

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

А.С. ТАУКЕНОВА

**ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТЕОРИЯ
НЕГІЗІНДЕ ОПТИКАЛЫҚ -МЕХАНИКАЛЫҚ
АНАЛОГИЯНЫ ЗЕРТТЕУ**

Монография

Алматы
«Қазақ университеті»
2024

ӘОЖ 530 (035.3)

КБЖ 22.31

Т 24

*Баспаға әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
Ғылыми кеңесі (Хаттама №2, 18.10.2024 ж.)*

Пікір жазғандар:

Ф.-м.ғ.д., профессор **Т.Х.Садықов**

PhD, к.-м.н. **К.К. Ержанов**

Таукенова А.С.

Т 24 Жалпы салыстырмалы теория негізінде оптикалық-механикалық аналогияны зерттеу: монография / А.С. Таукенова.– Алматы: Қазақ университеті, 2024. – 142 б.

ISBN 978-601-04-6883-2

«Жалпы салыстырмалы теория негізінде оптикалық-механикалық аналогияны зерттеу» монографиясы қазіргі заманғы жалпы салыстырмалы теория механикасына елеулі үлес қосады. Талдаудың тереңдігі, баяндаудың анықтығы және тақырыптың өзектілігі оны гравитация және космологиямен айналысатын ғалымдар үшін таптырмас еңбекке айналдырады. Монография жоғары курс студенттеріне, магистранттарға, докторанттар мен теориялық физика, жалпы салыстырмалы теория және релятивтік астрофизика саласында маманданған университеттердің ғылыми қызметкерлеріне арналған.

ӘОЖ 530 (035.3)

КБЖ 22.31

© Таукенова А.С., 2024

ISBN 978-601-04-6883-2

КІРІСПЕ

Жалпы сипаттама. Эйнштейн екі салыстырмалы теориясын жасады: бірінші (1905) – арнайы салыстырмалы теориясы (АСТ), екінші (1916) – жалпы салыстырмалы теориясы (ЖСТ). АСТ – бұл кинематикалық теория, ол біздің кеңістік пен уақыт туралы көзқарастарымызды түбегейлі өзгертті. Ол классикалық физикадағы бір-бірінен тәуелсіз үшөлшемді кеңістік пен бірөлшемді уақыттың орнына тек біртұтас төртөлшемді кеңістік-уақыттың бар екенін көрсетті. АСТ идеялары физиканың көптеген маңызды бөлімдерінде кездеседі және оның арқасында салыстырмалы механика, өрістің кванттық теориясы және заманауи физиканың басқа да бөлімдері пайда болды.

Жалпы салыстырмалы теориясы – бұл қазіргі заманғы гравитациялық өріс теориясы [1]. Ландаудың айтуынша [6] «Ол, бәлкім, барлық физикалық теориялардың ішіндегі ең әдемісі».

Қазіргі уақытта осы теорияның бірнеше маңызды мәселелері бар: ЖСТ-дағы денелердің қозғалыс мәселесі, гравитацияны кванттау мәселесі, релятивтік астрофизика және космология мәселесі, гравитациялық эксперимент мәселесі және де басқа мәселелер.

Ұсынылған диссертациялық жұмыс ЖСТ-дағы денелердің қозғалыс мәселесіне арналған. Бұл мәселелер зерттеудің негізін қалаушылар: Эйнштейн, Инфельд және Фоктардың классикалық еңбектерінде қаланды және олардың көптеген ізбасарларының жұмыстарында жалғасын тапты [3].

Бұл зерттеулердің соңғы мақсаты Эйнштейннің гравитация теориясының механикасын (ГТМ) құру болып табылады.

Мәселенің өзектілігі. ЖСТ механикасын құрастыруды бастамас бұрын, біз болашақта зерттелетін масса (дене) қозғалысының теңдеулерін білуіміз керек. Өкінішке орай, Шварцшильд және Керрдің жеке метрикалары жағдайын қоспағанда, біз мұны алдын ала жасай алмаймыз [2].

Оның орнына Эйнштейннің гравитациялық өріс теңдеулерінен масса (дене) қозғалысының теңдеулерін алу (шығару) қиын және көлемді рәсімделуі бар. Масса қозғалысының теңдеулерін өріс теңдеулерінен алу үшін бірнеше арнайы және белгілі әдістер әзірленген. Бұл [3, 6.55] – Эйнштейн-Инфельд-Гофман әдісі (ЕЖ әдісі, 1938), Фоктың бірінші әдісі (1939), Инфельд әдісі (1954) және Фоктың екінші әдісі (1955). Қазіргі уақытта масса (дене) сызықты және айналмалы қозғалыстарының релятивистік теңдеулерінің үлкен саны жиналды, оларды ЖСТ механикасының негізіне кіргізуге болатын еді. Алайда бұл теңдеулер әртүрлі әдістермен алынған кезде ғана емес, бірдей әдіспен, бірдей дәлдікпен шығарылғанымен де, әртүрлі авторлармен шығарылғанда да сәйкес келмейді. Осылайша, ЖСТ-да денелердің қозғалысы мәселесінде жаңа маңызды проблема пайда болды – денелердің түзу сызықты және айналмалы қозғалыс релятивистік теңдеулерінің бірімәнділік мәселесі.

Қазір, [7, 8] жұмыстарында бұл мәселе шешілді. Бұл ретте релятивистік қозғалыс теңдеулерін алу үшін түбегейлі жаңа тәсіл қолданылды, атап айтқанда: қозғалыс теңдеулерін жоғарыда айтылған арнайы әдістер арқылы өріс теңдеулерінен шығаратын дәстүрлі тәсілден бас тартылды, оның орнына Фоктың бірінші жуықтауындағы нақтыланған метрика мен ЖСТ механикасындағы гидродинамикалық аналогияға негізделген балама әдіс қолданылды.

Енді ЖСТ механикасының басқа өзекті мәселелерін зерттеу күн тәртібіне қойылып отыр. ЖСТ механикасының бірқатар модельдік есептері шешілген болса [3, 63-бет], мысалы: Шварцшильд есебі (материалдық бөлшектің орталық дене өрісіндегі қозғалысы мәселесі), Лензе-Тирринг есебі (айналмалы орталық дене өрісіндегі материалдық бөлшегінің қозғалыс мәселесі) және екі айналмалы дене есебі, әлі күнге дейін ЖСТ механикасындағы өзекті мәселе ретінде оптикалық-механикалық аналогия мәселесі жеткілікті түрде зерттелмеген.

Бізге әзірге ЖСТ механикасындағы келесі оптикалық-механикалық аналогиялар белгілі. Біріншіден, бұл Эйнштейн дәуірінен белгілі, жарық сәулесінің қисықтығы мен материалдық бөлшектің орталық симметриялы гравитациялық

өрістегі траекториясының қисықтығы арасындағы оптикалық-механикалық аналогия. Екіншіден, [19] жұмысында айналмалы массивті дененің гравитациялық өрісіндегі жарық сәулесінің және материалдық бөлшектің траекториясының бұралуы арасындағы басқа оптикалық-механикалық аналогияның бар екені көрсетілген.

Атап өтейік, бұл екі аналогия да геометриялық оптика мен ЖСТ-ның материалдық нүкте механикасы шеңберіндегі аналогиялар болып табылады. Үшіншіден, [3, 63-бет] жұмысында толқындық оптика мен ЖСТ-дағы денелер механикасы арасындағы түбегейлі жаңа аналогия анықталды. Бұл жалпақ электромагниттік толқынның поляризация жазықтығының айналуы (толқындық оптика) мен жарық толқынының таралуы және сынама дененің айналмалы орталық дененің гравитациялық өрісіндегі қозғалысы кезінде траекторияға жанасатын бірлік векторға перпендикуляр сынама дененің жазықтығының айналуы арасындағы аналогияның бар екені туралы сөз болып отыр.

Бұл ионографиялық жұмыс толқындық оптика мен ОЖТ-дегі денелер механикасы арасындағы оптикалық-механикалық аналогияны әрі қарай зерттеуге арналған. Мұндай зерттеулер қазіргі уақытта өте өзекті болып табылады.

Монографияның мақсаты. ЖСТ механикасындағы жаңа оптикалық-механикалық аналогияларды іздеу.

Монографияның міндеттері. Осыған байланысты диссертациялық жұмыста толқындық оптика мен ОЖТ-дағы денелер механикасы арасындағы жаңа оптикалық-механикалық аналогияны табу міндеті қойылды.

Қойылған міндетті орындау үшін алдымен келесі мәселелерді шешу қажет болды:

- Айналмалы шар үшін бірінші жуықтаудың метрикасының құрылымдық ерекшелігін нақтылау. Айналмалы шар метрикасы жағдайында dS^2 инвариантта \vec{S}_0 өзіне тән моменті мен \vec{M} орбиталық моментімен туындайтын \vec{S}_0 вихреві өрістермен өзара әрекеттесуге байланысты мүшелердің пайда болатынын көрсету.

- Фоктың бірінші жуықтаудың нақтыланған метрикасының бірімділігі туралы мәселені шешу.

- ЖСТ механикасындағы денелердің айналмалы қозғалысының релятивистік теңдеулерінің бірімділігі туралы мәселені шешу

- Айналмалы орталық дене (шар) өрісіндегі m масса сынама денесінің түзу қозғалыс теңдеулерін жазу, мұнда $\dot{\vec{V}}$ үдеу каноникалық-байланысқан айнымалылар \vec{r} мен \vec{p} ретінде функция ретінде қарастырылады.

Ғылыми жаңашылдық. Осы монографиялық жұмыста ЖСТ-дағы денелер механикасын одан әрі дамыту үшін маңызды мәнге ие келесі жаңа ғылыми нәтижелер алынған:

- ЖСТ-дағы денелер механикасы мен толқындық оптика арасындағы жаңа оптикалық-механикалық аналогия анықталды. Бұл – ЖСТ механикасындағы қозғалыс теңдеулері (Лензе-Тирринг есебінің мысалы) мен электродинамикадағы Максвелл теңдеулерінің бірінші жұбы арасындағы аналогия.

- ЖСТ-ны үдеу мен вихрьдің біртұтас теориясы ретінде ерекше интерпретациялау пайда болады, электродинамиканы біртұтас электромагниттік өріс теориясы ретінде интерпретациялау сияқты.

- Жұмыста тағы бір принципті маңызды нәтиже алынды: ЖСТ механикасындағы айналмалы қозғалыс теңдеулері түзу қозғалыс теңдеулерінің нәтижесі болып табылады. Осылайша, Фоктың әдісімен және басқалармен Эйнштейннің гравитациялық өріс теңдеулерінен айналмалы қозғалыс теңдеулерін шығару сияқты ауыр әрі күрделі жүйенің қажеті болмайды.

Әдістемелік және теориялық база. Бұл Фоктың бірінші жуықтауындағы нақтыланған метрика, гидродинамикалық аналогия, әсіресе, ОЖТ механикасында үдеудің каноникалық-байланысқан айнымалылар \vec{r} мен \vec{p} жағдайының функциясы екенін түсіну сияқты факторлар.

Теориялық және практикалық маңыздылық. ЖСТ механикасында (толқындық оптика мен ЖСТ-дағы денелер механикасы арасындағы) жаңа оптикалық-механикалық

аналогияның анықталуы, ЖСТ-ның жаңа түсіндірмесін ашу, айналмалы қозғалыс теңдеулерінің түзу қозғалыс теңдеулерінің нәтижесі екендігін дәлелдеу – бұл ЖСТ механикасының теориялық зерттеулерінде ерекше серпіліс болып табылады.

Бұл нәтижелердің практикалық маңыздылығы жоққа шығарылмайды. Шынында да, бұл нәтижелер ЖСТ-ны зерттеуді және одан әрі зерттеуді едәуір жеңілдетіп, оңтайландырады. Олар ғарыштық зерттеулер үшін, сондай-ақ арнайы теориялық және қолданбалы міндеттерді шешу үшін қызығушылық тудыруы мүмкін.

ЖСТ бойынша теориялық зерттеулер мен қолданбалы бағдарламалар шетелде қарқынды дамып келеді. Мұның бір себебі ЖСТ (релятивистік гравитация теориясы) саласындағы зерттеулер ғарыштық зерттеулер үшін, сондай-ақ арнайы теориялық және қолданбалы міндеттерді (мысалы, АҚШ-тағы СОИ) шешу үшін қызығушылық тудыруы болып табылады.

Бұл зерттеулердің физикасы мынада: ОЖТ-ға сәйкес, аспан денелері (Жер, Күн және т.б.) айналасындағы кеңістік пен уақыт қисық, сондықтан денелердің (спутниктер, ғарыш кемелері және т.б.) қозғалысы, атом сағаттарының көрсеткіштері, қашықтықтарды өлшеу, лазерлік және плазмалық сәулелердің қозғалысы, электромагниттік толқындардың таралуы және т.б. Ньютон теориясындағыдан мүлдем басқа болып көрінеді.

Мәселенің тарихы

Оптикалық-механикалық аналогия — классикалық механика мен геометриялық оптика арасындағы аналогия ретінде 1834 жылы Гамильтон (W. Hamilton) орнатқан. Энергиясы E , массасы m болатын бөлшектің $V(x,y,z)$ тұрақты потенциалдық өрістегі қозғалысы классикалық механикада *Гамильтон-Якоби теңдеуімен* сипатталады:

$$(\nabla S_0)^2 = 2m(E - V),$$

$$(\nabla S_0)^2 \equiv \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2, \quad (1)$$

мұндағы $S_0(x, y, z) = S(x, y, z, t)$ – қысқартылған әрекет, S – әрекет, t – уақыт, және импульс S арқылы келесі формуламен өрнектеледі:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S_0}{\partial x} \quad \text{және т.б} \quad (2)$$

Мына теңдеу $S_0(q_i) = const$ кеңістіктегі беттердің ортасын анықтайды, ал (2) шарты нүктенің траекториясы осы беттерге әр жерде перпендикуляр екенін көрсетеді.

Геометриялық оптикада тұрақты фаза беттері мен оларға перпендикуляр жарық сәулелері арасындағы аналогиялық қатынас бар. Толқындардың таралуын сипаттайтын теңдеу мынадай түрге ие:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{n^2}{v_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} =, \quad (3)$$

мұндағы φ – толқын өрісін сипаттайтын кез келген шама, v_0 – вакуумдағы жылдамдығы, а $n(x, y, z)$ – бұл v ортадағы толқындардың v_0 жылдамдығына қатынасы бойынша сыну көрсеткіші. Егер орта гомогенді болмаса, бірақ толқын ұзындығы соншалықты кішкентай болса, n өзгерісін толқын ұзындығына қарағанда елемеуге болатын болса, (3) теңдеуінің шешімі ω жиілігі үшін жуық түрде мынадай түрге ие:

$$\varphi = \varphi_0(r) e^{i[k_0 f(r) - \omega t]}, \quad (4)$$

мұндағы $\varphi_0(r)$ толқынның амплитудасын сипаттайды, а $f(r)$ – оның фазасы, $k_0 = \omega / v_0$ – вакуумдағы толқын саны, мұндағы $f(r)$, әдетте эйконал деп аталатын шама, эйконал теңдеуіне бағынуы керек.

$$(\nabla f)^2 = n^2. \quad (5)$$

(3) теңдеуінен (5) теңдеуге өту геометриялық оптиканың белгілі бір жуықтауына сәйкес келеді. Жарық сәулелерінің мүмкін траекториялары $f = const$ беттеріне перпендикуляр сызықтар ретінде анықталады.

Анық, (5) теңдеуі Гамильтон-Якоби (1) теңдеуіне аналог болып табылады, мұндағы S_0 эйконал рөлін атқарады, ал $\sqrt{2m(E-V)}$ — сыну коэффициенті. $f = const$, Беттерге перпендикуляр сәулелердің траекториялары (2) теңдеуімен анықталатын материалдық нүктенің траекторияларына аналог болып табылады. Оптикалық-механикалық аналогияда (о.-м.а.) энергиясы E болатын материалдық нүктенің күштік өрісте $V(x, y, z)$ қозғалатын траекториялар жиынтығына жарық сәулелерінің траекториялар жиынтығы, ал сыну коэффициенті

$n(x, y, z,)$ материалдық нүктенің траекториясына пропорционал $\sqrt{2m(E-V)}$ болады. Осы тұрғыдан қарағанда, геометриялық оптика құбылыстарының Гюйгенс толқындық теориясы мен Ньютонның корпускулярлық теориясы арқылы бірдей жақсы түсіндірілетіні айқын.

Оптикалық-механикалық аналогияны вариациялық принциптер тілінде формулировать етуге болады. Консервативті күштік өрісте қозғалатын материалдық нүктенің траекториясы ең аз әрекет принципімен анықталады:

$$\delta \int p ds = \delta \int \sqrt{2v(E-V)} ds = 0, \quad (6)$$

мұндағы $ds = \sqrt{|dr|^2}$. Егер $\sqrt{2m(E-V)}$ шамасы сыну көрсеткішіне пропорционал деп есептесек, онда (6) принципінің оптикалық аналогы келесідей түрде болуы керек:

$$\delta \int n ds = \delta \int \frac{ds}{v} = 0, \quad (7)$$

белгілі Ферма принципі, жарық сәулелерінің траекторияларын біртекті емес ортада анықтайтын, осылайша өрнектеледі.

Оптикалық-механикалық аналогия кванттық механиканы жасауда, әсіресе Л. де Бройль мен Э. Шредингердің еңбектерінде маңызды рөл атқарды. Геометриялық оптика толқындық оптиканың жуықтаушы болғандықтан, классикалық механика материалдық нүктелердің белгілі траекториялар бойымен қозғалысын сипаттаған құбылыстарды, шын мәнінде, белгілі бір толқындардың қозғалысының нәтижесі ретінде қарастыру қажет болды. Жаңа механика (толқындық оптиканың аналогы) классикалық механикаға толқындық оптиканың геометриялық оптикаға қатысы сияқты болуы керек. Гамильтон-Якоби теңдеуі жаңа механиканың толқындық

теңдеуінің шектік жағдайы болуы тиіс, бұл толқын ұзындығы нөлге ұмтылған кезде дұрыс болады.

Ізделінді теңдеуді анықтауға келесі пайымдаулар мүмкіндік береді. Беттер $S(r, t) = S_0(r) - Et = \text{const}$ уақыт өткен сайын қозғалады, және әрбір сәтте осындай беттердің әрқайсысы $S_0 = \text{const}$ беттерінің бірімен сәйкес келеді. Бұл $S = \text{const}$ бетінің қозғалысын толқын фронты ретінде қарастыруға мүмкіндік береді. S_0 және f арасындағы сәйкестік S -тің толқынның фазасына пропорционал болуы керектігін білдіреді (қараңыз (4)): $S - Et = h[k_0 f(r) - \omega t]$, мұндағы h — пропорционалдық коэффициенті. Сондықтан бөлшектің энергиясын E белгілі бір тербеліс жиілігіне сәйкестендіруге болады келесі қатынас арқылы:

$$E = h\omega, \quad (8)$$

Ал қысқартылған әрекет S_0 эйконалға $f(r)$ пропорционал:

$$S_0 = hk_0 f(r). \quad (9)$$

«Сыну көрсеткіші» бөлшектердің қозғалысымен байланысты толқындар үшін, (1), (5) және (9) теңдеулерінен шығатынына сәйкес, мынаған тең:

$$n = \sqrt{2m(E - V)}/hk_0 = v_0 \sqrt{2m(E - V)}/(h\omega). \quad (10)$$

Егер тек қана W жиілігін қарастырумен шектелсек, онда (3) толқындық теңдеу келесі түрге ие болады:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{n^2 \omega^2}{v_0^2} \varphi = 0. \quad (11)$$

Берілген энергиясы E бар микробөлшектердің қозғалысын сипаттайтын толқындық өріс $\psi(x, y, z)$, (11)-ге (10)-ды қойғанда алынады. Сонда жаңа механиканың теңдеуі, толқындық оптиканың аналогы ретінде, келесі түрде жазылады:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m(E - V)}{h^2} \psi = 0. \quad (12)$$

Тәжірибе көрсеткендей, әмбебап пропорционалдық коэффициент h — бұл Планк тұрақтысы, 2π -ға бөлінген. (12) теңдеуі стационарлық күйлер үшін Шредингер теңдеуін білдіреді. Бұл теңдеудің сипаттамалық функциясы оның эйконалы болып табылады. Уақытқа қатысты Шредингер теңдеуінде мұндай сәйкестік жоқ, өйткені ол уақыт бойынша бірінші ретгі теңдеу, ал толқындардың таралу теңдеуі — екінші ретгі.

Материалдық нүктелер жүйесі үшін оптикалық-механикалық аналогия конфигурациялық кеңістікте орнатылады, мұндағы өлшемдер саны S — еркіндік дәрежелерінің саны. Осы кеңістікте Гамильтон-Якоби теңдеуі әрекет функциясы S үшін, ал Шредингер теңдеуі толқындық функция ψ үшін жазылады.

1 ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТЕОРИЯСЫНДА ДЕНЕЛЕР МЕХАНИКАСЫНЫҢ БІРІНШІ ЖУЫҚТАУ МЕТРИКАСЫ

1.1 Фоктың бірінші жуықтау метрикасы

Қозғалыс мәселесін алғашқы жуықтаудың метрикасынан бастау ыңғайлы. Мұндай метриканы Фок өзінің монографиясында [2, б.271] келтіреді. Оның пайымдауларының барысы келесідей.

Эйнштейннің теңдеулерінен бастаймыз:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\chi T^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

мұндағы Риччи тензоры

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu, \alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}. \quad (1.2)$$

Мұнда $\Gamma^{\mu, \alpha\beta}$ — Кристоффель символынан алынған шама

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right), \quad (1.3)$$

индикаторларды көтеру арқылы:

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} . \quad (1.4)$$

Осылайша, (1.2) теңдеуіндегі соңғы бөлігінде екінші туындылар жоқ, ол $\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}$ шамасынан, яғни, негізі тензордың алғашқы туындыларынан да $\xi^{\mu\nu}$.

Екінші туындылар, бірінші бөліктен басқа да $\Gamma^{\mu\nu}$ шамаларына да кіреді. Бірақ соңғы шамаларда екінші туындылар тек шамаларының алғашқы туындылары арқылы ғана болады:

$$\Gamma^{\nu} = g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} . \quad (1.5)$$

Еске сала кетейік, Даламбер операторын кейбір Ψ функциясынан мынадай түрде жазуға болады:

$$\square\Psi = g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} - \Gamma^{\nu} \frac{\partial\Psi}{\partial x^{\nu}} , \quad (1.6)$$

сондай-ақ мынадай түрде:

$$\square\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\Psi}{\partial x^{\alpha}} \right) . \quad (1.7)$$

қайдан

$$\Gamma^{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \right) , \quad (1.8)$$

сондай-ақ

$$\Gamma^\alpha = -\square x^\alpha. \quad (1.9)$$

$\Gamma^{\mu\nu}$ шамалары Γ^ν шамасынан контравариантты туындылардың жарты мөлшерін құрастыру ережесіне сәйкес, яғни:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\nabla^\mu \Gamma^\nu + \nabla^\nu \Gamma^\mu \right), \quad (1.10)$$

немесе толығырақ:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\nu}{\partial x^\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \Gamma^\alpha \right). \quad (1.11)$$

Әрине, \tilde{A}^ν вектор болмағандықтан, $\Gamma^{\mu\nu}$ шамалары тензор болмайды. Бұл жағдайды Эйнштейн теңдеулерін оңайлату үшін пайдалануға болады.

Эйнштейн теңдеулері жалпы ковариантты болып табылады және, демек, төрт кездейсоқ функцияны қамтитын координаталардың түрлендірулерін қабылдайды. Енді теңдеулер қандай да бір кездейсоқ координаталарда шешілгенін болжайық. Біз $\square \Psi = 0$ теңдеуінің төрт шешімін тәуелсіз айнымалылар ретінде алып, басқа координаталарға өтуімізге болады. Бірақ егер әрбір x_0, x_1, x_2, x_3 координата $\square x^\alpha = 0$ теңдеуін қанағаттандырса, онда берілген координаталық жүйеде мынадай болады:

$$\Gamma^\nu = 0, \quad (1.12)$$

демек, және

$$\Gamma^{\mu\nu} = 0. \quad (1.13)$$

Мұндай координаталық жүйені гармоникалық деп атаймыз. Әдебиетте Фоктың гармоникалық координаталық жүйесі деген атау да кең тараған.

