аналитическую в единичном круге $|z| < 1$ *функцию*

$$U(z) = u(z) + iv(z),$$

удовлетворяющую на границе круга $|z| = 1$ *краевому условию*

$$U(z) + U(\overline{z}) = \Phi(\varphi),\ |z| = 1,\ 0 \le \varphi = argz \le \pi. \qquad (9)$$

Теорема 3. *Пусть* $\Phi(\varphi) \in C^{1+\varepsilon}[0,\ \pi]$, $0 < \varepsilon < 1$ *и выполнены естественные условия согласования* $\Phi'(0) = \Phi'(\pi) = 0$. *Тогда существует единственная аналитическая внутри круга* $|z| < 1$ *функция* $U(z)$ *из класса* $U(z) \in C^1(|z| \le 1)$, *удовлетворяющая краевым условиям (9).*

Необходимо обратить внимание на следующие особенности задачи (9):

• краевые условия в задаче задаются на всей границе области;

• задаются одновременно условия и на действительную и на мнимую части аналитической функции;

• в отличие от классических задач, решение предложенной задачи находится единственным образом, а не с точностью до произвольной мнимой постоянной.

Частично результаты доклада и некоторые их обобщения опубликованы в работах [1 - 3].

Литература

1. *Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh.* On analogs of periodic boundary problems for the Laplace operator in ball // Eurasian Mathematical Journal. - 2012. - V. 3, №1. - P. 143-146.

2. *Садыбеков М.А., Турметов Б.Х.* Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге // Дифференциальные уравнения. - 2014. - Т.50, № 2. - С. 264-268.

3. Sadybekov M.A., Turmetov B. Kh., Torebek B.T. Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball // Electronic Journal of Differential Equations. - 2014. - V. 2014, No. 157. - P. 1-14.

Ж. Сулейменов
КазНУ им. аль-Фараби
(Казахстан, Алматы)
e-mail: zh_suleimenov@mail.ru

О построении устойчивого периодического решения нелинейной системы дифференциальных уравнений

В докладе излагается один метод построения периодического решения нелинейной системы и условие его устойчивости.

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x + f(t, x) \tag{1}$$

где $x = colon\,(x_1, \ldots, x_n)\,,\quad P(t) \in C(R)\,,\quad P(T + \omega) = P(t)\,,\quad f(t, x) \in C^{0,1}_{t,x}(D)\,,\quad D \subset R^{n+1},\quad f(t + \omega, x) = f(t, x)\,.$ Ищется периодическое по ω решение $x(t)$

$$x(0) - x(\omega) = 0 \tag{2}$$

Задача (1), (2) рассматривается как граничная.

Строятся для линейной однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x \tag{3}$$

матрица Коши, граничная матрица и матрица Грина. С помощью последней матрицы решение задачи (1), (2) запишется в виде

$$x(t) = \int_0^{\omega} G(t, \tau)\, f(\tau\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Далее рассматривается устойчивость построенного решения системы. Для этого потребуется от $f(t, x)$ удовлетворение дополнительно следующих условий

$$f(t, 0) = 0 \quad \|f(t, x)\| \leq \gamma(\|x\|)\,\|x\|\,,$$

где $\gamma(\|x\|)$ равномерно стремится к нулю при $\|x\| \to 0$.

Литература

1. *Персидский К.П. Избранные труды. т1, Наука, Алма-Ата, 1976.*
2. *Сулейменов Ж. Решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных систем. // Вестник НАН РК №2, 2011.*

УДК 517.946

Ж.Н. Тасмамбетов
Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, Казахстан, tasmam@rambler.ru

Построение нормально-регулярных решений специальной системы типа Вильчинского

Постановка задачи. Методом Фробениуса – Латышевой построить нормально – регулярное решение вида

$$Z\left(x,y\right)=expQ(x,y)\cdot x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\int_{\mu,\nu=0}^{\infty}\mathrm{C}_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu}\quad\left(C_{0,0}\neq 0\right),\tag{1}$$

где ($\rho,\ \sigma,\ _{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,\dots)$ - неизвестные постоянные, а $Q\left(x,y\right)-$ многочлен двух переменных:

$$Q\left(x,y\right)=\frac{\alpha_{p0}}{p}x^{p}+\frac{\alpha_{0p}}{p}y^{p}+\dots+\alpha_{11}\cdot xy+\alpha_{01}\cdot y+\alpha_{10}\cdot x\tag{2}$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{p0},\ \alpha_{0p},\ \dots,\ \alpha_{11},\alpha_{01},\ \alpha_{10}$ системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Вильчинского

$$\left.\begin{array}{l}Z_{xx}+x\left(a+\frac{1}{x^{2}}\right)\cdot Z_{x}-a\cdot y\cdot Z_{y}+y^{2}(a^{2}-\frac{m^{2}}{x^{2}y^{2}})\cdot Z=0,\\ Z_{yy}+y\left(a+\frac{1}{x^{2}}\right)\cdot Z_{y}-a\cdot x\cdot Z_{x}-x^{2}(a^{2}-\frac{m^{2}}{x^{2}y^{2}})\cdot Z=0,\end{array}\right\}\tag{3}$$

где $a-$ некоторая постоянная, $Z=Z\left(x,y\right)-$ общая неизвестная.

В общем случае, такие системы с произвольно заданными коэффициентами были использованы американским математиков Е.Вильчинским для обоснования проективно – дифференциальной геометрии, установив при этом условия совместности. Будем предполагать, что для системы (3) эти условия выполняются.

Для общей системы Вильчинского справедливо утверждение [2]:

Лемма. *Если первое уравнение системы по обеим неизвестным переменным x и y имеют подранги, равные k_1, а второе уравнение – подранги, равные k_2, то такая система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка может быть представлена в виде*

$$\left.\begin{array}{l}p_{0}\cdot Z_{xx}+x^{k_{1}}\cdot p_{1}\cdot Z_{x}+y^{k_{1}}\cdot p_{2}\cdot Z_{y}+y^{2k_{1}}\cdot p_{3}\cdot Z=0,\\ g_{0}\cdot Z_{yy}+x^{k_{2}}\cdot g_{1}\cdot Z_{x}+y^{k_{2}}\cdot g_{2}\cdot Z_{y}+y^{2k_{2}}\cdot g_{3}\cdot Z=0\ ,\end{array}\right\}\tag{4}$$

где коэффициенты $p_i=p_i\left(x,y\right)$ и $g_i=g_i\left(x,y\right)$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ – степенные ряды двух переменных по убывающим степеням x и y.

В (1) степень многочлена $Q\left(x,y\right)$ определяется понятием ранга $p=1+k$ ($k-$подранг).

Сравнивая (3) и (4), убеждаемся, что в (3) подранги $k_1=k_2=1$. Тогда ранг $p=1+k=2$.

Поэтому, согласно методу Фробениуса – Латышевой [2] для построения нормально – регулярного решения системы следует пользоваться преобразованием

$$Z\left(x,\ y\right)=expQ\left(x,y\right)\cdot\Phi(x,\ y)\tag{5}$$

$$Q\left(x,y\right)=\frac{\alpha_{20}}{2}x^{2}+\alpha_{11}\ \cdot xy+\frac{\alpha_{02}}{2}\cdot y^{2}+\alpha_{01}\cdot y+\alpha_{10}\cdot x$$

После чего рассматриваемая задача распадается на следующие два этапа:

1. Нахождение неизвестных коэффициентов $\alpha_{20},\ \alpha_{02},\ \alpha_{11},\alpha_{10},\ ,\alpha_{01},$ многочлена $Q\left(x,y\right)$. Для этого требуется выполнение первого необходимого условия существования нормально - регулярного решения.

Теорема 1. *Для того, чтобы вспомогательная система, полученная с помощью преобразования* (5) *из системы* (3)*, имела хотя бы одно нормально-регулярное решение вида* (1)*, необходимо,чтобы имели место равенства:*

$b_{20}^{(j)}=0,\ b_{02}^{(j)}=0,\ b_{11}^{(j)}=0,\ b_{10}^{(j)}=0,\ b_{01}^{(j)}=0,$*(j=1, 2).* (6)

Правые части (6) выражаются через неизвестные коэффициенты многочлена Q(x,y).

Например,

$$b_{20}^{(1)}=\alpha_{10}^{2}+\alpha_{10}a_{00}^{(1)}+a_{00}^{(3)}=0,$$

$$b_{20}^{(2)}=\alpha_{11}^{2}+\alpha_{10}b_{00}^{(1)}=0.$$

Отсюда, в зависимости от формы задания коэффициентов, последовательно определяются неизвестные коэффициенты $\alpha_{20},\ \alpha_{02},\ \alpha_{11},\alpha_{10},\ ,\alpha_{01},$ многочлена Q(x,y).

1. Построение $\Phi(x,\ y)$ в виде обобщенного степенного ряда двух переменных

$$\Phi(x,y)=x^{\rho}y^{\sigma}.\sum_{\mu,\nu=0}A_{\mu\nu}.x^{\mu}y^{\nu},\quad (A_{00}\neq 0),\tag{7}$$

где $\rho,\sigma,A_{\mu\nu}(\mu,\nu=0,1,2,...)-$неизвестные постоянные.

Второе необходимое условие связано с определением неизвестных постоянных (ρ,σ).

Теорема 2. *Для того, чтобы вспомагательная система имела решение вида* (6)*, необходимо,чтобы пара* (ρ,σ)*была корнем системы определяющих уравнений относительно особенности* $(0,0)$:

$$f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)=a_{00}^{(1)}.\rho.(\rho-1)+a_{00}^{(1)}.\rho+a_{00}^{(2)}.\sigma+a_{00}^{(3)}=0,\tag{6}$$

$$f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)=b_{00}^{(1)}.\rho.(\rho-1)+b_{00}^{(1)}.\rho+b_{00}^{(2)}.\sigma+b_{00}^{(3)}=0,$$

где $f_{00}^{(j)}(\rho,\sigma)$ *(j=1,2) есть коэффициенты при наименьших степенях системы характеристических функций из вспомагательной системы путем подстановки вместо неизвестной* $\Phi(\rho,\sigma)=x^{\rho}.y^{\sigma}$.

Система (8) определяет до четырех пар корней $(\rho_k,\sigma_k)\,(k=1,2,3,4)$,поэтому, каждая из четырех присоединенных систем полученные из вспомагательной системы с помощью преобразования (5) может иметь до четырех линейно-независимых частных решений. Однако,это не всегда возможно. Неизвестные коэффициенты $A_{\mu\nu}(\mu,\nu=0,1,2,...)-$находятся из системы рекуррентных последовательностей.

При выполнении этих необходимых условий справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если системы характеристических уравнений* (6) *имеют только простые пары корней.то система (3),при положительном ранге* $p\succ 0$*, допускает четыре линейно-независимые нормально-регулярные решения вида (1).*

Литература

1. Wilczynski E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces, Leipzig: Leubner, 1906, 120 p.

2. Тасмамбетов Ж.Н. Необходимые условия существования нормально-регулярных решений некоторых систем в частных производных // Вестник Актюбинского университета, Актобе, 1998, ч. 2, с. 11-15.

УДК 531.31;519.21

М.И. Тлеубергенов, Д.Т. Ажымбаев
Институт математики и мат. моделирования (Казахстан, Алматы)
e-mail: marat207@mail.ru, darkhan70@gmail.com

К вопросу построения стохастичских дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию

Постановка задачи. По заданному множеству

$$\Lambda(t): \ \lambda(x,t)=0, \ \lambda\in R^m, \ x\in R^n \tag{1}$$

требуется построить стохастические уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_\nu}=\sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j, \left(\nu=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,r}\right), \tag{2}$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ было интегральным многообразием построенных уравнений.

Поставленная задача в классе обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривалась в [1]. В [2] рассмотрены задачи построения по заданному стохастическому уравнению Ито второго порядка эквивалентного стохастического уравнения лагранжевой структуры. В [3] решаются задачи построения функции Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения (1), зависящих как от обобщенных координат, так и обобщенных от скоростей. В отличие от [3] в данной работе рассматриваются задачи построения функции Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения (1), которые не зависят от скоростей.

Для решения задачи на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [4] в сочетании с методом Еругина [5] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции [6] строится уравнение Ито

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)+\sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi} \tag{3}$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$являлось интегральным многообразием построенного уравнения. И, далее, по построенному уравнению Ито строится эквивалентное ему уравнение лагранжевой структуры.

1. Построение стохастического уравнения лагранжевой структуры (3) **по заданным свойствам движения** (1)**.** Предварительно, по правилу стохастического дифференцирования составляются уравнения возмущенного движения

$$\ddot{\lambda}=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(f+\sigma\dot{\xi}\right)+\dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x}+2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} \tag{4}$$

и вводятся произвольные функции Еругина [5] A и B, обладающие свойствами $A(0,0,x,\dot{x},t)\equiv 0$, $B(0,0,x,\dot{x},t)\equiv 0$,

$$\ddot{\lambda}=A(\lambda,\dot{\lambda},x,\dot{x},t)+B(\lambda,\dot{\lambda},x,\dot{x},t)\dot{\xi}. \tag{5}$$

Сравнивая уравнения (4) и (5) приходим к соотношениям

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}f=A-\dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x}-2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2},\ \frac{\partial\lambda}{\partial x}\sigma=B, \tag{6}$$

из которых методом квазиобращения [4, с.12] определим f и матрицу σ

$$f=k\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+}\left(A-\dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x}-2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right), \tag{7}$$

$$\sigma_i=s_i\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+}B_i, i=\overline{1,r}, \tag{8}$$

где $\sigma_i=(\sigma_{1i},\sigma_{2i},\ldots,\sigma_{ni})^T$- i-ый столбец матрицы $\sigma=(\sigma_{\nu j}),\left(\nu=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,r}\right)$; $B_i=(B_{1i},B_{2i},\ldots,B_{mi})^T$- i-ый столбец матрицы $B=(B_{\mu j})$, $\left(\mu==\overline{1,m},\ j=\overline{1,r}\right)$, $s_i,k-$ произвольные скалярные величины.

Следовательно, из (7), (8) следует, что множество дифференциальных уравнений Ито второго порядка, обладающее заданной интегральной кривой (1) имеет вид

$$\ddot{x}=k\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+}\left(A-\dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x}-2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right)+\left(s_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+}B_1,s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+}B_2,\ldots,s_r\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^{+}B_r\right)\dot{\xi}.$$

Далее, по правилу стохастического дифференцирования раскроем выражение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\nu}\right)=\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}_\nu\partial t}+\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}_\nu\partial x_k}\dot{x}_k+\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_k}\ddot{x}_k+S_{1\nu}+S_{2\nu}+S_{3\nu}, \tag{9}$$

где $S_{1\nu}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^3L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj}$, $S_{2\nu}=\displaystyle\int\{\frac{\partial L(x,\dot{x}+\sigma c(y),t)}{\partial\dot{x}_\nu}-\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}_\nu}\}dy$,

$S_{3\nu}=\displaystyle\int[\frac{\partial L(x,\dot{x}+\sigma c(y),t)}{\partial\dot{x}_\nu}-\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}_\nu}]P^0(t,dy)$.

Следовательно, уравнение (3) с учетом (9) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\nu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_\nu}-\sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j=\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}_\nu\partial t}+\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}_\nu\partial x_k}\dot{x}_k+\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_k}\ddot{x}_k+$$

$$+S_{1\nu}+S_{2\nu}+S_{3\nu}-\frac{\partial L}{\partial x_\nu}-\sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j. \tag{10}$$

Или, учитывая (7) и уравнение (10) приходим к тождеству

$$\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}_\nu\partial t}+\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}_\nu\partial x_k}\dot{x}_k+\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}_\nu\partial\dot{x}_k}\ddot{x}_k+S_{1\nu}+S_{2\nu}+S_{3\nu}-$$

$$-\frac{\partial L}{\partial x_\nu}-\sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j\equiv\ddot{x}-f(x,\dot{x},t)-\sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}, \tag{11}$$

где f и столбцы σ_i матрицы σ имеют соответственно вид (7) и (8).

Из соотношения (11) следуют равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + S_{1\nu} + S_{2\nu} + S_{3\nu} - \dfrac{\partial L}{\partial x_\nu} = -f_\nu, \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k} = \delta_\nu^k, \quad \sigma'_{\nu j}(x, \dot{x}, t) = \sigma_{\nu j}, \end{cases} \tag{12}$$

которые обеспечивают решение поставленной выше задачи в прямом представлении по построенному уравнению Ито (3) эквивалентного стохастического уравнения лагранжевой структуры вида (3).

Введем теперь матрицу h_ν^k и рассмотрим задачу косвенного представления уравнения лагранжевой структуры

$$h_\nu^k \left(\ddot{x}_k - f_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j \right) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_\nu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}\dot{\xi}^j. \tag{13}$$

Для выполнения тождества (13) требуется выполнение условий

$$\begin{cases} h_\nu^k = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k}, \quad h_\nu^k \sigma_{kj} = \sigma'_{\nu j}, \\ -h_\nu^k f_k = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k}\dot{x}_k + S_{1\nu} + S_{2\nu} + S_{3\nu} - \dfrac{\partial L}{\partial t}. \end{cases} \tag{14}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Для построения стохастического уравнения лагранжевой структуры* (3) *по заданному множеству* (1) *так, чтобы множество* (1) *было интегральным многообразием построенного уравнения необходимо и достаточно выполнения условий* (14).

В данной работе строятся также уравнения Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито при наличии случайных возмущающих сил из класса процессов с независимыми приращениями.

Литература

1. *Туладхар Б.М.* Построение уравнений в форме Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения //Автореф. на соиск... к.ф.-м.н. М., УДН им. П. Лумумбы, 1983.11 с.

2. *Тлеубергенов М.И.* Обратные задачи стохастических дифференциальных систем //Автореф. на соиск... д.ф.-м.н. Алматы , 1999. 33 с.

3. *Тлеубергенов М.И., Ажымбаев Д.Т.* О построении дифференциального уравнения по заданным свойствам движения при наличии случайных возмущений// Изв. НАН РК. Сер. физ-мат. 2007. № 5. С.15-20.

4. *Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.* Уравнения программных движений. М., 1986. 88 с.

5. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую// ППМ, 1952. Т.10. В.16. С.659-670.

6. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.

УДК 517.95

Ж.А. Токибетов, Г.К. Рзаева
Казахский национальный университет им.ал-Фараби
(Казахстан, Алматы)
e-mail: rza.gul@mail.ru

Представление решений обобщенной системы Коши-Римана с непрерывными коэффициентами.

Рассмотрим эллиптическую систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= a\,(x,y)\,u + b\,(x,y)\,v + f\,(x,y)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= c\,(x,y)\,u + d\,(x,y)\,v + g\,(x,y)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

При $a = b = c = d = f = g = 0$ она переходит в систему Коши-Римана, следовательно, она является её естественным обобщением. Систему (1) удобнее изучать в комплексной форме [1]. Вводя в рассмотрение операцию комплексного дифференцирования.

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

и комплексную функцию $\omega = u + iv$, систему (1) запишем в виде одного комплексного уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} + \alpha\omega + \beta\overline{\omega} = F, \tag{2}$$

где α, β и F выражаются через коэффициентов a, b, c, d, f и g. Затем с помощью замены неизвестной функции [2] однородную систему (2) приводим к нормальному виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} - C\,(z)\,\overline{\omega} = 0. \tag{3}$$

Мы здесь даем простой способ представления решения системы (3),когда $C(z) \neq 0$ действительная аналитическая относительно действительных переменных x,y функция. Сначала приведем некоторые утверждения из роботы [3]: а) Если функция $f(z)$ имеет непрерывную производную в замкнутой области $\overline{G}$ и

$$Re\{\frac{\partial f(x)}{\partial \overline{z}}\} = 0, \tag{4}$$

то

$$Im\int_{\Gamma} f(z)dz = 0, \tag{5}$$

где -граница области G. Действительно, если f(z)$=f_1\,(z) + if_2(z)$, то

$$Re\{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\} = f_{1x}\,(z) + if_{2y}(z),$$

следовательно, $f_{1x}\,(z) = f_{2y}(z)$. Теперь применяя формулу Грина, получим

$$Im\int_{\Gamma}\ f(z)dz=\int_{\Gamma}\ Im\{(f_1\left(z\right)+if_2\left(z\right))\left(dx+idy\right)\}=\ \int_{\Gamma}\ f_2\left(z\right)dx+if_1\left(z\right)dy=0.$$

На основании этого утверждения легко доказывается следующее утверждение. в) Если функции f(z) и g(z) решения соответственно систем в области G

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=C(z)\overline{f}(z),\quad \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}=C(z)\overline{g}(z), \tag{6}$$

то

$$Im\int_{\Gamma}\ f(z)g(z)dz=0. \tag{7}$$

На самом деле, если мы обозначим через , h(z)=f(z)g(z), тогда

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}=f\left(z\right)\frac{\partial g\left(z\right)}{\partial \overline{z}}+\ g\left(z\right)\frac{\partial f\left(z\right)}{\partial \overline{z}}.$$

Подставляя вместо производных $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$, $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}$ правые части (6), имеем
$Re\{\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\}$=0.

Следовательно, по утверждению а), имеет вместо (2). с) Если функция удовлетворяет систему (3), то найдутся функции
S(z)=m(z)+n(z), D(z)=m(z)-n(z) являющиеся соответственно уравнений (6), что

$$\int_{\Gamma}\ f(z)n(z)dz+\int_{\Gamma}\overline{f(z)m(z)}=0. \tag{8}$$

Чтобы доказать это утверждение, прежде всего заметим, что S(z) решения первого уравнения (6), то i S(z) будет решением второго уравнения в (6). Следовательно, по свойству в):

$$Im\int_{\Gamma}f(z)D(z)dz=0,\ \ Im\int_{\Gamma}if(z)S(z)dz=0.$$

В рассмотрение введем обозначения

$$\int_{\Gamma}f(z)n(z)dz=N\ , \qquad\qquad \int_{\Gamma}f(z)m(z)dz=M$$

тогда на основании равенств

$$\int_{\Gamma}f(z)D(z)dz=\int_{\Gamma}f(z)m(z)dz-\int_{\Gamma}f(z)n(z)dz,$$

$$\int_{\Gamma}f\left(z\right)S\left(z\right)dz=\int_{\Gamma}f\left(z\right)n\left(z\right)dz+\int_{\Gamma}f\left(z\right)m\left(z\right)dz,$$

получим

$$Im\left(M-N\right)=0;; \qquad\qquad Im\left(iM+iN\right)=0.$$

Отсюда имеем M+$\overline{N}$=0 или тоже самое (8).

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \overline{z}}-\frac{1}{B(z)}\ \frac{\partial B(z)}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}-\ \left|B(z)\right|^2\ u=0, \tag{9}$$

полученное дифференцированием уравнения

$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + B\left(z\right)\overline{u}$=0 по z и с учетом, что

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -\overline{B}u.$$

d) Если $u\left(z\right)$решение уравнения (9), то функции

$$\frac{1}{\mathbf{B}(z)}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + u, \quad \frac{1}{\mathbf{B}(z)}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - u \tag{10}$$

являются соответственно решениями уравнений (6) ([1].стр182).

Теорема 1. Если ω(z) решение уравнения (3), а u(z)решение уравнения (9), то

$$\int_{\Gamma}\omega\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}dz \ + \ \int_{\Gamma}\overline{\omega\left(z\right)u\left(z\right)B(z)dz} = \ 0 \tag{11}$$

Доказательство. Возьмем в качестве функции f(z), m(z), n(z) в c) соответственно функции $\omega\left(z\right)$, $\frac{1}{\mathbf{B}(z)}$, $\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$ и $u\left(z\right)$, являющиеся как решения системы (3) и функции из (10). Подставляя их в (8), получим формулу (11).

Теперь рассмотрим уравнения (9) и функцию Римана $G(z,\overline{z};t,\overline{t})= \ G(z;t)$, для него, существование и единственность которой доказаны в [4] и [5]. Как известно, фундаментальное решение уравнения (9), построенное в [5] имеет вид:

$$E\left(\zeta,z\right) = -\ \frac{1}{4\pi}\ \left\{G\left(\zeta,z\right)lg\left|\zeta - z\right|^{\ 2} - \Omega\left(\zeta,z\right)\right\}, \tag{12}$$

где $\Omega\left(\zeta,z\right)$ – регулярная функция.

Используя (10), соответственно получим фундаментальные решения системы (6):

$$R_1 \quad (\zeta,z) = \frac{1}{\mathbf{B}(\zeta)}\frac{\partial E}{\partial \zeta} - E, R_2 \quad (\zeta,z) = \frac{1}{\mathbf{B}(\zeta)}\frac{\partial E}{\partial \zeta} + E \tag{13}$$

Функции R_1 R_2 как легко видеть из (12), (13) являются суммируемым на всей плоскости, за исключением точки ζ, где первое слагаемое в (13) имеет особенность о$(\frac{1}{z})$, а второе логарифмическую особенность.

Теперь в качестве функции u(z) в формуле (8) функцию $E\left(\zeta,z\right)$, определенную по формуле (12), тогда

$$\int_{\Gamma}\omega\frac{\partial \overline{E}}{\partial \zeta}d\zeta \ + \ \int_{\Gamma}\overline{\omega\left(\zeta\right)B\left(\zeta\right)E\left(\zeta;;z\right)dz} = \ 0 \tag{14}$$

В (14) интеграл нужно понимать в случае главного значении по Коши, если точка ζ находиться внутри области G .

Пусть точка $z \in G$. Построим круг $|\zeta - z| < \varepsilon$ внутри G и пусть $\Gamma_{\varepsilon}-$ окружность круга с центром в точке z , радиуса ε . Тогда точка z будет находиться вне области, ограниченный контуром $\Gamma^{'} = \Gamma + \Gamma_{\varepsilon}$.

Далее, действуя путем указанным в работе [6] и используя то, что при $\varepsilon > 0$ интеграл

$\int_{\Gamma(')}\omega\frac{\partial \overline{E}}{\partial \zeta}d\zeta$ переходит в интеграл $\int_{\Gamma}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ который равен $2\pi i\omega(z)$

$$\lim_{\varepsilon > 0}\int_{\Gamma}\omega\left(\zeta\right)\ \left(\zeta\right)d\zeta = \ 0\ ,$$

таким образом мы получим

$$\omega(z) = \frac{\mathbf{B}(z)}{\mathbf{2\pi i}} \int_{\Gamma} \frac{1}{\mathbf{B}(z)} \frac{\partial \overline{E}}{\partial \zeta}\, \omega(\zeta)\ d\zeta - \frac{\mathbf{B}(z)}{\mathbf{2\pi i}} \int_{\Gamma} \overline{E(\zeta; z)\, \omega(\zeta)\, d\zeta}. \tag{15}$$

Это и есть представление решений эллиптических систем (3). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. Если $\mathbf{B}(z)$ отличная от нуля действительная аналитическая действительных переменных функция, то решения уравнения (3) в одно связной области G через граничные значения представляется по формуле (15).

В силу того, что ядра в (15) вполне определенные функции и искомая функция $\omega(z)$ в области D выражается через свои значения на контуре области и это делает формулу аналогом формулы Коши для аналитических функций.

Заметим, что любое решение уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} + B(z)\, \overline{\omega} = 0 \tag{16}$$

можем получить из формулы (10), т.е. чтобы получить все решения уравнения (16), достаточно пользоваться одной из формул (10).

Решения уравнения (9), которые являются комплексными функциями И.Н. Векуа [1] назвал потенциалами уравнения 1-го порядка (16).

Следует отметить, что при $B_Z \neq 0$ уравнение (9) имеет комплексные коэффициенты *и* они имеют особенности в тех точках где B обращается в ноль. Следовательно, интегрирование уравнения второго порядка (3) с разрывными коэффициентами приводится к интегрированию уравнения первого порядка (16) с непрерывными коэффициентами .

Литература

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1959.

2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1964.

3. *Токибетов Ж.А.* Дифференциальные уравнения и их применение. Вып.45,Вильнюс, 1990

4. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений .Л.,1948.

5. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.,1966.

6. *Токибетов Ж.А.* Математические заметки. Т.12, вып.3, 1977.

УДК 517.95

**Ж.А. Токибетов, Г.А. Абдуахитова,
С.М. Нарбаева**
Казахский национальный университет им.ал-Фараби
(Казахстан, Алматы)
e-mail: Gulzhan.Abduakhitova@kaznu.kz, saltaerkesh@mail.ru

Об одной задаче для гиперболической системы первого порядка

В этой работе [1] применяя экспоненциальный дифференциальный оператор

$$exp\left(-t\frac{\partial}{\partial t}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{t^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial t^m}$$

выписано решение задачи Коши для гиперболического уравнения

$$u_{tt}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x),x=(x_1,\ x_2,\ldots,x_{?a}), \tag{1}$$

с начальным условием

$$u\left|_{t=0}=f(x),u_t\right|_{t=0}=g(x), \tag{2}$$

где $a_{ij},\ b_j,\ c(x)\in R^n$ заданные достаточно гладкие функции, f(x), g(x) - бесконечно дифференцируемые заданные функции переменных $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$, оператор

$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+$c(x) – эллиптического типа.

Как известно, трехмерный аналог системы Коши-Римана так называемая система Моисила-Теодореско[2] получается простой модификацией из системы

$$u_x+v_y+w_z=0,\quad v_z-w_y=0,\quad u_z-w_x=0,\quad u_y-v_x=0, \tag{3}$$

который удовлетворяет градиент гармонической функции трех независимых переменных $U\left(x,y,z\right)$,являющейся решением уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0,$$

а именно

$$\frac{\partial U}{\partial x}=u,\ \ \frac{\partial U}{\partial y}=v,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=w.$$

Если в эту систему [3] ввести четвертую искомую функцию следующим образом

$$u_x+v_y+w_z=0;;\ s_x-v_z+w_y=0;;\ s_y+u_z-w_x=0;;\ s_z-\ u_y+v_x=0, \tag{4}$$

то получится система Моисила-Теодереско.

Аналогичное построение можно осуществить, отправляясь от любого уравнения второго порядка с тремя независимыми переменными

$$AU_{zz}+aU_{xx}+2bU_{xy}+cU_{yy}=0, \tag{5}$$

Градиент

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = (u, v, w)$$

решения уравнения (5) удовлетворяет системе уравнений

$$Aw_z + au_x + bu_y + bv_x + cv_y = 0,$$

$$-v_z + w_y = 0, \quad u_z - w_x = 0, \quad -u_y + v_x = 0, \tag{6}$$

это и есть обобщение системы (3). Из этой системы точно также по аналогии (4) получим

$$Aw_z + au_x + bu_y + bv_x + cv_y = 0,$$

$$s_x - v_z + w_y = 0,\ s_y + u_z - w_x = 0, \quad s_z - u_y + v_x = 0. \tag{7}$$

Это система эллиптична тогда и только тогда, когда эллиптична (5).

Если уравнение (5) гиперболична, т.е. $ac - b^2 > 0, \quad a > 0, \quad A < 0$,то вместо системы (2) рассмотрим систему

$$Aw_z + au_x + bu_y + bv_x + cv_y = 0,$$

$$s_x - v_z + w_y = 0,\ s_y + u_z - w_x = 0, \quad -s_z - u_y + v_x = 0. \tag{8}$$

Система (8) является обобщенным гиперболическим аналогом системы Моисила-Теодореско. Например, частный случай этой системы

$$u_x + v_y - w_z = 0,\ s_x - v_z + w_y = 0,$$

$$s_y + u_z - w_x = 0, \quad -s_z - u_y + v_x = 0 \tag{9}$$

гиперболична, причем каждая функция $s,\ u,\ v,\ w$удовлетворяет волновому уравнению

$$U_{zz} = U_{xx} + U_{yy} \tag{10}$$

Например, дифференцируя четвертое уравнение по z, третье уравнение поy, и второе уравнение поx, затем сложим, то убедимся, что$s(x, y, z)$ удовлетворяет волновому уравнению (10) и т.д.

Известно, что как для всякой гиперболической системы, и для системы (9) корректна задача Коши. Мы здесь построим решение задачи Коши для системы (9).

Требуется найти решение системы (9), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} s\,|_{z=0} = f_1(x,y), u\,|_{z=0} = f_2(x,y), v\,|_{z=0} = f_3(x,y), \ \ w\,|_{z=0} = f_4(x,y), \\ \frac{\partial s}{\partial z}\,|_{z=0} = g_1(x,y), \frac{\partial u}{\partial z}\,|_{z=0} = g_2(x,y), \frac{\partial v}{\partial z}\,|_{z=0} = g_3(x,y), \\ \frac{\partial w}{\partial z}\,|_{z=0} = g_4(x,y), \end{gathered} \tag{11}$$

где $f_i\,(x,y)\,, \quad g_i\,(x,y)\,, \quad i = 1, 2, 3, 4,$ заданные в некоторой области D плоскости z достаточно гладкие функции переменных *(x,y)* такие, что ряды составленные с помощью этих функций и их производных были сходящимся равномерно.

Теперь решая задачу Коши для уравнения (10) с начальными данными (11) найдем *s,u,v,w*. Решение этой задачи можно выписать явной формулой [4], т.е. решение задачи Коши можно выписать по формуле

$$u\left(x,t\right)=ch\left(t\sqrt{L}\right)f\left(x\right)+\frac{sh\left(t\sqrt{L}\right)}{\sqrt{L}}g\left(x\right). \tag{12}$$

Таким образом мы придем к следующему утверждению.

Теорема.Задача Коши (11) для системы уравнений первого порядка гиперболического типа (9) при выполнения условий

$$g_1\left(x,y\right)=f_{3x}-f_{2y};\,;\; g_2\left(x,y\right)=f_{4x}-f_{1y};\,;\; g_3\left(x,y\right)=f_{1x}+f_{4y};\,;$$
$$g_4\left(x,y\right)=f_{2x}+f_{3y}$$

имеет решение и оно дается формулой (12).

Литература

1. *Маукеев Б.* Дифференциалдық теңдеулерді шешу. - Алматы: Мектеп, 1989.
2. *Янушаускас А.И.* Задача о наклонной производной теории потенциалов. - Новосибирск, Наука, 1985.
3. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. - М: Наука, 1981.
4. *Курант Д.* Уравнения с частными производными.-М.: Мир, 1964.

УДК 517.95

А. Тунгатаров, А. Болат
Казахский Национальный Университет им. аль - Фараби
(Казахстан, Алматы), e-mail: tun-mat@list.ru

Краевая задача с заданным ростом на бесконечности для систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка в угловой области

Пусть $0<\varphi_0\le 2\pi$, $G=\{z=re^{i\varphi}:0\le r<\infty, 0\le\varphi\le\varphi_0\}$. На G исследуется краевая задача с заданным ростом на бесконечности для системы:

$$2a_1(\varphi)\overline{z}\partial_{\overline{z}}V+2a_2(\varphi)z\partial_{\overline{z}}V+a_3(\varphi)V+a_4(\varphi)\overline{V}=a_5(\varphi)r^{\nu}, \tag{1}$$

$$V=V(r,\varphi)=O(r^{\nu}),\quad r\to\infty, \tag{2}$$

$$\alpha_1V(r,0)+\alpha_2\frac{\partial V}{\partial\varphi}(r,0)=\alpha_3r^{\nu}, \tag{3}$$

где $\alpha_k,(k=\overline{1,3}),\nu>0-$заданные действительные числа, $a_k(\varphi)\in C[0,\varphi_0]$, $(k=\overline{1,3}), a_k(\varphi)\in L_1[0,\varphi_0],(k=\overline{4,5}), a_1(\varphi)\neq 0$ для всех $\varphi\in[0,\varphi_0]$.
Решение задачи (1)-(3) будем искать в классе

$$W_p^1(G)\cap C(G),\ p>1 \tag{4}$$

в виде

$$V(r,\varphi) = r^{\nu}\psi(\varphi), \tag{5}$$

где $\psi(\varphi)-$новая неизвестная функция из класса $C^1[0,\varphi_0], W_p^1(G)-$ пространство С.Л. Соболева [1]. Здесь $1 < p < \frac{2}{1-\nu}$, если $\nu < 1$ и $p > 1$ если $\nu \geq 1$.

Уравнение (1) имеет важное приложение при изучении бесконечно малых изгибании поверхностей положительной кривизны с общей структурой в точке уплощения [1, 2].

Литература

1. *I.N. Vekua* Generalized analytic functions, Pergamon Press. Oxford, 1962.-p.288.

2. *Z.D. Usmanov* Differential Geometry 12, 241-272 (1984).

УДК 517.95

А. Тунгатаров, С. Абдыманапов

Казахский Национальный Университет им. аль - Фараби

(Казахстан, Алматы), e-mail: tun-mat@list.ru

Казахский университет экономики, финансов и международной торговли

(Казахстан, Астана)

Краевая задача типа Робина для одного класса эллиптических систем n-го порядка в угловой области плоскости

Пусть $0 < \varphi_0 \leq 2\pi$, $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0\}$. На G исследуется краевая задача типа Робина с заданным ростом на бесконечности для элиптической системы с оператором Фукса в дифференциальной части:

$$\sum_{m=1}^{n} f_j(\varphi)(2\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^m V + f_{n+1}(\varphi)V + f_{n+2}(\varphi)\overline{V} = r^{\nu} f_{n+3}(\varphi), \tag{1}$$

$$V = V(r,\varphi) = O(r^{\nu}), \quad r \to \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{m,k}\frac{\partial^{k-1}V(r,0)}{\partial \varphi^{k-1}} = \beta_m r^{\nu}, (m = \overline{1,n}), \tag{3}$$

где $f_j(\varphi) \in C[0,\varphi_0]$, $(j = \overline{1,n+1})$, $f_n(\varphi) \neq 0$ для всех $\varphi \in [0,\varphi_0]$; $f_{n+2}(\varphi)$, $f_{n+3}(\varphi) \in L_1[0,\varphi_0]$; $\nu > 0-$ действительное число, $\alpha_{m,k}, \beta_m, (m,k = \overline{1,n})-$ заданные действительные числа.

Решение задачи (1)-(3) будем искать в классе

$$W_p^n(G) \cap C^{n-1}(G),\ p > 1 \tag{4}$$

в виде

$$V(r,\varphi) = r^{\nu}\psi(\varphi), \tag{5}$$

где $\psi(\varphi)-$новая неизвестная функция из класса $C^n[0,\varphi_0], W_p^n(G)-$ пространство С.Л. Соболева [1]. Здесь $1 < p < \frac{2}{n-\nu}$, если $\nu < n$ и $p > 1$ если $\nu > n$.

Система (1) изучена при $f_j(\varphi) \equiv 0, (j = \overline{2,n})$, $f_1(\varphi) \equiv const \neq 0$ в [2], при $f_j(\varphi) \equiv 0$, $(j = \overline{3,n})$, $f_2(\varphi) \equiv const \neq 0$ в [3] и при $f_j(\varphi) \equiv 0$, $(j = \overline{4,n})$, $f_3(\varphi) \equiv const \neq$ в [4].

Она при $n = 1$ имеет важное приложение при изучении бесконечно малых изгибании поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения [1, 2]. Уравнение (1) с учетом (5) в полярной системе координат имеет вид:

$$\sum_{m=1}^{n} f_m(\varphi) \sum_{k=0}^{m} C_m^k i^{m-k} \psi^{(m-k)}(\varphi) + f_{n+1}(\varphi)\psi(\varphi) + f_{n+2}(\varphi)\overline{\psi(\varphi)} = f_{n+3}(\varphi), \tag{6}$$

где

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \quad \psi^k(\varphi) = \frac{d^k\psi(\varphi)}{d\varphi^k}, \ (k = \overline{1,m}), \psi^{(0)}(\varphi) = \psi(\varphi).$$

Так как коэффициенты соответсвующего однородного уравнения

$$\sum_{m=1}^{n} f_m(\varphi) \sum_{k=0}^{m} C_m^k i^{m-k} \psi^{(m-k)} + f_{n+1}(\varphi)\psi = 0 \tag{7}$$

непрерывны и $f_n(\varphi) \neq 0$, на $[0, \varphi_0]$, то существует фундаментальная система решений $\theta(\varphi) = \{\psi_1(\varphi), \psi_2, ..., \psi_n(\varphi)\}$ уравнения (7) в $[0, \varphi_0]$. Используя общее решение уравнения (7) $\psi(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(\varphi)$, где c_k, $(k = \overline{1,n})$– произвольные комплексные постоянные, мы получим интегральное представление решений уравнения (6)

$$\psi(\varphi) = (B\psi)(\varphi) + cJ_0(\varphi) + F_0(\varphi), \tag{8}$$

где

$$J_0(\varphi) = \{J_{0,1}(\varphi), J_{0,2}(\varphi), ..., J_{0,n}(\varphi)\}, \ \ J_{0,j}(\varphi) = \psi_j(\varphi), \ \ (j = \overline{1,n}),$$

$$(B\psi)(\varphi) = \int_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{\psi(\gamma)}d\gamma, \ \ F_0(\varphi) = \int_0^{\varphi} g(\varphi,\gamma)d\gamma,$$

$$b(\varphi,\gamma) = \frac{f_{n+2}(\gamma)}{|\triangle(\gamma)|} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k+1} |\triangle_k(\gamma)| \psi_k(\varphi),$$

$$g(\varphi,\gamma) = \frac{f_{n+3}(\gamma)}{|\triangle(\gamma)|} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} |\triangle_k(\gamma)| \psi_k(\varphi), \ \ cJ_0(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} c_k J_{0,k}(\varphi).$$

Здесь $|\triangle(\varphi)|$– определитель матрицы

$$\triangle(\varphi) = \begin{pmatrix} \psi_1(\varphi) & \psi_2(\varphi) & \dots & \psi_n(\varphi) \\ \psi_1'(\varphi) & \psi_2'(\varphi) & \dots & \psi_n'(\varphi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1^{(n-1)}(\varphi) & \psi_2^{(n-1)}(\varphi) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(\varphi) \end{pmatrix},$$

$|\Delta_k(\varphi)|$– определитель матрицы, полученной из матрицы $\Delta(\varphi)$ заменой k-го столбца столбцом β^T. Здесь $\beta = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$. При $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ определитель $|\triangle(\varphi)|$ как Вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (7) отличен от нуля. Так как $f_{n+2}(\varphi)$, $f_{n+3}(\varphi) \in L_1[0, \varphi_0]$, то интегралы $(B\psi)(\varphi)$, $F_0(\varphi)$ сходятся. Поэтому, используя метод, описанный в (6) получим общее решение уравнения (8) из класса $C[0, \varphi_0]$:

$$\psi(\varphi) = cQ(\varphi) + \bar{c}P(\varphi) + F(\varphi), \tag{9}$$

где

$$Q(\varphi) = \{Q_1(\varphi), Q_2(\varphi), ..., Q_n(\varphi)\}, \ P(\varphi) = \{P_1(\varphi), P_2(\varphi), ..., P_n(\varphi)\},$$

$$Q_k(\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}J_{2m,k}(\varphi), P_k(\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}J_{2m+1,k}(\varphi), F(\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}F_m(\varphi),$$

$$J_{j,k}(\varphi)=\int_0^{\varphi}b(\varphi,\gamma)\overline{J_{j,k-1}(\gamma)}d\gamma,\ \ F_j(\varphi)=\int_0^{\varphi}b(\varphi,\gamma)\overline{F_{j-1}(\gamma)}d\gamma, (j=\overline{1,\infty}).$$

Легко можно получить оценки

$$|J_{m,k}(\varphi)|\le |b|_1^m|\cdot|J_{0,k}|_0\cdot\frac{\varphi^m}{m!}, |F_m(\varphi)|\le|F_0|_0\cdot|b|_1^m\cdot\frac{\varphi^m}{m!},\quad (m=\overline{1,\infty}),$$

где $|b|_1=max_{0\le\varphi,\gamma\le\varphi_0}|b(\varphi,\gamma)|$, $|F|_0=max_{0\le\varphi\le\varphi_0}max|F(\varphi)|$. Поэтому

$$|Q_m(\varphi)|\le|\psi_m|_0\cdot ch(|b|_1\varphi), |P_m(\varphi)|\le|\psi_m|_0\cdot sh(|b|_1\varphi),$$

$$|F(\varphi)|\le|F_0|_0\cdot exp(|b|_1\varphi).$$

Из (5) и (8) следует

$$V(r,\varphi)=r^{\nu}(cQ(\varphi)+\bar{c}P(\varphi)+F(\varphi)). \tag{10}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Уравнение (1) имеет решение из класса (4) в виде (10).