Алғашқы жуықтау метрикасында массалардың бөлінуінің аралдық сипаты туралы болжамнан шығамыз. Бұл болжам шексіздікке математикалық жағынан анықталған тапсырманы жасау үшін (Ньютон теориясындағыдай) белгілі шекті шарттарды қоюға мүмкіндік береді.

Массалардың аралдық бөлінуінде тарту өрісі шексіздікке ұмтылғанда нөлге тең болады. Сондықтан біз массалардан жеткілікті қашықтықта кеңістік-время геометриясының псевдоэвклидтік болуын болжауымыз керек. Бірақ псевдоэвклидтік геометрия бар жерде квадрат аралық келесі түрге ие болатын Галилей координаттары X, Y, Z, t , бар:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1.14)$$

Тәжірибе көрсеткендей, кеңістіктегі геометрия псевдоэвклидтік геометриядан көп ерекшеленбейді, сондықтан квадрат аралықтың (1.14) өрнегі бүкіл кеңістікте көп өзгешеліктер көрсетпейтін осындай айнымалылар бар деп күтуге болады. Бұл «квазигалилеев» координаттардың математикалық анықтығы Фоктың монографиясында [2, б.273] берілген.

Ескеруіміз керек, Ньютон теориясы ең оңай түрде дәл Галилей координаттарында (инерциялық есептеу жүйесі) формулирленеді. Сондықтан Эйнштейн теориясын Ньютон теориясымен салыстыру, ол Ньютон теориясының жалпы түрі болып табылады, өз қасиеттері бойынша Галилей координаттарына ең жақын координаттарда жүргізілуі тиіс.

Ньютон теориясы релятивистік емес. Бірақ релятивистік теориядан релятивистік емес теорияға өту үшін жарық жылдамдығын c үлкен параметр ретінде бөліп көрсету қажет. Сондықтан біз уақыт координатасының өрнегінде c шамасын енгізбейміз және келесіні аламыз:

$$x_0 = t, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \quad (1.15)$$

Осылайша, x_0 айнымалысы t уақыт мәніне ие болады.

(1.14) теңдеуіндегі квадрат аралық ені былай жазылады:

$$ds^2 = c^2 dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \quad (1.16)$$

Бұл өрнек массалардан жеткілікті қашықтықта, геометрия псевдоэвклидтік болғанда орын алуы керек.

Жалпы өрнекпен салыстырғанда

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad (1.17)$$

біз шексіздікке мынадай $g_{\mu\nu}$ шекті мәндерді аламыз:

$$\left. \begin{aligned} (g_{00})_\infty &= c^2, & (g_{0i})_\infty &= 0 \\ (g_{ik})_\infty &= -\delta_{ik}, & (i, k &= 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Метриялық тензордың контравариантты компоненттері үшін тиісті шекті мәндер мынадай болады:

$$(g^{00})_\infty = \frac{1}{c^2}, \quad (g^{0i})_\infty = 0, \quad (g^{ik})_\infty = -\delta_{ik}. \quad (1.19)$$

Бұл формулаларды метриялық тензор үшін шекті шарттар ретінде қарастыруға болады.

Алайда, жазылған шекті шарттар жеткіліксіз, оларға массалардан жеткілікті қашықтықта айырмалардың

асимптотикалық мінез-құлқын $g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu})_{\infty}$ сипаттайтын басқа шарттарды қосу қажет.

Эйнштейн теңдеулері (ең болмағанда, $\Gamma^{\nu} = 0$ жағдайында) толқындық типтегі теңдеулерді білдіреді, олардың негізгі мүшелері Даламбер операторының түріне ие. Массалардан тыс тензор $R^{\mu\nu}$ нөлге тең, ал теңдеулер мынадай түрге келтіріледі:

$$R^{\mu\nu} = 0, \quad (1.20)$$

мұнда, $\Gamma^{\nu} = 0$ жағдайында, тензор $R^{\mu\nu}$ мынадай түрге ие:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \quad (1.21)$$

Біз үлкен қашықтықта $g^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu})_{\infty}$ айырмасы және олардың алғашқы және екінші туындылары нөлге ұмтылады деп

болжаймыз, яғни $\frac{1}{r}$ түрінде, мұнда $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Онда үлкен қашықтықта (1.21) теңдеуіндегі алғашқы туындылардан алынған біртекті квадраттық функцияны білдіретін екінші мүше $\frac{1}{r^2}$ түрінде нөлге ұмтылады. Ал

Даламбер операторының коэффициенттерінде сол жақындықпен шекті мәндерімен ауыстыруға болады. Осы оңайлатулардан кейін

$$R^{\mu\nu} \cong -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_0^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_3^2} \right) \quad (1.22)$$

Эйнштейннің тартылыс теориясын Ньютонның теориясымен салыстыру үшін, ең алдымен, тартылыс теңдеулеріне кіретін χ тұрақтысын анықтауымыз керек.

$$R^{\mu\nu} = -\chi \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right), \quad (1.23)$$

мұнда

$$R = \chi T. \quad (1.24)$$

Бұл тұрақтының мәнін Ньютондық жуықтауда квадрат аралығының өрнегін салыстыру арқылы табуға болады.

$$ds^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

мұнда

$$U = \gamma \int \frac{\rho'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' \quad (1.26)$$

– Ньютон потенциалы Эйнштейн теңдеулерінің жуықтап шешуінен алынған өрнекпен салыстырылады.

(1.23)-тің оң жағындағы масса тензоры үшін біз евклидтік метрикаға сәйкес келетін жуықталған өрнектерді және серпімді дене жағдайын аламыз \

$$\left. \begin{aligned} c^2 T^{00} &= \rho + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \Pi \right), \\ c^2 T^{0i} &= \rho v_i + \frac{1}{c^2} \left\{ v_i \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \cdot \Pi \right) - P_{ik} v_k \right\}, \\ c^2 T^{ik} &= \rho v_i v_k - P_{ik}. \end{aligned} \right\}. \quad (1.27)$$

мұндағы ρ – масса тығыздығы, V_i – жылдамдық компоненттері, Π – массаның бірлігіне шаққандағы серпімді энергия, P_{ik} – үшөлшемді кернеу тензоры.

Серпімді дененің масса тензорының (1.27) өрнегі тартылыс өрісі болған жағдайда келесі түрге ие болады:

$$\left. \begin{aligned} c^2 T^{00} &= \rho \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U \right) \right\}, \\ c^2 T^{0i} &= \rho v_i \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U \right) \right\} - \frac{1}{c^2} P_{ik} v_k, \\ c^2 T^{ik} &= \rho v_i v_k - P_{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Біздің жуықтауымызда біз мұнда энергия тығыздығы мен ағынына (Умов скаляры мен векторына) сәйкес келетін мүшелерді елемейміз керек және өрнекті жай ғана былай жазуымыз қажет:

$$c^2 T^{00} = \rho, \quad c^2 T^{0i} = \rho v_i. \quad (1.29)$$

(1.29) өрнектері дұрыс болатын дәлдікпен, біз масса тензорының инвариантын мына мәнмен алмастыра аламыз:

$$T = \rho. \quad (1.30)$$

(1.29) және (1.30) формулалары Эйнштейн тендеулерінің (1.23) оң жағындағы тензордың жуықталған мәндерін есептеуге мүмкіндік береді. Галилеев мәндерін $g^{\mu\nu}$ пайдалана отырып, біз мынаны аламыз:

$$\left. \begin{aligned} T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T &= \frac{1}{2c^2} \rho, \\ T^{0i} - \frac{1}{2} g^{0i} T &= \frac{1}{c^2} \rho v_i, \\ T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T &= \frac{1}{2} \rho \delta_{ik}. \end{aligned} \right\}. \quad (1.31)$$

Екінші жағынан, гармониялық координаталық жүйеде біз жуықтап, (1.22) бойынша мынаны аламыз:

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial t^2}, \quad (1.32)$$

Мұнда Δ — кәдімгі евклид оператор Лапласа.

Бізді квазистатикалық шешім қызықтыратындықтан, біз мұнда уақыт бойынша екінші туындыға қатысты мүшені елемеуге болады. (1.32) және (1.31) өрнектерін (1.23) теңдеуіне енгізгенде, мынаны аламыз:

$$\left. \begin{aligned} \Delta g^{00} &= -\frac{\chi}{c^2} \rho, \\ \Delta g^{0i} &= -\frac{2\chi}{c^2} \rho v_i, \\ \Delta g^{ik} &= -\chi \rho \delta_{ik}. \end{aligned} \right\}. \quad (1.33)$$

Енді Ньютондық жуықтауда квадрат аралығының өрнегін еске түсірейік. (1.25) бойынша, бұл өрнекте:

$$g_{00} = c^2 - 2U. \quad (1.34)$$

Басқа метрикалық тензор компоненттері бұл жуықтауда олардың галилеев мәндерімен алмастырылады. Формуланы қолдана отырып

$$g_{00}g^{00} + g_{0i}g^{i0} = 1 \quad (1.35)$$

және $g_{0i}g^{i0}$ көбейтінділерінің бірлікпен салыстырғанда өте кіші болатындығын ескере отырып, біз мынаны қабылдай аламыз,

$$g_{00}g^{00} = 1, \quad (1.36)$$

және, нәтижесінде,

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4}. \quad (1.37)$$

Бірақ Ньютон потенциалы U келесі теңдеуге сәйкес келеді:

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho. \quad (1.38)$$

Осыдан

$$\Delta g^{00} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}\rho. \quad (1.39)$$

Бұл теңдеуді (1.33) теңдеуімен салыстырған кезде, біз Эйнштейн тартылыс тұрақтысы χ Ньютон тұрақтысы γ мына қатынас арқылы байланысқан жағдайда сәйкестік алатынымызды көреміз:

$$\chi = \frac{8\pi\gamma}{c^2}. \quad (1.40)$$

Ньютон потенциалы U (1.38) теңдеуінің сол шешімі, ол шексіздікке тән тиісті шектерге сәйкес келеді және (1.26) түрінде болады. Ньютон потенциалымен қатар, біз мына функцияларды енгіземіз:

$$U_i = \gamma \int \frac{(\rho v_i)'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' , \quad (1.41)$$

теңдеулерге сәйкес келетін

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i \quad (1.42)$$

және шексіздікке тән шарттармен. Бұл функцияларды сәйкес электродинамикалық шамаларға ұқсас тартылыс вектор-потенциалы деп атауға болады. Содан кейін (1.33) теңдеулерінің шешімдері, онда χ тұрақты (1.40) мәнімен алмастырғаннан кейін, мынандай болады:

$$\left. \begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right), \\ g^{0i} &= \frac{4}{c^4} U_i, \\ g^{ik} &= - \left(1 - \frac{2U}{c^2} \right) \delta_{ik} . \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Ескерту керек, U жылдамдықтың квадратының өлшеміне ие, ал U_i жылдамдықтың үшінші дәрежесінің өлшеміне ие. Көлемнің ретін бағалағанда, U шамасының q^2 шамасына тең болатындығын, ал U_i шамасының q^3 шамасына тең

болатындығын есептеуге болады, мұнда Q жарық жылдамдығына қарағанда аз жылдамдық.

Контраварианттық компоненттерден метриялық тензор, біз таза алгебралық жолмен коварианттық компоненттерді және басқа шамаларды анықтай аламыз.

Шынында да, алгебрадан белгілі:

$$g^{\alpha\sigma} = \frac{\text{элементті алгебралық қосымшасы } g_{\alpha\sigma} \text{ анықтаушы } g}{g} \quad (1.44)$$

элементтің алгебралық толықтыруы

$$g_{\alpha\sigma} = (-1)^{\alpha+\sigma} \text{ элементтің миноры } g_{\alpha\beta} \text{ детерминанты } g. \quad (1.45)$$

Алайда коварианттық шамаларды анықтау үшін g_{0i} біз қатынастарды пайдаланамыз:

$$g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (1.46)$$

Егер, $\mu = 0$, $\nu = i$, онда

$$g_{0\sigma} g^{\sigma i} = \delta_0^i = 0. \quad (1.47)$$

Бұл теңесті жазайық:

$$g_{00} g^{0i} + g_{0k} g^{ki} = 0 \quad (1.48)$$

немесе

$$c^2 g^{0i} = g_{0i} = \frac{4U_i}{c^2}. \quad (1.49)$$

ары қарай

$$g_{ik} = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik} . \quad (1.50)$$

Осылайша, Фоктың бірінші жақындық метрикасы мынадай түрге ие [2, б. 271]:

$$ds^2 = (c^2 - 2U)dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2}(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)dt . \quad (1.51)$$

Бұл метрикаға қатысты келесі ескертулер жасауға болады:

1. Метрикалық тензордың g_{00} компонентінде релятивистік қосымша жоқ, ал g_{ik} және g_{0i} компоненттерінде мұндай қосымшалар бар. Бұл Фоктың бір уақытта екі мәселені шешуінен туындайды: χ тұрақты анықтау және бірінші жақындық метрикасын белгілеу. Нақты айтқанда, бұл мәселелер бөлінуі керек: алдымен Эйнштейннің теңдеулері нөлдік жақындауда шешілуі тиіс және осы шешімдерді Ньютон интервалымен салыстыра отырып, тұрақты χ табылуы керек, содан кейін бірінші жақындық құрылуы тиіс, яғни метрикалық тензордың барлық компоненттеріне $g_{\mu\nu}$ релятивистік түзетулерді іздеу.

2. Егер (1.51) формуланы орталық симметриялы гравитациялық өрістегі сынақ денесінің қозғалысы мәселесіне қолдансақ, онда перигелийдің ығысуына қатысты дұрыс өрнек шықпайды.

3. Островтық жүйе үшін $Udt^2 \sim dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, яғни g_{00} релятивистік түзету g_{ik} түзетуімен бірдей тәртіпте болуы керек.

Осы ескертпелерді ескере отырып, g_{00} түзетуін анықтайық. Бұл жерде қатысты теңдеу құрастыруымыз керек.

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4} + \frac{\Phi}{c^6}, \quad (1.52)$$

мұнда Φ -әлі белгісіз функция. Олай болса, ізделіп отырған метриканың квазистационарлығын сақтау кезінде мыналар болады:

$$R^{00} = \frac{1}{2} \Delta g^{00} - \frac{2U}{c^6} \Delta U - \frac{2}{c^6} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2. \quad (1.53)$$

Сәйкес Эйнштейннің теңдеуі мынадай болады:

$$R^{00} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} \left(T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T \right), \quad (1.54)$$

мұнда

$$c^2 T^{00} = \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi - U \right) \right],$$

$$c^2 T^{oi} = \rho v_i,$$

$$c^2 T^{ik} = \rho v_i v_k - P_{ik}. \quad (1.55)$$

Бізді қызықтыратын жуықтау үшін

$$\mathbf{T} = \rho - \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + 3U - \Pi \right) + \frac{\mathbf{P}_{kk}}{c^2}, \quad (1.56)$$

$$\mathbf{T}^{00} - \frac{1}{2} g^{00} \mathbf{T} = \frac{1}{2c^2} \left[\rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) - \frac{\mathbf{P}_{kk}}{c^2} \right].$$

Енді (1.54) мынадай түрде жазылады

$$\frac{1}{2} \Delta g^{00} - \frac{2U}{c^6} \Delta U - \frac{2}{c^6} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 = -\frac{4\pi\gamma}{c^4} \left[\rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) - \frac{\mathbf{P}_{kk}}{c^2} \right] \quad (1.58)$$

Осыдан (1.52) ескере отырып, белгісіз функция Φ үшін теңдеу аламыз:

$$\Delta(\Phi - 2U^2) = -8\pi\gamma \left[\rho \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) - \mathbf{P}_{kk} \right],$$

шешімі мынадай болады:

$$\Phi = 2U^2 + 2\gamma \int \frac{\rho' \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right)'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 - 2\gamma \int \frac{\mathbf{P}'_{kk} (dx')^3}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.60)$$

Сәйкес g^{00} ковариантты метрикалық тензор компонентасы

$$g_{00} = c^2 - 2U + \frac{4U^2 - \Phi}{c^2} = c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2} \int \frac{\rho' \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right)' - P'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 \quad (1.61)$$

Осылайша, Фоктың бірінші жуықтау метрикасы соңғы түрін алады [9].

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2} \int \frac{\rho' \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right)' - P'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3) dt \quad (1.62)$$

Бұл метрикадан көрінгендей, Эйнштейннің гравитация теориясындағы бірінші жуықтау $\left(\sim \frac{1}{c^2} \right)$ өрістің бейнелілігін, үш өлшемді кеңістіктің қисықтығын, ішкі құрылымды және айналыммен байланысты векторлық гравитациялық өрісті ескеруге алып келеді. Ал Ньютоның гравитация теориясында интервал

$$ds^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \quad (1.63)$$

линейлік гравитациялық өріс, үшөлшемді кеңістіктің евклидтік сипаты және айналумен байланысты күш өрісінің жоқтығы туралы болжауларға негізделген.

1.2 Айналатын сұйық шардың метрикасы

Айналмалы шар үшін (1.62) бірінші жуықтау метрикасының айқын түрін келесі екі болжам бойынша жазайық:

1) сұйық дене, ішкі қозғалыс теңдеуімен [4, с.19].

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial X_i} - \omega_{ik} \omega_{jk} X_j \right) = \frac{\partial P}{\partial X_i}, \quad (1.64)$$

мұндағы ω_{jk} – үш өлшемді антисимметриялық бұрыштық жылдамдық тензоры, P – қысым;

2) Қатты дене, ішкі қозғалыс теңдеуімен [4, с.19].

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X_i} = \frac{\partial P}{\partial X_i}. \quad (1.65)$$

Дене ішіндегі жылдамдықтардың таралуы мынадай деп болжанады

$$v_i = \omega_{ij} X_j. \quad (1.66)$$

Бастапқыда ішкі құрылымға тәуелді интегралды есептейік. Сұйық шар үшін [4, с.19]

$$\int \frac{\rho' \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right)' + 3P'}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} (dx')^3 = \frac{\xi^{\mathbf{ж}}}{r} - \frac{2}{7m_0} (\bar{\mathbf{S}}_0 \bar{\mathbf{V}}) \left(\bar{\mathbf{S}}_0 \bar{\mathbf{V}} \frac{1}{r} \right), \quad (1.67)$$

мұнда m_0 – шардың массасы, \vec{S}_0 –оның бұрыштық моменті,
 $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$.

Есіңізге сала кетейік, бұл

$$\left(\vec{S}_0 \vec{\nabla}\right) \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r}\right) = -\frac{S_0^2}{r^2} + \frac{3\left(\vec{r}\vec{S}_0\right)^2}{r^5}. \quad (1.68)$$

Ал $\xi^{\text{ж}}$, бұл мөлшер мына қатынас арқылы анықталады:

$$\xi^{\text{ж}} = \frac{8}{3} T + \frac{2}{3} \varepsilon, \quad (1.69)$$

мұндағы T – дененің айналу кинетикалық энергиясы, ε – дене бөлшектерінің өзара тартылу энергиясы теріс таңбамен алынған.

(1.67) есептегенде сондай-ақ интеграл пайда болады

$$\int P_{X_k X_l}(\mathbf{dx})^3 = \frac{1}{35} \gamma m_0^2 R^2 \delta_{kl} - \frac{2}{5} T_{kl}, \quad (1.70)$$

ол [13, 20-бетте] есептелген. (1.70)-те

$$T_{kl} = \int \rho \Omega_0 X_k X_l (\mathbf{dx})^3, \quad (1.71)$$

мұндағы орталықтан тепкіш күштің потенциалы

$$\Omega_0 = \frac{1}{2} \omega_{ik} \omega_{jk} X_i X_j. \quad (1.72)$$

Осылайша, айналмалы сұйық шар үшін Фоктың бірінші жуықтау метрикасы (1.62) келесі түрде болады [4, б.20]:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left[c^2 - 2U \left(1 + \frac{\xi^{\text{ж}}}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7m_0 c^2} (\vec{S}_0 \vec{\nabla}) \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \right] dt^2 - \\
 & - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3) dt
 \end{aligned} \tag{1.73}$$

мұнда

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}, \quad \vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{r} \vec{S}_0]. \tag{1.74}$$

Қатты дене үшін

$$\int \frac{\rho' \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) + 3P'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 = \frac{\xi^{\text{T}}}{r} - \frac{15}{56m_0} (\vec{S}_0 \vec{\nabla}) \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \tag{1.75}$$

мұнда

$$\xi^{\text{T}} = 4\mathbf{T} + \frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{1.76}$$

Енді айналмалы қатты дене үшін бірінші жуықтау метрикасы келесідей жазылады:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left[c^2 - 2U \left(1 + \frac{\xi^T}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{15\gamma}{28m_0 c^2} (\vec{S}_0 \vec{V}) \left(\vec{S}_0 \vec{V} \frac{1}{r} \right) \right] dt^2 - \\
& - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3) dt
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Сфералық координаттар жүйесінде сұйық және қатты шарлар үшін Фоктың бірінші жуықтау метрикасы сәйкесінше (1.73) және (1.77) түрінде болады:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left[c^2 - 2U \left(1 + \frac{\xi^x}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma S_0^2}{7m_0 c^2 r^3} (1 - 3\cos^2 \theta) \right] dt^2 - \\
& - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{4\gamma S_0}{rc^2} \sin^2 \theta d\varphi dt
\end{aligned} \tag{1.78}$$

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left[c^2 - 2U \left(1 + \frac{\xi^T}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{15\gamma S_0^2}{28m_0 c^2 r^3} (1 - 3\cos^2 \theta) \right] dt^2 - \\
& - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{4\gamma S_0}{rc^2} \sin^2 \theta d\varphi dt
\end{aligned} \tag{1.79}$$

Егер шар айналмаса, онда

$$S_0 = 0, \xi^{\text{ж}} = \xi^{\text{T}} = \frac{2}{3} \varepsilon, \quad (1.80)$$

және метрикалар (1.78) мен (1.79) бірдей болған кезде сәйкес келеді. Бұл жағдайда метриканың түрі келесідей:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} \right] dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.81)$$

Салыстыру үшін Шварцшильд метрикасының гармоникалық координаттар жүйесіндегі сәйкес жіктелуін жазып шығайық [2, б.59]:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} \right] dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.82)$$

(1.81) мен (1.82) арасындағы айырмашылық гравитациялық дененің ішкі құрылымын ескере отырып, массаны елеусіз қайта бөлуден тұрады.

Дененің айналуын ескергенде, басқа жағдай орын алады. Шынында да, алдымен Бойер мен Линдквист координаттарындағы Керр метрикасын жазайық [5, б. 44]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2\mu\rho}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \delta} \right) - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \delta}{\rho^2 - 2\mu\rho + a^2} d\rho^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \delta) d\delta^2 -$$

$$-\left(\rho^2 + a^2 + \frac{2\mu\rho a^2 \sin^2 \delta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \delta}\right) \sin^2 \delta d\varphi^2 - \frac{4\mu\rho a \sin^2 \delta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \delta} c dt d\varphi \quad (1.83)$$

мұнда

$$\mu = \frac{\gamma m_0}{c^2}, \quad a = -\frac{S_0}{m_0 c} \quad (1.84)$$

Бұл метриканы $\sim \frac{1}{c^2}$ дәлдікпен қатармен жазайық. Онда

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U' + \frac{2U'a^2}{\rho^2} \cos^2 \delta \right] dt^2 - \left(1 + \frac{2U'}{c^2} - \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \delta \right) d\rho^2 - \rho^2 \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \cos^2 \delta \right) d\delta^2 - \rho^2 \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \sin^2 \delta d\varphi^2 - \frac{4U'a}{c} \sin^2 \delta d\varphi dt \quad (1.85)$$

мұнда

$$U' = \frac{\gamma m_0}{\rho} \quad (1.86)$$

Жаңа координаттар енгізсек,

$$(r + \mu)^2 = \rho^2 + a^2 \sin^2 \delta, \quad \sin \theta = \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2} \cos^2 \delta} \sin \delta, \quad \varphi = \varphi \quad (1.87)$$

Осылайша, Керр метрикасын (1.85) келесі түрге келтіруге болады:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{Ua^2}{r^2} (1 - 3 \cos^2 \theta) \right] dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) - \frac{4Ua}{c} \sin^2 \theta d\varphi dt \quad (1.88)$$

Мұнда U (1.74) формуласына сәйкес анықталады.