Подставляя (10) в (3), с учетом (2) имеем

$$A\cdot\triangle(0)\cdot C^T=\beta^T, \tag{11}$$

где $A=||a_{k,j}||, (k,j=\overline{1,n})-$ матрица, $\beta=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$.

Так как $|\triangle(0)|\ne 0$, то решая (11) при $|A|\ne 0$ получим

$$C^T=(A\cdot\triangle(0))^{-1}\cdot\beta^T \tag{12}$$

Если $|A|=0$, то для разрешимости алгебраической системы (12) необходимо и достаточно выполнения условии:

$$|A_k|=0,\quad (k=\overline{1,n}), \tag{13}$$

где A_k - матрица, полученная из $A\cdot\triangle(0)$ заменой к-го столбца столбцом β^T. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Если $|A|\ne 0$, то задача (1)-(3) имеет единственное решение, которое задается формулами (10), (12). Если $|A|=0$, то для разрешимости задачи (1)-(3) необходимо и достаточно выполнения условий (13). В этом случае задача (1)-(3) имеет бесконечное множество решений, которое находится по формулам (10), (11).

Литература

1. *I.N. Vekua* Generalized analytic functions, Pergamon Press. Oxford, 1962.-p.288.

2. *S. A. Abdymanapov, A.B. Tungatarov.* An initial problem for a class of second order elliptic systems in the plane with a singular point, Complex Variables and Elliptic Equations, 52, 8(2007), 655-661.

3. *S.K. Burgumbayeva, A. B. Tungatarov.* Cauchy problem for a class of elliptic systems of third order in the plane with Fuchsian differential operator, General Mathematics, 17, 1(2009), 95-103.

4. *A. B. Tungatarov, A.K. Yessentemirova.* About the Cauchy problem for a class of fourth order elliptic systems in the plane with Fuchs operator in the differential part, Eurasian Mathematical Journal, 2008, Number 3, 51-58 (Russian).

З.Д. Усманов
Институт математики Академии наук (Таджикистан, Душанбе)
e-mail: zafar-usmanov@rambler.ru

Интегральные операторы сингулярных обобщенных систем Коши-Риман

1. Регулярная обобщённая система Коши-Римана(И.Н.Векуа, 1959г)

$$\partial_{\overline{z}} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = F(z), \tag{1}$$
$$z \in G, \qquad A, B, F \in L_p(G), \quad p > 2.$$

Теория решений уравнения (1) строится на основе теории аналитических функций комплексного переменного:

$$\partial_{\overline{z}} \Phi = 0, \quad z \in G. \tag{2}$$

Соединительным мостом между $\{w(t)\}$ и $\{\Phi(z)\}$ является оператор

$$T(\cdot) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{(\cdot) d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta. \tag{3}$$

T - оператор, вполне непрерывный из $L_p(G)$, $p > 2$, в $C(G)$.

T-оператор участвует в двух основных формулах, устанавливающих связь между множествами $\{w\}$ и $\{\Phi(z)\}$.

Представление 1-го рода (формула подобия) при $F(z) = 0$:

$$w = \Phi(z) e^{\omega(z)}, \quad \omega(z) = -T\left(A + B \cdot \frac{\overline{w}}{w}\right),$$

и представление 2-го рода:

$$w(z) + T(Aw + B\overline{w}) = \Phi(z) + T(F).$$

T-оператор осуществляет одно-однозначное соответствие между элементами множеств $\{w(z)\}$ и $\{\Phi(z)\}$, $z \in G$. На этих двух представлениях развёртываются основные положения теории решений уравнения (1).

2. Сингулярные обобщённые системы Коши-Римана.

2.1. Сингулярная обобщенная система Коши-Римана с квазисуммируемыми коэффициентами (И.Н.Векуа, 1969г.)

Рассматривается система (1) с $F(z) = 0$, в которой A, B-квазисуммируемы, т.е. существуют аналитические функции $\Phi_A(z)$ и $\Phi_B(z)$ такие, что

$$A(z) \cdot \Phi_A(z) \quad \text{и} \quad B(z) \cdot \Phi_B(z) \in L_p(G), \quad p > 2.$$

В частном случае $\Phi_A(z) = z^m$, $\Phi_B(z) = z^n$, если коэффициенты системы (1) имеют особенность в точке $z = 0$.

Уравнению (1) можно сопоставить интегральное уравнение:

$$w(z) = \Phi(z) + \frac{1}{\Phi_A(z)} T\left(\Phi_A(\zeta) w(\zeta)\right) + \frac{1}{\Phi_B(z)} \cdot T(\Phi_B(\zeta)\overline{w(\zeta)}),$$

в котором T - интегральный оператор (3). Эта формула не получила заметного развития.

2.2. Обобщённая система Коши-Римана с сингулярными коэффициентами (Л.Г.Михайлов, 1963г.)

$$\partial_{\overline{z}} w + \frac{a(z)}{|z|} w + \frac{b(z)}{|z|} \overline{w} = 0, \quad z \in G, \quad z = 0 \in G,$$

где $a(z)$ и $b(z)$ принадлежат классу измеримых и ограниченных функций $S(G)$, $z \in G$, а

$$w(z) \in S_\beta(G), \quad \text{т.е.} \quad |z|^\beta w(z) \in S(G), \quad 0 < \beta < 1.$$

Отображение $\{w(t)\} \leftrightarrow \{\Phi(z)\}$ в классе функций $S_\beta(G)$, $0 < \beta < 1$, устанавливаемое посредством T-оператора:

$$w(z) = \Phi(z) + T\left(\frac{a}{|\zeta|} w + \frac{b}{|\zeta|} \overline{w}\right),$$

взаимно однозначно при условии малости

$$\left(\sup_G |a| + \sup_G |b|\right) \cdot q(\beta) < 1, \quad \text{где} \quad q(\beta) = \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{d\xi d\zeta}{|\zeta|^{1+\beta} |\zeta - 1|}.$$

2.3. Модельная обобщенная система Коши-Римана с точечной сингулярностью 1-го порядка (З.Д.Усманов, 1968г.)

Принципиальное различие в теориях "регулярной" и сингулярных обобщенных систем Коши-Римана наглядно проявляется на примере решения задачи Дирихле:

$$\partial_{\overline{z}} w - \frac{\lambda}{2\overline{z}} e^{i(n-1)\varphi} \overline{w} = 0, \quad z \in G = \{z : |z| \leq 1\}, \tag{4}$$

$$Rew|_{|z|=1} = h(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \tag{5}$$

Здесь $z = re^{i\varphi}$, $w \in C^1(G - 0)$ и в точке $z = 0$ ограничена; λ - комплексное и n - целое числа, $h(\varphi)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье.

Для формулирования результатов вводится вспомогательная плоскость (λ), из которой удаляется точка $\lambda = 0$. При $n \leq 0$ эта плоскость разделяется на множества M_s, $s = 0, ..., \left[\frac{|n| + 1}{2}\right]$. Здесь и в далее под квадратной скобкой понимается целая часть числа. Обозначая $|\lambda_s^*| = \sqrt{s(|n| + 1 - s)}$, введем множества M_s:

$$\lambda \in M_0 \quad \text{при} \quad 0 < |\lambda| < |\lambda_1^*| = \sqrt{|n|};$$

$$\lambda \in M_s \Big(s = 1, ..., \left[\frac{|n| + 1}{2}\right] - 1\Big) \quad \text{при} \quad \lambda_s^* \leq |\lambda| < |\lambda_{s+1}^*|;$$

$$\lambda \in M_{\left[\frac{|n|+1}{2}\right]} \quad \text{при} \quad |\lambda_{\left[\frac{|n|+1}{2}\right]}| \leq |\lambda|.$$

Для значения $n = 0$ имеем дело с одним множеством M_0, совпадающим со всей плоскостью (λ).

При $n \geq 3$ плоскость (λ) разбивается на множества N_s, $s = 0, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right]$. При обозначении $|\lambda_s^{**}| = \frac{1}{2}\sqrt{(n-1)^2 - (n-3-2s)^2}$ определение множеств N_s таково:

$$\lambda \in N_0 \quad \text{при} \quad 0 < |\lambda| \leq \sqrt{n-2};$$

$$\lambda \in N_s\Big(s = 1, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right] - 1\Big) \quad \text{при} \quad |\lambda_{s-1}^{**}| \leq |\lambda| \leq |\lambda_s^{**}|;$$

$$\lambda \in N_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \quad \text{при} \quad |\lambda| > |\lambda^{**}_{\left[\frac{n-3}{2}\right]}|.$$

Для значения $n = 2$ в качестве N_0 берётся вся плоскость (λ).

Далее при формулировании разрешимости краевой задачи (4),(5) речь идёт только о вещественных условиях разрешимости и о линейной независимости над полем вещественных чисел. Краевая задача называется однородной, если $h(\varphi) = 0$.

Теорема 1. *Пусть $n \leq 0$. Тогда число линейно независимых решений однородной задачи (4),(5) равно $2s+1$ для $\lambda \in M_s\Big(s = 0, ..., \left[\frac{|n|}{2}\right] - 1\Big)$ и равно $|n|+1$ для $\lambda \in M_{\left[\frac{|n|}{2}\right]}$. Неоднородная задача для любых λ безусловно разрешима.*

Теорема 2. *Пусть $n = 1$. Если λ - отрицательное число, то однородная задача имеет одно нетривиальное решение, а неоднородная разрешима при выполнении необходимого и достаточного условия $\int_0^{2\pi} h(\varphi) = 0$.* Для остальных значений λ решение краевой задачи существует и единственно.

Теорема 3. *Пусть $n \geq 2$. Тогда однородная задача имеет только тривиальное решение. Решение неоднородной для $\lambda \in N_s$, $s = 0, ..., \left[\frac{|n|}{2}\right]$, существует только при выполнении $2s+1$ условий разрешимости, а для $\lambda \in N_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ при выполнении $n-1$ условий разрешимости.*

2.4. Сингулярная обобщенная система Коши-Римана - объект геометрии (З.Д.Усманов, 1993г.,1997)

В трехмерном декартовом пространстве $Oxyz$ рассматривается проблема бесконечно малых изгибаний поверхности положительной кривизны с изолированной точкой уплощения $(0,0)$:

$$z = z^{(n)}(x,y) + R(x,y), \qquad (z^n(x,y) = \sum_{s=0}^{\eta} a_{s,\eta-s} x^s y^{\eta-s}),$$

где $n > 2$ и $R(x,y) \in C^3$, причём $R(x,y) = O(r^{n+1})$.

Доказано, что б.м. изгибания такой поверхности в специальных, так называемых изометрических сопряженных координатах $\zeta = \xi + i\eta$, описываются уравнением

$$\partial_{\overline{\zeta}} w - \frac{b(\varphi) + B(\zeta)}{2\overline{\zeta}}\overline{w} = 0, \quad \zeta \in G,$$

где $\zeta = \rho e^{i\varphi}, \quad B(\zeta) \in C(G)$ и $B(\zeta) = O(|\zeta|), \quad \zeta \to 0.$

В частности, при $z^{(n)}(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$ это уравнение принимает вид

$$\partial_{\overline{\zeta}} w - \frac{b(0)}{2\overline{\zeta}}\overline{w} = 0, \quad z \in G,$$

причем $b(0) = \dfrac{n-2}{2\sqrt{n-1}}$ и $|\,b(\zeta) - b(0)| < A|\,\zeta|^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$

2.5. Построение интегральных операторов для сингулярных обобщенных систем Коши-Римана(З.Д.Усманов, 1973г.)

Идея построения иллюстрируется на примере неоднородной системы Коши-Римана

$$\partial_{\overline{z}} W = f(t), \quad |z| \le R. \tag{6}$$

Общее решение уравнения (6) задается в виде

$$W = \Phi(z) + S_G f, \tag{7}$$

где $\Phi(z)$ - общее решение однородного уравнения (6) ($f = 0$) и $S_G f$ - частное решение неоднородного уравнения (6).

Оказывается, что

$$S_G f \equiv Tf = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\zeta.$$

Если в уравнении (6) положить $f(z) = F - Aw - B\overline{w}$, то оно принимает форму (1), а соотношение (7) преобразуется в представление 2-го рода из п.1.

Итак, теория $w(z)$ решений уравнения (1) связывается с теорий аналитических функций $\Phi(z)$.

Реализация идеи

Рассмотрим уравнение

$$\partial_{\overline{z}}\, w - \frac{b(z)}{2\overline{z}}\overline{w} = F(z), \quad z \in G. \tag{8}$$

Здесь $b(z)$ непрерывна в G, $b(0) = \lambda \ne 0$ и $F(z)$, а также $[\,b(z) - b(0)]/2\overline{z} \in L_p(G), \quad p > 2.$

Выбор модели

$$\partial_{\overline{z}}\Phi - \frac{b(0)}{2\overline{z}}\overline{\Phi} = 0, \quad z \in G. \tag{9}$$

Для построения оператора используется уравнение

$$\partial_{\overline{z}} W - \frac{b(0)}{2\overline{z}}\overline{W} = f(z), \quad |z| \le R. \tag{10}$$

Общее решение уравнения (10) принимает вид

$$W(z) = \Phi(z) + S_G f, \quad z \in G, \tag{11}$$

где $\Phi(z)$ - общее решение модельного однородного уравнения (9) и $S_G f$ - частное решение неоднородного модельного уравнения (10). Оказывается, что

$$S_G f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{\Omega_1(z,\zeta)}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\Omega_2(z,\zeta)}{\overline{\zeta}} \overline{f(\zeta)} \right] \tag{12}$$

причем $\Omega_1(z,\zeta)$ и $\Omega_2(z,\zeta)$ задаются в явном виде бесконечными рядами степенных функций и при $\zeta \to z$

$$\Omega_1(z,\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \Omega_1^0(z,\zeta),$$

$$\Omega_2(z,\zeta) = b(0) \cdot \ln \frac{1}{|\zeta - z|} + \Omega_2^0(z,\zeta),$$

где Ω_1^0, Ω_2^0 - непрерывные функции по z и ζ. Кроме того, S_G - вполне непрерывный оператор из $L_p(\overline{G})$, $p > 2$, в $C(\overline{G})$. S_G-оператор устанавливает связь между множествами непрерывных решений $\{w(z)\}$ и $\{\Phi(z)\}$ общего (8) и модельного (9) уравнений.

При $b(o) = 0$

$$\Omega_1 = \frac{\zeta}{\zeta - z}, \quad \Omega_2 = 0 \quad \text{и} \quad S_G f \equiv Tf.$$

Таким образом, T-оператор теории "регулярных" обобщенных систем Коши-Римана является всего лишь частным представителем однопараметрического (по параметру λ) семейства операторов S_G^λ, в котором $\lambda = b(0)$.

Идея построения естественных фундаментальных операторов (с их последующим применением для развития теории) распространена на следующие сингулярные обобщенные системы Коши-Римана:

$$\partial_{\overline{z}} w - \frac{b(z)}{2\overline{z}} e^{in\varphi} \overline{w} = F(z), \quad z \in G. \tag{13}$$

(Р.Ахмедов, 1986 г.)

$$\partial_{\overline{z}} w - \frac{b(z)}{2r^{1+2\nu}} e^{i(n+1)\varphi} \overline{w} = F(z). \tag{14}$$

(Х.С.Нажмиддинов, З.Д.Усманов, 1975 г.).

$$\partial_{\overline{z}} w - \frac{e^{i\varphi}}{2} \cdot \frac{\lambda}{r - r_0} \overline{w} = F(z) \tag{15}$$

(З.Д.Усманов, 2012 г.)

- В случаях (13) и (14) модельные уравнения получаются при $b(z) \equiv b(0)$ и $F(z) = 0$.

- Оператор $S_G f$ во всех случаях представляется в виде (14) и является вполне непрерывным из $L_p(\overline{G})$, $p > 2$, в $C(\overline{G})$.

- Ядра оператора S_G, т. е. Ω_1 и Ω_2, представляются бесконечными рядами модифицированных степенных функций (в случае (13)), функций Бесселя 1-го и 2-го рода (в случае (14) и гипергеометрическими функциями (в случае(16)).

- Во всех случаях при $b(0) = 0$ ($\lambda = 0$) S_G оператор принимает вид T-оператора.

Литература

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. - 628 с.
2. *Векуа И.Н.* On the class of the elliptic systems with singularities // Proc. of the International Conference on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, - 1969, April.
3. *Михайлов Л.Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.- Душанбе.: 1963. - 183с.
4. *Усманов З.Д.* Исследование модельной обобщённой системы Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Доклады Академии наук Таджикской ССР. - 1968.- Т.11, №3, с.6-10.
5. *Усманов З.Д.* Обобщённой системы Коши–Римана с сингулярной точкой. - Душанбе.: ТаджикНИИНТИ, 1993. - 245 с.
6. *Ustmanov Z.D.* Generalized Cauchy-Riemann systems with a singular point. - Harlow.: Addison Wesley Longman Ltd., 1997. - 222 p. - (Pitman Monographs and Survey in Pure and Applied Mathematics; 85)
7. *Ахмедов Р.* Исследование решений одной эллиптической системы в окрестности сингулярной точки // Доклады Академии наук Таджикской ССР. - 1986. - Т.29, №2, с.67-70.
8. *Нажмидинов Х., Усманов З.Д.* Обобщенная система Коши-Римана с точечной особенностью выше первого порядка в коэффициенте // Доклады Академии наук Таджикской ССР. - 1975, - Т.18, №5, с.11-15.
9. *Усманов З.Д.* Система обыкновенных дифференциальных уравнений, связанная с гипергеометрическими функциями // Доклады Академии наук Таджикской ССР. - 2012. - Т.55, №1, с.5-10.

УДК 531.1+629.195

М.Д. Шинибаев [1]., А.А. Беков [1], Б.Н. Рахимжанов [2], О. Кашикбаев [3], Б.З. Абдукадиров [4], Б.Д. Оразов [4]

[1]АО "НЦКИТ", Алматы, Казахстан;

[2]Кокшетауский государственный университет, Кокшетау, Казахстан;

[3]Университет Сыр-Дария, Жетысай, Казахстан;

[4]Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан

e-mail: shinibaev_maxsut@mail.ru, bekov@mail.ru

Построение промежуточной орбиты ИСЗ в поле тяготения Хилла

Пусть ИСЗ совершает орбитальное движение в поле тяготения Хилла [1]

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu r^2 + \frac{1}{2}(\nu' - \nu)z^2 \qquad (1)$$

Введем геоцентрическую сферическую систему координат

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda, y = r\cos\varphi\sin\lambda, z = r\sin\varphi \qquad (2)$$

тогда силовая функция(1) будет иметь вид

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu' r^2 - \frac{1}{2}\nu_0 r^2 \cos^2\varphi \tag{3}$$

где μ- гравитационный параметр, $\nu_0 = \nu' - \nu$, ν и ν'-постоянные параметры, r, φ-соответственно модуль радиуса-вектора и широта ИСЗ.

В (3) явно не входит λ - долгота ИСЗ, она является циклической координатой, ей соответствует циклический интеграл

$$\dot{\lambda} r^2 \cos^2\varphi = \alpha_2 = const \tag{4}$$

где α_2- постоянная интеграла площадей, $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$.

Составим канонические уравнения Гамильтона. Определим импульсы $p_i = (p_r, p_\lambda, p_\varphi)$ по обобщенным координатам $q_i = (r, \lambda, \varphi)$, $(i = 1, 2, 3)$и запишем гамильтониан в виде:

$$H = H_0 + H_1,$$

где:

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_\lambda^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}\nu' r^2, \tag{5}$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\nu_0 r^2 \cos^2\varphi, \tag{6}$$

H_0- часть гамильтониана, соответствующая невозмущенному движению; H - гамильтониан возмущенного движения; H_1 - возмущающая функция, иногда ее называют пертурбационной функцией. Надо отметить, что гамильтониан разбит на две части произвольным образом.

Канонические уравнения возмущенного движения

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

не допускают разделения переменных, поэтому используем далее теорему Якоби [2]. Для этого решим вначале невозмущенную систему канонических уравнений:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид [3]

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} - \nu' r^2 - 2\alpha_1 = 0 \tag{9}$$

где α_1 - постоянная энергии.

Общее решение (9) следует искать в виде

$$V = -\alpha_1 t + w_1(r) + w_2(\lambda) + w_3(\varphi) \tag{10}$$

где: V - полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби (9); w_1, w_2, w_3- пока неизвестные функции обобщенных координат r, λ, φ.

Подставив (10) в (9), найдем

$$V = -\alpha_1 t + \int \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \nu' r^2 + \frac{\alpha_3}{r^2} + 2\alpha_1} dr + \alpha_2 \lambda + \int \sqrt{\alpha_3 - \alpha_2^2/\cos^2\varphi} d\varphi,$$

теперь общее решение канонических уравнений (8) в соответствии с [3] можно выписать в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, (i = 1, 2, 3) \tag{11}$$

где $\alpha_i, \beta_i, (i = 1, 2, 3)$- постоянные интегрирования.

Найденные решения (11) содержат постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$и удовлетворяют каноническим уравнениям невозмущенного движения (11). Однако, если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ считать не постоянными, а некоторыми функциями времени, то мы можем подобрать их таким образом, чтобы (11) удовлетворяли также уравнениям возмущенного движения (7).

Пользуясь тем, что $\frac{\partial H_0}{\partial t} \equiv 0$ заменим старые переменные

$$q_i = q_i(\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, \bar{\alpha_3}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3), \quad q_1 = r, \quad q_2 = \lambda, \quad q_3 = \varphi;$$

$$p_i = p_i(\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, \bar{\alpha_3}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3), \quad p_1 = p_r, \quad p_2 = p_\lambda, \quad p_3 = p_\varphi;$$

на новые переменные $\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, \bar{\alpha_3}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$, тогда для новых переменных получим

$$\frac{d\bar{\beta}_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \bar{\alpha_i}}, \quad \frac{d\bar{\alpha_i}}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \bar{\beta}_i}, (i = 1, 2, 3) \tag{12}$$

Из (7) имеем $\dot{\lambda} r^2 \cos^2 \varphi = \alpha_2$-const, $\;r^2 \cos^2 \varphi = \frac{\alpha_2}{\dot{\lambda}}$, поэтому

$$H_1 = \frac{1}{2}\nu_0 \alpha_2 \frac{1}{\dot{\lambda}} = \frac{1}{2}\nu_0 \alpha_2 \frac{dt}{d\lambda}. \tag{13}$$

Из (11) следует

$$dt = f(\alpha_1, \alpha_3, r) dr \tag{14}$$

$$d\lambda = \psi(\alpha_2, \alpha_3, \varphi) d\varphi. \tag{15}$$

В (14) и (15) $\bar{\beta}_i$отсутствуют, поэтому $\alpha_1 - const, \alpha_2 - const, \alpha_3 - const$.

Вычисляя частные производные по параметрам α_i, находим $\beta_i = \bar{\beta}_i$. Подставляя в (11) найденные выражения для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ получим искомое решение канонических уравнений возмущенного движения ИСЗ (7). Это решение дает промежуточную орбиту ИСЗ в квадратурах.

Литература

1. *Шинибаев М.Д* Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. - Алматы: РИО ВАК РК, 2001.- 128 с

2. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения.- М.: Наука, 1968.- 352 с.

3. *Шарлье К.* Небесная механика.- М.: Наука, 1966.- 627 с.

UDC 517.956

G.A. Abdikalikova
Makhambet Utemisov West Kazakhstan State University
(Kazakhstan, Uralsk)
e-mail: a_a_galiya@mail.ru

Multiperiodic solution of boundary value problem for parabolic type equation with variable coefficients

The boundary value problem for equations and systems of parabolic type was researched by a lot of authors, note [1] - [2]. Among of the boundary value problem which is setting all along the space, considerable interes represents half-space boundary value problem which brings to study periodic solutions on time and space variable system of parabolic type equations [3] - [4].

We consider the linear parabolic type equation with multivariate time

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial t_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\tau, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\tau, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\tau, x)u -$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma u = f(\tau, t, x, y), \qquad (1)$$

where $(\tau, t, x, y) \in E^{+}_{1+m+n+1}$ - search n - vector function, $y \in E^{+}_{1} = [0, +\infty)$, E_n - n - measured of the Euclid space of vectors $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Coefficients $a_{ij}(\tau, x), b_i(\tau, x), c(\tau, x)$ and the function $f(\tau, t, x, y)$ are satisfy conditions (S):

1. All this coefficients are determined, unceasing in the E_{1+n} and (θ, ω) - periodicity. Coefficients are satisfy condition of Gelder on x with exponents $\alpha \in (0, 1)$, the function $a_{ij}(\tau, x)$ also on τ with exponents $\frac{\alpha}{2}$;

2. Functions $a_{ij}(\tau, x)$ in the E_{1+n} are forming symmetrical matrixes for which has a place the condition even parabolic of the operator L:

$$\nu_0 |\xi|^2 \leq (a_{ij}(\tau, x)\xi, \xi) \leq \nu_1 |\xi|^2,$$

where ν_0, ν_1 - positive constants;

3. $c(\tau, x) \geq 0, \forall (\tau, x) \in E_{1+n}$;

4. Assume that the function $f(\tau, t, x, y)$ has (θ, ω, σ) - periodicity on τ, t, x even with respect to y, also satisfies condition of Gelder with exponents $\frac{\alpha}{2}$ and $\alpha \in (0, 1)$ on time τ, t and space variables x, y respectively.

Problem 1. Find sufficient conditions existence and uniqueness multiperiodical on τ, t, x solution of parabolic type equation (1) with variable coefficients, which satisfy border condition

$$u(\tau, t, x, 0) = \Psi(\tau, t, x), \qquad (2)$$

where function $\Psi(\tau, t, x)$ - (θ, ω, σ) - periodicity on τ, t, x, also satisfies on time τ, t and spase variable x condition of Gelder with exponents $\frac{\alpha}{2}$ and $\alpha \in (0, 1)$ accordingly.

Investigation of uniqueness of solution of the problem needs to put a condition in the infinity: $|u(\tau, t, x, y)| < M$ for $y \in [0, +\infty)$ and $\tau > 0$, where $M = const$.

Developing ideas of work [5], we investigate the sufficient conditions of existence and uniqueness of solution of the first boundary value problem (1) - (2) of parabolic type equation with multivariate time under multiperiodicity on τ, t, x. Addition problem to Problem 1 is defined by introducing an initial condition

$$u(\tau_0, t, x, y) = \varphi(t, x, y) \in CB\left(E^+_{m+n+1}\right), \tag{3}$$

where $CB\left(E^+_{m+n+1}\right)$ - Banach space of unremitting and limited in E^+_{m+n+1} function $\varphi(t, x, y)$.

Assumy that the boundary condition $\varphi(t, x, 0) = \Psi(\tau_0, t, x)$ is satisfied for the solution of boundary value problem (1) - (3). Also for finding multiperiodicity on time and on space variables for the solution of problem (1) - (2) by means of special choise of initial function $\varphi(t, x, y)$, at first we find solution of preliminary auxiliary problem.

Problem 2. Find uniqueness of (θ, ω, σ) - periodicity solution of the equation

$$L\overline{u} = \overline{f}(\tau, t, x, y), \tag{4}$$

satisfy of conditions

$$\overline{u}(\tau_0, t, x, y) = \overline{\varphi}(t, x, y), \tag{5}$$

$$\overline{u}(\tau, t, x, 0) = \Psi(\tau, t, x), \tag{6}$$

where functions $\overline{f}(\tau, t, x, y)$ and $\overline{\varphi}(t, x, y)$ are continious odd.

The solution of the auxiliary problem (4)-(6) is researched in the form

$$\begin{gathered}
\overline{u}(\tau, t, x, y) = e^{-\gamma(\tau-\tau_0)} \int\limits_{E_n} V(\tau-\tau_0, x-\xi) \times \\
\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\tau-\tau_0, y-\eta) U_0(\tau-\tau_0, t-e\tau+e\tau_0) \times \\
\times \overline{\varphi}(t-e\tau+e\tau_0, \xi, \eta)\, d\eta d\xi + \\
+ \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\gamma(\tau-s)} \int\limits_{E_n} V(\tau-s, x-\xi) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\tau-s, y-\eta) \times \\
\times U_0(\tau-s, t-e\tau+es) \overline{f}(s, t-e\tau+es, \xi, \eta)\, d\eta d\xi ds + \\
+ \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\gamma(\tau-s)} \int\limits_{E_n} V(\tau-s, x-\xi) \frac{\partial U}{\partial \eta}(\tau-s, y-\eta) \times \\
\times U_0(\tau-s, t-e\tau+es) \Psi(s, t-e\tau+es, \xi)\, d\xi ds,
\end{gathered} \tag{7}$$

where

$$\begin{gathered}
V(\tau-\tau_0, x-\xi) U(\tau-\tau_0, y-\eta) \times \\
\times U_0(\tau-\tau_0, t-e\tau+e\tau_0) e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}
\end{gathered} \tag{8}$$

is fundamental solution for the operator L for $\tau > \tau_0$, $V(\tau-\tau_0, x-\xi)$ is fundamental solution of the equation $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\tau, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(\tau, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + +c(\tau, x)u = 0$ is finding on method of E. Levi. For $\tau \le \tau_0$ fundamental solution is continue zero. $t - e\tau + es$ - characteristics of differential operator $\frac{\partial}{\partial \tau} + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t_j}$, $e = (1, 1, ..., 1)$ - m - vector.

From (7), it follows that the function $\overline{\varphi}(t, x, y)$ is not constant. Select the initial function with the help of necessary and sufficient conditions of periodicity with respect to time variable

$\overline{u}(\tau_0, t, x, y) = \overline{u}(\tau_0 + \theta, t, x, y)$. Assume that the function $\overline{f}(\tau, t, x, y)$ is periodic on τ with positive period θ and by this saving of periodicity on t, x even with respect to y, taking into consideration of diagonal periodicity of the fundamental solution and using the formula of type of decreasing we receive members of

$$\overline{\varphi}(t, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\varphi}_m(t, x, y), \tag{9}$$

which are defined from recurrence relations.

In the work proof that (9) absolutely converges to a vector - function $\overline{\varphi}^*(t, x, y)$. One can prove that $\overline{\varphi}^*(t, x, y) \in CB(E_{m+n+1})$. For initial vector - function of the problem we get a vector - function $\overline{\varphi}^*(t, x, y)$ and substitute in (7).

With taking into consideration odd continuation $\overline{f}(\tau, t, x, y)$ the analytical type of the solution of problem (1)-(2) found.

Theorem. *If executed condition (S) that system of equation (1) by border condition (2) and $\gamma = const > 0$ has uniqueness (θ, ω, σ) - periodicity solution $u^*(\tau, t, x, y)$ even with respect to y and satisfy condition*

$$\|u^*(\tau, t, x, y)\| \leq \Omega\gamma^{-1} + Ne^{-\sqrt{\gamma}y},$$

where Ω, N - const.

References

1. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uralseva N.N.* Linear and quasilinear of parabolic type equation. - M.: Nayka, 1967. - 736 p. (In Russian).

2. *Nahushev A.M.* Problem displacement for partial differential equation. - M.: Nayka, 2006. - 287 p. (In Russian).

3. *Umbetzhanov D.U.* Almost periodic solutions of evolutions equations. - Alma - Ata: Nayka, 1990. - 184 p. (In Russian).

4. *Asanova A.T.* Limited solution of the nonlinear parabolic equations //Izvestiya MN-AN RK. Ser. fiz.-mat. -1997. No 1. -pp. 33–39. (In Russian).

5. *Kenzhebaev K.K., Abdikalikova G.A., Berzhanov A.B.* Multiperiodic solution of boundary value problem for one class parabolic type equation with multivariate time // Ukraine mathematical journal. - 2014. - V.66, No 5. - pp. 701-711. (In Russian).

UDC 517.927

A.T. Assanova [a], A.E.Imanchiev[b]
[a]Institute of mathematics and mathematical modeling (Kazakhstan, Almaty)
[b]K.Zhubanov Aktobe regional state university (Kazakhstan, Aktobe)
e-mail: anarasanova@list.ru, imanchiev_ae@mail.ru

On the solvability of a multi-point boundary value problem with integral condition for a differential equation third order

We consider the following multi-point boundary value problem with integral condition for a third order differential equation

$$\frac{d^3z}{dt^3} = A_1(t)\frac{d^2z}{dt^2} + A_2(t)\frac{dz}{dt} + A_3(t)z + f(t), \qquad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\Big\{\alpha_{ij}\frac{d^2z(t_i)}{dt^2} + \beta_{ij}\frac{dz(t_i)}{dt} + \gamma_{ij}z(t_i)\Big\}+$$
$$+\int_0^T\Big\{K_j(\tau)\frac{d^2z(\tau)}{d\tau^2} + M_j(\tau)\frac{dz(\tau)}{d\tau} + L_j z(\tau)\Big\}d\tau = d_j, \qquad j=1,2,3, \tag{2}$$

where functions $A_k(t)$, $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, $k=1,2,3$, and α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, d_j are constants, $K_j(t)$, $M_j(t)$, $L_j(t)$ are continuous functions on $[0,T]$, $i=\overline{0,m}$, $j=1,2,3$, $0=t_0<t_1<t_2...<t_m=T$.

A function $z(t)\in C([0,T],R)$ having derivatives $\frac{dz(t)}{dt}\in C([0,T],R)$, $\frac{d^2z(t)}{dt^2}\in C([0,T],R)$, $\frac{d^3z(t)}{dt^3}\in C((0,T),R)$, is called a solution to problem (1)–(2) if it satisfies differential equation (1) for all $t\in(0,T)$ and meets the nonlocal boundary conditions (2).

The multi-point boundary value problems with integral conditions for differential equation of higher order arise in the mathematical modelling of various processes in physics, chemistry, biology, medicine, etc.. In connection with many applications, for example, in the theory of bending of beams, in the transport of goods, of most interest are the multi-point boundary value problems for differential equations of third order with variable coefficients [1-3]. Special cases of problem (1)–(2) without integral terms seen in the works of many authors. To find conditions for the existence of solutions of multi-point boundary value problems of type (1)–(2) without integral terms used the method of fixed points, the method of upper and lower solutions, monotone iterative method, etc [4-6]. Despite that the large number of papers devoted to multi-point boundary value problems for ordinary differential equations of higher order with variable coefficients, many questions are remain. Primarily, this is the issues of availability of effective signs of the solvability of the investigated problem, the study of qualitative properties of solutions, methods of constructing solutions, etc. The aforementioned issues can be achieved by developing constructive research methods multi-point boundary value problems for linear and nonlinear ordinary differential equations of high orders, and creation of algorithms for finding their solutions.

The present communication is devoted to investigate of the existence unique solution of the multi-point boundary value problem with integral conditions for ordinary differential equation of third order (1)–(2) and ways of its solving. For this purpose we is used the method of parameterization [7]. Earlier in the works [8,9] the method was applied to multi-point boundary value problems for systems of ordinary differential equations. Necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the linear multi-point boundary value problem are established, the existence of an isolated solution of a multi-point boundary value problem for nonlinear equations is proved.

The results of this work demonstrate of the effective applicability of the method of parameterization for studied multi-point boundary value problem for the differential equation of third order with variable coefficients and complement the results of [8]. The sufficient conditions of solvability to problem (1)–(2) are established in the terms of the coefficients of the differential equation $A_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, and the date of boundary conditions α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, $K_j(t)$, $M_j(t)$, $L_j(t)$, $i = \overline{0, m}$, $j = 1, 2, 3$. Algorithms of finding approximate solutions to problem (1)–(2) are constructed and is proved their convergence to the exact solution of considering multi-point problem for differential equation third order.

Multi-point boundary value problems with integral conditions for ordinary differential equations of higher orders are widely used in nonlocal boundary value problems for partial differential equations of hyperbolic type [10-12]. Based on the properties of solutions to the family of multi-point boundary value problems with integral conditions for ordinary differential equations can be used investigate the qualitative behavior of the solutions to the corresponding nonlocal boundary value problems with integral conditions.

Note that, the problem (1)–(2) were studied in the [13, 14] under $K_j(t) = M_j(t) == L_j(t) = 0$, $j = 1, 2, 3$. The sufficient conditions of unique solvability of the researching problem were established in the terms of initial data and algorithms of finding solution to this problem were constructed.

References

1. *Samoilenko A. M., Ronto N.I.* Numerical-analytic methods of investigation of solutions of boundary value problems. - Kyiv. : Naukova Dumka, 1985. - 224 p. [in Russian]

2. *Kiguradze I.T.* Boundary value problems for systems of ordinary differential equations // Modern problems of mathematics. Advancement achievements. - M. : Nauka, 1987. - Vol. 30, P. 3- 103. [in Russian]

3. *Samoilenko A. M., Laptinskii V. N., Kenzhebayev K. K.* Constructive methods of investigation of periodic and multipoint boundary value problems // Proceedings of Institute of mathematics of NAS of Ukraine. - Kiev: Institute of mathematics of NAS of Ukraine, 1999. - Vol. 29. - 220 p. [in Russian]

4. *Liu B., Yu J.* Solvability of multi-point boundary value problems at resonance (II) // Appl. Math. Comput. - 2002. -V. 129, № 1. -P. 119-143.

5. *Lin X., Du Z.* Uniqueness and existence results for a third-order nonlinear multi-point boundary value problem // Appl. Math. Comput. - 2008. -V. 205, № 1. -P. 187-196.

6. *Xie S., Li P., Gao Z., Wang H.* High order compact finite difference schemes for a system of third order boundary value problem // Appl. Math. Comput. - 2012. -V. 219, № 12. -P. 2564-2573.

7. *Dzhumabayev D.S.* Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational mathematics and mathematical Physics. - 1989. -V. 29, № 1. -P. 34-46.

8. *Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E.* Well-posedness of linear multi-point boundary value problem // Mathematical journal. - 2005. -V. 5, № 1. -P. 30-38. [in Russian]

9. *Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E.* Criteria of existence izolated solution of multi-point boundary value problem for system of ordinary differential equations // Izvestiya NAN RK. - 2010. № 3. -P. 117-121. [in Russian]

10. *Asanova A.T.* About of the solvability of family multi-point boundary value problems for system of differential equations and their applications to nonlocal boundary value problems // Mathematical journal. - 2013. -V. 13, № 3. -P. 38-42. [in Russian]

11. *Asanova A.T.* On the solvability of nonlocal boundary value problem with integral condition for an partial differential equation third order // Materials of scientific conference "Non-classical equations of the mathematical physics", Tashkent. 23-25 October 2014. - P. 3-4.

12. *Asanova A.T.* On a nonlocal boundary value problem with integral condition for an equation of the third order hyperbolic type // Abstracts of reports republican scientific conference with part of a foreign scientists "Contemporary methods of the mathematical physics and their applications", Tashkent. 15-17 April 2015. -Vol. I. - P. 251-253.

13. *Assanova A.T., Imanchiev A.E.* On the solvability of a multi-point boundary value problem for a differential equations third order // Abstracts of reports International scientific conference "Actual problems of mathematics and mathematical modeling" dedicated to the 50th anniversary of the of the Institute of Mathematics and Mechanics AS KazSSR, June 1-5, 2015, Almaty, Kazakhstan. -P. 110-112.

14. *Assanova A.T., Imanchiev A.E.* On the unique solvability of a multi-point boundary value problem for a third order differential equation // Izvestiya NAN RK. Ser. fiz.-matem. - 2015. № 5. -P. 42-54. [in Russian]

UDC 517.95

G.I. Bizhanova
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
(Kazakhstan, Almaty)
e-mail: galina_math@mail.ru

Investigation of the nonregular initial and boundary value problems for the parabolic equations in the weighted Hölder spaces

In the domain $\Omega \subset \mathrm{R}^n$, $n \geq 1$, there are considered initial and boundary value problems for the second order parabolic equations with the singular with respect to t coefficients at the first order spatial derivatives of the solutions. Such equations arise from the problems in the domain $\Omega(t)$ with the moving and free boundaries $\partial\Omega(t) =: \gamma(t)$ after transforms of these domain and boundary into $\Omega(0) =: \Omega$ and $\gamma(0) = \partial\Omega$ respectively.

The weighted Hölder spaces for the solutions of these problems are determined. The existence, uniqueness, estimates of the solutions are proved in these spaces.

UDC 517.928

O.M. Penkin
Kazakh-British Technical University (Republic of Kazakhstan, Almaty)

On some incompatible inequalities on stratified sets [2]

One can prove that an inequalities:

$$u'' + u \leq 0,$$

$$u(0) \geq 0, \quad u(\pi) \geq 0,$$

imply $u = \mu \sin x$ for some fixed constant μ.

One can also prove that the inequality

$$\Delta u \geq 0,$$

where Δ is a Laplace - Beltrami operator associated with some compact riemannian manifold, admits only constant solutions (it is well known Bochner's lemma). Next, we have a following statement. The inequalities:

$$\Delta u \geq 0, \quad \textit{in some domain } G,$$

$$u'_\nu \geq 0, \quad \textit{on the boundary of } G,$$

imply u is a constant function. And the same is true for the following collection of inequalities:

$$\Delta u \geq 0, \quad \textit{in some domain } G,$$

$$u''_\tau + u'_\nu \geq 0, \quad \textit{on the boundary of } G,$$

where τ is a tangent direction to the boundary, and ν is an interior normal.

The last tree statements are very particular cases of the following common statement: Let Δ be a laplacian on the stratified set Ω, then the inequality $\Delta u \geq 0$ implies u is constant.

We give also an analog of the first statement, concerning $\mu \sin(\cdot)$ for general stratified set.

It is interesting to note that the following inequalities

$$\Delta u \geq 0, \quad \textit{in some domain } G, \quad \textit{and } u \geq 0 \textit{ on the boundary},$$

do not necessary imply u is constant. Why? In our talk we reveal some strange reasons for that.

[2]This work was supported by grant 0115RK00643 of Ministry of Education and Since of Republic of Kazakhstan

UDC 517.956

B.T. Torebek
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK
(Kazakhstan, Almaty)
e-mail: turebekb85@mail.ru

On a nonlocal problem for the Laplace equation with fractional boundary conditions

Let $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ be the unit ball, $n \geq 2$ and $\Omega_1 = \{|x| < b < 1\}$ and let $\delta_i(x) : \partial\Omega \to \Gamma_i \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega, i = 1, 2, ..., \Gamma_i \neq \emptyset$, be a homeomorphism between $\bar{\Omega}_1$ and Ω and let the functions $a_i(x), i = 1, 2, ...,$ be continuous on $\partial\Omega$, and satisfy the condition

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i(x)| < \infty,\ x \in \partial\Omega. \tag{1}$$

We will assume that the series (1) converges uniformly on $\partial\Omega$.

Let $\mu > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$. We consider the following boundary value problem:

Problem BS. Find a harmonic function $u(x) \in C^2(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ such that $B_\mu^\alpha[u](x) \in C(\overline{\Omega})$ and satisfies on the unit sphere $\partial\Omega$ the following conditions

$$B_\mu^\alpha[u](x) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) B_\mu^\alpha[u](\delta_i(x)) = f(x), x \in \partial\Omega,$$

where $f(x) \in C(\partial\Omega)$ is a given function, B_μ^α is a integro-differential operator (see.[1]):

$$B_\mu^\alpha[u](x) = \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} u(\tau\theta)\, d\tau, r = |x|, \theta = \frac{x}{|x|}.$$

Theorem 1 *Let* $\Gamma_i \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega,\ a_i(x)$ *be continuous functions satisfying the condition*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i(x)| \leq \frac{\Gamma(\mu - \alpha + 1)}{\Gamma(\mu + 1)},\ x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

and let a solution of problem BS exists.

Then:

1) if

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) \neq \frac{\Gamma(\mu - \alpha + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

then the solution of problem BS is unique.

2) if

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) \equiv \frac{\Gamma(\mu - \alpha + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} x \in \partial\Omega, \tag{4}$$

then a solution of problem BS is unique up to a constant.

Let $v(x)$ be a solution of the following problem [2]

$$\Delta v(x) = 0, x \in \Omega, \tag{5}$$

$$v(x)-\sum_{i=1}^{\infty}a_i(x)\,v(\delta_i(x))=f(x)\,,\;x\in\partial\Omega. \tag{6}$$

We now investigate the existence of a solution of the problem BS. Let $P(x,y)=\frac{1}{\omega_n}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$ be the Poisson kernel of the Dirichlet problem, ω_n the area of the unit sphere on R^n. Consider the integral equation

$$\varphi(x)-\int\limits_{\partial\Omega}\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_i(y)\,P(\delta_i(y),x)\right]\varphi(y)dS_y=0. \tag{7}$$

Theorem 2 *Let $\Gamma_i\subset\bar{\Omega}_1\subset\Omega,\;a_i(x),\;i=1,2...,$ be continuous functions that satisfy the condition (2)*

Then

1) if the condition (3) is realized, then problem BS is uniquely solvable for any $f(x)\in C(\partial\Omega)$.

2) if the condition (4) satisfied, then problem BS is solvable if the following condition is realized

$$\int\limits_{\partial\Omega}f(x)\varphi_0(x)ds_x=0,$$

where the function $\varphi_0(x)$ is a solution of equation (7); moreover the solution of this equation is unique.

3) if the solution of problem BS exists, then it can be represented in the form

$$u(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 s^{\mu-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}u(sx)\,ds,$$

where $v(x)$ is a solution of problem (5)-(6).

Remark 1. It is easy to show that if (2) is not satisfied, then the corresponding homogeneous problem BS has non-zero solutions.

Remark 2. If $\alpha=1$, $\mu>0$ then the operator B_μ^α simplify and reduce to the form [3]

$$B_\mu^\alpha[u](x)=\left(r\frac{d}{dr}+\mu\right)[u](x)$$

and then the solution of the problem BS is represented as

$$u(x)=\int\limits_0^1 s^{\mu-1}v(sx)\,ds.$$

This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan under the grant number 0819/GF4.

References

1. *Turmetov B.Kh., Torebek B.T.* Modified Bavrin operators and their applications. //Differential Equations. **51**, No 2 (2015), 243–254

2. *Bitsadze A.V.* On a Class of Conditionally Solvable Nonlocal Boundary-Value Problems for Harmonic Functions. //Sov. Math. Dokl. **280**, No 3, (1985) 521–524..

3. *Bavrin I.I.* Operators for harmonic functions and their applications. //Differential Equations. **21**, No 1, (1985) 6–10

UDC 517.95

M.A. Shaimardanova
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK
(Kazakhstan, Almaty)
e-mail: makpal.shaimardanova@gmail.com

On the solution of non-regular problem for the parabolic equation

There is studied a nonregular problem for a parabolic equation with time derivative in the boundary condition with incompatible initial and boundary data. In [1,2] there were studied the first, second and conjunction boundary value problems.

The solution of the problem was constructed in the explicit form with the help of Laplace transform [3-5], the order of the singularity of the solution in the vicinity of the initial time near the boundary of the domain was found.

The results can be applied in the study of such problems, problems with free (unknown) boundary for parabolic equations.

References

1. *Bizhanova G.I.* The solution in the Holder spaces of boundary value problems for parabolic equations with incompatible initial and boundary data. // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2010. -T.36 -2-30 p (In Russian).

2. *Bizhanova G.I.* Classical solution of nonregular conjunction problem for the heat equation. - Alamty //Mathematical Journal. 2010. - N 6 -37-48 p. (In Russian).

3. *Bizhanova G.I.* Application of integral transforms to the solution of boundary value problems of parabolic equations.- Almaty, 1997.-52 p (In Russian).

4. *Gradshtein I.S., Ryzhik I.M.* Tables of integrals, sums, series and products. // -M. Science, -1971 (In Russian).

5. *Rimskiy-Korsakov B.S.* Elements of the operational calculus. -Moscow -1958. -122 p.

3 Математическое моделирование и уравнения математической физики

Ж. Абдикеримова
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
(Қазақстан, Алматы)
e-mail: jan_44@mail.ru

Сингулярлы ауытқыған жоғарғы ретті теңдеулер үшін бастапқы секірісті шеттік есептер

Сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды дифференциалдық

$$\varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = F(t) + \int_0^1 H(t,x)y(x,\varepsilon)dx \tag{1}$$

теңдеуіне қойылған келесі түрдегі шеттік есепті қарастырайық:

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha,\ h_2 y(t,\varepsilon) \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta,\ h_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma, \tag{2}$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, ал α, β, γ – белгілі тұрақты шамалар.

Келесі шарттар орындалсын:

I. $A(t),\ B(t),\ C(t),\ F(t) \in C[0,1]$;

II. $H(t,x) \in C(D)$, $D = \{0 \le t \le 1,\ \ 0 \le x \le 1\}$;

III. $\mu^2(t) + A(t)\mu(t) + B(t) = 0 \Rightarrow \mu_1(t) \ne \mu_2(t)$, $\Re\mu_1(t) < 0$, $\Re\mu_2 < 0$;

IV. $\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} h_1y_1(t,\varepsilon) & h_1y_2(t,\varepsilon) & h_1y_3(t,\varepsilon) \\ h_2y_1(t,\varepsilon) & h_2y_2(t,\varepsilon) & h_2y_3(t,\varepsilon) \\ h_3y_1(t,\varepsilon) & h_3y_2(t,\varepsilon) & h_3y_3(t,\varepsilon) \end{vmatrix} \ne 0$;

V. 1 саны $H(t,s,\varepsilon)$ өзегінің меншікті мәні болмасын.

Теорема. *Егер шарттар I-V орындалса, онда шеттік есебінің шешімі үшін келесі асимптотикалық бағалауы орындалады:*

$$|y^{(i)}(t,\varepsilon)| \le C(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| + \|\overline{F}\|) + C(\varepsilon|\alpha| + \varepsilon^2|\beta| + |\gamma| + \|\overline{F}\|)\frac{e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}}{\varepsilon^i}, \quad i = 0,1,2.$$

Теоремадан $y^{(i)}(0,\varepsilon) = O(1)$, $i = 0,1$, $y''(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$, $\varepsilon \to 0$ екендігі шығады. Бұдан $t = 0$ нүктесінде берілген есеп шешімінің нөлінші ретті екінші дәрежелі бастапқы секірісі бар екендігі алынады.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. *Нургабыл Д.Н., Уаисов А.Б.* О граничных скачках линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Вестник ЖГУ им. И. Жансугурова. – 2012. – № 4. – С. 17-21.

УДК 517.994

А.Ш. Акыш
Институт математики и математического моделирования (Казахстан, Алматы)
email: akysh41@mail.ru

О принципе максимума для уравнений Навье–Стокса

Здесь показано справедливость одного из вариантов принципа максимума для уравнений Навье-Стокса (УНС), вытекающей из общей теории математической физики.

Постановка задачи и необходимые сведения

Рассмотрим начально-краевую задачу для УНС [1] относительно вектора скорости $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ и давления P в области $Q = (0, T] \times \Omega$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{1a}$$

$$div \mathbf{U} = 0, \tag{1b}$$

$$\mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \tag{1c}$$

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x})\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{1d}$$

где $\mathbf{x} \in \Omega \subset R_3$; Ω – выпуклая область, а $\partial\Omega$ – граница Ω, $t \in [0, T], T < \infty$; $\mathbf{f}$ и $\mathbf{\Phi}$ – вектор-функции соответственно внешних сил и начальных данных; $0 < \mu$ – динамический коэффициент вязкости; Δ и ∇ – операторы Лапласа и Гамильтона соответственно. Пусть $\mathring{\mathbf{J}}(Q)$ – пространство соленоидальных векторов и $\mathbf{C}(\overline{Q})$– пространство непрерывных вектор-функций.

Входные данные $\mathbf{f}$ и $\mathbf{\Phi}$ задачи (1) удовлетворяют требованиям:

$$\textbf{i)}\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathring{\mathbf{J}}(Q); \quad \textbf{ii)}\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{J}}(\Omega).$$

Действуя операцией div векторному уравнению (1a) с учетом (1b), получим уравнение Пуассона, связывающее давление P с вектором скорости $\mathbf{U}$:

$$-\Delta P = div \mathbf{I}, \quad \text{где} \quad \mathbf{I} = \big(\mathbf{U}, \nabla\big)\mathbf{U}. \tag{2}$$

Далее будем пользоваться следующими общеизвестными утверждениями:

Пусть вектор-функция $\mathbf{I}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ непрерывна и имеют непрерывные производные первого порядка в Ω, тогда

$$div \mathbf{I} \in \mathbf{L}_p(\Omega), \quad p \geq 1 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3}$$

Известно [2], что решение уравнения Пуассона (2) состоит из суммы $P = P_1 + P_h$, где P_h– гармоническая в Ω функция, а функция $P_1(\mathbf{x})$ определяется с помощью объемного потенциала

$$P_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{div \mathbf{I}(\xi)}{r(\mathbf{x}, \xi)} d\xi, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \forall t \in [0, T], \tag{4}$$

и удовлетворяет внутри Ω уравнению (2).

Из ([3], стр.209, рис.11) отметим одно свойство объемного потенциала (4). Причем формулировку и доказательства приведем дословно (без рисунка), ввиду значимости этого факта для исследования задачи (1).

Lemma 1. *Если для плотности* $div\mathbf{I}$ *имеет место (3), то функция* $P_1(\mathbf{x})$, *определяемая формулой (4), гармонична в каждой из областей, дополнительных к* Ω.

Proof. Внутри области Ω существует конечное или счетное множество областей Ω_j, $j = 1, 2, \cdots$, дополнительных к Ω. Пусть Ω_j- одна из этих областей. Возьмем произвольную внутреннюю по отношению к Ω_j подобласть $\Omega_j^{'}$ и пусть $\mathbf{x} \in \Omega_j^{'}$. Тогда в интеграле (4) расстояние r ограничено снизу положительным числом δ равным наименьшему расстоянию между точками границ областей Ω_j и $\Omega_j^{'}$. Откуда следует, на основании известной теоремы[3] о свойствах интеграла типа потенциала, что $P_1(\mathbf{x}) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}_j^{'})$, так как $\Omega_j^{'}$ произвольная внутренняя подобласть Ω_j, то $P_1(\mathbf{x}) \in C^{\infty}(\Omega_j)$ и в частности,

$$\Delta P_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} div\mathbf{I}(\xi)\Delta_{\mathbf{x}}\Big\{\frac{1}{r(\mathbf{x},\xi)}\Big\}d\xi = 0, \quad \mathbf{x} \in \forall\Omega_j' \subset \Omega_j, \tag{5}$$

т. е. функция P_1 гармонична в области Ω_j. □

Откуда следует, что функция P также является гармонической в Ω_j, так как P_h- гармоническая в Ω функция.

Принцип максимума

Векторное уравнение (1a) перепишем в виде системы скалярных уравнений:

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} - \mu\Delta U_\alpha + (\mathbf{U}, \nabla U_\alpha) + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} = f_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,3} \tag{6}$$

Theorem 1. *Пусть* $\bar{\Omega}$ *замкнутая ограниченная область в* R_3 *с границей* $\partial\Omega$, *и* $\bar{Q} = ([0,T] \times \bar{\Omega})$ *- цилиндрическая область в пространстве переменных* $t, \mathbf{x}$. *Предположим, что функции* $\mathbf{U} \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q) \wedge P \in C^1(Q)$ *и удовлетворяют уравнениям (1a),(1b). Тогда, если при некотором* α' *функция* $f_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) \le 0$ $\big(f_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) \ge 0\big)$ *в* Q, *то функция* $U_{\alpha'}$ *принимает свой положительный максимум (отрицательный минимум) в цилиндре* $\bar{Q}$ *на нижнем основании* $\{0\} \times \bar{\Omega}$ *или на его боковой поверхности* $[0,T] \times \partial\Omega$, *т. е.*

$$U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) \le \max\Big\{\sup_{t=0 \bigwedge \mathbf{x}\in\bar{\Omega}} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}), \sup_{t\in[0,T] \bigwedge \mathbf{x}\in\partial\Omega} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x})\Big\}, \tag{7a}$$

$$U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) \ge \min\Big\{\inf_{t=0 \bigwedge \mathbf{x}\in\bar{\Omega}} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}), \inf_{t\in[0,T] \bigwedge \mathbf{x}\in\partial\Omega} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x})\Big\}, \ \alpha' \in \{1,2,3\}. \tag{7b}$$

Proof. Для этого воспользуемся известным приемом [4]. Предположим от противного, т. е. при некотором α' функция $U_{\alpha'}(t,\mathbf{x})$ достигает своего максимального значения в некоторой точке $M_0(t^0,\mathbf{x}^0)$ внутри области $Q = (0,T] \times \Omega$

$$U_{\alpha'}(M_0) > \max\Big\{\sup_{t=0 \bigwedge \mathbf{x}\in\bar{\Omega}} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}), \sup_{t\in[0,T] \bigwedge \mathbf{x}\in\partial\Omega} U_{\alpha'}(t,\mathbf{x})\Big\} = C \ge 0. \tag{8}$$

Обозначим $m = U_{\alpha'}(M_0) - C > 0$ и введем функцию $H_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) = U_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) + \frac{m}{2}(1 - \frac{t}{T})$. Отсюда при всех $(t,\mathbf{x})$ из $\partial\Omega \times [0,T]$ или $\{0\} \times \overline{\Omega}$ имеем $H_{\alpha'}(t_0,\mathbf{x}_0) \ge H_{\alpha'}(t,\mathbf{x}) + \frac{m}{2}$. То есть функция $H_{\alpha'}(t,\mathbf{x})$ также принимает свое максимальное значение в некоторой точке $M_1(t',\mathbf{x}') \in Q$, причем $H_{\alpha'}(M_1) \ge H_{\alpha'}(M_0) \ge m$. И пусть вместе с ним в момент времени t' функция $P(t,\mathbf{x})$ в какой-нибудь другой точке $\mathbf{x}^e$ области Ω достигает своего экстремального значения. Теперь построим внутреннюю область Ω_e, дополнительной к Ω так, чтобы точки $M_1(t',\mathbf{x}')$, $M(t',\mathbf{x}^e) \in \Omega_e$. Тогда при $\Omega_e = \Omega_j$, используя утверждение леммы 1, получим $\nabla P\big|_{\Omega_e} = 0$, так как функция $P(t,\mathbf{x}) = const$ в области Ω_e.

---

[3] Теорема 1.1.3, там же стр.15.

Теперь выпишем все необходимые условия максимума функции $H_{\alpha'}$ в точке M_1 :

$$\frac{\partial H_{\alpha'}}{\partial t} \geq 0; \quad \Delta H_{\alpha'} \leq 0; \quad \nabla H_{\alpha'} = 0; \quad \nabla P = 0. \tag{9}$$

Из уравнения (6), с учетом условий (9), найдем для точки M_1 цепь неравенств

$$\mathbb{L}H_{\alpha'}(M_1) \equiv \frac{\partial H_{\alpha'}}{\partial t} - \mu\Delta H_{\alpha'} + (\mathbf{H}, \nabla H_{\alpha'}) + \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha'}}(M_1) - f_{\alpha'} + \frac{m}{2T} \geq \frac{m}{2T} > 0.$$

Это означает, что неравенство (8) неверно. Следовательно, справедливо (7a). Теорема 1 доказана.□

Из теоремы 1, следуя [4], нетрудно получить доказательство следующего утверждения:

Corollary 1. *Если вектор-функций* $\mathbf{f}$, $\mathbf{\Phi}$ *удовлетворяют условиям* **i)** *и* **ii)***, то для решений* $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$ *задачи (1) справедлива оценка:*

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})} \leq \|\mathbf{\Phi}\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} + T\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})} \equiv A_1, \ \forall T < \infty, \tag{10}$$

где $\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})} = \max\limits_{1\leq\alpha\leq3} \sup\limits_{\bar{Q}} |U_\alpha(t, \mathbf{x})|$.

В работах ([5] и др.) автора на основе оценки (10) доказаны соответственно в пространствах

$$\mathbf{C}(0, T; \mathbf{C}(\Omega) \cap \mathbf{W}_2^1(\Omega)) \quad \text{и} \quad \mathbf{C}(0, T; \mathbf{C}(\Omega) \cap \mathbf{W}_{2,0}^{2,1}(Q))$$

единственность слабых и существование сильных решений задачи (1) в целом по времени $t \in [0, T]$, $\forall T < \infty$.

Литература

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. -Москва, Наука, 1970. 288с.

2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. -Москва, Из-во физ.-мат.лит., т.2, 1961. 431с.

3. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. -Москва, Высшая школа, 1977. 628с.

4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. -Москва, Наука, 1988. с.512.

5. *Akysh A. Sh.* The maximum principle of the Navier-Stokes equation //USA, 2012. arXiv.org: 1204.2668v [math-ph]. 16 page.

УДК 517.9+519.3

Л.А. Алексеева

Институт математики и математического моделирования МОН РК (Казахстан, Алматы), e-mail:alexeeva@math.kz

Обобщенные решения краевых задач теории упругости при сверхзвуковых транспортных нагрузках

В прямом методе граничных интегральных уравнений (ГИУ) решения краевых задач определяющим является построение граничных интегральных уравнений на основе аналога формулы Грина для решений эллиптических уравнений, который позволяет по граничным значениям искомой функции и ее нормальной производной определять значения искомой функции внутри области. Аналог этой формулы в статической теории упругости называется формулой Сомильяны. Она определяет перемещения в области, если известны граничные значения перемещений и нагрузки. На ее основе хорошо разработан метод решения статических краевых задач теории упругости [1].

Особенностью нестационарных краевых задач теории упругости является гиперболичность системы уравнений движения среды, что осложняет использование классических методов теории потенциала для построения ГИУ, т.к. фундаментальные решения таких уравнений сингулярны на волновых фронтах, их решения описываются ударными волнами, на фронтах которых решения недифференцируемы, скорости и напряжения терпят скачки. Для нестационарных краевых задач теории упругости аналог этой формулы и сингулярные граничные интегральные уравнения в исходном пространстве-времени, разрешающие плоские и пространственные начально-краевые задачи динамики упругих изотропных и анизотропных сред, получены рядом авторов [2-4].

Для транспортных краевых задач теории упругости МГИУ для дозвуковых транспортных нагрузок, который связан с решением краевых задач в движущейся системе координат для систем эллиптических уравнений в цилиндрических областях, разработан автором [5]. При сверхзвуковых скоростях транспортной нагрузки, превышающей скорость распространения продольных и поперечных волн в упругой среде, соответствующая краевая задача становится гиперболической, в среде появляются ударные волны, что требует разработки теории псевдодифференциальных операторов для ее решения. Наиболее удобным аппаратом для построения решений таких задач является метод обобщенных функций (МОФ), который обобщает метод В.С.Владимирова решения задач Коши для дифференциальных уравнений на краевые и начально-краевые задачи. Наиболее детально он изложен автором на примере классического волнового уравнения в пространствах различной размерности в статье [6].

Здесь рассмотрена транспортная краевая задача для изотропной упругой среды, ограниченной цилиндрической поверхностью произвольного поперечного сечения, в случае действия сверхзвуковых транспортных нагрузок. На основе МОФ, строится ее решение. Поставлена соответствующая краевая задача в пространстве обобщенных функций, получено ее обобщенное решение, проведена его регуляризация, построен динамический аналог формулы Сомильяны и сингулярные граничные уравнения, разрешающие краевую задачу. Основные определения и подробные доказательства изложены автором в работах [7-10].

Литература

1. *Перлин П.И.* Граничные интегральные уравнений в теории упругости - М: "Наука" .- 1977.-312 с.

2. *Угодчиков А.Г.,Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике дефортвердого тела -Казань.- 1986.-286 с.

3. *Айталиев Ш.М.,Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.М., Жанбырбаев Н.Б.* Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел- Алма-Ата: "Наука".-1992.-280с.

4. *Алексеева Л.А. Закирьянова Г.К.* Обобщенные решения начально-краевых задач для гиперболических систем второго порядка//Журнал вычислительной математики и математической физики. -2011.-Т.51.- №.7. - С.1280-1293.

5. *Алексеева Л.А.* Сингулярные граничные интегральные уравнения краевых задач эластодинамики в случае дозвуковых бегущих нагрузок //Дифференциальные уравнения.- Т. 46. -2010.-№4.-с.512-519

6. *Алексеева Л.А.* Обобщенные решения краевых задач для одного класса бегущих решений волнового уравнения // Математический журнал. -Т.8.- №2(28). -2008. -С.1-19.

7. *Алексеева Л.А.* Фундаментальные решения в упругом пространстве в случае бегущих нагрузок // Прикладная математика и механика.- 1991. -Т.55. -№5.- С.854-862.

8. *Алексеева Л.А.* Обобщенные решения уравнений Ламе в случае бегущих нагрузок. Ударные волны// Математический журнал.- 2009.- Т.9.- №1(31).- С.16-25.

9. *Алексеева Л.А.* Краевые задачи теории упругости при сверхзвуковых транспортных нагрузках. Единственность решений//Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2014. -№1. -С.150-158.

10. *Алексеева Л.А.* Обобщенные решения и сингулярные граничные интегральные уравнения первой краевой задачи теории упругости при сверхзвуковых транспортных нагрузках // Известия НАН РК. Серия физико-математическая.- 2015.-№3.-С.232-242.

А. Ашыралиев, А.М. Сарсенби
Кафедра начального математического образования, Университет Фатих, Стамбул, Турция; Кафедра прикладной математики, Международный Турецко-Туркменский университет, Ашхабат, Туркменистан
Институт Математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
aashyr@fatih.edu.tr, abzhahan@gmail.com

Об устойчивости уравнения гиперболического типа с инволюцией

Изучается смешанная задача для гиперболического уравнения с инволюцией

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = (a(x)u_x(t,x))_x + \beta(a(-x)u_x(t,-x))_x - \sigma u(t,x) + f(t,x), \\ -l < x < l, 0 < t < T, \\ u_x(t,-l) = 0, u_x(t,l) = 0, 0 \le t \le T, \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x), -l \le x \le l, \varphi_x(-l) = \varphi_x(l) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u(t,x)$ неизвестная функция, $\varphi(x), \psi(x), \alpha(x)$, и $f(t,x)$ достаточно гладкие функции, $a \ge a(x) = a(-x) \ge \delta > 0$, $\sigma > 0$ - достаточно большое число. Через $C([0,T], H)$ обозначим банахово пространство всех абстрактных непрерывных функций $\varphi(t)$, определенных на интервале $[0,T]$, со значениями в гильбертовом пространстве H. Норму элемента этого пространства определим равенством

$$\|\varphi\|_{C([0,T],H)} = \max_{0\le t\le T} |||\varphi(t)||_H$$

.

Определим дифференциальный оператор A^x с помощью дифференциального выражения

$A^x v(x) = -(a(x)v_x(x))_x - \beta(a(-x)v_x(-x))_x + \sigma v(x)$, (2)

с областью определения $D(A^x) = \{u, u_{xx} \in L_2[-l,l] : u_x(-l) = 0, u_x(l) = 0\}$. Задачу (1) можно переписать в следующей абстрактной форме, как абстрактную задачу Коши для гиперболического уравнения

$v''(t) + Av(t) = f(t)\ (0 \le t \le T), v(0) = \varphi, v'(0) = \psi$ (3) в гильбертовом пространстве H, с самосопряженным положительно определенным оператором $A = A^x$ (который определяется по формуле (2)). Здесь $f(t) = f(t,x)$ и $u(t) = u(t,x)$ соответственно известная и неизвестная функции, определенные на промежутке $(0,T)$, со значениями в пространстве $H = L_2[-l,l]$; $\varphi = \varphi(x), \psi = \psi(x)$ и $a = a(x)$ заданные гладкие функции из класса $H = L_2[-l,l]$. Основной результатом настоящей заметки является следующая теорема об оценке устойчивости решения задачи (1) в классе $C([0,T], L_2[-l,l])$. Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: $\delta - a|\beta| \ge 0$, $\varphi(x)$, $\varphi_{xx}(x) \in L_2[-l,l]$, $\psi(x), \psi_x(x) \in L_2[-l,l]$, а также $f(t,x) \in C^{(1)}([0,T], L_2[-l,l])$. Тогда для решения задачи (1) справедливы следующие оценки устойчивости решения

$$\max_{0\le t\le T} |||u(t,\cdot)||_{W_2^1[-l,l]} \le M\left[\max_{0\le t\le T} |||f(t,\cdot)||_{L_2[-l,l]} + \|\varphi\|_{W_2^1[-l,l]} + \|\psi\|_{L_2[-l,l]}\right],$$

$$\max_{0\le t\le T} |||u(t,\cdot)||_{W_2^1[-l,l]} + \max_{0\le t\le T} |||u_{tt}(t,\cdot)||_{L_2[-l,l]}$$
$$\le M\left[\max_{0\le t\le T} \|f_t(t,\cdot)\|_{L_2[-l,l]} + \|f(0,\cdot)\|_{L_2[-l,l]} + \|\varphi\|_{W_2^2[-l,l]} + \|\psi\|_{W_2^1[-l,l]}\right],$$

где константа M не зависит от функций $f(t,x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Теорема 1 базируется на абстрактном утверждении [1] о решении задачи (3). Теорема 2. Пусть $\delta - a|\beta| \ge 0$. Тогда оператор $A = A^x$, определенный по формуле (2), есть самосопряженный и положительно определенный оператор в пространстве $L_2[-l,l]$ со спектральным углом

$\varphi(A, H) = 0.$

Литература

1. *Ashyralyev, A. and Sobolevskii, P. E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations, Operator Theory Advances and Applications, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2004.

УДК 517.956.3

Ш. Билал, М.Т. Дженалиев

Институт математики и математического моделирования Министерства Образования и науки Республики Казахстан, Алматы
e-mail: bilal44@mail.ru, muvasharkhan@gmail.com

Неравенство типа Харди в матречном представлении

1. Введение. Как известно, свойства класса функций или класса последовательностей чисел можно получить из функциональных соотношений для их невозрастающих перестановок, которые являются, соответственно, монотонными функциями или последовательностями. Поэтому задача установления различных функциональных соотношений на конусе монотонных последовательностей чисел является актуальным направлением математического анализа, к которому относятся результаты настоящей работы.

Различные функциональные соотношения на конусе монотонных последовательностей чисел или монотонных функций, относящиеся к теме данной работы приведены в классической книге "Неравенства" Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.[1]. А последующие основные результаты можно найти в книге [2].

В 1990 г. Arino M. и Mucktnhoupt B. [3] рассмотрели весовые неравенства Харди

$$\Big(\int_0^x \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\Big)^q \cdot \omega(x)\,dx\Big)^{1/q} \le C\Big(\int_0^\infty f^p(x)\cdot v(x)\,dx\Big)^{1/p} \qquad (1)$$

на конусе неотрицательных и невозрастающих функций f и установили критерий выполнения неравенства (1) в случае $\omega(x) = v(x), \quad p = q$.

Развивались также исследования по обобщению и расширению в различных направлениях классического неравенства Харди для последовательности ([1], теорема 326)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{p\lambda}}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)^p \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k^p, \;\; a_i \ge 0.$$

Сравнительно последние результаты по данной тематике получены в работах Куфнер А., Ойнаров Р., Kalybay A.A.[4-6], и которые были продолжены в работах

Темирхановой А.[5], [9], [10], Таспаганбетовой Ж. [7], [9-10].Отметим, что в работах [12, 13] были установлены неравенства типа Харди для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля.

2. Постановка задачи. Пусть $1 \le p, q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $w = \{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$, - последовательности неотрицательных чисел, $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ - последовать положительных чисел.

Пусть $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ - произвольная последовательность действительных чисел. Символы $0 \le f, 0 \le f \downarrow$ соответственно означают, что последовательность f неотрицательная, неотрицательная и не возрастающая. Далее, пусть A матричный оператор вида

$$(Af)_i = \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j,\ i \ge 1,$$

с неотрицательной матрицей $(a_{i,j})$.

В работе рассматривается весовая аддитивная оценка вида

$$\|wAf\|_{l_q} \le C(\|uf\|_{l_p} + \|vF\|_{l_p}),\ f \ge 0, \tag{2}$$

когда $1 \le q \le \infty, p = \infty$. Здесь $F_i = \sum\limits_{j=1}^{i} f_j,\ i \ge 1$ и

$$\|uf\|_{l_p} = \sup_{i \ge 1} |u_i f_i|,\ p = \infty$$

Отметим, что оценки вида (2) при $1 \le q, p < \infty$, в различных предположениях относительно матрицы $(a_{i,j})$ хотя и рассматривались во многих работах, однако, случай $1 \le q \le \infty$, $p = \infty$ оставался не изученным.

Для установления оценки (2) при $p = \infty$, следуя работе [8], сначала найдем величину эквивалентную к величине

$$J(u, v, g) = \sup_{f \ge 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i g_i}{\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty}}, \tag{3}$$

где $0 \le g \downarrow$ которая позволит получить критерий выполнения оценки (2).

3. Двусторонняя оценка для $J(u, v, g)$

Для каждого $n \ge 1$ определим

$$\varphi_n = \left\{ \min_{1 \le k \le n} \left[\left(\sum_{i=k}^{n} u_i^{-1} \right)^{-1} + \sup_{i \ge k} v_i \right] \right\}^{-1},$$

и положим $\varphi_0 = 0$.

Теорема 1. Пусть $0 \le g \downarrow$ и v - ограниченная последовательность. Тогда

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} g_i(\varphi_i - \varphi_{i-1}) \le J(u, v, g) \le 2 \sum_{i=1}^{\infty} g_i(\varphi_i - \varphi_{i-1}). \tag{4}$$

Для того, чтобы доказать теорему 1 мы предварительно установили несколько лемм,хотя мы их здесь не рассматриваем в силу ограниченности объема.

Доказательство теоремы 1. Оценка снизу. Из установленного факта в упомянутых выше леммах

$$\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty} \le 2\sup_{i\ge k} f_i(\varphi_i - \varphi_{i-1})^{-1}.$$

и из принципа двойственности в $l_p,\ p \ge 1$ имеем

$$J(u,v,g) \ge \sup_{f\ge 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i g_i}{2\sup\limits_{j\ge 1} f_j(\varphi_j - \varphi_{j-1})^{-1}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} g_j(\varphi_j - \varphi_{j-1}). \tag{5}$$

Оценка сверху. Используя факты, установленные в указанных выше леммах

$$\sup_{k\ge 1} F_k \varphi_k^{-1} \le 2\Big(\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty}\Big),\ f \ge 0.$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i \le \sup_{j\ge 1}\Big(\sum_{i=1}^{j} w_i\Big)^{-1} F_j \sum_{k=1}^{\infty} g_k w_k.$$

имеем

$$J(u,v,g) \le \sup_{f\ge 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i g_i}{\sup\limits_{j\ge 1} F_j \varphi_j^{-1}} \le 2\sup_{f>0} \frac{\sup\limits_{j\ge 1} F_j\varphi_j^{-1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(\varphi_k - \varphi_{k-1})}{\sup\limits_{j\ge 1} F_j \varphi_j^{-1}} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\varphi_k - \varphi_{k-1}). \tag{6}$$

Из (5) и (6) имеем (4). Теорема доказана.

4. Основная весовая аддитивная оценка. Теорема 2. *Пусть* $1 \le g \le \infty, p = \infty$ *и* $\psi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1},\ i \ge 1$. *Пусть сопряженный матричный оператор* $(A^*g)_j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j} g_i$ *обладает свойствам* $0 \le A^*g \downarrow$ *для любого* $g \ge 0$. *Тогда неравенство (2) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B = \|wA\psi\|_q < \infty, \quad \textit{причем}\ \ \frac{1}{2}B \le C \le 2B, \tag{7}$$

где $C-$ *наилучшая константа в (2).*

Доказательство. Достаточно доказать соотношение (7). Используя принцип двойственности в l_p (4) имеем

$$C = \sup_{f\ge 0} \frac{\|wAf\|_{l_q}}{\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty}} = \sup_{f\ge 0}\sup_{g\ge 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i (Af)_i}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}(\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty})} =$$

$$= \sup_{g\ge 0}\sup_{f\ge 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j} f_j}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}(\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty})} =$$

$$= \sup_{g\ge 0}\sup_{f\ge 0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j} g_i}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}(\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty})} =$$

$$= \sup_{g \geq 0} \frac{1}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}} \sup_{f \geq 0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j (A^* g)_j}{\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty}}. \tag{8}$$

Используя левую часть соотношения (4), получим

$$C \geq \frac{1}{2} \sup_{g \geq 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} (A^* g)_j (\varphi_j - \varphi_{j-1})}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}} = \frac{1}{2} \sup_{g \geq 0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j} g_i (\varphi_j - \varphi_{j-1})}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{g \geq 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j} (\varphi_j - \varphi_{j-1})}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}} = \frac{1}{2} \sup_{g \geq 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i (A\psi)_i}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}} = \frac{1}{2} \|wA\psi\|_{l_q}. \tag{9}$$

Теперь, используя правую часть соотношения (4) из (8), как выше, получим $C \leq 2\|wA\psi\|_{l_q}$. Откуда и из (9) имеем (7). Теорема доказана.

Литература

1. Харди Г.Г., Литтельвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. Москва, 1948. ИЛ - 456 с.

2. Mitrinovic D.S., Pecaric I.E., Fink A.M. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 1991. – 579 p.

3. Arino M., Mucktnhoupt B. Maximal functions on dapsical Lorents spaces and Hardy's inequality with werghts for non-increasing function // Trans. Amer. Soc. 1990. – V.302, P. 727-735.

4. Kufner, A., Maligranda, L., Person, L.E.The Hardy Jneq uality. About its History and some Related Results. - Pilsen: Vydavatelsky Servis, 2007.

5. Oinarov, R. Temirkhanova, A.M. Boundedness of n-multiple discrete Hardy operators with weighted sequence spaces // J.Math/ Ineq. - 2008. -V.2, № 4. - P. 555-570.

6. Kalybay, A., A., Oinarov, R.Temirkhanova, A.M. Boundedness of n-multiple discrete Hardy operators with weighted for $1 < q < p < \infty$// J. Func. Spaces and Appl. - 2003. http://dx.doi.org/10.1155/2013/121767

7. Y. Taspaganbetova Zh. Two - sided estimates for matrix operators on the cone of monotone sequences // J. Math. Anal. - 2014. -V. 410. -p.82-93

8. Ойнаров Р. Дуальное неравенство к аддитивной оценке матричного оператора // Труды межд. конф. "Современное состояние и перспектива развития математики в рамках программы "Казахстан в третьем тысячилетии"", 2001. – С.111-115.

9. Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A. Boundedness and Compactness criteria of a certain class of matrix operators // Математический журнал. – 2011. – Т. 11, №2(40). – С. 73-85.

10. Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A. Criteria on boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of functional Analysis. – 2011. Т. 2, №1. – С. 114-127.

11. Oinarov R., Okroti C.A., Persson L-E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q < p$ // Math.Inequal.Appl. – 2007. №4. –P. 843-861.

12. Билал Ш. Об операторе Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. – 2012. Т.48. №3. – С.425-429.

13. Билал Ш. Интегро-дифференциальные свойства сингулярного оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. – 2014. Т.50. №2. – С.145-159.

УДК 530.1, 517.957, 517.958

К.Р. Есмаханова, Г.Т. Бекова, М.Т. Ильясова, Ж.Р. Мырзакулова
Евразийский Национальный Университет им. Л.Н.Гумилева
(Казахстан, Астана)
e-mail: kryesmakhanova@gmail.com

Преобразование Дарбу в виде представления детерминанта для (1+1)-мерного неоднородного нелинейного уравнения Шредингера

В этой работе, мы рассматриваем преобразование Дарбу в виде представления детерминанта для (1+1)-мерного неоднородного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) в виде [1]

$$iq_t + q_{xx} - 2q^2 r + \alpha^2 x^2 q + i\alpha q = 0, \tag{1}$$

$$ir_t - r_{xx} + 2r^2 q - \alpha^2 x^2 r + i\alpha r = 0 \tag{2}$$

где q и r являются комплексными функциями, α- константа.

Система уравнений (1)-(2) интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Пара Лакса, соответствующая НУШ имеет вид

$$\Psi_x = A\Psi = (-i\lambda\sigma_3 + A_0)\Psi, \tag{3}$$

$$\Psi_t = B\Psi = (\lambda^2 B_1 + \lambda B_2 + B_3)\Psi, \tag{4}$$

где A_0 и B могут быть заданы как

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = 2\lambda^2 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} i\alpha x & u \\ v & -i\alpha x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -iuv & iu_x - 2\alpha x u \\ -iv_x - 2\alpha x v & iuv \end{pmatrix},$$

где $\lambda = \lambda_0 e^{-2\alpha t}$ -неизоспектральный параметр, λ_0-комплексная постоянная, $u = qe^{\frac{-i\alpha x^2}{2}}$, $v = re^{\frac{i\alpha x^2}{2}}$.