Керр метрикасының (1.88) осы жуық метрикасымен (1.78) және (1.79) Фоктың әдісі негізінде алынған түзетілген бірінші жуық метрикаларымен салыстыруды жүргізейік. Енді метрикалардың (1.78) және (1.79) айналмалы сұйық және қатты шар үшін алынғанын еске салайық, ал олар денеден алыстауда $\sim \frac{1}{c^2}$ дәлдікпен анықталды. Нақтырақ айтқанда, ds^2 инвариант

келесі $\frac{q^2}{c^2} \frac{R^2}{D^2} dl^2$ дәлдікпен анықталады: , мұнда q - жүйедегі

сипаттамалық жылдамдық, R - оның сызықтық өлшемдерінің масштабы, D - өріс анықталатын қашықтықтың масштабы, dl^2 - интервалдың кеңістіктік бөлігі элементінің масштабы.

Осылайша, Фок әдісінің жалпы ережелерімен $q^2 \sim U$ деп алынады.

Енді (1.78), (1.79) және (1.88) метрикаларын салыстырайық. Негізгі айырмашылық мүшесінде коэффициенттердің сандық айырмашылығы болып табылады, ол S_0^2 -ге пропорционал. Сонымен қатар, теңсіздік пайда болады.

$$1 > \frac{4}{7} > \frac{15}{28} . \quad (1.89)$$

Физикалық дененің Керр метрикасын қалыптастыратын моделінің әлі де анықталмағанына қарамастан, (1.78) және (1.79) метрикаларын Эйнштейн теңдеулерінен $\frac{q^2 R^2}{c^2 D^2} dl^2$ дәлдікпен, немесе басқаша айтқанда, S_0^2 -ге пропорционал мүшелерге дейінгі дәлдікпен Керр метрикасының өзіндік нәтижесі ретінде қарастыруымызға болады. Ал танымал Лензе-Тирринг метрикасы [6, б.426] S_0 -ге пропорционал мүшелерді ұстап қалады, яғни сызықты мүшелерге дейін шығарылады.

1.3 ЖСТ механикасындағы айналатын шардың метрикасы бойынша талқылауды жалғастыру

1. Салыстырмалы түрде таяу уақытқа дейін [3, 78-бет], ЖСТ механикасында белгілі, Шварцшильдтің массасы бар орталық денедегі материалдық бөлшектің қозғалысы туралы міндеті Шварцшильдтің дәл орталық-симметриялық метрикасы негізінде қаралды [6, 45-бет]:

$$dS^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\theta - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.90)$$

Осыдан, түпкілікті нәтиже ретінде, финиттік қозғалыс үшін Эйнштейн формуласымен көрсетілетін перигелийдің ығысуы туралы жалғыз әсер:

$$\Delta g = \frac{6\pi m_0}{a(1 - e^2)c^2}. \quad (1.91)$$

2. Бұл эффект бірінші жуықтау эффектісі, яғни $\sim \frac{1}{c^2}$.

пропорционал. Сондықтан, ол Фоктың бірінші жуықтау метрикасынан [2, б. 105] алынуы тиіс еді:

$$dS^2 = (c^2 - 2U)dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2}(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)dt, \quad (1.92)$$

мұнда

$$U = g \Gamma \frac{r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx_1' dx_2' dx_3',$$

$$U_i = \gamma \int \frac{(\rho V_i)'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx_1' dx_2' dx_3'. \quad (1.93)$$

Мұнда U – Ньютон потенциалы, U_i – потенциал векторы, ρ' – масса тығыздығы, V_i' – дене ішіндегі заттың жылдамдық компоненттері.

Дегенмен, Фоктың бірінші жуықтау метрикасынан (1.92) Эйнштейннің перигелий ауысуы формуласы (1.91) алынбайды.

Не болды? Метрикасынан (1.92) кейбір түзетулер жетіспейтін көрінеді. Бұл түзетулер біздің жұмысымызда [3] алынған, және сәйкесінше Фоктың бірінші жуықтау метрикасы былай болады:

$$dS^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2} \int \frac{\rho' \left(\frac{3}{2} V^2 + \Pi - U \right)' - P'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 \right] dt^2 -$$

$$- \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1^2 + U_2 dx_2^2 + U_3 dx_3^2) dt,$$

(1.94)

мұнда Π – бірлік массаға шаққандағы серпімді энергия, P'_{kk} – үшөлшемді кернеу тензоры.

Егер (1.93) метрикасын Шварцшильдтің мәселесіне қолдансақ, онда Эйнштейннің перигелий ауысуы формуласы (1.91) дұрыс шығады.

Салыстырмалы түрде жақын уақытқа дейін ЖСТ механикасында өте маңызды және ескі проблема – релятивистік қозғалыс теңдеулерінің бірімәнділігі [3, б. 78; 4, б. 96] болды. Бұл мәселе біздің жұмыстарымызда [7, б. 81; 8, б. 56] шешілді. Осы орайда айналмалы сұйық шар үшін Фоктың бірінші жуықтау метрикасының нақтылануы үлкен рөл атқарды [3, б. 95]

$$dS^2 = \left[c^2 - 2U \left(1 + \frac{\xi_0}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7m_0 c^2} (\vec{S}_0 \vec{\nabla}) \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \right] dt^2 -$$

$$- \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1^2 + U_2 dx_2^2 + U_3 dx_3^2) dt,$$

(1.95)

мұнда $\xi_0 = \frac{8}{3}T_0 + \frac{2}{3}\varepsilon_0$, T_0 – дененің айналу кинетикалық энергиясы, ε_0 – дене бөлшектерінің өзара тартылыс энергиясы, теріс таңбамен алынған

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}, \quad \vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{r} \vec{S}_0] \quad (1.96)$$

мұнда m_0 – шардың массасы, \vec{S}_0 – оның бұрыштық импульсі, $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$.

Енді (1.94) формуласын былай жазайық:

$$dS^2 = \left[c^2 - 2U \left(1 + \frac{\xi_0}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7m_0 c^2} (\vec{S}_0 \vec{\nabla}) \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) + \frac{8}{c^2} (\vec{U} \vec{V}) \right] dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) d\vec{r}^2. \quad (1.97)$$

Бұл өрнекті әрі қарай түрлендірейік, байланыстарды пайдаланып:

$$\text{rot} \vec{U} = \frac{\gamma}{2} \left(-\frac{\vec{S}_0}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{r} \vec{S}_0)}{r^5} \right), \quad \vec{U}_M = \frac{\gamma}{2r^3} [\vec{M} \vec{r}],$$

$$\text{rot} \vec{U}_M = -\frac{\gamma \vec{M}}{2r^3}, \quad (1.98)$$

мұнда $\vec{M} = [\vec{r} m \vec{V}] = [\vec{r} \vec{P}]$ – орбиталық импульс.

Сондықтан айналмалы сұйық шардың метрикасы былай болады:

$$dS^2 = \left[c^2 - 2U \left(1 + \frac{\xi_0}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7m_0 c^2} (\vec{S}_0 \text{rot} \vec{U}) + \frac{8}{m c^2} (\vec{S}_0 \text{rot} \vec{U}_M) \right] dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) d\vec{r}^2. \quad (1.99)$$

немесе

$$dS^2 = \left[c^2 - 2U \left(1 + \frac{\xi_0}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{8}{c^2} \left(\vec{S}_0 \left(\frac{1}{7m_0} \text{rot} \vec{U} - \frac{1}{m} \text{rot} \vec{U}_M \right) \right) \right] dt^2 \quad (1.100)$$

Мұндан көрініп тұрғандай, айналмалы шардың метрикасында dS^2 инвариантта өзіне тән момент \vec{S}_0 мен орбиталық момент \vec{M} тудыратын айналым өрістерімен байланысты \vec{S}_0 мүшелер пайда болады [9].

2 БІРІНШІ ЖУЫҚТАУ МЕТРИКАСЫНЫҢ БІРМӘНДІЛІГІ

2.1 ЖСТ механикасындағы нақтыланған бірінші жуықтау метрикасы және координат жүйесін таңдау

Релятивистік қозғалыс теңдеулерінің (ілгерілеуші және айналмалы) бірімәнділігі мәселесі ЖСТ механикасында әлі де өзекті. Бұл мәселені шешудің бір мүмкіндігі релятивистік қозғалыс теңдеулерін алу үшін тәуелсіз әдістерді іздеу болып табылады. Яғни, Эйнштейннің өріс теңдеулерінен түрлі әдістермен (Инфельд әдісі, Фок әдісі және т.б.) шығару немесе төрт өлшемді формада әртүрлі теңдеулерді постулирлеу арқылы бұл теңдеулердің бірімәнділігі мәселесі шешілмейді.

Қазіргі уақытта қозғалыс теңдеулерінің бірімәнділігі мәселесі ЖСТ механикасындағы бірінші жуықтау метрикасының дұрыстығымен байланыстырылады [7, б. 29; 8, б. 62]. Мұндай метриkanı орнату шешілетін тапсырма, бірақ алдымен бірінші жуықтау метрикасы жазылатын координаттар жүйесі туралы мәселені зерттеу қажет. Мұндай зерттеу қазіргі бөлімнің тақырыбы.

Шынында да, бірінші жуықтау метрикасы [4, б. 44] былай көрсетіледі:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2} \int \frac{\rho'(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U)' - P'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 \right) dt^2 -$$
$$- \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3) dt \quad (2.1)$$

мұнда ρ' – масса тығыздығы, v' – дене ішіндегі заттың жылдамдығы, Π' – бірлік массаға шаққандағы серпімді энергия, P'_{ik} – үшөлшемді кернеу тензоры, U, \vec{U} – Ньютон потенциалы және гравитациялық өрістің вектор-потенциалы:

$$U = \gamma \int \frac{\rho'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz', U_i = \gamma \int \frac{(\rho v_i)'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz'. \quad (2.2)$$

Орталық дене үшін немесе бір жинақталған m_0 масса жағдайында, яғни орталық-симметриялық стационар гравитациялық өріс үшін (2.1) метрикасы мынадай болады:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (2.3)$$

Метрика (2.1) және (2.3) гармоникалық координаттар жүйесінде алынғанын еске саламыз. (2.2) формуласынан көрініп тұрғандай, бірінші жуықтауда $\left(\sim \frac{1}{c^2} \right)$ гравитациялық өріс сызықты емес $(\sim U^2)$, ал үшөлшемді (кеңістік) метрика иілген – геометрия конформды-евклидтік болады.

Енді (2.3) метрикасын Шварцшильдтің кеңістік-уақыт метрикасымен [6] салыстырайық:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{\rho} \right) c^2 dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{r_g}{\rho}} - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2.4)$$

мұнда r_g – гравитациялық радиус.

(2.4) формуласын кеңістік метрикасы конформды-эвклидтік формаға (яғни, эвклидтік формасына пропорционал) ие болатын координаттарға түрлендірейік

Егер

$$\rho = r \left(1 + \frac{r_g}{4r} \right)^2 \quad (2.5)$$

(2.3) формуласынан мынаны аламыз:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{r_g}{4r}}{1 + \frac{r_g}{4r}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{4r} \right)^4 \left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (2.6)$$

Метрикалық тензор компоненттерін $\left(\sim \frac{1}{c^4} \right)$ дәлдікпен қатарға бөлсек, ал g_{ik} компоненттерді $\left(\sim \frac{1}{c^2} \right)$ дәлдікпен қарастырсақ, келесіні аламыз:

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_g^2}{2r^2}, \left(1 - \frac{r_g}{4r} \right)^4 \approx 1 + \frac{r_g}{r} \quad (2.7)$$

онда (2.4) метрикасы былайынан өрнектеледі:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_g^2}{2r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.8)$$

Ньютон потенциалын $U = \frac{\gamma m_0}{r}$ енгізе отырып, (2.8) формуласын былай жазуға болады:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{2U^2}{c^4}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.9)$$

Координаттар r , θ , φ – изотропты шар тәрізді координаттар; олардың орнына изотропты декартты координаттар X_1 , X_2 , X_3 енгізуге болады. Сонда Шварцшильд метрикасы келесі шектеулі (жуық) түрге ие болады:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (2.10)$$

Енді біз Фоктың бірінші жуықтау метрикасы мен Шварцшильд метрикасының сәйкес келетінін көріп отырмыз. (2.4) формуласында нашар көрінетін өрістің сызықтылығы (**сызықтық емес**) (2.10) формуласына келгенде айқын болды.

Ақырында, бірінші жуықтау метрикасын толық түсіну үшін бір жинақталған масса m_0 үшін Фокпен [2, б. 145] алынған дәл метрикаға жүгінейік

$$ds^2 = \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right) c^2 dt^2 - \left(\frac{r + \alpha}{r - \alpha} \right) dr^2 - (r + \alpha)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.11)$$

Мұнда координата системасы гармоникалық $\alpha = \frac{\gamma m_0}{c^2}$.

(2.11) формуласын қатарға бөлгенде және мүшелерін $\left(\sim \frac{1}{c^2} \right)$ (бірінші жуықтау) сақтап қалғанымызда, мынаны аламыз.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha^2}{r^2} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2\alpha}{r} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.12)$$

Изотропты декартты координаттарға өтсек, Фоктың дәл метрикасын (2.11) бірінші жуықтауда былай жазуға болады:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha^2}{r^2} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2\alpha}{r} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad (2.13)$$

немесе

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (2.14)$$

Осылайша, орталық-симметриялық метрикалар жүйесінің таңдалуына тәуелді болса да, олар гармоникалық координаттар жүйесінде стандартты түрде (2.2) формасында болады, өріс сызықты емес және метрианың кеңістік бөлігі конформды-эвклидтік.

2.2 Орталық дененің нақтыланған бірінші жуықтау метрикасы және оның жинақтылығы

Бұл бөлімде Фоктың бірінші жуықтау метрикасының дұрыстығы қарастырылып, оны бір жинақталған масса m_0 үшін дәл орталық-симметриялық метрианың қатарға бөлінуімен салыстыру жүргізіледі. Олар бір-бірімен тең екендігі көрсетілген.

Орталық дене немесе бір жинақталған масса m_0 үшін бірінші жуықтау $\left(\square \frac{1}{c^2} \right)$ орталық-симметриялық метрикасы [3]

былай болады:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (2.15)$$

мұнда $U = \frac{\gamma m_0}{r}$ – ньютон потенциалы.

Бұл метрика дұрыс, өйткені ол (2.15) оң жағындағы барлық $\left(\sim \frac{1}{c^2} \right)$ тәртібіндегі мүшелерді ескереді, бұл әрдайым орындала бермейді [3, б. 116]. Нелинейлі өріс пен кеңістік метрикасының euclid емес болуы осында бір уақытта көрініс табады. Бұл бірінші жуықтау метрикасы, және ол гармоникалық координаттар жүйесінде алынған.

Мұнда метриялық тензорлардың g_{00} және g_{ik} компоненттерін білдіретін қатарлардың жинақталу мәселесін талқылаймыз. Ол үшін (2.15) формуласын былай жазайық:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{2U^2}{c^4}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (2.16)$$

Белгілеу енгізіп

$$x = \frac{2U}{c^2}, \quad (2.17)$$

мынаны аламыз

$$ds^2 = \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) c^2 dt^2 - (1 + x) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (2.18)$$

Енді біз қатардың бөлінуін

$$g_{00} = 1 - x + \frac{x^2}{2} \quad (2.19)$$

алғашқы жуықтау $\left(\sim \frac{1}{c^2}\right)$ шеңберінде әртүрлі жолмен аппроксимацияланатынын көреміз.

$$e^{-x} = \sum \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad (2.20)$$

(2.19) және (2.20) ескере отырып, қарастырылатын метриканы (2.18) былай жазуға болады:

$$ds^2 = e^{-\frac{2U}{c^2}} c^2 dt^2 - e^{\frac{2U}{c^2}} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \quad (2.21)$$

Екінші жағынан, бізде Фокпен [2, б. 63] алынған бір жинақталған масса m_0 үшін дәл орталық-симметриялық метриканың бар екені белгілі, ол тік бұрышты гармоникалық координаттарда былай жазылған:

$$ds^2 = \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right)^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - \left(\frac{r + \alpha}{r - \alpha} \right) \frac{\alpha^2}{r^4} (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2, \quad (2.22)$$

мұндағы $\alpha = \frac{\gamma m_0}{c^2}$.

Бұл метриканы бірінші жуықтауда, яғни (2.22) оң жағында мүшелерін қалдырып $\left(\sim \frac{1}{c^2} \right)$, былай жазайық. Алдымен, аралық өрнек ретінде мынаны аламыз:

$$ds^2 = \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2\alpha}{r} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \quad (2.23)$$

Ары қарай

$$g_{00} = \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha} \right) = \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2} + \dots \right) =$$

$$= 1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha^2}{r^2} + \dots \quad (2.24)$$

(2.23) және (2.24) ескере отырып, Фоктың бірінші жуықтау метрикасын былай жазайық:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{2U^2}{c^4} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (2.25)$$

Осылайша, біз қайтадан бастапқы бірінші жуықтау метрикасын (2.15) алдық.

Бұл ретте, бірінші жуықтау шеңберінде Фок метрикасының жазылуын ұмытпауымыз керек:

$$ds^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha} \right) c^2 dt^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (2.26)$$

Мынадан (2.26) және (2.21) – Фоктың бірінші жуықтау метрикасы формасының бірдей екендігін көреміз.

2.3 ЖСТ механикасындағы бірінші жуықтау метрикасын дұрыс қорытып шығару туралы әдістеме

Әдетте, ЖСТ механикасында бірінші жуықтау метрикасы ретінде мына өрнек беріледі [2, б. 256]:

$$ds^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) +$$

$$+ \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3) dt \quad (2.27)$$

Бұл өрнек Ленц пен Тиррингке (1918) дейін белгілі. Кейін ол көптеген басқа жұмыстарға [3, б. 76] көшті. Монографияда [2, б. 236] Фок бұл өрнектің шығарылу жолын көрсетті. Біздің жұмысымызда [3, б. 76] (2.27) формуласының жеткіліксіз тұстарының дұрыстығы көрсетілді. Бұл, [2, б. 266] жұмысында Эйнштейн тұрақты және бірінші жуықтау метрикасы мәселелерінің бір уақытта шешілгендігін аңғартты. Бұл екі тапсырма өзара үйлесімсіз және оларды бөлу қажет. Алдымен Эйнштейн тұрақтысы анықталуы керек, содан кейін ғана бірінші жуықтау метрикасын табу мәселесі қойылуы тиіс.

Біз Эйнштейн теңдеулерінен [2, б. 259] бастаймыз.

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\chi T^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.28)$$

гармоникалық координаттар шартымен.

$$\Gamma^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) = 0, \quad (2.29)$$

және тартылыс өрісі кезінде серпімді дененің масса тензорының өрнегінен.

$$\left. \begin{aligned} c^2 T^{00} &= \rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U \right), \\ c T^{0i} &= \rho \frac{v_i}{c} + \frac{\rho v_i}{c^3} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U \right) - \frac{1}{c^3} P_{ik} v_k, \\ T^{ik} &= \frac{\rho v_i v_k}{c^2} - \frac{P_{ik}}{c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

χ тұрақтысын анықтау үшін (2.30) формуласында тек негізгі (релятивистік емес) мүшені қалдырамыз:

$$c^2 T^{00} = \rho, \quad c T^{0i} = 0, \quad T^{ik} = 0. \quad (2.31)$$

Шексіздікке арналған шарт ретінде, Фоктан айырмашылығын ғана аламыз:

$$g^{00}(\infty) = \frac{1}{c^2}, \quad g^{0i}(\infty) = 0, \quad g^{ik}(\infty) = 0. \quad (2.32)$$

Эйнштейн теңдеулерінің оң жағын құрастырайық:

$$\left. \begin{aligned} T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T &= \frac{1}{2c^2} \rho, \\ T^{0i} - \frac{1}{2} g^{0i} T &= 0, \\ T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

мұнда

$$T = \rho. \quad (2.34)$$

Квazистатикалық жуықтауда, гармоникалық координаттар жүйесінде Риччи тензоры:

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Delta g^{\mu\nu} \quad (2.35)$$

(2.33) және (2.35) ескере отырып, Эйнштейн теңдеулерін (2.28) анық түрде жазайық:

$$\left. \begin{aligned} \Delta g^{00} &= -\frac{\chi}{c^2} \rho, \\ \Delta g^{0i} &= 0, \\ \Delta g^{ik} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Келесі кезекте сәйкестік принципін пайдаланамыз. Эйнштейннің гравитация теориясы (ЖСТ) релятивистік емес жуықтауда, яғни нөлдік жуықтауда Ньютонның гравитация теориясына өтуі керек. Нөлдік жуықтауда $(c^2)^0$ біз Ньютонның интервалын [2, б. 68] алуымыз керек:

$$ds^2 = (c^2 - 2U)dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \quad (2.37)$$

(2.37) формуласынан мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} g_{00} &= c^2 - 2U, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ik} = -\delta_{ik}, \\ g^{00} &= \frac{1}{c^2 - 2U} \approx \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4}, \quad g^{0i} = 0, \quad g^{ik} = -\delta_{ik}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

(2.38) формуласынан былай шығады:

$$\square g^{00} = \frac{2}{c^4} \square U, \square g^{0i} = 0, \square g^{ik} = 0. \quad (2.39)$$

Ньютон теориясында еске алатын болсақ,

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho. \quad (2.40)$$

біз мынаны аламыз:

$$\Delta g^{00} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} \rho. \quad (2.41)$$

(2.41) формуласын (2.36) теңдеулерінің бірімен салыстыра отырып, Эйнштейннің ізденіс тұрақтысы мынадай болады:

$$\chi = \frac{8\pi\gamma}{c^2}. \quad (2.42)$$

(2.36) теңдеулерінің соңғысын Ньютон интервалымен салыстыра отырып, біз мынаны табамыз:

$$g^{ik} = -\delta_{ik}. \quad (2.43)$$

Енді Эйнштейн тұрақтысын анықтағаннан кейін, ЖСТ-дағы бірінші жуықтау $\left(\sim \frac{1}{c^2} \right)$ метрикасы туралы сұрақ қоямыз.

Метрика, дәлірек айтқанда, ds^2 инвариант қатарға келесі түрде бөлінеді:

$$ds^2 = c^2(\dots) + (c^2)^0(\dots) + \frac{1}{c^2}(\dots) + \dots \quad (2.44)$$

Жуықтау кезінде c^2 интервал (2.44) былай көрінеді:

$$ds^2 = c^2 dt^2. \quad (2.45)$$

Нөлдік жуықтауда $(c^2)^0$, яғни релятивистік емес (Ньютондық) жуықтауда, былай болады:

$$ds^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2. \quad (2.46)$$

Енді бірінші жуықтау $\left(\sim \frac{1}{c^2} \right)$ метрикасын табу үшін біз

g_{00}, g_{0i} мен g_{ik} пропорционалды $\frac{1}{c^2}$ түзетулерді іздеуіміз керек. Осы мақсатта масса тензорының компоненттері үшін (2.30) өрнектерінде түзетулерді $\left(\sim \frac{1}{c^2} \right)$ дейін сақтаймыз.

Сонда (2.30) формуласынан мыналар қалады:

$$\left. \begin{aligned} c^2 T^{00} &= \rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U \right), \\ c T^{0i} &= \rho \frac{v_i}{c}, \\ T^{ik} &= \frac{\rho v_i v_k}{c^2} - \frac{P_{ik}}{c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Осы ескертпелерді ескере отырып, g_{00} түзетуді анықтайық.