Мы используем представление Лакса (3)-(4) для (1+1)-мерного неоднородного нелинейного уравнения Шредингера, кроме того рассматриваем преобразование Дарбу первого порядка для уравнений (1)-(2). Для этого преобразуем функцию Ψ следующим образом [2]-[3]

$$\Psi^{[1]}(\lambda, x, y, t) = T(\lambda, x, t)\Psi(\lambda, x, y, t). \tag{5}$$

где T- матрица Дарбу имеет вид

$$T(\lambda, x, y, t) = \lambda I - M(x, y, t), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

здесь M неизвестная матрица со следующими компонентами

$$M(x,t) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Новая функция $\Psi^{[1]}$ удовлетворяет следующей системе

$$\Psi^{[1]}_x = A^{[1]}\Psi^{[1]}, \tag{6}$$

$$\Psi^{[1]}_t = B^{[1]}\Psi^{[1]}. \tag{7}$$

Матричная функция T подчиняется следующим уравнениям:

$$T_x + TA = A^{[1]}T, \tag{8}$$

$$T_t + TB = B^{[1]}T. \tag{9}$$

Из уравнений (8)-(9) после упрощений и сравнения коэффициентов при λ^i, получаем

$$u^{[1]} = u - 2im_{12}, \tag{10}$$

$$v^{[1]} = v + 2im_{21}, \tag{11}$$

Предположим, что

$$M = H\Lambda H^{-1}, \tag{12}$$

где матрицы H, Λ являются

$$H = \begin{pmatrix} \Psi_1(\lambda_1, x, y, t) & \Psi_1(\lambda_2, x, y, t) \\ \Psi_2(\lambda_1, x, y, t) & \Psi_2(\lambda_2, x, y, t) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь перепишем преобразование Дарбу первого порядка в виде представления детерминанта для (1+1)-мерного неоднородного НУШ

$$T_1(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda I - M = \lambda I + t_0^{[1]} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{pmatrix} (\mathbb{T}_1)_{11} & (\mathbb{T}_1)_{12} \\ (\mathbb{T}_1)_{21} & (\mathbb{T}_1)_{22} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$t_0^{[1]} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{1,1} \\ \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{1,2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \Psi_{1,1} & \lambda_1\Psi_{1,1} \\ \Psi_{1,2} & \lambda_2\Psi_{1,2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{2,1} \\ \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{2,2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \Psi_{1,1} & \lambda_1\Psi_{2,1} \\ \Psi_{1,2} & \lambda_2\Psi_{2,2} \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \Psi_{1,1} & \Psi_{1,2} \\ \Psi_{2,1} & \Psi_{2,2} \end{vmatrix},$$

$$(T_1)_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ \Psi_{1,1} & \Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{1,1} \\ \Psi_{1,2} & \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{1,2} \end{vmatrix}, \quad (T_1)_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \Psi_{1,1} & \Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{1,1} \\ \Psi_{1,2} & \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{1,2} \end{vmatrix},$$

$$(T_1)_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Psi_{1,1} & \Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{2,1} \\ \Psi_{1,2} & \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{2,2} \end{vmatrix}, \quad (T_1)_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \Psi_{1,1} & \Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{2,1} \\ \Psi_{1,2} & \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{2,2} \end{vmatrix},$$

теперь

$$u^{[1]} = u - 2i\frac{(T_1)_{12}}{\Delta_1}, \tag{14}$$

$$v^{[1]} = v + 2i\frac{(T_1)_{21}}{\Delta_1}, \tag{15}$$

тогда, получим решения неоднородного НУШ (1)-(2) в виде

$$q^{[1]} = q - 2i\frac{(T_1)_{12}}{\Delta_1}e^{\frac{i\alpha x^2}{2}}, \tag{16}$$

$$r^{[1]} = r + 2i\frac{(T_1)_{21}}{\Delta_1}e^{\frac{-i\alpha x^2}{2}}. \tag{17}$$

В результате получаем решение уравнения (1)-(2) в виде (16)-(17), на основе построенною нами преобразование Дарбу первого порядка для (1+1)-мерного неоднородного нелинейного уравнения Шредингера.

Литература

1. *Tao Yang-Sheng, He Jing-Song, Porsezian K.* Deformed soliton, breather, and rogue wave solutions of an inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation. // Chin. Phys. B. - 2013. - V.22, No 7. 074210. (In English).

2. *Есмаханова К.Р., Мырзакулова Ж.Р., Тапеева С.К., Тунгышбаева Д.И.* Односолитонные решения для (1+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера и Максвелла-Блоха // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия естеств.-тех. наук - 2015. No 4 (107). -pp. 41–46. (In Russian).

3. *Kemelbekova G.M., Esmakhanova K.R., Sapeeva S.K., Tungyshbaeva D.I. and Myrzakulov R.* Darboux transformation and one-soliton of the (2+1)-dimensional modified Kortewege-de Vries equation // Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. Серия естеств.-тех. наук - 2015. No 4 (107). -pp. 86–93. (In English).

УДК 539.3

Г.К. Закирьянова

Институт математики и математического моделирования МОН РК,

(Казахстан, Алматы)

e-mail: zakir@math.kz

Импульсные источники в анизотропной среде

Исследование процессов распространения волн в сплошных средах под действием различных сил, в том числе при действии сосредоточенных импульсных источников возмущений, относится к актуальным проблемам механики и математической физики и связано с построением решений краевых задач для систем уравнений гиперболического типа. Решения таких уравнений могут иметь характеристические поверхности, на которых сами решения, либо их производные терпят разрыв [1]. В физических процессах они описывают ударные волны, на фронтах которых исследуемые характеристики процесса могут иметь скачки. Для учета реальных свойств среды в работе рассматривается анизотропная модель, которая по своим характеристикам наиболее близка к реальным средам, в частности, горным породам.

1. *Уравнения движения анизотропной упругой среды* описываются системой гиперболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t)u_j(x,t) + G_i(x,t) = 0, \tag{1}$$

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t) = C_{ij}^{ml}\partial_m\partial_l - \rho\delta_{ij}\partial_t^2, \quad i,j,m,l = \overline{1,N} \tag{2}$$

$$C_{ij}^{ml} = C_{ij}^{lm} = C_{ji}^{ml} = C_{ml}^{ij}, \tag{3}$$

где $\partial_x = (\partial_1, ..., \partial_N) = (\partial x_1, ..., \partial x_N)$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_t = \partial/\partial_t$, δ_{ij} - символ Кронеккера, ρ - плотность среды, G_i - массовые силы, u_i - компоненты вектора перемещений в момент времени t в точке $x = (x_1, ..., x_N)$ (в физических задачах $N = 2, 3$),

C_{ij}^{ml} - матрица упругих констант, обладающая свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов (3) и удовлетворяющих условию строгой гиперболичности $W(n,v) = C_{ij}^{ml} n_m n_l v^i v^j > 0 \, \forall n \neq 0, \, v \neq 0$. Здесь и далее в произведении по одноименным индексам проводится суммирование в указанных выше пределах их изменения (подобно тензорной свертке). В силу положительной определенности W характеристическое уравнение системы (1) $det\{C_{ij}^{ml} n_m n_l - \rho c^2 \delta_{ij}\} = 0$ имеет $2N$ (с учетом кратности) действительных корней: $c = \pm c_k(n) : 0 < c_k < c_{k+1}, k = \overline{1, N-1}$, имеющих смысл фазовых скоростей при гармоническом анализе системы (1) и в общем случае зависящих от направления распространения волны.

2. Для построения *тензора Грина* - матрицы фундаментальных решений системы (1) при $G_i = \delta_{ik}\delta(x)\delta(t)$, удовлетворяющей условиям излучения, используется интегральное преобразование Фурье. Последнее приводит уравнения (1) к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$L_{ij}(i\xi, i\omega)\overline{U}_{jk}(\xi, \omega) + \delta_{ik} = 0$$

где $(\xi, \omega) = (\xi_1, ..., \xi_N, \omega)$ - параметры преобразования Фурье, соответствующие переменным (x, t). Разрешая эту систему, получим трансформанту матрицы Грина, которая, в силу однородности дифференциальных полиномов, имеет вид

$$\overline{U}_j^k(i\xi, i\omega) = Q_{jk}(\xi, \omega) Q^{-1}(\xi, \omega) = 0$$

здесь $Q_{jk}(\cdot)$ -алгебраические дополнения элемента с индексом (k, j) матрицы $\{L(i\xi, i\omega)\}$, $Q(\cdot)$ -символ оператора L (2): $Q(i\xi, i\omega) = (-1)^M det\{L_{ij}(\xi, \omega)\}$ Для строго гиперболических систем уравнений второго порядка в $N+1$ - мерном пространстве матрица Грина построена в [2].

В силу соотношений симметрии (3) константы C_{ij}^{ml} удобно представить в виде квадратной матрицы $C_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \overline{1,6}$). Соответствие между парами индексов (ij), (m, l) и индексами α, β устанавливается по схеме $(1,1) \leftrightarrow 1$, $(2,2) \leftrightarrow 2$, $(3,3) \leftrightarrow 3$, $(2,3) = (3,2) \leftrightarrow 4$, $(3,1) = (1,3) \leftrightarrow 5$, $(1,2) = (2,1) \leftrightarrow 6$. Тогда для случая $N = 2$ тензор Грина представляет собой сумму вычетов дробно-рациональных функций [3,4]:

$$U_j^k(x,t) = \frac{1}{\pi t} Im \sum_{q=1}^{2} \frac{Q_{jk}(\zeta_q, 1, (x_1\zeta_q + x_2)/t)}{Q_{,\zeta}(\zeta_q, 1, (x_1\zeta_q + x_2)/t)},$$

где $Q_{jj}(\centerdot) = -L_{kk}(\centerdot)$ в (2), $Q_{jk}(\centerdot) = L_{jk}(\centerdot)$ $j \neq k$, ζ_q - корни уравнения

$$Q(\zeta, 1, x_1\zeta + x_2) = Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2 = 0$$

Исследование процесса распространения нестационарных волн в анизотропных средах показывает, что напряженно-деформированное состояние среды существенно зависит от степени ее анизотропии. В средах со слабой анизотропией упругих свойств картина распространения волн подобна картине распространения волн в изотропной среде, но фронты волн, представляющие замкнуты гладкие кривые, несколько отличаются от концентрических окружностей. В средах с сильной анизотропией упругих свойств возникают лакуны - подвижные невозмущенные области, ограниченные волновыми фронтами и расширяющиеся с течением времени. Для таких сред фронт волны резко отличается от классического, имеет сложную негладкую форму. Факт существования лакун для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами, к которым относятся уравнения движения анизотропной упругой среды, был обнаружен еще И.Г.

Петровским [5]. Им даны необходимые и достаточные условия существования лакун-компонент дополнения к поверхности волнового фронта, в которых фундаментальные решения обращаются в нуль (сильные лакуны). Координаты таких областей удовлетворяют условиям $Im\zeta_q(x_1, x_2, t) = 0$, $q = 1, 2$. Это явление связано с волноводными свойствами сильно анизотропной среды, которые резко выражены в направлениях с преобладающей жесткостью и ослаблены в тех, где жесткость мала.

3. *Обобщенные решения уравнений движения анизотропных упругих сред при действии импульсных источников.* Исследование процессов распространения волн от очагов землетрясений связано с изучением напряженно-деформированного состояния среды при действии распределенных массовых сил $G_k(x,t)$. Для регулярных $G_k(x,t)$ компоненты поля перемещений есть следующие интегральные представления:

$$u_j(x,t) = \int_0^\infty d\tau \int_{R^3} U_{jk}(x-y, t-\tau) G_k(y,\tau) dV(y)$$

Для удаленного очага землетрясения, расстояние до которого существенно превышает его размеры, используются модели сосредоточенных источников в виде сингулярных обобщенных функций с точечным носителем (поль, диполь, мультиполь и др.) [6]. Поле перемещений при этом имеет вид свертки $U_{jk}(x,t)$ с соответствующей $G_k(x,t)$: $u_j(x,t) = U_j^k(x,t) * G_k(x,t)$, которую следует брать по правилам определения свертки в теории обобщенных функций. В [7] представлены картины волновых фронтов при действии сосредоточенной импульсной силы для ортотропных сред и показано, что в отличие от слабоанизотропного арагонита для топаза и калия-пентабората, являющихся сильно анизотропными средами, имеет место наличие лакун. И расположение лакун различно: для топаза - на обеих осях ортотропии, для калия-пентабората - между осями ортотропии. Приведены результаты расчетов тензора Грина для рассматриваемых сред при действии различных импульсных источников.

Полученные решения позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние рассматриваемых сред при действии произвольных нагрузок, распределенных как по времени, так и по пространству.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1981. - 512с.

2. *Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К.* Матрица Грина для строго гиперболических систем с производными второго порядка// Дифференциальные уравнения. - 2001.- Т.37, № 4.-С. 488-494

3. *Payton R.G.* Two-dimensional anisotropic elastic waves emanating from a point source // Proc. Camb. Phil. Soc. - 1971. - Vol.70.- P. 191 - 210.

4. *Закирьянова Г.К.* Граничные интегральные уравнения основных краевых нестационарных задач анизотропной среды // Изв. НАН РК. Сер. физ-мат. - 1993.- №5- Деп. в ВИНИТИ 2.04.93 N 1146 -В93.

5. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1961. - 400с.

6. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. -М.: Мир, 1978. - 518с.

7. *Закирьянова Г.К.* Динамика анизотропных сред при взрывных воздействиях // Материаловедение. - 2013.- №2- С.149-152.

УДК 517.958; 538.221

А. Мырзакул, Г. Турсумбаева
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева
(Казахстан, Астана)
e-mail: akbota_myrzakul@mail.ru

Об одной интегрируемой спиновой системе с потенциалом

Одним из важных частей нелинейных дифференциальных уравнений являются интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения, иное их название - солитоннные уравнения. Интегрируемые спиновые системы являются одним из основных секторов солитонных уравнений и играют ключевую роль в математической физике и геометрии кривых и поверхностей. С другой стороны, интегрируемая спиновая система играет важную роль в описании нелинейных явлений в ферромагнетиках.

В данной работе рассматривается новая спиновая система типа модели Гейзенберга (МГ) с потенциалом вида [1]-[2]:

$$iS_t + \epsilon_2 i[S_{xxx} + 6(\beta S)_x] + \frac{1}{\omega}[S, W] = 0, \tag{1a}$$

$$iW_x + \omega[S, W] = 0, \tag{1b}$$

где

$$S = S_i\sigma_i = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}, \quad W = W_i\sigma_i = \begin{pmatrix} W_3 & W^+ \\ W^- & -W_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь $S^{\pm} = S_1 \pm iS_2$, $W^{\pm} = W_1 \pm iW_2$, $[A, B] = AB - BA$, σ_i являются матрицами Паули.

МГ с потенциалом (1) интегрируется методом обратной задачи рассеяния через пару Лакса

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{2a}$$

$$\Phi_t = V\Phi, \tag{2b}$$

где

$$U = -i\lambda S,$$

$$V = \lambda^3 V_3 + \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \frac{i}{\lambda + \omega} V_{-1} - \frac{i}{\omega} V_{-1}.$$

Здесь

$$V_3 = -4i\epsilon_2 S,$$

$$V_2 = 2\epsilon_2 S S_x,$$

$$V_1 = \epsilon_2 i(S_{xx} + 6\beta S),$$

$$V_{-1} = W = \begin{pmatrix} W_3 & W^+ \\ W^- & -W_3 \end{pmatrix}$$

Методом калибровочного проебразования, из пары Лакса МГ с потенциалом, нами получена новая пара Лакса, условие совместности которой дает нелинейное эволюционное уравнение. Им оказалось уравнение Хироты-Максвелла-Блоха (ХМБ)(см. [3]-[4]):

$$iq_t + i\epsilon_2(q_{xxx} + 6rqq_x) - 2ip = 0, \tag{3a}$$

$$ir_t + i\epsilon_2(r_{xxx} + 6rqr_x) - 2ik = 0, \tag{3b}$$

$$p_x - 2i\omega p - 2\eta q = 0, \tag{3c}$$

$$k_x + 2i\omega k - 2\eta r = 0, \tag{3d}$$

$$\eta_x + rp + kq = 0. \tag{3e}$$

Пара Лакса уравнения ХМБ (3) имеет вид

$$\Psi_x = A\Psi,$$

$$\Psi_t = [-4i\epsilon_2\lambda^3\sigma_3 + B]\Psi,$$

где

$$A = -i\lambda\sigma_3 + A_0,$$

$$B = \lambda^2 B_2 + \lambda B_1 + B_0 + \frac{i}{\lambda+\omega}B_{-1}.$$

Здесь

$$B_2 = 4\epsilon_2 A_0,$$

$$B_1 = 2i\epsilon_2 rq\sigma_3 + 2i\epsilon_2\sigma_3 A_{0x},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \epsilon_2(r_x q - rq_x)\sigma_3 + B_{01},$$

$$B_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_2 q_{xx} - 2\epsilon_2 rq^2 \\ \epsilon_2 r_{xx} + 2\epsilon_2 qr^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} \eta & -p \\ -k & -\eta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нами установлена калибровочная эквивалентность между МГ с потенциалом и уравнением ХМБ, что расширяет возможность разностроннего исслtдjвания рассматриваемой в данной работе спиновой системы.

References

1. *Myrzakulov R., Mamyrbekova G.K., Nugmanova G.N. and et al.* Integrable Motion of Curves in Self-Consistent Potentials: Relation to Spin Systems and Soliton Equations // Physics Letters A.-2014. -V.378, N30-31, -pp.2118-2123.

2. *Nugmanova G., Zhunussova Zh., Yesmakhanova K., Mamyrbekova G., Myrzakulov R.* Integrable Heisenberg Ferromagnet Equations with Self-Consistent Potentials // International Journal of Mathematical, Computa-tional, Statistical, Natural and Physical Engineering. -2015. -V.9, N8, -pp.328-331.

3. *Chuanzhong Li, Jingsong He, Porsezian K.* Rogue waves of the Hirota and the Maxwell-Bloch equations // [arXiv:1205.1191].

4. *Chuanzhong Li, Jingsong He.* Darboux transformation and positons of the inhomogeneous Hirota and the Maxwell-Bloch equations // [arXiv:1210.2501].

УДК 517.958; 538.221

Г. Нугманова, А. Мырзакул, Р. Аканова
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
(Казахстан, Астана)
e-mail: nugmanovagn@gmail.com

Преобразование Дарбу для обобщенной модели Гейзенберга

Среди нелинейных эволюционных уравнений особый интерес представляет интегрируемые, так как только в этом случае можно провести подробные и детальные теоретические исследования, используя методы теории солитонов. Интегрируемые модели Гейзенберга (МГ) являются удобной моделью для изучения нелинейных явлений в ферромагнетиках. В работе рассматривается уравнение Мырзакулова-I (M-I)

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xy}] + iuS_x = 0, \tag{1a}$$

$$u_x - \frac{i}{4}tr(S[S_x, S_y]) = 0, \tag{1b}$$

котрое является одним их $(2+1)$-мерных обобщений МГ и имеет богатую внутреннюю структуру. Здесь S - спиновая матрица вида $S = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}$, и $S^2 = I$, $S^{\pm} = S_1 \pm iS_2$; u - потенциал; $[,]$ - коммутатор: $[A, B] = AB - BA$; * - комплексное сопряжение; $\times$ - векторное произведение. Индексы x, y, t обозначают частные производные по соответствующим параметрам.

Пара Лакса уравнения M-I имеет вид

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{2a}$$

$$\Phi_t = 2\lambda\Phi_y + V\Phi, \tag{2b}$$

где $U = -i\lambda S, \quad V = \frac{\lambda}{2}([S, S_y] + 2iuS)$.

Различные алгебро-геометрические свойства уравнения M-I со скалярным потенциалом и его интегрируемые редукции были изучены на основе теории солитонов и дифференциальной геометрии в работе [1]. В последнее время широко обсуждается проблема описания феномена разрушительных волн [2]. Такие волны представляют не только прикладной, но и теоретический интерес. В связи с этим, нахождение решения типа разрушительные волны для уравнения M-I является основной задачей, а преобразования Дарбу (ПД) - основным методом данного исследования.

Для построения ПД уравнения M-I (1) преобразуем собственную функцию Φ в (2) к виду

$$\Phi' = L\Phi, \tag{3}$$

где мы предположим, что $L = \lambda N - K$, здесь

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матричная функция Φ' удовлетворяет тому же представлению Лакса (2) как

$$\Phi'_x = U'\Phi', \tag{5a}$$

$$\Phi'_t = 2\lambda\Phi'_y + V'\Phi'. \tag{5b}$$

Из системы (5) получим, что матричная функция L удовлетворяет уравнениям

$$L_x + LU = U'L, \tag{6a}$$

$$L_t + LV = 2\lambda L_y + V'L. \tag{6b}$$

Пропустив детали, приведем полученную форму ПД для уравнения M-I (1). Оно имеет вид

$$S^{'} = S - iN_x = S - i\begin{pmatrix} n_{11x} & n_{12x} \\ -n^*_{12x} & n^*_{11x} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для построения различных решений уравнения M-I (1), мы должны найти явные выражения для n_{IJ}. Для этого предположим, что

$$N = H\Lambda^{-1}H^{-1}, \tag{8}$$

где

$$H = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_1; t, x, y) & \psi_1(\lambda_2; t, x, y) \\ \psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \psi_2(\lambda_2; t, x, y) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Здесь $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ и $det\ H \neq 0$, где λ_1 and λ_2 являются комплексными постоянными.

После некоторых вычислений мы приходим к формулам

$$\lambda_2 = \lambda_1^*, \quad H = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_1; t, x, y) & -\psi_2^*(\lambda_1; t, x, y) \\ \psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \psi_1^*(\lambda_1; t, x, y) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \psi_1^*(\lambda_1; t, x, y) & \psi_2^*(\lambda_1; t, x, y) \\ -\psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \psi_1(\lambda_1; t, x, y) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $\Delta = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$. Таким образом, для матрицы N получим

$$N = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1}|\psi_1|^2 + \lambda_2^{-1}|\psi_2|^2 & (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})\psi_1\psi_2^* \\ (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})\psi_1^*\psi_2 & \lambda_1^{-1}|\psi_2|^2 + \lambda_2^{-1}|\psi_1|^2) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Теперь мы готовы построить различные точные решения уравнения M-I, в зависимости от выбора решения соответствующей к нему линейной системы. К примеру, решение линейной системы ищем в виде

$$\Phi_1 = [i(2x - y - 1) - 2t]e^{-0,5it},$$

$$\Phi_2 = [2x - y + 1 + 2it]e^{0,5it}$$

Тогда из уравнения (12) получим решение уравнения M-I в виде

$$S_3 = -\frac{2(2x - y)}{(2x - y)^2 + 4t^2},$$

$$S^+ = \frac{(2x - y)^2 i - 4t^2 i + 4t(2x - y) - i}{2((2x - y)^2 + 4t^2)}.$$

Эти решения в пределах определенного диапазона ведут себя как разрушительные волны.

Литература

1. *Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G., Lakshmanan M.* A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures // Phys. Lett. A. -1997. -V.233, -pp. 391-396.

2. *Zhang Y., Nie X-J., Zha Q-L.* Rogue Wave Solutions for the Heisenberg Ferromagnet Equations // Chin. Phys. Lett. -2014. -V.31, N6, -pp.060201-060209.

UDC 517.968

М.И. Рамазанов, Н.Т. Орумбаева, А.К. Жанболова
Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова
(Казахстан, Караганды)
e-mail: ramamur@mail.ru, orumbayevan@mail.ru, zhanbolova.aigerim@mail.ru

О краевой задаче для уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой

В области $Q = \{(x,t), x > 0, t > 0\}$; $0 < \beta < 1$, рассмотрим краевую задачу

$$u_t - u_{xx} + \lambda \cdot \{{}_0D_x^{1+\beta} u(x,t)\}_{x=t} = f(x,t) \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0; u(0,t) = 0 \tag{2}$$

Здесь λ - комплексный параметр, ${}_0D_x^{1+\beta} u(x,t)$-дробная производная Римана-Лиувилля порядка $(1+\beta)$, $0 < \beta < 1$,
$t^{-1/2} e^{-t} \cdot [{}_0D_x^{1+\beta} u(x,t)]_{x=t} \in L_1(0,\infty)$,

$$e^{-t} \cdot \left[{}_0D_x^{1+\beta} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) \cdot f(\xi,\tau) d\xi d\tau\right]_{x=t} \in L_1(0,\infty) \tag{3}$$

$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\{\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}) - \exp(-\frac{(x+\xi)^2}{4t})\}$ - функция Грина. Считая временно известным нагруженное слагаемое - $[{}_0D_x^{1+\beta} u(x,t)]_{x=t}$, запишем решение задачи (1) - (2)

$$u(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) \left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \frac{u(\xi,\tau) d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{\xi=t} d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) \cdot f(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

учитывая, что справедливо равенство
$\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) d\xi = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$

получим следующее представление решения задачи (1) - (2):

$$u(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x \frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{\xi=t} d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

Введем обозначение

$$\mu(\tau) = \left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x \frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{x=t}, \quad (4)$$

тогда соотношение (3) запишется в виде:

$$u(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau + f_1(x,t). \quad (5)$$

Для нахождения неизвестной функции $\mu(t)$ произведем следующую процедуру: возьмём производную порядка $(1+\beta)$ по переменной x в обеих частях соотношения (5) и положим затем $x = t$, тогда с учётом обозначения (4) получим интегральное уравнение:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t). \quad (6)$$

$${}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a_1)_k\cdot(a_2)_k}{(b_1)_k\cdot(b_2)_k}\frac{z^k}{k!}.$$

Ядро уравнения (6) имеет вид:

$$K_{1+\beta}(t,\tau) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^\beta\sqrt{t-\tau}} +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(3-\beta)}\cdot\frac{t^{2-\beta}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot {}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Определим порядок особенности ядра интегрального уравнения (6) - $K_{1+\beta}(t,\tau)$ (при $\tau\to t$ и $t\to 0$). Очевидно, что если $\lim_{t\to 0}\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau) = 0$, то данное ядро имеет слабую особенность, в противном случае интегральное уравнение (5) будет особым интегральным уравнением Вольтерра, которое может иметь неединственное решение.

Нетрудно доказать, что

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0<\beta<\frac{1}{2}, \\ \frac{2}{\pi}, & \text{если } \beta=\frac{1}{2}, \\ \infty, & \text{если } \frac{1}{2}<\beta<1. \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть $0<\beta<\frac{1}{2}$, тогда $\forall\lambda\in C, \forall f(x,t)\in L_\infty(D)\cap C(D)$ граничная задача (1) - (2) имеет единственное решение $u(x,t)\in L_\infty(D)\cap C(D)$.

Раньше мы показали, что если дифференциальный порядок нагруженного слагаемого есть производная целого порядка на многообразии $x=t$, то единственность решения соответствующей задачи нарушалась, начиная со второго порядка (наличие сплошного спектра, количество собственных функций растет с возрастанием $|\lambda|$) [1], [2] - [5]. Теперь из соотношений (8) выясняется, что "нарушения", по всей видимости, начинаются "раньше" $\beta = \frac{1}{2}$, то есть когда нагруженное слагаемое есть производная порядка 3/2. Рассмотрим случай $\beta = \frac{1}{2}$. В этом случае интегральное уравнение (5) будет особым интегральным уравнением вида:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_{3/2}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t). \tag{9}$$

где

$$K_{3/2}(t,\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{t(t-\tau)}} + \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{t^{3/2}}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot_2 F_2\left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; -\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

В случае $\beta = \frac{1}{2}$ справедлива

Теорема 2. Для любой функции $g(t)$ $(e^{-t} \cdot g(t) \in L_1(0,+\infty))$, неоднородное интегральное уравнение $\mu(t) - \frac{\lambda}{\pi}\int_0^t k_h(t,\tau)\mu(\tau) = 0$ имеет решение $\mu(t)$ $(e^{-t} \cdot \mu(t) \in L_1(0,+\infty))$

Аналогично доказана справедливость следующих теорем.

Теорема 3. При $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $\forall\lambda \in C$, для сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра (6) в классе функций

$$t^{+(\beta+1/2)} \cdot exp\left[\frac{\lambda^2 \cdot b(\theta,\beta)}{(2\beta-1)\Gamma^2(1-\beta)}\right] \cdot \mu(t) \in M(0,\infty)$$

где $M(0,\infty)$ - класс ограниченных на $(0,\infty)$ функций

$$dimKer(K_{1+\beta}) = 1.$$

Таким образом,окончательно, для задачи (1)-(2) в случае $\frac{1}{2} < \beta < 1$ справедлива

Теорема 4. Краевая задача (1)-(2), при $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $\forall\lambda \in C$ в классе (3) является нетеровой с индексом равным 1.

Литература

1. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения - как возмущения дифференциальных уравнений. - Алматы: ГЫЛЫМ, 2010. - 334 с.

2. *Есбаев А.Н., Жанболова А.К., Петерс С.Н.* О первой краевой задаче для слабо-нагруженного параболического уравнения // Вестник КарГУ. серия Математика. - 2012. - № 4 (68). - С. 31-37.

3. *Akhmanova D.M., Kostakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E.* On the solutions of the homogeneous mutually conjugated Volterra integral equations // Вестник Карагандинского университета. Сер. Математика. 2013. - № 2 (70). - С. 153-158.

4. *Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М. И.* Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сибирский математический журнал, 2011. - Т. 52. - № 1. - С.3-14.

5. *Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М. И.* Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии загрузки в нуль или бесконечность // Дифференциальные уравнения. - 2011. - Vol. 47. - № 2. - С. 231-243.

УДК 517.946

А.М. Сыздыкова, У.А. Уалиханова, Г.Н. Шайхова
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті
(Қазақстан, Астана)
e-mail: syzdykova_am@mail.ru

Екі компонентті жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер теңдеуінің солитондық шешімдері

Кіріспе. Уақыт өзгеруі арқылы сипатталатын талшықтағы күштік тербеліс жиілігінің тербелісі ішіндегі қайнар көзі негізгі көздің ауысуымен шартталған потенциалды азаю эффектілерімен қатар, толқынның таралуының жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер тедеуі арқылы реттеледі. Соңғы жылдары жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер теңдеуі параметрлердің кейбір дербес жағдайлары үшін солитон типті таралуға да қолдануға болатындығы анықталынды және N-солитон үшін нақты шешім алынды [1,2]. Сызықты емес жұп Шредингер теңдеуін оң және сол поляризациялы екі өрісті толық бір өріс ретінде санай отырып, сызықты емес Шредингер теңдеуінен қорытып шығаруға болады. Осы жолмен сызықты емес жұп Шредингер теңдеуін алуға және Пенлеве талдауын қолдана отырып дербес интегралданатын жүйелерді көрсетуге болады. Бұл жұмыста келесі екі компонентті жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер тедеуін қарастырамыз

$$iu_z + c_1 u_{tt} + 2(\alpha|u|^2 + \beta|v|^2)u - i\epsilon[u_{ttt} + 6(|u|^2 + |v|^2)u_t +$$
$$+3(|u^2| + |v^2|)_t u] = 0, \tag{1}$$
$$iv_z + c_2 v_{tt} + 2(\beta|u|^2 + \gamma|v|^2)v - i\epsilon[v_{ttt} + 6(|u|^2 + |v|^2)v_t +$$
$$+3(|u^2| + |v|^2)_t v] = 0, \tag{2}$$

мұндағы u, v -комплексті функциялар және $\alpha, \beta, \gamma, c_1, c_2, \epsilon \in const.$ (1,2) теңдеулердің интегралдану шарттары [3] жұмыста ұсынылған. Берілген жұмыс [3] жұмыстың жалғасы болып саналады, яғни Хирота әдісімен екі компонентті жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер теңдеуі қарастырылады. Хирота әдісі интегралданатын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің көп солитондық шешім алудың тура әдісі болып табылады [4]. Бұл жерде біз екі компонентті жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер теңдеуінің бір солитондық шешімінің нақты түрін құрумен шектелеміз. Келесі бөлімде Шредингердің екі компонентті теңдеуі үшін Хирота әдісін қарастырамыз.

1. Бисызықты әдіс. Екі компонентті жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер теңдеуі интегралданылады және солитондық шешімге ие [3]. Теңдеу шешімінің нақты түрі Хирота әдісі арқылы алынуы мүмкін. Осы әдіс арқылы (1, 2) тедеулерді шешімін келесі түрде іздейміз

$$u = \frac{G}{F}, \tag{3}$$

$$u = \frac{H}{F}. \tag{4}$$

Мұндағы $G(z,t), H(z,t)$ - комплексті функциялар, $F(z,t)$ - нақты функция. (1,2) теңдеулерге (3,4) теңдеулерді қойып, алгебралық есептеулер жасап, бисызықты теңдеулер жүйесін аламыз

$$(iD_z + \frac{1}{2}D_t^2 - i\epsilon D_t^3)G \cdot F = 0, \quad (iD_z + \frac{1}{2}D_t^2 - i\epsilon D_t^3)H \cdot F = 0, \tag{5}$$

$$D_t^2 F \cdot F = 4(GG^* + HH^*), \tag{6}$$

$$D_t G \cdot G^* = 0, \quad D_t G \cdot H^* = 0, \quad D_t G^* \cdot H = 0,$$

$$D_t G \cdot H = 0, \quad D_t H \cdot H^* = 0. \tag{7}$$

Жоғарыда келтірілген бисызықты теңдеулер келесі интегралдану шарттарымен $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \beta = \gamma = 1$ құрылды [3].

2. Бір солитондық шешімдер. Бір солитондық шешім үшін G, H, F функцияларының жіктелуін келесі түрде аламыз:

$$G = \epsilon G_1, \quad H = \epsilon H_1, \quad F = 1 + \epsilon^2 F_2, \tag{9}$$

мұндағы $G_1 = ae^{\theta_{11}}$, $H_1 = be^{\theta_{12}}$. (9) жіктеулерді (5-7) теңдеулерге қойып, келесі жүйені аламыз

$$[iD_z + \frac{1}{2}D_t^2 - i\epsilon D_t^3](G_1 \cdot 1) = 0, \quad [iD_z + \frac{1}{2}D_t^2 - i\epsilon D_t^3](G_1 \cdot F_2) = 0, \tag{10}$$

$$[iD_z + \frac{1}{2}D_t^2 - i\epsilon D_t^3](H_1 \cdot 1) = 0, \quad [iD_z + \frac{1}{2}D_t^2 - i\epsilon D_t^3](H_1 \cdot F_2) = 0, \tag{11}$$

$$D_t^2(F_2 \cdot 1 + 1 \cdot F_2) = 4(G_1 G_1^* + H_1 H_1^*), \tag{12}$$

$$D_t(G_1 \cdot G_1^*) = 0, \quad D_t(G_1 \cdot H_1^*) = 0, \quad D_t(G_1^* \cdot H_1) = 0,$$

$$D_t(G_1 \cdot H_1) = 0, \quad D_t(H_1 \cdot H_1^*) = 0. \tag{13}$$

(10-13) теңдеулерден екі компонентті жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер тедеуінің бір солитондық шешімдері келесі түрге ие болады

$$u = \frac{ae^{\theta_{11}}}{1 + e^{\theta_{11} + \theta_{11}^* + k}},$$

мұнда

$$e^k = \frac{2(|a| + |b|)}{(k_1 + k_1^*)^2},$$

және

$$\upsilon = \frac{be^{\theta_{12}}}{1 + e^{\theta_{12} + \theta_{12}^* + r}},$$

мұнда

$$e^r = \frac{2(|a| + |b|)}{(k_1 + k_1^*)^2},$$

мұндағы $\theta_{11} = k_1 t + (\epsilon k_1^3 + \frac{ik_1^2}{2})z + \theta_{11}^{(0)}, \theta_{12} = k_1 t + (\epsilon k_1^3 + \frac{ik_1^2}{2})z + \theta_{12}^{(0)}, \theta_{11}, \theta_{12} \in const.$

3. Көп солитондық шешімдер. Сонымен қатар, осы әдістің көмегімен екі компонентті жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер тедеуі үшін көп солитондық шешімдерді де алуға болады. Екі солитондық шешім үшін G, H, F функциялары келесі түрде алынады

$$G = \epsilon G_1 + \epsilon^3 G_3,$$

$$H = \epsilon H_1 + \epsilon^3 H_3,$$

$$F = 1 + \epsilon^2 F_2 + \epsilon^4 F_4.$$

Үш солитондық шешім алу үшін G, H, F функциялары келесі түрде алынады

$$G = \epsilon G_1 + \epsilon^3 G_3 + \epsilon^5 G_5,$$

$$H = \epsilon H_1 + \epsilon^3 H_3 + \epsilon^5 H_5,$$
$$F = 1 + \epsilon^2 F_2 + \epsilon^4 F_4 + \epsilon^6 F_6.$$

Қорытынды. Бұл жұмыста екі компонентті жоғарғы ретті сызықты емес Шредингер теңдеуі қарастырылды. Хирота әдісінің көмегімен бисызықты теңдеулер жүйесі құрылды. Осы жұмыста біз интегралдау шарттарын ескере отырып, нақты түрде бір солитондық шешімдерді алдық. Жоғарыда көрсетілгендей көп солитондық шешімдердің нақты түрін алудың ең тиімді әдісі Хирота әдісі болып табылады.

Қолданылған әдебиеттер

1. Ablovic M., Sigur X. Solitons and the method of the inverse problem // Mir.1987 p.199-220.

2. Radhakrishnan R., Lakshmanan M. Inelastic Collision and Switching of Coupled Bright Solitons in Optical Fibers// arXiv:solv-int/ 9703008v2

3. Porsezian K. Bilinearization of Coupled Nonlinear Schrodinger Type Equations: Integrability and Solitons// Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 1998, V.5, N2, 126-131

4. Hietarinta J. Introduction to the Hirota bilinear method // arXiv:solv-int/ 970806v1

УДК 517.95

Б.Х. Турметов, С.Э. Мамурова
Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави
(Казахстан, Туркестан)
e-mail: turmetovbh@mail.ru, sevar_9393@mail.ru

Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Лапласа

Пусть $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$– единичный круг, $\mu > 0$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = arctg\frac{y}{x}$, $r\frac{\partial}{\partial r} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ и $\Gamma_\mu = r\frac{\partial}{\partial r} + \mu$.

Рассмотрим в области Ω следующую задачу:

Найти функцию $u(x,y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ удовлетворяющую условиям

$$\Delta u\,(r,\varphi) = 0, (r,\varphi) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\,(1,\varphi) - (-1)^k u\,(1,\varphi+\pi) = f\,(\varphi)\,, 0 \le \varphi \le \pi, \tag{2}$$

$$\Gamma_\mu u\,(1,\varphi) + (-1)^k \Gamma_\mu u\,(1,\varphi+\pi) = g\,(\varphi)\,, 0 \le \varphi \le \pi, \tag{3}$$

где $k = 1, 2$.

Очевидно, что необходимым условием существования решений задач (1)-(3) из класса $C^1(\bar{\Omega})$ являются выполнения условий согласования:

$$f(0) = (-1)^k f(\pi), f'(0) = (-1)^k f'(\pi), g(0) = -(-1)^k g(\pi). \tag{4}$$

Отметим, что задача (1)-(3) в случае $\mu = 0$ исследовались в работах [1,2], а в случае граничных операторов дробного порядка в [3,4].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\mu > 0, 0 < \lambda < 1$, $f \in C^{\lambda+1}[0,\pi], g \in C^{\lambda}[0,\pi]$ и выполняются условия согласования (4). Тогда решение задачи (1)-(3) существует, единственно и представляется в виде:

1) если $k = 1$, то

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{1-r^4}{1-2r^2cos2(\theta-\varphi)+r^4} f(\theta)d\theta +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left[\int\limits_0^1 \frac{t^\mu r(1-t^2r^2)cos(\theta-\varphi)}{1-2t^2r^2cos2(\theta-\varphi)+t^4r^4}dt\right] g(\theta)d\theta,$$

2) если $k = 2$, то

$$u(r,\varphi) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{r(1-r^2)\cos(\theta-\varphi)}{1-2r^2\cos 2(\theta-\varphi)+r^4} f(\theta)d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \left[\int\limits_0^1 \frac{t^{\mu-1}(1-t^4r^4)}{1-2t^2r^2\cos 2(\theta-\varphi)+t^4r^4}dt\right] g(\theta)d\theta.$$

Литература

1. *Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh.* On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in ball // Eurasian Mathematical Journal. -2012.-V.3,№ 1,-P.143–146.

2. *Садыбеков М.А., Турметов Б.Х.* Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге // Дифференциальные уравнения. -2014.-Т.50,№ 2.- С. 264–268.

3. *Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T.* Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball // Electronic Journal of Differential Equations. -2014.-V.2014, № 157. - P. 1-14.

4. *Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Muratbekova M.A.* On solvability of some nonlocal boundary value problems with the Hadamard boundary operator // AIP Conference Proceedings. -2014.-V.1611.-P.266–270.

УДК 517.968.72

Е.М. Хайруллин
Казахский национальный технический университет имени К.И. Сатпаева
(Казахстан, Алматы)
e-mail: khairullin_42_42@mail.ru

Об одном подходе к решению граничной задачи для параболического интегро-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом

1. ***Постановка задачи.***

Требуется найти решение $U(x,t) \in C^{m_i,[\frac{m_i}{2}]}_{x,t}(Q_T)$ для параболического интегро-дифференциального уравнения (ПИДУ)

$$(D_t - a^2(x_n)\Delta)U(x,t) = \lambda(x_n)\int_0^t \Delta U(x,\tau)d\tau + f(x,t), \tag{1}$$

в области $Q_T \equiv \{(x,t) = (x', x_n, t) : x' \in R^{n-1}, x_n \in]-l, l[, t > 0\}$, удовлетворяющее начальному условию

$$U(x,t)|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

граничным условиям

$$L_{m_i}(D_x)U(x,t)|_{\Gamma_i} = \varphi_i(x',t), (x',t) \in Q_T^{(1)} = (Q_T/x_n) \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} U(x,t)|_{\Gamma_3} &= U(x,t)|_{\Gamma_4}, \\ h_1 D_{x_n} U(x,t)|_{\Gamma_3} &= h_2 D_{x_n} U(x,t)|_{\Gamma_4}, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$L_{m_i}(D_x) = \sum_{k_n=0}^{m_i} C^{(i)}_{m_i-k_n}(D_{x'})D^{k_n}_{x_n}, C^{(i)}_{m_i-k_n}(D_{x'}) = \sum_{|k'|=m_i-k_n} C^{(i)}_{k',k_n} D^{k'}_{x'}, (i = 1,2),$$

$$a^2(x_n), \lambda(x_n) = \left\{ \begin{array}{ll} a_1^2, \lambda_1 & \text{при } -l < x_n < 0; \\ a_2^2, \lambda_2 & \text{при } 0 < x_n < l; \end{array} \right. \quad \Gamma_i = \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_1 = x_n = -l & \text{при } i = 1; \\ \Gamma_2 = x_n = l & \text{при } i = 2; \\ \Gamma_3 = x_n = -0 & \text{при } i = 3; \\ \Gamma_4 = x_n = +0 & \text{при } i = 4; \end{array} \right.$$

R^{n-1} – $(n-1)$-мерное евклидово пространство точек $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ с нормой $|x'| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2}$; $k' = (k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$ – мультиндекс с неотрицательными координатами, $|k'| = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$; $D^{k'}_{x'} = D^{k_1}_{x_1} D^{k_2}_{x_2} \ldots D^{k_{n-1}}_{x_{n-1}}$, $D^{k_i}_{x_i} = \frac{\partial^{k_i}}{\partial^{k_i}_{x_i}}$ $(i = \overline{1, n-1})$, Δ – оператор Лапласа; $C^{(i)}_{k',k_n}, \eta_i, \lambda_i$ – заданные постоянные, причем $C^{(i)}_{0,0} \ldots, m_i \neq 0, \eta_i > 0$; $(i = 1,2)$;

2. ***Интегральное представление решения краевой задачи.***

Решение задачи (1) – (4) будем искать при $-l < x_n < 0$ в следующем виде:

$$U(x,t) = -\psi_1 * D_{x^n} G_0^{(1)}[x', l - x_n, t] + \psi_3 * G_0^{(1)}[x', x_n, t] + f * G^{(1)}[x,t], \tag{5}$$

а при $0 < x_n < l$ в виде:

$$U(x,t) = -\psi_2 * D_{x^n} G_0^{(2)}[x', l - x_n, t] + \psi_4 * D_{x_n} G_0^{(2)}[x', x_n, t] + f * G^{(2)}[x,t], \tag{6}$$

где

$$\psi * G[x', x_n, t] = \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi(\xi', \tau)[2a_j\sqrt{\pi(t-\tau)}]^{-n}\times$$
$$\times 2a_j^2 exp[-(|x'-\xi'|^2 + x_n^2)(4a_j^2(t-\tau))^{-1}]d\xi';$$

$G^{(i)}(x,t)$ – резольвента задачи Коши ПИДУ (1):

$$G^{(i)}(x,t) = G_0^{(i)}(x,t) + \lambda_i G^{(i)}(x,t),$$

а в свою очередь $G_0^{(i)}(x,t)$ фундаментальное решение уравнения теплопроводности;

$G^{(i)}(x-\xi, t-\tau)$ определяется в следующем виде:

$$G^{(i)}(x-\xi, t-\tau) = \int_\tau^t ds \int_{R^n} G_0^{(i)}(x-y, t-s)\Gamma_i(y-\xi, s-\tau)dy,$$

причем $\Gamma_i(y-\xi, s-\tau)$ – резвольвента интегрального уравнения Вольтерра-Фредгольма второго рода [2]; $\psi_i(x',t), (i=\overline{1,4})$ неизвестные функции;

3. ***Сведение задачи*** (1) — (4) ***к системе интегральных уравнений (СИДУ)***

Непосредственной проверкой можно показать, что функция $U(x,t)$, определяемая формулами (5) и (6) удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2).

Надо выбрать функции $\psi_i(x',t), (i=\overline{1,4})$ так, чтобы функция $U(x,t)$, определяемая формулами (5) и (6), удовлетворяла граничным условиям (3) и условиям сопряжения (4). Для этого функцию $U(x,t)$ подставляя в (3) и (4), получим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\psi_j(x',t) + \sum_{\alpha=1}^{m_j}(-1)^{\alpha j}(a_j)^\alpha C_\alpha^{(j)}(D_{x'})\psi_j * \frac{t^{\alpha/2-1}}{\Gamma(\alpha/2)} g_0^{(j)}[x',t] +$$
$$+\psi_{2+j} * H_j[x',t] = \varphi_j^*(x',t), \tag{7}$$

$$\psi_{2+j} = (-\frac{k_2}{a_2^2 k_1})^{2-j}\mathcal{F}_2^{2-j}\psi_{4-(j-1)} * G_0^{2-(j)-1}[x',t] +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\psi_\alpha * H_{j\alpha}[x',t] + \psi_{2+j}^{**}(x',t), (j=1,2), \tag{8}$$

где $\mathcal{F}_2 \equiv D_t - a^2\Delta_{x'}, \mathcal{F}_2^0 \equiv E$ – единичный оператор;

$$g_0^{(j)}(x',t) = (2a_j\sqrt{\pi(t-\tau)})^{-(n-1)} exp[-|x'|^2(a_j^2 t)^{-1}],$$

$H_j(x',t)$ и $H_{j\alpha}(x',t)$ – регулярные операторы, имеющие следующие оценки:

$$|H_j(x',t)| \le M_1\sqrt{t-\tau}^{-n} exp[-(c_1^2 + |x'|^2)(t)^{-1}],$$

$$|H_{j\alpha}(x',t)| \le M_2\sqrt{t-\tau}^{-n} exp[-(c_2^2 + |x'|^2)(t)^{-1}],$$

где $M_j, C_j (j=1,2)$ положительные постоянные;

а $\varphi_j^*(x',t)$ – интегральные операторы от заданной функции $\varphi_j(x',t), f(x,t)$ и $\varphi_{2+j}^*(x',t)$ — интегральные операторы от заданной функции $f(x,t)$.

Теперь для решения U системы (7) и (8) сначала рассматривается СИДУ(8) относительно неизвестной функции $\psi_{2+j}(x',t),(j = 1,2)$ и пользуясь результатами работы [3] находится решение в явном виде:

$$\psi_{2+j}(x',t) = \varphi^*_{2+j}(x',t) + \sum_{\alpha=1}^{2} \psi_\alpha * \Gamma_{j\alpha}[x',t], \tag{9}$$

где ядра $\Gamma_{j\alpha}(x',t)$ имеет следующие оценки:

$$|\Gamma_{j\alpha}(x',t)| \leq M_3(\sqrt{t-\tau})^{-n} exp[-(c^2+|x'|^2)(4a_j^2 t)^{-1}], (M_3, c > 0).$$

Подставляя, теперь, найденные функции $\psi_{2+j}(x',t)$ определяемые в виде (9) в (7), получим СИДУ:

$$\psi_j(x',t) + \sum_{\alpha=1}^{m_j} (-1)^{\alpha j}(a_j)^\alpha C_\alpha^{(j)}(D_{x'})\psi_j * \frac{t^{\alpha/2-1}}{\Gamma(\alpha/2)} g_0^{(j)}[x',t] +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \psi_\alpha * H_{j\alpha}[x',t] = \varphi_j^*(x',t), (j=1,2) \tag{10}$$

Решение характеристической части системы (10) можно найти методом интегральных преобразований Фурье-Лапласа как в работе [1], если корни $q_{jk}(\sigma'$) характеристического уравнения

$$\sum_{\alpha=0}^{m_i} b_\alpha^{(j)}(\sigma') z^{m_j - \alpha} = 0$$

удовлетворяют неравенству

$$Re[q_{jk}^2(\sigma')] > -1 \tag{11}$$

Итак, получена система интегральных уравнений

$$\psi_j(x',t) + \sum_{\alpha=1}^{4} \psi_\alpha * K_{j\alpha}[x',t] = \Phi_j(x',t), (j = \overline{1,4}), \tag{12}$$

где ядра $K_{j\alpha}(x',t)$ имеют следующие оценки:

$$|K_{j\alpha}(x',t)| \leq M_4 \sqrt{t}^{-n} exp[-\delta^2|x'|^2(t)^{-1}], (M_4, \delta^2 > 0),$$

$\Phi_j(x',t)$ – интегральные операторы, зависящие от заданной функции $\varphi_j(x',t)$ и $f(x,t)$.

Справедлива следующая

Теорема. Если функции $f(x,t) \in C_x^m(Q_T)$ и $\varphi(x',t) \in C_{x',t}^{2,1}(Q_T^{(1)})$, то при выполнении условия разрешимости (11), существует функция $U(x,t) \in C_{x,t}^{m_i,[\frac{m_i}{2}]}(Q_T)$, определяемая формулами (5) и (6), где неизвестные функции $\varphi_j(x',t)$ определяются из системы (12).

Литература

1. Хайруллин Е.М. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Алматы, 2002. — С.136-139

2. Хайруллин Е.М., Тулешева Г.А., Сейткулова Ж.М. Функция Коши для параболического интегро-дифференциального уравнения. Известия научно-технического общества «КАХАК», Алматы, 2007, С.96-98

3. Хайруллин Е.М., Тулешева Г.А. Решение одной n-мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности. Труды II-Международной научной конференции «Высокие технологии – залог устойчивого развития», Алматы, 2013. – том I, С.160-164

M. Akhymbek

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,

(Almaty, Kazakhstan)

e-mail: Ahymbek.Meyram@gmail.com

Renovation of the fixing and loading factors of the beam by the spectral data of free flexural vibrations

Abstract: In the current talk there is studied the problem of bending vibrations of a beam in which the binding on the right end is unknown and not available for visual inspection. The main objective is to study the inverse problem: find additional unknown boundary conditions by additional spectral data, i.e. the conditions of fixing the right end of the rod. In this work, unlike many other works, as such additional conditions we choose the first natural frequencies (eigenvalues) of two new problems corresponding to the problem of bending vibrations of a beam with loads of different weights at the central point.

We consider the equation of flexural vibrations of a homogeneous beam with constant bending stiffness

$$EJ\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4} + \rho S\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad x \in (0,1), \quad t > 0.$$

The left end is embedded, and the boundary conditions at the left end have the following form

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (x = 0).$$

At the right end, there are considered boundary conditions of the general form

$$a_1\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+a_2U+a_3\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0,\quad (x=1).$$

Keywords: eigenvalues, inverse problem, natural frequencies, beam, punctured domain

2010 Mathematics Subject Classification: 02.30.Hq, 02.30.Zz

References

[1] Vibratsii v tehnike: Spravochnik. Kolebaniya lineinykh sistem (Vibrations in technics: the handbook. Oscillation of linear systems, vol. 1), Moscow: Mashinostroenie, (1978).

[2] IU.P. ZHigalko, and S. I. Soloviev, "Sostvennye kolebania balki s garmonicheskim oscil-iatorom". *Izvestia vyswih uchebnyh zavedenyi.* Matematika, **10**, 36–38 (2001).

[3] A. M. Akhtyamov, A. V. Muftakhov, and A. A. Akhtyamova, "On the determination of loading and fixing for one end of a rod according to its natural frequencies of oscillation". *Vestnik Udmurtskogo universiteta.* 114–129 (2013).

[4] I. SH. Akhatov, and A. M. Akhtyamov, "Determination of the form of attachment of a rod using the natural frequencies of its flexural oscillations". *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* **65**(2), 283–290 (2001).

[5] A. M. Akhtyamov, A. V. Muftakhov, and A. V. Yamilova, "Identification of the type and parameters of fastening from the natural frequencies of the fastened rod". *Acoustical Physics.* **54**(2), 146–152 (2008).

UDC 517.957

A.V. Alexeyeva, G.A. Amirkhanova

Institute of Mathematics and Mathematical Modelling of SC MES RK (Kazakhstan, Almaty)

Institute of Information and Computational Technologies of SC MES RK (Kazakhstan, Almaty)

e-mail: alexandra-aleks@mail.ru, gulshat.aa@gmail.com

(2+1)-dimensional nonlinear A6-model of economic processes and phenomena

In this article, the (2+1)-dimensional nonlinear A6-model, generalizing the Korteweg-de Vries equation, was considered. In this paper we explained the economic meaning of (2+1)-dimensional nonlinear A6-model. The definition of economic soliton as a solution to the mathematical model was given. Economic sense of the method of direct scattering problem, corresponding to the positive analytical approach to the economy, is described.

Korteweg-de Vries equation is called universal mathematical model because it describes many of the physical problems of nonlinear waves in different physical environments.Multidimensional analogues of Korteweg-de Vries equation is also universal. Alexeyeva A. presented the class of the spatially two-dimensional nonlinear mathematical models A1-A14 and AI-AXII [1], generalizing the classical Korteweg-de Vries equation [2].

Consider the (2+1)-dimensional nonlinear A6-model has the form

$$\Psi_t + \Psi_{xxy} + 3[\Psi \mathrm{V}]_x = 0 \,, \tag{1}$$

where $V_x = \Psi_y$ and complex valued function $\Psi = \Psi(x, y, z) \in C^\infty(R^1 \times R^1 \times R^1_+)$ and decreases with all its partial derivatives faster than any power of $|x|^{-1}$.

We constructed hierarchy of auxiliary linear systems for the (2+1)-dimensional nonlinear A6-model. Also we showed the compatibility condition for these systems which connencts the auxiliary linear systems with this model. We found soliton solutioans of the (2+1)-dimensional nonlinear A6-model.

A wide variety of systems, including a social-economic, may be stable localized formation. In organizational and economic forms such as the shadow economy and marginal urban societies, appears the soliton's characteristics [3]. The collective behavior of subjects of economy has nonlinear wave character. Therefore there is the issue of providing its structural and local stability arises [3]. Both of the above-mentioned forms are resistant to external influences and have other soliton's properties. Note that not every solution of the (2+1)-dimensional nonlinear A6-model is a soliton. Likewise, not every collective formation has the characteristics of a soliton.

Under the economic soliton means the form of behavior of the microsubjects' economy, a feature which is a stable tendency of microsubjects to certain activities and continuous reproduction of the functional qualities of this collective formation [3]. For soliton formation imposed certain conditions on the function $\Psi = \Psi\left(x, y, t\right)$, which determines the behavior of the individual.

We solved the (2+1)-dimensional nonlinear A6-model by the method of direct scattering problem.

Spatially (2+1)-dimensional nonlinear A6-model adequately describes the objective reality of any economic phenomenon or process. It is known [3] that the behavior of the microsubjects of economy has wave character. Here, the function $\Psi = \Psi\left(x, y, t\right)$ is the wave function describing the state of the economy microsubject, x, y are the potentials of collective economic interactions; t is the time factor, which serves as a transformation parameter; $\rho\left(x, y, t\right) = \left|\Psi\left(\mathrm{x,y,t}\right)\right|^2$ is the density of the probability of micro-economic subject in given point of economic space at a given time. The wave function of the economic $\Psi = \Psi\left(x, y, t\right)$ is equal to the probability amplitude of finding the microeconomic subject at a particular point in economic space each time point t . Potentials of the collective economic interactions x and y are characteristic of the collective economic field, which, in turn, is the result of the aggregation of individual economic fields.

(2+1)-dimensional nonlinear A6-model describes a change in x and y potentials whereby eigenvalues λ_j, $j = \overline{1, N}$ of $\Psi = \Psi\left(x, y, t\right)$ function satisfy the evolution equation $\lambda_t = \lambda\lambda_y$. Hence the transformation of $\Psi = \Psi\left(x, y, t\right)$ function defined by the change in the x and y potentials of collective interactions. In turn, the change in the x and y potentials of collective interaction is caused by the evolution of the function $\Psi = \Psi\left(x, y, t\right)$.

The solution of (2+1)-dimensional nonlinear A6-model by direct scattering problem is that for a given initial value of $\Psi = \Psi\left(x, y, t\right)$ function recovering the so-called scattering data, i.e. all λ_j, $j = \overline{1, N}$ eigenvalues and components of the scattering matrix will also change. Thus soliton will form only if the function $\Psi = \Psi(x, y, t)$ is deformed in accordance with the equation.

If to apply the method of direct scattering problem to the economic problems, it will conform to the implementation of a positive approach to economic policy.

In particular, the requirement to assess the consequences of any predefined permanent economic activities, such as budget, formally corresponds to the solution of the direct problem of scattering. I.e. data recovery in the scattering matrix for a given function $\Psi = \Psi(x, y, t)$ in advance on the collective interactions of x and y. This interpretation of the direct scattering problem method is consistent with the positive analytical approach in the economy.

Thus, we examined the (2+1)-dimensional nonlinear A6-model, generalizing the Korteweg-de Vries equation. We considered the auxiliary linear system for it, determined the conditions of zero curvature, which connects the auxiliary linear system with this model. We explained the economic meaning of (2+1)-dimensional nonlinear A6-model. We defined an economic soliton as solution of this mathematical model. We explained the economic meaning of the method of direct scattering problem corresponding to the positive analytical approach in the economy.

References

1. *Alexeyeva, A.V.* (2+1)-dimensional analogs of the Korteweg-de Vries equation // International Journal of Contemorary Mathematics.New Delhi - 2012. - vol.3, №1-2.- pp. 47-55.

2. *Ablowitz, M., Sigur, X.* Solitons and the inverse scattering method.- Moscow, 1987.- 477 p.

3. *Ogorodnikova, T.V.* The formalization of the wave soliton of the collective economic behavior //Izvestiya of the Irkutsk State Academy of economics.- 2004.-Issue.3.-p.12-15.

УДК 519.21

A.B. Duisenbaeva, L.K. Zhumanova
al-Farabi Kazakh National university (Kazakhstan, Almaty)
e-mail: Aidana.daniels@mail.ru; lzhumanova@mail.ru

Iterative principal components analysis

Principal Component Analysis (PCA) is a widely used tool for data dimensionality reduction. Principal Component Analysis is a basis transformation to diagonalize an estimate of the covariance matrix of the data $x_i,\ i = 1, \dots t,\ x_i \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{t} x_i = 0$, defined as

$$C = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} x_i x_i^T.$$

Let V eigenvectors of C. The new coordinates in the eigenvector basis, i.e. the ortogonal projections onto the eigenvectors, are called principal components. For PCA the true covariance matrix is not known and has to be estimated from the available data. The subspace given as an output is then obtained as eigenspace of the empirical covariance. Linear PCA is an appropriate model for data that are generated by a Gaussian distribution, or data that are best described by second-order correlations. In fact, PCA is based only on second-order correlations such that no higher-order statistics can influence its result. It is well known, however, that the distribution of natural images is highly non-gaussian, and that all the "interesting" structures in images such as edges or corners cannot be described by second-order correlations. This motivates the use of a nonlinear analysis technique that can capture higher-order dependencies in the data.

Kernel PCA finds principal components, which are nonlinearly related to the input space by performing PCA in the space produced by the nonlinear mapping.

Consider a feature space $\mathcal{H}$ such that: $\Phi \ : \ \mathbb{R}^n \ \to \mathcal{H}, \quad x \to \Phi(x)$.

Assume for the moment that our data mapped into feature space, $\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_t)$, is centered, i.e. $\sum_{i=1}^{t} \Phi(x_i) = 0$. To do PCA for the covariance matrix

$$\bar{C} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} \Phi(x_i)\Phi(x_i)^T,$$

we have to find eigenvalues $\lambda \geqslant 0$ and eigenvectors $V \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$ satisfying $\bar{C}V = \lambda V$. We note that all solutions V lie in the span of $\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_t)$. This implies that we may consider the equalent system

$$(\Phi(x_i) \cdot CV) = \lambda(\Phi(x_i) \cdot V)$$

for all $i = 1, \ldots, t$, and that there exist coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ such that

$$V = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \Phi(x_i).$$

Defining an $t \times t$ matrix K by

$$K_{ij} = (\Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j)$$

therefore

$$t\lambda K\alpha = K^2\alpha$$

or

$$t\lambda\alpha = K\alpha.$$

We can calculate the the eigenvectors and eigenvalues of the matrix K can use the algorithm:

$$||v_0^{(k)}|| = 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \, \forall \mu \in \mathbb{R}^1$$

$$v_{j+1}^{(k)} = v_j^{(k)} + h(||v_j^{(k)}||^2[(K - \mu E)^*(K - \mu E)]^2 - ||(K - \mu E)^*(K - \mu E)||^2 v_j^{(k)}),$$

$$(v_0^{(k)}, v_N^{(l)}) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, k-1$$

References

1. *Mika S., Scholkopf B., Smola A. , Muller K.-R., Scholz M., and Ratsch G.* Kernel PCA and de-noising in feature spaces. - Proceedings NIPS 11. MIT Press, 1999.

2. *Shawe-Taylor J., Cristianini N.* Estimating the moments of a random vector with applications. // Proceedings of the GRETSI 2003 Conference,volume 1, P. 47-52, 2003.

A. Sakabekov, Y. Auzhani
a.sakabekov@kbtu.kz, erkawww@gmail.com

Mixed value problem for one-dimensional nonlinear Boltzmann's moment system equations with Maxwell-Auzhan boundary conditions

In this work it is proved existence and uniqueness of solution of the mixed value problem for the nonstationary nonlinear one-dimensional Boltzmann's moment system equations with Maxwell-Auzhan boundary conditions in space of functions continuous in time and summable in square by spatial variable

In case of one-atom gas any macroscopic system during process of its evolution to an equilibrium state passes 3 stages: initial transition period – described in terms of full function distribution of system, the kinetic period – by means of one-partial distribution function, the hydrodynamic period – by means of five first moments of distribution function. In kinetic regime the behavior of rarefied gas in the space of time and velocity is described by the Boltzmann's equation. It is known from gasdynamic that in most encountered problems there is no need in use of detailed microscopic gas description with help of distribution function. Therefore it is natural to look for less detailed description using macroscopic hydrodynamic variables (density, hydrodynamic velocity, temperature, etc.). As these variables are defined in terms of moments of the distribution function, we are faced with the problem of analyzing the various moments of Boltzmann's equation.

Note that the Boltzmann's moment equations are intermediate between Boltzmann (kinetic theory) and hydrodynamic levels of description of state of the rarefied gas and form a class of nonlinear partial differential equations. Existence of such class of equations was noticed by Grad [1], [2] in 1949. He obtained the moment system by expanding the particle distribution function in Hermite polynomials near the local maxwell distribution. Grad used cartesian coordinates of velocities and Grad's moment system contained as coefficients such unknown hydrodynamic characteristics like density, temperature, average speed, and others. Formulation of boundary conditions for Grad's system is almost impossible, as the characteristic equations for various approximations of Grad's hyperbolic system contain unknown parameters like density, temperature and average speed. However, 13- and 20-moment Grad equations are widely used in solving many problems of the kinetic theory of gases and plasma.

In work [3] we have obtained the moment system, which differ from Grad's system of equations. And we used spherical velocity coordinates and decomposed distribution function into a series of eigenfunctions of the linearized collision operator [4], [5], which is the product of Sonin polynomials and spherical functions. The resulting system of equations, which correspond to the partial sum of series and which we called the Boltzmann's moment system of equations, is nonlinear hyperbolic system in relation to the moments of particles distribution function.

The structure of Boltzmann's moment system of equations correspond to the structure of Boltzmann's equation, namely, differential part of the resulting system is linear in relation to the moments of distribution function and non-linearity is included as moments of collision integral [6].

The linearity of differential part of Boltzmann's moment system of equations simplifies task of formulation of boundary conditions. In work [3] was approximated a homogeneous boundary condition for particles distribution function and proved the correctness of the initial and boundary value problem for nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system of equations in three-dimensional space. In work [7] the initial and boundary value problem for one-dimensional non-stationary Boltzmann's equation with boundary conditions of Maxwell was approximated by corresponding problem for the Boltzmann's moment system of equations. And the boundary conditions for Boltzmann's moment system of equations were called as Maxwell-Auzhan conditions.

In work [8] been presented a systematic nonperturbative derivation of a hierarchy of closed systems of moment equations corresponding to any classical theory. This paper is fundamental work where closed systems of moment equations describe a transition regime. Note that theorem of existence of global in time solution of the initial and boundary value problem for 3-dimensional nonlinear Boltzmann equation with boundary conditions of Maxwell proved in work [9].

The study of various problems for the Boltzmann's moment system of equations is an important and actual task in theory of rarefied gas. Correctness of initial and boundary problems for Boltzmann's moment system of equations with boundary conditions of Maxwell-Auzhan are being studied for the first time.

We consider the system of one-dimensional Boltzmann's six-moment equations [3]

$$\frac{\partial f_{00}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial f_{01}}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f_{02}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}f_{01}+\frac{3}{\sqrt{5}}f_{03}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}f_{11}\right)=J_{02},$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}f_{01}+\sqrt{\frac{5}{3}}f_{11}\right)=0\ ,$$

$$\frac{\partial f_{01}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(f_{00}+\frac{2}{\sqrt{3}}f_{02}-\sqrt{\frac{2}{3}}f_{10}\right)=0\ ,$$

$$\frac{\partial f_{03}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\frac{3}{\sqrt{5}}f_{02}=J_{03}\ ,$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}f_{02}+\sqrt{\frac{5}{3}}f_{10}\right)=J_{11}\ ,$$

$$x\in(-a,a),\quad t>0,$$

where (2)

$f_{00}=f_{00}\,(t,x)\,,\ f_{01}=f_{01}\,(t,x)\,,\ \ldots,\ f_{11}=f_{11}\,(t,x)$ are the moments of particle distribution function;

$$J_{02}=(\sigma_2-\sigma_0)\,(f_{00}f_{02}-f_{01}^2/\sqrt{3})/2\ ,$$

$$J_{03}=\frac{1}{4}\,(\sigma_3+3\sigma_1-4\sigma_0)\,f_{00}f_{03}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\,(2\sigma_1+\sigma_0-3\sigma_3)\,f_{01}f_{02},$$

$J_{11}=(\sigma_1-\sigma_0)\,(f_{00}f_{11}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}f_{10}f_{01}-\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}f_{01}f_{02})$ – are the moments of collision integral, where σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 are constants. First, third and fourth equations of the system (2) correspond to the mass conservation law, momentum conservation law and energy conservation law correspondingly.

We study correctness of the initial and boundary value problem for six-moment one-dimensional Boltzmann's system equations (we consider pure specular reflection from the boundary)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial w}{\partial x}=J_1(u,\ w)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+A'{}^{\frac{\partial u}{\partial x}=J_2(u,\ w),\ t\in(0,T],\ \ x\in(-a,a),}(1)$$

$u|_{\ t=0}=u_0\,(x)\,,\quad w|_{\ t=0}=w_0\,(x)\,,\ x\in[-a,a]$, (4)
$(Aw^-+Bu^-)\big|_{\ x=-a}=\frac{1}{\beta}\,(Aw^+-Bu^+)\big|_{\ x=-a}\ t\in[0,T]$, (5)
$(Aw^--Bu^-)\big|_{\ x=a}\ =\frac{1}{\beta}(Aw^++Bu^+)\Big|_{\ x=a}\ \ t\in[0,T]$, (6)
where

$$A=\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{\sqrt{3}}&\frac{3}{\sqrt{5}}&-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\\ -\sqrt{\frac{2}{3}}&0&\sqrt{\frac{5}{3}}\end{pmatrix}\ ,\quad B=\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{\frac{2}{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \sqrt{\frac{2}{3}}&2\sqrt{2}&-1\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}&-1&3\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$J_1\,(u,\ w)=(\ 0,J_{02},0)',\ \ J_2\,(u,\ w)=(\ 0,\ J_{03},\ J_{11})',$$

$$u=(f_{00},f_{02},f_{10})',\ \ w=(f_{01},f_{03},f_{11})',$$

A' is the transpose matrix, B is the positive definition matrix;
$u_0\,(x)=(f_{00}^0\,(x)\,,\ f_{02}^0\,(x)\,,f_{10}^0\,(x))'$, $w_0\,(x)=(f_{01}^0\,(x)\,,\ f_{03}^0\,(x)\,,f_{11}^0\,(x))'$ are the given initial vector-functions; $w^+,\ u^+$ are the vector moments of falling to boundary particle distribution function; $w^-,\ u^-$- are the vector moments of reflecting from boundary particle distribution function. (3) is the vector matrix form writing down of the system equations (2).

It is possible through direct calculations check that

$$\det A_1\ =\det\begin{pmatrix}0&A\\ A'&0\end{pmatrix}\neq 0\ ,$$

and matrix A_1 has three positive and same number negative nonzero eigenvalues. From (5)-(6) follows that number of boundary conditions on left and right ends of interval$(-a,a)$ is equal to the number of positive and negative eigenvalues of matrix A_1.

Thus a system (3) is symmetric hyperbolic nonlinear partial differential equations system.

For the problem (3)-(6) following theorem takes place.

Theorem. If $U_0 = (u_0(x)\,,\; w_0(x)) \in L^2[-a,a]$, then problem (3)-(6) has unique solution in domain $[-a,a] \times [0,T]$, belonging to the space $C\left([0,T]\,;\,;L^2\left[-a,a\right]\right)$, moreover

$$\|\,U\|_{\,C([0,T];;L^2[-a,a])} \leq C_1 \|\,U_0\|_{\,L^2[-a,a]} \tag{2}$$

where C_1 is constant independent from U and $T \sim \mathrm{O}\left(\|\,U_0\|_{\,L^2[-a,a]}^{-1}\right)$.

References

1. Grad G. Kinetic theory of rarefied gases. Comm. Pure Appl. Math, 2, 331, 1949.
2. Grad G. Principle of the kinetic theory of gases. Handuch der Physik, Volume 12, Springer, Berlin, p.p. 205-294.
3. Sakabekov A., Initial-boundary value problems for the Boltzmann's moment system equations Gylym, Almaty, 2002
4. Cercignani C., Theory and application of Boltzmann's equation. Milano, Italy, 1975.
5. Kogan M.N. Dynamic of rarefied gas. Moscow, Nauka, 1967, 440p.
6. Kumar K. Polynomial expansions in Kinetic theory of gases. Annals of physics, 57, 115-141
7. Sakabekov A., Auzhani Y. Boundary conditions for the onedimensional nonlinear non-stationary Boltzmann's moment system equations, J.Math. Phys. 55,123507
8. Levermore C.D. Moment closure hierarchies for kinetic theory, J.Stat. Phys.83(5-6), 1021-1065 (**??**)
9. Mischler S. Kinetic equations with Maxwell boundary conditions. Annales scientifique de l ENS 43, fascicule 5, 719-760.

4 Алгебра, математическая логика и геометрия

УДК 519.63

Н.К. Аренбаев
(Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби
Казахстан, Алматы)
e-mail: arenariman@mail.ru

К преобразованию квадратичных форм.

Пусть

$$Q_n(x_1,\dots,x_k)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

– положительно определенная квадратичная форма со значениями в R^k. Через $A=\|a_{ij}\|$ будем обозначать матрицу квадратичной формы, а $\left[\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ j_1 & \dots & j_r\end{smallmatrix}\right]$ означает минор, образованный элементами матрицы A, стоящими на пересечении строк с номерами $i_1,\dots,i_r$ и столбцов с номерами $j_1,\dots,j_r$. Главные миноры будем обозначать через, $\Delta_1,\dots,\Delta_k$. Ясно также, что $a_{ij}=a_{j\,i}$, а $\Delta_i>0 \ \ (i=1,\dots,k)$.

Хорошо известно, что форма $Q_n(x_1,\dots,x_k)$ с помощью треугольного преобразования может быть приведена к сумме квадратов. Этот результат легко усматривается с помощью применения алгоритма Лагранжа — последовательного выделения полных квадратов, явный вид которого определяется формулой Якоби. Рассматривая вопрос приведения квадратичной формы к сумме квадратов, нельзя обойти следующий важный вопрос.

Квадратичная форма (1) всегда может быть приведена при помощи ортогонального преобразования к канонической форме

$$\Lambda(\xi_1,\dots,\xi_k)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,\xi_i^2;$$

при этом $\lambda_1,\dots\lambda_k$ — характеристические числа матрицы A.

Процесс приведения $Q(x_1,\dots,x_k)$ к $\Lambda(\xi_1,\dots,\xi_k)$ называется приведением к главным осям. Это название связано с тем, что уравнение центральной гиперповерхности

$$Q_n(x_1,\dots,x_k)=c \quad (c\neq 0),$$

при ортогональном преобразовании переменных принимает канонический вид. Поскольку $Q_n(x_1,\dots,x_k)$ рассматривается в k–мерном эвклидовом пространстве, то $\xi_1,\dots,\xi_k$ будут координатами в новом ортогональном базисе того же пространства, причем «поворот» осей осуществляется ортогональным преобразованием. Новые оси координат являются осями симметрии и обычно называются главными осями этой поверхности. В случае положительно определенной формы эта поверхность является гиперэллипсоидом. Говоря о взаимосвязи приведенных преобразований — треугольного и ортогонального, следует, что из второго, путем дополнительной замены $y_i=\sqrt{\lambda_i}\xi_i$ $(i=1,\dots,k)$, мы приведем $Q_n(x_1\dots,x_k)$ к сумме квадратов переменных. Что касается обратной связи, то в нашем частном случае при изучении локальной теоремы для вероятностей полиномиального распределения также устанавливается.

По ходу установления этой связи возникла общая задача – нахождение обратного преобразования для преобразования полученного методом Лагранжа—Якоби. Результат этого вопроса излагается в теореме 2, при этом для полноты решения мы воспроизводим и прямое и обратное преобразования.

Теорема 1. Положительно определенная квадратичная форма

$$Q_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j$$

с помощью треугольного преобразования приводится к виду

$$Q_k(x_1, \dots, x_k) = y_1^2 + \dots + y_k^2,$$

где

$$y_i = \sqrt{\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}}\, x_i + \frac{\left[\begin{smallmatrix} 1 & \dots & i-1 & i \\ 1 & \dots & i-1 & i+1 \end{smallmatrix}\right]}{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_i}}\, x_{i+1} + \frac{\left[\begin{smallmatrix} 1 & \dots & i-1 & i \\ 1 & \dots & i-1 & i+2 \end{smallmatrix}\right]}{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_i}}\, x_{i+2} + \dots +$$
$$+ \frac{\left[\begin{smallmatrix} 1 & \dots & i-1 & i \\ 1 & \dots & i-1 & k-1 \end{smallmatrix}\right]}{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_i}}\, x_{k-1} + \frac{\left[\begin{smallmatrix} 1 & \dots & i-1 & i \\ 1 & \dots & i-1 & k \end{smallmatrix}\right]}{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_i}}\, x_k, \quad (2)$$

$(i = 1, \dots, k)$, $\Delta_0 \equiv 1$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 преобразование

$$x_j = \sqrt{\frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}}\, y_j + \frac{\left[\begin{smallmatrix} 1 & \dots & j-1 & j \\ 1 & \dots & j-1 & j+1 \end{smallmatrix}\right]}{\sqrt{\Delta_j\Delta_{j+1}}}\, y_{j+1} + \frac{\left[\begin{smallmatrix} 1 & \dots & j-1 & j & j+1 \\ 1 & \dots & j-1 & j+1 & j+2 \end{smallmatrix}\right]}{\sqrt{\Delta_{j+1}\Delta_{j+2}}}\, y_{j+2} + \dots +$$
$$+(-1)^{k-j-1} \frac{\left[\begin{smallmatrix} 1 & \dots & j-1 & j & \dots & k-2 \\ 1 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & k-1 \end{smallmatrix}\right]}{\sqrt{\Delta_{k-2}\Delta_{k-1}}}\, y_{k-1} + (-1)^{k-j} \frac{\left[\begin{smallmatrix} 1 & \dots & j-1 & j & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & k \end{smallmatrix}\right]}{\sqrt{\Delta_{k-1}\Delta_k}}\, y_k, \quad (3)$$

где $(j = 1, \dots, k)$ является обратным к (2).

Обобщенное преобразование Хельмерта

Рассмотрим квадратичную форму, заданную соотношениями

$$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2; \quad x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_k c_k = \alpha\,, \quad (4)$$

где $c_i \neq 0$ и α вещественные числа.

Теорема 3. Квадратичная форма (4) с помощью ортогонального преобразования

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{c_1}{\omega_1}\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\right) + \frac{\omega_2}{\omega_1} y_1 \\
x_2 &= \frac{c_2}{\omega_1}\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\right) - \frac{c_1 c_2}{\omega_1\omega_2} y_1 + \frac{\omega_3}{\omega_2} y_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{k-1} &= \frac{c_{k-1}}{\omega_1}\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\right) - \frac{c_1 c_{k-1}}{\omega_1\omega_2} y_1 - \dots - \frac{c_{k-2}c_{k-1}}{\omega_{k-2}\omega_{k-1}} y_{k-2} + \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}} y_{k-1} \\
x_k &= \frac{c_k}{\omega_1}\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\right) - \frac{c_1 c_k}{\omega_1\omega_2} y_1 - \dots - \frac{c_{k-2}c_k}{\omega_{k-2}\omega_{k-1}} y_{k-2} - \frac{c_{k-1}c_k}{\omega_{k-1}\omega_k} y_{k-1}
\end{aligned} \quad (5)$$

приводится к виду

$$\chi^2 = \left(\frac{\alpha}{\omega_1}\right)^2 + y_1^2 + \cdots + y_{k-1}^2.$$

Теорема 4. Квадратичная форма

$$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2,$$

$$\begin{aligned} x_1\sqrt{p_1} + x_2\sqrt{p_2} + \cdots + x_k\sqrt{p_k} &= d, \\ x_1\sqrt{p_1} + 2x_2\sqrt{p_2} + \cdots + kx_k\sqrt{p_k} &= \tau \end{aligned} \tag{6}$$

с помощью преобразования (5) приводится к виду

$$\chi^2 = d^2 + t^2 + y_1^2 + \cdots + y_{k-2}^2, \quad t = \frac{\tau - da_1}{\sigma_1}. \tag{7}$$

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц М. Наука, 1966 - 576 с.

2. *В.А.Ильин, Э.Г.Позняк* Линейная алгебра М. "Наука", 1974 - 296 с.

3. N.K.Arenbaev Asymptotic behavior of a multinomial distribution, Theory Probab. Appl., 21:4 (1977), 805-810.

УДК 510.67

Б.Ш. Кулпешов, А.Б. Алтаева

Международный университет информационных технологий (Казахстан, Алматы)

Институт информационных и вычислительных технологий (Казахстан, Алматы)

e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz, vip.altayeva@mail.ru

Свойства слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 2

Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ означает что $A < \{b\}$. Через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A < b$ ($b < A$).

Definition 1. [2] Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной.
Ранг выпуклости формулы $\phi(x)$ ($RC(\phi(x))$) определяется следующим образом:
1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.
2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и бесконечное число элементов $b_i, i \in \omega$, такие, что:
— Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$
— Для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$
3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).
Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

Definition 2. (Байжанов Б.С., [3]) Пусть M — слабо о-минимальная структура, A, $B \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические. Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1]. Пусть $Y \subset M^{n+1}$ — $\emptyset$–определимо, пусть $\pi : M^{n+1} \to M^n$ — проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Пусть $\sim$ — $\emptyset$–определимое отношение эквивалентности на M^n, определяемое следующим образом: $\bar{a} \sim \bar{b}$ для всех $\bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z$, и $\bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}$, если $\bar{a}, \bar{b} \in Z$.

Пусть $\overline{Z} := Z/\sim$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ мы обозначаем через $[\bar{a}]$ $\sim$-класс кортежа $\bar{a}$. Существует естественный $\emptyset$–определимый линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ тогда и только тогда когда $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Если $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, то существует некоторый $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$. Мы называем такое множество $\overline{Z}$ *сортом* (в данном случае, $\emptyset$–определимым сортом) в $\overline{M}$, где $\overline{M}$ — Дедекиндово пополнение структуры M, и обозреваем $\overline{Z}$ как естественно вложенную в $\overline{M}$. Аналогично мы можем получить сорт в $\overline{M}$, рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Будем говорить, что f является *локально возрастающей (локально убывающей, локально константой)* на D, если для любого $x \in D$ существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий x, так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J.

Пусть f — A-определимая функция на $D \subseteq M$, E — A–определимое отношение эквивалентности на D. Мы говорим что f — *строго возрастающая (убывающая) на* D/E, если для любых $a, b \in D$ с условием $a < b \wedge \neg E(a, b)$ мы имеем $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$).

Definition 3. (Вербовский В.В., [4], [5]) Пусть M — слабо о-минимальная структура, $B, D \subseteq M$, $A \subseteq \overline{M}$ — B-определимый сорт и $f : D \to A$ — B-определимая функция, являющаяся локально возрастающей (убывающей) на D. Будем говорить, что функция f *имеет глубину* n на множестве D, если существуют отношения эквивалентности $E_1(x, y), \ldots, E_n(x, y)$, разбивающие D на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого $2 \leq i \leq n$ каждый E_i-класс разбивается на бесконечное

число бесконечных выпуклых E_{i-1}-подклассов и выполняется следующее:
— f является строго возрастающей (убывающей) на каждом E_1-классе
— f является локально убывающей (возрастающей) на D/E_k для любого нечетного $k \leq n$
— f является локально возрастающей (убывающей) на D/E_k для любого четного $k \leq n$
— f является строго монотонной на D/E_n.
В этом случае функцию f будем называть *локально возрастающей (убывающей) глубины* n.

Theorem 1. (Вербовский В.В., [5]) *Пусть T — слабо о-минимальная теория. Тогда любая функция в определимый сорт имеет конечную глубину.*

Мы естественным образом расширяем Определение 3, вводя понятие *локально константной функции глубины* n, если в данном определении функция f является константой на каждом E_1-классе. Заметим, что в этом случае функция f может быть как локально возрастающей, так и локально убывающей на D/E_1.