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4} + \frac{\Phi}{c^6}, \quad (2.48)$$

мұнда Φ – әлі белгісіз функция. Олай болса, ізделетін бірінші жуықтау метрикасының квазистатикалық екенін сақтай отырып, мыналарды аламыз:

$$R^{00} = \frac{1}{2} \Delta g^{00} - \frac{2U}{c^6} \Delta U - \frac{2}{c^6} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2. \quad (2.49)$$

Сәйкес Эйнштейн теңдеуі былай болады:

$$R^{00} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} \left(T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T \right), \quad (2.50)$$

мұнда

$$T = \rho - \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + 3U - \Pi \right) + \frac{P_{kk}}{c^2}. \quad (2.51)$$

Құрастырайық:

$$T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T = \frac{1}{2c^2} \left[\rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) - \frac{P_{kk}}{c^2} \right]. \quad (2.52)$$

Осылайша, (2.50) былай жазылады:

$$\frac{1}{2} \Delta g^{00} - \frac{2U}{c^6} \Delta U - \frac{2}{c^6} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 = -\frac{4\pi\gamma}{c^4} \left[\rho + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) - \frac{P_{kk}}{c^2} \right] \quad (2.53)$$

Осылайша, (2.48) ескере отырып, белгісіз функция Φ үшін мынандай теңдеу аламыз:

$$\Delta(\Phi - 2U^2) = -8\pi\gamma \left[\rho \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) - \frac{P_{kk}}{c^2} \right], \quad (2.54)$$

шешімі мынадай болады:

$$\Phi = 2U^2 + 2\gamma \int \frac{\rho' \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 - 2\gamma \int \frac{P'_{kk} (dx')^3}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (2.55)$$

Сәйкес g^{00} ковариантты компонент метриялық тензор:

$$\begin{aligned} g_{00} &= c^2 - 2U + \frac{4U^2 - \Phi}{c^2} = \\ &= c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2} \int \frac{\rho' \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right)' - P'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ал компоненттер үшін бірінші жуықтау метрикасы g_{0i} және g_{ik} үшін келесі теңдеулерді аламыз:

$$\Delta g^{ik} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} \rho \delta_{ik} , \quad \Delta g^{0i} = -\frac{16\pi\gamma}{c^4} \rho v_i . \quad (2.57)$$

Осыдан біз мынаны табамыз:

$$g^{ik} = -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}, \quad g^{0i} = \frac{4}{c^4}U_i, \quad U_i = \gamma \int \frac{(\rho v_i)'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 \quad (2.58)$$

ковариантты компоненттер мынадай түрде болады:

$$g_{ik} = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}, \quad g_{0i} = \frac{4U_i}{c^2}. \quad (2.59)$$

Осылайша, ЖСТ механикасындағы бірінші жуықтау метрикасы соңғы түрге ие болады [3, б. 132]:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2} \int \frac{\rho' \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right)' - P'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3) dt \quad (2.60)$$

Бұл метрикадан көрініп тұрғандай, Эйнштейннің гравитация теориясындағы бірінші жуықтау $\left(\sim \frac{1}{c^2} \right)$ өрістің сызықты еместігін, үш өлшемді кеңістіктің қисықтығын, ішкі құрылымды және айналыммен байланысты векторлы гравитациялық өрісті ескеруге мүмкіндік береді. Ал Ньютонның гравитация теориясы (нөлдік жуықтауда $(c^2)^0$) интервалмен:

$$ds^2 = (c^2 - 2U)dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2, \quad (2.61)$$

гравитациялық өрістің сызықтылығы, үш өлшемді кеңістіктің евклидтілігі және айналыммен байланысты күш өрісінің болмауы.

Келесіде, бірінші жуықтау интервалынан (2.60) және нөлдік (релятивистік емес) жуықтау интервалынан (2.61) бұрын жуықтау интервалын $(\square c^2)$ аламыз:

$$ds^2 = c^2 dt^2. \quad (2.62)$$

Риман дұрыс айтады: «Ғарыштың өзі үш өлшемді аморфты сандар жиыны, және тек материяның болуы ғарышты ұйымдастырып, оған метрика береді» [10, б. 328; 11, б. 200]. Эйнштейн былай қорытындылайды: «Бос ғарыш, яғни өріссіз ғарыш, жоқ. Ғарыш өзіндік түрде емес, тек өрістің құрылымдық қасиеті ретінде ғана бар» [12, б. 196].

3 ЖСТ МЕХАНИКАСЫ БОЙЫНША КЕЙБІР ЗЕРТТЕУЛЕР

3.1 Жылдамдық ЖСТ механикасындағы күй функциясы ретінде

Классикалық механикада координата мен жылдамдық немесе координата мен импульс тәуелсіз айнымалылар болып табылады, олар механикалық күйді анықтайды. Осыған сәйкес Лагранж формализмі мен Гамильтон формализмі бар, Лагранж функциясы $L(\vec{r}, \vec{v})$ және Гамильтониан $H(\vec{r}, \vec{p})$ бар. Бұл ретте жылдамдық \vec{v} импульспен \vec{p} нақты анықталады:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \quad (3.1)$$

ОТО механикасында жағдай өзгеше. Расында, Шварцшильдтің мәселесін қарастырайық. Фоктың [4, б. 92] бірінші жуықтау метрикасына негізделе отырып,

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (3.2)$$

Материалдық бөлшектің Лагранж функциясы массасы m гравитациялық өрісте орталық дене массасы m_0 қозғалғанда.

$$L = -mc \frac{ds}{dt} = -mc^2 + m \left(\frac{v^2}{2} + U \right) - \frac{m}{2c^2} \left(U^2 - 3Uv^2 - \frac{v^4}{4} \right). \quad (3.3)$$

Импульс болса

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{3U + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right) m\vec{v}. \quad (3.4)$$

Гамильтониан

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{3Up^2}{2mc^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2}. \quad (3.5)$$

з (3.4) формуласынан біз мынаны табамыз:

$$\vec{v}(\vec{r}, \vec{p}) = \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(3U + \frac{p^2}{2m^2} \right) \right] \frac{\vec{p}}{m}. \quad (3.6)$$

Бұл өрнекті Гамильтонның канондық теңдеулерін пайдалана отырып та аламыз:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \quad (3.7)$$

Расында,

$$\vec{v}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \left[1 - \frac{3U + \frac{p^2}{2m^2}}{c^2} \right] \frac{\vec{p}}{m}. \quad (3.8)$$

Осыдан көрініп тұрғандай, Шварцшильд мәселесінде жылдамдық енді тәуелсіз айнымалы емес, айнымалыларға (канондық айнымалыларға!) \vec{r}, \vec{p} тәуелді болатын күй функциясы. Басқаша айтқанда, жылдамдықта релятивистік жылдамдықтар өрісінен туындаған қосымша мүше пайда болады:

$$\vec{v}_{\text{пел}}(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{3U + \frac{p^2}{2m^2}}{c^2} \cdot \frac{\vec{p}}{m}. \quad (3.9)$$

Онда

$$\vec{v}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}}{m} + \vec{v}_{\text{пел}}(\vec{r}, \vec{p}). \quad (3.10)$$

Бұл жағдайды пайдаланып, сынақ денесінің өзіндік айналу бұрыштық жылдамдығын анықтауға болады, Эйлердің танымал гидродинамикалық формуласын қолдана отырып:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}. \quad (3.11)$$

Алдымен, есептейік:

$$\text{rot} \vec{v} = \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\text{пел}} \right] = -\frac{3}{mc^2} \left[\vec{\nabla} \cdot U \vec{p} \right] = -\frac{3\gamma m_0}{mc^2} \left[\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{p}}{r} \right] = \frac{3\gamma m_0}{mc^2} \left[\vec{p} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right] = \frac{3\gamma m_0}{mc^2 r^3} [\vec{r} \vec{p}] \quad (3.12)$$

(3.12) формуланы (3.11) тендеуіне қойғанда мыналарды аламыз:

$$\vec{\omega} = \frac{3\gamma m_0}{2mc^2 r^3} [\vec{r} \vec{p}]. \quad (3.13)$$

Себебі

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{p}], \quad (3.14)$$

мұнда \vec{M} – орбиталық сәт немесе импульс сәті, сондықтан (3.13) былай жазылады:

$$\vec{\omega} = \frac{3\gamma m_0}{2mc^2 r^3} \vec{M}. \quad (3.15)$$

Бұл ЖСТ механикасында орталық симметриялы масса m_0 өрісінде, массасы m сынақ денесі өзіндік айналуға ие болып, (3.13) формуласына сәйкес айналу бұрыштық жылдамдығын алады. Классикалық механикада, атап айтқанда, Кеплер мәселесінде, (1) теңдеуіне байланысты мұндай жағдай болмайды.

Енді ЖСТ механикасындағы Линзе-Тирринг мәселесін қарастырайық, ол массасы m бөлшектің айналмалы массивті дененің m_0 гравитациялық өрісіндегі қозғалысын зерттеуге арналған.

Бұл жағдайда біз Фоктың [4] бірінші жуықтау метрикасын негізге аламыз:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3) dt, \quad (3.16)$$

мұнда \vec{U} – гравитациялық өрістің вектор-потенциалы. Айналмалы шар үшін:

$$\vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{r} \vec{S}_0] \quad (3.17)$$

\vec{S}_0 – шардың өзіндік сәті.

Лагранж функциясы

$$L = -mc + m \left(U + \frac{v^2}{2} \right) - \frac{m}{2c^2} \left[U^2 - 3Uv^2 - \frac{v^4}{4} + 8(\vec{U}\vec{v}) \right]. \quad (3.18)$$

Импульс

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{3U + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right) m\vec{v} - \frac{4m}{c^2} \vec{U}. \quad (3.19)$$

Гамильтониан

$$H = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{3Up^2}{2mc^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \frac{4(\vec{p}\vec{U})}{c^2}. \quad (3.20)$$

Жылдамдық

$$\vec{v}(\vec{r}, \vec{p}) = \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(3U + \frac{p^2}{2m^2} \right) \right] \frac{\vec{p}}{m} + \frac{2\gamma}{c^2 r^3} [\vec{S}_0 \vec{r}] \quad (3.21)$$

Тағы да гидродинамикалық формуланы (3.11) қолдана отырып, аламыз:

$$\vec{\omega} = \frac{3\gamma m_0}{2mc^2 r^3} \vec{M} + \frac{\gamma}{c^2 r^3} \left[3\vec{r}(\vec{r}S_0) - \vec{S}_0 r^2 \right] \quad (3.22)$$

Осылайша, Линзе-Тирринг мәселесінде жылдамдық \vec{v} күй функциясы болып табылады. Бұл жағдай массасы m_0 сынақ денесінің айналмалы массивті дененің өрісіндегі өзіндік айналуы \vec{S}_0 туралы мәселені шешуге мүмкіндік береді.

(3.22) формуласы айналмалы қозғалыс үшін релятивистік теңдеуді интегралдау арқылы табылған нәтижелермен дәл сәйкес келеді, бұл Фоктың Эйнштейннің өрістер теңдеулерінен алған әдісімен алынған.

Ақырында, ЖСТ механикасында жылдамдықтың \vec{v} күй функциясы болып табылатындығын түсіну, Фоктың бірінші жуықтау метрикасымен және Эйлердің гидродинамикалық формулаларымен бірге релятивистік айналмалы қозғалыс теңдеулерінің бірмәнділігін шешуге мүмкіндік береді.

Соңында, (22) формуласына келесі түр беруге болады:

$$\vec{\omega} = -\frac{3m_0}{mc^2} \text{rot} \vec{U}_M + \frac{2}{c^2} \text{rot} \vec{U}. \quad (3.23)$$

мұнда

$$\vec{U}_M = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{r} \vec{M}], \quad (3.24)$$

яғни, орбиталық моментпен \vec{M} туындайтын вектор-потенциал.

(3.23) формулаларынан көрініп тұрғандай, сынақ денесінің өзіндік айналуы орбиталық сәт \vec{S}_0 және өзіндік сәт арқылы индуцирленеді.

3.2 ЖСТ механикасындағы гидродинамикалық аналогия әдісі бойынша түсіндірмелер

Массасы m сынақ денесінің айналмалы қозғалысын айналмалы орталық дененің гравитациялық өрісінде, массасы m_0 және импульс моменті \vec{S}_0 бар, зерттеу үшін біз [3, с.132] жұмысымызда гидродинамикалық аналогия әдісін енгіздік. Бұл әдіс танымал Эйлердің гидродинамикалық формуласын қолдануға негізделген:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}. \quad (2.25)$$

Осындай тәсілмен, сынақ денесінің айналмалы қозғалыс теңдеулерін Эйнштейннің өрістер теңдеулерінен Фоктың математикалық әдісі сияқты арнайы әдіспен шығару қажеттілігі жойылады. Бұл ЖСТ механикасындағы гидродинамикалық аналогияның басты артықшылығы. Өрістер теңдеулерінен айналмалы қозғалыс теңдеулерін шығару, әдетте, өте ауыр және әрдайым бірмәнді емес процесс.

Шынында да, айналмалы массивті шардың метрикасынан бастаймыз [3]:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7m_0c^2} \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \right) \right] dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) d\vec{r}^2 + \frac{8}{c^2} (\vec{U} d\vec{r}) dt. \quad (3.26)$$

мұнда

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}, \quad \vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{r} \vec{S}_0]. \quad (3.27)$$

Лагранжиан

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + mU - \frac{mU^2}{2c^2} + \frac{3mUv^2}{2c^2} + \frac{mv^4}{8c^2} - \frac{4m(\vec{U}\vec{v})}{c^2} - \frac{2\gamma m}{7m_0c^2} \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \right). \quad (3.28)$$

Импульс

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(3U + \frac{v^2}{2} \right) \right] m \vec{v} - \frac{4m}{c^2} \vec{U}. \quad (3.29)$$

Гамильтониан

$$\begin{aligned} H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU - \frac{1}{c^2} \left(\frac{p^4}{8m^3} + \frac{3Up^2}{2m} - \frac{mU^2}{2} \right) - \frac{2\gamma}{c^2} \left(\left[\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right] \vec{p} \right) - \\ - \frac{2\gamma m}{7m_0 c^2} \left(\left[\vec{S}_0 \vec{\nabla} \left[\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right] \right] \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Біздің міндетіміз үшін Гамильтонның теңдеулер жүйесі орындалады:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}. \quad (3.31)$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{3U\vec{p}}{mc^2} - \frac{p^2 \vec{p}}{2m^3 c^2} + \frac{4\vec{U}}{c^2}, \quad (3.32)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\gamma m m_0}{r^3} \vec{r} - \frac{mU}{c^2} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{3p^2}{2mc^2} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \frac{4}{c^2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{p} \vec{U}) \quad (3.33)$$

Енді (3.32) теңдеудің екі бөлігінен **роторды** аламыз және сынақ денесінің угловая жылдамдығын анықтау үшін Эйлердің гидродинамикалық формуласын (3.25) қолданамыз. Сонда:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{3\gamma m_0}{2mc^2 r^3} \vec{M} + \frac{\gamma}{c^2 r^5} [3\vec{r}(\vec{r}S_0) - \vec{S}_0 r^2] \quad (3.34)$$

Мұнда $\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}]$ — орбиталық сәт, ал сынақ денесінің жылдамдығы v каноникалық түрде тәуелсіз айнымалылар \vec{r} және \vec{p} функциясы ретінде қабылданады. Бұл нәтиже Брумбергтің [5, с.54] еңбегінде релятивистік айналмалы қозғалыс теңдеуін интегралдау арқылы, Фок әдісінен шығарып алынған күрделірек жолмен алынған бұрыштық жылдамдықтың өрнегімен сәйкес келеді.

Орбиталық сәттен \vec{M} туындайтын вектор-потенциалды енгізе отырып:

$$\vec{U}_M = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{r}\vec{M}] \quad (3.35)$$

(3.34) теңдеуін былайша жазайық:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{3m_0}{mc^2} \text{rot} \vec{U}_M + \frac{2}{c^2} \text{rot} \vec{U}. \quad (3.36)$$

Осылайша, Эйлердің гидродинамикалық формуласын (1, с.119) қолдану айналмалы орталық дененің өрісіндегі сынақ денесінің өзіндік айналуы мәселесін шешудің элементарлы әдісін береді.

Алайда, кейде зерттеушілер гидродинамикалық аналогия әдісінде белгілі бір жасандылықты, формалдылықты көреді. Бұл тек көрініс. Шындығында, осы әдістің артында бірнеше себептер бар.

1. Шынында да, әдебиетте Брумбергтің [5, с.164] Эйнштейннің өрістерінің теңдеулерін Фок әдісімен шешу арқылы алған сынақ денесінің айналмалы қозғалысының теңдеуі бар екенін еске алайық.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{9\gamma m_0}{2c^2 r^5} (\vec{r}\vec{v})[\vec{v}\vec{r}] + \frac{\gamma}{c^2} \left[\frac{3I_0}{r^5} \vec{\omega}_0(\vec{r}\vec{v}) + \frac{3I_0}{r^5} \vec{v}(\vec{r}\vec{\omega}_0) + \frac{3I_0}{r^5} \vec{r}(\vec{v}\vec{\omega}_0) - \frac{15I_0}{r^7} \vec{r}(\vec{r}\vec{v})(\vec{r}\vec{\omega}_0) \right], \quad (3.37)$$

мұндағы $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_0$ – сынақ денесінің және орталық дененің бұрыштық жылдамдықтары, I_0 – орталық дененің инерция сәті. Есепке ала отырып, бұл

$$\vec{U}_M = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{r}\vec{M}], \quad \text{rot}\vec{U} = \frac{\gamma}{2} \left(-\frac{\vec{S}_0}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{r}\vec{S}_0)}{r^5} \right), \quad (3.38)$$

Брумбергтің (3.37) айналмалы қозғалыс теңдеуін келесі түрде жазамыз:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{3m_0}{mc^2} \text{rot}\vec{U}_M + \frac{2}{c^2} \text{rot}\vec{U} \right). \quad (3.39)$$

Өйткені

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{6m_0}{mc^2} \operatorname{rot} \vec{U}_M + \frac{4}{c^2} \operatorname{rot} \vec{U}, \quad (3.40)$$

онда Брумбергтің теңдеуі мынадай түрге келеді:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} \right). \quad (3.41)$$

Осыдан алатынымыз

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}. \quad (3.42)$$

Осылайша, Эйлердің қарапайым гидродинамикалық формуласы (Эйлер теоремасы!) (3.42) Брумбергтің айналмалы қозғалыс теңдеуінің шешімі, айналмалы орталық дененің өрісінде сынақ денесінің қозғалысы мәселесінде (Линзе-Тирринга мәселесі) (қозғалыс интегралы) болып табылады. Сондықтан гидродинамикалық аналогия әдісі ЖСТ механикасында тиімді әрі қарапайым.

2. Гидродинамикалық аналогия әдісі ЖСТ механикасында гамильтон формализмінің тиімділігін де көрсетеді, ол каноникалық байланысқан, тәуелсіз айнымалылар \vec{r} және \vec{p} негізінде құрылады. Сынақ денесінің жылдамдығы осы айнымалылардан тәуелді күй функциясы ретінде қарастырылады, яғни $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, \vec{p})$

3.3 Планетарлық жүйенің құрылымы: максимум мен минимум мәселесі ретінде қарастыру.

Планеталық жүйенің құрылымында бірден көзге түсетіні – шар тәрізді симметрия (Күн, планеталар) мен осьтік симметрия (планеталардың орбиталары; олар жазық және дерлік дөңгелек). Бұл мынаны білдіреді:

1. Негізгі масса (99%) планеталық жүйеде Күн түрінде симметриялы фигура – сфера – шар тәрізді симметрия тобының формасын құрайды, ал планеталардың орбиталары жазықтықта – «азаюшы топ» – осьтік симметрия – дәстүрлі үш өлшемді кеңістіктің айналу тобы $O(3)$ тобына ішкі топ болып табылады, бұл сфераның симметрия тобына изоморфты.

2. Шар тәрізді Күн берілген массада бөлшектердің соқтығысуын (соқтығысу) минимумға түсіретін принципті жүзеге асыра отырып, минималды бетке ие. Ал планеталар жазықтықта орналасқан, берілген контурға тартылған бетінің минималын жүзеге асырады.

Шынымен, бұл үшін берілген контур S -қа тартылған минималды аудан бетінің табылуына қатысты математикалық мәселені қарастыру керек. Оның шешімі функционалды минимумды зерттеуге әкеледі [13, с. 315].

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy, \quad (3.43)$$

мұнда D – XOY , $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ жазықтығына S

проекциясы. Экстремумды іске асыратын $z(x, y)$ функциясы Остроградский тендеуіне сәйкес келеді:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) = 0. \quad (3.44)$$

немесе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0, \quad (3.45)$$

үстіртін бұл теңдеу бетінің орташа қисықтығын білдіреді:

$$H = \frac{r(1+q^2) + 2pql + t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}} = 0, \quad (3.46)$$

мұнда

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad l = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad (3.47)$$

Осылайша, берілген контурға тартылған минималды аудан беті — жазықтық.

3. Енді Ньютонның гравитация теориясына (ТГН) жүгінейік. Классикалық аспан механикасындағы Кеплер мәселесін қарастырайық — күннің гравитациялық өрісіндегі сынақ денесінің қозғалыс мәселесі, потенциалмен

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}. \quad (3.48)$$

Біз қозғалыс интегралдарынан (кезінде «векторлық орбита элементтері» деп аталатын) бастаймыз [4, с.163]:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}], \quad \vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m} \vec{M} \right] - \frac{\gamma m m_0}{r} \vec{r}, \quad (3.49)$$

мұнда \vec{M} – импульс моменті, \vec{A} – Лаплас векторы

\vec{M} векторының сақталуынан орбита жазық қисық болып табылады. (3.49) қатынастарының екінші жағындағыны \vec{r} -ге скаляр түрде көбейткенде:

$$\left(\vec{r}\vec{A}\right) = \left(\vec{r}\left[\frac{\vec{p}}{m}\vec{M}\right]\right) - \gamma m m_0 r. \quad (3.50)$$

Осыдан

$$r = \frac{\sigma}{1 + e \cos \varphi}, \quad (3.51)$$

мұнда

$$\sigma = \frac{M^2}{\gamma m^2 m_0}, \quad e = \frac{A}{\gamma m m_0}, \quad \alpha = \gamma m m_0. \quad (3.52)$$

Бұл өрнектерде σ – орбитаның параметрі, e – орбитаның эксцентриситеті, φ – полярлық бұрыш. Өзіндік теңдеу (3.51) – координатаның бастауында фокусымен конустық секция теңдеуі.

Сақталатын вектор \vec{A} фокустан перигелийге қарай үлкен ось бойымен бағытталған. Мұндай қозғалыс интегралының пайда болуы – сфералық дененің гравитациялық өрісі үшін ерекше.

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}. \quad (3.53)$$

Яғни, бұл ньютондық скалярлық потенциал орталық-симметриялық гравитациялық өріс үшін. Сонымен қатар, потенциал (3.53) бар орталық өріс үшін барлық шекті қозғалыс траекториялары жабық екенін атап өтеміз. Ең төменгі рұқсат етілген энергия мәні мына мәнімен сәйкес келеді

$$E_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}, \quad (3.54)$$

Осылайша $e = 0$, яғни эллипс шеңберге айналады.

4. Енді ЖСТ механикасына бет бұрайық. Негізгі мәселе ретінде Лензе-Тирринга тапсырмасын қарастырайық. Бұл жағдайда екі потенциал бірден қатысады.

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}, \quad \vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{S}_0 \vec{r}] \quad (3.55)$$

мұнда \vec{U} – күннің өздік моменті (бұрыштық моменті \vec{S}_0) туындататын векторлық гравитациялық өрістің векторлық потенциалы.

Бұрылмалы күннің өрісінде сынақ денесінің эволюциялық қозғалыс теңдеулері келесі түрде болады [4, с.165]:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{\Omega} \vec{M}], \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega} \vec{A}], \quad (3.56)$$

мұнда

$$\vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2} + \frac{m^2 \alpha^4}{m_0 M^3 M_0^3 c^2} \left\{ 2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0 M^2} \vec{S}_0 + \frac{6m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0 M^4} \vec{M} \right\} -$$

$$- \frac{3m^2 \alpha^4 \vec{M}}{m_0 M^5 M_0^3 c^2} \left\{ 2(\vec{M}\vec{S}_0) + \frac{m}{7m_0} S_0^2 - \frac{3m}{7m_0 M^2} (\vec{S}_0 \vec{M})^2 \right\}.$$

(3.57)

мұндағы

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha^2}}}, \quad (3.58)$$

–жүйенің инварианты.