Example 1. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, E_1^p, E_2^p, E_1^q, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_1 с $Q \times Q \times Q$, упорядоченной лексикографически, а P_2 с $Q \times Q$, также упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1^p(x, y)$ и $E_2^p(x, y)$ — это отношения эквивалентности на $P_1(M)$ такие, что для всех $x = (n_1, m_1, l_1), y = (n_2, m_2, l_2) \in Q \times Q \times Q$

$$E_1^p(x, y) \Leftrightarrow n_1 = n_2 \wedge m_1 = m_2 \text{ и } E_2^p(x, y) \Leftrightarrow n_1 = n_2$$

Аналогично определяется интерпретация бинарного предиката $E_1^q(x, y)$: это отношение эквивалентности на $P_2(M)$ такое, что для всех $x = (n_1, m_1), y = (n_2, m_2) \in Q \times Q$

$$E_1^q(x, y) \Leftrightarrow n_1 = n_2$$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $(f) = P_1(M)$ и $(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f((n, m, l)) = (-n, m)$ для всех $(n, m, l) \in Q \times Q \times Q$.

Может быть доказано, что M — счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p := \{P_1(x)\}, q := \{P_2(x)\}$. Очевидно что $p, q \in S_1(\emptyset)$.

Утверждаем, что функция f является локально константой глубины 2 на $P_1(M)$, т.е. f — константа на каждом E_1^p-классе, f — строго возрастающая на каждом $E_2(a, M)/E_1$, где $a \in P_1(M)$, и f — строго убывающая на $P_1(M)/E_2$.

Если в Примере 1 f определить следующим образом: $f((n, m, l)) = (n, -m)$ для всех $(n, m, l) \in Q \times Q \times Q$, то получим, что f —локально константа глубины 2 на $P_1(M)$, при этом f — константа на каждом E_1^p-классе, f — строго убывающая на каждом $E_2(a, M)/E_1$, где $a \in P_1(M)$, и f — строго возрастающая на $P_1(M)/E_2$.

Если же в Примере 1 f определить следующим образом: $f((n, m, l)) = (-n, -m)$ для всех $(n, m, l) \in Q \times Q \times Q$, то получим, что f —локально константа глубины 1 на $P_1(M)$, при этом f — константа на каждом E_1^p-классе и f — строго убывающая на $P_1(M)/E_1$.

Ранг выпуклости 1-*типа* p $(RC(p))$ (см. [6]) определяется следующим образом:

$$RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) | \phi(x) \in p\}$$

В Примере 1 имеем $p \not\perp^w q$, $(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$, $(\{b\}) \cap p(M) = \emptyset$ для некоторых $a \in p(M)$ и $b \in q(M)$, $RC(p) = 3$, $RC(q) = 2$.

Пусть $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические, $p_1 \not\perp^w p_2$. Мы говорим что A–определимая формула $\phi(x,y)$ является (p_1,p_2)–*секатором*, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi(a,M) \subset p_2(M)$, $\phi(a,M)$ выпукло и $\phi(a,M)^- = p_2(M)^-$. Если $\phi_1(x,y)$, $\phi_2(x,y)$ — (p_1,p_2)–секаторы, то мы говорим что $\phi_1(x,y)$ *меньше чем* $\phi_2(x,y)$, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi_1(a,M) \subset \phi_2(a,M)$.

Очевидно что если $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические и $p_1 \not\perp^w p_2$, тогда существует (p_1,p_2)–секатор и множество всех (p_1,p_2)–секаторов линейно упорядочено. Назовем (p,q)-секатор $\phi(x,y)$ *базисным*, если все остальные (p,q)-секаторы определяются с помощью $\phi(x,y)$ однозначно.

Следующая теорема полностью описывает счетно категоричные слабо о-минимальные теории ранга выпуклости 2:

Theorem 2. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 2, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Тогда*
(i) существует конечное множество $C = \{c_0, \dots, c_n\} \subseteq M(M\cup \{-\infty,\ +\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\emptyset$–определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty$, $+\infty$), такое что $M \models c_i < c_j$ для всех $i < j \le n$ и для каждого $j \in \{1,\dots,n\}$ либо $M \models \neg(\exists x) c_{j-1} < x < c_j$ либо $I_j = \{\ x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j\ \}$ является плотным линейным порядком без концевых точек и существуют $k_j \in \omega$ и $p_1^j, \dots, p_{k_j}^j \in S_1(\emptyset)$ так что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$;
(ii) для каждого неалгебраического $p \in S_1(\emptyset)$ $RC(p) \le 2$ и существует единственное $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E^p(x,y)$ так что в случае $RC(p) = 1$ $E^p(x,y) \equiv x = y$, а в случае $RC(p) = 2$ $E^p(x,y)$ разбивает $p(M)$ на бесконечное число E^p-классов, каждый E^p-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным линейным порядком без концевых точек;
(iii) для любых неалгебраических $p, q \in S_1(\emptyset)$ таких, что $p \not\perp^w q$
(1) если $(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$ для некоторого $a \in p(M)$, то существует единственная $\emptyset$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$ так что

если $RC(p) = RC(q) = 1$, то f строго монотонная на $p(M)$ и является биекцией $p(M)$ на $q(M)$,

если $RC(p) = RC(q) = 2$, то f локально монотонная глубины $k \le 1$ на $p(M)$ и является биекцией $p(M)$ на $q(M)$,

если $RC(p) > RC(q)$, то f локально константа глубины 1 на $p(M)$, т.е. f константа на каждом E^p-классе и строго монотонная на $p(M)/E^p$;
(2) если $(\{a\}) \cap q(M) = \emptyset$ для всех $a \in p(M)$, то

в случае $RC(p) = RC(q) = 1$ существует единственный (p,q)-секатор $S(x,y)$ так что $f(x) := \sup S(x,M)$ является строго монотонной на $p(M)$,

в случае $RC(p) = RC(q) = 2$ существуют в точности три (p,q)-секатора $S_1(x,y)$, $S_2(x,y)$, $S_3(x,y)$ такие, что $S_1(a,M) \subset S_2(a,M) \subset S_3(a,M)$ для всех $a \in p(M)$, $f(x) := \sup S_2(x,M)$ локально монотонная глубины $k \le 1$ на $p(M)$ и

$$S_1(x,y) \equiv \forall t[E^p(x,t) \to S_2(t,y)], \quad S_3(x,y) \equiv \exists t[E^p(x,t) \wedge S_2(t,y)]$$

в случае $RC(p) > RC(q)$ существует единственный (p,q)-секатор $S(x,y)$ так что $f(x) := \sup S(x,M)$ является локально константой глубины 1 на $p(M)$, т.е. f константа на каждом E^p-классе и строго монотонная на $p(M)/E^p$;
так что T допускает элиминацию кванторов до языка

$$\{=,<\} \bigcup \{c_i : i \le n\} \bigcup \{U_s(x) : s \le r = \sum_{j=1}^{n} k_j\} \bigcup \{E^{p_s}(x,y) : RC(p_s) = 2 \text{ и } s \le r\} \bigcup$$

$$\bigcup\{f_{i,j} : (\{a\}) \cap p_j(M) \neq \emptyset \text{ для некоторого } a \in p_i(M), RC(p_i) \geq RC(p_j)\} \bigcup$$

$$\bigcup\{S_{i,j}(x,y) : p_i \not\perp^w p_j, (\{a\}) \cap p_j(M) = \emptyset \text{ для всех } a \in p_i(M), RC(p_i) \geq RC(p_j),$$

$$S_{i,j}(x,y) - \text{ базисный } (p_i,p_j)\text{-секатор}\}$$

где $U_s(x)$ изолирует тип p_s для каждого $s \leq r$.
Более того, любому упорядочению с выделенными элементами как в (i)-(iii) соответствует счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 2 как выше.

Литература

1. *Macpherson H.D., Marker D., and Steinhorn C.* Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. – 2000. – Volume 352. – P. 5435–5483.
2. *Kulpeshov B.Sh.* Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1998. – Volume 63. – P. 1511–1528.
3. *Baizhanov B.S.* Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. – 2001. – Volume 66. – P. 1382–1414.
4. *Вербовский В.В.* О глубине функций слабо о-минимальных структур и пример слабо о-минимальной структуры без слабо о-минимальной теории // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. – Almaty: 1996. – С. 207–216.
5. *Verbovskiy V.V.* On formula depth of weakly o-minimal structures // Algebra and Model Theory, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors). – Novosibirsk, 1997. – P. 209–223.
6. *Kulpeshov B.Sh.* Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. – 2007. – Volume 45. – P. 354–367.

УДК

Д.М. Курманбаев

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
Механико-математический факультет
Кафедра фундаментальной математики

k.damir-87@mail.ru

Разрушающие решения модифицированного уравнения Веселова-Новикова и поверхность Эннепера третьего порядка

Введем следующую поверхность аналогично работе [1]

$$\tilde{S}\left(z,\overline{z},t\right) = \begin{pmatrix} iu_2 - u_1 & iu_3 \\ iu_3 & -iu_2 - u_1 \end{pmatrix} + i\int_0^t \begin{pmatrix} k & -l \\ -l & -\overline{k} \end{pmatrix} d\tau \qquad (1)$$

с помощью представления Вейерштрасса, которая сопоставляет каждой паре голоморфных функций $\psi_1, \overline{\psi}_2 : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ минимальную поверхность $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$,

$F = (u_1, u_2, u_3)$ заданную следующими формулами:

$$u_1(z,\overline{z}) = \frac{i}{2}\int_{(0,0,0)}^{(z,\overline{z},0)} \left(\psi_1^2+\overline{\psi}_2^2\right)dz - \left(\overline{\psi}_1^2+\psi_2^2\right)d\overline{z},$$

$$u_2(z,\overline{z}) = \frac{1}{2}\int_{(0,0,0)}^{(z,\overline{z},0)} \left(\overline{\psi}_2^2-\psi_1^2\right)dz + \left(\psi_2^2-\overline{\psi}_1^2\right)d\overline{z},$$

$$u_3(z,\overline{z}) = \int_{(0,0,0)}^{(z,\overline{z},0)} \psi_1\overline{\psi}_2 dz + \overline{\psi}_1\psi_2 d\overline{z}.$$

И функций $k(z,\overline{z},t) = \psi_{1,z}^2 - \psi_{2,\overline{z}}^2 - 2\left(\psi_1\psi_{1,zz} - \psi_2\psi_{2,\overline{zz}}\right),$

$$l(z,\overline{z},t) = \psi_{1,z}\overline{\psi}_{2,z} + \overline{\psi}_{1,\overline{z}}\psi_{2,\overline{z}} - \psi_{1,zz}\overline{\psi}_2 - \psi_1\overline{\psi}_{2,zz} - \overline{\psi}_{1,\overline{zz}}\psi_2 - \overline{\psi}_1\psi_{2,\overline{zz}}$$

определены из вида 1-формы введенный в работе [2].

Наша задача - дать геометрическую интерпретацию преобразования Мутара на примере поверхности Эннепера третьего порядка $\psi_1 = z^3 + 6t$, $\psi_2 = 1$ и получить разрушающие решения модифицированного уравнения Веселова-Новикова (мВН).

1. Преобразование Мутара решений уравнения мВН

$$U_t = (U_{zzz} + 3U_zV + \frac{3}{2}UV_z) + (U_{\overline{zzz}} + 3U_{\overline{z}}\overline{V} + \frac{3}{2}U\overline{V_{\overline{z}}}) \tag{2}$$

где

$$V_{\overline{z}} = \left(U^2\right)_z \tag{3}$$

(z=x+iy, $U(z,\overline{z},t)$ - вещественнозначная функция) было введено в [2].

Голоморфные функций ψ_1,ψ_2 должны удовлетворять некоторым условиям (теорема 1).

Теорема 1. Пусть $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial \overline{z}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ – семейство операторов Дирака с потенциалами $U(z,\overline{z},t)$ (являющимися решениями уравнения мВН) и

$\Psi_0(z,\overline{z},t) = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi}_2 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет системе уравнений (при $U(z,\overline{z},t)=0$)

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial\overline{z}} = 0, \frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \frac{\partial^3\psi_1}{\partial z^3},\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \frac{\partial^3\psi_2}{\partial\overline{z}^3}, \tag{4}$$

тогда 1) матрицы $K(\Psi_0)$ и $M(\Psi_0)$ имеют вид

$$K(\Psi_0) = \Psi_0\tilde{S}^{-1}\left(\Psi_0^T,\Psi_0\right)\Gamma\Psi_0^T\Gamma^{-1}, \tag{5}$$

$$M(\Psi_0) = i\Gamma\left(\Psi_{0z} - \Psi_{0\overline{z}}\right)\Psi_0^{-1}\Gamma^{-1}. \tag{6}$$

здесь $\tilde{S}^{-1}$ обратная к $\tilde{S}$ матрица из (1), $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

2) для каждого решения Ψ системы (4) функция $\widetilde{\Psi}$ также является решением этой системы и имеет вид $\widetilde{\Psi} = -\Psi_0\tilde{S}^{-1}\left(\Psi_0^T,\Psi_0\right)\tilde{S}\left(\Psi_0^T,\Psi\right)$ для оператора Дирака $\widetilde{\mathcal{D}}$ с потенциалом $\tilde{U} = ik_{12}$ и потенциал $\tilde{V} = \overline{k}_{11}^2 - 2\left(m_{21}k_{21} + \overline{m}_{11}\overline{k}_{11}\right)$ тоже удовлетворяет системе уравнений

$$\widetilde{\mathcal{D}}\widetilde{\Psi} = 0,\ \frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial t} = \widetilde{\mathcal{A}\Psi}, \tag{7}$$

здесь $\widetilde{\mathcal{A}} = \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \frac{\partial^3}{\partial \overline{z}^3} + 3\begin{pmatrix} \tilde{V} & 0 \\ \tilde{U}_z & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^3}{\partial z^3} + 3\begin{pmatrix} 0 & -\tilde{U}_{\overline{z}} \\ 0 & \overline{\tilde{V}} \end{pmatrix}\frac{\partial^3}{\partial \overline{z}^3} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \tilde{V}_z & 2\tilde{U}\overline{\tilde{V}} \\ -2\tilde{U}\tilde{V} & \overline{\tilde{V}}_{\overline{z}} \end{pmatrix}$,

последняя матрица подбирается так, чтобы система (7) была эквивалентна L,A,B – тройке Манакова [4,5], которая является операторным представлением уравнения мВН.

3) вещественнозначная функция $\tilde{U}$, и функция $\tilde{V}$ удовлетворяют уравнению мВН.

2. Пример. Поверхность Эннепера третьего порядка $\psi_1 = z^3 + 6t,\ \psi_2 = 1$:

Находим поверхность $\tilde{S}\,(z, \overline{z}, t)$ по формуле (1) с помощью формулы Вейерштрасса [6]:

$$\tilde{S}\,(z, \overline{z}, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7}iz^7 + i\overline{z} - 36izt^2 - 3iz^4t & \frac{1}{4}i\left(z^4 + \overline{z}^4\right) + 6i(z + \overline{z})t \\ \frac{1}{4}i\left(z^4 + \overline{z}^4\right) + 6i(z + \overline{z})t & \frac{1}{7}i\overline{z}^7 - iz + 36i\overline{z}t^2 + 3i\overline{z}^4t \end{pmatrix}.$$

Далее по алгоритму преобразования Мутара (теорема 1) находим матрицы $K(\Psi_0)$, $M(\Psi_0)$ и решения уравнения мВН $\tilde{U}$:

$$\tilde{U}\,(z, \overline{z}, t) = -84\frac{6\left(z^7 + \overline{z}^7\right)t + \left(|z|^6 + 252t^2 + 7\right)\left(z^4 + \overline{z}^4\right) + 42|z|^6(z + \overline{z})t}{P\,(z, \overline{z}, t)},$$

здесь $P\,(z, \overline{z}, t) = |z|^8\left(7056t^2 + 336z^3t + 98\right) + |z|^2\left(1016064t^4 + 56448t^2 + 784\right) -$ $-63\left(z^8 + \overline{z}^8\right) + 4032|z|^2\left(z^6 + \overline{z}^6\right)t^2$, и $\tilde{V} = \overline{k}_{11}^2 - 2\left(m_{21}k_{21} + \overline{m}_{11}\overline{k}_{11}\ \right)$.

Основной результат данной работы:

Теорема 2. Для поверхности Эннепера третьего порядка $\psi_1 = z^3 + 6t,\ \psi_2 = 1$ функции $\tilde{U}\,(z, \overline{z}, t)$, $\tilde{V}\,(z, \overline{z}, t)$:

1) удовлетворяют уравнению мВН (2),(3);

2) убывают при $r \to \infty$, $\tilde{U} = O\left(\frac{1}{r^4}\right)$, $\overline{\tilde{V}} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$;

3) вещественно- аналитические при $t \neq 0$;

4) имеют особенности в точке $x = y = t = 0$ и частные производные потенциала $\tilde{U}$ в этой точке имеют следующие различные предельные значения:

$$\lim_{r\to 0,\varphi=const}\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial x^2} = -3\left(32\cos^6\varphi - 72\cos^4\varphi - 48\cos^2\varphi + 7\right),$$

$$\lim_{r\to 0,\varphi=const}\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial y^2} = 3\left(32\cos^6\varphi - 24\cos^4\varphi - 1\right), \lim_{r\to 0,\varphi=const}\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial t^2} = \infty.$$

Литература

1. И.А.Тайманов "Разрушающиеся решения модифицированного уравнения Веселова–Новикова и минимальные поверхности" Теор. и матем. физика. 2015. Т. 182, N. 2. С. 213-222.

2. Delong Yu, Q.P. Liu, and Shikun Wang "Darboux transformation for the modified Veselov-Novikov equation". J. of Physics A 35 ,2001, 3779-3785.

3. И.А.Тайманов " Преобразование Мутара двумерных операторов Дирака и геометрия Мебиуса".Матем. заметки. 2015. Т. 97, вып. 1, С. 129-141.

4. Bogdanov L.V. "Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation". Theor. Math. Phys. 70,1987, 309-314.

5. Manakov S.V. "Method of inverse scattering and two-dimensional evolution equations". Uspekhi matematicheskikh nauk 31 (5) ,1976, 245-246. (Russian).

6. I. A. Taimanov "Two-dimensional Dirac operator and the theory of surfaces". Russian Math. Surveys 61 2006, no. 1, 79-159.

УДК 514.764.77

Т.Д. Туканаев
Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева (Казахстан, Астана)
e-mail: tukanayev_t@mail.ru

Восстановления регулярной поверхности по заданной сумме главных радиусов кривизны

Введем в пространстве E^{n+1} прямоугольную декартову систему координат $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Пусть S^n – единичная n-мерная сфера в E^{n+1}, центр которой совпадает с началом координат. Полусферу, соответствующую $x_{n+1} > 0$, обозначим S^n_+. Спроектируем координатную сеть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на плоскости $E^n : x_{n+1} = 1$ на полусферу S^n_+, получим координатную сеть $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Будем рассматривать класс гиперповерхностей $\tilde{\Phi}$, имеющих сферическим изображением полусферу S^n_+. Пусть $H\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\right)$ – опорная функция. Используя положительную однородность первой степени функции $H\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\right)$, получим

$$h = \frac{1}{x_{n+1}} H\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\right) = H\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1\right).$$

Положим $u_1 = \frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, u_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$, тогда имеем $h = h\left(u_1, \ldots, u_n\right) = H\left(u_1, \ldots, u_n, 1\right)$. Назовем функцию $h\left(u_1, \ldots, u_n\right)$ также опорной функцией. Очевидно, каждая гиперповерхность $\tilde{\Phi}$ биективно отображается на гиперповерхность Φ, которая задается уравнением $h = h(u)$, где $u = (u_1, \ldots, u_n)$. По опорной функции $h(u)$ гиперповерхность $\tilde{\Phi}$ восстанавливается по формулам

$$\begin{cases} x_i = h_i, \ i = 1, 2, \ldots, n \\ x_{n+1} = h - \sum_{i=1}^{n} u_i h_i \end{cases},$$

где $h_i = \frac{\partial h}{\partial u_i}, h_{ij} = \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}$ [1].

Пусть заданы выпуклые гиперповерхности $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$, имеющие сферическим изображением полусферу S^n_+. Соответствующие им опорные функции $h^1(u), h^2(u) \in C^2$ пусть удовлетворяют следующим условиям:

$$h^1(u) < h^2(u), \qquad \lim_{\sqrt{\Sigma u_i^2} \to \infty} \left(h^2 - h^1\right) = 0.$$

Сумму главных радиусов кривизны гиперповерхности $\tilde{\Phi}_i \, (i = 1, 2)$ обозначим через $\varphi^i \, (i = 1, 2)$. Пусть выполнено неравенство

$$\varphi^2(u) < \varphi^1(u).$$

Рассмотрим следующую задачу: пусть в каждой точке гиперплоскости E^n определена функция $\varphi(u) \in C^{0,\lambda}$. Требуется доказать существование и единственность гиперповерхности $\tilde{\Phi}$, восстанавливаемой по $h(u) \in C^{2,\lambda}$, сумма главных радиусов кривизны которой равна заданной функции $\varphi(u) \in C^{0,\lambda}$, причем, если функция $\varphi(u)$ удовлетворяет неравенствам

$$\varphi^2(u) \le \varphi(u) \le \varphi^1(u)$$

всюду на гиперплоскости E^n, то опорная функция h, задающая гиперповерхность $\tilde{\Phi}$, удовлетворяет условию

$$h^1(u) \le h(u) \le h^2(u).$$

Поставленная задача аналитически сводится к решению всюду на гиперплоскости E^n линейного эллиптического уравнения

$$\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1+u_i^2\right)h_{ii}+\sum_{\substack{s,t=1\\ s\neq t}}^{n} u_s u_t h_{st}\right]=\varphi(u),$$

где $\varphi(u)\in C^{0,\lambda}$ удовлетворяет неравенствам $\varphi^2(u)\leq\varphi(u)\leq\varphi^1(u)$. Будем искать решение в классе функции $C^{2,\beta}$ на E^n, удовлетворяющее условию $h^1(u)\leq h(u)\leq h^2(u)$. Дальнейшее рассмотрение будем вести в системе координат $(u_1,...,u_n,h)$.

Для решения этой задачи будем следовать методу, предложенному в [2]. Суть метода заключается в том, что гиперплоскость E^n аппроксимируется расширяющейся последовательностью концентрических замкнутых шаров, в каждом из которых решается соответствующая задача Дирихле. Из последовательности решений извлекается подпоследовательность, сходящаяся к решению исходной задачи. Следуя этой методике, получим Пусть всюду на E^n задана функция $\varphi(u)\in C^{0,\lambda}$, удовлетворяющая неравенствам $\varphi^2(u)\leq\varphi(u)\leq\varphi^1(u)$. Тогда существует единственное решение $h(u)$ эллиптического уравнения, удовлетворяющее неравенствам $h^1(u)\leq h(u)\leq h^2(u)$, причем $h(u)$ из класса $C^{2,\lambda}$.

Очевидно, что по опорной функции $h(u)$ восстанавливается единственная гиперповерхность $\tilde{\Phi}$ по вышеуказанным формулам такая, что сумма ее главных радиусов кривизны в каждой точке гиперплоскости E^n совпадает с заданной функцией $\varphi(u)$. Гиперповерхность $\tilde{\Phi}$, вообще говоря, может быть нерегулярной.

Приведем достаточные условия регулярности поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Известно, что проблема Кристоффеля об отыскании замкнутой выпуклой поверхности F с данной положительной суммой $f(\overline{n})$ главных радиусов кривизны, заданной как функция нормали, сводится к решению линейного дифференциального уравнения

$$\Delta_2 p+2p=f$$

на единичной сфере S^2 относительно опорной функции p поверхности F, здесь $\Delta_2 p-$ второй дифференциальный параметр Бельтрами. Известно также, что даже аналитичность опорной функции p еще не гарантирует регулярности поверхности F (на это указал А.Д.Александров [3]). А.В.Погореловым было найдено достаточное условие регулярности (а значит, и выпуклости) F, которое заключается в выполнении неравенства

$$f-f_{ss}>0,$$

где $f_{ss}-$ вторая производная функции f по длине дуги любой большой окружности на S^2 [4].

Напомним кратко идею метода А.В.Погорелова. Пусть $p(\overline{n})-$ опорная функция класса C^2 искомой поверхности F. Для достаточно большого положительного числа C функция $\widetilde{p}=p(\overline{n})+C$ является опорной функцией некоторой закнутой выпуклой поверхности Φ (параллельной F). Если минимальный радиус кривизны поверхности Φ больше C, то очевидно, поверхность F будет выпуклой.

Введем на единичной сфере S^2 функцию $W(\overline{n},\bar{t})$ точки $\overline{n}$ сферы S^2 и касательного направления $\bar{t}$ в этой точке:

$$W(\overline{n},\bar{t})=\widetilde{p}(\overline{n})+\widetilde{p}_{ss}(\overline{n}),$$

где дифференцирование выполняется по длине дуги s окружности большого круга $S(\overline{n},\overline{t})$, проходящего через векторы $\overline{n}$ и $\overline{t}$. Эта функция представляет собой радиус кривизны цилиндра, касающегося поверхности Φ, с образующими, перпендикулярными плоскости круга $S(\overline{n},\overline{t})$, в точке с нормалью $\overline{n}$. Экстремумы функции $W(\overline{n},\overline{t})$ при фиксированном $\overline{n}$ получаются, если направление $\overline{t}$ параллельно главному направлению поверхности Φ, причем эти экстремумы суть главные радиусы кривизны поверхности Φ. Поскольку Φ замкнута, то $W(\overline{n},\overline{t})$ достигает абсолютного минимума в некоторой точке $\overline{n}_0$ и в некотором направлении $\overline{t}_0$ в этой точке. Далее дается априорная оценка снизу величины $W(\overline{n}_0,\overline{t}_0)$, которая и позволяет получить условия положительности минимального радиуса кривизны искомой поверхности F. Несколько модифицировав этот метод [5] можно показать, что условие регулярности поверхности F с заданной суммой $f(\overline{n}) > 0$ главных радиусов кривизны, найденное А.В.Погореловым для замкнутой поверхности, обеспечивает регулярность F и в случае незамкнутой поверхности.

Пусть $F-$ незамкнутая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданная опорной функцией $p(\overline{n}) \in C^4$, определяемой в некоторой области Ω единичной сферы S^2 и пусть $f(\overline{n})$ сумма главных радиусов кривизны поверхности F в точке с нормалью $\overline{n}$. Тогда, если в Ω выполняются условия: $f \in C^2$, $f > 0$, $f - f_{ss} > 0$, где $f_{ss}-$ вторая производная f по длине дуги любой геодезической на сфере S^2, то поверхность F регулярна.

Литература

1. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию "в целом". М.: Наука, 1973. -440 с.

2. Пуолокайнен Т.М. Гиперповерхность с данной плотностью интегральной средней кривизны в E^{n+1} // Вопросы дифференциальной геометрии "в целом". Межвузовский сборник научных трудов. Ленинград, ЛГПИ, 1983. -С. 18-23.

3. Александров А.Д. К вопросу о существовании выпуклого тела, сумма главных радиусов кривизны которого есть данная положительная функция, удовлетворяющая условиям замкнутости // Докл. АН СССР. 1937.-Т.14, N2. -С. 59-60.

4. Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука,1969. -760 с.

5. Кантор Б.Е., Туканаев Т. О регулярности решения незамкнутой задачи Кристоффеля // Задачи геометрии в целом для погруженных многообразий. Межвузовский сборник научных трудов. С.-Петербург, РГПУ, 1991. -С. 7-12.

519.68; 681.513.7;
316.472.45; 007.51/.52

B.S. Baizhanov[2], T.V. Batura[1], F.A. Murzin[1], M.V. Nemchenko[2] , A.A. Perfiliev[1]

[1]A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch

[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
Suleyman Demirel University

e-mail: tatiana.v.batura@gmail.com, murzin@iis.nsk.su, a_perfilev@mail.ru,
baizhanov@hotmail.com, nemchenko.imim@mail.ru

Algorithms of definition of degree of similarity of sentences in a natural language

Key words: *Information Retrieval System, Link Grammar Parser, syntactic analysis, semantics, relevance*

The basic considered problem consists in constructing algorithms, which getting into a text structure can deduce an adequate estimation of relevance of the text to the search inquiry. It is important, that the given estimation would be based on a context of search inquiry and would not be limited only by keywords, their similarity or frequency. Authors offered to use semantic-syntactical relations between words obtained on output of the program system Link Grammar Parser. In report, two algorithms of calculation of degree of similarity of sentences in a natural language are described. The second of them uses the approach based on the mathematical logic. Methods are partially implemented in the information retrieval system iNetSearch.

References

1. *Salton G.* Automatic Information Organization and Retrieval, 1968, 514 p.

2. *Lezin G.V., Tuzov V.A.* The semantic analysis of the text in Russian: semantico-syntactical model of the sentence// Economic-mathematical researches: mathematical models and information technologies.- СПб.: Наука, 2003. - Is. 3. - P. 282-303. (in Russian)

3. *Batura T.V., Murzin F.A.* The machine-oriented logic methods of representation of semantics of the text in natural language // The monograph / A.P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS. - Novosibirsk: Publishing Company of NGTU, ISBN 978-5-7782-1138-4, 2008. - 248p. (in Russian)

4. *Temperley D., Sleator D., Lafferty J.* Link Grammar Documentation [Electronic resource]. - 1998. - Mode of access:
http://www.link.cs.cmu.edu/link/dict/index.html (accessed 15 November 2012)

5. *Sleator D., Temperley D.* Parsing English with a Link Grammar. Pittsburgh: School of Computer Science Carnegie Mellon University, 1991. - 93 p.

6. *Murzin F., Perfliev A., Shmanina T.* Methods of syntactic analysis and comparison of constructions of a natural language oriented to use in search systems // Bull. Nov. Comp. Center, Comp. Science, 2010, Iss. 31, - P. 91-109.

7. *Murzin F., Perfliev A., Shmanina T.* Methods of syntactic analysis and comparison of constructions of a natural language oriented to use in search systems // Vestnik of Novosibirsk State Univ. Ser.:Information Technologies. - Novosibirsk, 2012. -Vol. 9, Is. 4. - P. 13-28. (in Russian)

8. *Lbov G.S.* Methods of processing of polytypic experimental data // The monograph / Sobolev Institute of Mathematics SB RAS . - Novosibirsk: Nauka, 1981. - 160 p. (in Russian)

9. *Vikentiev A.A., Vikentiev R.A.* On the metrics for formulas containing polytypic variables and measures of denyty // Proc.of the Second International Youth School-Conference «Theory and numerical methods of the decision of inverse and incorrect problems». 2011. Part 1. - P. 192-209. [Electronic resource]. - 1998. - Mode of access: http://semr.math.nsc.ru/v8/c182-410.pdf (accessed 18 August 2014) (in Russian)

UDC 519.68; 681.513.7;
612.8.001.57; 007.51/.52

B.S. Baizhanov[2], T.V. Batura[1], N.S. Kopylova[1], F.A. Murzin[1], M.V. Nemchenko[2], A.V. Proskuryakov[1]

[1]A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch,

[2]Institute of Mathematics, Informatics and Mechanics,
Committee of Science of the Ministry of Education and Science of Republic Kazakhstan,
Suleyman Demirel University

e-mail: tatiana.v.batura@gmail.com, n.kopylova@gmail.com, murzin@iis.nsk.su, alexey.proskuryakov@gmail.com, baizhanov@hotmail.com, nemchenko.imim@mail.ru

On some formal methods of analysis of online social networks

Abstract. This work focuses on the analysis of online social networking services. We examine (several) formal definitions of various characteristics (numerical and structural) and introduce appropriate concepts, models and methods that could be useful for the analysis of information obtained from social networks. Preference analysis is proposed to be used to study interpersonal relations. Various modifications of Latane's dynamic social impact theory are proposed. The paper briefly describes a software system that we have developed, which allows extracting, processing, analyzing and visualizing data from online social networking services. Our system has a data extraction module that can retrieve information from social networks such as Twitter, Facebook, and VKontakte. If the volume of information is not so large, all features, concepts, and techniques described in this paper are highly constructive. We mean that the numeric and nonnumeric characteristics, relations, sets, and graphs naturally associated with the network users and their messages can be easily calculated or constructed using appropriate algorithms. This report is devoted to the problem of the analysis of online social networking services. We offered several numerical and structural characteristics, introduced some concepts, models and methods that could be useful for the analysis of information obtained from social networks. A software system has been developed that allows extraction, processing, analysis and visualization of data from online social networking services. Our system has a data extraction module that can retrieve information from social networks such as Twitter, Facebook, VKontakte. The software package allows

performing from 8 000 to 250 000 requests per day, using a single computer. The number of requests depends on the social network, the speed of hardware and bandwidth. Obviously, the amount of information received is very large and it will increase even more with increase in the number of computers used (i.e., within a distributed system of data acquisition and processing). Therefore, first of all we have to select the part of information that can be processed effectively and needed for specific purposes. The easiest way is to use keywords. This method is implemented in our system. Actually, a more detailed study of other non-trivial methods is required. If the volume of information is not so large, all features, concepts, and techniques described in this paper are highly constructive. We mean that the numeric and nonnumeric characteristics, relations, sets, and graphs naturally associated with the network users and their messages can be easily calculated or constructed using appropriate algorithms.

Key words: social network analysis, data mining, Latane's social impact theory

References

1. *Charu C.* Aggarwal Social network data analytics. - 2011. - 520 p.

2. *Batura T.V.* Methods of Social Networks Analysis // Vestnik of Novosibirsk State Univ. Ser.: Information Technologies. - Novosibirsk, 2012. -Vol. 10, Is. 4. - P. 13-28. (in Russian)

3. *Rogers, E. M., Agarwala-Rogers, R.* Communication in organizations. M.: Ekonomika, - 1980. - 178p. (in Russian, translated from: New York: Free Press, - 1976. - 209 p.)

4. *Kryuchkov V.N., Murzin F.A., Nartov B.K.* An Investigation of the Connections in the Collectives and in the Computer Networks // The Problems of Constructing the Efficient and Reliable Programs. - Novosibirsk, 1995. - P. 136-141. (in Russian)

5. *Nowak A., Szamrej J., Latané B.* From private attitude to public opinion: a dynamic theory of social impact // Psychological Review, 97, - 1990. - P. 362 - 376.

6. *Latané B.* The Psychology of Social Impact // American Psychologist. - 1981. - V. 36. - P. 343-356.

7. *Willett P.* The Porter stemming algorithm: then and now // Program: Electronic Library and Information Systems. - Vol. 40(3). - 2006. - P. 219-223.

8. Automatic Text Processing [WEB Resourse]. 2012.Access Regime: http://aot.ru/ (in Russian)

9. MongoDb [WEB Resourse]. 2012. Access Regime:
   http://docs.mongodb.org/manual/reference/replica-status/

10. Gephi, an open source graph visualization and manipulation software [WEB Resourse]. 2012. Access Regime: https://gephi.org/

UDC 510.67

S.S.Baizhanov
T.Zh. Saulebayeva
Institute of mathematics and mathematical modeling
(Kazakhstan, Almaty)
e-mail: sayan-5225@mail.ru

Model completeness of the expansion of almost o - minimal theories

We will consider model complete almost o - minimal theories. We proved that some expansions of model complete almost o-minimal theories can save model completeness property, based on Baizhanov's theorem.

Definition. Weakly o - minimal theory is called almost o - minimal if the notions of weakly and almost orthogonality coincide.

Definition. Theory T is said to be model complete, if for any two models $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$, $[\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}]$

Denote: $\mathfrak{M}$ - is a model of language L
$\mathfrak{M}^+$ - is a model of language $L^+ = L \cup \{P_i\}$
$\phi^+(\bar{x})$ - is a formula of language L^+

Theorem.(Baizhanov B.S.) Let $\mathfrak{M}$ be a model of wom theory. Then $\forall \phi^+(\bar{x}) \exists \gamma \in N \backslash M$ $\exists K_{\phi^+(\bar{x})}(\bar{x}, \gamma)$ $\forall \bar{a} \in M$ $[\mathfrak{M}^+ \models \phi^+(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models K_{\phi^+(\bar{x})}(\bar{a}, \gamma)]$

It follows that $\mathfrak{M}^+$ is a model of wom theory.

Lets consider models $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ of model complete almost o-minimal theory. Then for $\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{N}^+$ holds $\mathfrak{M}^+ \upharpoonright L \prec \mathfrak{N}^+ \upharpoonright L$. By the theorem for $\mathfrak{M}^+$ and $\mathfrak{N}^+$ there exists elementary extensions $\mathfrak{E}_{\mathfrak{M}^+}$ and $\mathfrak{E}_{\mathfrak{N}^+}$ s.t.

$\forall \bar{a} \in M$ $[\mathfrak{M}^+ \models \phi^+(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{E}_{\mathfrak{M}^+} \models K_{\phi^+(\bar{x})}(\bar{a}, \gamma)]$

$\forall \bar{a} \in N$ $[\mathfrak{N}^+ \models \phi^+(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{E}_{\mathfrak{N}^+} \models K_{\phi^+(\bar{x})}(\bar{a}, \gamma)]$.

As $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are elementary submodels of $\mathfrak{E}_{\mathfrak{M}^+}$ and $\mathfrak{E}_{\mathfrak{N}^+}$

for any $\phi(\bar{x})$ holds $\forall \bar{x} \in M$ $[\mathfrak{M} \models \phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{E}_{\mathfrak{M}^+} \models \phi(\bar{x})]$.

for any $\phi(\bar{x})$ holds $\forall \bar{x} \in N$ $[\mathfrak{N} \models \phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{E}_{\mathfrak{N}^+} \models \phi(\bar{x})]$.

From this all we can conclude, that $\mathfrak{M}^+ \prec \mathfrak{N}^+$

References

1. *Baizhanov B.S.* Classification of one - types in weakly o - minimal theories and its corollaries // The Journal of Symbolic Logic, 1977//

2. *D.Macpherson, D.Marker, Ch. Steinhorn* Weakly o - minimal structures and real closed fields //Transactions of the American Mathematical Society, 2000, volume 352, number 12//

UDC 510.67

V.V. Verbovskiy
Suleyman Demirel University
(Kazakhstan, Kaskelen)
e-mail: viktor.verbovski@sdu.edu.kz

On non-empty interior of infinite definable subsets of ordered o-stable fields

Let $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ be a totally ordered structure, a is an element of M and A, B subsets. As usually I write $a < A$ if $a < b$ for any $b \in A$, and $A < B$ if $a < b$ for any $a \in A$ and $b \in B$. A partition $\langle C, D\rangle$ of M is called a *cut* if $C < D$. Given a cut $\langle C, D\rangle$ I construct a partial type $\{c < x < d : c \in C,\ d \in D\}$, which I also call a cut and use the same notation $\langle C, D\rangle$.

Notation Let s be a partial n-type, A a set. Then

$$S^n_s(A) = \{p \in S^n(A) : p \cup s \text{ is consistent}\}$$

Note, s need not to be a partial type over A.

Definition

1. An ordered structure $\mathcal{M}$ is *o-stable in* λ if for any $A \subseteq M$ with $|A| \le \lambda$ and for any cut $\langle C, D\rangle$ in $\mathcal{M}$ there are at most λ one-types over A which are consistent with the cut $\langle C, D\rangle$, i.e. $|S^1_{\langle C,D\rangle}(A)| \le \lambda$.

2. A theory T is *o-stable in* λ if every model of T is. Sometimes I write T is o-λ-stable.

3. T is *o-stable* if there exists a λ in which T is o-stable.

4. T is *o-superstable* if there exists a λ such that T is o-stable in all $\mu \ge \lambda$.

5. T is *strongly o-stable* if in addition any definable cut in a model $\mathcal{M}$ of T is definable in the language of pure ordering, or, equivalently, if $\sup A \in M$ for any definable subset A of $\mathcal{M}$.

In [1] it has been proved that an ordered o-stable group is Abelian and that there is no infinte definable subset which is nowhere dense. The following example $\langle \mathbb{R}, <, +, \mathbb{Q}\rangle$, which is an ordered o-stable group, shows that there is an ordered o-stable group which have an infinite definable subset, which does not have non-empty interior.

P. Simon in [2] proved that if G is a divisible ordered dp-minimal group, and X is an infinite definable set, then X has non-empty interior. V. Verbovskiy in [3] proved that any dp-minimal theory with definable total ordering is o-stable. But the above example shows that the fact by P. Simon cannot be extended to o-stable ordered groups. But I can extend this result for o-stable ordered fields:

Theorem Any infinite definable subset of an o-stable ordered field, possibly with an extra structure, has a non-empty interior.

References

1. *Verbovskiy V.V.* O-Stable Ordered Groups // Siberian Advances in Mathematics. — 2012. — V. 22, N1. — P. 50–74.

2. *Simon P.* On dp-minimal ordered structures // J. Symb. Log., 2011. — 76(2), P. 448–460.

3. *Verbovskiy V.V.* Dp-minimalnye i uporyadochenno stabilnye structury // Matematicheskiy zhurnal, 2010, V. 10., No 2 (36). — P. 35-–38. (In Russian).

UDC 510.67

T.S. Zambarnaya
Institute of mathematics and mathematical modeling
(Kazakhstan, Almaty)
e-mail: t.zambar@gmail.com

Non-homogenous countable models and finite diagrams

We study a connection between finite diagrams of models of a countable complete theory and the number of countable non-isomorphic models of this theory.

Theorem. *Let $\{p_i \in S(T)|i < \omega\}$ and $\{q_i \in S(T)|i < \omega\}$ be two countable sets of non-principal types of a countable theory T. If for every $n < \omega$ there is a model $\mathfrak{M}_n \models T$, in which p_i are realized and q_i are omitted for all $i \leq n$, then there is a countable model $\mathfrak{M} \models T$, such that all p_i, $i < \omega$ are realized and all q_i, $i < \omega$ are omitted in $\mathfrak{M}$.*

For a model $\mathfrak{M} \models T$ denote by $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$ the set of all complete types which are realized in $\mathfrak{M}$:

$$\mathcal{D}(\mathfrak{M}) = \{p \mid p \in S(T), p \text{ is realized in } \mathfrak{M}\}.$$

The set $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$ is called the finite diagram of $\mathfrak{M}$.