Енді классикалық механикада, Кеплердің тапсырмасы жағдайында, барлық орбиталардың тұрақты екенін және тұрақтылық жағдайлары келесі түрде болатынын еске алайық [4, с.169]:

$$\vec{M} = const, \quad \vec{A} = const. \quad (3.59)$$

Сұрақ туындайды: Лензе-Тирринга тапсырмасында сондай тұрақты орбиталар бар ма? Бұны анықтау үшін бізден мыналар талап етіледі:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = 0, \quad (3.60)$$

немесе сол сияқты

$$[\vec{\Omega}\vec{M}] = 0, [\vec{\Omega}\vec{A}] = 0. \quad (3.61)$$

Бұл релятивистік орбиталардың векторлық элементтерге қатысты тұрақтылық шарттары. Олар орындалуы мүмкін, егер

$$\vec{\Omega} \uparrow \uparrow \vec{M}, \quad A = 0, \quad (3.62)$$

немесе

$$\vec{\Omega} \uparrow \downarrow \vec{M}, \quad A = 0. \quad (3.63)$$

Осылайша, Ленце-Тирринг тапсырмасында векторлық элементтерге қатысты \vec{M} және \vec{A} тұрақты орбиталар ретінде экваториалдық жазықтықта орналасқан дөңгелек орбиталардың класы табылады. Бұл жағдайда, Кеплер тапсырмасында болғандай, қозғалыс интегралының максимумы және пробалық дененің энергиясының минимум сақталады.

Жалпы қорытынды. Жұлдыздар жүйесінде – ашық, эволюциялық жетілген жүйеде – соқтығысу минимумы; қозғалыс интегралының максимумы және пробалық дененің энергиясының минимум жүзеге асады.

3.4 Ұқсастық әдісі – Эйнштейн және Фридман метрикасын космологияда алудың тағы бір әдісі

Классикалық космология біртекті, евклидтік және стационарлық (ОЕС). Біртектілік, яғни материяның ғаламда таралу тығыздығының тұрақтылығы – космологиялық принцип, сенімді факт болып есептелді. Кеңістік үшөлшемді, біртекті және изотропты деп болжанды, себебі оның геометриясы евклидтік E_3 , метрикамен сипатталады.

$$ds^2(E_3) = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (3.64)$$

Нәтижесінде, ғаламның көлемі мен оның массасы шексіз болып табылады. Бұл жағдайлар классикалық космологияны терең қиындықтарға алып келді.

Классикалық космологияның негізінде тұрған «үш киттің» бірінен – біртектіліктен, евклидтіктен немесе стационарлықтан – бас тартуға тура келді.

Эйнштейн «Жалпы салыстырмалы теориясындағы космология мәселелері» атты шағын мақаласында евклидтік геометриядан бас тартты. Эйнштейн ғаламның құрылымы туралы басқа бір мүмкіндікті еске алды. Атап айтқанда, неевклидтік геометрияның дамуы біздің кеңістігіміздің шексіздігіне күмән келтіруге болатындығын көрсетті, бұл ойлау заңдарына және тәжірибеге қайшы келмейді (Риман, Гельмгольц). Бұл мәселе Гельмгольц пен Пуанкаре тарапынан ерекше айқындықпен зерттелді. Олар үш өлшемді сфералық кеңістікті, шектелген көлемі мен сфералық геометриясымен S_3 қабылдады. Сонымен қатар E_3 , және C_3 геометриясы да, одан да біртекті және изотропты. Олардың метрикаларын алу үшін ұқсастық әдісі жеткілікті. Оны көрсетейік.

Үш өлшемді сфера екі өлшемді сфераға ұқсас – оны «классикалық сферамен» байланыста деп айтуға болады, екі өлшемді сфера «бір өлшемді сфера» – шеңбермен байланыста.

Осылайша, «бір өлшемді сфераның» метрикасы – шеңбердің ұзындығы:

$$ds^2(C_1) = R^2 d\varphi^2. \quad (3.65)$$

Шеңбердің ұзындығы мына формуламен беріледі

$$S_1 = R \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R. \quad (3.66)$$

Әдеттегі сфераның метрикасы мынадай түрде беріледі:

$$ds^2(C_2) = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.67)$$

сфера ауданы мына формуламен есептеледі:

$$S_2 = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R d\theta \cdot R \sin \theta d\varphi = 4\pi R^2. \quad (3.68)$$

Метрикалардың (3.65) және (3.67) арасындағы байланыс мынадай:

$$ds^2(C_2) = R^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot dS^2(C_1). \quad (3.69)$$

Енді үш өлшемді сфераның метрикасын қалай анықтаймыз? Бұл үшін ұқсастық әдісін, яғни (3.69) формулаларын қолданамыз. Содан кейін

$$ds^2(C_3) = R^2 d\chi^2 + \sin^2 \chi \cdot dS^2(C_2). \quad (3.70)$$

(3.67) формуланы (3.70) формуласына қоя отырып, мынадай нәтиже аламыз

$$ds^2(C_3) = R^2 d\chi^2 + R^2 \sin^2 \chi d\theta^2 + R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.71)$$

Көлем

$$V(C_3) = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi R d\chi \cdot R \sin \chi d\theta \cdot R \sin \chi \cdot \sin \theta d\varphi = 2\pi^2 R^3.$$

Соңында жаңа айнымалыны енгізейік

$$r = R \sin \chi. \quad (3.73)$$

Онда метрика (3.71) мынадай түрге ие болады

$$ds^2(C_3) = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.74)$$

Егер енді уақыт осін еске алсақ және оның иілгіш емес екенін қарастырсақ, төрт өлшемді кеңістік пен уақыт метрикасын былай жазуға болады:

$$ds^2 = C^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.75)$$

Бұл – Эйнштейннің метрикасы – Эйнштейннің теңдеулерінің космологиялық шешімі, ол өзі [15, с.142] алды. Жоғарыда баяндалғаннан көрініп тұрғандай, ұқсастық әдісімен бұл шешім элементарлы түрде алынады.

Қорытындылай келе, егер ғалам радиусын $R = R(t)$ деп алсақ, онда біз уақытсыз ғалам үшін Фридманның шешімдерінің бірін аламыз.

3.5 Гравитациялық өрісті гармоникалық координат жүйесінде түрлендіру заңы

Өз уақытында (1961, 1968 жылдары) біз гравимагнетизм гипотезасын ұсынған едік [15, 149-бет]. Оның мәні мынада: гравитациялық өріс уақыт бойынша өзгергенде магнит өрісін тудырады, бұл электр өрісінің уақыт бойынша өзгеруіне байланысты магнит өрісін тудыратындай болады.

Жұмыста [15, 149-бет] одан да радикалды көзқарас айтылды, яғни магнит өрісі барлық оқшауланған көздер (зарядтар) тудырған өрістер уақыт бойынша өзгергенде пайда болатын әмбебап өріс ретінде қарастырылуы мүмкін деген ой ұсынылды. Мұндай өрістерге электрлік, ядролық, гравитациялық және, мүмкін, басқа да өрістер жатады [4, 112-бет].

Гравимагнетизм гипотезасы алғашында күтпеген идея болып көрінсе де, Уилсон мен Блэккеттің аспан денелерінің магнетизміне қатысты «ерекше» гипотезаларына [16, 205-бет; 17, 68-бет] және осы мәселеге қатысты Эйнштейннің бір қызықты ескертуіне [18, 136-бет] табиғи түсініктеме береді. Мұны толығырақ түсіндіріп өтейік.

Аспан денелерінің магнетизмін түсіндіру үшін бірнеше гипотезалар ұсынылған, олардың ішіндегі кейбіреулері қолданыстағы физикалық түсініктер тұрғысынан ерекше болып табылады және олардан дұрыс сандық нәтижелер алынады. Мысалы, Уилсон гипотезасына сәйкес [16, 124-бет] Жер мен Күннің магнит өрістері осы денелер «теріс көлемдік зарядқа» тығыздығы бойынша ие болғандай көрінеді:

$$\sigma = -\sqrt{\gamma} \cdot \rho, \quad (3.76)$$

мұнда γ – гравитациялық тұрақты, ρ – масса тығыздығы.

Ерекшелігі Вильсонның «қуат» (3.76) электростатикалық өріс тудырмауы керек деген қосымша болжамының қажеттілігінде, бұл қазіргі заманғы электродинамика тұрғысынан толықтай абсурд болып табылады.

Дұрыс сандық нәтижелерге әкелетін тағы бір гипотеза — Блэккетт гипотезасы [17, 96-бет]. Блэккеттің айтуынша, кез келген айналмалы дене, ондағы қуаттардың болу-болмауына қарамастан, механикалық сәтіне \vec{S} пропорционал магниттік сәтке \vec{M} ие болуы керек.

Бұл әдеттегі электродинамика заңдарымен байланысы жоқ жаңа табиғат заңы болып табылады. Блэккетт өлшемдік негізде \vec{M} мен \vec{S} арасындағы байланысты келесі түрде орнатты.

$$\vec{M} = -\beta \frac{\sqrt{\gamma}}{2c} \vec{S}, \quad (3.77)$$

мұндағы β — бірлікке жуық сандағы коэффициент. Бұл гипотезалармен толық сәйкестікте Эйнштейннің мынадай пікірі бар [19, 103-бет]: «Жер мен Күн айналу бағытына байланысты анықталатын бағыттары мен полярлықтарына ие магнит өрістеріне ие. Максвелл теориясына сәйкес, бұл өрістер айналуы аспан денелерінің осьтері бойымен кері бағытта жүретін электрлік токтар арқылы пайда болуы мүмкін. Құйынды деп шамамен санауға болатын күн дақтары да осыған ұқсас өте күшті өрістерге ие. Алайда, осының бәрінде өткізгіштік немесе жеткілікті күшке ие конвекциялық токтар бар деп ойлау қиын. Керісінше, магнит өрістері бейтарап массалардың айналмалы қозғалысы кезінде пайда болатын сияқты. Мұндай өрістердің пайда болуын бастапқы нұсқасындағы да, жалпы салыстырмалылық теориясы тұрғысынан кеңейтілген Максвелл теориясы да болжай алмайды. Табиғат мұнда теория әлі түсіндірмеген, іргелі заңдылықты көрсетіп отырған сияқты» [18, 153-бет].

Әрі қарай, гравимагнетизм гипотезасын енгізу кезіндегі біздің ой жүгіртулеріміз әртүрлі жолдармен жүргізілді. Ең қарапайым жолы келесідей.

Алдымен (3.76)-ның оң жағына назар аударайық. Ол, дәлірек айтқанда, масса тығыздығы ρ , ньютондық (скалярлық) гравитациялық өрістің көзі болып табылады.

$$U = \gamma \int \frac{\rho'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz', \quad (3.78)$$

теңдеуін қанағаттандыратын

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho. \quad (3.79)$$

Қысқаша айтқанда, (3.76)-ның оң жағында гравитация тұр. Енді (3.77) қатынасына назар аударайық. Магнит өрісінің \vec{A} векторлық потенциалы туралы сұрақты қарастырайық. Ол белгілі электродинамикалық формуламен табиғи түрде анықталады.

$$\vec{A} = \left[\vec{\nabla} \frac{1}{r} \cdot \vec{M} \right]. \quad (3.80)$$

Мұнда Блэкетт гипотезасынан алынған \vec{M} мәнін қойып, мынаны аламыз

$$\vec{A} = -\beta \frac{\sqrt{\gamma}}{2c} \left[\vec{\nabla} \frac{1}{r} \cdot \vec{S} \right]. \quad (3.81)$$

Енді аралық массалар таралуынан үлкен қашықтықтардағы орташа гравитациялық өрісті, мысалы, айналмалы шардың айналасындағы векторлық гравитациялық өрістің түрін еске түсірейік:

$$\vec{U} = \frac{\gamma}{2} \left[\vec{\nabla} \frac{1}{r} \cdot \vec{S} \right], \quad (3.82)$$

Сондай-ақ, гравитациялық өрістің векторлық потенциалы \vec{U} теңдеуін қанағаттандырады.

$$\Delta \vec{U} = -4\pi\gamma\rho\vec{v}. \quad (3.83)$$

(3.81) және (3.82)-ні салыстыра отырып, келесіні аламыз:

$$A_i = -\beta \frac{1}{\sqrt{4\gamma c}} \vec{U}. \quad (3.84)$$

Мұннан көрініп тұрғандай, Блэкетт гипотезасындағы магнит өрісінің векторлық потенциалы гравитациялық өрістің векторлық потенциалына ЖСТ (жалпы салыстырмалылық теориясы) тәуелді. Осы жағдайлар гравимагнетизм гипотезасына әкеледі — гравитация магнетизмнің көзі болып табылады.

Бұл ЖСТ-ның дәстүрлі интерпретациясын өзгертеді. Эйнштейннің айналада скалярлық гравитациялық өріс вихрелі гравитациялық өріс тудыруы туралы гипотезасы гравимагнетизм гипотезасымен (3.84) ауыстырылуы тиіс.

Бұл жұмыстың міндеті: гравимагниттік өріс \vec{A} бір гармоникалық координаталар жүйесінен екіншісіне ауысқанда қалай өзгереді деген сұраққа жауап беру.

Осы мақсатта айналмалы сұйық шар үшін алғашқы жуықтау метрикасына [4, 133-бет] жүгінейік:

$$g_{00} = c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7m_0c^2} \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \right) \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right),$$

$$g_{0i} = \frac{4}{c^2} U_i \quad g_{ik} = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ik}. \quad (3.95)$$

Онда, (3.95) үшін g_{oi} өрнегін (3.94) өрнегімен біріктіре отырып, мынаны аламыз:

$$g_{oi} = -\frac{4\sqrt{\gamma}}{\beta c} A_i. \quad (3.96)$$

(3.96) формуласында біздің сұрағымызға жауап берілген. Гравимагниттік өріс бір гармоникалық координаталар жүйесінен екіншісіне өткенде метриялық тензордың

$g_{\mu\nu}$ компоненті сияқты, яғни екінші ретті тензор ретінде өзгереді.

4 ЖСТ-ДАҒЫ ОПТИКА-МЕХАНИКАЛЫҚ АНАЛОГИЯНЫ ЗЕРТТЕУ

ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТЕОРИЯСЫНДА (ЖСТ), ЭЙНШТЕЙННЕН БЕРІ, ЖАРЫҚ СӘУЛЕСІНІҢ ҚИСЫҒЫ МЕН МАТЕРИАЛДЫҚ БӨЛШЕКТИҢ СЫРТҚЫ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ӨРІСТЕГІ ТРАЕКТОРИЯСЫНЫҢ ҚИСЫҒЫ АРАСЫНДА ОПТИКО-МЕХАНИКАЛЫҚ АНАЛОГИЯ БЕЛГІЛІ. БҰЛ АНАЛОГИЯ ГАМИЛЬТОН-ЯКОБИ ТЕНДЕУІМЕН [1, 58-БЕТ] БЕРІЛЕДІ.

$$g^{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta x^\mu} \frac{\delta S}{\delta x^\nu} = m^2 c^2, \quad (4.1)$$

мұнда m – материалдық бөлшектің массасы (жарық үшін $m = 0$)

Біздің жұмысымызда [19] жарық сәулесінің бұралуы мен материалдық бөлшектің айналмалы массивті дененің гравитациялық өрісіндегі траекториясы арасында басқа оптико-механикалық аналогияның бар екені көрсетілген [4, 106-бет]. Осы кезде (4.1) теңдеуі де шешілді. Мұны түсіндіріп өтейік.

Г.В. Скроцкий [20] айналмалы массивті дененің гравитациялық өрісінде жарықтың таралуына қатысты мәселені қарастыра отырып, екі эффектін анықтады: бірінші — айналмалы дененің өрісіндегі жарық сәулесінің бұралу эффектісі, екінші — айналмалы массивті дененің жанында таралатын жазық электромагниттік толқынның поляризация жазықтығының айналу әсері.

Еске сала кетейік, Скроцкий жазық электромагниттік толқын үшін Максвелл теңдеулерін Рытов [21, 22] дамытқан әдіспен шешті. Астрономиялық сипаттағы мәселелерде кеңістіктік масштабтар электромагниттік толқындардың ұзындықтарымен салыстырғанда үлкен болғандықтан, теңдеулердегі коэффициенттер координаттар бойынша өте баяу өзгертін функциялар болып табылады. Сондықтан әдетте геометриялық оптика бойынша жуықтаумен шектеледі.

Рытов әдісі тек сәулелердің қозғалысын ғана емес, сонымен қатар толқын поляризациясының сипатының сәуле бойында өзгеруін де анықтауға мүмкіндік береді. Скроцкий: «Айналмалы массивті дененің жанында жазық толқын таралған кезде сәуленің траекториясы, жалпы айтқанда, жазық қисық емес, дененің айналу бағытына қарай бұралуға ұшырайды. Сонымен қатар, айналмалы дененің импульс сәтіне пропорционал поляризация жазықтығының айналуы орын алады. Айта кету керек, айналмалы дененің полюстерінен шығатын және айналу осі бойымен таралатын сәулелердің поляризация жазықтығы да дененің айналу жағына қарай белгілі бір бұрышпен айналады» [20, 126-бет].

Бастапқы метрика ретінде қабылданады:

$$ds^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (d\vec{r})^2 + \frac{8}{c^2} (\vec{U} d\vec{r}) dt, \quad (4.2)$$

мұндағы

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}, \quad \vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{r} \vec{S}_0] \quad (4.3)$$

– гравитациялық өрістің скалярлық және векторлық потенциалдары, m_0 – масса, \vec{S}_0 – айналмалы дененің импульстік сәті.

Мұндай стационарлық тартылыс өрісіндегі Максвелл теңдеулері материалдық ортадағы осы теңдеулердің түрімен формальды түрде сәйкес келеді [1, 145-бет]:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{D} = 0$$

Мұнда электр индукциясы мен магнит индукциясы векторлары сәйкесінше:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} - [\vec{g}\vec{H}], \quad \vec{B} = \mu\vec{H} + [\vec{g}\vec{E}], \quad (4.5)$$

мұнда

$$\varepsilon = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}, \quad \mu = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}, \quad g_i = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} c^2. \quad (4.6)$$

Себебі қарастырылып отырған жүйе периодтық ($\mathcal{O} = ck$, мұндағы \vec{k} – толқын векторы), онда (4.4) теңдеуін келесі түрде қайта жазуға болады:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -ik(\mu\vec{H} + [\vec{g}\vec{E}]), \quad (4.7)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = ik(\varepsilon\vec{E} - [\vec{g}\vec{H}]).$$

Рытовқа сүйене келе, осы жүйенің шешімдерін келесі түрде іздейді:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}^*(x, y, z)}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-ik\Phi(x, y, z)}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{H}^*(x, y, z)}{\sqrt{\mu}} e^{-ik\Phi(x, y, z)}. \quad (4.8)$$

Кейін, \vec{E}^* және \vec{H}^* функцияларын дәрежелер қатарына $\frac{i}{k}$ бөлейік:

$$\vec{E}^* = \vec{E}_0 + \frac{i}{k} \vec{E}_1 + \dots, \quad \vec{H}^* = \vec{H}_1 + \frac{i}{k} \vec{H}_1 + \dots \quad (4.9)$$

(4.9) формуланы (4.7) формуласына қойып, нөлдік жуықтаудың нәтижесінде \vec{E}_0 және \vec{H}_0 мәндерін анықтауға арналған келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$-\left[\vec{\nabla}\Phi - \vec{g}, \vec{E}_0\right] + \sqrt{\varepsilon\mu}\vec{H} = 0, \quad (4.10)$$

$$\sqrt{\varepsilon\mu}\vec{E}_0 + \left[\vec{\nabla}\Phi - \vec{g}, \vec{H}_0\right] = 0.$$

Бұл сызықты гомогенді теңдеулер жүйесі тривиалды емес шешімге ие болады, егер оның детерминанты нөлге тең болса, яғни:

$$\left(\vec{\nabla}\hat{O} - \vec{g}\right)^2 - \varepsilon\mu = 0. \quad (4.11)$$

Біз Эйконалдың жалпы теңдеуін алдық:

$$\vec{\nabla}\Phi - \vec{g} = \sqrt{\varepsilon\mu}\vec{e}, \quad (4.12)$$

мұндағы \vec{e} – осы нүктедегі толқынның таралу бағытына қарай бағытталған бірлік вектор. Енді (10) жүйесі келесі түрде жазылады:

$$\begin{aligned} -[\vec{e}\vec{E}_0] + \vec{H}_0 &= 0, \\ \vec{E}_0 + [\vec{e}\vec{H}_0] &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Шешімді (4.13) келесі түрінде жазуға болады:

$$\vec{E} = f_1\vec{n} + f_2\vec{b}, \quad \vec{H}_0 = f_1\vec{b} - f_2\vec{n}, \quad (4.14)$$

мұндағы f_1 және f_2 – кейбір еркін функциялар; \vec{n} және \vec{b} – сәулеге перпендикуляр негізгі моральдық және бинормальді бірлік векторлары, олар \vec{e} векторының жанында ортогоналдық реперді құрайды. Бірінші жуықтау теңдеулері, одан f_1 және f_2 анықтауға болады, келесідей:

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla}\Phi - \vec{g}, \vec{H}_1] + \sqrt{\varepsilon\mu}\vec{E}_1 &= -rot\vec{H}_0 + \frac{1}{2\mu}[\vec{\nabla}\mu, \vec{H}_0], \\ \sqrt{\varepsilon\mu}\vec{H}_1 + [\vec{\nabla}\Phi - \vec{g}, \vec{E}_1] &= -rot\vec{E}_0 + \frac{1}{2\varepsilon}[\vec{\nabla}\varepsilon, \vec{E}_0]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.15) теңдеуінің шешімділігі шарттары транспонирленген гомогенді жүйенің әрбір сызықты тәуелсіз шешімдеріне олардың оң жақ бөліктерінің ортогоналдылығы болып табылады. Осы шарттардан маңызды қатынас шығады:

$$\frac{1}{2}(\vec{n} \operatorname{rot} \vec{n} + \vec{b} \operatorname{rot} \vec{b}) = (\vec{e} \vec{\nabla}) \varphi, \quad (4.16)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{f_2}{f_1}, \quad (4.17)$$

мұндағы φ – басты нормаль мен \vec{E}_0 векторы арасындағы бұрыш.

Дифференциальдық геометрияда [20, 131-бет] мынадай теңдік дәлелденген:

$$\vec{n} \operatorname{rot} \vec{n} + \vec{b} \operatorname{rot} \vec{b} = \frac{2}{\rho_0} + \vec{e} \operatorname{rot} \vec{e}, \quad (4.18)$$

мұндағы ρ_0 – сәуленің бұрылу радиусы. (4.18) формуланы

(4.16) формуласына қойып, $(\vec{e} \vec{\nabla}) = \frac{\partial}{\partial s}$ (∂s -кисық бойымен өлшенетін дөңгелек элемент) екенін ескере отырып, келесі теңдеуді аламыз:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{2} \vec{e} \operatorname{rot} \vec{e}. \quad (4.19)$$

Бұл өрнек гравитациялық өрісте сфералық айналмалы массивті дененің жанында жазық электромагниттік толқынның поляризация жазықтығының айналу заңын көрсетеді. Полюстен айналу осі бойымен қозғалатын жарық сәулелері үшін поляризация жазықтығының айналуы мына бұрышқа тең болады:

$$\Delta\varphi_0 = \frac{3\gamma\mathcal{S}_0}{c^3 R^2}, \quad (4.20)$$

мұндағы R – радиус; $\vec{\mathcal{S}}_0$ – орталық дененің бұрыштық сәті. Толқын дененің айналу осіне параллель бағытта таралған кезде, жарық сәулесі тек Эйнштейннің кривизиясына ғана ұшырамай, сонымен қатар дененің айналу бағытына қарай мынадай бұрышқа бұралады.

$$\varphi = \frac{4\gamma\mathcal{S}_0}{c^2 r_\pi^2}, \quad (4.21)$$

мұндағы r_π – денеден жарық сәулесінің траекториясына дейінгі ең қысқа қашықтық. Поляризация жазықтығының бұрылуы, бұралу ескерілгенде, былай болады:

$$\Delta\varphi_{\pm\infty} = \frac{8\gamma\mathcal{S}_0}{c^3 r_\pi^2}. \quad (4.22)$$

Біз, өз жұмысымызда [4, 109-бет], айналмалы массивті дененің өрісіндегі материалдық бөлшектің қозғалысы мәселесін қарастырдық.

Бұл кезде Гамильтон-Якоби теңдеуінен [1, 159-бет] және (4.2) метрикасынан бастау алдық. Сонда,

$$g^{00} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(1 - \frac{2U}{c^2} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right)^2 + \frac{8}{c^2} \left(\vec{U} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) \frac{\partial S}{\partial t} = m^2 c^2. \quad (4.23)$$

Сфералық координаттар жүйесінде вектор-потенциал былайша жазылады:

$$\vec{U} = \frac{\gamma}{2} \left[\vec{\nabla} \frac{1}{r}, \vec{S}_0 \right] = \frac{\gamma S_0}{2r^2} \cos \theta \cdot \vec{e}_\varphi \quad (4.24)$$

Мұндағы \vec{e}_φ – φ координаттық сызықтың бағытына қарай бағытталған бірлік вектор.

Сонда, бұл жүйеде (4.23) теңдеуі келесідей болады:

$$g^{00} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - e^{-\nu} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{2b}{r^3} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \frac{\partial S}{\partial t} = m^2 c^2 \quad (4.25)$$

Мұнда мынадай белгілер енгізілген:

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} e^\nu, \quad e^{-\nu} = \left(1 - \frac{2U}{c^2} \right), \quad b = \frac{2\gamma S_0}{c^4}. \quad (4.26)$$

Шешім (4.25) былай жазылады:

$$S(x, y, z) = -\varepsilon t + \sigma \varphi + \int_0^\theta \sqrt{\alpha^2 - \frac{\sigma^2}{\cos^2 \theta}} d\theta + \int_{r_0}^r \sqrt{\left(g^{00} \varepsilon^2 - m^2 c^2 \right) e^\nu - \frac{\alpha^2}{r^2} - \frac{2b\sigma\varepsilon}{r^3}} dr. \quad (4.27)$$

Бұл шешім қажетті саны еркін тұрақтыларды қамтиды (4.27-ге аддитивті тұрақтыны қосуға болады) және, сондықтан, Гамильтон-Якоби теңдеуінің толық интегралы болып табылады [23].

Гамильтонның каноникалық жүйесінің шешімі мынадай болады [24]:

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta_3 \quad (4.28)$$

мұндағы $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – еркін тұрақтылар.

(4.28) формуланы құрастыра отырып, қарапайым есептеулерден кейін келесі қатынасты алуға болады:

$$tg \theta = tgi \cdot \sin \left(\varphi - \delta - \int_{t_0}^t \Omega_M dt \right), \quad \Omega_M = \frac{2\gamma S_0}{c^2 r^3} \quad (4.29)$$

мұндағы i, δ – Кеплер элементтері (бұрыштық көлбеу және көтерілу түйінінің бойлық бұрышы).

Осыдан мынадай қорытынды жасауға болады: айналмалы орталық дененің өрісіндегі материалдық бөлшектің қозғалысы кезінде бөлшектің орбитасы Ω_M бұрыштық жылдамдықпен \vec{S}_0 векторының айналасында жүйеленеді, ал көлбеу бұрышы осы кезде тұрақты болып қалады.

(4.29) қатынасын $i = \frac{\pi}{2}$ жағдайында қарастырайық. Бұл жағдайда бізде:

$$\varphi = \int_{t_0}^t \Omega_M dt = \frac{2\gamma S_0}{c^2} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^3} \quad (4.30)$$

Мұнда қарапайымдық үшін $\delta = 0$. деп алынды.

(4.30) өрнегін айналмалы орталық дененің өрісінде қозғалыс кезінде бөлшектің траекториясының бұралу бұрышын анықтайтын формула ретінде түсінуге болады.

(4.30) теңдеуін дененің айналу осіне параллель қозғалысқа қолдансақ, онда келесі нәтижені аламыз:

$$\varphi = \frac{4\gamma S_0}{V_0 r_\pi^2 c^2}, \quad (4.31)$$

мұндағы V_0 – бастапқы жылдамдық, r_π – мақсаттық қашықтық.

Жарық сәулесі үшін (31) формула келесі түрге келеді:

$$\varphi = \frac{4\gamma S_0}{r_\pi^2 c^3}. \quad (4.32)$$

Бұл нәтиже Рытов әдісімен алынған Скроцкийдің (4.21) формулаларымен толық сәйкес келеді.

Траекторияның бұралуы:

$$\chi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{d\varphi}{v dt} = \frac{\Omega_M}{v} = \frac{2\gamma S_0}{vc^2 r^3}, \quad (4.33)$$

мұнда dl –траектория элементі .

Осылайша, (4.31) формуласы айналмалы массивті дененің өрісіндегі жарық сәулесінің бұралуы мен материалдық бөлшектің траекториясының бұралуы арасындағы екінші оптико-механикалық аналогияны орнатады.

Сонымен қатар, айналмалы орталық дененің гравитациялық өрісінде жарық толқынының таралу бағытымен \vec{e} перпендикуляр болып табылатын сынақ денесінің жазықтығының айналуы арасындағы үшінші оптико-механикалық аналогияны да орнатуға болады. Бұл аналогия (4.31) сияқты бірдей формуламен сипатталады:

$$\frac{d\varphi}{dS} = \chi + \frac{1}{2}(\vec{e} \text{rot} \vec{e}), \quad (4.34)$$

мұндағы χ – траекторияның бұралуы (жарық сәулесі), \vec{e} – траекторияға жуық бірлік вектор, ds – траектория элементі [4, 123-бет].

Ұсынылып отырған ескертуде біз ЖСТ-дағы денелер механикасында тағы бір мүмкін оптико-механикалық аналогияны көрсетуге тырысамыз.

Ол үшін айналмалы орталық дененің (шар) өрісінде $\backslash(m)$ массалы сынақ денесінің түзу қозғалыс теңдеулерінен бастаймыз [4, 143-бет]:

$$\dot{\vec{v}} = \left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right) \frac{\dot{\vec{p}}}{m} - \frac{\vec{p}}{mc^2} \frac{d}{dt} \left(U \cdot \frac{p^2}{2m^2} \right) + \frac{4}{c^2} \frac{d\vec{U}}{dt}, \quad (4.35)$$

мұндағы \vec{p} – импульс.

Егер егжей-тегжейлі жазатын болсақ, онда (4.35) оң жақтағы бірінші қосынды мынадай болады [4, 142-бет]:

$$\left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right) \frac{\dot{\vec{p}}}{m} = -\frac{\gamma m_0}{r^3} \vec{r} - \frac{4U}{c^2} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{4}{mc^2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{p}\vec{U}). \quad (4.36)$$

Келесіде, (4.35) теңдеуіндегі $\dot{\vec{V}}$ үдеуін каноникалық-сәйкестендірілген айнымалылар \vec{r} және \vec{P} функциясы ретінде қарастырайық да, мынадай өрнекті құрамыз:

$$\text{rot} \dot{\vec{v}} = 2 \left\{ -\frac{6\gamma m_0 (\vec{r}\vec{v}) \vec{M}}{mc^2 r^5} + \frac{3\gamma \vec{v} (\vec{r}\vec{S}_0)}{c^2 r^5} + \frac{3\gamma \vec{r} (\vec{v}\vec{S}_0)}{c^2 r^5} + \frac{3\gamma \vec{S}_0 (\vec{v}\vec{r})}{c^2 r^5} - \frac{15\gamma \vec{r} (\vec{r}\vec{v}) (\vec{r}\vec{S}_0)}{c^2 r^7} \right\}. \quad (4.37)$$

Екінші жағынан, айналмалы массивті шардың өрісіндегі сынақ денесінің айналмалы қозғалыс теңдеуі мынадай болады [4, 139-бет]:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\frac{6\gamma m_0 (\vec{r}\vec{v}) [\vec{r}\vec{v}]}{c^2 r^5} + \frac{3\gamma \vec{v} (\vec{r}\vec{S}_0)}{c^2 r^5} + \frac{3\gamma \vec{r} (\vec{v}\vec{S}_0)}{c^2 r^5} + \frac{3\gamma \vec{S}_0 (\vec{v}\vec{r})}{c^2 r^5} - \frac{15\gamma \vec{r} (\vec{r}\vec{v}) (\vec{r}\vec{S}_0)}{c^2 r^7}. \quad (4.38)$$

(4.38) мен (4.37) теңдеулерін салыстыра отырып, мынадай нәтижені аламыз:

$$\frac{1}{2} \text{rot} \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (4.39)$$

Келесіде оңай көрсетуге болады, бұл

$$\text{div} \vec{\omega} = 0 \quad (4.40)$$

Осыдан біз ЖСТ-дағы дене механикасындағы қозғалыс теңдеулері (4.39) және (4.40) толқынды оптикадағы (электродинамикадағы Максвелл теңдеулерінің бірінші жұбына) теңдеулермен аналогиялы екенін көреміз.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

Бұл ЖСТ-дағы төртінші оптико-механикалық аналогия. (4.39) теңдеуінен біз ЖСТ-дағы дене механикасына арналған тағы бір маңызды қорытынды жасай аламыз, яғни сынақ денесінің айналмалы қозғалыс теңдеуін өріс теңдеулерінен шығарудың қажеті жоқ, тек сынақ денесінің түзу қозғалыс теңдеуін білу жеткілікті, сосын роторды $\dot{\vec{V}}$ функциясынан алуға болады.

Осы кезде \vec{V} жылдамдығы мен $\dot{\vec{v}}$ үдеуі каноникалық-сәйкестендірілген айнымалылар \vec{r} және \vec{p} функциялары екендігі айқын болып табылады.

Бұл жағдайлар айналмалы массивті шардың өрісіндегі сынақ денесінің айналмалы қозғалыс теңдеуі түзу қозғалыс теңдеуінен тәуелсіз еместігін айқындайды. Бір жағынан, екінші жағынан, ЖСТ-дағы дене механикасында гамильтондық формализмнің маңыздылығы айқындалады.

5 ЖСТ МЕХАНИКАСЫНДАҒЫ ОПТИКА-МЕХАНИКАЛЫҚ АНАЛОГИЯНЫ ЗЕРТТЕУ ӘДІСТЕРІ МЕН ЖАЛПЫ СЕБЕПТЕРІН ТАЛҚЫЛАУ

Алдыңғы тарауда біз төрт оптикалық-механикалық аналогияларды талқыладық: екеуі – оптикалық сәулелер мен ЖСТ-дағы материалдық нүктенің механикасына қатысты, ал екеуі – толқындық оптика мен ЖСТ-дағы денелер механикасына қатысты. Әр аналогия жұбы жалпы формуламен сипатталады. Бұл жағдай бізді ойлантады: бұл аналогиялардың жалпы себебі жоқ па? Мұны анықтау үшін, модельдік мәселелерге оралып, релятивистік эффектілердің себебін зерттейміз. Бұл векторлық элементтерді \vec{M} (импульс сәті) және \vec{A} (Лаплас векторы) және ЖСТ-дағы денелердің қозғалысы бойынша адиабатикалық теорияның аясында жасау оңай болады [3, с.93]

5.1 Ньютон механикасындағы векторлық элементтер

Кеплердің міндеті, яғни орталық тартылыс өрісіндегі сынақ денесінің қозғалысы, потенциалдық энергияның кері пропорционалдығында \vec{r} және сәйкесінше r^2 күштің кері пропорционалдығында болатын жағдай, егер екі векторлық қозғалыс интегралына бірден сүйенсек, элементарлы түрде шешіледі:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}], \quad \vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m} \vec{M} \right] - \frac{\gamma m m_0}{r} \vec{r}, \quad (5.1)$$

мұндағы \vec{M} – сәт импульс сәті, \vec{A} – Лаплас векторы.

Шынымен де, \vec{M} вектордың сақталуынан орбита жазық қисық екенін айғақтайды. (5.1) қатынастарының екіншісінің екі жағын векторына \vec{r} скалярлы көбейткенде:

$$(\vec{r}\vec{A}) = \left(\vec{r} \left[\frac{\vec{p}}{m} \vec{M} \right] \right) - \gamma m m_0 r, \quad (5.2)$$

немесе

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi}, \quad (5.3)$$

мұнда

$$P = \frac{M^2}{\gamma m^2 m_0}, \quad e = \frac{A}{\gamma m m_0}, \quad \alpha = \gamma m m_0. \quad (5.4)$$

Бұл өрнектерде P – орбитаның параметрі, e – орбитаның эксцентриситеті, φ – полярлық бұрыш. (5.3) теңдеуі – координаталар басында фокусы бар конустық қиманың теңдеуі. Демек, мәселе шешілді.

Сақталатын вектор \vec{A} перигелийге дейін фокус бойымен үлкен оське бағытталған. Мұндай қозғалыс интегралының пайда болуы – дәл осы $U = \frac{\gamma m_0}{r}$ өрісіне тән, потенциалдың алдында

кез келген таңба бола алады, және аталмыш қозғалыстың бұзылуымен байланысты [40].

Егер жүйенің толық энергиясы $E < 0$ болса, эксцентриситет $e < 1$, яғни орбита эллипс үшін, бұл қозғалыс шекті. Эллипстің үлкен және кіші жарты осьтері үшін формулалар:

$$a = \frac{P}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{P}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (5.5)$$

Энергияның ең төменгі рұқсат етілген мәні

$$E_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}. \quad (5.6)$$

Бұл ретте, қатынасқа сәйкес

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \quad (5.7)$$

эксцентриситет $e = 0$, яғни эллипс шеңберге айналады. Ескерту керек, эллипстің үлкен жарты осі тек энергияға, бірақ тартым денесінің моментіне тәуелді емес. Қозғалыс периодын T мына қатынастарға сәйкес анықталады:

$$2mf = TM, \quad (5.8)$$

мұндағы $f = \pi ab$ – орбитаның ауданы.

5.2 Квазикеплер есебі

Орталық өрісте қозғалуды зерттеуді бастайық, яғни потенциалдық энергия тартымдық дененің тек r қашықтығына байланысты өрісте болады.

Мұндай өрісте қозғалғанда, жүйенің сәті өрістің орталығы бойынша сақталады.

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}]. \quad (5.9)$$

Бұл сынақтық дененің орталық өрісте қозғалыс траекториясының толықтай бір жазықтықта жататынын білдіреді. Онда полярлық координаталар r , φ енгізіп, Лагранж функциясын былай жазамыз:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r). \quad (5.10)$$

Ол айқын түрде ϕ координатасын қамтымайды, ол осы жағдайда циклдік болып табылады, және оған сәйкес импульс сақталады:

$$p_{\phi} = M = mr^2\dot{\phi} = \text{const}. \quad (5.11)$$

Сынақ дененің орталық өрістегі қозғалысы туралы тапсырманың шешімін сәт және энергияның сақталу заңдарынан шығара отырып алуға болады, бұл ретте қозғалыс теңдеулерін жазудың қажеті жоқ. Энергияның сақталу заңы былайша жазылады:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r). \quad (5.12)$$

(5.11) теңдеуінен $\dot{\phi}$ мәнін қойғанда, аламыз

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \quad (5.13)$$

Ары қарай

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}. \quad (5.14)$$

Айнымалыларды бөліп, интегралдап, жазуға болады

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{const.} \quad (5.15)$$

(5.11) теңдеуден табатынымыз

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt. \quad (5.16)$$

Мұнда (5.14) теңдеуден dt -ті қойып, интегралдағанда, мынаны аламыз

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const.} \quad (5.17)$$

Формулалар (5.15) және (5.17) орталық өрістегі сынақ денесінің қозғалыс мәселесінің жалпы шешімін береді. Мұнда (5.17) r және φ айнымалылары арасындағы байланысты анықтайды, яғни траектория теңдеуі. (5.15) өрнегі қозғалатын сынақ денесінің орталықтан r қашықтығын уақыт функциясы ретінде тікелей түрде емес анықтайды. φ бұрышы уақытпен монотонды түрде өзгереді, ал $\dot{\varphi}$ (5.11) бойынша ешқашан таңбасын өзгертпейді. Қозғалыстың радиалды бөлігі 'тиімді' потенциалдық энергиямен өрістегі бір өлшемді қозғалыс ретінде қарастырылуы мүмкін.

$$U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (5.18)$$

Бұл шаманы $\frac{M^2}{2mr^2}$ центробежді энергия деп атайды.

Егер энергияның сақталу заңы (5.13) бойынша $\dot{r} = 0$ қойсақ, онда

$$E = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (5.19)$$

Бұл өрнек орталықтан қашықтық бойынша қозғалыстың шектерін анықтайды. Бұл жағдайда $\dot{r} = 0$ шарт траекторияның 'бұрылыс нүктесін' анықтайды, онда $r(t)$ функция өсуден кемуге қарай және керісінше өтеді.

Егер r өзгеру облысы r_{\min} және r_{\max} шекаралары болса, онда [40, с.65] бойынша, қозғалыс шекті болып табылады және траектория толығымен радиустары $r = r_{\max}$ және $r = r_{\min}$ шеңберлермен шектелген сақина ішінде орналасады. Бұл траекторияның міндетті түрде тұйық қисық болатынын білдірмейді. r дейін өзгерген уақыт ішінде, содан r_{\max} дейін r_{\min} кейін r_{\max} дейін, радиус-вектор $\Delta\varphi$ бұрышына айналады, ол (2.17) бойынша тең

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (5.20)$$

Траекторияның тұйықталу шарты - бұл бұрыштың 2π -тің рационал бөлшегіне тең болуы, яғни $\Delta\varphi = 2\pi m/n$, мұнда m , n - бүтін сандар.

Тек екі типті орталық өрістер бар, мұнда барлық шекті қозғалыстардың траекториялары тұйық. Бұл потенциалдық

энергия $\frac{1}{r}$ немесе r^2 пропорционал болатын өрістер. Бірінші өріс Кеплер тапсырмасын білдіреді, ал екінші өріс аталмыш кеңістік осцилляторы тапсырмасында орын алады.

Енді орталық өрістегі қозғалыс туралы жалпы ойымызды нақтылайық және қолданылған дененің потенциалдық энергиясы мынадай түрде болатын тапсырманы қарастырайық:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r), \quad (5.21)$$

мұнда $\delta U(r)$ – кіші қосымша. Мұндай тапсырманы квазикеплерлік тапсырма деп атауға болады.

Бұл жағдайда шектелген қозғалыстың траекториялары жабық болмайды және әрбір айналымда орбитаның перигелийі кішігірім бұрыштық $\delta\varphi$ мөлшеріне ығысатын болады.

Демек, (5.20) бойынша

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}} = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}} dr \quad (5.22)$$

Мұнда (5.21) енгізейік. Алдағы есептеулерді жүргізу үшін алдымен мына өрнекті қарастырайық

$$\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}} = \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r} - \delta U(r)\right) - \frac{M^2}{r^2}} \approx$$

$$\approx \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}} - \frac{m\delta U(r)}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}} . \quad (5.23)$$

Мұны (5.22) енгізейік, онда мына нәтижені аламыз

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m\delta U(r)dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \delta U(r) d\varphi \right) \quad (5.24)$$

мұнда dr бойынша интегралдаудан $d\varphi$ бойынша 'бұзылмаған' Кеплер қозғалысының траекториясы бойымен интегралдауға көштік.

Сонымен қатар, (5.24) келесі жазба қызықты. Ол үшін (5.16) бойынша еске түсірейік:

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt . \quad (5.25)$$

Мұны (5.24)-ке қойып, мынаны аламыз:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \int_0^T \delta U(r) dt . \quad (5.26)$$

Эллипс 'толықтай' айналатындықтан, оған бұрыштық жылдамдық (мысалы, перигелийдің айналу жылдамдығы) $\vec{\Omega}$ тағайындап, жазуға болады:

$$\Delta\varphi = \Omega \cdot T, \quad (5.27)$$

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial M} \frac{1}{T} \int_0^T \delta U(r) dt, \quad (5.28)$$

өйткені T периоды тек тәуелсіз қозғалыс интегралы E -ге байланысты.

Соңында тағы бірнеше формуланы келтірейік. Кеплер қозғалысы жағдайында тәуелсіз қозғалыс интегралы E (5.5) формуласынан көрініп тұрғандай, тең

$$E = -\frac{\alpha}{2a}, \quad (5.29)$$

мұнда a – эллипстің үлкен жарты осі. Жаңа мөлшер M_0 -ны келесі түрде енгізейік.

$$a = \frac{M_0^2}{m\alpha}. \quad (5.30)$$

Бұл жағдайда M_0 'эркет' өлшеміне ие. Сонда,

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2M_0^2}. \quad (5.31)$$

Бұл өрнекті (5.7) формуласына қойғанда, аламыз

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha^2}}}. \quad (5.32)$$

Осылайша, энергияның сақталу заңы E арқылы анықталатын M_0 қозғалыс интегралы мен M және A қозғалыс интегралдары арасында (5.32) формуласы бойынша анықталатын байланыс бар. Соңында, аталмыш орташа қозғалыс [42]:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{m\alpha^2}{M_0^3} = \frac{\partial E}{\partial M_0}. \quad (5.33)$$

(5.28), (5.32) және (5.33) формулалары ОТО механикасындағы денелердің адиабатикалық қозғалыс теориясын құруда маңызды рөл атқарады [3, с.129].

5.3 Шварцшильд есебі

Енді айналмалы сұйық шар үшін Фок бірінші жуықтау метрикасына негізделіп, ЖСТ механикасындағы танымал мәселе - Шварцшильд мәселесін қарастырайық, яғни орталық үлкен масса m_0 болғанда массасы m бар сынақ денесінің қозғалысы. Онда метрика (1.73) мынадай болады:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U \left(1 + \frac{\xi_0^k}{m_0 c^2} \right) + \frac{2U^2}{c^2} \right] dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (5.34)$$

где $U = \frac{\gamma m_0}{r}$.

Мәселені сипаттау үшін векторлық элементтерді қолданамыз.

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}], \quad (5.35)$$

$$\vec{A} = \left[\begin{array}{c} \vec{p} \\ m \end{array} \vec{M} \right] - \frac{\gamma m m_0}{r} \vec{r} , \quad A = \gamma m m_0 e , \quad (5.36)$$

орбиталық координаталар жүйесінің орталарымен бағытас болатын \vec{k} және \vec{i} координаталар. Уақыт бойынша векторлық элементтердің өзгерістері:

$$\dot{\vec{M}} = \left[\dot{\vec{r}} \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \dot{\vec{p}} \right] , \quad (5.37)$$

$$\dot{\vec{A}} = \left[\begin{array}{c} \dot{\vec{p}} \\ m \end{array} \vec{M} \right] + \left[\begin{array}{c} \vec{p} \\ m \end{array} \dot{\vec{M}} \right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) . \quad (5.38)$$

$\dot{\vec{r}}$ және $\dot{\vec{p}}$ туындыларын Гамильтон теңдеулеріне қоюды жалғастырамыз.

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} , \quad \dot{\vec{p}} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} . \quad (5.39)$$

Гамильтониан H анықтаймыз. Ол үшін қажетті жуықтау бойынша (2.34) теңдеуінен табамыз.

$$ds = c dt \left(1 - \frac{U + \frac{v^2}{2}}{c^2} + \frac{\frac{1}{2} U^2 - \frac{3}{2} U v^2 - \frac{1}{8} v^4 - U \frac{\xi_0^{\text{ж}}}{m_0}}{c^4} \right) \quad (5.40)$$

Сонда лагранжиан былай көрінеді:

$$L = -mc \frac{ds}{dt} = -mc^2 + m \left(U + \frac{v^2}{2} \right) - \frac{m}{2c^2} \left(U^2 - 3Uv^2 - \frac{1}{4}v^4 - \frac{2\xi_0^*}{m_0} U \right) \quad (5.41)$$

Жалпыланған импульс

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{3U + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right) m \vec{v}. \quad (5.42)$$

Және, ақырында, гамильтониан

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{3Up^2}{2mc^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2} - \frac{m\xi_0^*}{m_0c^2} U \quad (5.43)$$

Бұл өрнекті (5.39) теңдеуіне қойғанда мынадай нәтиже аламыз:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{3U\vec{p}}{mc^2} - \frac{p^2\vec{p}}{2m^3c^2}, \quad (5.44)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\gamma mm_0}{r^3} \vec{r} - \frac{mU}{c^2} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{3p^2}{2mc^2} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{m\xi_0^*}{m_0c^2} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \quad (5.45)$$

Енді бұл өрнектерді (5.37) теңдеуіне қойсақ, онда:

$$\dot{\vec{M}} = 0 \quad (5.46)$$

Осылайша, вектор \vec{M} сақталады және қозғалыс жазық болады. Ал \vec{A} векторы (5.38) және (5.46) теңдеулерін ескере отырып, уақыт өте келе келесі теңдеу бойынша өзгереді:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m} \vec{M} \right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (5.47)$$

Осы кезде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\vec{p}}{mr} - \frac{(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{mr^3} - \frac{3U\vec{p}}{mc^2 r} - \frac{p^2\vec{p}}{2m^3c^2 r} + \frac{3U(\vec{r}\vec{p})}{mc^2} \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{p^2(\vec{r}\vec{p})}{2m^3c^2} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (5.48)$$

(5.47) формуласын (5.45) және (5.48) ескере отырып, қайта жазайық:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} = & -\frac{U}{c^2} [\vec{\nabla} U \vec{M}] + \left(\frac{3p^2}{2m^2c^2} + \frac{\xi_0^{\text{жк}}}{m_0c^2} \right) [\vec{\nabla} U \vec{M}] + \frac{3\gamma m_0}{c^2} \frac{U\vec{p}}{r} + \\ & + \frac{\gamma m_0}{2m^2c^2} \frac{p^2\vec{p}}{r} - \frac{3\gamma m_0 U(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{c^2 r^3} - \frac{\gamma m_0 p^2(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{2m^2c^2 r^3}, \quad (5.49) \end{aligned}$$

Мұнда $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ операторы.