Corollary. *If there is a countable complete theory T with $I(T, \omega) = \omega_1$, then there is a finite diagram D, such that $D = \mathcal{D}(\mathfrak{M}_i)$, $\mathfrak{M}_i \in Mod(T)$, $i < \omega_1$, and all the $\mathfrak{M}_i$ are non-homogeneous.*

References

1. *Shelah S.* Finite diagrams stable in power // Annals Math. Logic. - 1970. - V. 2. - P. 69-118.

2. *Baizhanov B.S., Omarov B.* On finite diagrams // Teorija reguljarnyh krivyh v razlichnyh geometricheskih prostranstvah, KazGU, Alma-Ata. - 1979. - P. 11-15.

UDC 510.67

O.A.Umbetbayev
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK
(Kazakhstan, Almaty)
e-mail: olzhas_umbetbayev@mail.ru

Some questions of inessential expansion of theory and the number of countable models

The main goal of this thesis – is studying the conditions that preserve theories with a finite number of countable models with the inessential expansions of theories, as well as studying the possible number of models.

Fact. Let T small theory, $I(T, \omega) > I(T \cup p(c), \omega)$, then the following holds:

1. If there exists an infinite family of types $\Gamma \subset S(T)$ and p powerful over Γ and for any $B \subset \Gamma$ there exists a model $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, which realizes all types from B and omits all types from $\Gamma \setminus B$, then cardinality of set of all finite diagrams of models of the theory T is continuum: $|\Delta| = 2^{\omega}$.

2. If $I(T, \omega) = \omega$ and there exists an infinite family of types $\Gamma \subset S(T)$, $\forall p_i \in \Gamma$ $p_1 <_{RK} p_2 <_{RK} p_3 <_{RK} ... <_{RK} p_n <_{RK}, ...$, then $I(T, \omega, p_i) \geq 3$.

3. If $I(T, \omega) > \omega$ and $|\Delta| = \omega$, then the following holds:

3.1 (Baizhanov-Zambarnaya). There exists $D_O \subset S(T)$ such that
$|\{\mathcal{M}/_{\cong} |\ \mathcal{M} \models T,\ \mathcal{M}$ is countable non-homogenous $\mathcal{D}(\mathcal{M}) = D_O\}| = I(T, \omega)$.

3.2 (Baizhanov - Yershigeshova). Let $\mathfrak{M}$ be a countable, non-homogeneous model of a small theory T, $\mathfrak{N}$ be a countable saturated model ($\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$) and $p(x) \in S(T)$ be a non-isolated type such that $p(x)$ is almost orthogonal to any non-isolated type $q(y)$ from the finite diagram of $\mathfrak{M}$ ($q \in \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$) $\forall q'(\bar{y}, \bar{z}) \supset q(\bar{y})$, where $q'(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$,
$\forall \bar{\alpha} \models q$, for $p' \in S(\bar{\alpha})$ such that $p \subset p'$ we have $p' \perp^a q'(\bar{\alpha}, \bar{z})$. Then the following conditions hold:
1) There exists a countable elementary extension $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}(\bar{c}) \prec \mathfrak{N}$, such that $\mathfrak{M}(\bar{c})$ is also non-homogeneous.
2) For any non-homogeneous $\mathfrak{M}' \ncong \mathfrak{M}$, with equal finite diagrams $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}')$ we have $\mathfrak{M}(\bar{c}) \ncong \mathfrak{M}'(\bar{c})$, and $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\bar{c})) = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}'(\bar{c}))$.
3) For any $\mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N} \models p(\bar{c})$ we have $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\bar{c})) \subseteq \mathfrak{D}(\mathfrak{M}')$

3.3 If $I(T, \omega) = \omega_1$ and condition 3.1 holds, then $I(T, \omega) = I(T \cup p(c), \omega)$.

References

1. Байжанов Б.С., Умбетбаев О.А. Некоторые вопросы несущественного обогащения теории и число счетных моделей // Тезисы докладов Международной конференций "Мальцевские чтения". - 2014. - С.124-125

5 Информатика и вычислительная математика

УДК: 004+371.3-81’246.2

А.Е. Абдуакитова
Государственный Медицинский Университет
Казахстан, г.Семей
e-mail: najia33@mail.ru

Методика обучения билингвов в ВУЗ-ах при изучении информатики

Сегодня в ряде вузов Казахстана обучаются на контрактной основе граждане различных государств - как ближнего, так и дальнего зарубежья. Наши теоретические представления о процессе обучения столь ограничены, что только в очень редких случаях может быть построена достаточно детальная модель, допускающая разработку действительно оптимальных процедур обучения. Необходимо четко понимать, что пока мы не достигнем более глубокого понимания процесса обучения, определение эффективных стратегий обучения не будет возможно. Правильнее было бы сказать, что достижения в области теории обучения окажут влияние на развитие теории преподавания, а разработки в области теории преподавания в свою очередь окажут соответствующее влияние на исследование процесса обучения.

Дидактически новизна обучения в нашем медицинском вузе состоит в том, что здесь используются иные, чем в школе, формы и методы организации учебного процесса - подача нового материала, контроль, отчетность и т.д. При постановке учебных целей студент должен проявить гораздо больше самостоятельности, умения правильно организовать работу, учитывать и распределять время и т.д. Напомним, что многие преподаватели специальных дисциплин считают основной трудностью при изучении их предмета не столько усвоение материала, сколько создание словарного запаса, которого было бы достаточно для осмысленной беседы.

Целью исследования явилось самое простое для психолога изучение - измерение объема вербальной памяти. Тестирование было включено в процесс обычной учебной жизни студентов при изучении дисциплин "физика" и "информатика". Студенты были соучастниками научно- практической психологической деятельности. Результаты тестирования воспринимались испытуемыми как оценка их интеллектуальных возможностей. Тем самым в эксперименте задавался высокий уровень мотивации на достижение максимальной продуктивности, что служило уровнем для разворачивания стратегий активной организации запоминаемого материала.

В качестве мнемического набора предложить для заучивания некоторый набор пар, состоящих из одного русского и одного английского слова. Сеанс обучения состоит из заранее определенного числа проб. После некоторого перерыва проводится проверка всех заученных слов. " Сеанс обучения" продолжится около 15-30 минут и менее продолжительный "сеанс отсроченной проверки" проводится через неделю. Испытуемым предоставлялась полная свобода действий на фазе запоминания.

Отсроченная проверка должна быть одинаковой для всех учащихся и состоит в проверке всех заученных слов. В работе предпринята попытка выработать оптимальную стратегию предъявления учебного материала. Активизация необходимой лексики одновременно с развитием творческих способностей происходит в процессе устного опроса согласно методическому пособию с обязательным условием "плотного" употребления тематического словаря урока.

С заданием справляются почти все студенты, получая удовольствие и от процесса и от результата. Налицо стимулирование творческой инициативы, что делает процесс овладения языком более продуктивным и расширяет представление студентов о своих возможностях.

Литература

1. *Аткинсон Р.* Человеческая память и процесс обучения, Москва "Прогресс", 1980.

2. *Ефремова М.Е., Паймакова Е.А.* Развитие речевых умений и активизация английской общественно-политической лексики на занятиях по прессе для студентов гуманитарных специальностей. Проблемы теории и методики обучения, № 6, 2002, с.72-75.

3. *Иксымбаева Ж.С.* Метод. пособие "Технология обучения для билингвов". Астана: КАТУ, 2011.

УДК 519.685

А.А. Адамов, А.Д. Адамова
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева
E-mail: adam1955@mail.ru, aika_pavl@mail.ru

Автоматизация процесса оценки стоимости недвижимости

В современных условиях глубокие эффективные преобразования в экономике Казахстана возможны нововведениями, на основе активного использования передовых достижений научно-технического прогресса и формирования нового механизма управления. Не достаточно исследованы вопросы автоматизирования процесса оценки стоимости недвижимости с учетом как рыночных факторов, так и технических. Следовательно, отсюда и вытекает необходимость к решению задач, автоматизации процесса оценки стоимости недвижимости, подходить всесторонне с ориентацией на многомодельность и многошаговость процедуры.

В работе разработана программа позволяющая автоматизировать процесс оценки стоимости недвижимости, а также хранить архив по ним.

Любой объект жилой недвижимости кроме площади характеризуется большим набором свойств, каждое из которых в той или иной степени влияют на итоговую рыночную стоимость жилья. Очевидно, что физически невозможно создать такую систему расчетов, которая бы точно могла дать рыночную оценку жилья. Любая система не будет охватывать все возможные в действительности характеристики, влияющие на рыночное ценообразование. В работе реализована математическая модель оценки, охватывающая несколько десятков основных параметров.

Для достоверного определения стоимости квартиры необходимо учитывать много факторов: местоположение и тип дома, удаленность от центра, наличие двора, охрана, паркинг и т. д.

Основной критерий, влияющий на стоимость объекта - его площадь. Главной изменяющейся характеристикой на рынке недвижимости является цена квадратного метра. В самом грубом приближении стоимость объекта будет результатом перемножения этих двух величин. Естественно, что такой вариант неудовлетворителен.

Основная идея расчета состоит в вычислении интегрированного коэффициента на основе всех многочисленных параметров выбранных для конкретного объекта. Данный коэффициент изначально берется равным единице, что будет соответствовать среднему статическому показателю. Далее данный коэффициент уточняется на основе детализирующих коэффициентов, взятых из описания объекта. В результате итоговая величина будет умножена на данный коэффициент. При ‘правильном подборе коэффициентов и вводе действительной текущей рыночной стоимости квадратного метра результат расчета должен соответствовать действительности.

Механизм выбора коэффициентов по каждому значению каждого из критериев определены по методу сравнительного подхода.

Сравнительный подход основан на предположении, что разумный покупатель не заплатит за объект больше той суммы, за которую он может приобрести на открытом рынке объект аналогичной полезности. Определение стоимости объекта основывается на рыночные данные купли - продажи.

В работе стоимость недвижимости определяется по рыночной цене и найдены коэффициенты параметров, влияющие на стоимость квартиры.

Процедура оценки недвижимости состоит из следующих этапов:

1. Потенциальному покупателю предлагается ряд конкретных объектов недвижимости.

2. Определяются критерии, по которым производилась сравнительная оценка качества предлагаемой недвижимости.

3. Попарно проводиться сравнение критериев используемых в исследовании. Суть данных сравнений заключается в сравнительной оценке важности одного критерия относительно другого.

4. Попарно проводиться сравнение всех анализируемых объектов недвижимости по каждому из критериев, т.е. все конкретно рассматриваемые объекты попарно сравниваются по всем критериям, то есть первый вариант недвижимости со вторым, третьим и четвертым, второй вариант недвижимости с третьим и четвертым и, наконец, третий вариант недвижимости с четвертым по первому критерию, второму критерию и так далее по всем критериям.

5. В качестве основных исследуемых объектов недвижимости используется не менее 4 объектов (чем больше объектов, тем лучше для сравнения и это исключает случайность в оценке), что, на наш взгляд, позволит обеспечить большую объективности анализа.

Математическая модель оценки объекта недвижимости с использованием метода рыночных сравнений может быть представлена в следующем виде:

$$C_0 = \sum_{i=1}^{k} W_i \times C_{0i},$$

где C_0- оценка рыночной стоимости объекта оценки, k - количество аналогов, C_{0i} - оценка рыночной стоимости объекта с использованием информации о цене i - го аналога, W_i - вклад i - го аналога в стоимость объекта оценки. Оценка рыночной стоимости объекта с использованием информации о цене i - го аналога может быть представлена следующим образом:

$$C_{0i} = Q_i + \sum_{j=1}^{n} \Delta Q_{ij}.$$

Здесь Q_i - цена i - го аналога, n - количество ценообразующих факторов, ΔQ_{ij} - значение корректировки цены i - го аналога по j - му ценообразующему фактору (местоположение, состояние, этаж т.п.).

Литература

1. Гофман В.Э, Хомоненко А.Д. Delphi 6. - СПб.: БХВ - Петербург, 2001.

2. Фаронов В. В. Delphi 6: Учебный курс. - М.: Издательство "Нолидж", 2001.

3.Грибовский С.В., Иванова Е.Н., Львов Д.С., Медведева О.Е. Оценка стоимости недвижимости. - М.: ИНТЕРРЕКЛАМА, 2003.

4.Генри С. Харрисон. Оценка недвижимости: Уч. пособиеПер. с англ. - М.: РИО Мособлупрполиграфиздат. 1994.

УДК 004.056.5

Р.Г. Бияшев, Н.А. Капалова, С.Е. Нысанбаева, Д. Дюсенбаев

Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК

(Казахстан, Алматы)

e-mail: brg@ipic.kz, sultasha1@mail.ru, kapalova@ipic.kz, dimash_dds@mail.ru

Программная реализация модели асимметричной системы шифрования на базе НПСС

Асимметричная криптография, изобретенная и развивавшаяся за последние десятилетия прошлого века, заняла за это время почти такое же положение, как и блочное симметричное шифрование, насчитывающее полувековую историю. Они решают те проблемы, которые неразрешимы для симметричных алгоритмов, но скорость работы намного ниже.

Криптографическая стойкость системы шифрования Эль-Гамаля с открытым ключом основана на сложности проблемы дискретного логарифмирования в мультипликативной группе конечного поля. Эта задача сложно реализуема для значений p, содержащих более 150 десятичных знаков. Рекомендуется выбирать p таким, чтобы число $p-1$ содержало большой простой делитель. Недостатком криптосистемы Эль-Гамаля является удвоение длины открытого текста при шифровании, а также необходимость использования различных значений рандомизатора для зашифрования различных открытых текстов [1-2].

В Институте информационных и вычислительных технологий ведутся научные работы по разработке и исследованию симметричных и ассиметричных алгоритмов шифрования и цифровой подписи, разработанных с использованием алгебраического подхода на базе непозиционных полиномиальных систем счисления [3-5].

Синонимы непозиционных полиномиальных систем счисления (НПСС) - полиномиальные системы счисления в остаточных классах, непозиционные системы счисления и модулярная арифметика. Алгоритмы и методы, созданные на базе этих систем, называют также нетрадиционными, непозиционными или модулярными. В классической системе счисления в остаточных классах (СОК) в качестве системы оснований выбираются положительные попарно простые целые числа, и в ней целое положительное число представляется своими остатками (вычетами) от деления на эту систему оснований. Построение СОК основано на использовании китайской теоремы об остатках. В соответствии с этой теоремой представление числа в виде последовательности вычетов является единственным, если основания будут попарно просты между собой. В отличие от классических СОК в НПСС основаниями служат неприводимые многочлены над полем $GF(2)$, то есть с двоичными коэффициентами [3,4]. Особенностью нетрадиционных криптографических алгоритмов является возможность распараллеливания выполнения арифметических операций по модулям оснований НПСС, в связи с этим повышается скорость выполнения криптоалгоритма.

Параллельно с этими работами проводятся исследования по модификации разработанной модели с использованием сети Фейстеля и ЭЦП на базе НПСС. Для получения модели нетрадиционного алгоритма шифрования на базе НПСС использовалась модифицированная схема Фейстеля. Целью этих работ является улучшение статистических характеристик непозиционных криптограмм [6].

С целью исследования и анализа преимуществ модифицированного алгоритма шифрования Эль-Гамаля произведена его программная реализация на языке C++ [7]. Компьютерная программа состоит из двух взаимосвязанных блоков (подпрограмм): системы формирования секретных и открытых ключей, системы шифрования. Эти подпрограммы запускаются на выполнение соответственно кнопками вкладок "Key" и "Crypto". В блоке формирования секретных и открытых ключей реализуются следующие процедуры:

- вычисление неприводимых многочленов заданной степени с двоичными коэффициентами и выбор рабочих оснований;
- нахождение примитивных многочленов по выбранным рабочим основаниям;
- вычисление открытых и закрытых ключей.

В блоке шифрования электронных сообщений основными модулями являются:

- выбор открытого ключа получателя;
- выбор случайного числа (рандомизатора);
- зашифрование сообщения и расшифрование криптограммы.

В процессе компьютерной реализации модифицированного алгоритма шифрования по схеме Эль-Гамаля выявлена возможность ускорения вычислений при выполнении операции возведения в степень по модулям рабочих оснований НПСС.

При формировании ключей шифрования определялись неприводимые многочлены заданной степени над полем $GF(2)$ и соответствующие им примитивные элементы (многочлены). Вычисленные неприводимые многочлены сохраняются в базе данных ключей. Они используются при формировании открытых и закрытых ключей. Открытые ключи других пользователей принимаются виде файла, которые также будут храниться в базе данных ключей. При выполнении подпрограмма "Key" генерирует, экспортирует и импортирует ключи шифрования (рисунок 1).

Пользователь программы создаёт ключевую пару: открытый и закрытый ключ. При генерации ключей задаются их владелец, длина ключа и срок его действия. Открытый ключ используется для зашифрования исходного сообщения, а закрытый ключ - для расшифрования криптограммы.

Длина ключа определяется пользователем. Срок действия ключей может быть определён как неограниченный или до конкретной даты. Для защиты

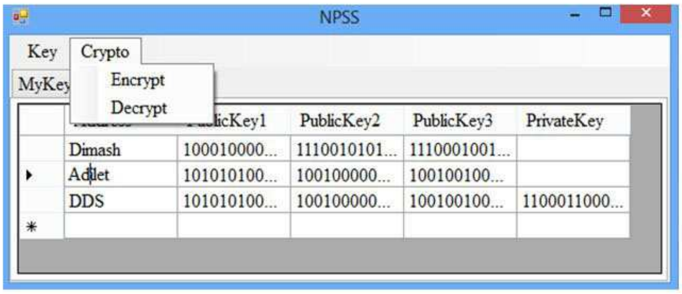

Figure 1: Окно вкладки "Key"

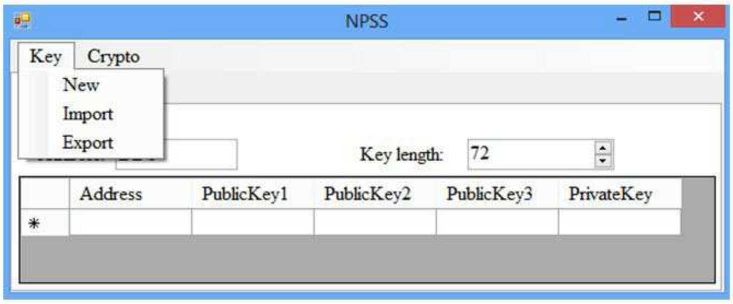

Figure 2: Окно вкладки "Crypto"

ключей программа будет модернизироваться, планируется использовать хеширование с применением секретной фразы. Экспортируемые ключи хранятся и передаются в виде файла.

Подпрограмма "Crypto" реализует систему шифровании и сохраняет зашифрованные файлы и расшифрованные шифртексты (рисунок 2). При построении НПСС выбор рабочих оснований планируется проводить двумя способами. В первом случае рабочие основания будут выбираться из разработанной базы данных неприводимых многочленов, а во втором - генерироваться в процессе выполнения криптоалгоритма по заданному интервалу значений степени неприводимых многочленов.

В продолжение представленных результатов по разработке и реализации модифицированной системы шифрования планируется создание центра сертификации. Доверенность сертификата будет означать, что ключ действительно принадлежит указанному владельцу и может использоваться для подписи сертификатов одним уровнем ниже. Также в ней будет указан способ отмены сертификата. Это необходимо для обеспечения безопасности при потере или компрометации закрытого ключа.

Литература

1. *T. El Gamal*"A Public-Key Cryptosystem and a Signature Scheme Based on Discrete Logarithms", IEEE Transactions on Information Theory, v. IT-31, n. 4, 1985. pp. 469-472.

2. *Menezes A., Orschot P. and Vanstone S.* Handbook of Applied Cryptography - CRC Press, 1996.

3. *I. Ya. Akushskii, D. I. Juditskii* "Machine Arithmetic in Residue Classes [in Russian]," Moscow: Sov. Radio, 1968.

4. *R. G. Biyashev* "Development and investigation of methods of the overall increase in reliability in data exchange systems of distributed ACSs," Doctoral Dissertation in Technical Sciences, Moscow, 1985.

5. *R. G. Bijashev, S. E. Nyssanbayeva* Algorithm for Creation a Digital Signature with Error Detection and Correction // Cybernetics and Systems Analysis. - 2012. - Vol. 48, No 4, pp. 489-497.

6. *Biyashev R.G., Nyssanbayeva S.E., Begimbayeva Ye.Ye., Magzom M.M.* Modification of the cryptographic algorithms, developed on the basis of nonpositional polynomial notations // Proceedings of the International Conference on Circuits, Systems, Signal Processing, Communications and Computers (CSSCC 2015), - Vienna, Austria., 170-176 pp., 2015.

7. *Капалова Н.А.* Модифицированный алгоритм шифрования Эль-Гамаля на базе непозиционных полиномиальных систем счисления // Известия Национальной академии наук РК. - Алматы, 2013. - № 1. - С. 22-26.

УДК 004.932

А.Б. Есеналиева, Н.Г. Макаренко, И.Т. Пак
Институт информационных и вычислительных технологий
(Казахстан, Алматы)
e-mail: a.esenalieva@mail.ru

Применение топологического анализа для распознавания текстур

Топологический анализ данных является новой областью обработки данных и способствует распознаванию образов на цифровых изображениях высокого разрешения [1]. Мультимасштабный подход к анализу изображений и высокая толерантность к уровню шумов обеспечивают получение строгих математических результатов. Эти знания могут составить основу практически всех прикладных наук: биологии, медицины и т.д., например, в применении к данным дистанционного зондирования, используемых в геоинформационных системах различного назначения.

В основе используемого нами подхода лежит топологическая фильтрация отсчетов по уровням с последующим построением нерва покрытия. С помощью методов алгебраической топологии подсчитывается число компонент связности (число Бетти 1) и число дыр - неограничивающих циклов (число Бетти 2) для каждого уровня фильтрации [2]. Компоненты связности и дыры возникают и исчезают, время их рождения и исчезновения кодируется определенной точкой на плоскости, а облако таких точек составляет диаграмму персистентности. Для сравнения различных диаграмм обычно используется кусочно-линейная конструкция, т.н. ландшафт [3]. Фильтрация заканчивается в тот момент, когда остается один общий кластер.

Топологическое распознавание текстур было осуществлено нами тестированием базы данных HR изображений, доступной на сайте $http : //www.cfar.umd.edu/fer/website-texture/texture.htm$, которая содержит 25 классов изображений, по 40 представителей в каждом классе. Для каждого класса были построены так называемые усредненные ландшафты первых 10 рангов для компонент Бетти 0 и Бетти 1, а внутри каждого класса текстур выполнено их поранговое усреднение. Было показано, что используемый нами метод позволил успешно распознать большую часть текстур в каждом классе.

Однако наряду с изображениями с высоким процентом распознавания встречались классы текстур, плохо поддающиеся обработке, такие как, например, изображения яблок и тротуарной плитки. В приведенных случаях проблема связана со слишком широкой дисперсией относительно усредненного значения для ландшафтов обоих компонент чисел Бетти. Эта ситуация наблюдается для всех рангов, по которым производится усреднение, что и вносит существенную ошибку в определение принадлежности случайного изображения к своему классу.

Таким образом, результаты проведенного исследования показали практическую эффективность применения данного подхода.

Работа выполнена при поддержке грантов министерства образования и науки Республики Казахстан 2308/ГФ3 и 3326/ГФ4 КН МОН РК.

Список литературы

1. *Макаренко Н.Г., Каримова Л.М., Круглун О.А. Скейлинговые свойства цифровых изображений земных ландшафтов// Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из Космоса. 2014. Т.11, №2. С.26-37.*

2. *Макаренко Н.Г., Уртьев Ф.А., Князева И.С., Малкова Д.Б., Пак И.Т., Каримова Л.М. Распознавание текстур на цифровых изображениях методами вычислительной топологии // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из Космоса. 2015. Т. 12. С.131 144.*

3. *Bubenik P.Statistical topological data analysis using persistence landscapes // 2014, arXiv:1207.6437 [math.AT].*

УДК 518.1

Е.А. Касымов

Казахский Национальный исследовательский технический университет им. К.И.Сатпаева

(Казахстан, Алматы)

e-mail: edil 1947@mail.ru

Об еще одном выводе неизвестных в квадратурной формуле Ньютона-Котеса

Известно, что для приближенного вычисления определенного интеграла используется интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами разбивающими промежуток интегрирования на равные части и неизвестные коэффициенты C_i определяются с помощью определенного интеграла, а остаточный член $R_{2m}(f)$-интегрированием по частям, теореме о среднем и теореме о промежуточном значении. Причем их используют несколько раз [1]. В данной работе предлагается новый метод для квадратичной формуле Ньютона-Котеса замкнутого (открытого) типа при $n = 2m$, $h = \frac{b-a}{2m}$, $m = 1, 2, 3, ...$

Предположим, что подинтегральная функция $f(x)$, на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывные производные до порядка $2m + 3, (m = 1, 2, 3, ...)$ включительно.

Вычислим определенный интеграл по квадратурной формуле Ньютона-Котеса замкнутого типа пр $n = 2m$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{b=x_0+2mh} f(x)dx = 2mh\sum_{i=0}^{2m} C_i f(x_i) + R_{2m}(f),$$

где $x_i = x_0 + ih$-узлы интегрирования, $f(x_i)$-известные значения в узлах x_i. Теперь определим неизвестные c_i.

Рассмотрим функцию

$$F(h) = \int_{a=x_0}^{x_0+2mh} f(x)dx - 2mh\sum_{i=0}^{2m} C_i f(x_0 + ih)$$

Разложим $F(h)$ по формуле Маклорена в окрестности точки h до $2m + 3$ порядка включительно.

Предположим, что $F^k(0) = 0$, $k = 1, ..., 2m + 1$. Тогда имеем систему относительно C_i с определителем Вандермонда:

$$\sum_{i=0}^{2m} i^l C_i = \frac{(2m)^l}{l+1}, \quad l = 0, 1, ...2m.$$

Решение системы обозначим через A_i, $C_i = A_i$, $i = 0, 1, ..., 2m$

Теперь оценим $R_{2m}(f)$. При $h = 0 : F^{(2m+2)}(0) \equiv 0$, При $h \to 0$:

$$F^{(2m+3)}(\theta h) = [(2m)^{2m+3} - 2m(2m+3)\sum_{i=1}^{2m} i^{2m+3} A_i] f^{(2m+2)}(x_0) + O(h).$$

Тогда окончательно имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{b=x_0+2m} f(x)dx = 2mh\sum_{i=0}^{2m} A_i f(x_i) + R_{2m},$$

$$R_{2m} = \frac{T_{2m}h^{2m+3}}{(2m+3)!}[f^(2m+3)(x_0) + O(h)]$$

Рассмотрим пример: если $m = 2$, т.е. $n = 4$, то квадратурная формула замкнутого типа имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{b=x_0+4h} f(x)dx = 4h\sum_{i=0}^{4} c_i f(x_i) + R_4$$

. Определим коэффициенты. Из системы

$$\sum_{i=0}^{4} i^l C_i = \frac{4^l}{l+1}, l = 0, 1, 2, 3, 4.$$

находим неизвестные коэффициенты квадратурной формулы Ньютона-Котеса:

$$C_0 = C_4 = \frac{7}{90}, \quad C_2 = \frac{12}{90}, \quad C_1 = C_3 = \frac{32}{90}.$$

Проверяем тождество при $h = 0$:

$$F^{(6)}(0) = [4^6 - 24 \sum_{i=1} 4i^5 C_i] f^{(6)}(x_0) \equiv 0.$$

Определим остаточный член. При $h \to 0$:

$$F^{(7)}(\theta \cdot h) = [4^7 - 4 \cdot 7 \sum_{i=1}^{4} i^6 C_i] f^{(6)}(x_0) = -\frac{384}{9} f^{(6)}(x_0).$$

Отсюда:

$$R_4(f) = \frac{384h^7}{-9 \cdot 7!}[f^{(6)}(x_0) + O(h)] = -\frac{8}{945} h^7 [f^{(6)}(x_0) + O(h)].$$

Окончательно имеем:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_0+4h} f(x)dx = \frac{4h}{90}[7f(x_0) + 32f(x_0+h) + 12f(x_0+2h) + \\ +32f(x_0+3h) + 7f(x_0+4h)] + R(f) \tag{1}$$

$$R_4(f) = -\frac{8}{945} h^7 [f^{(6)}(x_0) + O(h)], \quad h = \frac{b-a}{4} \tag{2}$$

Если формулу (1) применить не сразу по всему отрезку $[a, b]$, а разбить отрезок на $4l$ равных частей, длины $h = \frac{b-a}{4l}$ с узлами $x_i = x_0 + 4ih$ к каждой $[x_i, x_{i+1}]$-частичной части в отдельности применить формулу (1), то погрешность квадратурной формулы (2) можно значительно снизить. Для этого определенный интеграл запишем в виде:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_0+4lh} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+4h} f(x)dx + \int_{x_0+4h}^{x_0+8h} f(x)dx + \\ \int_{x_0+8h}^{x_0+12h} f(x)dx + \dots + \int_{x_0+(4l-4)h}^{x_0+4lh} f(x)dx \tag{3}$$

Теперь применим к каждому интегралу правой части (3) формулы (1) и (2), тогда окончательно получим:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_0+4lh} = 4lh \sum_{k=0}^{l-1} [\frac{7}{90} f(x_0 + 4kh) + \frac{32}{90} f(x_0 + (4k+1)h) + \\ + \frac{12}{90} f(x_0 + (4k+2) + \frac{32}{90} f(x_0 + (4k+3)h) + \frac{7}{90} f(x_0 + (4k+4)h] + R_4^c(f), \tag{4}$$

$$R_4(f) = -\frac{8l}{945} h^7 [f^v(x_0) + O(h)], h = \frac{b-a}{4l}, l = 1, 2, 3, ... \tag{5}$$

Формула (4) с остаточным членом (5) называется обобщенной квадратурной формулой Ньютона-Котеса замкнутого типа при n=4.

Литература

1. *Березин И.С., Жидков Н.П.,* Методы вычислений т.1, М. Наука, 1966 - 632 с.

УДК 62-529; 004-021; 004.896

С.И. Колесникова
Национальный исследовательский Томский государственный университет (Россия, Томск)
e-mail: skolesnikova@yandex.ru

Метод управления в нелинейных плохо формализуемых системах с аналитически заданной целью управления

Рассматривается подход к решению проблемы управления сложным (по Л.А. Растригину) объектом, реализованный методом нелинейного управления на многообразиях и поддержанный алгоритмически и программно. Объект управления представлен системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с наличием неопределенности в правой части описания. Метод синтеза системы управления компенсирует неполноту описания за счет известного целевого многообразия и совмещает достоинства методов аналитического конструирования агрегированных регуляторов (например, [1]) и управления на многообразиях в скользящем режиме. Используется синергетическая концепция, опирающаяся на фундаментальное свойство самоорганизации природных диссипативных систем. Суть синергетической теории управления, к базовым понятиям которой относятся «инварианты, детерминированный хаос, самоорганизация, оптимизация, синтез», сводится к следующим положениям.

1. Формулируется цель системы управления – аналитическое описание целевых аттракторов (инвариантных многообразий), что согласуется с «физической теорией управления» А.А. Красовского.

2. Синтез законов управления основан на оптимизации функционала качества с гибкой конструкцией, учитывающего промежуточные и целевое состояния объекта.

3. Предполагается выполнение условий: 1) существование асимптотически устойчивой целевой системы с заданными свойствами; 2) ограниченность всех решений исходной системы; 3) стабилизируемость состояния объекта; 4) существование целевого многообразия по отношению к исходной системе уравнений объекта с аналитическим описанием вида $\Psi(x) = 0$, где $\Psi(x)$ - некоторая заданная целевая функция.

Следует отметить, что формализм инвариантов известен в аналитической механике, и для построения системы управления применялся Г.В. Щипановым, впервые поставившим задачу синтеза «регулятора с полной компенсацией» (внешних возмущений).

Постановка задачи. В докладе рассматривается задача конструирования управления сложным объектом с описанием:

$$\begin{aligned} \dot{x_j}(t) &= f_j(x_1, x_2, ..., x_n; \Theta; u_j), j = \overline{1, m}; \\ \dot{x_j}(t) &= f_j(x_1, x_2, ..., x_n; \Theta), j = \overline{m+1, n}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ – вектор состояний, $\Theta \in R^k$ – вектор параметров, $u \in R^m, m < n$ – вектор управления, $f \in R^n$ – непрерывная (нелинейная) вектор-функция; компоненты вектора $f_1, f_2, ..., f_m$ неизвестны. Для объекта (1) ставится задача нахождения закона управления $u(x)$, обеспечивающего перевод объекта управления

(1) из произвольного начального состояния $x(0)$ в некоторой области фазового пространства в заданное состояние и его стабилизацию в некоторой окрестности целевого многообразия $\Psi(x) = 0$, где $\Psi(x)$ – специальным образом определенная макропеременная (функция, зависящая от координат объекта).

Решение задачи. Основные положения алгоритма аналитического синтеза системы управления многомерным нелинейным объектом с неполным описанием АКАР+

1. Процесс синтеза системы управления является иерархическим и состоит из двух основных этапов: сначала применяется классический метод АКАР [1], затем для компенсации неопределенности $f_1, f_2, ..., f_m$ применяется аппарат устойчивости по Ляпунову, который является основой метода синтеза системы управления, известного под названием «гарантирующего регулятора» [2].

2. Каждый k -й этапа процесса синтеза системы управления заключается в формулировании соответствующей вариационной задачи $(J_k, \Psi_j^{(k)}), j \in I_k = (1, ..., s_k), s_k \le m$, где $J_k = \int\limits_0^\infty (\Psi_j^{(k)}(t))^2 + (\omega_j^{(k)})^2 (\dot{\Psi}_j^{(k)})(t))^2\, dt$ – функционал качества, сопровождающий процесс синтеза системы управления; макропеременные $\Psi_j^{(k)}, j \in I_k$ удовлетворяют системе функциональных уравнений:
$$\omega^{(k)} \dot{\Psi}_j^{(k)}(x(t)) + \Psi_j^{(k)}(x(t)) = 0, j \in I_k, \tag{2}$$
устойчивые решения которых доставляют глобальный минимум функционалу J_k ; здесь s_k – число переменных управления k-го этапа; $\omega^{(k)}$ – параметры системы управления, пропорциональные времени движения изображающей точки системы, описывающей объект управления, до аттрактивного множества вида: $\Psi_j^{(k)} = 0, j \in I_k$.

3. Управляющие переменные каждого этапа синтеза системы управления удовлетворяют уравнениям вида (3). Можно показать, что при выполнении определенных условий (а именно: функции $\Psi_j^{(k)}, j \in I_k$ – однозначные, непрерывные, дифференцируемые; $\Psi_j^{(k)}(0) = 0, (\Psi_j^{(k)}(t))^2 > 0$ для любого $t \ne 0$) являются уравнениями Эйлера-Лагранжа для задачи $J_k \to min$.

4. Для неполно описанного объекта типа (1) управления ищутся в виде: $u_j(x) = u_j^A(x) + \upsilon_j^A(x), j = \overline{1,m}$ согласно [3]. Здесь управления $u_j^A(x)$ находятся в соответствии с вариационной задачей $(J_k, \Psi_j^{(k)}), j \in I_k$; невязки $\upsilon_j^A(x)$ ищутся по принципу гарантирующего регулятора для декомпозированной системы, полученной после подстановки управлений $u_j^A(x)$ согласно [2].

5. Вместо неизвестных функций $f_1, ..., f_m$ в АКАР-управлениях $u_j^A(x)$ [1] используются их *произвольные* аппроксимации $\hat{f}_1, ..., \hat{f}_m$. Возникающая при этом погрешность компенсируется алгоритмом гарантирующего регулятора, основная идея в применении которого здесь заключается, во-первых, в расширении фазового пространства за счет введения новых переменных $z_j = f_j - \hat{f}_j, j = \overline{1,m}$ [**?**]; во-вторых, синтезе такой дополнительной составляющей управления $\upsilon^A = (\upsilon_1^A, ..., \upsilon_m^A)$, которая гарантирует $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = 0$.

6. Управления $\upsilon_j^A(x)$ удовлетворяют условию устойчивости по Ляпунову для декомпозированной системы, полученной после подстановки управлений $u_j^A(x)$.

Основные положения приведенного ниже алгоритма удобно рассмотреть на примере системы 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= f_1(x); \\ \dot{x_2}(t) &= f_2(x) + u, \end{aligned} \tag{3}$$

где f_1 – известная функция, f_2 – неизвестная нелинейная функция. Итогом данного алгоритма применительно к объекту с описанием (3) будет система управления вида:

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= f_1(x); \\ \dot{x_2}(t) &= -\omega^{-1}\Psi(x) - f_1(x) + \upsilon(t); \\ \dot{\upsilon}(t) &= -\eta\Psi(x). \end{aligned}$$

Отметим, что алгоритм АКАР+ не требует знание границы неопределенности f_2 (в отличии от базовых методов АКАР и управления в скользящем режиме.

Численные эксперименты на технических многомерных и нелинейных объектах (самолет-амфибия ($n = 6$) и двумерная экономическая модель) показали, что свойства робастности и асимптотической устойчивости корректирующего АКАР-управления остаются в силе даже в нерасчетных условиях (при случайном (5-10 – %-м) шуме на измеряемые координаты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-08-01015-а.

Литература

1. *Колесников А.А.* Синергетика и проблемы теории управления: сборник научных трудов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 504 с.

2. *Колесников А.А.* Метод интегральной адаптации нелинейных систем на инвариантных многообразиях // Труды 3-ей мультиконференции по проблемам управления. – СПб., 2010.

3. *Колесникова С.И.* Нелинейный регулятор с компенсацией возмущений//Автометрия. 2015. № 4.

УДК 519.7, 622.272/.275

Ж. Мусина, С. Мустафин
Институт информационных и вычислительных технологий
(Казахстан, Алматы)
e-mail: mustafinsal@mail.ru

Моделирование и прогнозирование процессов твердения

Для решения проблемы прогноза состояний технологических процессов применяют различные методы моделирования. При этом сложный технологический процесс разбивается на разные по физической природе составляющие, проводится раздельное изучение, после чего определяется их взаимное влияние на основе методов анализа данных. Эти методы особенно востребованы при разработке систем прогнозирования поведения технологических процессов, доступ к которым ограничен опасностью измерения характеристик объектов исследования. В работе предлагается методика прогнозирования процесса твердения закладочного массива по данным ранних наблюдений за состоянием закладочного материала. Применение закладки на горнодобывающих предприятиях вызвано обеспечением безопасного процесса ведения добычных работ, сохранением строений на поверхности земли, обеспечением безопасности и сохранения окружающей среды и т.д. С этой целью выработанное пространство заполняют закладочным материалом, который после достижения определенного состояния материала, должен выполнять функцию поддерживающих целиков. В горном деле закладку определяют как заполнение закладочным материалом выработанного пространства, которое образуется в недрах земли в результате выемки полезного ископаемого. Закладочные материалами могут быть измельченные горные породы, и отходы производства. Закладка бывает полной, если заполняется всё выработанное пространство, и частичной при заполнении определённой его части (в виде полос или слоев). В зависимости от способа транспортирования и укладки различают гидравли-ческую, пневматическую, гидропневматическую, механическую, самотёчную и ручную. Цели, преследуемые при использовании закладочного материала, зависят от предназначения. Закладка применяется для управления горным давлением, для снижения потерь и разубоживания добываемого полезного ископаемого при добыче, для предотвращения подземных пожаров, для уменьшения деформаций поверхности земли и для охраны объектов на земной поверхности от разрушения, повышения безопасности горных работ, улучшения проветривания подземных выработок, для уменьшения транспортных затрат. Требования к свойствам закладочного массива могут быть разными и зависят от его назначения. Так, требования к закладочному массиву, предназначенному для предотвращения просадки земной поверхности и охраны тем самым зданий и сооружений намного выше и здесь особенно важно проводить прогноз его состояний закладки, чем в случаях, когда например, закладка выполняет функции заполнителя пустот и предотвращения разубоживания и потерь руды. В зависимости от назначения и систем разработки месторождений применяются сухая, гидравлическая, твердеющая и др. закладки. Естественно отличаются свойства и способы их создания.

При твердеющей закладке добавляют вяжущий компонент, что существенно повышает стоимость закладки, вследствие дороговизны вяжущего материала. Данный вид закладки намного превышает стоимость остальных и применяется в строго определенных случаях и только при условии обеспечения полной окупаемости материалов и работ по закладке.

Встает проблема определения готовности состояния твердеющего закладочного массива к выполнению предназначенных ему функций.