Осы теңдеудің оң жағын қарапайымдатайық, нерелятивистік энергияны сақтау заңын пайдаланып:

$$E = \frac{p^2}{2m} - mU = -\frac{\gamma m m_0}{2a}. \quad (5.50)$$

мұнда a – эллипстің үлкен жарты осі. Онда, оңай есептеулерден кейін, (5.49) келесідей жазылады:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{2\gamma m_0}{c^2} \left(\frac{2E}{m} + 3U + \frac{\xi_0^{\text{жк}}}{2m_0} \right) \frac{[\vec{r}\vec{M}]}{r^3}. \quad (5.51)$$

Бұл теңдеу өте қарапайым және айқын түрде, векторлық элементтер \vec{M} мен \vec{A} байланыстың артықшылықтарының бірі болып табылады. (5.51) теңдеуінен көріп отырғанымыздай, Кеплер эллипсінің перигелийі уақыт бойынша тұрақты болмайды. Ол өзгеріп отырады, алайда (5.51) теңдеуінің оң жағындағы көбейткіштің $\frac{1}{c^2}$ әсерінен баяу өзгереді. (5.51)

теңдеуін келесі түрде де жазуға болады:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{4E}{m} + \frac{\xi_0^{\text{жк}}}{m_0} \right) \left[\vec{\nabla}U \vec{M} \right] + \frac{3}{c^2} \left[\vec{\nabla}U^2 \vec{M} \right]. \quad (5.52)$$

Бір ғасыр уақыт аралығында \vec{A} өзгеріс табу үшін, (5.51) теңдеудің оң жағын сынақ дененің орталық денені айналу уақыты T бойынша орташалаймыз. Ол үшін орташа мәндерді табуымыз керек:

$$\frac{\overline{\vec{r}}}{r^3} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\vec{r}}{r^3} dt, \quad \frac{\overline{\vec{r}}}{r^4} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\vec{r}}{r^4} dt. \quad (5.53)$$

Оларды есептеу оңай, егер релятивистік емес моменттің сақталу заңына жүгінсек:

$$M = m r^2 \dot{\phi}. \quad (5.54)$$

Осыдан табатынымыз

$$dt = \frac{mr^2}{M} d\varphi. \quad (5.55)$$

Сондықтан (5.53) формуласында t бойынша интеграциядан φ бойынша интеграцияға көшуге болады. Онда:

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{m}{TM} \int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\varphi = 0, \quad (5.56)$$

$$\frac{\vec{r}}{r^4} = \frac{m}{TM} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_r d\varphi}{r} = \frac{\pi m e}{MTP} \vec{i}. \quad (5.57)$$

Мұнда P – эллипстің параметрі, ал

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}. \quad (5.58)$$

Осылайша, (5.51) мынадай түрде болады:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPC^2} [\vec{e}_M \vec{A}], \quad (5.59)$$

мұнда

$$\vec{e}_M = \frac{\vec{M}}{M} = \vec{k}, \quad \vec{A} = A\vec{e}_A = \gamma m m_0 e \vec{i}. \quad (5.60)$$

(5.59) теңдеуден вектор \vec{A} орбиталық сәт \vec{M} айналасында бұрыштық жылдамдықпен айналатыны көрінеді:

$$\vec{\Omega}_A = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2} \vec{e}_M, \quad (5.61)$$

өзінің мөлшерін өзгеріссіз сақтай отырып. Басқа сөзбен айтқанда, \vec{A} вектор орбита жазықтығында (5.61) теңдеумен бұрыштық жылдамдықпен айналады:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}_A \vec{A}]. \quad (5.62)$$

Егер \vec{A} вектордың орбита жазықтығындағы орны поляр координаттарымен A және g арқылы сипатталса, онда (5.61) теңдеуден мынадай нәтижеге қол жеткіземіз:

$$\frac{dg}{dt} = (\vec{\Omega}_A \vec{e}_M) = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2} = \frac{6\pi\gamma m_0}{Ta(1-e^2)c^2}. \quad (5.63)$$

T кезеңінде g полярлық бұрышының өзгеруі мынаған тең болады:

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2}. \quad (5.64)$$

Бұл Шварцшильд мәселесінде перигелийдің ығысуын түсіндіретін алғашқы жақындық метрикасының (1.62) дұрыс екенін көрсетеді.

5.4 Ленц-Тирринг мәселесі және релятивистік эффектілердің суперпозиция принципі

Материалдық бөлшектің айналмалы массивті шардың өрісіндегі шекті қозғалысы мәселесі алғаш рет Ленц және Тиррингпен зерттелді [6, с.426]. Олардың бастапқы метрикасы мынадай:

$$ds^2 = [c^2 - 2U]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2}(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)dt. \quad (5.65)$$

Біз қазір бұл мәселені бірінші жақындықтағы азайтылған метрика негізінде қарастырамыз.

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{8}{c^2}(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)dt. \quad (5.66)$$

Біз U_i анықтаймыз, бұл ретте біз оны шардан гөрі жалпы жүйе үшін, атап айтқанда, белгілі бір шектеулі аумақта стационарлы түрде қозғалатын денелер жүйесі үшін жасаймыз. Сондықтан:

$$\vec{U} = \gamma \int \frac{(\rho \vec{v})'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \gamma \sum_b \frac{m_b \vec{v}_b}{|\vec{r} - \vec{r}_b|}. \quad (5.67)$$

где \vec{r}_b – радиус-вектор тел, образующих систему.

Басшылыққа ала отырып, ол

мұнда \vec{r}_b — жүйені құрайтын денелердің радиус-векторы. Біз келесі жағдайларды назарға аламыз:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_b|} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}\vec{r}_b)}{r^3} + \dots, \quad (5.68)$$

$$(\vec{r}\vec{r}_b)\vec{v}_b = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{r}_b (\vec{r}_b \vec{r}) + \frac{1}{2} [\vec{r} [\vec{v}_b \vec{r}_b]], \quad (2.69)$$

(5.67) қайта жазайық

$$\vec{U} = \frac{\gamma}{r} \frac{d}{dt} \sum_b m_b \vec{r}_b + \frac{\gamma}{2r^3} \frac{d}{dt} \sum_b \vec{r}_b (\vec{r}_b \vec{r}) + \frac{\gamma}{2r^3} \sum_b m_b [\vec{r} [\vec{v}_b \vec{r}_b]] \quad (5.70)$$

Бұл өрнекті уақыт бойынша орташа мәнге келтіреміз. Сонда

$$\vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3} [\vec{r} \vec{S}_0] = \frac{\gamma}{2} \left[\vec{\nabla} \frac{1}{r} \vec{S}_0 \right], \quad (5.71)$$

мұнда белгілеу енгізілген

$$\vec{S}_0 = \sum_b [\vec{r}_b m_b \vec{v}_b], \quad (5.72)$$

жүйенің импульс сәті үшін.

Енді қарастырылып отырған міндеттің лагранжианын құрайық

$$L = -mc \frac{ds}{dt}. \quad (5.73)$$

Осы үшін (5.66) бойынша табамыз.

$$ds = c dt \left(1 - \frac{U + \frac{v^2}{2}}{c^2} + \frac{\frac{1}{2}U^2 - \frac{3}{2}Uv^2 - \frac{1}{8}v^4 + 4(\vec{U}\vec{v})}{c^4} \right).$$

(5.74) мәнін (5.73) формуласына қойғанда, аламыз

$$L = -mc^2 + m \left(U + \frac{v^2}{2} \right) - \frac{m}{2c^2} \left(U^2 - 3Uv^2 - \frac{1}{4}v^4 + 8(\vec{U}\vec{v}) \right) \quad (5.75)$$

Импульс

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{3U + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right) m\vec{v} - \frac{4m}{c^2} \vec{U}. \quad (5.76)$$

Гамильтониан

$$\begin{aligned} H = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L &= mc^2 + \frac{mv^2}{2} - mU + \frac{m}{2c^2} \left(U^2 + 3Uv^2 + \frac{3}{4}v^4 \right) + \frac{4(\vec{p}\vec{U})}{c^2} = \\ &= mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{3Up^2}{2mc^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \frac{4(\vec{p}\vec{U})}{c^2}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Қозғалыс теңдеулерін құрамыз. (5.37) және (5.38) бойынша

$$\dot{\vec{M}} = [\dot{\vec{r}}\vec{p}] + [\vec{r}\dot{\vec{p}}], \quad (5.78)$$

$$\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m} \vec{M} \right] + \left[\frac{\vec{p}}{m} \dot{\vec{M}} \right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (5.79)$$

Ары қарай табатынымыз

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{3U\vec{p}}{mc^2} - \frac{p^2\vec{p}}{2m^3c^2} + \frac{4\vec{U}}{c^2}, \quad (5.80)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\gamma m m_0}{r^3} \vec{r} - \frac{mU}{c^2} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{3p^2}{2mc^2} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \frac{4}{c^2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{p}\vec{U}),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2} \right) \frac{[\vec{M}\vec{r}]}{mr^3} - \frac{4}{c^2 r^3} [\vec{r}[\vec{r}\vec{U}]]. \quad (5.82)$$

(5.80)-(5.82) мәндерін (5.78) және (5.79) теңдеулеріне орналастырайық. Сонда мынаны аламыз:

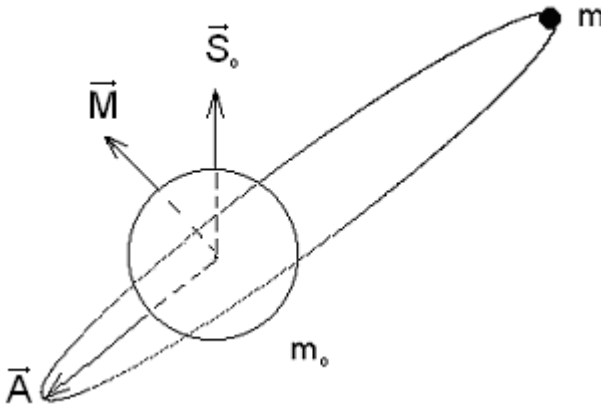
$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{2\gamma}{c^2 r^3} [\vec{S}_0 \vec{M}], \quad (5.83)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{\gamma m_0 (4E + 6mU)}{mc^2 r^3} [\vec{r}\vec{M}] + \frac{2\gamma}{c^2 r^3} [\vec{S}_0 \vec{A}] + \frac{6\gamma (\vec{S}_0 \vec{M})}{mc^2 r^5} [\vec{r}\vec{M}] \quad (5.84)$$

(5.83) және (5.84) теңдеулерін ньютондық эллипс бойынша орташа мәнге келтірейік. [6, с.426] еңбекте эллиптикалық орбитада қозғалыс кезінде r мен уақыттың

арасындағы тәуелділікті параметрлік түрде көрсету арқылы орташа мәнге келтіру ыңғайлы екені көрсетілген:

$$r = a(1 - e \cos \xi), \quad t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e \sin \xi), \quad (5.85)$$



1 сурет - Лензе-Тирринг мәселесінде векторлық элементтердің бағыттарын схемалық түрде көрсету

Мысалы :

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1 - e \cos \xi)^2}. \quad (5.86)$$

Бұл және оған ұқсас интегралдарды есептеу үшін жалпы формуланы пайдаланамыз [43, с.397] .

$$J_{n+1} = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1 - e \cos \xi)^{n+1}} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \right),$$

мұнда P_n – Лежандр полиномдары. Сондай-ақ,

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \dots$$

(5.88)

(5.87) формуласын ескере отырып, табамыз

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{a^3(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.89)$$

Бұл бөлімде орташа әрі қарапайым тәсілмен, яғни нерелятивистік қозғалыс мөлшерінің сақталу заңын пайдалана отырып жүргізіледі. Тағы да $\frac{1}{r^3}$ орташа мәнін қарастырайық.

Онда (5.3) және (5.25) ескере отырып, мынадай болады:

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{m}{TM} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r} = \frac{m}{TMP} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \varphi) d\varphi. \quad (5.90)$$

Бұл интеграл элементарлы, және оны есептеу үшін (5.87) тәрізді арнайы формула қажет емес. Келесіде,

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{m}{TmP} 2\pi. \quad (5.91)$$

Бұл өрнек (5.89) мен сәйкес келуі үшін, кеплерлік тапсырмаға сәйкес, есімізге түсірейік,

$$Tm = 2mf, \quad f = \pi ab, \quad b = a\sqrt{1-e^2}, \quad P = a(1-e^2), \quad (5.92)$$

мұнда, тағы да еске салайық, f – орбитаның ауданы, b – эллипсінің кіші жарты осі. Сонда

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{\pi}{fP} = \frac{1}{abP} = \frac{1}{a^3(1-e^2)^{3/2}}. \quad (5.93)$$

Алдыңғы Шварцшильд мәселесінен белгілі болғандай,

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = 0, \quad \overline{\frac{\vec{r}}{r^4}} = \frac{e}{2a^3(1-e^2)^{3/2}} \vec{i}. \quad (5.94)$$

Ақырында,

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^5}} = \frac{m}{Tm} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_r d\varphi}{r^2} = \frac{2\pi me}{TmP^2} \vec{i} = \frac{e}{a^4(1-e^2)^{5/2}} \vec{i}. \quad (5.95)$$

Табылған орташа мәндерді ескере отырып, қозғалыс теңдеулерін (2.83) және (2.84) келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{\Omega}_M \vec{M}], \quad (5.96)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}_A \vec{A}]. \quad (5.97)$$

Мұнда бұрыштық жылдамдықтар енгізілген.

$$\vec{\Omega}_M = \frac{2\gamma\vec{S}_0}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}}, \quad (5.98)$$

$$\vec{\Omega}_A = \frac{\gamma}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} \vec{M} + 2(\vec{S}_0 - 3(\vec{S}_0 \vec{e}_M) \vec{e}_M) \right],$$

мұнда \vec{S}_0 – шарының (денелер жүйесінің) меншікті бұрыштық импульсі.

Екі мөлшердің орнына $\vec{\Omega}_M$ және $\vec{\Omega}_A$ жалпы бұрыштық жылдамдықты қарастыруға болады.

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_A, \quad (5.100)$$

және (5.96) мен (5.97) төмендегідей түрге келтіреміз:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{\Omega} \vec{M}], \quad (5.101)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega} \vec{A}]. \quad (5.102)$$

Мұнан шығатыны, векторлар \vec{M} және \vec{A} көлемде емес, тек бағытта өзгеретіні. \vec{M} вектор \vec{S}_0 айналасында (5.98) формуласымен бұрыштық жылдамдықпен прецессияланады. Ал

вектор \vec{A} бір уақытта екі қозғалысқа қатысады: \vec{S}_0 айналасында (5.98) формуласымен прецессия және орбита жазықтығында айналумен.

$$\vec{\Omega}_g = \frac{\gamma}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} \vec{M} - 6(\vec{S}_0 \vec{e}_M) \vec{e}_M \right]. \quad (5.103)$$

(5.93) сәйкес

$$\frac{\gamma}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\gamma m}{T M P}, \quad (5.104)$$

онда

$$\vec{\Omega}_g = \frac{6\pi\gamma m_0}{T P c^2} \vec{e}_M - \frac{12\pi\gamma m (\vec{S}_0 \vec{e}_M)}{T M P c^2} \vec{e}_M. \quad (5.105)$$

Осы жазбадағы оң жақтағы бірінші мүшесі Шварцшильд мәселесіндегі (5.61) формуламен сәйкес келеді, ал екінші мүшесі орталық дененің айналуына байланысты түзету болып табылады.

(5.99) формуладан көріп отырғанымыздай, орталық өрістің неньютоновтығы мен дененің өз айналуының релятивистік әсерлері суперпозицияланады. Осылайша, бұл әсерлерді бір-бірінен тәуелсіз түрде зерттеуге болады (суперпозиция принципі).

Ақырында, $\vec{\Omega}$ Эйлер бұрыштарының δ , g , i уақыт бойынша туындыларымен байланысты, олар қозғалмалы координаталық жүйенің x , y , z тұрақты координаталық жүйеге X_0 , Y_0 , Z_0 (орталарымен) қатысты бағытын анықтайды. Осылайша, [44, с. 165]

$$\vec{\Omega} = \dot{\delta} \vec{e}_{z_0} + \dot{i} \vec{e}_{\delta} + \dot{g} \vec{e}_z, \quad (5.106)$$

мұнда \vec{e}_δ — ху және X_0Y_0 жазықтықтарының қиылысуынан пайда болған түйін сызығының бірлік векторы.

Егер Z_0 ось \vec{S}_0 бағытталса, (5.106) және (5.99) салыстыра отырып, біз мынадай нәтиже аламыз:

$$\dot{\delta} = \frac{2\gamma S_0}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}}, \quad (5.107)$$

$$\dot{i} = 0, \quad (5.108)$$

$$\dot{g} = \frac{\gamma}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} M - 6(\vec{S}_0 \vec{e}_M) \right]. \quad (5.109)$$

g өзгерісі бір период ішіне тең:

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1 - e^2)c^2} - \frac{12\pi\gamma m(\vec{S}_0 \vec{e}_M)}{a(1 - e^2)Mc^2}. \quad (5.110)$$

Аналогты түрде

$$\Delta\delta = \frac{4\pi\gamma m S_0}{a(1 - e^2)Mc^2}. \quad (5.111)$$

Орталық дененің экваториалдық жазықтығында сынақ денесінің қозғалысы $\vec{S}_0 \uparrow \uparrow \vec{M}$ болған жағдайда, период бойынша перигелийдің абсолютті ауысымын табуға болады [45, с. 35]:

$$\Delta g_{\text{абс}} = \Delta g + \Delta\delta = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1 - e^2)c^2} - \frac{8\pi\gamma m S_0}{a(1 - e^2)Mc^2}. \quad (5.112)$$

5.5 ЖСТ механикасындағы денелер қозғалысының адиабаталық теориясы

Бұл атау бізбен ЖСТ механикасындағы эволюциялық қозғалысты зерттеу үшін дамытылған тәсілді білдіреді [3, б. 128; 46, б. 69; 47, б. 95, 48, б. 115; 49, б. 129]. Бұл қозғалысты сипаттау үшін векторлық элементтерді пайдалану, сызықты емес тербелістер теориясының асимптотикалық әдістері және адиабатикалық инварианттар әдісіне негізделген.

Оны түсіндірейік. ЖСТ механикасында зерттелетін жүйелердің көпшілігін баяу эволюционируленетін гамильтоновтық жүйелер ретінде қарастыруға болады. Басқаша айтқанда, ЖСТ механикасындағы кейбір мәселелерді perturbed кеплерлік жүйе ретінде қарастыруға болады. Олардың Лагранж функциясы мынадай болады:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{\gamma mm_0}{r} + R(\vec{r}, \vec{v}), \quad (5.113)$$

ал гамильтониан

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{\gamma mm_0}{r} - R(\vec{r}, \vec{p}), \quad (5.114)$$

мұнда R – пертурбациялық функция $\sim \frac{1}{c^2}$, $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ – импульс.

Қозғалысты векторлық элементтер \vec{M} және \vec{A} арқылы сипаттауға болады. \vec{M} және \vec{A} векторлық элементтердің табиғатына байланысты біз қозғалыс теңдеулерінің ең жалпы түрін автоматты түрде жаза аламыз.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt} \vec{e}_M + [\vec{\Omega} \vec{M}], \quad (5.115)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA}{dt} \vec{e}_A + [\vec{\Omega} \vec{A}], \quad (5.116)$$

мұнда \vec{e}_M және $\vec{e}_A - \vec{M}$ және \vec{A} векторларының бағытындағы бірлік векторлар.

Осы жалпы жазбада сыртқы гравитациялық өрістегі сынақ дене m қозғалысының теңдеулері үшін белгісіз бұрыштық жылдамдық $\vec{\Omega}$ қалып отыр. Оның нақты түрі қарастырылып отырған физикалық жүйеге байланысты болуы тиіс. Шынында да, жұмыста [3, с.132] біз көрсеттік, бұл

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{M}}, \quad (5.117)$$

мұнда \vec{H} – кеплерлік қозғалыс бойынша орташа алынған гамильтониан мәні. Мұнда \vec{H} – жүйенің адиабатикалық инвариантына және \vec{M} функциясына тәуелді.

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha^2}}}, \alpha = \gamma m m_0. \quad (5.118)$$

Бұрыштық жылдамдықтың $\vec{\Omega}$ мәнін білу, қозғалыс теңдеулерін (5.115) және (5.116) шешпей-ақ, көптеген белгілі релятивистік эффектiлердi есептеуге мүмкіндік береді. Инвариант (5.118) қозғалыс теңдеулеріне (5.115) және (5.116) келесі түр беруге мүмкіндік береді:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt} \vec{e}_M + [\vec{\Omega} \vec{M}], \quad (5.119)$$

$$\frac{d\vec{e}_A}{dt} = [\vec{\Omega} \vec{e}_A]. \quad (5.120)$$

(5.119), (5.120) және (5.117) қатынасы ЖСТ механикасындағы қозғалыс мәселелерін зерттеу тәсілінің математикалық негізін құрайды, біз оны ЖСТ механикасындағы қозғалыс теориясының адиабатикалық теориясы деп атадық. Басқаша айтқанда, бұл теңдеулер (5.117) қатынасымен бірге квазикеплерлік мәселе бойынша эволюциялық қозғалысты толық шешеді.

Мысалы, Шварцшильд мәселесіне қатысты адиабатикалық теория тұрғысынан қарағанда, қарапайым қозғалыс теңдеулері бар:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega} \vec{A}], \quad (5.121)$$

мұндағы гамильтонианның орташа мәні

$$\bar{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0^2} - \frac{m}{m_0} \xi_0 \right) \frac{\alpha^2}{M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 Mc^2} \quad (5.122)$$

Еске саламыз, бастапқы гамильтониан (5.43) болып табылады. Бұрыштық жылдамдық

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \vec{M}} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2} \vec{M} = \frac{6\pi\alpha^2}{M^2 T c^2} \vec{e}_M \quad (5.123)$$

және перигелийдің кезеңі T бойынша ығысуы

$$\Delta g = \Omega T = \frac{6\pi\alpha^2}{M^2 c^2} = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2}. \quad (5.124)$$

Біз қайтадан Эйнштейннің белгілі формуласын алдық. Бар болғаны, \vec{M} векторлық элемент бойынша туындыны элементарлық \bar{H} түрде алу қажет болды. Бұдан Шварцшильд тапсырмасында перигелийдің айналуының әсері гамильтонианның орбиталық моменттен \vec{M} тәуелділігінің пайда болуымен байланысты екені анық. Классикалық механикада, яғни Кеплер тапсырмасында, мұндай тәуелділік жоқ және перигелий қозғалыссыз қалады. Кеплер тапсырмасында гамильтониан тек жүйенің инвариантынан M_0 тәуелді және егер туындысын құрастырсақ,

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial M_0} = \frac{m\alpha^2}{M_0^3} = \frac{2\pi}{T}, \quad (5.125)$$

Яғни орташа қозғалыс деп аталады.

5.6 Лензе-Тирринг есебі және қозғалыстың адиабаталық теориясы

Енді Лензе-Тиррингтің айналмалы массивті шардың өрісіндегі сынақ денесінің шектелген қозғалысы туралы тапсырманы бірінші жуықтау метрикасына (1.73) [50] негізделе отырып қарастырамыз. Бұл жағдайда гамильтониан мына түрге енеді:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU - \frac{1}{c^2} \left(\frac{p^4}{8m^3} + \frac{3Up^2}{2m} + \frac{\xi_0}{m_0} mU - \frac{mU^2}{2} \right) -$$

$$-\frac{2\gamma}{c^2} \left(\left[\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right] \vec{p} \right) - \frac{2\gamma m}{7m_0 c^2} \left(\left[\vec{S}_0 \vec{\nabla} \right] \left[\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right] \right), \quad (5.126)$$

ал қозғалыс теңдеулері мынадай:

$$\dot{\vec{M}} = \frac{2\gamma}{r^3 c^2} [\vec{S}_0 \vec{M}] - \frac{12\gamma m (\vec{S}_0 \vec{r})}{7m_0 r^5 c^2} [\vec{r} \vec{S}_0], \quad (5.127)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}} = & \left(4E + 6mU + \frac{m}{m_0} \xi_0 \right) \frac{[\vec{\nabla} U \vec{M}]}{mc^2} + \frac{2\gamma}{r^3 c^2} [\vec{S}_0 \vec{A}] + \frac{6\gamma (\vec{S}_0 \vec{M})}{mr^5 c^2} [\vec{r} \vec{M}] - \\ & - \frac{6\gamma}{7m_0 r^5 c^2} \left\{ S_0^2 [\vec{r} \vec{M}] - \frac{5}{r^2} (\vec{S}_0 \vec{r})^2 [\vec{r} \vec{M}] - 2(\vec{S}_0 \vec{r}) [\vec{S}_0 \vec{M}] + 2(\vec{S}_0 \vec{r}) [\vec{p} [\vec{r} \vec{S}_0]] \right\}. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Бұл теңдеулерден (1.62) ішкі құрылымға тәуелді интегралды ескерудің Ленц-Тирринг мәселесінің қозғалыс теңдеулерін едәуір өзгертетінін көреміз, бұл теңдеулер бұрынғы жұмыстарда келтірілген (6, б.231). ЖСТ механикасындағы денелердің қозғалысының адиабатикалық теориясына негізделе отырып, алдымен табамыз:

$$\vec{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{1}{c^2} \left\{ \left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0^2} - \frac{m}{m_0} \xi_0 \right) \frac{\alpha^2}{M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 M} + \right.$$

$$+ \frac{m^2 \alpha^4}{m_0 M_0^3 M^3} \left[2(\vec{S}_0 \vec{M}) + \frac{m S_0^2}{7 m_0} - \frac{3m}{7 m_0 M^2} (\vec{S}_0 \vec{M})(\vec{S}_0 \vec{M}) \right] \left. \vphantom{\frac{m^2 \alpha^4}{m_0 M_0^3 M^3}} \right\}. \quad (5.129)$$

Векторлық элементтердегі қозғалыс теңдеулері:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{\Omega} \vec{M}], \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega} \vec{A}], \quad \vec{\Omega} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \vec{M}}, \quad (5.130)$$

мұндағы

$$\vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2} \vec{M} + \frac{m^2 \alpha^4}{m_0 M^3 M_0^3 c^2} \left\{ 2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0 M^2} \vec{S}_0 + \frac{6m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0 M^4} \vec{M} \right\} -$$

$$- \frac{3m^2 \alpha^4 \vec{M}}{m_0 M^5 M_0^3 c^2} \left\{ 2(\vec{M}\vec{S}_0) + \frac{m}{7m_0} S_0^2 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0 M^2} \right\}.$$

(5.131) өрнегі Ленц-Тирринг мәселесі бойынша бұрынғы зерттеулердің нәтижелерін елеулі түрде толықтырады. Осылайша, алғашқы жуықтау механикасы ЖСТ-ның метрикасында ішкі құрылымға байланысты интегралды ескеру қажет болып көрінеді.

Жалпы жағдайда ЖСТ механикасының квазикеплерлік мәселелері үшін орташа гамильтониан бар.

$$\bar{H} = \bar{H}(M_0, \vec{M}, \delta\vec{\phi}), \quad (5.132)$$

және автономды каноникалық теңдеулер орын алады [46, б. 143; 49, б. 119].

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{\Phi}}, \quad \frac{d\vec{\Phi}}{dt} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{M}}, \quad (5.133)$$

мұнда $\delta\vec{\Phi}$ –шексіз кіші бұрылыс векторы.

5.7 Оптико-механикалық аналогияны жалпы салыстырмалылық теориясындағы (ЖСТ) зерттеу себептері мен әдістерін талқылау

Бұл бөлімнің материалынан ЖСТ-ның релятивистік эффектілерінің – перигелийдің ығысуы (формула (5.62)) және Ленц-Тирринг прецессиясының (формула (5.102)) себебі орбита жазықтығының айналуы екендігі шығады.

Шынында да, егер қозғалыс теңдеулерін \vec{A} вектор үшін толығырақ жазсақ, Шварцшильд мәселесінде:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}_\Delta \vec{A} \right], \quad \vec{W}_D = \frac{\gamma p g m_0}{T P c^2} \vec{e}_M, \quad (5.134)$$

ал Ленц-Тирринг мәселесінде

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}_\Delta \vec{A} \right],$$

$$\vec{\Omega}_\Delta = \frac{\gamma}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} \vec{M} + 2(\vec{S}_0 - 3(\vec{S}_0 \vec{e}_M) \vec{e}_M) \right] \quad (5.135)$$

Енді, геометриялық оптикамен және заттық бөлшектің инфинитті қозғалысымен байланысты оптико-механикалық эффектілерге қатысты, яғни, қисықтық пен бұралу эффектілері де орбита жазықтығының айналуымен байланысты. Бұл эффектілер инфинитті қозғалыс сипатына байланысты тек екі

есе кіші. Волналық оптика мен ЖСТ-дағы дене механикасы арасындағы оптико-механикалық аналогия да \vec{e}_v жылдамдықтың бірлік векторы айналасында өзінің айналуымен байланысты екенін 4-бөлікте айтқан болатынбыз.

Осылайша, ЖСТ-дағы оптико-механикалық аналогияға қатысты қызықты ғылыми сұрақтың жалпы себебі орбита жазықтығының айналуы немесе сынақ денесінің (жазық электромагниттік толқын үшін поляризация жазықтығы) жылдамдық \vec{V} бағытына перпендикуляр жазықтықтың айналуы болып табылады. Сондықтан да, бұл эффектілер жалпы формуламен сипатталады.

ЖСТ-дағы оптико-механикалық аналогияны зерттеу әдістеріне қатысты, алғашқы аналогия – жарық сәулесінің қисықтығы мен Шварцшильдтің орталық өрісіндегі заттық бөлшектің траекториясының қисықтығы Ландау-Лифшицпен [6, б. 86] Гамильтон-Якоби теңдеуін шешу арқылы өте әдемі орындалған. Екінші аналогия – жарық сәулесінің бұралуы мен заттық бөлшектің траекториясының бұралуы [3, б. 94] жұмысында орындалды. Бұл да Гамильтон-Якоби теңдеуінің жалпы коварианттық интеграциясы арқылы жүзеге асырылды. Алайда, жарық сәулесінің гравитациялық өрісте айналмалы орталық дене арқылы таралу кезіндегі өзі бұралуы Скроцкиммен [20, б. 132] Максвелл теңдеулерін жазық электромагниттік толқын үшін Рытовтың [2, б. 153] әзірлеген әдісі арқылы шешу арқылы ашылғанын атап өткен жөн. Бұл екі аналогия тек геометриялық оптика мен заттық нүкте механикасына қатысты.

ЖСТ-дағы үшінші оптико-механикалық аналогия, яғни жазық электромагниттік толқынның поляризация жазықтығының айналуы (толқындық оптика) [20, б. 138] және сынақ денесінің қозғалыс траекториясына жанасатын, жылдамдық \vec{e} бағытына перпендикуляр жазықтықтың айналуы арасындағы аналогия [3, б. 76] орнатылған. Бұл аналогияны орнатуға Гамильтон әдісі (Гамильтон формализмі) ерекше рөл атқарды. Мұнда сынақ денесінің жылдамдығы \vec{V} каноникалық байланысқан айнымалылар \vec{r} және \vec{p} функциясы екендігі

түсінікті болды, яғни $\vec{V}(\vec{r}, \vec{p})$. Осы себепті ЖСТ механикасында гидродинамикалық аналогия жұмыс істейді, яғни Эйлердің белгілі формуласы [28, б. 126; 33, б. 158; 39, б. 147].

Ұсынылып отырған монографиялық жұмыста ЖСТ механикасында тағы бір – төртінші – оптико-механикалық аналогия орнатылды. Мұнда ЖСТ-дағы дене механикасының қозғалыс теңдеулері (Ленц-Тирринг мәселесі мысалында) Максвелл теңдеулерінің алғашқы жұбымен аналогиялы екендігі көрсетілді. Бұл аналогияны орнатуда Гамильтон әдісі тағы да ерекше рөл атқарды. Сынақ денесінің негізгі үдеуі каноникалық айнымалылар \vec{r} және \vec{p} функциясы болып табылады.

ҚОРЫТЫНДЫ

Орындаған монографиялық жұмыста біздің басты мақсатымыз – ЖСТ механикасында жаңа оптико-механикалық аналогияларды іздеу болды. Мұндай мақсат ЖСТ-дағы оптико-механикалық аналогия туралы монографияда [3, б. 126] баяндалған идеялар мен ғылыми нәтижелерді жалғастыру тілегінен туындады. Осыған байланысты монографиялық жұмыста толқындық оптика мен ЖСТ-дағы дене механикасы арасында тағы бір оптико-механикалық аналогия табу міндеті қойылды. Жүргізілген зерттеу нәтижесінде оптико-механикалық аналогия мәселесінде шын мәнінде тағы бір – түпкілікті жаңа аналогия – толқындық оптика мен ЖСТ-дағы дене механикасы арасында анықталды. ЖСТ-дағы дене механикасының қозғалыс теңдеулері (Ленц-Тирринг мәселесі мысалында) Максвелл теңдеулерінің алғашқы жұбымен аналогиялы екендігі көрсетілді.

Шынында да, (4.38)-(4.41) формулаларына сәйкес ОТО-дағы дене механикасының теңдеулері

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = 0$$

толқындық оптикадағы теңдеулерге (электродинамикадағы Максвелл теңдеулерінің бірінші жұбына) аналогиялы

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{cases}$$

Бұл аналогиядан ЖСТ механикасы үшін де, ЖСТ-ның өзі үшін де кейбір басқа маңызды қорытындыларды шығаруға болады.

1. Айналымы қозғалыс теңдеулері ЖСТ-дағы денелердің түзу қозғалыс теңдеуінен туындайды. ЖСТ механикасындағы сынақ денесінің айналымы қозғалыс теңдеуін өріс теңдеуінен міндетті түрде шығару қажет емес, тек сынақ денесінің түзу қозғалыс теңдеуін білу және \vec{V} роторды алу жеткілікті. Бұл ретте, жылдамдық \vec{V} және үдеу $\dot{\vec{v}}$ каноникалық байланысқан айнымалылар \vec{r} және \vec{p} функциялары екендігі түсінікті түрде есептеледі.

2. ЖСТ-ның өзі үшін ерекше интерпретация туындайды; бұл - үдеудің және вихрьдің біртұтас өріс теориясы. Бұл Эйнштейннің эквиваленттілік принципінің рухында.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ДЕРЕККӨЗДЕР ТІЗІМІ

1. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. – М., 1955.– 159 с.
2. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М., 1961. – 563 с.
3. Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. – Алма-Ата: Наука, 1988. – 198 с.
4. Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. – Алматы, 2006. –152 с.
5. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М., 1972. – 382 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М., 1973. – 400 с.
7. Абдильдин М.М. К проблеме однозначности Лагранжиана задачи двух вращающихся тел в ОТО// Вестник КазНУ им. аль-Фараби серия физическая. –2008. – № 2(26). – С. 5-8.
8. Абишев М.Е. К функции Лагранжа задачи двух вращающихся тел в ОТО// Известия НАН РК серия физ.-мат. – 2008. – №2.
9. Абдильдин М.М., Таукенова А.С. К обсуждению уточненной метрики первого приближения вращающегося шара в механике ОТО// Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия физическая. – 2011. – № 1(36). – С.83-85.
10. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии// Об основаниях геометрии. – Гостехиздат, 1956. – С. 325-341.
11. Ливанова А. Три судьбы постижения мира. – М.: Знание, 1969. – 207 с.
12. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. –М.: Наука, 1966.– Т. 2. –758 с.
13. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М.: Наука, 1969.
14. Богородский А.Ф. Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. – Киев, 1962. – 193 с.
15. Abdildin M.M. On interpretation of the Einstein equations in General Relativity// Gravitation and Cosmology. – 1999. – Vol. 5, № 3 (19). – P. 219-221.
16. Wilson H.A. Prog. Roy. Soc. A, - 1923. – Vol. 104.

17. Blackett P.M. Uspekhi Fiz. Nauk. – 1948. – Vol. 38, № 1.
18. Einstein A. Collected Research Papers. – Moscow: Nauka. – 1966. – Vol. 2. (translated into Russian).
19. Абдильдин М.М. Движение в поле тяжести вращающегося массивного тела и уравнение Гамильтона-Якоби// Вестник ЛГУ сер.физ.-хим. – 1964. –№22, вып. 1. – С. 155-157.
20. Скроцкий Г.В. О влиянии силы тяжести на распространение света// Доклады АН. СССР. – 1957. – Т. 114. – С. 73-76.
21. Рытов С.М. О переходе от волновой к геометрической оптике// Доклад АН. СССР. – 1938. – Т. 18. – С. 263-266.
22. Рытов С.М. Модулированные колебания и волны// Тр. ФИАН. – 1940. Т.2, вып. 1. – С. 41-133.
23. Бухгольц Н.Н. Основы курс теоретической механики. – М., 1969. – Ч.2. – 332 с.
24. Ольховский Н.И. Курс теоретической механики для физиков. – М., 1974. – 569 с.
25. Абдильдин М.М., Бришева Ж.Н., ТауKENOVA А.С. Закон преобразования гравимагнитного поля в гармонических системах координат// Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия физическая. – 2008. – №3. – С. 206-208.
26. Бришева Ж.Н., ТауKENOVA А.С. К динамике коллапса нейтронной звезды// Сборник тезисов III Международного конгресса студентов и молодых ученых «Мир науки», посвященный 75-летию КазНУ им. аль-Фараби.– Алматы, 2009. – С.15.
27. ТауKENOVA А.С., Анар Оптика-механикалық аналогия// Сборник тезисов III Международного конгресса студентов и молодых ученых «Мир науки», посвященный 75-летию КазНУ им. аль-Фараби. – Алматы, 2009. – С.7.
28. Абдильдин М.М., Бейсен Н.А., Бошкаев К.А., ТауKENOVA А.С. Скорость как функция состояния в механике ОТО// Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия физическая. – 2009. – №1(28). – С. 107-110.
29. Абдильдин М.М., Бейсен Н.А., ТауKENOVA А.С. Метод подобия – еще один способ получения метрики Эйнштейна и Фридмана в космологии// Вестник КазНУ им.аль-Фараби, серия физическая. – 2010. – №2(33). – С. 52-54.

30. Абдильдин М.М., Абишев М.Е., Тауменова А.С. Стрoение планетной системы – как задача на максимум и минимум// Вестник КазНУ им.аль-Фараби, серия физическая. – 2010. – №2(33). – С. 55-58.
31. Абдильдин М.М., Бейсен Н.А., Тауменова А.С. О новой оптико-механической аналогии в механике ОТО// Сб. трудов 6-ая межд. научная конференция «Современные достижения физики и фундаментальное физическое образование» посвященная 75-летию КазНУ им.аль-Фараби. –Алматы, 2009, – С. 6.
32. Абдильдин М.М., Абишев М.Е., Бейсен Н.А., Тауменова А.С. Исследование оптико-механической аналогии в ОТО// Известия НАН РК, серия физ.-мат. – 2010. – № 2 (270). – С. 5–9.
33. Абдильдин М.М., Абишев М.Е., Бейсен Н.А., Тауменова А.С. Разъяснения по поводу метода гидродинамической аналогии в механике ОТО// Известия НАН РК, серия физ.-мат. – 2010. – № 2 (270). – С. 3–5.
34. Abishev M.E., Akhmetov Y., Taukenova A.C. Gravity Probe B experiment and equations of rotation motion unambiguity problem in GR mechanics // 12-я межд. Гроссмановская конференция по ОТО и гравитации, Париж, 12-18 июль, 2009г., <http://www.icra.it/MG12/abstracts>
35. Abdildin M.M., Abishev M.E., Beissen N.A., Taukenova A.C. On optical-mechanical analogy in General Relativity (GR)// Gravitation and Cosmology. – 2011. Vol. 17, № 2. – P. 143-146.
36. Абдильдин М.М., Абишев М.Е., Бейсен Н.А., Тауменова А.С. Закон преобразования гравимагнитного поля при переходе с одной гармонической системы координат в другую// Межд. конференция по современным проблем гравитации, космологии и релятивистской астрофизики. Тез. докладов. – М.: РУДН-10, 2010, – С. 24.
37. Абдильдин М.М., Абишев М.Е., Бейсен Н.А., Тауменова А.С. Эксперимент Gravity Probe B и однозначность уравнений вращательного движения в ОТО// Межд. конференция по современным проблем гравитации, космологии и релятивистской астрофизики. Тез. докладов. – М.: РУДН-10, 2010. – С. 136.

38. Абдильдин М.М., Бейсен Н.А., Таукенова А.С. Стрoение планетной системы – как задача на максимум и минимум// Третьи Фесенковские чтения, Современная астрофизика: традиции и перспективы: межд. конф., посвященная 60-летию Астрофизического ин-та им. В.Г. Фесенкова. – Алматы 2010. – С. 63-65.
39. Abdildin M.M., Beissen N.A., Taukenova A.C. Velocity as a function of state in general-relativistic mechanics// Gravitation and Cosmology. – 2011. Vol. 17, № 2. – P. 141-142.
40. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М., 1973. – 207 с.
41. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М., 1968. – 799 с.
42. Бергман П. Введение в теорию относительности. – М., 1947. – 380 с.
43. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1962. – 1094 с.
44. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М., 1974. – 569 с.
45. Иваницкая О.С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения. – Минск, 1979. – 334 с.
46. Абдильдин М.М., Баимбетов Ф.Б., Жусупов М.А., Кожамкулов Т.А., Рамазанов Т.С., Омаров М.С. Исследование проблем фундаментальных взаимодействий в теоретической физике. – Алматы, 1997. – 141с.
47. Абдильдин М.М. Адиабатическая теория движения тел в ОТО// Движение тел в релятивистской теории гравитации; Тезисы докл. второго всесоюзного симпозиума. – Вильнюс-Каунас, 1986. – С. 6-7.
48. Абдильдин М.М., Омаров М.С. Адиабатическая теория движения тел в ОТО// Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации: Материалы VII Всесоюзного конф. – Ереван, 1988, – С. 3-4.
49. Abdildin M.M. Adiabatic theory of body motion in GR Mechanics // 15 th International Conference, Pune (India). – Pune, 1997. – P.70-71.

50. Абдильдин М.М., Омаров М.С. Анализ корректной метрики первого приближения в методе Фока в ОТО// Проблемы физики звезд и внегалактической астрономии. – Алматы, 1993. –С. 170-178.

БЕЛГІЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

Айнымалы қозғалыс теңдеулеріндегі жеке мүшелер келесі топтардың біріне жатады:

$g^{\mu\nu}$	метрлік тензор
$R^{\mu\nu}$	Риччи тензоры
$T^{\mu\nu}$	массалық тензор
ds	интервал
U_i	потенциал векторы
m_0	шардың массасы
\vec{S}_0	Арнайы сәт
U	Ньютон потенциалы
r_g	гравитациялық радиус
m	сынақ денесінің массасы
\vec{M}	орбиталық сәт
$\vec{\omega}$	бұрыштық жылдамдық
\vec{A}	Лаплас векторы
S	эсер(әрекет)
\vec{E}	электр өрісінің кернеулігі
\vec{H}	магнит өрісінің кернеулігі
\vec{e}	жанасу траекториясының бірлік векторы
T	қозғалыс периоды
$\vec{\Omega}_A$	вектордың бұрыштық жылдамдығы \vec{A}

Мазмұны

КІРІСПЕ	3
1 ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТЕОРИЯСЫНДА ДЕНЕЛЕР МЕХАНИКАСЫНЫҢ БІРІНШІ ЖУЫҚТАУ МЕТРИКАСЫ	13
1.1 Фоктың бірінші жуықтау метрикасы.....	13
1.2 Айналатын сұйық шардың метрикасы.....	29
1.3 ЖСТ механикасындағы айналатын шардың метрикасы бойынша талқылауды жалғастыру.....	36
2 БІРІНШІ ЖУЫҚТАУ МЕТРИКАСЫНЫҢ БІРМӘНДІЛІГІ	41
2.1 ЖСТ механикасындағы нақтыланған бірінші жуықтау метрикасы және координат жүйесін таңдау.....	41
2.2 Орталық дененің нақтыланған бірінші жуықтау метрикасы және оның жинақтылығы.....	45
2.3 ЖСТ механикасындағы бірінші жуықтау метрикасын дұрыс қорытып шығару туралы.әдістеме.....	49
3 ЖСТ МЕХАНИКАСЫ БОЙЫНША КЕЙБІР ЗЕРТТЕУЛЕР	58
3.1 Жылдамдық ЖСТ механикасындағы күй функциясы ретінде.....	58
3.2 ЖСТ механикасындағы гидродинамикалық аналогия әдісі бойынша түсіндірмелер.....	63
3.3 Планетарлық жүйені құрылымы: максимум мен минимум мәселесі ретінде қарастыру.....	68
3.4 Ұқсастық әдісі – Эйнштейн және Фридман метрикасын космологияда алудың тағы бір әдісі	75
3.5 Гравитациялық өрісті гармоникалық координат жүйесінде түрлендіру заңы.....	78
4 ЖСТ-ДАҒЫ ОПТИКА-МЕХАНИКАЛЫҚ АНАЛОГИЯНЫ ЗЕРТТЕУ	83
5 ЖСТ МЕХАНИКАСЫНДАҒЫ ОПТИКА-МЕХАНИКАЛЫҚ АНАЛОГИЯНЫ ЗЕРТТЕУ ӘДІСТЕРІ МЕН ЖАЛПЫ СЕБЕПТЕРІН ТАЛҚЫЛАУ	97
5.1 Ньютон механикасындағы векторлық элементтер	97
5.2 Квазикеплер есебі.....	99

5.3	Шварцшильд есебі.....	106
5.4	Лензе-Тирринг мәселесі және релятивистік эффектiлердiң суперпозиция принципі.....	112
5.5	ЖСТ механикасындағы денелер қозғалысының адиабаттық теориясы.....	123
5.6	Лензе-Тирринг есебі және қозғалыстың адиабаттық теориясы	126
5.7	Оптико-механикалық аналогияны жалпы салыстырмалылық теориясында (ЖСТ) зерттеу себептері мен әдістерін талқылау.....	129
	ҚОРЫТЫНДЫ.....	132
	ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ДЕРЕККӨЗДЕР ТІЗІМІ	134
	БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР.....	139

Ғылыми басылым

Алия Сембековна Таукенова

**ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТЕОРИЯ
НЕГІЗІНДЕ ОПТИКАЛЫҚ -МЕХАНИКАЛЫҚ
АНАЛОГИЯНЫ ЗЕРТТЕУ**

Монография

Авторлық редакциямен дайындалды

ИБ15587

Басуға 17.11.2024 ж. қол қойылды. Пішімі 60x84/16.
Көлемі 8,9 б.т. Таралымы 500 дана. Тапсырыс № 12671.

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің
«Қазақ университеті» баспаханасында басылды