С середины XX века для решения проблемы прогноза состояний стали применять различные методы моделирования. Согласно этим методологиям, сложный технологический процесс расчленяется на разные по физической природе составляющие, проводится раздельное их изучение, после чего их взаимное влияние определяется математическими методами с использованием ЭВМ. Это вызвано невозможностью, в большинстве случаев, воспроизвести в лаборатории во всех особенностях реальный процесс, сопровождающийся процессами переносом вещества и тепла. Как известно, исследование любого технологического процесса состоит из последовательности этапов - формулировка цели и постановка задачи; изучение всей информации о процессе; построение физико-химической структуры модели процесса; предварительное построение математической модели; решение задач по оптимальным режимным параметрам процесса; проведение вычислительных экспериментов в различных условиях; планирование и осуществление натурного лабораторного эксперимента; сопоставление результатов натурного и вычислительного экспериментов. Ряд этапов может отсутствовать или объединен в один. В результате проведения перечисленных этапов возникает модель технологического процесса, готовая к промышленной реализации. Поэтому большую актуальность приобретает разработка моделей прогноза поведения динамических процессов. При этом к математической модели предъявляется ряд важных требований - адекватность, простота, устойчивость относительно погрешностей в исходных данных, продуктивность, наглядность, стоимость получения исходных данных и ряд других условий. В процессе создания твердеющего закладочного массива, состоящего из заполнения и формирования при этом искусственного массива вследствие усадки материалов закладки, затруднительно проведение натурных исследований в производственных условиях по широкому спектру показателей, характеризующих его состояние. Для оценки состояния закладочного массива, возможно исследование его отдельных элементов, выбуривая, например, из закладки керны в определенные моменты времени (неделя, месяц и т.д.) и исследуя их характеристики проводить прогнозирование состояния всего закладочного массива. Другим способом прогноза состояния закладочного массива может быть физическое моделирование эквивалентными материалами. При этом сам объект исследования может быть исследован механическими, ультразвуковыми, электрическими и другими методами. Оценка изменения в течение времени прочностных, ультразвуковых, электрических и тепловых параметров закладки в целом составляют прогнозную картину состояния закладочного массива. Попытки решать задачи макрокинетики на основе подобия теории и физического моделирования оказались неполными из-за несовместимости условий подобия химических и физических составляющих процесса. Для решения проблем макрокинетики должны быть известны закономерности собственно химического превращения, не искажённые влиянием процессов переноса, и законы массо - и теплопередачи. Закономерности химического превращения выражаются в виде кинетических уравнений, отражающих за-висимость скорости химической реакции от состава реакционной смеси, температуры, давления, свойств катализатора (для каталитических процессов) и др. Во всех случаях для прогнозной оценки состояния закладочного массива представляется необходимым измерять в различные моменты времени параметры закладочного материала, характеризующие статическое состояние и их динамику.

Формальная постановка задачи. Под состоянием закладочного материала будем понимать набор значений физических свойств материала в некоторый момент времени t . Такими признаками являются механические, тепловые, ультразвуковые, электрические и другие параметры закладочного материала, измеряемые в момент времени t. Пусть на входе предполагаемой системы оценки состояния закладочного массива зафиксированы значения входных параметров, а на выходе принимаются значения выходных параметров. Пусть задан некоторый оператор F, устанавливающий соответствие между входными и выходными переменными, который позволяет с определенной точностью восстанавливать выходные параметры объекта по его входным данным. Применение традиционных методов прогноза состояния закладки по одному признаку имеет низкую достоверность из-за сложности объекта исследования, что значительно сужает область их использования на практике.

Идея предлагаемой методики прогнозирования состояния закладки состоит в разбиение пространства признаков, характеризующих состояние закладочного материала в определенные моменты времени, на классы близких объектов в пространстве признаков, на каждом классе в эти моменты времени строится своя функция прогноза. Построение частных моделей на выделенных областях позволяет объединить частные модели прогноза в единую модель прогноза состояния закладки. Другими словами, предпринята попытка учесть структурную неоднородность исходных данных по состояниям объекта исследования с учетом времени.

Выводы.

1. Предложена формальная постановка задач расчета состояния закладочного массива при разработке месторождений.

2. Разработан метод определения состояния закладочного массива, позволяющий выявлять готовность закладки для дальнейшей эксплуатации.

3. Применение разработанной методики к решению конкретных задач позволяет детально исследовать состояние закладочного массива по мере развития его твердения, устанавливать момент готовности к эксплуатации.

УДК 004.89:004.4

Г.А.Самигулина , З.И.Самигулина
Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК
(Алматы, Казахстан)
e-mail: galinasamigulina@mail.ru, zarinasamigulina@mail.ru

Иммунносетевое моделирование свойств новых лекарственных препаратов - сульфаниламидов на основе онтологического подхода

Важной задачей современной фармакологии является компьютерный дизайн новых лекарственных препаратов с заданными свойствами [1]. Активно развиваются современные нетрадиционные методы анализа зависимости биологической активности вещества от его структуры (QSAR - Quantitative Structure Activity Relationships) с использованием современной вычислительной техники и суперкомпьютеров. Широкое распространение получили различные методы искусственного интеллекта (на основе искусственных нейронных сетей [2], генетических алгоритмов, искусственных иммунных систем и др.), хемометрики, математической статистики, теории информации и др. Данные исследования нацелены на сокращение сроков и стоимости создания новых лекарств. Особенностями этих задач являются: междисциплинарный характер исследований и необходимость обработки огромных массивов информации о структуре химических соединений. Особый интерес для решения данной проблемы представляет подход искусственных иммунных систем [3 - 5].

Онтолого-базированная разработка интеллектуальных систем прогнозирования является чрезвычайно актуальной задачей современной биоинформатики [6]. Онтология предметной области представляет собой концептуальную основу для наиболее эффективного представления знаний при разработке различных приложений в этой предметной области. Использование онтологий при обработке структурной химической информации и создание на их основе информационной системы позволяет структурировать входные и выходные данные, снизить трудоемкость создания и сопровождения программ.

Сложность технологии иммунносетевого моделирования заключается в том, что реализация технологической цепочки возможна различными способами в зависимости от имеющихся данных, постановки задачи и имеющихся условий реализации поставленной задачи. Использование мультиалгоритмического подхода [7], в котором могут быть задействованы различные подходы искусственного интеллекта, классические методы обработки многомерных данных (факторный анализ, метод опорных векторов и т.д.), модульность разрабатываемого программного обеспечения - все это требует использования преимуществ, которые дают онтологии при создании компонентно - ориентированного программного обеспечения [8], реализующего интеллектуальную технологию прогнозирования зависимости "структура - свойство" для создания новых лекарственных препаратов (на примере сульфаниламидов) основанную на подходе искусственных иммунных систем.

При разработке нового метода QSAR на базе иммунносетевого моделирования применяется дескрипторный подход. К молекулярным дескрипторам относятся признаки, характеризующие физические, химические и биологические свойства. Основными этапами разработанной интеллектуальной технологии прогнозирования свойств новых сульфаниламидных лекарственных препаратов являются: описание химической структуры сульфаниламидов на базе дескрипторного подхода, выбор уровней дескрипторов и их классификация по прогностическим группам (низкой, средней и высокой продолжительности действия), формирование баз данных (БД) дескрипторов; предварительная обработка дескрипторов (проверка полноты и достоверности данных, заполнение различными способами пропущенных данных); выделение информативных дескрипторов и построение оптимальной иммунносетевой модели; решение задачи распознавания образов; оценка погрешностей; прогноз и принятие решений о веществах - кандидатах новых лекарственных препаратов с заданными свойствами.

Разработанный комплексный подход к обработке химической информации при компьютерном молекулярном дизайне лекарственных соединений на основе онтологий и интеллектуальной составляющей позволяет повысить качество обработки данных в процессе создания новых лекарственных препаратов сульфаниламидов с заранее заданными свойствами.

Работа выполняется по гранту "Компьютерный молекулярный дизайн лекарственных препаратов на основе иммунносетевого моделирования"
(2015-2017 гг.) в Институте информационных и вычислительных технологий КН МОН РК.

Литература

1. *Зефиров Н.С., Палюлин В.А.* Компьютерный дизайн лекарственных веществ // Труды научно-практической конференции "Вычисления с использованием

графических процессоров в молекулярной биологии и биоинформатике". - 2010. - С. 7-8.

2. *Abraham A., Grosan C., Tigan S.* Pharmaceutical drug design using dynamic connectionist ensemble networks // Studies in Computational Intelligence (SCI). - Berlin: Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008. - No. 123. - pp. 221-231.

3. *Самигулина Г.А., Самигулина З.И., Вуйцих В., Крак Ю.В.* Прогнозирование зависимости "структура - свойство" новых органических соединений на основе искусственных иммунных систем // Проблемы управления и информатики. - Киев: Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, 2015. - No. 2. - С. 81-88.

4. *Tarakanov A., Nicosia G.* Foundations of immunocomputing // Proccedings of 1st IEEE Symposium on Foundations of Computational Intelligence (FOCI'07). - Honolulu, Hawaii, 2007. - pp. 503-508.

5. *Ivanciuc O.* Artificial Immune Systems in Drug Design: Recognition of P - Glycoprotein Substrates with AIRS (Artificial Immune Recognition System) // Internet electronic journal of molecular design. - 2006. - No. 5(11). - pp. 542-554.

6. *Husakova M.* Artifisial Immune System Model Based on OWL Ontology // Proceedings of the IX conference "Znalosti". - Praga, 2010. - V. 1. - pp. 211 - 214.

7. *Самигулина Г.А., Самигулина З.И.* Построение оптимальной иммунносетевой модели для прогнозирования свойств неизвестных лекарственных соединений на основе мультиалгоритмического подхода // Проблемы информатики. - 2013. - No. 2. - С. 21-29.

8. *Samigulina G.A.* Immune network modeling technology for complex objects intellectual control and forecasting system. Monograph. - USA: Science Book Publishing House, 2015. - 172 p.

УДК 004.934

Н. Тасболатулы, Р.Р. Мусабаев
Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК
(Казахстан, Алматы)
e-mail: tasbolatuly@gmail.com

Исследования биометрических датчиков в речевых технологиях

В современном мире все больше проявляется интерес к речевым технологиям, в частности, к идентификации личности по голосу. Это объясняется, с одной стороны, появлением высокопроизводительных вычислительных систем на базе стационарных компьютеров и различных аппаратных средств, биометрических датчиков, позволяющих производить регистрацию сигналов голосового возбуждения в компьютер, а, с другой стороны, высокой потребностью систем аутентификации в разных областях жизнедеятельности человека. Например, автоматическое распознавание человека по голосовым характеристикам может быть использовано для ограничения и разграничения доступа к устройствам и системам, к средствам компьютерной техники, к конфиденциальной информации, к услугам (например, телекоммуникационным, информационным, банковским), а также к охраняемым зонам и помещениям.

Для обработки голосовых сигналов требуется четкий голосовой сигнал без помех. Использование различных датчиков регистрации речевой информации в процессе работы позволяют создать точный и полный голосовой портрет личности для обеспечения более качественного результата синтеза, распознавания и идентификации. При этом одним из немногих возможных путей эволюции речевых технологий в направлении повышения качества является создание новой открытой стандартизированной технологии для точного учета индивидуальных голосовых особенностей пользователей, что позволит обеспечить более гибкую и адаптивную персонализацию речевых систем. Таким образом, исследование применимости различных типов биометрических датчиков в дополнение к микрофону для прямой высокоточной регистрации сигналов голосового возбуждения, а также для мониторинга динамики изменения конфигурации речевого тракта в процессе речеобразования в настоящее время является актуальной.

Некоторые люди не могут произносить звуки, голос может меняться в связи с заболеванием и с возрастом. Кроме того, на точность голосового сигнала влияет шумовая обстановка вокруг человека. Эти основные проблемы регистрации качественного голосового сигнала подталкивает на получении и обработке речевых сигналов на ранней стадии артикулирования. Данный этап развития распознавания речи вызван двумя существенными недостатками современных систем распознавания: чрезмерная чувствительность к шумам, а также необходимость четкой и ясной речи при обращении к системе распознавания. Целью данной работы является исследование биометрических голосовых датчиков для высокоточной регистрации и обработки голосовых сигналов.

Системы распознавания голоса анализируют характеристики оцифрованной речи, в том числе ее тон, высоту и ритм. Источником речевого сигнала служит речеобразующий тракт, который возбуждает звуковые волны в упругой воздушной среде. Сформированный речевой сигнал и передается в пространстве в виде звуковых волн. Приемник сигнала - это датчик звуковых колебаний. Обычно для этих целей используют микрофон - устройство для преобразования звуковых колебаний в электрические. С выхода микрофона сигнал подается на вход звуковой карты персонального компьютера. При записи звуковая карта представляет собой аналого-цифровой преобразователь с широкими возможностями настройки параметров оцифровки. Основными параметрами является частота дискретизации и разрядность кодирования. Данные параметры определяют качество и размер выборки, получаемой в результате записи[1].

Для защиты от фальсификации голоса звуковоспроизводящими устройствами предлагается использовать дополнительную речевую информацию, вводимую с ларингофона, контактирующего с телом говорящего. Речевой сигнал, измеряемый с помощью ларингофона, и соответствующие ему значения параметров речевого сигнала зависят от местоположения ларингофона и не могут быть измерены и воспроизведены современными техническими средствами без непосредственного контакта их измерительного датчика с точкой местоположения ларингофона, т.е. без ведома человека. Вследствие этого попытка имитации сигнала с ларингофона, контактирующего с телом человека, "чужим" сигналом, полученным, например, от скрытных звукозаписывающих устройств, становится невозможной[2].

Речевой сигнал возбуждения распространяется не только через резонаторы речевого тракта, но и через резонаторы всех тканей тела человека, то использование датчиков (например, ларингофонного типа) позволяет воспринимать акустические сигналы с тела человека и использовать их в качестве его биометрического образа. Этот образ обладает свойствами стабильностью и устойчивостью к влиянию внешних шумов. Устойчивость к внешним шумам определяется особенностью ларингофонного датчика воспринимать в основном акустический сигнал, передающийся при непосредственном соприкосновении с телом человека как средой распространения звука[3].

Литература

1. *Бочкарев С.Л., Андрианов В.В., Бочкарев И.В.* Способ автоматического распознавания человека с использованием акустических сигналов, снимаемых с тела человека. Пенза: ПНИЭИ, 1996

2. *Бочкарев С.Л., Иванов А.И., Андрианов В.В., Бочкарев В.Л., Осъкин В.А.* Способ автоматической идентификации личности. Патент РФ №RU-2161826

3. *А.И.Иванов.* Оценка эффекта от использования тайных биометрических образов. Конфидент, 2002, №4-5

УДК 517.968

К. Таттибеков

Таразский государственный педагогический институт

(Казахстан, Тараз)

e-mail: konsbek@mail.ru

Численный эксперимент для одного (1+1)-мерного обобщенного уравнения Ландау-Лифщица

Для изучения динамики нелинейных волн и солитонов в магнитоупорядоченных кристаллах часто используют макроскопическое описание магнетиков на основе уравнения Ландау-Лифщица (ЛЛ) [1]:

$$\vec{S_t} = \vec{S} \times \vec{S_{xx}} + \vec{S} \times J\vec{S},$$

где $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3), |S| = 1,\ J = diag(j_1, j_2, j_3)$, $\times$ - означает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Уравнение ЛЛ явно не учитывает деформацию решетки. При температурах отличных от нуля, атомы ферромагнетика не являются неподвижными, а совершают малые колебания около положений равновесия - узлов кристаллической решетки. Из за этого меняется энергия обменного взаимодействия и возникают взаимодействия между спиновыми волнами и колебаниями решетки (фононами). Поэтому актуален вопрос о математическом исследовании моделей соответствующих ферромагнетикам с деформируемой решеткой.

В этой работе проведена численная реализация задачи Коши для системы нелинейных эволюционных уравнений, предложенной в работах [2], описывающая магнон-фононные взаимодействия в $1D$ магнетиках:

$$4iS_t = 2[S, S_{xx}] + (2u + \{S, \sigma_3\}[S, \sigma]),$$

$$2(u_t + u_x) - \lambda(S_3)_x = 0.$$

где $S = \sum\limits_{i=1}^{3} S_i\sigma_i$, σ_i - матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$S(x,t), u(x,t)$ - неизвестные функции, индексы x, t означают соответствующие частные производные по этим переменным, $\alpha, \beta, \Delta, \lambda$ - посстоянные действительные числа (параметры уравнений), $[,]$- коммутатор, $\{,\}$ - антикоммутатор.

Вектор $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ описывает классический спин атомов магнетика, скалярная функция $u(x,t)$ характеризирует деформацию решетки – смещение атома.

Для численного решения системы уравнений удобно перейти от спинового вектора $\vec{S}$ к функциям p, q с помощью формул:

$$S_1 = \frac{2p}{1+p^2+q^2}, S_2 = \frac{2p}{1+p^2+q^2}, S_3 = \frac{1-p^2-q^2}{1+p^2+q^2},$$

которые согласуются с условием $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$.

Тогда, система перепишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 2\frac{2pp_xq_x - q(p_x^2 - q_x^2)}{1+p^2+q^2}(\Delta S_3 + u)q, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -2\frac{2qp_xq_x - p(p_x^2 - q_x^2)}{1+p^2+q^2}(\Delta S_3 + u)q, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2}(S_3)_x = 0 \tag{1c}$$

В дальнейшем нас будут интересовать эволюция движения волн на оси х, имеющие локальные изменения в начальный момент времени, т.е. для уравнений (1) рассмотрена задача Коши с начальными условиями

$$p(x,0) = p_0(x), q(x,0) = q_0(x), u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

для $|x| < \infty$ где p_0, q_0u_0 - известные функции.

Система уравнений (1) является квазилинейной. Указать точные решения соответствующей задачи Коши вида (1)-(2) представляется невозможным. Следовательно, для детального изучения решений задачи (1)-(2) необходимо использовать приближенные методы.

В данной работе рассматривается численное решение задачи Коши для системы (1)-(2) конечно-разностными методами. С помощью Фурье - анализа проводится выбор алгоритма расчета, который является надежным по устойчивости и эффективным по соображениям численной реализации решений. Исследование устойчивости проведено в случае модельных уравнений. На основе разработанной методики проведены численные расчеты и анализ результатов.

Выяснения вопросов устойчивости решения используемых в дальнейшем разностных схем для нелинейных уравнений (1) в общем случае является затруднительным. Поэтому для получения практических рекомендации выбора шагов сетки τ и h ограничимся исследованием устойчивости разностных схем для следующих уравнений, соответствующие линейной части системы (1a), (1b)

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=0, \frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0 \tag{3}$$

Для системы (3) рассмотрим разностные схемы вида

$$p_\tau^{n+1}+\Lambda_h[\sigma q^{n+1}+(1-\sigma)q^n]=0, q_\tau^{n+1}+\Lambda_h[\sigma p^{n+1}+(1-\sigma)p^n]=0, \tag{4}$$

где Λ_h - разностный оператор второй производной $p_\tau^{n+1}=(p^(n+1)-p^n)/\tau$ σ - некоторый вещественный параметр.

Легко показать, что разностная схема (4) аппроксимирует систему уравнений (3) с порядком $O(\tau(\sigma-0.5)+\tau^2+h^2$,т.е. для $\sigma\neq 0.5$ имеет первый порядок аппроксимации по τ ,а при $\sigma=0.5$ - второй.

Исследование устойчивости разностной схемы (4) проведем методом Фурье согласно критерию фон-Неймана [3]. В этом случае для множителей перехода гармоник получим следующее дисперсионное соотношение

$$(\lambda-1)^2+d^2\cdot[\sigma\lambda+(1-\sigma)]^2=0.$$

где $d=4ksin^2(\frac{\xi}{2}), k=\frac{\tau}{h^2}, \xi=kh$, k - соответствующий номер гармоники.

Следовательно, множители перехода гармоник от одного временного слоя к другому временному слою удовлетворяют соотношению

$$|\lambda_{1,2}|^2=\frac{1+d^2(1-2\sigma+\sigma^2)}{1+d^2\sigma^2}.$$

Отсюда видим, что, если $\sigma\geq 1/2$,то $|\lambda_{1,2}|\leq 1$, т.е.согласно критерия фон-Неймана разностная схема устойчива в норме пространства $L_{2,h}=(-\infty,\infty)$ по начальным данным. Заметим, что явная разностная схема, соответствующая при $\sigma=0$ является абсолютно неустойчивой.

Для аппроксимации уравнения смещения (1c) использовано соотношение

$$u_\tau n+1+u_{x^0}^n=-(S_3)_{x^0}^n+\frac{\tau\delta}{2}u_{xx}^n, \tag{5}$$

где δ - некоторый вещественный параметр.

Разностная схема (5) при $\lambda=0,\delta=1$ соответствует схеме Лакса-Вендроффа, аппроксимирующая уравнение смещения с порядком $o(\tau^2+h^2)$.

Основные расчеты были проведены по разностной схеме (4), (5) при сравнительно малых значении ($\tau=0.001-0.005$). Сходимость численного решения проверялась по последовательности сеток с числом узлов $N=1001,2001$ при различных τ. Сходимость в норме пространства $L_{2,h}$ удовлетворительная. В худщем случае, когда $\Delta=50,\lambda=1$ относительная погрешность составляла 2%.

Литература

1. *Косевич А.М.,Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. - Киев:Наукова думка, 1983. - 192 с.

2. *Мырзакулов Р.* Новые солитонные модели 1D магнетиков с деформируемой решеткой //Изв.АНКаз ССР, сер. физ.-мат. -1989. № 6. -с. 7-10.

3. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. - Новосибирск:Наука, 1981. - 304 с.

УДК 004.89:004.4

О.И. Ширяева, Т.Г. Денисова
Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК
(Алматы, Казахстан)
e-mail: oshiryayeva@gmail.com, elkaz41@mail.ru

Разработка алгоритма получения оптимального количества сульфаниламидов на основе теории искусственных иммунных систем

Для разработки технологии прогнозирования реакции организма на оптимальное количество лекарственных препаратов, на основе методов искуственных иммунных систем [1-3], необходимо рассмотреть сценарии течения болезней, при лечении которых используются сульфаниломиды.

Сульфаниламиды являются первым классом антимикробных препаратов для широкого применения [4]. Препараты этой группы относятся к химиотерапевтическим средствам широкого антибактериального спектра действия, так как они подавляют жизнедеятельность многих видов бактерий: стрептококков, стафилококков, менингококков, гонококков, бактерий кишечно-тифозно-дизентерийной группы и многих других [5].

За последние годы использование сульфаниламидов в клинической практике значительно снизилось, поскольку по активности они значительно уступают современным антибиотикам и обладают высокой токсичностью [6]. Существенным является и то, что в связи с многолетним использованием сульфаниламидов большинство микроорганизмов выработало к ним резистентность. Однако для лечения некоторых болезней, антибиотики противопоказаны. Препараты сульфаниломидной группы применяют как при непереносимости антибиотиков, так и устойчивости к ним микрофлоры, по активности они значительно уступают антибиотикам и в последние годы значение их для клиники снижается. Сульфаниламиды активны в отношении грамположительных и грамотрицательных кокков, кишечной палочки, шигеллы, холерного вибриона, клостридий, простейших (малярийный плазмодий и токсоплазмы), хламидий; возбудителей сибирской язвы, дифтерии, чумы, а также клебсиеллы, актиномицетов и некоторых других микроорганизмов. В соответствии с этим, в проекте рассматриваются такие заболевания, при которых используются сульфаниломидные препараты, как язвенный колит и хронический пиолонефрит.

Для построения модели течения болезней, в зависимости от таких свойств, как всасываемость из желудочно-кишечного тракта и длительность выведения из организма, выделены определенные группы сульфаниламидов. Учитывается, что при назначении антимикробных препаратов и определении их дозировки необходимо учитывать степень активности воспалительного процесса и видовой состав микрофлоры. При нарушении их деятельности антимикробные средства не смогут дать надлежащий лечебный эффект, а, наоборот, окажут токсическое воздействие на барьерные органы и системы организма.

Сульфаниламидные препараты в небольших концентрациях задерживают рост и развитие бактерий, то есть действуют бактериостатически. Бактерицидное влияние они оказывают лишь при воздействии таких высоких концентраций, которые небезопасны для макроорганизма. Это обуславливает формирование нечетких множеств для искуственной иммунной математической модели оптимизации количества сульфаниломидов, воздействующих на организм человека на примере лечения такого заболевания, как хронический пиелонефрит - инфекционно-воспалительного заболевания почек с преимущественным поражением тубулоинтерстициальной ткани, чашечно-лоханочной системы и нередким вовлечением в процесс паренхимы [7].

Проблема нефро- и гепатотоксичности ряда антибактериальных препаратов имеет особое значение как при проведении длительных прерывистых, так и непрерывных курсов лечения, на которых основано современное лечение пиелонефрита. При построении модели учитывается, что лечение пиелонефрита должно быть комплексным, длительным и индивидуальным. В тех случаях, когда активность воспалительных процессов достаточно высока и монотерапия практически неэффективна, возникает необходимость в использовании сразу нескольких препаратов соответствующего назначения. Практика показывает, что новые антибактериальные средства оказываются эффективными не только вследствие высокой их чувствительности, но и потому, что на протяжении некоторого времени не возникает резистентности к ним микроорганизмов. Часто новый антибиотик оказывается эффективным только в течение определенного времени, обычно 2-3 года, а затем чувствительность к нему бактерий все более снижается. В связи с тем что при лечении антибиотиками и химиопрепаратами в организме больных часто развиваются резистентные к ним микроорганизмы, оправданно стремление возвратиться к назначению старых, испытанных препаратов и их комбинациям. Благодаря сочетанию их с сульфаниламидами, нитрофуранами, препаратами налидиксовой кислоты удается достичь удовлетворительных результатов.

При назначении антимикробных препаратов и определении их дозировки необходимо учитывать степень активности воспалительного процесса в почке и видовой состав микрофлоры. Выбор антибактериального препарата зависит от функционального состояния почек и печени. При нарушении их деятельности антимикробные средства не смогут дать надлежащий лечебный эффект, а, наоборот, окажут токсическое воздействие на барьерные органы и системы организма, что учитывается в искуственной иммунной модели течения болезни.

Для разработки иммунной модели реакции организма на сульфаниломидные препараты на основе методов искусственных иммунных систем необходимо учитывать неопределенность в описании параметров, обусловленную характером протекающх в организме процессов. В настоящее время существуют различные методы представления неопределенности, в том числе на основе теории нечетких множеств. Это обуславливается выполненным аналитическим обзором существующих методов представления и исследования нечетких иммунных систем, на основе которго сделан вывод о перспективности данного направления [8-10].

Разработанная нечеткая искуственная иммунная система управления использована для оптимизации количества лекарственных препаратов - сульфаниламидов, с учетом их структуры [5,6] и влияния на организм.

В разработанной искусственной интеллектуальной системы терапии пиолонефрита сформировано нечеткое множество, учитывающее, что курс терапии сульфаниламидами при остром пиелонефрите продолжается 1,5-3 мес (а иногда до 4-6 мес), при хроническом 6-12 мес, при необходимости и длительнее. При развитии почечной недостаточности эффективность терапии снижается (из-за снижения концентрации антибактериальных препаратов).

Литература

1. *Dasgupta D.* Artficial Immune Systems and Their Applications. - New York: Springer-Verlag, Inc., 1998. - 438 p.

2. *Webb G.F., Kirschner D.E.* Using mathematics to understand HIV immune dynamics // Notices Amer. Math. Soc. - 1996. - Vol. 43. - pp. 191-202.

3. *Murray J.D.* Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. - New-York: Springer, 2003. - 150 p.

4. *Surhone L., Timpledon M., Marseken S.* Sulfanilamide (Medicine). - New York: Betascript publishing, 2012. - 64 p.

5. *Машковский М.Д.* Лекарственные средства. - М.: Новая волна, 2012. - 1216 с.

6. *Мелентьева Г.А., Антонова Л.А.* Фармацевтическая химия. - М.: Медицина, 1985. - 480 с.

7. *Фадеев П.А.* Болезни почек. Пиелонефрит. - М.: Мир и Образование, 2012. - 120 с.

8. *Polat K., Sahan S., Güne S.* A new method to medical diagnosis: artificial immune recognition system (AIRS) with fuzzy weighted pre-processing and application to ECG arrhythmia // Expert Systems with Applications. - 2006. - 31 (2). - pp. 264-269.

9. *Shamshirband S, Hessam S, Javidnia H, Amiribesheli M, Vahdat S, Petković D, Gani A, Kiah MLM.* Tuberculosis Disease Diagnosis Using Artificial Immune Recognition System // Int. J. Med. Sci. - 2014. - 11(5). - pp. 508-514.

10. *Polat K., Kara S., Günes S.* A novel approach to resource allocation mechanism in artificial immune recognition system: fuzzy resource allocation mechanism and application to diagnosis of atherosclerosis disease // ICARIS. - Berlin: Springer-Verlag, 2006. - pp. 244-255.

УДК 681.5

Н.Р. Юничева, З.Г. Хисамиев

Институт Институт информационных и вычислительных технологий
МОН РК (Казахстан, Алматы)

e-mail: naduni@mail.ru,khisamievz@mail.ru

О разрешимости системы интервальных алгебраических уравнений для задачи управления объектом с неточными данными

В прикладном интервальном анализе систему линейных алгебраических уравнений принято называть разрешимой, если она имеет некоторое решение, и допустимой, если она имеет неотрицательное решение [1-3].

Для интервальных линейных систем существуют дополнительные определения: термин "слабо" связан с выполнением указанного свойства для "некоторой" системы из заданного семейства, а термин "сильно" связан с выполнением указанного свойства для всех систем из этого семейства. Введение сильных и слабых свойств имеет свои основания. Например, мы хотим выяснить, является ли разрешимой некоторая точечная система алгебраических уравнений, но нам не известны точные данные об этой системе (данные получаются из некоторых измерений, подвержены ошибкам округления и т.п.). Вместо этого мы знаем лишь то, что они удовлетворяют условиям. Тогда, наша система разрешима, если только известно, что система сильно разрешима. И, наоборот, система неразрешима, если только известно, что система не является слабо разрешимой. В отношении допустимости имеет место такое же рассуждение.

В докладе для облегчения всех вычислительных трудностей при оперировании с интервальными величинами задача параметрического синтеза управления объектом с неточными данными в параметрах сведена к решению системы алгебраических интервальных уравнений, поэтому возникает необходимость исследования разрешимости полученной системы. Исследуется свойство сильной разрешимости системы интервальных уравнений

$$\{P \cdot K \,|P \in \mathbf{P}\} \subseteq H.$$

Назовем вектор $K \in R^n$ сильным решением системы, если он удовлетворяет точечной системе $\mathbf{P} \cdot K = \mathbf{H}$, для любых $P \in \mathbf{P}$ и $H \in \mathbf{H}$.

Доказательство данного утверждения проведено по схеме, предложенной в [4]. В результате показано, что система интервальных линейных уравнений, к которым сведена задача параметрического синтеза управления, является разрешимой (в данном случае обладает сильной разрешимостью).

Литература

1. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. - ИВТ СО РАН. - Новосибирск: XYZ, 2015. - 605 с.

2. *Alefeld G., Mayer G.* Interval analysis: theory and applications // Jornal of Computational Applied Mathematics. -V.121. - P. 421-464.

3. *Fiedler M., Nedoma J, Ramik J., Rohn J., Zimmerman K.* Linear optimization problems with inexact data. - M.: Institute of computer researches. -2008. - 288 p.

4. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. М.: Институт компьютерных исследований, 2007. - 467с.

Ye.N. Amirgaliyev, O.Zh. Mamyrbayev, T.A. Muratkhanova
Institute of Information and Computing Technologies MES RK
(Kazakhstan, Almaty)
e-mail: tolganay125@gmail.com

The control algorithm of data exchange in wireless sensor system

Wireless sensor networks are self-organizing network, which consist of a set of wireless sensor nodes distributed in the space and designed for monitoring environmental parameters or objects therein located. The space covered by sensor network is often referred as a sensor field. Actually, wireless sensor nodes are miniature devices with limited resources: battery charge, memory, processing power and etc. However, combining large number of these elements into the network provides the possibility of obtaining a realistic picture of what is happening within the sensor field. Wireless sensor nodes can gather information about the observed phenomena and transmit it for processing and analysis. Examples of collected information may be data on temperature, humidity, lighting conditions, seismic activity, and etc. Such data can be used to detect any events, and for managing them. The need to use WSN is observed throughout the world and leads to the inevitable development of wireless communication technologies. The structure of these networks includes many miniature devices - nodes, and according to their functionality there are several different types:

- end equipments (EE), equipped with sensors, perform measurements;
- retranslators or routers that transmit messages with the measurements from EE;
- gateways that collect messages from EE and carry out commutation of WSN with high-speed highways of data transmission, which are used for message delivery to the computer center;
- bridges connecting various WSN with each other;

Nodes can fully or partially combine the functionality of several types.

For the end user of services provided by information and measuring complex on the base of WSN, it is important to minimize the cost of its acquisition and further maintenance while performing restrictions on the solution of target problem with given reliability. Realization of these requirements leads to the reduction of number of nodes-retranslators, and on the other hand, does not allow them to be pulled into the net along the shortest distance between EE and gateways by taking into account required level of reliability of data delivery. However, when the number of EE and retranslators is increased, problems of limited capacity of nodes and mutual influence of data streams to each other are occurred. These conditions determine the need to resolve problem of choosing rational geometric arrangement of retranslators, as well as optimal routing of data flows between them, which forms the concept of "rational topology of wireless sensor network". This topology will reduce traffic and energy consumption at the nodes, which in turn will increase the network uptime and reduce the overall cost of its service due to the replacement of equipment and/or battery.

One of the most important requirements of the monitoring system is its continuity, i.e. ensure the monitoring of parameters for entire space or process. Proceeding from the above statement, primary task of this work is to develop the algorithm for choosing the head node of the cluster, which would provide better coverage of monitoring the given area of two-dimensional space for a sufficiently long period of time.

In general this approach implies optimization as the lifetime of the sensor network, and as the performance of functional tasks with the given quality of service for a relatively long period of time.

In view of the foregoing, development of new algorithms for choosing the head nodes of the cluster in wireless sensor networks appears relevant, as well as the subject of the study - wireless sensor networks.

References

1. *Amirgaliyev Ye.N., Mamyrbayev O.Zh., Muratkhanova T.A.* Methods and models of location wireless sensor networks/ Modern problems of informatics and computational technologies, Almaty 2015, pp. 119-129.

2. *Ivanova I.A.* Method and algorithms of controlling data flow in wireless systems of industrial monitoring/ "System analysis, control and processing of the" (industry), December 2010.

3. *Pandey V. A.* Review on Data Aggregation Techniques in Wireless Sensor Network/ Journal on Electronic and ElectricalEngineering, 2010. - Vol. 1, Issue 2. pp. 1-8.

УДК 519.7

A. Anishenko, G. Kalieva
Institute of Information and Computing Technologies
(Казахстан, Алматы)
e-mail: gulnara@ipic.kz, luda@ipic.kz

About some singularities of application of scientometric indicators

Today, for the evaluation of scientific activity together with expert conc-lusions increasingly being used scientometrics indicators. Scientometrics - the field of knowledge concerned with the study of science statistical studies of the structure and dynamics of scientific activity.

Currently, the estimation of productivity of scientific activity together with expert opinions even more often uses scientometric indicators. These indicators are based on number of publications of the author and on number of references to its works. The increased interest to scientometric indicators is caused first of all by possibility of automation of process of estimation with use of software of the databases Web of Science, Scopus, the Russian scientific library (elibrary.ru). Speed of check, and also lack of a human factor cause popularity of scientometric indicators in express estimation of publication activities of scientists. Threshold restrictions on scientometric indicators represent a certain filter which eliminates weak candidates and by that reduces costs of carrying out expensive and labor-consuming expert estimation of quality of scientific results. Scientometric indicators are convenient for an assessment of the basic researches which results directly are not connected with economic effect. Fundamental development is aimed at the science development therefore their demand estimate through a response of scientific community on the publication with results of researches. Formally this review express citation index - the total number of references on the considered publication. It is known that as soon as any indicator becomes criterion of decision-making, ways of its "price markup" are thought out. Not an exception and classical scientometric indicators - number of publications and a citing index. For their artificial increase apply crushing of results to publication in several articles, publication of the same results under different names, publications in not rating magazines, inclusion in number of coauthors of strangers, self-citing and citing by friends, etc. The purpose of article is the review of the main scientometric indicators of an assessment of publication activity of the scientist which filter various ways of price markups of number of publications and a citing index. Besides, the attention to shortcomings of scientometric indicators, connected 1) with mistakes in the list of references; 2) with forgetting of names of classics when authors consider that the contribution of predecessors is so well-known to any of this area of science that there is no sense to mention it; 3) concealment of primary sources, i.e. inclusion in the list of quoted literature not conceptual works, and their modifications. First, the main scientometric indicator was the number of scientific publications - total or per certain types of monographs, articles, theses, publications in journals included in the list of HAC included in electronic databases Web of Science, Scopus or eLibrary.ru, indexed by Google Scholar, etc. n. Sometimes take into account volume of publications as a journal article and may take 3 pages and 150. Often, the number of publications is established the threshold which excess allows the author to participate in a certain competition or examination. The competition for grants is often not permitted projects in which the authors have published several articles in journals of international scientometric databases. To account for the popularity of the publication scores for the publication is weighed journal impact factor. Impact factor - the average number of citations in the current year of journal articles published over the previous 2 years (two-year impact factor) or 5 previous years (five-year impact factor). If we consider only the number of publications, the young scientists will always to lose his older colleagues. Therefore, there are relative indicators into account when publishing for a certain period of time, for example, over the past 3 years. Thus, scientometric indicators based on the number of publications can be considered the type of publication, publication status, volume of work and the number of co-authors. For artificial increase in number of publications use such standard receptions, as crushing of results for publication in different editions, and also the publication of almost identical articles under different names. Therefore the pursuit of number of publications often reduces quality of scientific works. The index of citing is a total number of links in scientific publications for works of the author. The citation index reflects the reaction of the scientific community to publish the results of studies that the level of their demand for scientists. As a rule bad work is not quoted, except for a special relationship between the authors. Citation depends not only on the level of scientific results, but also on other factors such as timeliness. Long period of time will be very low citation of publications with scientific results that are far ahead of the current needs or possibility of using them. The main options for the usual index of citing of have such features: A) Ignore self-citations or citations coauthors, which substantially reduces rating of "scientist-reclusive," the publication of which are only interested in him; b) Ignore the repeated citation of one work by the same researchers, which reduces the impact of complementary and contractual citation on the principle of "I - you, you - me"; c) Take into account the personal contribution of the scientist, dividing the number of citations between the coauthors; d) Take into account the reputation quotes the edition by weighing number of references in the journal on its impact factor or other similar factor; d) Take into account the intensity of citations in different sciences. Except the obvious links specified in the list of references, there is an informal citing and the hidden citing. Informal citation is to specify the source of information in the text of the work without including it in the list of references. Frequently used the terms without linguistic connection with the author's name. It does not mention any names of the authors, or names of the corresponding works. Hidden citation is to use the ideas without a direct link to its author, but with the ability to identify the original source through the chain of citations. When making decisions on the basis of index of citing of necessary to remember the impossibility of exact establishment of all the sources of information that are used in the preparation of the work. Firstly, the author includes in the literature list only the most relevant sources which level of use exceeds some threshold. Secondly, in the list of references mistakes and typographical errors often meet. To reveal the scientists who write many and qualitatively, in 2005 the physicist H. Hirsh offered a new indicator - Hirsh's index. Hirsh's index or h-index is the maximum integer of h indicating that the author published h of articles, each of which is quoted at least h of times. These articles constitute the core of Hirsch or h-core. To get to the core of Hirsch, the article must quote at least h times. Simplicity of calculations made Hirsh's index the popular scientometrics indicator. Disadvantages h-index due to the fact that it does not take into account: 1) How much threshold has been exceeded of citations in the core Hirsch; 2) The number of publications that are not included in the core and the level of their citation. H-index is an integer indicator. When you reach the author of large values of h-index pronounced its inertia, viscosity - it can remain constant over the years. In this case, the activity of the scientist formalized tracking and forecasting the impact of research is applied rational modification of h-index: Sh-index and hrat-index. The integer part of these parameters is equivalent to the normal index of Hirsch. Fractional part shows how the author approached the next value of h-index.

Conclusions.

Considerable revival of a scientometrics was promoted by emergence of new informion technologies and the creation of a database system for scientific publications in the Philadelphia Institute for Scientific Information. At an assessment and control of scientific activity the number of publications and citations in scientific journals is often used. Important use of the database in which the emphasis is placed on the articles in the journals. o Science control based on the use scientometric indicators when inflexible use them objectively slows the development of science. Scientometric indicators which have been calculated on the number of publications and citations in scientific journals are an auxiliary. Science control based on the number of publications in reviewed journals and citation indices are objectively slows the development of science. Scientometric indicators which have been calculated on the number of publications and citations in scientific journals can only play a supporting role, that is, as a reference. Fundamental developments are aimed at the development of science, so their demand is assessed by a review of the scientific community with the publication of research results. Index of citing expresses - total number of links to considered publications. These results indicate that scientometric indicators may be used to rank the applications and for establishing threshold levels for the weak cutoff applications. Application of scientometric indicators in of science control meets difficulties and resistance scientists pointing to the impossibility of quantitative assessment the importance of a scientific result, the incompleteness and exposure to any index manipulation. Proposed to extend and improve the procedures to support the making decisions on science control.

UDC 517.95

A.G. Zagiyeva
Al-Farabi KazNU (Kazakhstan, Almaty)
e-mail: azagiyeva@inbox.ru

Software-Defined Networks integration into current system

Nowadays there is a great tendency in increasing the equipment of each organization networks which includes the devices brought by employees, which is called the concept of BYOD(Bring Your Own Device) and several cloud technologies. The traditional network architecture expects that lot of the equipment need to be configured separately. According to the forecast of Cisco Company the number of devices in the network will be twice more than the Earth population in 2015. That is why it has raised the need for the transition to a fairly new technology.

The main purpose of this work is to analyze the efficiency of the SDN architecture and find out the ways of integration this technology into current network architecture of organization.

In order to achieve the above mentioned goal the following tasks were set: 1) to analyze the current network architecture principles, 2) to study all materials about SDN architecture, 3) to analyze the appropriate ways of SDN integration into current system, 4) to search the possible ways and approaches to optimize the network efficiency and routing processes. At the end of the research conducted in the project, I found out the ways of realizing the SDN in the current network and implemented the appropriate methods and functions of the routing algorithm inside the large network topology simulated in the virtual machine.

In conclusion, I find it possible to state that the realization of this project will undoubtedly raise the network efficiency and gives an ability to conduct own researches inside the local or global networks.

References

1. *John Day* Patterns in Network Architecture: A return to fundamentals, Prentice Hall, 2008

2. *Thomas D. Nadeau and Ken Gray* SDN: Software Defined Networks. An authoritative of Network Programmability Technologies, OвЂ™Reilly Media, 2013